NUEVA ENCICLOPEDIA MATEMÁTICA.—T. VIII

Tratado de Análisis Matemático

TOMO CUARTO

CALCULO INTEGRAL

POR EL

Dr. Zoel G. de Galdeano

Catedrático de Cálculo infinitesimal
en la Universidad de Zaragoza, corresponsal de las RR. Academias de Ciencias
de Madrid y de Lisboa y miembro de otras asociaciones matemáticas.

ZARAGOZA
TIPOGRAFÍA DE E. CASAÑAL, COSO, 100
1905

LIBRO PRIMERO

INTEGRALES INDEFINIDAS Y DEFINIDAS

CAPÍTULO I

Diversos métodos de integración

§ 1.° MÉTODOS GENERALES DE INTEGRACIÓN

1. DEFINICIONES. Ya se sabe que si $\varphi(x)$ es una función cuya diferencial es $f(x)dx$, la integral general, es decir, la función que comprende todas aquéllas cuya diferencial es la dada, se expresa por $\varphi(x) + C$, siendo C una constante arbitraria.

También se expuso la noción de integral definida (*Principios generales de la teoría de las Funciones*, pág. 37), que se expresa por la fórmula

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \varphi(X) - \varphi(x_0),$$

expresando $f(x)$ la derivada de $\varphi(x)$. Sin detenernos en estos conceptos, vamos á insistir brevemente en los métodos generales de integración cuyos principios se expusieron en el tomo segundo de esta obra.

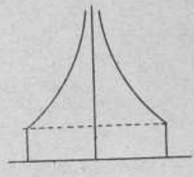
Respecto á las integrales definidas, citaremos el caso siguiente, para el que la regla general no es válida. Tenemos según ésta que

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)_1 - \left(-\frac{1}{x}\right)_{-1} = -2.$$

Sin embargo, el elemento $\frac{dx}{x^2}$ es siempre positivo, y la curva cuya ecuación es $y = \frac{1}{x^2}$ está representada en la figura adjunta.

Considerando las dos integrales

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2}, \quad \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^2},$$



en las que ε expresa un número positivo muy pequeño, la aplicación de la fórmula general no ofrece dificultad, y se tiene

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\varepsilon} - 1, \quad \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\varepsilon} - 1,$$

y estas dos integrales aumentan sin límite cuando ε tiende hacia cero. El área es infinita.

Tambien tenemos la fórmula siguiente, que se verifica por diferenciación

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x};$$

y aplicando la regla general, se tendrá el resultado absurdo

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2}\, l(-1) = \frac{\pi}{2} \sqrt{-1}.$$

Esto obedece á que la regla general no es aplicable á los casos propuestos; y el modo de tratarlos se estudió en el tomo II.

2. Integración por sustitución. Dada una diferencial $f(x)dx$, si hacemos $x = \varphi(z)$, siendo z una nueva variable, tendremos

$$dx = \varphi'(z)dz, \quad f(x)dx = f[\varphi(z)]\varphi'(z)dz,$$

Y si se puede integrar esta diferencial se obtendrá la integral de la diferencial propuesta $f(x)dx$.

Ejemplo. Haciendo $1 + \log x = z$, se tiene

$$\int \frac{dx}{x} \sqrt{1 + \log x} = \int dz \sqrt{z} = \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (1 + \log x)^{\frac{3}{2}}.$$

3. INTEGRACIÓN POR PARTES. Ya se vió, (t. II), que puede procederse como sigue. Tendremos, por ejemplo, que

$$\int x dx \text{ arc sen } x = \frac{x^2}{2} \text{ arc sen } x - \int \frac{x^2 dx}{2\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \frac{x^2}{2} \text{ arc sen } x + \frac{1}{4} \text{ arc cos } x - \frac{x}{4} \sqrt{1 - x^2}.$$

4. SUMAS REDUCIBLES Á INTEGRALES. La fórmula

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \varphi(a) dx + \varphi(a + dx) dx + \ldots + \varphi(a + n dx) dx$$

permite representar por integrales definidas ciertas sumas.

Ejemplo 1.º Calcular el límite de la suma

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2n},$$

cuando n aumenta indefinidamente. Hagamos $n = \frac{a}{dx}$, y la suma se reducirá á

$$\frac{dx}{a} + \frac{dx}{a + dx} + \frac{dx}{a + 2dx} + \ldots\ldots + \frac{dx}{2a},$$

cuyo límite es

$$\int_a^{2a} \frac{dx}{x} = \log 2a - \log a = \log 2.$$

2.º Sea la suma

$$\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \ldots\ldots + \frac{n}{2n^2}.$$

Haciendo $n = \frac{1}{dx}$, será

$$\lim \left[\frac{dx}{1 + dx^2} + \frac{dx}{1 + (2dx)^2} + \ldots + \frac{dx}{1 + (ndx)^2} \right]$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \text{arc tg } 1 - \text{arc tg } 0 = \frac{\pi}{4}.$$

5. Ejemplos. Ya conocemos el método de integración por partes. Ahora vamos á aplicarlo á algunas integraciones.

1.º Sea $$\int \frac{x^2 dx}{(x \operatorname{sen} x + \cos x)^2}.$$

Apliquemos el método á la integral

$$\int \frac{x}{\cos x} \frac{x \cos x \, dx}{(x \operatorname{sen} x + \cos x)^2}.$$

Haremos $u = \frac{x}{\cos x}$. $v = -\frac{1}{x \operatorname{sen} x + \cos x}$

y tendremos

$$\int \frac{x}{\cos x} \frac{x \cos x \, dx}{(x \operatorname{sen} x + \cos x)^2} = -\frac{x}{\cos x} \frac{1}{x \operatorname{sen} x + \cos x}$$

$$+ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\frac{x}{\cos x} \frac{1}{x \operatorname{sen} x + \cos x} + \operatorname{tg} x$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x \operatorname{sen} x + \cos x}.$$

Análogamente

$$\int \frac{x^2 dx}{(\operatorname{sen} x - x \cos x)^2} = -\frac{x \operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - x \cos x}.$$

2.° Sea $I_m = \text{sen}^m x\, dx$. Escribiremos

$$I_m = \int \text{sen}^{m-1} x \,.\, \text{sen}\, x dx.$$

É integrando por partes,

$$I_m = -\,\text{sen}^{m-1} x \cos x + (m-1)\int \text{sen}^{m-2} x \cos^2 x dx. \quad (1)$$

Por ser $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$, tendremos

$$\int \text{sen}^{m-2} x(1 - \text{sen}^2 x) dx = \int \text{sen}^{m-2} x dx$$

$$-\int \text{sen}^m x dx = I_{m-2} - I_m.$$

La fórmula (1) se reduce á

$$mI_m = -\,\text{sen}^{m-1} x \cos x + (m-1) I_{m-2},$$

que es una fórmula de reducción, siendo

$$I_1 = \int \text{sen}\, x dx = -\cos x, \qquad I_0 = \int dx = x.$$

3.° Sea $\qquad I_m = \int \dfrac{dx}{(x^2 + a^2)^m}.$

Se tendrá

$$I_m = \frac{1}{a^2} I_{m-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2 dx}{(a^2 + x^2)^m}$$

Para $m = 2$, $a = 1$, $\displaystyle\int \frac{dx}{(1 + x^2)^2} = \frac{x}{2(1 + x^2)} + \frac{1}{2} \text{arc tg}\, x.$

§ 2.° Aplicaciones

1 . $y = \displaystyle\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ $\qquad$ solución $\qquad y = \text{arc tg}\, e^x.$

2 . $y = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ solución $y = \sqrt{x^2 + a^2}$.

3 . $y = \int \frac{\text{arc tg}^2 x}{1 + x^2} dx$ » $y = \frac{1}{3} \text{arc tg}^3 x$.

4 . $y = \int \frac{1}{1 + bx} dx$ » $y = \frac{1}{b} l(a + bx)$.

5 . $y = \int \sqrt{a + bx}\, dx$ » $y = \frac{2}{3b} \sqrt{(a + bx)^3}$.

6 . $y = \int e^{mx} dx$ » $y = \frac{e^{mx}}{m}$.

7 . $y = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}$ » $y = \frac{1}{a} \text{arc sen} \frac{bx}{a}$.

8 . $\int \text{sen}^2 x dx$ » $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \text{sen}\, x \cos x$.

9 . $\int x^3 lx dx$ » $y = \frac{x^4}{4} \left(lx - \frac{1}{4} \right)$.

10 . $\int x^2 \cos x dx$ » $y = (x^2 - 2) \text{sen}\, x + 2x \cos x$.

11 . $\int e^x \text{sen}\, x dx$ » $y = \frac{e^x}{2} (\text{sen}\, x - \cos x)$.

12 . $\int \frac{x^3}{(a + bx^2)^3} dx$ » $y = -\frac{a + 2bx^2}{4b^2 (a + bx^2)^2}$.

13 . $\int \frac{x e^x dx}{(1 + x)^2}$ » $y = \frac{-xe^x}{1 + x} + e^x$.

CAPÍTULO II

Integración de las fracciones racionales

§ 1.° Teoría

6. Integración de las fracciones. Ya se vió (Calc. dif. p. 200-207) que ocurren cuatro casos en la descomposición de las expresiones fraccionarias racionales en fracciones simples. Ahora solo falta obtener la integral en cada uno de dichos casos.

1.° y 2.° Para los casos de ser reales y desiguales ó reales é iguales las raíces del denominador de la fracción que se descompone en fracciones simples, la integración de cada sumando se obtiene por las fórmulas

$$\int \frac{\mathrm{A}dx}{(x-a)} = \mathrm{A}\int \frac{dx}{x-a} = \mathrm{A}\log(x-a)$$

$$\int \frac{\mathrm{A}dx}{(x-a)^m} = \mathrm{A}\int dx(x-a)^{-m} = \frac{\mathrm{A}(x-a)^{1-m}}{1-m}$$

ó

$$\int \frac{\mathrm{A}dx}{(x-a)^m} = -\frac{\mathrm{A}}{(m-1)(x-a)^{m-1}}.$$

3.° Sea la integral

$$\int \frac{\mathrm{A}x+\mathrm{B}}{x^2+px+q}\,dx,$$

en la cual suponemos que las raíces de $x^2+px+q=0$ son imaginarias.

Tendremos que

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2Ax+Ap+2B-Ap}{x^2+px+q}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{A(2x+p)}{x^2+px+q}\,dx + \int \frac{B-\frac{1}{2}Ap}{x^2+px+q}\,dx;$$

La primera integral es de la forma

$$\frac{A}{2}\int \frac{u'}{u}\,dx \quad \text{ó} \quad \frac{A}{2}\int \frac{d}{dx}(\log u)dx = \frac{A}{2}\log u.$$

Respecto á la segunda integral, vemos que

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(-\frac{p^2}{4}+q\right)};$$

y haciendo

$$\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} = t \quad \text{será} \quad \frac{dx}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} = dt;$$

luego

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\,\frac{dt}{1+t^2}.$$

Haciendo las sustituciones y cálculos, se obtiene finalmente

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q} = \frac{A}{2}\log(x^2+px+q)$$

$$+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}.$$

4.° caso. Tenemos, expresando por $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ las raíces del trinomio, que

$$\int \frac{(\mathrm{A}x + \mathrm{B}dx)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} = \int \frac{\mathrm{A}(x-\alpha)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} + \int \frac{(\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B})\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}.$$

Si se hace

$$(x-\alpha)^2+\beta^2 = t \quad \text{de donde} \quad 2(x-\alpha)dx = dt,$$

se tiene, salvo una constante, cuando $n > 1$,

$$\int \frac{\mathrm{A}(x-\alpha)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} = \int \frac{\mathrm{A}dt}{2t^n} = -\frac{\mathrm{A}}{2(n-1)\,[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}},$$

Para obtener la segunda integral, haremos $x - \alpha = \beta z$. de donde $dx = \beta dz$; y resultará

$$\int \frac{(\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B})dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} = \frac{\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B}}{\beta^{2n-1}} \int \frac{dz}{(1+z^2)^n}.$$

Para obtener la última integral, observaremos que se tiene idénticamente

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^n} = \int \frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}} - \int \frac{z^2\,dz}{(1+z^2)^n}. \qquad (1)$$

Pero $$\int \frac{z^2\,dz}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{2}\int z\,\frac{2zdz}{(1+z^2)^n},$$

y $$\frac{2zdz}{(1+z^2)^n} = d\left[-\frac{1}{(n-1)\,(1+z^2)^{n-1}}\right];$$

luego, integrando por partes, se tiene

$$\int \frac{z^2\,dz}{(1+z^2)^n} = -\frac{z}{(2n-2)\,(1+z^2)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2}\int \frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}}.$$

Sustituyendo en (I) y reduciendo, se obtiene

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^n} = \frac{z}{(2n-2)(1+z^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}}.$$

Se ha reducido pues en una unidad el exponente del denominador. Haciendo las reducciones se llegará á la fórmula

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^n} = \frac{z}{(2n-2)(z^2+1)^{n-1}} \times$$

$$\left[1 + \frac{2n-3}{2n-4}(z^2+1) + \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-4)(2n-6)}(z^2+1)^2 + \dots \right.$$
$$\left. + \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 5 \cdot 3}{(2n-4)(2n-6)\dots 4 \cdot 2}(z^2+1)^{n-2} \right]$$

$$+ \frac{(2n-3)(2n-5)\dots\dots 3 \cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\dots\dots 4 \cdot 2} \operatorname{arc\,tg} z + C.$$

También puede obtenerse por un método indirecto la integral de que se trata, pues se tiene que

$$\int \frac{dx}{\beta + x^2} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{\beta}}$$

$$\frac{1}{\beta + x^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{\beta}}\right);$$

y obteniendo n veces la derivada de cada miembro con relación á β, resulta

$$\frac{(-1)^n\, 1 \cdot 2 \dots (n-1)}{(\beta + x^2)^n} = \frac{d}{dx} \frac{d^{n-1}}{d\beta^{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{\beta}}\right);$$

luego

$$\int \frac{dx}{(\beta + x^2)^n} = \frac{(-1)^n}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \frac{d^{n-1}}{d\beta^{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{\beta}}\right).$$

Ejemplo 1.º Sea la integral

$$\int \frac{dx}{(a+bx)^p x},$$

indicando p un número entero. Se obtiene fácilmente

$$\frac{1}{x(a+bx)^p} = \frac{1}{a^p x} - \frac{b}{a^{p+1}}\left[\frac{a^p}{(a+bx)^p} + \ldots + \frac{a}{a+bx}\right];$$

por consiguiente

$$\int \frac{dx}{x(a+bx)^p} = -\frac{1}{a^p}\log\frac{a+bx}{x}$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=p-1} \frac{1}{(p-k)a^k(a+bx)^{p-k}}.$$

Ejemplo 2.º Sea la integral de $\frac{x^{m-1}dx}{1+x^{2n}}$, expresando m y n dos enteros cualesquiera, y siendo $2n > m$. Las raíces de $x^{2n}+1=0$ son de la forma

$$\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} \pm i \operatorname{sen}\frac{(2k-1)\pi}{2n}.$$

Tendremos, por consiguiente,

$$\frac{x^{m-1}}{1+x^{2n}} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{A_k}{x - \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} - i\operatorname{sen}\frac{(2k-1)\pi}{2n}}$$

$$+ \frac{B_k}{x - \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} + i\operatorname{sen}\frac{(2k-1)\pi}{2n}},$$

Los coeficientes se calculan por las fórmulas

$$A_k = \frac{\cos(m-1)\frac{(2k-1)\pi}{2n} + i\,\text{sen}\,(m-1)\frac{(2k-1)\pi}{2n}}{2n\left[\cos\frac{(2n-1)(2k-1)\pi}{2n} + i\,\text{sen}\,\frac{(2n-1)(2k-1)\pi}{2n}\right]}$$

$$= -\frac{1}{2n}\left[\cos\frac{m\pi(2k-1)}{2n} + i\,\text{sen}\,\frac{m\pi(2k-1)}{2n}\right],$$

$$B_i = \frac{\cos(m-1)\frac{(2k-1)\pi}{2n} - i\,\text{sen}\,(m-1)\frac{(2k-1)\pi}{2n}}{2n\left[\cos\frac{(2n-1)(2k-1)\pi}{2n} - i\,\text{sen}\,\frac{(2n-1)(2k-1)\pi}{2n}\right]}$$

$$= -\frac{1}{2n}\left[\cos\frac{m\pi(2k-1)}{2n} - i\,\text{sen}\,\frac{m\pi(2k-1)}{2n}\right];$$

y reuniendo las dos fracciones escritas bajo el signo Σ, el segundo miembro será

$$-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\cos\frac{m\pi(2k-1)}{2n}\left[x - \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right]}{\left[x-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right]^2}$$

$$\frac{-\,\text{sen}\,\frac{(2k-1)\pi}{2n}\,\text{sen}\,\frac{m\pi(2k-1)}{2n}}{+\,\text{sen}^2\,\frac{(2k-1)\pi}{2n}}$$

y por consiguiente

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^{2n}} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{k=n}\cos\frac{m\pi(2k-1)}{2n}\times$$

$$l\left[1 - 2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} + x^2\right]$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n\pi}\operatorname{sen}\frac{m\pi(2k-1)}{2n}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}}{\operatorname{sen}\frac{(2k-1)\pi}{2n}}.$$

Análogamente se obtendrá $\int\frac{x^{m-1}\,dx}{1-x^{2n}}$.

7. Diferenciales binomias. En el caso de ser m, p, n números enteros, la diferencial $x^{m-1}dx(a+bx^n)^p$ entra en el caso de las diferenciales racionales. Expondremos el método de reducción, que es también aplicable cuando p sea fraccionario, en cuyo caso se tendrá que estudiar la integral entre las de las funciones irracionales. Integrando por partes, se tiene

$$\int x^{m-1}\,dx(a+bx^n)^p=\frac{x^{m-n}}{nb(p+1)}(a+bx^n)^{p+1}$$

$$-\frac{m-n}{nb(p+1)}\int x^{m-n-1}(a+bx^n)^{p+1}\,dx. \qquad (1)$$

Sustituyendo en el segundo miembro $(a+bx^n)^{p+1}$ por $(a+bx^n)^p\,a+(a+bx^n)^p\,bx^n$; y haciendo pasar al primer miembro la integral semejante á la que se halla en éste, obtendremos

$$\int x^{m-1}\,dx(a+bx^n)^p=\frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{(m+np)b}$$

$$-\frac{m-n}{m+np}\,\frac{a}{b}\int x^{m-n-1}(a+bx^n)^p\,dx. \qquad (1)$$

Se tiene también evidentemente

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p=a\int x^{m-1}\,dx(a+bx^n)^{p-1}$$

$$+\,b\int x^{m+n-1}\,dx(a+bx^n)^{p-1}, \qquad (2)$$

y aplicando á la segunda integral del segundo miembro la fórmula (1) de reducción, resulta

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p = \frac{x^m(a+bx^n)^p}{m+np}$$

$$+\frac{anp}{m+np}\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1}dx. \tag{3}$$

Las dos fórmulas (1) y (3) resueltas respecto á la integral del segundo miembro dan, por un cambio de letras,

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^m(a+bx^n)^{p+1}}{ma}$$

$$-(m+n+np)\frac{b}{ma}\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^p\,dx, \tag{4}$$

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\,dx = -\frac{x^m(a+bx^n)^{p+1}}{an(p+1)}$$

$$+\frac{m+n(p+1)}{an(p+1)}\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p+1}dx. \tag{5}$$

Si se aplican las fórmulas de reducción (1) y (3) á la integral de los segundos miembros de (4) y (5), se obtiene

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^m}{m}(a+bx^n)^p$$

$$-\frac{bnp}{m}\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}\,dx, \tag{6}$$

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{bn(p+1)}$$

$$-\frac{m-n}{bn(p+1)}\int x^{m-n-1}(a+ba^n)^{p+1}. \tag{7}$$

Las aplicaciones de estas fórmulas son numerosas.

Supongamos $n = 1$, haciendo $a + bx = z$, se tendrá

$$\int \frac{z^p dx}{x^{m+1}} = -\frac{z^{p+1}}{amx^m} + (p - m + 1)\frac{b}{am}\int \frac{z^p\,dx}{x^m}; \qquad (8)$$

y esta fórmula permitirá simplificar el cálculo de muchas integrales. Sea por ejemplo,

$$\int \frac{dx}{x^{m+1}z} = -\frac{1}{amx^m} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{x^m z}.$$

Por ser $\int \frac{dx}{xz} = -\frac{1}{a}\log\frac{z}{x}$, resulta

$$\int \frac{dx}{x^2 z} = \frac{b}{a^2}\log\frac{z}{x} - \frac{1}{ax},$$

$$\int \frac{dx}{x^3 z} = -\frac{b^2}{a^3}\log\frac{z}{x} + \frac{b}{a^2 x} - \frac{1}{2ax^2},$$

$$\int \frac{dx}{x^4 z} = \frac{b^3}{a^4}\log\frac{z}{x} - \frac{b^2}{a^3 x} + \frac{b}{2a^2x^2} - \frac{1}{3ax^3}, \text{ etc.}$$

Si $m + 1$ se reduce á la unidad, la fórmula (8) es ilusoria.

Para reducir la integral $\int \frac{z^p}{x}\,dx$, escribiremos

$$\int \frac{z^p\,dx}{x} = \int \frac{z^{p-1}(a + bx)}{x}\,dx = \frac{z^p}{p} + a\int \frac{z^{p-1}\,dz}{x}, \qquad (10)$$

y por la aplicación repetida de esta fórmula, el exponente p se reduce á la unidad.

Si se cambia p en $-p$, se deduce, resolviendo con relación á la integral que figura en el segundo miembro,

$$\int \frac{dx}{xz^{p+1}} = \frac{1}{apz^p} + \frac{1}{a}\int \frac{dx}{xz^p}.$$

La ecuación (8) da, suponiendo $n = 1$ y cambiando p en $-p$ m en $-m$, la fórmula de reducción más general

$$\int \frac{dx}{x^{m+1} z^p} = \frac{-1}{(m+p)x^m z^p} + \frac{a^p}{m+p} \int \frac{dx}{x^{m+1} z^{p+1}}.$$

de la que se deduce

$$\int \frac{dx}{x^{m+1} z^{p+1}} = \frac{1}{apx^m z^p} + \frac{m+p}{ap} \int \frac{dx}{x^{m+1} z^p}.$$

Si suponemos $n = 2$, haciendo $a + bx^2 = z$, tendremos

$$\int \frac{dx}{z^{p+1}} = \frac{x}{2apz^p} + \frac{2p-1}{2ap} \int \frac{dx}{z^p}.$$

De esta fórmula se deduce

$$\int \frac{dx}{z^2} = \frac{x}{2az} + \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{dx}{z^3} = \frac{x}{4az^2} + \frac{3x}{8a^2 z} + \frac{3}{8a^2} \int \frac{dx}{z}.$$

$$\int \frac{dx}{z^4} = \frac{x}{6az^3} + \frac{5x}{24a^2 z^2} + \frac{5x}{16a^3 z} + \frac{5}{16a^3} \int \frac{dx}{z}.$$

Se tiene también

$$\int \frac{x^{n+1} dx}{z^{p+1}} = -\frac{x^n}{2bpz^p} + \frac{n}{2bp} \int \frac{x^{n-1} dx}{z^p},$$

$$\int \frac{x^{n+1} dx}{z} = \frac{1}{b} \int \frac{x^{n-1}(a+bx^2) dx}{a+bx^2}$$

$$-\frac{a}{b} \int \frac{x^{n-1} dx}{z} = \frac{x^n}{bn} - \frac{a}{b} \int \frac{x^{n-1} dx}{z},$$

de las que se deduce

$$\int \frac{x^2 dx}{z} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{x^4 dx}{z} = \frac{x^3}{3b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{a^2}{b^2}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{x^6 dx}{z} = \frac{x^5}{5b} - \frac{ax^3}{3b^2} + \frac{a^2 x}{b^3} - \frac{a^3}{b^3}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{x^2 dx}{z^2} = -\frac{x}{2bz} + \frac{1}{2b}\int \frac{dx}{z} \text{ etc.}$$

Además

$$\int \frac{dx}{z} = \int \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \text{ arc tg } x\sqrt{\frac{b}{a}},$$

y cuando x^2 es negativo,

$$\int \frac{dx}{a - bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\, l\, \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \sec \mathrm{T}h\,.\, x\sqrt{\frac{b}{a}}:$$

§ 3.° Aplicaciones

1. $\int \frac{x dx}{1 + x^4}$ solución $\frac{1}{2}$ arc tg x^2

2. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ » $\frac{1}{2a}\, l\, \frac{x - a}{x + a}$

3. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$ » $\frac{1}{2ai}\, l\, \frac{x - ai}{x + ai}$

4. $\int \frac{2x - 13}{(x - 5)^2} dx$ » $2l(x - 5) + \frac{3}{x - 5}$

5. $\int \frac{x+6}{x^2-3}\,dx$ solución $\frac{1}{2}\,l(x^2-3)+\sqrt{3}\,l\,\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}$

6. $\int \frac{2x}{(x^2+1)\,(x^2+3)}$ » $\frac{1}{2}\,l\,\frac{x^2+1}{x^2+3}$

7. $\int \frac{x^2-1}{(x+2)^3}\,dx$ » $-\frac{3}{2(x+2)^2}+\frac{4}{x+2}+l(x+2)$

8. $\int \frac{x^3+2x^2-1}{x^2(x-1)}\,dx$ » $x-\frac{1}{x}-lx-2l(x-1)$

9. $$\int \frac{dx}{(x-1)^3\,(x-2)^2\,x}=-\frac{2x-1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{2(x-2)}$$

$$+\,2\,l(x-1)-\frac{1}{4}\,lx-\frac{7}{4}\,l(x-2)$$

10. $$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2\,(x^2-1)}=\frac{1}{8}\,l\,\frac{x-1}{x+1}-\frac{x}{4(x^2+1)}-\frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,x$$

11. $$\int \frac{x^5dx}{(x^3+1)^2}=\frac{1}{3}\,l(x^3+1)+\frac{1}{3(x^3+1)}$$

12. $\int \frac{xdx}{a^4+x^4}$ $\frac{1}{2a^2}\,\text{arc tg}\,\frac{x^2}{a^2}$

13. $$\int \frac{x^3}{a^4+x^4}\,dx=\frac{1}{4}\,l(a^4+x^4)$$

14. $$\int \frac{dx}{a^4-x^4}=\frac{1}{4a^3}\left[l\left(\frac{x+a}{x-a}\right)+2\,\text{arc tg}\,\frac{x}{a}\right]$$

15. $\int \frac{xdx}{a^4-x^4}$ $\frac{1}{4a^2}\,l\left(\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}\right)$

16. $\int \frac{x^3dx}{a^4-x^4}$ $-\frac{1}{4}\,l(a^4-x^4).$

CAPÍTULO III

Integración de las expresiones irracionales

§ 1.º DEDUCCIÓN DE LAS REGLAS PARA LAS FUNCIONES DEL TRINOMIO IRRACIONAL DE SEGUNDO GRADO

8. CASO DE MONOMIOS IRRACIONALES. Una función que sólo contiene monomios irracionales es siempre integrable. Así, por ejemplo,

$$\int \frac{(1 + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2})\, dx}{1 + \sqrt[3]{x}}$$

puede escribirse bajo la forma

$$\int \frac{\left(1 + x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{2}{3}}\right) dx}{1 + x^{\frac{1}{3}}};$$

y si se hace $x = t^6$ de donde $dx = 6t^5 dt$, se tendrá la función racional

$$\frac{(1 + t^3 - t^4) 6t^5 dt}{1 + t^2},$$

ó $$6dt\left(- t^7 + t^6 + t^5 - t^4 + t^2 - t + \frac{1}{1 + t^2}\right)$$

cuya integral es

$$-\frac{3}{4} t^8 + \frac{6}{7} t^7 + t^6 - \frac{6}{5} t^5 + 2t^3 - 6t + 6 \operatorname{arc\,tg} t + C.$$

Se reduce al caso anterior toda función que solo contiene radicales bajo los cuales se halla un mismo binomio de primer grado. Así, haciendo $ax + b = t^6$ en

$$\frac{\left[x^2 + \sqrt[3]{(ax+b)^2}\right]dx}{x + \sqrt{ax+b}},$$

resulta

$$x = \frac{t^6 - b}{a}, \quad dx = \frac{6t^5 dt}{a}, \quad \sqrt[3]{(ax+b)^2} = t^4$$

y, por consiguiente, solo hay que integrar la fracción

$$\frac{6}{a^2} \frac{t^5[(t^6 - b)^2 + a^2 t^4]\,dt}{t^6 - b + at^3}.$$

9. Integración de $F(x, R)dx$. El monomio x^m se integra inmediatamente, cualquiera que sea m, pero la integración de $\sqrt[m]{F(x)}$ en la que $F(x)$ indica un polinomio cualquiera, ofrece grandes dificultades, pues ya la integración del radical $\sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}$ engendra una transcendente nueva, la *función elíptica*, que no es reducible á ningún otro de los tipos de funciones estudiados anteriormente. El objeto actual será la integración de diferenciales de la forma $F(x, R)dx$, expresando F una función racional de x y de

$$R = \sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

1.º Hagamos

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + z$$

y tendremos

$$bx + c = 2xz\sqrt{a} + z^2, \quad x = \frac{z^2 - c}{b - 2z\sqrt{a}};$$

x y dx son racionales en z, lo mismo que el radical que es igual á $x\sqrt{a}+z$, por consiguiente la integral

$$\int F\left(\sqrt{ax^2+bx+c},\ x\right)dx \quad \text{tomará la forma} \quad \int \Phi(z)dz,$$

siendo Φ una función racional.

Ejemplo. Sea

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}. \quad \text{Haciendo} \quad \sqrt{x^2+a^2}=x+z \quad \text{resulta}$$

$$a^2=2zx+z^2 \qquad x=\frac{a^2-z^2}{2z}, \qquad dx=-\frac{z^2+a^2}{2z^2}dz,$$

y sustituyendo,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=-\int \frac{dz}{z}=-\log z=-\log\left(\sqrt{x^2+a^2}-x\right)$$

$$=\log \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}-x}=\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)-2\log a;$$

y por ser el resultado salvo una constante, será

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right).$$

2.° Cuando el coeficiente de x^2 es negativo, la transformación precedente introduce imaginarias. Haremos en este caso

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{c}+zx;$$

y elevando al cuadrado será

$$ax^2+bx=2zx\sqrt{c}+z^2x^2, \qquad x=\frac{z\sqrt{c}-b}{a-z^2},$$

con lo que se reduce el problema á integrar una función racional en z.

3.° Cuando a y c son negativos, no se pueden aplicar los métodos anteriores, sin introducir imaginarias. Haremos entonces

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{-a}\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)},$$

y nos hallamos en el caso de integrar una expresión de la forma

$$\int dx\,\mathrm{F}\left[x,\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}\right],$$

siendo F una función racional de x y de $\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}$. Haremos pues,

$$\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}=(x-\alpha)\sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}},\qquad z^2=\frac{\beta-x}{x-\alpha},$$

obteniéndose x, dx y $\sqrt{\dfrac{\beta-x}{x-\alpha}}$ en función racional de z.

Ejemplo. Sea integrar

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{\dfrac{x+a}{x-a}}}.$$

Se hará $\dfrac{x+a}{x-a}=z^2$, de donde

$$x=a\,\frac{z^2+1}{z^2-1},\qquad dx=-a\,\frac{4z}{(z^2-1)^2}\,dz;$$

y se tendrá

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{2\,dz}{1-z^2}=\int\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}\right)dz=\log\frac{1+z}{1-z}.$$

Sustituyendo z por su valor, será

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\log\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}}{\sqrt{x-a}-\sqrt{x+a}}=\log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right).$$

no escribiendo la constante $-2\log(-a)$ en el segundo miembro, lo que es inútil.

Para obtener la integral de $\dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ es preferible observar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{dx : a}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \text{arc sen}\,\frac{x}{a}.$$

10. Integración rápida. Expresando por R el radical de segundo grado de que tratamos, podremos escribir cualquier función racional de x y del radical bajo la forma

$$f = \frac{\varphi(x, R)}{\psi(x, R)},$$

expresando φ y ψ dos funciones enteras de x y de R. Pero toda función de x y de R se reduce á la forma $A + BR$, siendo A y B funciones enteras de x. Podremos por tanto escribir

$$y = \frac{A + BR}{C + DR},$$

expresando A, B, C, D funciones enteras de x. Multiplicando en los dos términos por $C - DR$, resultará

$$f = \frac{P + QR}{S}, \quad S = C^2 - D^2R^2,$$

siendo P, Q, S funciones enteras de x; luego

$$f = \frac{P}{S} + \frac{QR}{S} = \frac{P}{S} + \frac{QR^2}{RS} = \frac{P}{S} + \frac{N}{M}\frac{1}{R}.$$

Descomponiendo la función racional $\dfrac{N}{M}$ en fracciones simples, la función f se reducirá á una suma de términos de la forma

$$\frac{x^m}{R}, \quad \frac{1}{(x-\alpha)^m R}, \quad \frac{\mu x + \nu}{(x^2+px+q)^n R},$$

siendo m, α, μ, ν, p, q constantes.

Convendría ahora reducir el radical R á una de las formas $\sqrt{x^2 \pm a^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$, para ello reduciremos la cantidad subrradical á una suma ó diferencia de cuadrados

$$ax^2 + bx + c = (mx+n)^2 + k^2$$

$$\text{ó} \quad = (mx+n)^2 - k^2 \quad \text{ó} \quad = -(mx+n)^2 + k^2.$$

Hagamos $mx + n = z$, y por consiguiente $dx = \frac{dz}{m}$;

y las integrales que se han de calcular serán de la forma

$$\int \varphi\left(z, \sqrt{z^2 \pm k^2}\right) dz, \quad \int \varphi\left(z, \sqrt{k^2 - z^2}\right) dz.$$

11. Integración de $\frac{x^m dx}{\sqrt{k^2 - x^2}}$ Hagamos $A_m = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{k^2 - x^2}}$;

y observando que

$$d \,.\, x^m \sqrt{k^2 - x^2} = \left(mx^{m-1}\sqrt{k^2 - x^2} - \frac{x^{m+1}}{\sqrt{k^2 - x^2}}\right) dx$$

$$d \,.\, x^m \sqrt{k^2 - x^2} = \left[mk^2 x^{m-1} - (m+1)x^{m+1}\right] \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}},$$

é integrando,

$$x^m \sqrt{k^2 - x^2} = mk^2 A_{m-1} - (m+1) A_{m+1};$$

y $$A_{m+1} = \frac{mk^2}{m+1} A_{m-1} - \frac{x^m}{m+1}\sqrt{k^2 - x^2}. \qquad (1)$$

Pero $$A_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}} = \text{arc sen } \frac{x}{k},$$

$$A_1 = \frac{xdx}{\sqrt{k^2 - x^2}} = -\sqrt{k^2 - x^2}.$$

De la fórmula (1) se deducen pues, las siguientes:

$$A_2 = \frac{k^2}{2} A_0 - \frac{x}{2}\sqrt{k^2 - x^2}, \quad A_3 = \frac{2k^2}{3} A_1 - \frac{x^2}{3}\sqrt{k^2 - x^2}$$

y así sucesivamente.

12. Integración de $\dfrac{dx}{(x-\alpha)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Tenemos idénticamente

$$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + (x-\alpha)(b + 2a\alpha) + a\alpha^2 + b\alpha + c,$$

ó para abreviar,

$$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + b'(x-\alpha) + c';$$

luego, el radical propuesto se reduce á

$$\int \frac{d(x-\alpha)}{(x-\alpha)^m\sqrt{a(x-\alpha)^2 + b'(x-\alpha) + c'}};$$

haciendo $x - \alpha = \dfrac{1}{z}$, $d(x-\alpha) = -\dfrac{dz}{z^2}$,

será

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\int \frac{z^{m-1}\,dz}{\sqrt{a + b'z + c'z^2}},$$

integral que se puede obtener poniendo $a + b'z' + c'z^2$ bajo la forma de una suma de cuadrados.

§ 2.º Integrales hiperelípticas y elípticas

13. Tipos de integrales. Las integrales más importantes que han dado origen á una teoría completa son las de la forma

$$\int F(x, y)dx, \tag{1}$$

siendo F una función racional de x é y y ésta una función algebráica cualquiera de x, es decir, una función ligada á x por la relación

$$f(x, y) = 0,$$

siendo f un polinomio. La más sencilla de estas integrales, en el caso de ser y función racional de x, son aquéllas en que se tiene $y^2 = R(x)$, expresando $R(x)$ un polinomio, que supondremos no tiene más que raíces simples. Estas integrales se llaman *hiperelípticas*.

Supongamos que $R_{2p}(x)$ sea de grado par $2p$, siendo α una de sus raíces, y hagamos

$$x = \alpha + \frac{1}{z}.$$

La integral se hallará reducida á otra de la misma forma, pero en la que el radical contendrá un polinomio de grado $2p - 1$, pues

$$R_{2p}(x) = \frac{R_{2p-1}(z)}{z^{2p}}.$$

Si $R_{2p-1}(x)$ es un polinomio de grado $2p - 1$, haciendo $x = \frac{1}{z}$, tendremos

$$R_{2p-1}(x) = \frac{R_{2p-1}(z)}{z^{2p-1}} = \frac{zR_{2p-1}(z)}{z^{2p}},$$

y la nueva integral contiene bajo el radical un polinomio de grado $2p$.

La fracción racional $F(x, y)$ puede ponerse bajo la forma

$$F(x, y) = \frac{M + Ny}{M_1 + N_1 y},$$

siendo M y N polinomios en x. Para esto eliminaremos todas las potencias de y distintas de la primera, sustituyendo y^{2n} por R^n é y^{2n+1} por yR^n. Multiplicando los dos términos de F por $M_1 - N_1 y$, tendremos

$$F(x, y) = P + Qy,$$

siendo P y Q fracciones racionales en x, ó bien sustituyendo y por $\frac{R(x)}{y}$, tendremos

$$F = A + \frac{B}{\sqrt{R(x)}},$$

siendo A y B fracciones racionales cualesquiera en x. Para formar la integral (1) tenemos primero $\int A\,dx$, que es la integral de una fracción racional ya conocida. Nos queda la integral

$$\frac{B}{\sqrt{R(x)}}\,dx.$$

La fracción racional B puede descomponerse en un polinomio y en una serie de fracciones simples cuyo denominador es una potencia de un binomio $x - a$. Tendremos pues, finalmente, los tipos siguientes:

$$\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{R(x)}} \quad \text{é} \quad \int \frac{\varphi(x)dx}{(x-a)^{\alpha}\sqrt{R(x)}},$$

siendo $f(x)$ y $\varphi(x)$ polinomios y α un entero positivo.

Consideremos desde luego las integrales del primer tipo

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

Supongamos por ejemplo, que $R(x)$ sea de grado impar $2p + 1$.

Sea m el grado de $f(x)$. Vamos á demostrar que *este grado puede bajarse al grado* $2p - 1$. Supongamos m superior á este número y hagamos

$$m = 2p + \lambda \quad (\lambda \geqq 0).$$

De la expresión $\dfrac{f(x)}{\sqrt{R(x)}}$ se puede restar la derivada de $Cx^{\lambda}\sqrt{R(x)}$, eligiéndose C de tal modo qne el numerador de la diferencia sea del grado $m - 1$. En efecto, se tiene

$$C\frac{d}{dx}\left[x^{\lambda}\sqrt{R(x)} = C\frac{\lambda x^{\lambda-1}R(x) + \frac{1}{2}x^{\lambda}R'(x)}{\sqrt{R(x)}};\right.$$

el grado del numerador es $2p + \lambda$, y podemos elegir C de modo que sea nulo el coeficiente dc x^m en la diferencia

$$f(x) - C\left[\lambda x^{\lambda-1}R(x) + \frac{1}{2}x^{\lambda}R'(x)\right].$$

Por una serie de sustracciones sucesivas, reduciremos la integral á una parte integrada y á una integral

$$\int\frac{f_1(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

siendo ahora $f_1(x)$ un polinomio á lo más del grado $2p - 1$, porque la reducción podrá hacerse últimamente cuando se tenga $\lambda = 0$.

Obtendremos pues 2p *integrales de la forma*

$$\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{R(x)}} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots\ldots, 2p - 1).$$

En general estas integrales son trascendentes nuevas y distintas unas de otras, que no son susceptibles de expresarse con auxilio de las funciones de que se trata en los elementos. Vamos á demostrar únicamente que pueden dividirse en dos especies. Las integrales de la *primera especie* son aquéllas que permanecen finitas cuando x aumenta indefinidamente, las otras se llaman de *segunda especie*. Aplicaremos el método empleado (t. II pág. 36) La función $\frac{x^m}{\sqrt{R(x)}}$ es comparable, cuando x es muy grande con $\frac{1}{x^{p+\frac{1}{2}-\mu}}$. Si pues

$$p+\frac{1}{2}+\mu>1, \quad \text{ó sea} \quad \mu<p-\frac{1}{2}$$

la integral será de primera especie.

Se tendrá pues p integrales de primera especie, es decir, que permanecen finitas para $x=\infty$ y $\mu=0, 1, 2, \ldots, p-1$. Las demás serán de segunda especie.

Observaremos además que todas estas integrales permanecen finitas cuando x tiende hacia una raíz de $R(x)=0$.

Para distinguir las integrales de primera de las de segunda especie, escribamos

$$\sqrt{R}=x^{\frac{m}{2}}\sqrt{A_0}\left(1+\frac{A_1}{A_0}\frac{1}{x}+\ldots\ldots\right)^{\frac{1}{2}},$$

ó aplicando la fórmula del binomio generalizada,

$$\frac{1}{\sqrt{R}}=\frac{1}{x^{\frac{m}{2}}\sqrt{A_0}}\left(1-\frac{1}{2}\frac{A_1}{A_0}\frac{1}{x}+\ldots\ldots\right)$$

de la que resulta

$$\int\frac{x^k\,dx}{\sqrt{R}}=\int\frac{1}{\sqrt{A_0}}\left(1-\frac{1}{2}\frac{A_1}{A_0}\frac{1}{x}+\ldots\ldots\right)x^{k-\frac{m}{2}}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{A_0}}x^{k-\frac{m}{2}+1}+\ldots\ldots$$

siendo el término escrito el más elevado de la serie. La integral será pues de segunda especie, si $k > \frac{m}{2} - 1$ y de primera si $k < \frac{m}{2}$, no excluyendo la última desigualdad la igualdad, si m es par.

14. Integrales del segundo tipo. Sea

$$\int \frac{\varphi(x)dx}{(x-a)^{\alpha}\sqrt{R(x)}}.$$

Distinguiremos dos casos, según que a sea ó no sea raíz del polinomio $R(x)$. Supongamos $\alpha > 1$; y restemos de la integral una expresión de la forma

$$\frac{C\sqrt{R(x)}}{(x-a)^{\alpha-1}},$$

de manera que la diferencia sea una integral de la forma inicial en la que α quede sustituída por $\alpha - 1$. Se tiene, expresando C una constante,

$$C\frac{d}{dz}\left(\frac{\sqrt{R(x)}}{(x-a)^{\alpha-1}}\right) = C\,\frac{-(\alpha-1)R(x) + \frac{1}{2}(x-a)R'(x)}{(x-a)^{\alpha}\sqrt{R(x)}}.$$

En la diferencia

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha}\sqrt{R(x)}} - C\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{R(x)}}{(x-a)^{\alpha-1}}\right),$$

el numerador será divisible por $x - a$, si se tiene

$$\varphi(a) + C(\alpha - 1)R(a) = 0,$$

igualdad que determina á C, porque $R(a)$ no es nulo y α es mayor que 1. La sustracción indicada nos conduce pues, á una integral de la forma

$$\int \frac{\varphi_1(x)\,dx}{(x-a)^{\alpha-1}\sqrt{R(x)}},$$

siendo φ_1 un polinomio. Podremos continuar esta reducción hasta que lleguemos á una integral de la forma considerada en la que sea $\alpha = 1$. Por otra parte, dividiendo $\varphi(x)$ por $x - a$, la última integral se reducirá á las integrales del número anterior y á la única integral

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R(x)}}.$$

Cuando $R(a) = 0$, debemos modificar el razonamiento. Consideremos la integral propuesta al principio de este párrafo, haciendo que a sea raiz de $R(x)$, y formemos la diferencia

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^\alpha \sqrt{R(x)}} - C\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{R(x)}}{(x-a)^\alpha}\right). \tag{1}$$

El segundo término puede escribirse

$$C\frac{\frac{1}{2}R'(x) - \alpha R_1(x)}{(x-a)^\alpha \sqrt{R(x)}} \quad \text{haciendo} \quad R_1(x) = \frac{R(x)}{x-a}.$$

Pero a es raiz simple de $R(x)$; luego $R_1(a) = R'(a) \neq 0$, y por consiguiente se puede determinar C de modo que la diferencia (1) sea de la forma

$$\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\sqrt{R(x)}}.$$

Basta para ello que

$$\varphi(a) - C\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)R'(a) = 0.$$

El coeficiente C es diferente de cero para $\alpha = 1$. Se puede pues efectuar sucesivamente la reducción hasta hacer desaparecer toda potencia de $x - a$ del denominador, y finalmente no quedarán más que integrales del primer tipo.

En resumen, el segundo tipo se reduce al primero y á integrales de la forma

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R(x)}},$$

no siendo la constante a raíz de $R(x) = 0$.

La hipótesis de ser $R(x)$ de grado impar no tiene influencia en la reducción hecha que es independiente de ella. No sucede lo mismo respecto á las integrales de la forma

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

Si el polinomio $R(x)$ es de grado $2p$, todas estas integrales se reducirán á integrales

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R(x)}},$$

en las qne m deberá tomar los valores $0, 1, 2, \ldots\ldots 2p-2$. Hay pues en este caso $2p-1$ integrales del primer tipo.

15. Integrales de tercera especie. Para llegar á las integrales de tercera especie, consideremos las integrales de la forma

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{R}}$$

y principiemos por reducir las integrales de la forma

$$\int \frac{P dx}{Q^\mu \sqrt{R}},$$

siendo P de grado inferior á Q. Distinguiremos dos casos, según que sea Q primo con R ó que tengan un factor común.

Primer caso. Q primo con R. Puesto que el polinomio Q no tiene más que raíces simples, es primo con su derivado Q', y por consiguiente con $Q'R$. Pero podemos hallar dos polinomios A y B tales, que se tenga idénticamente

$$1 = AQ + B(Q'R), \tag{1}$$

de donde

$$\int \frac{P}{Q^{\mu}\sqrt{R}}\,dx = \int \frac{P\,(AQ + BQ'R)}{Q^{\mu}\sqrt{R}}\,dx$$

$$= \int \frac{PA}{Q^{\mu-1}\sqrt{R}}\,dx + \int PB\sqrt{R}\,\frac{Q'}{Q^{\mu}}\,dx. \tag{2}$$

Integrando por partes la última cantidad, tenemos

$$\int PB\sqrt{R}\,\frac{Q'}{Q^{\mu}}\,dx = -\frac{1}{\mu-1}\,\frac{1}{Q^{\mu-1}}\,PB\sqrt{R}\,.$$

$$+\frac{1}{\mu-1}\int \frac{d\,(PB\sqrt{R})}{Q^{\mu-1}}\,;$$

por consiguiente, efectuando la última diferencial y sustituyendo en la ecuación (2) la última integral por su valor, se obtiene

$$\int \frac{P}{Q^{\mu}\sqrt{R}}\,dx = -\frac{1}{\mu-1}\,\frac{PB\sqrt{R}}{Q^{\mu-1}}$$

$$\int \frac{PA + \frac{1}{\mu-1}\left[(PB)'R + \frac{1}{2}\,PBR'\right]}{Q^{\mu-1}\sqrt{R}}\,dx. \tag{3}$$

La integral del segundo miembro de (3) es de la misma forma que la del primero, pero el exponente de Q ha disminuído en una unidad. La fórmula (3) es por lo tanto una fórmula de reducción, que podrá emplearse para todos los valores de μ superiores á la unidad. La integral propuesta es pues igual á una expresión racional en x y $\sqrt{R}$ aumentada en una integral de la forma $\int \frac{P}{Q\sqrt{R}}\, dx$, que se reducirá al tipo

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$$

descomponiendo $\frac{P}{Q}$ en fracciones simples.

2.º caso. R tiene un máximo común divisor con Q. Sea

$$R = DR_1, \qquad Q = DQ_1.$$

Puesto que D es primo con Q_1, por no tener Q raíces múltiples, se podrá descomponer la fracción $\frac{P}{Q^\mu}$ en dos fracciones simples

$$\frac{P}{Q^\mu} = \frac{P_1}{D^\mu} + \frac{P_2}{Q_1^\mu}.$$

Se tendrá pues

$$\int \frac{P}{Q^\mu \sqrt{R}}\, dx = \int \frac{P_1}{D^\mu \sqrt{R}}\, dx + \int \frac{P_2}{Q_1^\mu \sqrt{R}}\, dx.$$

La segunda integral del segundo miembro entra en el primer caso, porque Q_1, primo con D y con R_1, es primo con R. En la primera, D divide exactamente á R, y puede escribirse esta integral, haciendo salir D del radical,

$$\int \frac{P_1}{D^{\mu+\frac{1}{2}} \sqrt{R_1}}\, dx.$$

Repitiendo textualmente el procedimiento seguido en el primer caso, salvo el que Q está sustituído aquí por D y μ por

$\mu + \frac{1}{2}$, obtendremos una fórmula análoga á la (3). Solamente aquí, por ser el exponente fraccionario, se podrá hacer $\mu = 1$; y la única trascendente que subsistirá será de la forma.

$$\int \frac{\mathrm{P}dx}{\mathrm{D}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\mathrm{R}_1}} = \int \frac{\mathrm{P}dx}{\sqrt{\mathrm{R}}},$$

integral ya estudiada, que ha conducido á la nueva trascendente

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{\mathrm{R}}}$$

llamada *integral de tercera especie.*

En el caso de ser R de tercer grado, existen las integrales

$$\mathrm{I}_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - ax - b}}, \quad \mathrm{I}_2 = \int \frac{xdx}{\sqrt{4x^3 - ax - b}},$$

$$\mathrm{I}_3 = \int \frac{dx}{(x-c)\sqrt{4x^3 - ax - b}}$$

de primera, segunda y tercera especie, respectivamente.

16. R ES DE CUARTO GRADO. Vamos á ver que en el caso de ser R de cuarto grado, puede suponerse que es un binomio bicuadrado.

Consideremos el radical

$$\sqrt{4x^3 - ax - b}$$

y hagamos $x = \alpha + t^2$, siendo α una raíz del trinomio. Evidentemente resulta la forma bicuadrada si hacemos $x = \alpha + t^2$, representando α una raíz del trinomio.

Recíprocamente, si R es bicuadrado, haciendo $x^2 = z$ se obtendrá una de las tres fórmulas últimas.

Supongamos ahora R de cuarto grado. Lo podemos escribir bajo la forma

$$\mathrm{R} = (ax^2 + bx + c)(a'x^2 + b'x + c').$$

Supongamos que las raíces estén en orden ascendente ó descendente, y hagamos la sustitución

$$x = \frac{\alpha y + \beta}{y + 1}, \quad \text{de donde} \quad \sqrt{R} = \frac{1}{(y + 1)^2}\sqrt{Y},$$

siendo

$$Y = [a(\alpha y + \beta)^2 + b(\alpha y + \beta)(y + 1) + c(y + 1)^2]$$
$$[a'(\alpha y + \beta)^2 + b'(\alpha y + \beta)(y + 1) + c'(y + 1)^2].$$

Expresemos que desaparece el término en y en cada paréntesis, y resultará

$$2a\alpha\beta + b(\alpha + \beta) + 2c = 0, \quad 2a'\alpha\beta + b'(\alpha + \beta') + 2c' = 0 \quad (1)$$

de las que se obtendrán los valores de $\alpha\beta$ y $\alpha + \beta$.

La ecuación de segundo grado que da los valores de α y β tendrá sus raíces reales, porque la condición de realidad

$$(ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') > 0,$$

expresa precisamente que las raíces de uno de los factores no se hallan comprendidas ninguna entre las raíces del otro.

Hemos conseguido pues, por sustituciones reales, transformar una función racional en x y $\sqrt{R}$, siendo R un polinomio cualquiera de cuarto grado, en otra función en y y $\sqrt{Y}$, para la que Y es el producto de dos factores de la forma $my^2 + n$, es decir, para la que Y es un trinomio bicuadrado

$$Y = \lambda y^4 + \mu y^2 + \nu. \quad (2)$$

El razonamiento anterior supone que se puede obtener $\alpha\beta$ y α y β de (1), es decir, que no se tiene

$$\frac{b}{2a} = \frac{b'}{2a'}.$$

Pero si se verificase esta igualdad, haciendo

$$x + \frac{b}{2a} = y,$$

en R, se obtendría

$$R = \left(ay^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}\right)\left(a'y^2 + \frac{4a'c' - b'^2}{4a'}\right)$$

que es la forma (2).

Se ve pues, según la clasificación hecha, que existirán las integrales de 1.ª y 2.ª especie,

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{\lambda x^4 + \mu x^2 + \nu}}, \quad I_2 = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{\lambda x^4 + \mu x^2 + \nu}}.$$

La integral $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{\lambda x^4 + \mu x^2 + \nu}}$ no es elíptica,

como se ve haciendo $x^2 = z$.

Legendre, reducía siempre la cantidad sub-radical á la forma canónica

$$(1 - x^2)(1 - k^2 x^2).$$

siendo k^2 inferior á la unidad.

Este geómetra consideraba como tipo de segunda y de tercera especie respectivamente

$$I'_2 = \int \frac{\sqrt{1 - k^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx, \quad I'_3 = \int \frac{dx}{(1 + mx^2)\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}$$

17. Forma canónica. Vamos á ver que puede reducirse el trinomio $\lambda y^4 + \mu y^2 + \nu$ á la forma canónica $(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)$, excepto cuando λ, μ, ν sean negativos

Supongamos el binomio bicuadrado bajo la forma

$$R = (ax^2 + b)(a'x^2 + b').$$

Se puede suponer $a > 0$, porque se puede cambiar el signo de los dos factores de R. Hagamos

$$ax^2 + b = t^2 \quad \text{de donde} \quad axdx = tdt$$

y

$$dx = \frac{tdt}{a\sqrt{\frac{t^2 - b}{a}}}.$$

La integral elíptica de primera especie se reduce á

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - b)\,(a't^2 - ba' + ab')}}.$$

El factor $ax^2 + b$ se halla sustituído por el factor $t^2 - b$ en el que el segundo término ha cambiado de signo. Podremos pues suponer que el primer factor tiene sus raíces reales. Representémosle por $x^2 - \alpha^2$, y tendremos los cuatro tipos diferentes

$$R = (x^2 - \alpha^2)(\beta^2 x^2 + \gamma^2), \qquad R = (x^2 - \alpha^2)(\beta^2 x^2 - \gamma^2),$$

$$R = (x^2 - \alpha^2)(-\beta^2 x^2 + \gamma^2), \quad R = (x^2 - \alpha^2)(-\beta^2 x^2 - \gamma^2).$$

La sustitución $x = \frac{1}{y}$, seguida de un cambio de signo de los dos factores de R, conducirá de los dos últimos tipos á los dos primeros. Por último, una sustitución análoga á la ya empleada,

$$\beta x^2 + \gamma^2 = t^2,$$

conducirá de la primera forma á la segunda. A esta limitaremos nuestro razonamiento. Después de suprimir un factor positivo constante, escribiremos

$$R = (1 - a^2 x^2)\,(1 - b^2 x^2),$$

igualdad en la que a y b no son iguales, sin lo que sería R un cuadrado perfecto y $\sqrt{R}$ racional.

Sea $a^2 < b^2$ y hagamos $a^2 = k^2 b^2$. Tendremos

$$R = (1 - k^2 b^2 x^2)(1 - b^2 x^2).$$

Otra sustitución $\quad x = \frac{x_1}{b} \quad$ dará

$$R = (1 - x_1^2)(1 - x^2 x_1^2),$$

que es la forma canónica.

En cuanto á la integral de tercera especie

$$\int \frac{dx}{(x - a)\sqrt{R}},$$

basta multiplicar los dos términos de la fracción por $x + a$ para notar que es la suma de una fracción integrable y de una integral de la forma adoptada por Legendre como tipo de las integrales de tercera especie.

Hagamos $x = \operatorname{sen} \varphi$; los tres tipos se reducen á

$$I_1 = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}, \quad I_2 = \int d\varphi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi},$$

$$I_3 = \int \frac{d\varphi}{(1 + m \operatorname{sen}^2 \varphi)\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}.$$

Observación. Si $k = 0$, las integrales elípticas se reducen á las funciones circulares

$$I_1 = \varphi = \operatorname{arc\,sen} x, \quad I_2 = \operatorname{arc\,sen} x,$$

$$I_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{1 + m} \operatorname{tg} \varphi\right).$$

Si $k^2 = 1$, se obtienen las funciones logarítmicas

$$I_1 = -\log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right), \quad I_2 = \operatorname{sen} \varphi,$$

$$I_3 = \frac{1}{1 - a^2} \log \frac{x - a}{1 - x} + \frac{1}{(1 - a)^2} \log (1 + x).$$

Ejemplo. Sea reducir el caso de la integral de tercera especie al de la primera. Hagamos

$$x - \alpha = \frac{1}{y} \quad \text{y} \quad dx = -\frac{dy}{y^2};$$

y será

$$I_3 = -\int \frac{dy}{\sqrt{a + by + cy^2}}.$$

Nos basta pues considerar siempre I_1, considerando el trinomio escrito bajo la forma

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a};$$

y tomando $x + \dfrac{b}{2a}$ por variable, resultarán las tres formas distintas

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \alpha^2}}, \quad \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \alpha^2}}, \quad \int \frac{dt}{\sqrt{\alpha^2 - t^2}}.$$

18. INTEGRALES ELÍPTICAS. Ya hemos visto que cuando la expresión que se halla bajo el signo radical es un polinomio de tercer grado, las integrales más sencillas son de los tipos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{R(x)}}$$

que se llaman *integrales elípticas.* $R(x)$ expresa un polinomio de tercer grado en x. Cuando $R(x)$ es un polinomio de cuarto grado, puede reducirse al caso del de tercero.

Puede reducirse el polinomio de cuarto grado á un trinomio que sólo contenga términos de grado par como hemos visto (17). Empleemos según hace el Sr. Picard, la transformación

$$y = \frac{1}{p - x},$$

siendo p una constante, lo que se reduce á hacer la sustitución $x = p - \frac{1}{y}$. Se tiene entonces

$$R(x) = \frac{R_1(y)}{y^4}.$$

Vamos á determinar p de manera que la suma de dos raíces del polinomio transformado sea igual á la suma de las otras dos. Expresando por a, b, c, d las de $R(x)$, las de $R_1(y)$ serán

$$\frac{1}{p-a}, \quad \frac{1}{p-b}, \quad \frac{1}{p-c}, \quad \frac{1}{p-d}$$

y podremos escribir, por ejemplo,

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} - \frac{1}{p-c} - \frac{1}{p-d} = 0,$$

ecuación de segundo grado en p. Si se toma por p una de sus raíces, en la sustitución el polinomio $R_1(y)$ será de la forma

$$R_1(y) = A'(y^2 + \lambda y + \mu)\,(y^2 + \lambda y + \mu'),$$

siendo λ el mismo en los dos factores; y si hacemos $y + \frac{\lambda}{2} = z$, tendremos el polinomio bicuadrado

$$A'(z^2 + \alpha)\,(z^2 + \beta).$$

Podemos, pues, suponer que el polinomio $R(x)$ es bicuadrado. Sea

$$R(x) = a_0 x^4 + a_1 x^2 + a_2.$$

Las integrales de la primera categoría son en este caso

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a_0 x^4 + a_1 x^2 + a_2}}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a_0 x^4 + a_1 x^2 + a_2}},$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a_0 x^4 + a_1 x^2 + a_2}}.$$

La segunda de estas integrales se reduce á las funciones elementales. Basta para ello hacer $x^2 = y$, como se ha hecho (17), reduciéndola á la integral

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a_0 y^2 + a_1 y + a_2}}.$$

19. Integrales abelianas. Sea $f(x, y) = 0$ (1) la ecuación de una curva que no puede descomponerse en otras, es decir, $f(x, y)$ un polinomio entero en x é y irreducible á un producto de factores racionales de menor grado. La integral

$$\int F(x, y)\,dx \qquad (2)$$

en la que F expresa una función racional é y una función implícita de x definida por la ecuación (1) es una *integral abeliana*, que se dice *referida á la curva dada* (1).

El elemento fundamental de la curva desde el punto de vista de la integración es el *género*.

Sean, por ejemplo, las curvas unicursales ó de género cero, cuyas coordenadas pueden expresarse en funciones racionales de un mismo parámetro; y sean éstas

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \qquad (3)$$

cuyos valores sustituídos en la integral (2) hacen racional en t la diferencial que puede integrarse. Consideremos una estrofoide

$$y^2(x + a) = x^2(a - x) \qquad (4)$$

Para integrar

$$\int \frac{x+y}{x-y}\,dx,$$

hagamos $y = tx$, y tendremos

$$x = a\,\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = at\,\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = -4a\,\frac{t\,dt}{(1+t)^2}$$

$$\int \frac{x+y}{x-y}\,dx = -4a \int \frac{1+t}{1-t}\,\frac{t\,dt}{(1+t^2)^2}.$$

Se tiene idénticamente

$$\frac{(1+t)t}{(1-t)(1+t^2)^2} = \frac{1}{2(1-t)} - \frac{1}{(1+t^2)^2} + \frac{t+1}{2(1+t^2)}.$$

Sustituyendo $\frac{y}{x}$ en vez de t, se obtiene

$$\int \frac{x+y}{x-y} dx = -4a \left[\log \sqrt{\frac{x-y}{x}} \sqrt[4]{\frac{x^2+y^2}{x^2}} - \frac{xy}{2(x^2+y^2)} \right],$$

siendo y una función de x definida por la ecuación (4). Pero el caso más interesante de las curvas de género cero es de las cónicas. Puesto que son unicursales, resulta de lo dicho que se podrá integrar cualquier diferencial algebráica que sólo contenga la irracional $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, lo que por otra parte ya sabemos, puesto que bastará hacer

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

y expresar las dos coordenadas de un punto de esta cónica en función racional de un mismo parámetro, lo que será siempre posible. Sea

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}.$$

Haciendo $\qquad y^2 = (x-1)(x-2)$

veremos que esta cónica corta al eje de las x en el punto cuya abscisa es 1; y haremos pasar por este punto una secante

$$y = (x-1)t.$$

Las coordenadas del segundo punto de intersección de esta secante con la cónica son

$$x = \frac{t^2-2}{t^2-1}, \quad y = -\frac{t}{t^2-1},$$

transformándose la integral en

$$\int \frac{2dt}{t-t^2}.$$

Su valor en términos finitos es, por consiguiente,

$$\log \frac{t+1}{t-1} = \log \frac{\sqrt{(x-1)(x-2)}+x-1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}+1-x}.$$

Las integrales estudiadas hasta ahora han conducido á las funciones elementales (racionales, circulares, logaritmos y exponenciales). Actualmente nos vemos en el caso de introducir nuevas funciones.

El caso más sencillo que se presenta después de las curvas de género cero es el de las de género *uno*. Se sabe que puede hacerse corresponder la cúbica

$$Y^2 = 4X^3 - aX - b$$

á toda curva de género *uno*, de manera que á todo punto de la primera curva corresponda un sólo punto de la segunda é inversamente, expresándose racionalmente las coordenadas de cada uno de los dos puntos en función de las del otro. Es decir, que se puede sustituir la integración de toda diferencial algebráica referida á una curva de género *uno* por la integración siguiente

$$\int R(x, \sqrt{4x^3 - ax - b})\,dx,$$

en la que R expresa una función racional.

20. Reducción de las integrales abelianas (*). Sea

$$I = \int F(x, y)\,dx \tag{2}$$

(*) Picard *Traité d' Analyse*, t I, y Rouché *Analyse infinitesimal*, t. II.

la integral referida á la curva simple

$$f(x, y) = 0 \tag{2}$$

que supondremos de grado m sin ninguna asíntota paralela á los ejes, para lo que basta elegir convenientemente los ejes; y supongamos además que los puntos en el infinito sean simples, lo que es posible conseguir siempre haciendo una perspectiva de la curva. Todo lo cual equivale á decir que el conjunto de los términos de grado superior es de la forma

$$(\alpha_1 x + \beta_1 y)(\alpha_2 x + \beta_2 y) \ldots \ldots (\alpha_m x + \beta_m y),$$

en cuya expresión ninguna de las α ni β es nula, y todas las razones $\frac{\beta_i}{\alpha_i}$ son distintas.

Esto sentado, sea una fracción racional definida por la igualdad

$$\psi(x, y) = f'_y \cdot \mathrm{F}(x, y),$$

pudiéndose suponer que el denominador contiene tan sólo la variable x, puesto que si A y B son dos polinomios en y primos entre sí, podemos obtener otros dos polinomios en y, U y V tales, que se tenga idénticamente

$$\mathrm{AV} + \mathrm{BV} \equiv \mathrm{K},$$

siendo K independiente de y, lo que se verifica de igual modo cuando los coeficientes de A, B, U, V contienen la variable x. Si pues X es una función de x, y si se supone que $\psi(x, y)$ es una fracción $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, podrán obtenerse dos polinomios U y V enteros en x é y tales, que

$$\mathrm{BV} + \mathrm{U}f \equiv \mathrm{X}$$

ó, por ser $f(x, y) = 0$, tales que $\mathrm{BV} \equiv \mathrm{X}$; y se tendrá que

$$\psi(x, y) = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{AU}}{\mathrm{BU}} = \frac{\mathrm{AU}}{\mathrm{X}},$$

é
$$I = \int \frac{AU}{Xf'_y}\,dx.$$

Por último, si se descompone $\frac{1}{X}$ en elementos simples, se verá que toda integral abeliana puede considerarse como procedente de los tipos de integrales

$$I_1 = \int \frac{P(x, y)}{f'_y}\,dx, \quad I_2 = \frac{P(x, y)}{(x-a)^\alpha f'_y}\,dx$$

en las que el numerador es un polinomio.

Para reducir las integrales de la forma I_1, supongamos que p sea el grado de P, P_1 el conjunto de términos homogéneos de grado p en P y $\varphi(x, y)$ el conjunto de los términos homogéneos de grado m en $f(x, y)$; y vamos á demostrar que: *se puede reducir el grado del polinomio* P *á ser á lo más igual á* $2m-4$.

Para ello determinemos un polinomio homogéneo $\lambda(x, y)$ tal, que la diferencia $I_1 - \lambda$ pueda ponerse bajo la forma de una integral de igual forma que I_1, pero cuyo numerador sea de grado $p-1$. Observaremos, con este objeto, que puede escribirse

$$\lambda(x, y) = \int \frac{d\lambda}{dx}\,dx;$$

pero
$$\frac{d\lambda}{dx} = \lambda'_x + y'_x \lambda'_y = \lambda'_x - \frac{f'_x}{f'_y}\lambda'_y,$$

en virtud de la ecuación $f(x, y) = 0$. Se tiene pues

$$\lambda(x, y) = \int \frac{\lambda'_x f'_y - \lambda'_y f'_x}{f'_y}\,dx$$

é
$$I_1 - \lambda(x, y) = \int \frac{P - (\lambda_x f'_y - \lambda'_y f'_x)}{f'_y}\,dx. \qquad (3)$$

El conjunto de los términos de mayor grado en el numerador, será

$$P_1(x, y) - (\lambda'_x \varphi'_y - \lambda'_y \varphi'_x) \tag{4}$$

á condición de que el grado λ sea $p - m + 2$. Dispondremos pues de λ para hacer desaparecer estos términos. Y del teorema de Euler respecto á las funciones homogéneas, resulta que

$$x\lambda'_x + y\lambda'_y = (p - m + 2)\lambda,$$

reduciéndose la expresión (4) á

$$\frac{xP_1 - (p - m + 2)\lambda\varphi'_y + (y\varphi'_y + x\varphi'_x)\lambda'_y}{x}$$

ó

$$\frac{xP_1 + (p - m + 2)\lambda\varphi'_y + m\varphi\lambda'_y}{x}. \tag{5}$$

Si esta expresión es divisible por φ, llamando Q al cociente, y restando del numerador de la integral en (3) el producto QXf, que es nulo por hipótesis, se habrá conseguido hacer desaparecer en (3) los términos de grado p. Todo se reduce pues, á indicar que la expresión (5) es divisible por φ ó, por no contener φ á x como factor, que

$$xP_1 - (p - m + 2)\lambda\varphi'_y,$$

se anula idénticamente cuando se sustituye x por las m raíces $-\frac{\beta_i}{\alpha_i}y$ de φ. Basta para ello que λ contenga m coeficientes por lo menos, ó que su grado $p - m + 2$ sea superior ó igual á $m - 1$, lo que da

$$p - m + 2 \geqslant m - 1 \quad \text{ó} \quad p \geqslant 2m - 3.$$

Asi se podrá disminuir el grado en las integrales I_1, mientras sea superior á $2m - 4$, lo que demuestra el teorema.

El caso de contener el denominador una potencia de $x - a$

se puede dividir en dos, según que los m puntos de intersección de la curva $f(x, y) = 0$ con la recta $x = a$ sean distintos ó no.

Supongamos demostrado el lema siguiente:

Toda curva $\Phi(x, y) = 0$ *que pasa por los puntos comunes á las dos curvas* $f(x, y) = 0$ y $g(x, y) = 0$ *puede ponerse bajo la forma siguiente, en la que* A *y* B *expresan polinomios en* x *é* y.

$$\Phi \equiv A f(x, y) + B g(x, y) = 0, \text{ (*)}$$

cuando los puntos comunes son simples en cada una de las curvas. En otros términos: se tiene en este caso, en los puntos de intersección de Φ y f,

$$\frac{\Phi}{g(x, y)} \equiv B, \tag{6}$$

siendo B un polinomio en x é y.

Esto sentado, supongamos desde luego que la recta $x = a$ no sea tangente á la curva en ningún punto. Análogamente á como hemos procedido, vamos á obtener un polinomio $\lambda(x, y)$ tal, que

$$\int \frac{P(x, y)}{(x - a)^{\alpha} f'_y} dx - \frac{\lambda(x, y)}{(x - a)^{\alpha - 1}}$$

sea una nueva integral cuyo denominador contenga sólo $x - a$ elevado á la potencia $\alpha - 1$. Puesto que se tiene

$$\frac{\lambda}{(x - a)^{\alpha - 1}} = \int \frac{d}{dx} \left[\frac{\lambda}{(x - a)^{\alpha - 1}} \right] dx$$

$$= \int \frac{(x - a)\left(\frac{d\lambda}{dx}\right) - (\alpha - 1)\lambda}{(x - a)^{\alpha}} dx$$

$$= \int \frac{(x - a)(\lambda'_x f'_y - \lambda'_y f'_x) - (\alpha - 1)\lambda f'_y}{(x - a)^{\alpha} f'_y} dx,$$

(*) Nöther *Math. Annalen*, t. VI, p. 352.

la diferencia precedente se escribirá

$$\int \frac{P - (x - a)(\lambda' f'_y - \lambda'_y f'_x) + (\alpha - 1)\lambda f'_y}{(x - a)^\alpha f'_y} dx.$$

Para que el numerador sea divisible por $x - a$ (teniendo en cuenta la condición $f(x, y) = 0$), basta que

$$P + (\alpha - 1)\lambda f'_y$$

lo sea. Pero según el lema, si la curva

$$P + (\alpha - 1)\lambda f'_y = 0 \tag{7}$$

pasa por los puntos de intersección de la curva $f(x, y) = 0$ con la recta $x = a$, se puede poner

$$\frac{P + (\alpha - 1)\lambda f_y}{x - a}$$

bajo la forma de un polinomio en x é y (6). Basta pues expresar que la curva (7) pasa por dichos puntos ó que el primer miembro de (7), en el que se hace $x = a$, es divisible por $f(a, y)$. Estas condiciones se expresarán fácilmente, si se ha elegido para λ un polinomio de grado $m - 1$ en y tan sólo, porque $f'_y(a, y)$ es diferente de cero.

Se podrá aplicar este procedimiento de reducción mientras que α no tenga el valor 1.

Consideremos por fin el caso en que la recta $x = a$ es tangente á la curva $f(x, y) = 0$ en el punto (a, y_1), siendo diferentes los demás puntos $(a, y_2), (a, y_3) \ldots\ldots, (a, y_{m-1})$. Se tendrá entonces $f'_{y_1}(a, y_1) = 0$; y el razonamiento anterior no es aplicable.

Restaremos entonces de la integral que se ha de reducir la cantidad

$$\frac{\lambda(x, y)}{(x - a)^\alpha} = \int \frac{(x - a)(\lambda'_x f'_y - \lambda'_y f'_x) - \alpha\lambda f'_y}{(x - a)^{\alpha + 1} f'_y} dx$$

y ensayaremos la determinación de λ de manera que

$$(x-a)\,\mathrm{P}(x,y)+\alpha\lambda f'_y-(x-a)\,(\lambda'_x f'_y-\lambda'_y f'_x) \qquad (8)$$

sea divisible por $(x-a)^2$.

Es preciso pues, que desde luego $\dfrac{\alpha\lambda f'_y}{x-a}$ pueda ponerse bajo la forma de un polinomio, teniendo en cuenta la condición $f(x,y)=0$; y por ser $f'_{y1}(a,y_1)=0$, podemos tomar

$$\lambda=(y-y_1)\,(y-y_2)\ldots\ldots(y-y_{m-1})\,\mu(y) \qquad (9)$$

siendo $\mu(y)$ un polinomio en y. La curva $\lambda f'_y=0$ pasará por los puntos comunes á la curva $f=0$ y á la recta $x=a$, contándose por dos el punto (a,y_1); y en virtud del lema (6), $\dfrac{\lambda f'_y}{x-a}$ será un polinomio en x é y.

Es necesario enseguida que

$$\frac{\mathrm{P}(x,y)+\dfrac{\alpha\lambda f'_y}{x-a}+f'_x\lambda'_y}{x-a}$$

pueda ponerse á su vez bajo la forma de un polinomio, ó que la curva

$$\mathrm{P}+\frac{\alpha\lambda f'_y}{x-a}+f'_x\lambda'_y=0 \qquad (10)$$

pase por los puntos comunes á $f=0$ y á la recta $x=a$, siendo tangente á esta recta en el punto (a,y_1). Expresemos desde luego que la curva pasa por los puntos (a,y_1), $(a,y_2)\ldots$, (a,y_{m-1}). Para esto, será preciso sustituir en la ecuación (10) λ por su valor (9), lo que da

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{P}(x,y)+\frac{\alpha f'_y}{x-a}(y-y_1)\,(y-y_2)\ldots(y-y_{m-1})\,\mu(y)\\&\qquad+(y-y_1)\,(y-y_2)\ldots(y-y_{m-1})\,\mu'(y)f'_x\\&\qquad+\mu(y)f'_x\,\frac{d}{dy}\,(y-y_1)\ldots(y-y_{m-1})=0.\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Si hacemos $x = a$, $y = y_1$, el último factor se reduce á $(y_1 - y_2)(y - y_3) \ldots\ldots (y_1 - y_{m-1})$. En cuanto al segundo término, contiene una expresión indeterminada en apariencia

$$\frac{(y - y_1) f'_y}{x - a} \tag{12}$$

cuyo verdadero valor vamos á obtener. La ecuación de la curva referida á la integral puede escribirse, aplicando la fórmula de Taylor, y teniendo en cuenta que por hipótesis $f(a, y_1) = 0$ y $f'_y(a, y_1) = 0$.

$$\left.\begin{aligned} f(x, y) = 0 = (x - a) f'_x(a, y_1) + \frac{1}{2}(x - a)^2 f''_{x^2}(a, y_1) \\ + (x - a)(y - y_1) f''_{xy}(a, y_1) + \frac{1}{2}(y - y_1)^2 f''_{y^2}(a, y_1) + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

También resulta

$$f'_y(x, y) = (x - a) f''_{xy}(a, y_1) + (y - y_1) f''_{xy}(a, y_1) + \ldots\ldots$$

y teniendo en cuenta la ecuación (13),

$$\frac{(y - y_1) f'_y(x, y)}{x - a} = -2 f'_x(a, y_1) - (x - a) f''_x(a, y_1)$$
$$- (y - y_1) f''_{xy}(a, y_1) + \ldots\ldots$$

El verdadero valor de (12) es pues $-2 f'_x(a, y_1)$; y la condición hallada se escribe

$$F(a, y_1) + (1 - 2\alpha)(y_1 - y_2) \ldots (y_1 - y_{m-1}) f'_x(a, y_1) \mu(y_1) = 0.$$

Como por hipótesis, el punto (a, y_1) es simple, $f'_x(a, y_1)$ no es nula; y la anterior ecuación da á conocer $\mu(y_1)$. Igualmente, haciendo en la ecuación (11) $x = a$ é $y = y_2$, se obtendrá

$$P(a, y_2) + (1 - \alpha)(y_2 - y_1) \ldots (y_2 - y_{m-1}) f'_x(a, y_2) \mu(y_2) = 0.$$

Esta ecuación determinará $\mu(y_2)$, á condición de que $f'_x(a, y_2)$

no sea nula, es decir, á condición de que la tangente en el punto (a, y_2) no sea paralela al eje ox, lo que siempre es posible, eligiendo los ejes convenientemente. Tenemos pues determinadas las funciones $\mu(y_1)$, $\mu(y_2)$, ... $\mu(y_{m-1})$; y falta expresar todavía que la curva (11) es tangente á la recta $x = a$ en el punto (a, y_1), lo que determinará $\mu'(y_1)$. Con este propósito, expresemos que la derivada respecto á y del primer miembro de (11) se anula cuando se hace $x = a$, $y = y_1$. Se ve que el coeficiente de $\mu'(y_1)$, que nos es interesante el conocer, es

$$2(1-\alpha)(y_1-y_2)(y_1-y_3)\ldots\ldots(y_1-y_{m-1})f'_x(a, y_1).$$

Este coeficiente no es nulo mientras que α es distinto de la unidad. Podremos pues determinar $\mu'(y_1)$. Esto nos conduce á un problema de interpolación, á saber: *Determinar un polinomio* $\mu(y)$, *conociendo los valores que adquiere para* $y = y_1, y_2, \ldots,$ y_{m-1}, así como el valor de su derivada para $y = y_1$.

Sea, por ejemplo, $\nu(y)$ el polinomio de grado $m - 2$ dado por la fórmula de interpolación de Lagrange

$$f(x) = \frac{f(a)}{\varphi'(a)}\frac{\varphi(x)}{x-a} + \frac{f(b)}{\varphi'(b)}\frac{\varphi(x)}{x-b} + \ldots\ldots$$

que adquiere los valores $y = y_1, y_2, \ldots\ldots$ Se podrá tomar

$$\mu(y) = \nu(y) + C(y-y_1)(y-y_2)\ldots\ldots(y-y_{m-1}),$$

hallándose determinada la constante C por la condición

$$\mu'(y_1) = \nu'(y_1) + C(y_1-y_2)\ldots\ldots(y_1-y_{m-1}).$$

La demostración hecha en el caso de que la recta $x = a$ es tangente á la curva f en un punto simple no sería válida si se tuviese $f'_x(a, y_1) = 0$, es decir, si el punto (a, y_1) fuese doble. Sería preciso en este caso restar de la integral abeliana una fracción racional de la forma

$$\frac{\lambda(x, y)}{(x-a)^{\alpha+1}},$$

siendo $\lambda(x, y)$ el polinomio por determinar. (*)

(*) Rouché, *Analyse infinitesimal*, t. II, págs. 68, 71.

En el caso de pasar la recta $x = a$ por un punto doble con tangentes distintas, M. Picard demuestra el siguiente lema. *Si la recta* x=a *pasa por un punto doble con tangentes distintas* (a, y_1) *de la curva* $f(x, y) = 0$, *con las condiciones antes enunciadas, y hallándose* x *é* y *ligadas por la relación* $f(x, y) = 0$, *el cociente*

$$\frac{\Phi(x, y)}{(x - a)^2}$$

podrá ponerse bajo la forma de un polinomio en x *é* y, *si en cada uno de los puntos de intersección de la recta* x = a *con la curva este cociente tiene un valor finito y si además los dos valores correspondientes á las dos ramas de curva, que pasan por dicho punto doble* (a, y_1) *son iguales.*

Demostrado este lema (*), el Sr. Picard considera la integral,

$$\int \frac{Q(x, y)\,dx}{(x - a)^{\alpha} f'_y}$$

suponiendo que la recta $x = a$ pasa, como se manifestó, por un punto doble de la curva, cuya reducción efectúa restando de la misma una expresión de la forma $\dfrac{\lambda(x. y)}{(x - a)^{\alpha + 1}}$, quedando reducido el exponente α á $\alpha - 1$, pudiendo seguirse en la obra citada los cálculos que conducen á este resultado.

Esta reducción efectuada suponiendo siempre que la curva tenga solamente puntos dobles con tangentes distintas, conduce á una integral de la forma

$$\int \frac{R(x, y)\,dx}{(x - a) f'_y}$$

en la que R expresa un polinomio; y pudiéndose suponer que $R(x, y)$ contenga á y elevada al exponente $m - 1$, á lo más, si se emplea la ecuación $f(x, y) = 0$ para hacer que desaparezcan las potencias de y superiores á $m - 1$, ordenando entonces

(*) E. Picard *Traité de Analyse*, t. I, págs. 60-62.

$R(x, y)$ así reducido con relación á las potencias de $x - a$, se ve que esta integral se reduce á una integral del primer tipo y á la siguiente

$$\int \frac{R(y)\,dx}{(x-a)f'_y}$$

en la que $R(y)$ es un polinomio en y sólo y del grado $m - 1$ á lo más.

21. Otro método de reducción á la forma canónica. Desde luego toda integral de la forma $\int f(x, R)\,dx$, se puede reducir á la forma $\int \frac{F(x)}{R}\,dx$, siendo F una función racional.

En efecto, $f(x, R)$ no puede tener más que la forma $\frac{\varphi + R\psi}{\Phi + R\Psi}$, siendo φ, ψ, Φ, Ψ funciones racionales de x. Si multiplicamos los dos términos de esta fracción por $\Phi - R\Psi$, se reducirá á la forma

$$\frac{\varphi\Phi - R^2\psi\Psi}{\Phi^2 - R^2\Psi^2} - \frac{(\varphi\Psi - \psi\Phi)R^2}{\Phi^2 - R^2\Psi^2}\,\frac{1}{R}$$

que equivale á $\quad f(x) - \frac{F(x)}{R}$,

expresando f y F dos funciones racionales de x.

Supongamos que R sea el polinomio de cuarto grado

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4. \ (*)$$

Siendo racionales las potencias pares de $\sqrt{R}$, y hallándose contenido como factor $\sqrt{R}$ en las potencias impares, toda función racional de x y $\sqrt{R}$ puede ponerse bajo la forma

$$\frac{P + Q\sqrt{R}}{P' + Q'\sqrt{R}}$$

(*) Bertrand. *Calcul integral*, p. 51.

y multiplicando los dos términos por $P' - Q'\sqrt{R}$, el denominador se reducirá á la forma $M + N\sqrt{R}$. La integral $\int M dx$ se podrá calcular fácilmente; y sólo nos falta estudiar la integral

$$\int N\sqrt{R}\,dx = \int \frac{NR dx}{\sqrt{R}},$$

siendo NR una función racional de x.

Vamos á ver cómo una sustitución racional puede transformar la diferencial precedente en otra que no contenga bajo el radical más que potencias pares de la variable. El polinomio R se puede descomponer siempre en dos factores reales de segundo grado. Sea

$$R = [(x - m)^2 + N]\,[(x - \mu)^2 + \nu].$$

Hagamos

$$\frac{x - m}{x - \mu} = \frac{r - sy}{\rho - \sigma y}. \tag{1}$$

y tendremos

$$x\,[r - \rho + (\sigma - s)y] = m\,[r - \rho + (\sigma - s)y]$$
$$+ \mu(r - sy) - m\,(r - sy)$$

$$x - m = \frac{(\mu - m)\,(r - sy)}{(r - \rho) + (\sigma - s)y}; \tag{2}$$

y de $$x - \mu = \frac{(x - m)\,(\rho - \sigma y)}{r - sy}$$

resulta

$$x[r - \rho + (\sigma - s)y] = \mu(r - \rho + (\sigma - s)y] + (\mu - m)\,(\rho - \sigma y)$$

ó $$x - \mu = \frac{(\mu - m)\,(\rho - \sigma y)}{(r - \rho) + (\sigma - s)y} \tag{2'}$$

Para que en cada factor de R se anule el término de primer grado en y, es necesario y suficiente que

$$\left.\begin{aligned} rs(m-\mu)^2+(\rho-r)(\sigma-s)\mathrm{N}=0 \\ \rho\sigma(m-\mu)^2+(\rho-r)(\sigma-s)\nu=0 \end{aligned}\right\} \text{ de donde } \frac{r}{\rho}\cdot\frac{s}{\sigma}=\frac{\mathrm{N}}{\nu}. \quad (3)$$

Dividiendo respectivamente por $\rho\sigma$ y rs cada una de las ecuaciones (3), y haciendo sustituciones, resulta de la primera

$$(m-\mu)^2\frac{\mathrm{N}}{\nu}+\mathrm{N}+\frac{\mathrm{N}^2}{\nu}-\left(\frac{r}{\rho}+\frac{s}{\sigma}\right)\mathrm{N}=0$$

$$\frac{r}{\rho}+\frac{s}{\sigma}=\frac{\mathrm{N}+\nu+(m-\mu)^2}{\nu},$$

y, de la segunda

$$\frac{\rho}{r}+\frac{\sigma}{s}=\frac{\mathrm{N}+\nu+(m-\mu)^2}{\mathrm{N}}.$$

Conociendo la suma y el producto de las dos relaciones $\frac{r}{\rho}$ y $\frac{s}{\sigma}$ se deduce su diferencia; y haciendo

$$[\mathrm{N}+\nu+(m-\mu)^2]^2-4\mathrm{N}\nu=\Delta, \quad (4)$$

se tiene que

$$\left(\frac{r}{\rho}+\frac{s}{\sigma}\right)^2=\frac{\Delta+4\mathrm{N}\nu}{\nu^2}=\frac{\Delta}{\nu^2}+4\frac{r}{\rho}\frac{s}{\sigma}$$

$$\left(\frac{\rho}{r}+\frac{\sigma}{s}\right)^2=\frac{\Delta+4\mathrm{N}\nu}{\mathrm{N}^2}=\frac{\Delta}{\nu^2}+4\frac{\rho}{r}\frac{\sigma}{s}$$

$$\left(\frac{r}{\rho}-\frac{s}{\sigma}\right)^2=\frac{\Delta}{\nu^2}, \quad \left(\frac{\rho}{r}-\frac{\sigma}{s}\right)^2=\frac{\Delta}{\mathrm{N}^2}.$$

Para que $\frac{r}{\rho}$ y $\frac{s}{\sigma}$ sean reales, es necesario y suficiente que Δ sea positivo. Pero se tiene idénticamente

$$\begin{aligned}\Delta &= [(m-\mu)^2+\nu-\mathrm{N}]^2+4(m-\mu)^2\mathrm{N} \\ &= [(m-\mu)^2+\mathrm{N}-\nu]^2+4(m-\mu)^2\nu, \end{aligned} \quad (5)$$

pues desarrollando la expresión (4) de Δ, y añadiendo ó restando bien $4(m-n)^2 N$, bien $4(m-n)^2\nu$, se obtienen dichas expresiones (5).

Si N y ν son á la vez positivos ó uno de ellos solamente, una de estas dos expresiones manifiesta que Δ es positiva, y que, por tanto, $\frac{r}{\rho}$ y $\frac{s}{\sigma}$ son reales. Estos casos son aquéllos en los cuales dos raíces, por lo menos de la ecuación $R=0$, son imaginarias.

Consideremos, por último, el caso en que N y ν son negativas; tendremos idénticamente

$$\Delta = [(m-\mu)^2 + N + \nu + 2\sqrt{N\nu}]\,[(m-\mu)^2 + N + \nu - 2\sqrt{N\nu}],$$

ó

$$\Delta = [(m-\mu)^2 - (\sqrt{-N} + \sqrt{-\nu})^2]\,[(m-\mu)^2 - (\sqrt{-N}\ \sqrt{-\nu})^2],$$

pues los tres últimos términos cambiados de signo dan menos el cuadrado de los binomios escritos en la última fórmula.

Llamando ahora $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ á las raíces de $R=0$, tendremos, por ser,

$$(x-m)^2 + N = 0 \quad ó \quad x^2 - 2mx + m^2 + N = 0,$$

$$y \quad (x-\mu)^2 + \nu = 0 \quad ó \quad x^2 - 2\mu x + \mu^2 + \nu = 0:$$

$$m = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \mu = \frac{\gamma+\delta}{2}, \quad (m-\mu)^2 = \frac{(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2}{2},$$

$$m^2 + N = \alpha\beta, \quad \mu^2 + \nu = \gamma\delta;$$

luego
$$\sqrt{-N} = \frac{\alpha-\beta}{2} \quad y \quad \sqrt{-\nu} = \frac{\gamma-\delta}{2};$$

y sustituyendo en la expresión de Δ, $\Delta =$

$$\frac{[(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2-(\alpha+\gamma-\beta-\delta)^2]\,[(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2-(\alpha+\delta-\gamma-\beta)^2]}{16}$$

Tenemos además que

$$(\alpha + \beta - \gamma - \delta)^2 - (\alpha + \gamma - \beta - \delta)^2$$

$$= \left[\left(1 + \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \delta}\right)^2 - \left(1 - \frac{\gamma - \beta}{\alpha - \delta}\right)^2\right](\alpha - \delta)^2$$

$$= 4(\beta - \gamma)(\alpha - \delta), \text{ etc.}$$

Por consiguiente

$$\Delta = (\alpha - \delta)(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma)(\beta - \delta), \qquad (5)$$

siendo α y β las raíces del primer factor de R y γ, δ las del segundo. Como estas cuatro raíces son reales, se las puede agrupar según convenga para formar los dos factores de segundo grado, haciendo de modo que Δ sea positivo.

Si por ejemplo α, β, γ, δ, se hallan colocadas por orden de magnitud creciente ó decreciente, los cuatro factores de (5) serán de igual signo y Δ positivo.

De la primera ecuación (2) se deduce

$$dx = \frac{(m - \mu)(r\sigma - s\rho)dy}{[r - \rho + (\sigma + s)y]^2}$$

y de las ecuaciones (3) resulta

$$\frac{\mathrm{N}}{(m - \mu)^2} = \frac{-rs}{(\rho - r)(\sigma - s)}, \qquad \frac{\nu}{(m - \mu)^2} = \frac{-\sigma\rho}{(r - \rho)(\sigma - s)},$$

ó $$\frac{\mathrm{N}(\rho - r)^2}{r} = -\frac{(m - \mu)^2[(\rho - r)s - r\sigma + r\sigma]}{\sigma - s}.$$

$$\frac{r^2(m - \mu)^2 + \mathrm{N}(\sigma - r)^2}{r} = (m - \mu)^2\frac{r\sigma - s\rho}{\sigma - s}$$

y análogamente se obtienen

$$\frac{\rho^2(m-\mu)^2+(\rho-r)^2\nu}{\rho}=(m-\mu)^2\,\frac{r\sigma-s\rho}{\sigma-s},$$

$$\frac{s^2(m-\mu)^2+\sigma-s)^2\mathrm{N}}{s}=(m-\mu)^2\,\frac{s\rho-r\sigma}{\rho-r}.$$

$$\frac{\sigma^2(m-\mu)^2+(\sigma-s)^2\nu}{\sigma}=(m-\mu)^2\,\frac{s\rho-r\sigma}{\rho-r}.$$

Sustituyendo los valores de dx, $x-m$ y $x-\mu$ dados por (2) en

$$\frac{dx}{\sqrt{[(x-m)^2+\mathrm{N}]\,[(x-\mu)^2+\nu]}} \qquad (7)$$

y valiéndonos de las cuatro últimas fórmulas, después de haber desarrollado y reducido á un común denominador la cantidad sub-radical, la (7) se reduce á

$$\frac{dy}{(m-\mu)\sqrt{\left(\frac{r}{\sigma-s}-\frac{s}{\rho-r}\,y^2\right)\left(\frac{\rho}{\sigma-s}-\frac{\sigma}{\rho-r}\,y^2\right)}};$$

y según el signo de los coeficientes, el radical se reducirá á una de las formas

$$\sqrt{(1-y^2)\,(1-k^2y^2)},\ \sqrt{(1-y^2)\,(1+k^2y^2)},\ \sqrt{(1+y^2)\,(1+k^2y^2)}.$$

Supongamos que sean reales las cuatro raíces de la ecuación $\mathrm{R}=0$, y sea

$$\mathrm{R}=(x-\alpha)\,(x-\beta)\,(x-\gamma)\,(x-\delta); \qquad (8)$$

la transformación (1) establece entre x é y una relación de la forma

$$x=\frac{p+qy}{r+sy}.$$

Para que el polinomio R quede sustituído por $(1 - y^2)$ $(1 - k^2 y^2)$, es necesario que los numeradores de los cuatro factores sean respectivamente $1 + y$, $1 - y$, $1 + ky$, $1 - ky$. Hagamos pues

$$\left.\begin{array}{ll} x - \alpha = A\,\dfrac{1+y}{r+sy}, & x - \beta = B\,\dfrac{1-y}{r+sy} \\[2ex] x - \gamma = C\,\dfrac{1+ky}{r+sy}, & x - \delta = D\,\dfrac{1-ky}{r+sy} \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Tendremos que

$$\frac{x-\beta}{x-\alpha} = \frac{B}{A}\,\frac{1-y}{1+y}, \qquad \frac{x-\delta}{x-\gamma} = \frac{D}{C}\,\frac{1-ky}{1+ky}. \qquad (10)$$

Haciendo en la primera de estas identidades $x = \delta$ y $x = \gamma$ y en la segunda $x = \beta$, $x = \alpha$, resulta, considerando que los valores correspondientes de y son: $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$, $+1$ y -1,

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\delta-\beta}{\delta-\alpha} = \dfrac{B}{A}\,\dfrac{k-1}{k+1}, & \dfrac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha} = \dfrac{B}{A}\,\dfrac{k+1}{k-1}, \\[2ex] \dfrac{\beta-\delta}{\beta-\gamma} = \dfrac{D}{C}\,\dfrac{1-k}{1+k}, & \dfrac{\alpha-\delta}{\alpha-\gamma} = \dfrac{D}{C}\,\dfrac{1+k}{1-k}, \end{array}\right\} \qquad (11)$$

y combinándolas dos á dos,

$$\left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{B}{A}\right)^2 = \dfrac{(\delta-\beta)(\gamma-\beta)}{(\delta-\alpha)(\gamma-\alpha)} \\[2ex] \left(\dfrac{D}{C}\right)^2 = \dfrac{(\beta-\delta)(\alpha-\delta)}{(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)} \\[2ex] \left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^2 = \dfrac{(\beta-\delta)(\alpha-\gamma)}{(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)} \end{array}\right\} \qquad (12)$$

y podremos elegir el orden de las magnitudes α, β, γ, δ para que los segundos miembros sean positivos y por consiguiente reales las relaciones $\frac{B}{A}$, $\frac{D}{C}$, $\frac{1-k}{1+k}$. Adoptando para $\frac{B}{A}$, $\frac{D}{C}$ y k los valores deducidos de las últimas ecuaciones, las (10) dan el mismo valor de x para las cuatro hipótesis $y = \pm 1$, $y = \pm \frac{1}{k}$, de manera que son idénticas.

La tercera de las ecuaciones (12) da

$$\frac{1-k}{1+k} = \pm \sqrt{\frac{(\beta-\delta)(\alpha-\gamma)}{(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)}}.$$

Se podrá, adoptando el signo $+$ ó el $-$, tener á voluntad $k < 1$ ó $k > 1$. Las ecuaciones (10) dan por diferenciación

$$\left.\begin{aligned}(\beta-\alpha)\frac{dx}{(x-\alpha)^2} &= -2\frac{B}{A}\frac{dy}{(1+y)^2},\\ (\delta-\gamma)\frac{dx}{(x-\gamma)^2} &= -2k\frac{D}{C}\frac{dy}{(1+ky)^2},\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Multiplicando estas ecuaciones miembro á miembro y dividiendo su producto por el de las ecuaciones (10), resulta

$$\frac{(\beta-\alpha)(\delta-\gamma)}{4k}\frac{dx^2}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)} = \frac{dy^2}{(1-y^2)(1-k^2y^2)},$$

y la diferencial

$$\frac{dx}{\sqrt{\pm(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}}$$

se reduce á la forma

$$\frac{M\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}.$$

Así pues, resulta de lo expuesto, que la diferencial $\frac{dx}{\sqrt{R}}$ se puede reducir á la forma

$$\frac{dy}{\sqrt{(L-My^2)(L'-M'y^2)}}.$$

Distinguiremos tres casos respecto á los signos.

1.º Si L y M tienen igual signo, así como L′ y M′, haremos

$$\frac{M}{L}y^2 = z^2, \quad \frac{LM'}{ML'} = K^2.$$

La diferencial se reduce á

$$\frac{1}{\sqrt{ML}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-K^2z^2)}}, \tag{15}$$

siendo K á voluntad mayor ó menor que 1, porque el orden de magnitud de los productos ML′ y LM′ es arbitrario.

2.º Si M y L son de igual signo y M′ y L′ de signo contrario, se puede hacer

$$\frac{M}{L}y^2 = z^2, \quad \frac{LM'}{ML'} = -K^2;$$

y la diferencial se reduce á

$$\frac{1}{\sqrt{-ML'}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1+K^2z^2)}}. \tag{16}$$

3.º Si $\frac{L}{M}$ y $\frac{L'}{M'}$ son negativos, se hará

$$-\frac{M}{L}y^2 = z^2, \quad \frac{LM'}{ML'} = K^2,$$

y la diferencial se reducirá á

$$\frac{1}{\sqrt{-ML'}} \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+K^2z^2)}} \tag{17}$$

Las diferenciales (15), (16) y (17) pueden reducirse á una sola forma, haciendo respectivamente

$$y = \operatorname{sen} \varphi, \quad z = \cos \varphi, \quad z = \operatorname{tg} \varphi.$$

Se tiene entonces

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+K^2x^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{1-K^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+K^2x^2)}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1+K^2}\sqrt{1-\dfrac{K^2}{1+K^2}\operatorname{sen}^2\varphi}}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+K^2x^2)}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1-K^2)\operatorname{sen}^2\varphi}}.$$

De manera que la diferencial se reduce á la forma única

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\operatorname{sen}^2\varphi}}.$$

22. Polinomio de tercer grado. Debemos considerar especialmente el caso en que R se reduce al tercer grado. Una de las raíces, δ por ejemplo, debe considerarse como infinita. La segunda de las fórmulas (12) manifiesta que también será infinita D. Las otras dos se reducen á

$$\left(\frac{B}{A}\right)^2 = \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}, \quad \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 = \frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}.$$

La ecuación (14) se reduce á

$$\frac{(\beta-\alpha)dx^2}{4k(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} = \frac{dy^2}{(1-y^2)(1-k^2y^2)},$$

y la fórmula de transformación es

$$\frac{x-\beta}{x-\alpha} = \frac{B}{A}\,\frac{1-y}{1+y}.$$

De todas maneras la raíz cuadrada de un polinomio de cuarto grado se puede reducir á la de otro de tercero. En efecto, se tiene que

$$\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}$$
$$=(x-\alpha)^2\sqrt{\frac{x-\beta}{x-\alpha}\,\frac{x-\gamma}{x-\alpha}\,\frac{x-\delta}{x-\alpha}}.$$

Hagamos
$$\frac{x-\beta}{x-\alpha}=z$$

$$x=\frac{\beta-\alpha z}{1-z},\qquad dx=\frac{(\beta-\alpha)dx}{1-z},\qquad x-\alpha=\frac{\beta-\alpha}{1-z},$$

sustituyendo, tendremos

$$\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}$$
$$=\frac{(\beta-\alpha)^2}{(1-z)^2}\sqrt{z\,\frac{[\beta-\gamma+(\gamma-\alpha)z]}{\beta-\alpha}\,\frac{[\beta-\delta+(\delta-\alpha)z]}{\beta-\alpha}}.$$

Observación. Como se ha indicado (pág. 41), las integrales elípticas se reducen á los tres tipos

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\qquad \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$
$$\int\frac{dx}{(x^2+m)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

que se llaman *integrales de primera, de segunda* y *de tercera especie.* Legendre hace $x=\operatorname{sen}\varphi$, y entonces se transforman, limitándolas, en

$$\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}},\qquad \int_0^\varphi\frac{\operatorname{sen}^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}},$$
$$\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{(\operatorname{sen}^2\varphi+m)\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}.$$

Legendre, según ya hemos dicho, sustituiría la segunda por

$$\int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}\, d\varphi,$$

y bajo esta forma representa un arco de elipse cuyas ecuaciones son

$$x = \sqrt{1 - k^2} \cos \varphi, \qquad y = \operatorname{sen} \varphi$$

de donde ha venido la denominación de *integrales elípticas*.

§ 3.° DIFERENCIALES BINOMIAS

23. REDUCCIONES PRELIMINARES. Se llaman diferenciales binomias las que tienen la forma

$$x^m (a + bx^n)^p\, dx,$$

cuya generalidad no disminuye suponiendo que m y n son enteros, pues si se tuviese $x^{\frac{2}{3}}(a + bx^{\frac{1}{2}})^p dx$, se haría $x = t^6$, de donde $dx = 6t^5 dt$; y se tendría que integrar la expresión $6t^9 (a + bt^3)^p\, dt$.

Se puede suponer también n positivo, porque si se quisiese integrar $x^m(a + bx^{-n})^p\, dx$, bastaría hacer $x = \frac{1}{z}$ para reducir la integral á $-t^{m-2}(a + bt^n)^p\, dt$.

En cuanto á p, se le debe suponer fraccionario, porque de lo contrario la expresión se reduciría á un polinomio entero, como se ha visto (pág. 15).

Se pueden integrar las diferenciales binomias en los dos casos siguientes:

I.° Cuando $\dfrac{m+1}{n}$ es entero. En efecto, si hacemos $a + bx^n = z$, tendremos

$$x = \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{nb}\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dz.$$

La diferencial propuesta se reduce á

$$\frac{1}{nb}\, z^p \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} dz,$$

que se hace racional en nuestra hipótesis; pues si $p = \dfrac{q}{r}$, haciendo $z = t^r$, tendremos una función racional.

2.° Cuando $\dfrac{m+1}{n}$ no es entero, pero

$$\frac{m+1}{n} + p = \text{entero},$$

tendremos que

$$x^m(a+bx^n)^p\, dx = x^{m+np}(ax^{-n}+b)^p\, dx;$$

y repitiendo el razonamiento, se verá que la expresión es integrable si

$$\frac{m+np+1}{-n} \quad \text{ó} \quad \frac{m+1}{n} + p$$

es entero; debiendo hacer en este caso $ax^{-n} + b = z$.

Ejemplo. Sea $x^4(a+bx^3)^{\frac{1}{3}}\, dx$. Se tiene que

$$\frac{4+1}{3} = \frac{5}{3}, \quad \frac{4+1}{3} + \frac{1}{3} = 2;$$

luego la segunda condición de integrabilidad queda satisfecha.

24. Integración por partes. Se puede reducir sucesivamente la integral de la diferencial binomia, ya reduciendo el exponente de x fuera del paréntesis, ya el exponente del binomio.

1.° Tenemos

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \int x^{m-n+1}(a+bx^n)^p\,x^{n-1}\,dx = \int u\,dv,$$

haciendo

$$u = x^{m-n+1}, \quad v = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)};$$

por consiguiente

$$\left.\begin{aligned}\int x^m(a+bx^n)^p\,dx &= x^{m-n+1}\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)}\\ &-\frac{m-n+1}{nb(p+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}\,dx.\end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

La nueva integral será más sencilla, si m es positivo y mayor que n, y p negativo; porque $p+1$ tendrá un valor absoluto menor que p. Pero se puede obtener una fórmula en la que el exponente x exterior al paréntesis sea el sólo que disminuya, pues tenemos idénticamente que

$$x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} = x^{m-n}(a+bx^n)^p\,(a+bx^n)$$

$$= ax^{m-n}(a+bx^n)^p + bx^m(a+bx^n)^p.$$

Por consiguiente,

$$\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}\,dx$$

$$= a\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx + b\int x^m(a+bx^n)^p\,dx.$$

Sustituyendo en la ecuacion (α), se tendrá

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = x^{m-n+1}\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)}$$

$$-\frac{m-n+1}{nb(p+1)}\,a\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx$$

$$-\frac{m-n+1}{nb(p+1)}\,b\int x^m(a+bx^n)^p\,dx.$$

Transponiendo el último término y reduciendo, será

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(np+m+1)}$$

$$-\frac{a(m-n+1)}{b(np+m+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx. \qquad \text{(A)}$$

Se ha disminuído en n unidades el exponente de x^m; y continuando el procedimiento, se podrá disminuir en el mayor múltiplo de n contenido en m.

Si se tuviese $m-in=n-1$, expresando in dicho mayor múltiplo, la integral $\int x^{m-in}(a+bx^n)^p\,dx$ se podría obtener inmediatamente, porque se reduciría á

$$\int x^{n-1}(a+bx^n)^p\,dx = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} + \text{C}.$$

Pero la igualdad $m-in=n-1$ se reduce á $\dfrac{m+1}{n}=i+1$, y la primera condición de integrabilidad queda satisfecha.

Cuando $np+m+1=0$, el segundo miembro de (A) se reduce á $\infty-\infty$, y la fórmula es ilusoria; pero como $\dfrac{m+1}{n}+p=0$, es decir, un número entero, resulta el segundo caso de integrabilidad, y la integral se obtiene inmediatamente.

2.° Tenemos

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = (a+bx^n)^p\,d\,\frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

Integrando por partes, resulta

$$\left.\begin{aligned}&\int x^m(a+bx^n)^p\\&=\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1}-\frac{pnb}{m+1}\int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}dx.\end{aligned}\right\}\quad(\beta)$$

Por esta fórmula el exponente del binomio ha disminuído en una unidad, pero el exponente de la x exterior al paréntesis ha aumentado en n unidades. Para reducir este exponente, cambiemos m en $m+n$ y p en $p-1$ en (A), y resultará

$$\int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{b(np+m+1)}$$
$$-\frac{(m+1)a}{b(np+m+1)}\int x^m(a+bx^n)^{p-1}dx.$$

Llevando este valor á la ecuación (β) y reduciendo, tendremos

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{np+m+1}$$
$$+\frac{anp}{np+m+1}\int x^m(a+bx^n)^{p-1}dx. \qquad \text{(B)}$$

Por medio de esta fórmula se quitarán sucesivamente todas las unidades que contiene el exponente del binomio.

La fórmula B se hace ilusoria cuando $np+m+1=0$; pero entonces nos encontramos en el segundo caso de integrabilidad.

Ejemplo. Sea la integral

$$\int x^7(a+bx^3)^{\frac{5}{2}}dx$$

Se reduce sucesivamente por la fórmula (A) á las siguientes:

$$\int x^4(a+bx^3)^{\frac{5}{2}}\,dx, \quad \int x(a+bx^3)^{\frac{5}{2}}\,dx;$$

y esta última por la (B) á

$$\int x(a+bx^3)^{\frac{3}{2}}\,dx, \quad \int x(a+bx^3)^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

25. Casos de ser m y p negativos. 1.º Vamos á disminuir el exponente de x fuera del paréntesis. Para ello despejemos en (A) el valor de $\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx$, y tendremos

$$\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(m-n+1)a}$$
$$-\frac{b(m+np+1)}{(m-n+1)a}\int x^m(a+bx^n)^p\,dx.$$

Cambiemos $m-n$ en $-m$ ó m en $-m+n$, y tendremos

$$\int x^{-m}(a+bx^n)^p\,dx = -\frac{x^{-m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(m-1)a}$$
$$+\frac{b(np+n-m+1)}{(m-1)a}\int x^{-m+n}(a+bx^n)^p\,dx.$$

Por el empleo repetido de esta fórmula, la integral se reduce á la siguiente:

$$\int x^{-m+(i+1)n}(a+bx^n)^p\,dx,$$

en la que in representa el mayor múltiplo de n contenido en m.

Si se tuviese $-m+(i+1)n=n-1$, la última integral se reduciría á

$$\int x^{n-1}(a+bx^n)^p\,dx = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)}+\mathrm{C}.$$

Pero como se tiene

$$\frac{-m+1}{n} = -i = \text{núm. entero},$$

nos hallamos en el primer caso de integrabilidad.

Si p es negativo, de la fórmula B resulta

$$\int x^m(+bx^n)^{p-1}dx = -\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{anp}$$

$$+\frac{np+m+1}{anp}\int x^m(a+bx^n)^p\,dx.$$

Si se cambia en este resultado $p-1$ en $-p$ ó p en $-p+1$, se tendrá

$$\int x^m(a+bx^n)^{-p}dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{-p+1}}{an(p-1)}$$

$$-\frac{m+n-1\,pn}{an(p-1)}\int x^m(a+bx^n)^{-p+1}dx.$$

Si $p > 1$, el valor absoluto del exponente del binomio habrá disminuído en una unidad; y continuando la reducción, se acabará por reducir este exponente á hallarse entre 0 y 1.

Ejemplo. Sea $\dfrac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Tenemos según (A)

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m}\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Haciendo sucesivamente $m = 1, 3, 5, \ldots,$ se tendrá

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2},$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^4}{5}\sqrt{1-x^2} + \frac{4}{5}\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

. . . .

Y obtendremos sucesivamente

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2},$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{x^2}{3} + \frac{2}{1\cdot 3}\right)\sqrt{1-x^2},$$

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{x^4}{5} + \frac{4x^2}{3\cdot 5} + \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5}\right)\sqrt{1-x^2}.$$

En general, si m es impar, se tiene

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left[\frac{x^{m-1}}{m} + \frac{(m-1)x^{m-3}}{(m-2)m} + \dots\right.$$

$$\left. + \frac{2\cdot 4\dots\dots(m-1)}{1\cdot 3\dots\dots m}\right]\sqrt{1-x^2} + C$$

Si m es un número par, resulta

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left[\frac{x^{m-1}}{m} + \frac{(m-1)x^{m-3}}{(m-2)m} + \dots\right.$$

$$\left. + \frac{1\dots m-1}{2\cdot 4\dots m}x\right]\sqrt{1-x^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots m}\text{ arc sen } x + C.$$

26. MÉTODO DE DIFERENCIACIÓN. Podemos diferenciar bajo el signo $\int$. Así, por ejemplo, se tiene que

$$\int nx^{n-1}(p+1)(a+bx^n)^p\,dx = (a+bx^n)^{p+1}b^{-1}.$$

Diferenciando i veces con respecto á b, tendremos

$$\int nx^{n(i+1)-1}(p+1)(a+bx^n)^{p-i}p(p-1)\dots(p-i+1)dx$$
$$=\frac{d^i(a+bx^n)^{p+1}b^{-1}}{db^i};$$

y cambiando $p-i$ en q,

$$\int n(q+1)(q+2)\dots\dots(q+i+1)x^{n(i+1)-1}(a+bx^n)^q\,dx$$
$$=\frac{d^i(a+bx^n)^{q+i+1}b^{-1}}{db^i}.$$

Apliquemos el método de integración por partes á la integral

$$A_m = \int x^m(a+bx^n)^p\,dx.$$

Con este objeto, diferenciemos la expresión situada debajo del signo $\int$; tendremos

$$d[x^m(a+bx^n)^p] = mx^{m-1}(a+bx^n)^p\,dx$$
$$+pbnx^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}dx$$
$$=[mx^{m-1}a(a+bx^n)^{p-1}+mbx^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}$$
$$+pbnx^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}]dx,$$

es decir, cambiando p en $p+1$ é integrando,

$$x^m(a+bx^n)^{p+1} = maA_{m-1}+b(m+np+n)A_{m+n-1},$$

fórmula de reducción que permite aumentar ó disminuir en n el exponente de x exterior al paréntesis. Para efectuar la reducción del exponente p, tenemos

$$dx^m(a+bx^n)^p = mx^{m-1}(a+bx^n)^p\,dx$$

$$+\,pbnx^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}dx = [x^{m-1}(a+bx^n)^p(np+m)$$

$$-\,apnx^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}]dx;$$

de manera que si se hace

$$A_p = \int x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

resultará, integrando y cambiando m en $m+1$,

$$x^{m+1}(a+bx^n)^p = (np+m+1)A_p - apnA_{p-1}.$$

Luego: *Toda integral de la diferencial binomia puede reducirse á la forma*

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

en la que m *y* n *son enteros y* p *está comprendido entre* 0 *y* 1, *si no se puede reducir al caso* $p=0$. *En fin, se puede suponer* $m<n$ *y* $n>0$.

Ejemplo. Sea la integral

$$\int (a^2+x^2)^{-\frac{5}{2}}dx. \quad \text{Haremos} \quad A_p = \int (a^2+x^2)^{-\frac{p}{2}}dx;$$

y diferenciaremos la expresión $x^m(a+x^2)^{-\frac{p}{2}}$. Será pues

$$\frac{d}{dx}x^m(a^2+x^2)^{-\frac{p}{2}} = mx^{m-1}(a^2+x^2)^{-\frac{p}{2}} - px^{m+1}(a^2+x^2)^{-\frac{p+2}{2}}$$

$$= (m-p)x^{m-1}(a^2+x^2)^{-\frac{p}{2}} + a^2px^{m-1}(a^2+x^2)^{-\frac{p+2}{2}},$$

ó integrando, y haciendo $m = 1$,

$$x(a^2 + x^2)^{-\frac{p}{2}} = (1 - p)A_p + a^2 p A_{p+2}$$

ó
$$A_{p+2} = -A_p \frac{1-p}{a^2 p} + \frac{x}{a^2 p}(a^2 + x^2)^{-\frac{p}{2}}.$$

Así,

$$A_5 = \frac{4A_3}{5a^2} + \frac{x}{5a^2}(a^2+x^2)^{-\frac{5}{2}}, \quad A_3 = \frac{2A_1}{3a^2} + \frac{x}{3a^2}(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}};$$

pero A_1 es igual á $\log(x + \sqrt{a^2 + x^2})$. El valor de A_5 es pues conocido.

También diferenciando p veces con relación á α la fórmula

$$\log(x + \sqrt{\alpha + x^2}) = \int dx(x^2 + \alpha)^{-\frac{1}{2}}$$

se llegaría al mismo resultado.

27. Empleo de los coeficientes indeterminados. El método de los coeficientes indeterminados conduce en algunos casos rápidamente á la obtención de la integral, que igualaremos á una expresión conveniente, cuyos coeficientes se determinan por identificación. Así tenemos, por ejemplo,

$$\int \frac{10x^5 + 10x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 5x - 1}{\sqrt{1 + 2x + x^2}}\, dx$$
$$= (a_4 + a_3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0),$$
$$\sqrt{1 + 2x + x^2} + K \int \frac{dx}{\sqrt{1 + 2x + x^2}}.$$

Diferenciando, resulta

$$\frac{10x^5 + 10x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 5x - 1}{\sqrt{1 + 2x + x^2}}$$
$$= (4a_4 x^3 + 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1)\sqrt{1 + 2x + x^2}$$

$$+\frac{(1+x)(a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)+K}{\sqrt{1+2x+x^2}}$$

$$10x^5+10x^4+4x^3+7x^2-5x-1$$
$$=(4a_4x^3+3a_3x^2+2a_2x+a_1)(x^2+2x+1)+(1+x)$$
$$\times(a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)+K.$$

Identificando, se tiene:

$$10=5a_4,\quad a_4=2;\quad 10=9a_4+4a_3=18+4a_3,$$

$$a_3=-2;\quad a_2=\frac{10}{3};\quad a_1=-\frac{11}{6},\quad a_0=-\frac{37}{6},\quad K=7.$$

Ejemplo:

$$\int\frac{30x^5+30x^4+12x^3+21x^2-15x-1}{\sqrt{4+2x+3x^2}}$$
$$=(2x^4+x^3-3x^2+4x-1)\sqrt{4+2x+3x^2}$$
$$-16\int\frac{dx}{\sqrt{4+2x+3x^2}},$$

siendo

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4+2x+4x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\log\left(1+3x+\sqrt{3}\sqrt{4+2x+3x^2}\right)$$

28. Empleo de una diferencial. No solamente son algebráicas las diferenciales de las expresiones algebráicas, pues también ciertas expresiones que contienen logaritmos y líneas trigonométricas inversas pueden tener diferenciales algebráicas. Esta circunstancia permite obtener ciertas integrales.

Ejemplo 1.º Sea la diferencial $\dfrac{dx(1+x^2)}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}}$.

Hagamos, según Euler, $\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}=p.$

Tendremos

$$1+p^2=\frac{1+x^4}{(1-x^2)^2}, \qquad \sqrt{1+p^2}=\frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^2},$$

$$dp=\frac{dx\sqrt{2}(1+x^2)}{(1-x^2)^2}, \qquad \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{xd(1+x^2)\sqrt{2}}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}};$$

luego

$$\int\frac{dx\,(1+x^2)}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,l\left(\frac{\sqrt{1+x^4}+\sqrt{2}}{1-x^2}\right).$$

2.º Sea $$\frac{dx(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}.$$

Hagamos

$$\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}=p; \quad \text{será} \quad \sqrt{1-p^2}=\frac{\sqrt{1+x^4}}{1+x^2},$$

$$dp=\frac{dx(1-x^2)\sqrt{2}}{(1+x^2)^2}, \qquad \frac{dp}{\sqrt{1-p^2}}=\frac{dx(1-x^2)\sqrt{2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}$$

$$\int\frac{dx(1-x^2)}{(1+x^2\sqrt{1+x^4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{ arc sen }p=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{ arc sen }\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}$$

§ 4.º Aplicaciones

1. $$\int\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx=-x-4\sqrt{x}-4l\,(\sqrt{x}-1).$$

2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx = 2\sqrt{x+1} + l\,\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}.$

3. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{a-x}} = -\frac{2}{3}\sqrt{a-x}\,(x+2a).$

4. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \sqrt{1-x^2} - \text{arc cos}\, x.$

5. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\,\text{arc sen}\, x.$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x+3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,l\left\{-1+3x+\sqrt{3}\sqrt{1-2x+3x^2}\right\}.$

7. $\displaystyle\int x\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2(a+bx)^{\frac{3}{2}}\,x}{3b} - \frac{2}{3b}\cdot\frac{2}{5b}(a+bx)^{\frac{5}{2}}.$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx}.$

9. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{a-x}} = -\frac{3}{10}\sqrt[3]{(a-x)^2}\,(2x+3a).$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}} = \frac{1}{3a}\left\{(x+a)^{\frac{3}{2}} + (x-a)^{\frac{3}{2}}\right\}.$

11. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3-x^3}}\,dx = \frac{2}{3}\,\text{arc sen}\sqrt{\frac{x^3}{a^3}}.$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{a+x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\log\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}}.$

13. $\int \frac{1}{x\sqrt{x-a}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{a}} \text{ art tg } \sqrt{\frac{x-a}{a}}$.

14. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{2}}$.

15. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = 2 \log\left(1+\sqrt{x}\right)$.

16. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}\,dx = 2\sqrt{x} + \log \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} = \frac{2}{3a}\left[(x+a)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right]$.

18. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx = -\sqrt{a^2-x^2} + a \text{ arc sen } \frac{x}{a}$

19. $\int \sqrt{\frac{xdx}{\sqrt{1+x+x^2}}} = \sqrt{1+x+x^2}$

$$- \frac{1}{2}\, l\left(1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}\right).$$

20. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x+x^2}} = \left(\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right)\sqrt{1+x+x^2}$

$$- \frac{1}{8}\, l\left(1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}\right).$$

21. $\int \sqrt{1+x+x^2}\,dx = \left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)\text{R} + \frac{3}{8}\, l(1+2x+2\text{R})$.

6

22. $$\int x\sqrt{1+x+x^2}\,dx = \frac{1}{3}R^3 + \frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)R$$
$$-\frac{3}{16}\,l\,(1+2x+2R) \qquad \left(R=\sqrt{1+x+x^2}\right).$$

23. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1+x+x^2)^3}} = -\frac{2}{3}\,\frac{2+x}{\sqrt{1+x+x^2}}.$$

24. $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1+x+x^2)^3}} = -\frac{2}{3}\,\frac{x-1}{R} + l(1+2x+2R).$$

25. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}} = l\,\frac{2+x-2R}{x}.$$

26. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x+x^2}} = -\frac{1}{x}R - \frac{1}{2}\,l\,\frac{2+x-2R}{x}.$$

27. $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\,l\,(a+2bx+2\sqrt{b}\,R) \qquad (b>0).$$

28. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2rx-x^2}} = -R + r\,\mathrm{arc\,sen}\,\frac{x-r}{r}.$$

29. $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2rx-x^2}} = -\frac{3r+x}{2}R + \frac{3}{2}r^2\,\mathrm{arc\,sen}\,\frac{x-r}{r}.$$

30. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{2rx-x^2}} = -\frac{R}{rx}.$$

31. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2rx-x^2}} = -\frac{(r+x)R}{3r^2x^2}.$$

32. $$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{3+2x+x^2}} = \left(\frac{x^3}{4} - \frac{7x^2}{12} + \frac{x}{3} + \frac{5}{2}\right)R$$
$$-\frac{7}{2}\,l\,(1+x+R).$$

CAPÍTULO IV

Integración de las funciones trigonométricas y exponenciales

§ 1.° FUNCIONES QUE SE REDUCEN Á LAS FUNCIONES ALGEBRÁICAS

29. INTEGRACION. Se reducen á las funciones algebráicas, por simple sustitución, de las integrales que contienen bajo el signo $\int$ una función algebráica de una transcendente, multiplicada por la diferencial de esta trascendente. Así sucede á las integrales

$$\int f(e^x)e^x dx, \quad \int f(lx)\frac{dx}{x}, \quad \int f(\text{sen } x)\cos x\, dx, \quad \text{etc.}$$

Por ejemplo, si se quiere obtener

$$\int (lx)^n \frac{dx}{x},$$

se hará $\quad lx = z, \quad$ y será $\quad \dfrac{dx}{x} = dz;$

luego

$$\int (lx)^n \frac{dx}{x} = \int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C = \frac{(lx)^{n+1}}{n+1} + C.$$

§ 2.° INTEGRACIÓN DE $z^n P dz$.

30. DEDUCCIÓN DE LA REGLA GENERAL. Supongamos que en $z^n Pdx$, sea z una función transcendente de x. Escribiremos, para integrar,

$$\int Pdx = P_1, \quad \int P_1 \frac{dz}{dx} dx = P_2, \quad \int P_2 \frac{dz}{dx} dx = P_3, \ldots\ldots$$

y se tendrá

$$\int z^n P dx = P_1 z^n - n \int z^{n-1} P_1 dz,$$

$$\int z^{n-1} P_1 dz = P_2 z^{n-1} - (n-1) \int z^{n-2} P_2 dz,$$

$$\int z^{n-2} P_2 dz = P_3 z^{n-2} + (n-2) \int z^{n-3} P_3 dz, \ldots\ldots;$$

por consiguiente,

$$\int z^n P dx = P_1 z^n - n P_2 z^{n-1} + n(n-1) P_3 z^{n-2} - \ldots\ldots \pm 1 \cdot 2 \ldots\ldots n P_{n+1}. \qquad (d)$$

Ejemplo 1.º Sea $P = x^{m-1}$, $z = lx$;

se tiene

$$P_1 = \int x^{m-1} dx = \frac{x^m}{m}, \quad P_2 = \int \frac{x^m}{m} \frac{dx}{x} = \frac{x^m}{m^2}, \ldots\ldots$$

$$\int x^{m-1} (lx)^n dx = \frac{x^m}{m} \left[(lx)^n - n \frac{(lx)^{n-1}}{m} + n(n-1) \frac{(lx)^{n-2}}{m^2} - \ldots\ldots \pm \frac{1 \cdot 2 \ldots n}{m^n} \right].$$

Haciendo $m = 1$, tendremos

$$\int (lx)^n dx = x[(lx)^n - n(lx)^{n-1} + \ldots\ldots \pm 1 \cdot 2 \ldots n].$$

2.º Sea $P = 1$, $z = \text{arc sen } x$,

se tiene que

$$P_1 = \int dx = x, \quad P_2 = \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2},$$

$$P_3 = -\int \frac{dx \sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x^2}} = \int dx = -x, \ldots\ldots$$

La fórmula (1) se reduce á

$$\int dx(\text{arc sen } x)^n = \left[x + \frac{n\sqrt{1-x^2}}{\text{arc sen } x}\right.$$

$$\left. - n(n-1)\frac{x}{(\text{arc sen } x)^2} - \ldots\ldots\right](\text{arc sen } x)^n.$$

Si hacemos arc sen $x = z$, se tendrá

$$\sqrt{1-x^2} = \cos z, \quad dx = \cos z dz,$$

y la fórmula anterior se reducirá á

$$\int z^n \cos z dz = \text{sen } z\,[z^n - n(n-1)z^{n-2}$$
$$+ n(n-1)(n-2)(n-3)z^{n-4} - \ldots\ldots]$$
$$+ \cos z[nz^{n-1} - n(n-1)(n-2)z^{n-3} + \ldots\ldots]$$

En general, tendremos

$$\int f(x)\cos x dx = [f(x) - f''(x) + f^{IV}(x) - \ldots\ldots] \text{ sen } x$$
$$+ [f'(x) - f'''(x) + \ldots\ldots] \cos x.$$

31. Caso de ser n negativo. En este caso se emplean artificios especiales.

Ejemplo 1.° $\int \frac{dx}{(lx)^n}$, siendo n positivo. Haremos $\log x = z$ y será

$$\int \frac{e^z dz}{z^n} = -\frac{e^z}{(n-1)z^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int e^z \frac{dz}{z^{n-1}}.$$

Por medio de esta fórmula se hará depender $\int \frac{e^z dz}{z^n}$ de $\int \frac{e^z dz}{z}$, que sólo se puede obtener por medio de una serie, y la propuesta de $\int \frac{dx}{lx}$.

Así tenemos que

$$\int \frac{e^z\,dz}{z^2} = -\frac{e^z}{z} + \int \frac{e^z\,dz}{z},$$

$$\int \frac{e^z\,dx}{z^3} = -\frac{1}{2}\,e^z\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2}\int \frac{e^z\,dz}{z}$$

. . . .

$$\int \frac{e^z\,dz}{z^m} = -\,e^z \sum_{p=1}^{p=m-1} \frac{1}{p!(m-1)_p\, z^{m-p}} + \frac{1}{(m-1)!}\int \frac{e^z\,dz}{z}.$$

Ejemplo 2.º $\displaystyle\int \frac{e^x\,x\,dx}{(1+x)^2}.$

Haremos $1 + x = z, \quad x = z - 1,$

y será

$$\int \frac{e^{z-1}(z-1)}{z^2}\,dz = \int \frac{e^{z-1}}{z}\,dz - \int \frac{e^{z-1}\,dz}{z^2}$$

$$= \frac{1}{e}\left(\int e^z\,\frac{dz}{z} - \int e^z\,\frac{dz}{z^2}\right).$$

Integrando por partes, tendremos

$$\int \frac{1}{z}\,e^z\,dz = \int \frac{1}{z}\,d(e^z) = \frac{e^z}{z} - \int e^z\,d\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{e^z}{z} + \int e^z\,\frac{dz}{z^2};$$

por consiguiente

$$\int \frac{e^x\,x\,dx}{(1+x)^2} = \frac{1}{e}\,\frac{e^z}{z} = \frac{e^{z-1}}{z} = \frac{e^x}{1+x}.$$

32. Otras integrales. La integración por partes conduce á

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}\cos bx}{a} + \frac{b}{a}\int e^{ax}\,\mathrm{sen}\, bx\,dx,$$

$$\int e^{ax}\,\mathrm{sen}\, bx\,dx = \frac{e^{ax}\,\mathrm{sen}\, bx}{a} - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx,$$

y de estas dos ecuaciones se deduce

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{a \cos bx + b \operatorname{sen} bx}{a^2 + b^2} e^{ax},$$

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx dx = \frac{a \operatorname{sen} bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax}.$$

Se tiene evidentemente

$$\int e^{(a+bi)x} dx = \frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} = e^{(a+bi)x} \frac{a-bi}{a^2+b^2};$$

pero $$e^{(a+bi)x} = e^{ax} (\cos bx + i \operatorname{sen} bx);$$

é igualando las partes reales y las imaginarias, se obtienen las fórmulas anteriores.

La integración por partes permite reducir las expresiones

$$\int e^{ax} \cos^n bx dx \quad \text{é} \quad \int e^{ax} \operatorname{sen}^n bx dx;$$

pues tenemos

$$\int e^{ax} \cos^n bx dx = \cos^n bx \frac{e^{ax}}{a} + \frac{nb}{a} \int e^{ax} \cos^{n-1} bx \operatorname{sen} bx dx.$$

Una nueva integración por partes, da

$$\int e^{ax} \cos^{n-1} bx \operatorname{sen} bx dx = \frac{e^{ax}}{a} \cos^{n-1} bx \operatorname{sen} bx$$

$$-\frac{b}{a} \int e^{ax} [\cos^n bx - (n-1) \cos^{n-2} bx \operatorname{sen}^2 bx] dx.$$

Sustituiremos $\operatorname{sen}^2 bx$ por $1 - \cos^2 bx$, y sustituyendo en la primera ecuación el resultado obtenido, será

$$\int e^{ax} \cos^n bx dx = \frac{a \cos bx + nb \operatorname{sen} bx}{a^2 + n^2 b^2} e^{ax} \cos^{n-1} bx$$

$$+ \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2 b^2} b^2 \int e^{ax} \cos^{n-2} bx dx,$$

y de igual modo se obtendrá la segunda expresión. Tenemos además

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} x dx = \frac{e^{ax}}{1 + a^2} (a \operatorname{sen} x - \cos x),$$

$$\int e^{ax} \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{e^{ax} \operatorname{sen} x}{4 + a^2} (a \operatorname{sen} x - 2 \cos x) + \frac{2 e^{ax}}{a(4 + a^2)}, \ldots$$

§ 3.º Integración de las funciones trigonométricas

33. Algunos ejemplos. Para integrar $f(\operatorname{sen} x, \cos x)dx$, cuando f expresa una función racional, haremos $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = z$, y resultará que

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x = \frac{2z}{1 + z^2},$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{1}{2} x - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \quad dx = \frac{2dz}{1 + z^2};$$

por consiguiente

$$f(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx = f\left(\frac{2z}{1 + z^2}, \frac{1 - z^2}{1 + z^2}\right) \frac{2dz}{1 + z^2},$$

función racional con relación á z.

Desde luego se integran fácilmente las funciones siguientes:

1.º $$\int \operatorname{sen} x \cos dx = \int \operatorname{sen} x d \operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x \cos x dx = \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} 2x dx = \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x d(2x);$$

luego $$\int \operatorname{sen} x \cos x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

2.° $\int \operatorname{tg} x dx = -\int \frac{d \cos x}{\cos x} = -\log \cos x + C$

ó $\int \operatorname{tg} x dx = \log \frac{1}{\cos x} + C.$

3.° $\int \cot x dx = \int \frac{d \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} = \log \operatorname{sen} x + C.$

4.° $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} = \int \frac{dx : \cos^2 x}{\operatorname{sen} x : \cos x} = \log \operatorname{tg} x + C.$

5.° $\frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x} = \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} x + C.$

6.° $\int \frac{dx}{\cos x} = \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} x\right) + C.$

7.° $\int dx \sqrt{1 - \cos x} = \int 2d\left(\frac{x}{2}\right) \sqrt{2} \operatorname{sen} \frac{x}{2}$

$$= -2\sqrt{2} \cos \frac{x}{2} + C.$$

8. $\int \frac{dx}{a \operatorname{sen} x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{dx}{\frac{a \operatorname{sen} x}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b \cos x}{\sqrt{a^2 + b^2}}}.$

Si se hace $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos k, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \operatorname{sen} k,$

será

$$\int \frac{dx}{a \operatorname{sen} x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x + k)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\, l\,\mathrm{tg}\,\frac{x+k}{2} + \mathrm{C}.$$

9.º $\displaystyle\int \frac{dx}{a \operatorname{sen} x + b \cos x + c}$ Para integrarla,

haciendo $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}x = z$, tendremos que integrar la fracción

$$\frac{2dz}{2az + b(1-z^2) + c(1+z^2)},$$

lo que da, según los casos,

$$\frac{2}{\sqrt{c^2+b^2-a^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{(c-b)\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}x + a}{\sqrt{c^2-b^2-a^2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}} \log \frac{(c-b)\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}x + a - \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{(c-b)\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}x + a + \sqrt{a^2+b^2-c^2}} + \mathrm{C}.$$

10. Sea la integral

$$\int \frac{x^2dx}{(x \operatorname{sen} x + \cos x)^2} = \int \frac{x}{\cos x}\, \frac{x \cos x\, dx}{(x \operatorname{sen} x + \cos x)^2}.$$

Integrando por partes, el segundo miembro se reducirá á

$$-\frac{x}{\cos x}\, \frac{1}{x \operatorname{sen} x + \cos x} + \mathrm{tg}\, x = \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x \operatorname{sen} x + \cos x}.$$

11. Sea $\mathrm{I}_m = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m}$. Tendremos

$$\mathrm{I}_m = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(a^2+x^2)^m}\,dx = \frac{1}{a^2}\,\mathrm{I}_{m-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2dx}{(a^2+x^2)^m}.$$

Escribiendo la última integral bajo la forma $\int \frac{x\,dx}{(a^2+x^2)^m}\,x$, resulta

$$x\,\frac{1}{(a^2+x^2)^{m-1}}\times\frac{1}{2(1-m)}-\int\frac{1}{2(1-m)}\,\frac{1}{(a^2+x^2)^{m-1}}\,dx$$

y finalmente

$$I_m=\frac{1}{2(m-1)a^2(a^2+x^2)^{m-1}}+\frac{2m-3}{2m-2}\,\frac{1}{a^2}\,I_{m-1}.$$

34. PRODUCTOS DE SENOS Y COSENOS. Sea

$$\int \operatorname{sen}(ax+b)\operatorname{sen}(a'x+b')\,dx.$$

Tenemos que

$$\operatorname{sen}(ax+b)\operatorname{sen}(a'x+b')=\frac{\cos[(a-a')x+b-b']}{2}$$

$$-\frac{\cos[(a+a')x+b+b']}{2};$$

de donde

$$\int \operatorname{sen}(ax+b)\operatorname{sen}(a'x+b')\,dx=\frac{\operatorname{sen}[(a-a')x+b-b']}{2(a-a')}$$

$$-\frac{\operatorname{sen}[(a+a')x+b+b']}{2(a+a')}+C.$$

35. DIFERENCIALES DE LA FORMA $\operatorname{sen}^m x\cos^n x\,dx$.

1.° Si hacemos $\operatorname{sen} x = z$, tendremos

$$\cos x=(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\quad \text{y}\quad dx=(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx,$$

y

$$\operatorname{sen}^m x\cos^n x=z^m(1-z^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dx.$$

Si n es un número entero impar, positivo ó negativo, se podrá integrar, para cualquier valor entero de m.

2.º Sean m y n números positivos. Se podrá reducir la integral á otras más sencillas mediante la integración por partes, y tendremos

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx = \int \cos^{n-1} x \operatorname{sen}^m x \cos x dx$$

$$= \int \cos^{n-1} x \operatorname{sen}^m x d (\operatorname{sen} x) = \int \cos^{n-1} x d \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x}{m+1};$$

luego:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx = \cos^{n-1} x \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x}{m+1}$$

$$+ \frac{n-1}{m+1} \int \operatorname{sen}^{m+2} x \cos^{n-2} x dx. \qquad (\alpha)$$

Para que no quede aumentado el exponente de sen x, haremos

$$\operatorname{sen}^{m+2} x \cos^{n-2} x = \operatorname{sen}^m x (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x$$

$$= \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x - \operatorname{sen}^m x \cos^n x;$$

luego

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx = \cos^{n-1} x \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x}{m+1}$$

$$+ \frac{n-1}{m+1} \left(\int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x dx - \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx \right);$$

y reduciendo

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n}$$

$$+ \frac{n-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x dx. \qquad \text{(A)}$$

Reduciendo sucesivamente, llegaremos á una de las integrales

$$\int \operatorname{sen}^m x dx, \quad \int \operatorname{sen}^m x \cos x dx,$$

según que n sea par ó impar. La última integral es

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos x dx = \int \operatorname{sen}^m x d \operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x}{m+1} + C$$

y la anterior se integra como en el ejemplo siguiente

$$\operatorname{sen}^5 x = \frac{1}{16} (\operatorname{sen} 5x - 5 \operatorname{sen} 3x + 10 \operatorname{sen} x)$$

$$\int \operatorname{sen}^5 x dx = \frac{1}{16}\left(-\frac{1}{5}\cos 5x + \frac{5}{3}\cos 3x - 10\cos x\right) + C.$$

Podemos escribir como sigue la fórmula recurrente deducida

$$I_{m,n} = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}.$$

Si $n = 1$, la integración es inmediata:

$$I_{m,1} = \int \operatorname{sen}^m x \cos x dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x}{m+1}.$$

Si $n = 0$, tenemos que integrar $J_m = \int \operatorname{sen}^m x dx$, y la fórmula recurrente será

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2} - \frac{1}{m} \operatorname{sen}^{m-1} x \cos x.$$

Observación 1.ª Sabemos que

$$2^{m-1} \cos^m x = \cos mx + m \cos (m-2)x + \ldots\ldots,$$

$$(-1)^{\frac{m}{2}} 2^{m-1} \operatorname{sen}^m x = \cos mx - m \cos (m-2)x + \ldots\ldots$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} 2^{m-1} \operatorname{sen}^m x = \operatorname{sen} mx - m \operatorname{sen} (m-2)x + \ldots\ldots$$

Según que m es par ó impar, y tendremos que integrar

$$\int \operatorname{sen} px \cos px dx, \qquad \int \cos px \cos qx dx;$$

y puesto que

$$2 \operatorname{sen} px \cos qx = \operatorname{sen}(p+q)x + \operatorname{sen}(p-q)x,$$
$$2 \cos px \cos qx = \cos(p+q)x + \cos(p-q)x,$$

la integración podrá considerarse efectuada.

Ejemplo 2.º $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x dx$

$$= \frac{1}{64}\left(\frac{1}{7}\cos 7x + \frac{1}{5}\cos 5x - 2\cos 3x + 6\cos x.\right).$$

Observación 2.ª Cuando $m = -n$, la fórmula (A) es ilusoria; pero en este caso la (α) da

$$\int \operatorname{tg}^m x\, dx = \frac{\operatorname{tg}^{m+1}}{m+1} - \int \operatorname{tg}^{m+2} x\, dx.$$

Cambiemos $m+2$ en m ó m en $m-2$ y resolvamos con relación á $\int \operatorname{tg}^m x\, dx$, y tendremos

$$\int \operatorname{tg}^m x dx = \frac{\operatorname{tg}^{m-1} x}{m-1} - \int \operatorname{tg}^{m-2} x dx, \tag{B}$$

fórmula que sirve para reducir el exponente de tg x, y conduce á

$$\int dx = x + C \quad \text{ó á} \quad \int \operatorname{tg} x dx = -\log\cos x + C,$$

según que m sea par ó impar.

Se puede reducir el exponente de sen x sustituyendo en (A) x por $\frac{\pi}{2} - x$, m por n y n por m; y tendremos

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n}$$
$$+ \frac{m-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^n x dx. \tag{C}$$

Por medio de esta fórmula llegaremos, si m es impar á la integral $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$, y si es par á $\int dx = x + C$; luego cuando m y n son enteros y positivos, será siempre posible hallar la integral

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx.$$

3.° Supongamos que sea m entero negativo, siendo n positivo ó negativo. Sustituyendo m por $-m+2$ en C, y resolviendo con respecto á la integral del segundo miembro, tendremos

$$\int \frac{\cos^n x dx}{\operatorname{sen}^m x} = -\frac{\cos^{n+1} x}{(m-1)\operatorname{sen}^{m-1} x} + \frac{m-n-2}{m-1}\int \frac{\cos^n x}{\operatorname{sen}^{m-2} x} dx.$$

La integral propuesta se reducirá pues á $\int \cos^n x dx$ ó á $\int \frac{\cos^n x}{\operatorname{sen} x} dx$, según que sea m par ó impar.

Se deduce de la fórmula (C) haciendo $n = 0$,

$$\int \operatorname{sen}^m x dx = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \operatorname{sen}^{m-2} x dx;$$

y por consiguiente, si m es par,

$$\int \operatorname{sen}^m x dx = -\frac{\cos x}{m}\left[\operatorname{sen}^{m-1} x + \frac{m-1}{m-2}\operatorname{sen}^{m-3} x\right.$$
$$\left. + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}\operatorname{sen}^{m-5} x + \ldots + \frac{(m-1)\ldots 3 \cdot 1}{(m-2)\ldots 4 \cdot 2}\operatorname{sen} x\right]$$
$$+ \frac{(m-1)(m-3)\ldots 3 \cdot 1}{(m-2)(m-4)\ldots 4 \cdot 2}\frac{x}{m} + C;$$

y si m es impar,

$$\int \operatorname{sen}^m x dx = -\frac{\cos x}{m}\left[\operatorname{sen}^{m-1} x + \frac{m-1}{m-2}\operatorname{sen}^{m-3} x + \ldots\right.$$
$$\left. + \frac{(m-1)(m-3)\ldots 2}{(m-2)(m-4)\ldots 1}\right] + C.$$

De igual manera se obtendrá $\int \cos^n x dx$.

36. OTRAS INTEGRALES 1.º Sea $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos\alpha + \cos x}$.

Se tiene que

$$\cos\alpha + \cos x = 2\cos\frac{x+\alpha}{2}\cos\frac{x-\alpha}{2},$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\frac{x+\alpha}{2}\cos\frac{x-\alpha}{2} - \operatorname{sen}\frac{x-\alpha}{2}\cos\frac{x+\alpha}{2}$$

$$\frac{dx}{\cos\alpha + \cos x} =$$

$$= \frac{dx}{2\operatorname{sen}\alpha}\;\frac{\operatorname{sen}\dfrac{x-\alpha}{2}\cos\dfrac{x+\alpha}{2} - \operatorname{sen}\dfrac{x+\alpha}{2}\cos\dfrac{x-\alpha}{2}}{\cos\left(\dfrac{x+\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-\alpha}{2}\right)}$$

$$\int \frac{dx}{\cos\alpha + \cos x} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\, l\, \frac{\cos\dfrac{x-\alpha}{2}}{\cos\dfrac{x+\alpha}{2}} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\, l\, \frac{1 + \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\,\text{sect. hip.}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right).$$

2.º Sea $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x\,(a + b\cos x)}$.

Se tiene idénticamente

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x\,(a + b\cos x)} + \frac{b^2 \operatorname{sen} x}{(a^2 - b^2)(a + b\cos x)} = \frac{a - b\cos x}{(a^2 - b^2)\operatorname{sen} x},$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x\,(a + b\cos x)} = \frac{-b}{a^2 - b^2}\int \frac{b\operatorname{sen} x\,dx}{a + b\cos x}\cdot$$

$$+\frac{a}{a^2-b^2}\int\frac{dx}{\operatorname{sen} x}-\frac{b}{a^2-b^2}\int\frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen} x}$$

$$=\frac{b}{a^2-b^2}\,l\,(a+b\cos x)+\frac{a}{a^2-b^2}\,l\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{b}{a^2-b^2}\,l\operatorname{sen} x.$$

3.° La integración por partes conduce á la reducción sucesiva de las diferenciales de la forma $x^m \operatorname{sen} x\,dx$, $x^m \cos x\,dx$, $x^m a^x\,dx$; y se tiene que

$$\int x^m \operatorname{sen} x\,dx=-x^m\cos x+m\int x^{m-1}\cos x\,dx$$

$$\int x^m \cos x\,dx=x^m\operatorname{sen} x-m\int x^{m-1}\operatorname{sen} x\,dx$$

$$\int x^m a^x\,dx=\frac{x^m a^x}{la}-\frac{m}{la}\int x^{m-1}a^x\,dx.$$

Ejemplos:

$$\int x^3\operatorname{sen} x\,dx=(3x^2-6)\operatorname{sen} x-(x^3-6x)\cos x,$$

$$\int x^4\operatorname{sen} x\,dx=(4x^3-24x)\operatorname{sen} x-(x^4-12x^2+24)\cos x.$$

4.° Para rebajar el exponente n en la integral $\int\frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^n x}\cancel{dx,}$ tenemos que

$$\frac{d}{dx}\,\frac{nx\cos x+\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^{n+1} x}=\frac{n^2 x\operatorname{sen}^2 x-n\,(n+1)\,x}{\operatorname{sen}^{n+2} x}.$$

Integrando y trasponiendo,

$$\int\frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^{n+2} x}=-\frac{nx\cos x+\operatorname{sen} x}{n\,(n+1)\operatorname{sen}^{n+1} x}+\frac{n}{n+1}\int\frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^n x}.$$

Por la aplicación repetida de esta fórmula, se reducirá la integral $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^{n+2} x}$, según que sea n par ó impar, á $\frac{x\,dx}{\operatorname{sen} x}$, que no es expresable explícitamente, ó á

$$\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -x \cot x + \int \cot x\,dx = -x \cot x + l \operatorname{sen} x.$$

Hallaríamos igualmente que

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^{n+2} x} = \frac{nx \operatorname{sen} x - \cos x}{n(n+1)\cos^{n+1} x} + \frac{n}{n+1}\int \frac{x\,dx}{\cos^n x};$$

pudiéndose reducir la integral, cuando n es par, á

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = x \operatorname{tg} x + l \cos x.$$

Ejemplos:

$$\int \frac{x}{\operatorname{sen}^2 x} = -x \cot x + l \operatorname{sen} x$$

$$\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^4 x} = -\frac{\operatorname{sen} x + 2x \cos x}{6 \operatorname{sen}^3 x} - \frac{2}{3}(x \cot x - l \operatorname{sen} x)$$

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = x \operatorname{tg} x + l \cos x$$

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^4 x} = \frac{2x \operatorname{sen} x - \cos x}{6 \cos^3 x} + \frac{2}{3}(x \operatorname{tg} x + l \cos x).$$

5.º Se pueden reducir por descomposición, las diferenciales de la forma

$$\frac{\cos nx\,dx}{\cos^p x}, \qquad \frac{\cos nx}{\operatorname{sen}^p x}.$$

En efecto, tenemos idénticamente

$$\frac{\cos nx}{\cos^p x} = \frac{2\cos(n-1)x}{\cos^{p-1} x} - \frac{\cos(n-2)x}{\cos^p x},$$

$$\frac{\cos nx}{\operatorname{sen}^p x} = -\frac{2\operatorname{sen}(n-1)x}{\operatorname{sen}^{p-1} x} + \frac{\cos(n-2)x}{\operatorname{sen}^p x};$$

por consiguiente

$$\int \frac{\cos nx\,dx}{\cos^p x} = 2\int \frac{\cos(n-1)\,x\,dx}{\cos^{p-1} x} - \int \frac{\cos(n-2)\,x\,dx}{\cos^p x},$$

$$\int \frac{\cos nx\,dx}{\operatorname{sen}^p x} = 2\int \frac{\operatorname{sen}(n-1)\,x\,dx}{\operatorname{sen}^{p-1} x} + \int \frac{\cos(n-2)\,x\,dx}{\operatorname{sen}^p x}.$$

6.° Tenemos que

$$\frac{dx}{a\operatorname{sen}^2 x + b\cos^2 x} = \frac{dx : \cos^2 x}{a\operatorname{tg}^2 x + b},$$

y haciendo $\operatorname{tg} x = z$, resulta $\dfrac{dz}{az^2 + b}$ que se integra fácilmente.

La diferencial $\dfrac{dx}{a + b\cos x}$, se integra de dos maneras diferentes según que $\dfrac{b}{a}$ es $>$ ó $<$ 1. Si $\dfrac{a}{b} < 1$, haremos $\dfrac{a}{b} = \cos\alpha$, y tendremos

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{1}{b}\int \frac{dx}{\cos\alpha + \cos x},$$

que ya conocemos. Si $\dfrac{a}{b} > 1$, haremos $\dfrac{b}{a} = \cos\alpha$, y se tendrá

$$\frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{1}{a}\,\frac{dx}{1 + \cos\alpha\cos x}.$$

Pero $$\frac{1}{1 + \cos\alpha\cos x} = \frac{1 + \cos\alpha\cos x}{(1 + \cos\alpha\cos x)^2}$$

$$= \frac{1 + \cos\alpha\cos x}{1 + 2\cos\alpha\cos x + \cos^2\alpha\cos^2 x}$$

$$= \frac{1 + \cos\alpha\cos x}{(\cos\alpha + \cos x)^2 + \operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2 x}\;\frac{\dfrac{1 + \cos\alpha\cos x}{(\cos\alpha + \cos x)^2}}{1 + \dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2 x}{(\cos\alpha + \cos x)^2}};$$

y por ser

$$d\,\frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} x}{\cos\alpha + \cos x} = \operatorname{sen}\alpha\,\frac{1 + \cos\alpha \cos x}{(\cos\alpha + \cos x)^2}\,dx,$$

será

$$\int \frac{dx}{1 + \cos\alpha \cos x} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} x}{\cos\alpha + \cos x}$$

$$= \frac{2}{\operatorname{sen}\alpha} \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right).$$

7.º La diferencial $\dfrac{dx}{(a + b\cos x)^n}$ puede integrarse por reducciones sucesivas. Hagamos

$$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n} = \frac{\mathrm{A}\operatorname{sen} x}{(a + b\cos x)^{n-1}} + \int \frac{\mathrm{B} + \mathrm{C}\cos x}{(a + b\cos x)^{n-1}}\,dx,$$

siendo A, B, C tres constantes que determinaremos de modo que se hagan idénticos los dos miembros de la ecuación. Diferenciando é identificando, tendremos

$$1 = \mathrm{A}\cos x\,(a + b\cos x) + (n-1)\,\mathrm{A}\,b\operatorname{sen}^2 x$$
$$+ (\mathrm{B} + \mathrm{C}\cos x)\,(a + b\cos x);$$

sustituyendo $\operatorname{sen}^2 x$ por $1 - \cos^2 x$, y observando que la ecuación debe verificarse para cualquier valor de $\cos x$, resulta

$$(n-1)\,\mathrm{A}b + \mathrm{B}a = 1, \qquad \mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}a = 0,$$
$$\mathrm{A} - (n-1)\,\mathrm{A} + \mathrm{C} = 0;$$

$$\mathrm{A} = \frac{1}{n-1}\,\frac{b}{b^2 - a^2}, \quad \mathrm{B} = \frac{a}{a^2 - b^2}, \quad \mathrm{C} = \frac{n-2}{n-1}\,\frac{b}{b^2 - a^2};$$

y la fórmula de reducción es

$$\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^n} = -\frac{1}{n-1}\,\frac{b}{a^2 - b^2}\,\frac{\operatorname{sen} x}{(a + b\cos x)^{n-1}}$$

$$+ \frac{1}{n-1}\,\frac{1}{a^2 - b^2}\int \frac{(n-1)\,a - (n-2)\,b\cos x}{(a + b\cos x)^{n-1}}\,dx.$$

Pero se tiene que

$$\frac{(n-1)\,a-(n-2)\,b\cos x}{(a+b\cos x)^{n-1}}=\frac{-(n-2)}{(a+b\cos x)^{n-2}}$$

$$+\frac{(2n-3)\,a}{(a+b\cos x)^{n-1}};$$

y la fórmula se reduce á

$$\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^n}=-\frac{b\operatorname{sen}x}{(n-1)(a^2-b^2)(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+\frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)}\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-2}}$$

$$+\frac{(2n-3)\,a}{(n-1)(a^2-b^2)}\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}}.$$

Ejemplo: Tenemos inmediatamente que

$$\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^2}=\frac{b\operatorname{sen}x}{(b^2-a^2)(a+b\cos x)}$$

$$-\frac{a}{a^2-b^2}\int\frac{dx}{a+b\cos x}.$$

8.º La integral $\int\frac{dx\cos x}{\sqrt[n]{\cos nx}}$ se reduce á una diferencial racional, pues haciendo

$$\frac{\cos x+\sqrt{-1}\operatorname{sen}x}{\sqrt[n]{\cos nx}}=u,$$

tendremos

$$\frac{\cos nx+\sqrt{-1}\operatorname{sen}nx}{\cos nx}=1+\sqrt{-1}\operatorname{tg}nx=u^n,$$

$$\operatorname{tg}nx=\sqrt{-1}\,(1-u^n),\ n\,dx\,(1+\operatorname{tg}^2 nx)=-nu^{n-1}\sqrt{-1}\,du,$$

$$dx=\frac{-\sqrt{-1}\,u^{n-1}\,du}{2u^n-u^{2n}},\quad dx=\frac{-\sqrt{-1}\,du}{u\,(2-u^n)};$$

y la expresión considerada udx queda reducida á la forma racional

$$\frac{-\sqrt{-1}\, du}{2 - u^n}.$$

Después de integrada, se sustituirá por u su valor, y el coeficiente de $\sqrt{-1}$ será

$$\int \frac{dx \cos x}{\sqrt[n]{\cos nx}}.$$

9.º Tenemos que

$$\frac{\cos px + \sqrt{-1} \operatorname{sen} px}{\cos nx}$$

$$= 2\, \frac{\cos (p+n)\, x + \sqrt{-1} \operatorname{sen} (p+n)\, x}{1 + \cos 2n\, x + \sqrt{-1} \operatorname{sen} 2n\, x};$$

haciendo $\cos x + \sqrt{-1} \operatorname{sen} x = z$, se llegará á

$$\frac{\cos px + \sqrt{-1} \operatorname{sen} px}{\cos nx}\, dx = \frac{2\, dz\, z^{p+n}}{z \sqrt{-1}\, (1 + z^{2n})}$$

10.º Sea

$\int f(x,\ e^{ax},\ e^{bx},\ \ldots..,\ \operatorname{sen} \alpha x,\ \cos \alpha x\ \ldots..)$, siendo f entera.

Sustituyamos los senos y cosenos por sus valores en exponenciales

$$\operatorname{sen} \alpha x = \frac{e^{\alpha i x} - e^{-\alpha i x}}{2i},\quad \cos \alpha x = \frac{e^{\alpha i x} + e^{-\alpha i x}}{2},\ \ldots..$$

entonces f será función entera de x, $e^{\alpha x}$, ... y será una suma de términos de la forma $A\, x^m\, e^{nx}$, y la cuestión se reducirá á calcular la integral $\int x^m e^{nx} dx$ que representaremos por I_m. Integrando por partes, tendremos

$$I_m = x^m \frac{e^{nx}}{n} - \frac{m}{n} \int x^{m-1} e^{nx}\, dx = x^m \frac{e^{nx}}{n} - \frac{m}{n} I_{m-1}.$$

Repitiendo la operación, llegaremos á la integral

$$I_0 = \int e^{nx}\,dx = \frac{e^{nx}}{n},$$

en la que sustituiremos las exponenciales imaginarias por sus valores en senos y cosenos.

11.° Sea calcular $\int f(x)\,e^{nx}\,dx$, siendo f racional.

Esta fracción se descompondrá en una parte entera E y en fracciones simples de la forma $\int \frac{e^{nx}}{(x-a)^m}\,dx$. Quedan las integrales de la forma

$$\int \frac{e^{nx}}{(x-a)^m}.$$

Si $m > 1$, la integración por partes dará

$$\int \frac{e^{nx}}{(x-a)^m}\,dx = e^{nx}\,\frac{1}{(-m+1)\,(x-a)^{m-1}}$$
$$-\frac{n}{-m+1}\int \frac{e^{nx}}{(x-a)^{m-1}}\,dx.$$

Este cálculo conduce á calcular la integral $\int \frac{e^{nx}}{x-a}\,dx$.

Hagamos $x = a + \frac{t}{n}$, de donde $dx = \frac{dt}{n}$. Tendremos

$$\int \frac{e^{an+t}}{t}\,dt = e^{an}\int \frac{e^t}{t}\,dt,$$

que haciendo $e^t = y$, se transforma en $\int \frac{dx}{\log y}$. Esta transcendente, en la que se determina la constante de la integración, de modo que se anule para $y = 0$, se llama *logaritmo integral* de y.

12.° Las integrales

$$\int f(x, \log x)\,dx \quad \text{é} \quad \int f(x, \text{arc sen}\, x)\,dx,$$

en las que f expresa una función entera, se reducen á las que ya se han tratado, tomando $\log x$ y $\operatorname{arc\,sen} x$ por nueva variable.

§ 4.º Aplicaciones

$$1. \int (e^{3x} + \sqrt{e^x})\, dx = \frac{e^{3x}}{3} + 2\sqrt{e^x}.$$

$$2. \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx = \int \frac{z - 1}{z(z+1)}\, dz = 2\log(e^x + 1) - x.$$

$$3. \int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx = \operatorname{arc\,tg} e^x.$$

$$4. \int e^x \sqrt{1 + e^x}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{(1 + e^x)^3}.$$

$$5. \int (e^x + e^{-x})^2\, dx = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} + 2x.$$

$$6. \int \frac{e^x}{e^x + a}\, dx = \log(e^x + a).$$

$$7. \int \frac{e^x}{(e^x + a)^n}\, dx = -\frac{1}{(n-1)(e^x + a)^{n-1}}.$$

$$8. \int x^4 e^{2x}\, dx = e^{2x}\left(\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{3x^2}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{3}{4}\right).$$

$$9. \int x^3 e^{-x}\, dx = -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6).$$

$$10. \int (\log x)^2\, dx = x[(\log x)^2 - 2\log x + 2].$$

$$11. \int \frac{\log x}{x^4}\, dx = \frac{1}{3x^3}\left(\log x + \frac{1}{3}\right).$$

12. $\int \frac{1}{x} \log x dx = \int y dy = \frac{1}{2} (\log x)^2.$ $(lx = y).$

13. $\int x \log (1 + x^2) dx = \frac{1 + x^2}{2} \log (1 + x^2) - \frac{x^2}{2}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x}} = \log \left(\sqrt{1 + e^x} - 1\right) - \log \left(\sqrt{1 + e^x} + 1\right).$

15. $\int \frac{a^x dx}{a^x + a^{-x}} = \frac{1}{2 \log a} \log (a^{2x} + 1).$

16. $\int \frac{(\log x)^2 + 1}{x} dx = \frac{1}{3} (\log x)^3 + \log x.$

17. $\int \frac{dx}{\text{sen}^2 x \cos^2 x} = \text{tg}\, x - \cot x.$

18. $\int \cos^2 x \,\text{sen}^2 x dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \text{sen}\, 4x.$

19. $\int \frac{dx}{\text{sen}^3 x} = -\frac{1}{2} \frac{\cos x}{\text{sen}^2 x} + \frac{1}{2} \log \text{tg} \frac{1}{2} x.$

20. $\int \cos^2 x \,\text{sen}\, x dx = -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} \cos 3x + \cos x \right] = -\frac{1}{3} \cos^3 x.$

21. $\int \cos^2 x \,\text{sen}^2 x dx = -\frac{1}{8} \left[\frac{1}{4} \text{sen}\, 4x - x \right].$

22. $\int \cos^3 x \,\text{sen}\, x dx = -\frac{1}{4} \cos^4 x.$

23. $\int \cos^3 x \,\text{sen}^2 x dx = \frac{1}{3} \text{sen}^3 x - \frac{1}{5} \text{sen}^5 x.$

24. $\int \frac{dx}{a \pm b \cos x}$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \, l \, \frac{\pm b + a \cos x + \sqrt{b^2 - a^2} \,.\, \text{sen}\, x}{a \pm b \cos x}; \quad (a < b).$$

$$25.\ \int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{b \operatorname{sen} \alpha} \log \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha - x)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + x)};\ (a = b \cos \alpha).$$

$$26.\ \int \frac{dx}{a\cos^2 x + b \operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{tg} x\right);\ (b \text{ y } a > 0).$$

$$27.\ \int \frac{\cos^m x}{\cos nx}\,dx$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{h=0}^{h=n-1}(-1)^h\left[\cos\frac{(2h+1)\pi}{2n}\right]^m l\,\frac{\operatorname{sen}\left[\frac{(2h+1)\pi}{4n}+\frac{x}{2}\right]}{\operatorname{sen}\left[\frac{(2h+1)\pi}{4n}-\frac{x}{2}\right]}.$$

$$28.\ \int \frac{\cos^{2m} x\,dx}{\operatorname{sen} 2nx} = \frac{1}{2n}\left[l \operatorname{sen} x\right.$$

$$\left. + \sum_{h=1}^{h=n-1}(-1)^h \cos^{2m}\frac{h\pi}{2n}\, l\left(\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2\frac{h\pi}{2n}\right)\right]\ (m \leqq n).$$

$$29.\ \int \frac{\cos 2x}{\cos x}\,dx = 2\operatorname{sen} x - \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$$

$$30.\ \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\,dx = 2x - \operatorname{tg} x.$$

$$31.\ \int \frac{\cos 2x}{\cos^3 x}\,dx = -\frac{\operatorname{sen} x}{2\cos^2 x} + \frac{3}{2}\, l \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$$

$$32.\ \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx = -\frac{2}{\operatorname{sen} x}.$$

$$33.\ \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen}^n x}\,dx = -\frac{2}{(n-2)\operatorname{sen}^{n-2} x}.$$

$$34.\ \int \frac{\cos 3x}{\cos x}\,dx = 2\operatorname{sen} x\cos x - x.$$

35. $\int \frac{(lx)^n}{x} dx = \frac{1}{n+1} (lx)^{n+1}.$

36. $\int (a + bx)\, lx\, dx = \frac{(a+bx)^2}{2b} lx$

$$- \frac{a^2}{2b} lx - ax - \frac{1}{4} b x^2.$$

37. $\int \frac{lx}{(a+bx)^2} dx = - \frac{lx}{b(a+bx)} + \frac{1}{ab} l \frac{x}{a+bx}.$

38. $\int \text{arc sen } x\, dx = x \,.\, \text{arc sen } x + \sqrt{1 - x^2}.$

39. $\int \text{arc tg } x\, dx = x \text{ arc tg } x - l\sqrt{1 + x^2}.$

40. $\int \text{arc sec } x\, dx = x \text{ arc cosec } x + l(x + \sqrt{x^2 - 1}).$

41. $\int x^n \text{ arc sen } x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ arc sen } x$

$$- \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

42. $\int \frac{\text{arc sen } x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2} [\text{ arc sen } x]^2.$

43. $\int \text{arc sen } x \frac{dx}{(\sqrt{1 - x^2})^2} = \frac{x \text{ arc sen } x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{2} l(1 - x^2).$

44. $\int \text{arc tg } x \,.\, \frac{x^4 dx}{1 + x^2} = - \frac{1}{6} x^2 + \frac{2}{3} l(1 + x^2).$

$$+ \left(\frac{x^3}{3} - x\right) \text{arc tg } x + \frac{1}{2} (\text{arc tg } x)^2.$$

CAPÍTULO V

Cálculo directo de las integrales definidas

---

§ 1.º Paso de la integral indefinida á la integral definida

37. Fundamento del método. Sabemos que si f es la derivada de φ, se tiene

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C \tag{1}$$

y por consiguiente, que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a). \tag{2}$$

La función φ debe suponerse continua, porque sin esta condición, el incremento total no sería igual á la suma de los incrementos parciales.

Esta condición es muy importante, porque indica la elección que debe hacerse en ciertos casos entre varios valores que tiene simultáneamente la función, los cuales dan una apariencia indeterminada á una integral bien definida. Así por ejemplo, en virtud de la fórmula (2)

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1 + x^2} = \text{arc tg } 1 - \text{arc tg } (-1). \tag{3}$$

La función arc tg x está mal determinada. A una misma tangente corresponde un número infinito de arcos diferentes. Los dos términos del segundo miembro de (3) son indeterminados separadamente, pero no lo es su diferencia, por representar el incremento de un arco que varía de una manera continua desde el valor para el que la tangente es -1 hasta el valor para el que es $+1$. La expresión del primero de los arcos es $k\pi - \frac{\pi}{4}$, siendo k un número arbitrario; pero elegido una vez este número, no se le debe cambiar cuando el arco varía hasta el valor $k\pi + \frac{\pi}{4}$, cuya tangente es $+1$. Por consiguiente, sin ambigüedad, tenemos

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Sea la integral

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{1+\cos^2 x}.$$

Tenemos evidentemente que

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\cos x};$$

y aplicando la regla general,

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{1+\cos^2 x} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\cos \frac{3\pi}{4}} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\cos 0}$$

$$= \operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{2}) - \operatorname{arc\,tg} 1.$$

Para saber el sentido que ha de darse á las expresiones mal determinadas $\operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{2})$ y $\operatorname{arc\,tg} 1$, consideremos la función $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\cos x}$ de que provienen; y tomemos arbitrariamente para $x = 0$,

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\cos 0} = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Al variar x desde o hasta $\frac{\pi}{2}$, la función aumenta desde $\frac{\pi}{4}$ hasta $\frac{\pi}{2}$, y en este caso no hay dificultad; pero al pasar por el valor $\frac{\pi}{2}$, la función que representaba un arco cuya tangente era muy grande y positiva, representa un arco cuya tangente es muy grande y negativa. Es por tanto preciso, para la continuidad, tomar este arco positivo y un poco mayor que $\frac{\pi}{2}$, de manera que al continuar creciendo x, se debe tomar, para $x = \frac{3\pi}{4}$,

$$\text{arc tg} \frac{1}{\cos \frac{3\pi}{4}} = \text{arc tg} (-\sqrt{2}) = \frac{3\pi}{4};$$

y se tiene finalmente

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{1 + \cos^2 x} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Sea
$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\left(b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right).$$

Esta fórmula es exacta aun cuando al tener a y b signos contrarios, x pasa por cero, pues podemos considerar las integrales

$$\int_a^{-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\left[(-\varepsilon)^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right], \quad \int_{\varepsilon'}^b \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\left[b^{\frac{2}{3}} - \varepsilon'^{\frac{2}{3}}\right],$$

en las que ε y ε' son positivos; y los límites de las dos integrales son $-\frac{3}{2} a^{\frac{2}{3}}$ y $\frac{3}{2} b^{\frac{2}{3}}$, cuya suma tiende hacia $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

§ 2.° Teoremas de las medias

38. Teoremas. Si M y m son el mayor y el menor de los valores que $f(x)$ adquiere entre a y b, suponiendo $x_{i+1} > x_i$, se tendrá

$$M(x_{i+1} - x_i) > f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) > m(x_{i+1} - x_i),$$

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} M(x_{i+1} - x_i) > \Sigma f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$> \Sigma\, m(x_{i+1} - x_i),$$

es decir, suponiendo $b > a$,

$$M(b - a) > \int_a^b f(x)\,dx > m(b - a).$$

Si pues $f(x)$ es continua, el producto $(b - a)f(x)$ pasa por todos los valores comprendidos entre $m(b - a)$ y $M(b - a)$, y particularmente, existirá un valor ξ comprendido entre a y b tal, que se tenga

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a) f(\xi).$$

En esta igualdad consiste el *primer teorema de la media.*

Se vió además (t. II. pág. 114) que conservando las anteriores notaciones, se tiene siendo $\varphi(x)$ una función que permanece positiva para todos los valores de x comprendidos entre a y b

$$M\varphi(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) > \varphi(\xi_i)f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$> m\,\varphi(\xi_i)(x_{i+1} - x_i);$$

y efectuando la suma de todas las desigualdades análogas para $i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$; y pasando al límite, se obtiene

$$M\int_a^b \varphi(x)\,dx > \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx > m\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

ó, razonando como anteriormente,

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x)\, dx,$$

hallándose ξ comprendida entre a y b.

Esta desigualdad se conoce con el nombre de *segundo teorema de la media.*

Aplicaciones: 1.ª Sea

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad (1 > k^2 < 1).$$

Tendremos que

$$M \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} > K > m \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$$

Pero

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \left(-2\sqrt{1-x}\right)_0^1 = 2;$$

y hallándose x comprendido entre 0 y 1, $1+x$ estará comprendido entre 1 y 2, y $1-k^2x^2$ entre 1 y $1-k^2$; luego

$$2 > (1+x)(1-k^2x^2) > 1-k^2.$$

Podremos pues hacer $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $M = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$; y será

$$\frac{2}{\sqrt{1-k^2}} > K > \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

2.ª Sea la integral

$$\int_0^1 \log \operatorname{sen} x\, dx.$$

Siendo log sen x constantemente negativo, la integral tendrá todos sus elementos negativos; su valor tendrá pues cero por límite superior. Para obtener un límite inferior, haremos

$$\int_0^1 \log\left(x\frac{\text{sen }x}{x}\right)dx = \int_0^1 \log x\,dx + \int_0^1 \log\frac{\text{sen }x}{x}\,dx.$$

Integrando por partes resulta

$$\int_0^1 \log x\,dx = \left[x\log x\right]_0^1 - \int_0^1 x\frac{dx}{x} = -\text{I}.$$

Además, siendo $\frac{\text{sen }x}{x}$ creciente desde I hasta O, el menor valor de $\log\frac{\text{sen }x}{x}$ corresponderá á este límite, y se tendrá

$$\int_0^1 \log\frac{\text{sen }x}{x}\,dx \geqslant \int_0^1 \log \text{sen }(\text{I})\,dx \geqslant \log \text{sen }(\text{I});$$

luego $\displaystyle\int_0^1 \log \text{sen }x\,dx \geqslant -\text{I} + \log \text{sen }(\text{I}).$

3.ª Sea

$$\text{F}(\Phi) = \int_0^\Phi \frac{d\varphi}{\sqrt{\text{I} - k^2\,\text{sen}^2\varphi}} \qquad (k < \text{I}).$$

Tendremos

$$(\text{I} - k^2\,\text{sen}^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = \text{I} + \frac{\text{I}}{2}k^2\,\text{sen}^2\varphi + \ldots$$

$$+ \frac{\text{I}.3\ldots(2n-\text{I})}{2.4\ldots 2n}k^{2n}\,\text{sen}^{2n}\varphi + \ldots$$

Integrando desde o hasta Φ, y haciendo $\text{I}_{2n} = \int_0^\Phi \text{sen}^{2n}\varphi\,d\varphi$, resulta

$$\text{F}(\Phi) = \Phi + \frac{\text{I}}{2}\text{I}_2 k^2 + \ldots + \frac{\text{I}.3\ldots(2n-\text{I})}{2.4\ldots 2n}\text{I}_{2n}k^{2n} + \ldots$$

En el caso de ser $\Phi = \frac{\pi}{2}$, se tiene

$$\mathrm{I}_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n} \frac{\pi}{2}$$

de donde

$$\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \ldots\ldots \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1 \cdot 3 \ldots\ldots (2n-1)}{2 , 4 \ldots\ldots 2n}\right]^2 k^{2n} + \ldots\ldots \right\}$$

Si k está próximo á la unidad, hagamos $k^2 = 1 - k'^2$, y será

$$(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} = (\cos^2 \varphi + k'^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\cos \varphi} \left[1 - \frac{1}{2} k'^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + \ldots\ldots \right.$$

$$\left. + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \ldots\ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots\ldots 2n} k'^{2n} \operatorname{tg}^{2n} \varphi + \ldots\ldots \right];$$

integrando desde o hasta Φ resultará

$$\mathrm{F}(\Phi) = \mathrm{J}_0 - \frac{1}{2} \mathrm{J}_2 k'^2 + \ldots$$

$$+ (-2)^n \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n} \mathrm{J}_{2n} k'^{2n} + \ldots,$$

expresando por J_{2n} la integral

$$\int_0^\Phi \operatorname{tg}^{2n} \varphi \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \int_0^\Phi \operatorname{sen}^{2n} \varphi \cos^{-2n-1} \varphi \, d\varphi.$$

Y, haciendo $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$, será

$$J_0 = \int_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\Phi} \frac{d\psi}{\operatorname{sen}\psi} = -\left(\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\right)_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\Phi}$$

$$= -\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}\right).$$

Así la integral

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

en la que x y k^2 son menores que 1, es igual á

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\xi^2}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-k^2\xi^2}}.$$

Se puede escribir también, sustituyendo ξ por 0 y 1,

$$\operatorname{arc\,sen} x < \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} < \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-k^2}}.$$

§ 1.° Paso de la integral indefinida á la definida

Ejemplo 1.°

$$\frac{dx}{1+\alpha^2 \operatorname{sen}^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x + (\alpha^2+1)\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \int \frac{\dfrac{dx}{\cos^2 x}}{1+(\alpha^2+1)\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\alpha^2+1}\, \operatorname{tg} x;$$

luego

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\alpha^2\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha^2+1}}.$$

Ejemplo 2.º Sea $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}}$.

Haciendo $$x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

se obtiene

$$\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{arc\,tg} y \sqrt{\frac{a+1}{a-1}}$$

é $$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Ejemplo 3.º Sean $\int_0^\pi \cos mx \cos nx\, dx$,

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx, \quad \int_0^\pi \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx$$

en las que m y n son enteros. Si se supone $m = n$, se tiene

$$\int_0^\pi \cos^2 mx\, dx = \int_0^\pi \frac{1+\cos 2mx}{2}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 mx\, dx = \int_0^\pi \frac{1-\cos 2mx}{2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Ejemplo 4.º $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\, dx$. Se obtuvo esta integral suponiendo n par, (pág. 13), extendiéndose la suma á todos los valores enteros positivos menores que $\frac{n}{2}$. Supongamos que $m-1$ sea par, así como n; y sustituyamos á la integral obtenida la expresión equivalente

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1}\, dx}{1+x^n}$$

Podremos considerar á ésta como el límite de

$$\int_{-h}^{+h} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx\,,$$

cuando h aumenta indefinidamente. Pero sustituyendo á x los valores $-h$ y h, y restando entre sí los dos resultados se obtiene

$$-\frac{1}{n}\cos\frac{(2k-1)\,m\pi}{n}\; l\,\frac{1-2h\cos(2k-1)\frac{\pi}{n}+h^2}{1+2h\cos(2k-1)\frac{\pi}{n}+h^2}\,;$$

y cuando h se hace infinito, esta expresión se reduce á cero, por tener como factor el logaritmo de la unidad. Los términos de este género no tienen influencia en el resultado. Además se tiene, para un valor infinito de x,

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos(2k-1)\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen}\frac{(2k-1)\,\pi}{n}}=\frac{\pi}{2}$$

y para $x=-\infty$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos(2k-1)\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen}\frac{(2k-1)\,\pi}{n}}=-\frac{\pi}{2}$$

La diferencia de estos dos resultados es π, y se tiene por tanto

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{n}\,\Sigma\operatorname{sen}(2k-1)\frac{m\pi}{n}$$

$$=\frac{\pi}{n}\left[\operatorname{sen}\frac{m\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{3\,m\pi}{n}+\ldots\ldots+\frac{\operatorname{sen}(n-1)\,m\pi}{n}\right].$$

es decir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n} = \frac{2\pi}{n \operatorname{sen} \frac{m\pi}{n}}, \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{1-x^n} = \frac{\pi}{n \operatorname{sen} \frac{m\pi}{n}}$$

Observación. Si se hace $x^n = z$ la fórmula anterior se reduce á

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{\frac{m}{n}-1}\,dz}{1+z} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \frac{m\pi}{n}}$$

Si se hace $\frac{m}{n} = a$, se tiene $\int_0^{\infty} \frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}$.

Si se hace en esta fórmula $na = n - k$, se reduce á

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{n-k-1}}{1+z^n} = \frac{\pi}{n \operatorname{sen} \frac{n-k}{n}\pi} = \frac{\pi}{n \operatorname{sen} \frac{k\pi}{n}}.$$

Ejemplo 5.º Sea $i_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x\,dx.$ (1)

Introduciendo los límites en la integral

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2} - \frac{1}{m} \operatorname{sen}^{m-1} x \cos x,$$

resultará $$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}\,; \tag{2}$$

y cambiando sucesivamente

$$m \text{ en } m-2, \quad m-4, \quad \ldots\ldots \quad m-2p+2,$$

$$I_{m-2} = \frac{m-3}{m-2} I_{m-4}, \ldots\ldots I_{m-2p+2} = \frac{m-2p-3}{m-2p-2} I_{m-2p}.$$

Multiplicando y simplificando,

$$I_m = \frac{(m-1)(m-3)\ldots\ldots(m-2p+1)}{m(m-2)\ldots\ldots(m-2p+2)} I_{m-2p}. \quad (3)$$

Si m es par, se obtendrá para $p = \frac{m}{2}$ la integral I_0 cuyo valor es $\frac{\pi}{2}$. Si m es impar, se llegará á I_1 es igual á 1; luego

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots\ldots 3 \cdot 1}{2k(2k-2)\ldots\ldots 4 \cdot 2} \frac{\pi}{2}. \quad (4)$$

$$I_{2k+1} = \frac{2k(2k-2)\ldots\ldots 2}{(2k+1)(2k-1)\ldots\ldots 3}. \quad (5)$$

§ 4.° Fórmula de Wallis

Puesto que $\operatorname{sen}^m x$ disminuye cuando m aumenta, se tiene

$$I_{2k} > I_{2k+1} > I_{k2+2} \qquad 1 > \frac{I_{2k+1}}{I_{2k}} > \frac{I_{2k+2}}{I_{2k}}.$$

Pero la última razón tiende hacia 1, en virtud de (2), cuando k crece hacia el infinito; luego

$$\lim_{k=\infty} \frac{I_{2k+1}}{I_{2k}} = 1;$$

y sustituyendo los valores obtenidos en el número anterior,

$$\lim_{k=\infty} \frac{2k}{2k+1} \frac{2k}{2k-1} \frac{2k-2}{2k-1} \frac{2k-2}{2k-3} \ldots\ldots \frac{2}{3} \frac{2}{1} \frac{2}{\pi} = 1,$$

resultando que

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\cdots\cdots = \prod_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^2(2n+1). \qquad (6)$$

Esta expresión de π constituye la *fórmula de Wallis.*

39. Otro procedimiento. Si en la expresión (*)

$$\operatorname{sen} x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\cdots$$

se hace $x = \frac{\pi}{2}$, resulta

$$\frac{2}{\pi} = \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{36}\right)\cdots\cdots;$$

el factor general de este producto puede ponerse bajo la forma

$$1-\frac{1}{4n^2} = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n+1}{2n};$$

luego
$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\cdots\cdots$$

§ 5.º Extensión de la noción de la integral definida

40. Teorema I. *Si para* $x = x_0$, $f(x)$ *se hace infinita, conservando el producto* $(x - x_0)^\alpha f(x)$ *un valor finito, y siendo* α *menor que* 1, *la integral* $\int_a^b f(x)dx$, *en la que* $a < x_0 < b$, *tendrá una significación determinada.*

Basta probar que cada una de las integrales

$$\int_a^{x_0} f(x)dx \quad \text{y} \quad \int_{x_0}^{b} f(x)dx$$

(*) Véase t. I, p. 219. Estas fórmulas se deben á Euler. *Introductio in Analysim infinitorum*, t. I, § 158.

tiene una significación determinada. Consideremos la primera.

Sea L el límite del producto $(x_0 - x)^\alpha f(x)$; se tendrá, siempre que x esté bastante próximo de x_0 $(x < x_0)$,

$$L - \varepsilon < (x_0 - x)^\alpha f(x) < L + \varepsilon,$$

siendo ε tan pequeño como se quiera; y resultará que

$$\frac{L - \varepsilon)}{x_0 - x)^\alpha} < f(x) < \frac{L + \varepsilon}{(x_0 - x)^\alpha}.$$

Por consiguiente,

$$(L - \varepsilon)\int_a^{x_0} \frac{dx}{(x_0 - x)^\alpha} < \int_a^{x_0} (x)dx < (L + \varepsilon)\int_a^{x} \frac{dx}{(x_0 - a)^\alpha}.$$

Pero la integral del 1.º y 3.er miembro tienen un valor determinado L_1; luego la integral $\int_a^x f(x)dx$ tiene un límite L . L_1 bien determinado.

Igualmente, si este producto no tiende hacia cero; y si α es > 1, la integral $\int_a^{x_0} f(x)dx$ no tiene sentido. La expresión $\int_a^{x_0 - \varepsilon}$ crece sin límite cuando ε tiende hacia cero. Se podrá, para ε bastante pequeño, y suponiendo, $(x_0 - x)^\alpha f(x)$ positivo, por ejemplo, hallar un número n tal, que se tenga

$$(x_0 - x)^\alpha f(x) > n;$$

y por ser $\quad (x_0 - x)^\alpha > 0, \quad f(x) > \dfrac{n}{(x_0 - x)^\alpha},$

ó, integrando,

$$\int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x)dx > n\int_a^{x_0 - \varepsilon} \frac{dx}{(x_0 - x)^\alpha}.$$

El valor del segundo miembro es

$$\frac{1}{\alpha - 1}\left[\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{(x_0 - a)^{\alpha-1}}\right],$$

que crece sin límite cuando ε tiende á cero.

TEOREMA II. *Si para* x *infinito, el producto* x^n f(x) *permanece inferior en valor absoluto á un número dado* L, la integral $\int_a^\infty$ f(x) dx *tendrá un límite, siempre que* n *sea mayor que* 1, pues

$$x^n f(x) < L, \quad \text{de donde} \quad f(x) < \frac{L}{x^n},$$

$$\int_a^x f(x)\,dx < \frac{L}{1-n}\left(\frac{1}{x^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}}\right).$$

Cuando x tiende al infinito, el segundo miembro tiene un límite finito, y lo mismo sucede al primero.

Si L es el límite de $x^n f(x)$, se tendrá

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{n-1}\,\frac{1}{a^{n-1}}.$$

Al contrario, *si* n $\geqslant$ 1, *y si el product o*x^n f(x) *permanece, para* x *suficientemente grande, superior en valor absoluto á un número dado, la integral* $\int_a^\infty$ f(x) dx *no tendrá límite.*

Ejemplos. Las integrales

$$\int_a^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - ax - b}} \quad \text{é} \quad \int_a^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

tienen valores bien determinados, cuando x_1 es una raíz de polinomio subradical y $a < x_1$, pero mayor que la raíz inmediatamente menor que x_1.

Se puede afirmar igualmente que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ tiene un valor finito; pero en virtud del teorema de la media, podremos calcularlo aproximadamente. La integral

$$\mathrm{I} = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx,$$

puede escribirse

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Para valores de x positivos y menores que 1, se tendrá

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,x\,dx < \int_0^1 e^{-x^2}\,dx.$$

La primera expresión puede integrarse completamente, porque se conoce la función primitiva de xe^{-x^2}, que es $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$. Se tiene pues,

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,x\,dx = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

y

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right) < \int_0^1 e^{-x^2}\,dx < 1, \qquad (1)$$

observando que e^{-x^2} es siempre < 1. Además, para x comprendido entre 1 é ∞

$$0 < \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx < \int_1^\infty e^{-x^2}\,x\,dx$$

ó

$$0 < \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx < \frac{1}{2e}; \qquad (2)$$

luego, sumando (1) y (2),

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2e} < \mathrm{I} < 1 + \frac{1}{2e}.$$

El valor exacto de I es $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, según veremos en el número siguiente.

§ 6.° Caso de no conocerse la integral indefinida

Ejemplo 1.° Sea la integral

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen} x \, dx.$$

Para integrarla sin conocer la integral indefinida, dividamos el intervalo comprendido entre o y $\frac{\pi}{2}$ en n partes iguales, y hagamos $h = \frac{\pi}{2n}$, $\xi_i = x_{i+1}$, de modo que se tendrá

$$\mathrm{I} = \lim_{n=\infty} \sum_1^n \frac{\pi}{2n} \log \operatorname{sen} i \frac{\pi'}{2n} \quad \text{ó} \quad \mathrm{I} = \frac{\pi}{2} \lim \frac{1}{n} \log \prod_1^n,$$

haciendo

$$\prod_1^n = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2n} \operatorname{sen} 2 \frac{\pi}{2n} \ldots\ldots \operatorname{sen} (n-1) \frac{\pi}{2n},$$

se tiene evidentemente

$$\operatorname{sen} (n-k) \frac{\pi}{2n} = \operatorname{sen} (n+k) \frac{\pi}{2n}$$

y $$\operatorname{sen} (n-k) \frac{\pi}{2n} = \cos (n-k) \frac{\pi}{2n}$$

y resulta, multiplicando $\prod\limits_1^n$ por la misma expresión, en la que se han escrito los factores en orden inverso

$$\left(\prod_1^n\right)^2 = \prod_1^{2n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} \prod_{i=1}^{i=n-1} \operatorname{sen} i \frac{\pi}{n}.$$

Este producto se puede calcular formando la ecuación que da $\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$, conociendo $\operatorname{sen} \pi = 0$.

El producto de las raíces de esta ecuación después de suprimirse la raíz nula, será el producto buscado. Se obtiene así,

$$\prod_{i=1}^{i=n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} n;$$

de donde se deduce

$$\prod_{1}^{n} = \frac{1}{2^{n-1}} \sqrt{n}, \qquad I = \frac{\pi}{2} \lim \frac{1}{n} \log \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}},$$

$$I = \frac{\pi}{2} \lim \frac{\frac{1}{2} \log n - (n-1) \log 2}{n}$$

ó, en fin,
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen} x \, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2.$$

Ejemplo 2.° La integral

$$I = \int_0^{\pi} \log (1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) \, dx,$$

fué calculada por Poisson. Se tiene

$$I = \lim_{n=\infty} \sum_{0}^{n-1} \frac{\pi}{n} \Big[\log (1 - 2\alpha + \alpha^2)$$

$$+ \log \left(1 - 2\alpha \cos \frac{\pi}{n} + \alpha^2 + \ldots\ldots \right] = \lim_{n=\infty} \frac{\pi}{n} \log \Pi_n$$

haciendo $\Pi_n = (1 - 2\alpha + \alpha^2)\left(1 - 2\alpha \cos \frac{\pi}{n} + \alpha^2\right)$

$$\ldots\ldots \left(1 - 2\alpha \cos \frac{k\pi}{n} + \alpha^2\right) \ldots\ldots \left(1 - 2\alpha \cos \frac{n-1}{n} \pi + \alpha^2\right).$$

Y por ser este producto igual á $\frac{(\alpha^{2n} - 1)(\alpha - 1)}{\alpha + 1}$, se tiene

$$I = \lim_{n=\infty} \frac{\pi}{n} \left[\log \frac{(\alpha^{2n} - 1)(\alpha - 1)}{\alpha + 1} \right].$$

Si $|\alpha| < 1$, escribiremos

$$I = \lim_{n=\infty} \frac{\pi}{n} \left[\log \frac{1-\alpha}{1+\alpha} + \log (1 - \alpha^{2n}) \right];$$

y se tiene evidentemente $I = 0$.

Si por el contrario, el módulo de α es mayor que 1, tendremos

$$I = \lim_{n=\infty} \frac{\pi}{n} \left[\log \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} + \log (\alpha^{2n} - 1) \right]$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{\pi}{n} \log (\alpha^{2n} - 1) = \lim \frac{\pi}{n} \log \alpha^{2n} \left(1 - \frac{1}{\alpha^{2n}} \right);$$

y se ve que $I = \pi \log \alpha^2$.

Ejemplo 3.° Sea otra vez la integral

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

Esta integral será el límite de $\int_0^b e^{-x^2}\, dx$, cuando $b = \infty$, si $\int_b^c e^{-x^2}\, dx$ tiende á cero, cuando b y c son finitos. Por la definición de la integral, escribiremos la primera bajo la forma

$$\lim_{h=0} \Sigma h (1 + e^{-h^2} + e^{-4h^2} + e^{-9h^2} + \ldots + e^{n^2 h^2}),$$

con $nh = b$, y la segunda bajo la forma

$$\lim_{h=0} \sum_{i=0}^{i=m-1} h \left[e^{-b^2} + e^{-(b+h)^2} + \ldots + e^{-(b+\overline{m-1}h)} \right]$$

Pero en la última suma se tiene que

$$e^{-(b+ih)^2} = e^{-b^2} e^{-2bih} e^{-i^2 h^2} < e^{-b^2} e^{-i^2 h^2},$$

de la que resulta

$$\int_b^c e^{-x^2}\, dx < e^{-b^2} \lim_{h=0} \Sigma h \left[1 + e^{-h^2} + e^{-4h^2} + \ldots\ldots \right]$$

Esta suma es finita, y puede escribirse

$$S = \frac{h}{\sqrt{1 - e^{-h^2}}} \sqrt{1 - q}\, f(q),$$

haciendo

$$e^{-h^2} = q \quad \text{y} \quad f(q) = 1 + q + q^4 + \ldots + q^{n^2} + \ldots;$$

y representando por $|\sqrt{n}|$ el mayor número entero contenido en $\sqrt{n}$, compararemos las dos series, divergentes para $q \geqq 1$,

$$\frac{f(q)}{1 - q} = \psi(q) = 1 + |\sqrt{1}|\, q + |\sqrt{2}|\, q^2 + \ldots + |\sqrt{n}|\, q^n + \ldots$$

$$F(q) = (1 - q)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2} q + \ldots$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \ldots 2n - 1}{2 \cdot 4 \ldots 2n} (2n + 1) q^n + \ldots ..$$

pudiéndose escribir en ésta el coeficiente de q^n bajo la forma

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} (1 + \varepsilon) \sqrt{2n + 1} = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} (1 + \varepsilon'),$$

en la que ε y ε' tienden hacia cero cuando $n = \infty$. La relación de los coeficientes de q^n en $\psi(q)$ y F (q) es

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{|\sqrt{n}|}{\sqrt{n}};$$

luego tiene por límite $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; luego en virtud del teorema: *Cuando dos series ordenadas según las potencias ascendentes de una misma letra son divergentes, y la relación de los coeficientes de una misma potencia de la letra ordenatriz tiene un límite, la relación de la suma de los* n *primeros términos tiene el mismo límite, cuan-*

do n *crece al infinito.* (*), la relación de las dos series tiene el mismo límite; y se tiene, haciendo tender á q hacia 1,

$$\lim_{q=1} \frac{\psi(q)}{F(q)} = \lim_{q=1} \sqrt{1-q}\, f(q) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

§ 7.º VALOR PRINCIPAL

41. Cuando la función $\varphi(x)$ cambia de signo al hacerse infinita, Cauchy llama *valor principal* de la integral $\int_a^b \varphi(x)\,dx$, al límite de la expresión

$$\int_a^{a-\varepsilon} \varphi(x)\,dx + \int_{a+\varepsilon}^{b} \varphi(x)\,dx,$$

cuando la letra ε expresa un valor infinitamente pequeño, ó si c' y c'' expresan puntos del contorno de integración situados á derecha é izquierda de c, á la suma

$$\int_{z_0}^{c'} \varphi(z)\,dz + \int_{c''}^{z_1} \varphi(z)\,dz.$$

Ejemplo 1.º Cuando se hace $\mu = 1$, $\nu = 1$, $\log\frac{\mu}{\nu}$ se reduce á cero, que es el valor principal de $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}$; $\log\frac{\mu}{\nu}$ es el valor general.

Ejemplo 2.º Sea la integral $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x^3}$. (1)

Se tiene $\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{2\varepsilon^2}+\frac{1}{2}$, $\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varepsilon^2}$.

La suma de estas dos integrales es nula, y por consiguiente el valor de la integral (1) es cero.

(*) Rouché et Levi *Obra citada* t. II, p. 90.

Aplicaciones. Para apreciar la utilidad de los valores principales en el cálculo, vamos á calcular el de la integral

$$n = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} bx}{x}\right)^2 dx \qquad (b > 0).$$

Para ello, integremos $\dfrac{1 - e^{2bzi}}{z^2}$ á lo largo de un contorno formado por el eje de las x, desde $-\infty$ hasta $-\varepsilon$, de una semicircunferencia de radio infinito descrita desde el origen como centro en la parte superior del eje de las x y de otra también, con el mismo centro y á la parte superior de dicho eje, con el radio ε. Suponiendo ε infinitamente pequeño, se tendrá

$$\text{val. pr.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{2bi}}{z^2} dz + 2\pi i \,.\, bi = 0,$$

es decir,

$$\text{val. pr.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{2bzi}}{z^2} dz = 2\pi b.$$

Separando las partes reales y las partes imaginarias, y observando que el valor de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\operatorname{sen} bx)^2}{x^2} dx$ es igual á su valor principal, se tiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \operatorname{sen}^2 bx}{x^2} dx = 2\pi b, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} bx}{x}\right)^2 dx = \pi b.$$

Para calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} bx}{x}\right)^n$, siendo n un entero cualquiera, se sustituirá sen bx por su valor en exponenciales; y la cuestión se reducirá á calcular los valores principales de integrales de la forma $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibix}}{x^n} dx$.

42. Cuando uno de los límites es infinito, consideraciones

análogas á las precedentes permiten el decidir si la integral tiene un valor finito (véase t. II pág. 121-25). Solo añadiremos que para integrar, se sustituye á ∞ un valor b que se supone crece indefinidamente, hallándose la integral definida; y enseguida se hace en la expresión de ésta, $b = \infty$.

Ejemplos. 1.º Sea $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$. Tenemos

$$\int_0^b e^{-x}\,dx = 1 - \frac{1}{e^b} \quad \text{é} \quad \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$

2.º Sea $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+c^2}$. Se tiene

$$\int_0^b \frac{dx}{x^2+c^2} = \frac{1}{c}\,\text{arc tg}\,\frac{b}{c}, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+c^2} = \frac{1}{c}\,\text{arc tg}\,\infty = \frac{\pi}{2c}.$$

§ 8.º Integrales definidas singulares

La consideración de las integrales definidas singulares proporciona el medio de calcular el valor general de una integral indeterminada, cuando se conoce su valor principal.

Sea $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$; y supongamos que se haga

$$\text{E} = \int_{x_0}^{x_1-\mu_1\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\nu\varepsilon}^{x_2-\mu_3\varepsilon} f(x)\,dx + \ldots$$
$$+ \int_{x_m+\nu_m\varepsilon}^{x} f(x)\,dx.$$

$$\text{F} = \int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_m+\varepsilon}^{x} f(x)\,dx.$$

A = lim E será el valor general y B = lim F el valor principal. La diferencia A — B = lim (E — F) equivale al límite hacia el que converge la suma de las integrales singulares, y será

$$A - B = f_1 \log \frac{\mu_1}{\nu_1} + f_2 \log \frac{\mu_2}{\nu_2} + \ldots\ldots$$

Ejemplos. 1.° $\displaystyle\int_{-\frac{1}{\mu\varepsilon}}^{\frac{1}{\nu\varepsilon}} \frac{x\,dx}{x^2 + a^2} = \log \frac{\mu}{\nu}$

$$\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{x\,dx}{x^2 + a^2} = 0, \quad \int_{-\frac{1}{\mu\varepsilon}}^{\frac{1}{\nu\varepsilon}} \left(\frac{A - B\sqrt{-1}}{x - \alpha - \beta\sqrt{-1}} \right.$$

$$\left. + \frac{A + B\sqrt{-1}}{x - \alpha + \beta\sqrt{-1}} \right) dx = 2A \log \frac{\mu}{\nu} + 2\pi B,$$

$$\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \left(\frac{A - B\sqrt{-1}}{x - \alpha - \beta\sqrt{-1}} + \frac{A + B\sqrt{-1}}{x - \alpha + \beta\sqrt{-1}} \right) dx = 2\pi B.$$

Más generalmente, si $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ es una función racional cuyo denominador no puede anularse por ningún valor real de x, la ecuación

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1 - B_1\sqrt{-1}}{x - \alpha_1 - \beta_1\sqrt{-1}} + \frac{A_1 + B_1\sqrt{-1}}{x - \alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1}} + \ldots\ldots$$

implica la siguiente:

$$\int_{-\frac{1}{\mu\varepsilon}}^{\frac{1}{\nu\varepsilon}} \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = 2\,(A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_m) \log \frac{\mu}{\nu}$$

$$+ 2\pi(B_1 + B_2 + \ldots\ldots + B_m)$$

El segundo miembro dejará de contener el factor arbitrario $\log \frac{\mu}{\nu}$, y se tendrá por consiguiente,

$$\int_{-\infty}^{-\infty} \frac{f(x)}{F(x)} = 2\pi(B_1 + B_2 + \ldots\ldots + B_m),$$

siempre que $A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_m$ sea cero. Pero esta condición se cumplirá cuando el grado de $F(x)$ exceda, por lo menos, en dos unidades al grado de $f(x)$. En efecto, se tiene

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{2A_1(x-\alpha_1) + 2B_1\beta_1}{(x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \ldots + \frac{2A_m(x-\alpha_m) + 2B_m\beta_m}{(x-\alpha_m)^2 + \beta_m^2}$$

$$= \frac{[2A_1(x-\alpha_1) + 2B_1\beta_1]\,[(x-\alpha_2)^2 + \beta_2^2]\ldots[(x-\alpha_m)^2 + \beta_m^2]}{[(x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2]\ldots[(x-\alpha_m)^2 + \beta_m^2]} + \ldots$$

Siendo $2m$ el grado del denominador, el numerador será del grado $2m - 1$, si el coeficiente de x^{2m-1}, es decir, $2(A_1 + A_2 + \ldots + A_m)$ no es nulo. Es por tanto necesario que esta suma sea nula, para que el grado del denominador exceda por lo menos en dos unidades al grado del denominador.

Ejemplo. Sea la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}\,dx}{x^{2n}+1}$, en la que n y $m < n$ son dos números enteros. En este ejemplo $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}$.

Todas las raíces de la ecuación

$$F(x) = x^{2n} + 1 = 0,$$

en las que el coeficiente de $\sqrt{-1}$ es positivo, son de la forma

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \cos\frac{2k+1}{2n}\pi + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{2k+1}{2n}\pi;$$

y dando á $2k+1$ todos los valores impares comprendidos entre o y $2n$, obtendremos las diferentes raíces. El valor general de $A - B\sqrt{-1}$ es

$$\frac{f(\alpha + \beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha + \beta\sqrt{-1})} = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{-1})^{2m}}{2n(\alpha + \beta\sqrt{-1})^{2n-1}}$$

$$= \frac{1}{2n} \frac{\cos(2k+1)\frac{m}{n}\pi + \sqrt{-1}\operatorname{sen}(2k+1)\frac{m}{n}\pi}{\cos(2k+1)\frac{2n-1}{2n}\pi + \sqrt{-1}\operatorname{sen}(2k+1)\frac{2n-1}{2n}\pi};$$

y haciendo

$$\frac{2m+1}{n} = a, \quad \text{de donde} \quad \frac{2m-2n+1}{2n} = a - 1;$$

y recordando que para dividir dos expresiones imaginarias, se restan los argumentos, tendremos

$$A - B\sqrt{-1} = \frac{1}{2n}[\cos(a-1)(2k+1)\pi$$
$$+ \sqrt{-1}\operatorname{sen}(a-1)(2k+1)\pi]$$
$$= -\frac{1}{2n}[\cos a(2k+1)\pi + \sqrt{-1}\operatorname{sen} a(2k+1)\pi],$$

de donde

$$A = -\frac{1}{2n}\cos a(2k+1)\pi, \quad B = \frac{1}{2n}\operatorname{sen} a(2k+1),$$

$$B_1 = \frac{\operatorname{sen} a\pi}{2n}, \quad B_2 = \frac{\operatorname{sen} 3a\pi}{2n}, \quad \ldots\ldots, \quad B_m = \frac{\operatorname{sen}(2n-1)a\pi}{2n};$$

y puesto que, por la hipótesis hecha, el grado del denominador excede en más de dos unidades al del numerador, se tendrá

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{x^{2n}+1} = 2\pi(B_1 + B_2 + \ldots\ldots + B_m)$$

$$= \frac{2\pi}{2n}[\operatorname{sen} a\pi + \operatorname{sen} 3a\pi + \ldots\ldots + \operatorname{sen}(2n-1)a\pi].$$

Se puede calcular la suma del segundo miembro, pues las ecuaciones

$$\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta = e^{\theta i}, \quad \cos 3\theta + i \operatorname{sen}\theta = e^{3\theta i}, \quad \ldots\ldots$$

dan

$$[\cos\theta + \cos 3\theta + \ldots + \cos(2n - 1] + i[\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 3\theta + \ldots]$$

$$= e^{\theta i} + e^{3\theta i} + \ldots\ldots + e^{(2n-1)\theta i}$$

$$= e^{\theta i}[1 + e^{2\theta i} + e^{4\theta i} + \ldots + e^{(2n-2)\theta i}] = \frac{e^{2n\theta i} - 1}{e^{2\theta i} - 1} e^{\theta i}.$$

En el caso presente,

$$\theta = \alpha\pi = \frac{2m+1}{2n}\pi;$$

luego

$$e^{2n\theta i} = e^{(2m+1)\pi i} = \cos(2m+1)\pi + i \operatorname{sen}(2m+1)\pi = -1.$$

Por otra parte,

$$\frac{e^{\theta i}}{e^{2\theta i} - 1} = \frac{e^{\theta i}}{\dfrac{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}{e^{-\theta i}}} = \frac{1}{e^{\theta i} - e^{-\theta i}} = \frac{1}{2i \operatorname{sen} a\pi};$$

luego

$$\cos a\pi + \cos 3a\pi + \cos(2n - 1) a\pi + i[\operatorname{sen} a\pi + \ldots\ldots$$

$$+ \operatorname{sen}(2n-1) a\pi] = -\frac{2}{2i} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} a\pi} = -\frac{1}{i \operatorname{sen} a\pi},$$

$$\cos a\pi + \cos 3a\pi + \ldots\ldots + \cos(2n-1) a\pi = 0,$$

$$\operatorname{sen} a\pi + \operatorname{sen} 3a\pi + \ldots\ldots + \operatorname{sen}(2n-1) a\pi = \frac{1}{\operatorname{sen} a\pi},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}} = \frac{\pi}{n \operatorname{sen} a\pi} = \frac{\pi}{n \operatorname{sen} \dfrac{2m+1}{n}\pi}.$$

Haciendo $z = x^{2n}$, resulta

$$\int_0^\infty \frac{z^{a-1}dz}{1+z} = \int_0^\infty \frac{z^{\frac{2m-2n+1}{2n}}dz}{1+z} = \int_0^\infty \frac{x^{2m-2n+1} . 2n . x^{2n-1}dx}{1+x^{2n}}$$

$$= 2n\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}} = n\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}}$$

$$= \frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2n}\pi} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}.$$

De igual manera, reduciendo cada integral indeterminada á su valor principal, se obtendrá

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1-x^{2n}} = \frac{\pi}{n}[\operatorname{sen} 2a\pi + \operatorname{sen} 4a\pi + \ldots + \operatorname{sen}(2n-2)a\pi]$$

$$= \frac{\pi}{n \operatorname{tg} a\pi} = \frac{\pi}{n \operatorname{tg}\frac{2m+1}{2n}\pi},$$

$$\int_0^\infty \frac{z^{a-1}}{1-z} = 2n\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1-x^{2n}} = n\int_{-\infty}^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1-x^{n2}} = \frac{\pi}{\operatorname{tg} a\pi}.$$

§ 9.° Aplicaciones.

1. $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left[\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}\right]_0^a = \operatorname{arc\,sen} 1 - \operatorname{arc\,sen} 0 = \frac{\pi}{2}.$

2. $\int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx = -\frac{1}{4}.$

3. $\int_0^1 x^n \log x\,dx = -\frac{1}{(n+1)^2}.$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{4}.$

5. $\int_0^{2\pi} (1 - \cos\varphi)^2 \, d\varphi = 3\pi.$

6. $\int_0^a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3 - x^3}} \, dx = \frac{\pi}{3}.$

7. $\int_0^a \frac{x^{2r} \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2r-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2r} a^{2r} \frac{\pi}{2}.$

8. $\int_0^a \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2}{2} \frac{\pi}{2}.$

9. $\int_0^a \frac{x^4 \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{3}{8} a^4 \frac{\pi}{2}.$

10. $\int_0^a x^{2r} \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2r-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2r+2)} a^{2r+2} \frac{\pi}{2}.$

11. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2} a^2 \frac{\pi}{2}.$

12. $\int_0^1 x^{n-1} (\log x) \, dx = -\frac{1}{n^2}.$

13. $\int_0^1 x^{n-1} (\log x)^3 \, dx = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{n^4}.$

14. $\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a}{a^2 + b^2}.$

15. $\int_a^b (a + bx) \, dx = \frac{2ab + b^3 - 2a^2 - a^2 b}{2}.$

16. $\int_0^a dx \sqrt{x} = \frac{2}{3} \sqrt{a^3}.$

17. $\int_0^a 3x \sqrt{x^2 + 4a^2} \, dx = a^3 (5\sqrt{5} - 8).$

18. $\displaystyle\int_1^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}.$

19. $\displaystyle\int_0^a \frac{x^2\,dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{3a^2\pi}{8}.$

20. $\displaystyle\int dx\sqrt{2bx-x^2} = \frac{b^2\pi}{2}.$

21. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x - \cos^6 x)\,dx = \frac{\pi}{32}.$

22. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 2x\,dx = \frac{\pi}{4}.$

23. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 x\,dx = \frac{5}{6}\sqrt{\frac{1}{2}}.$

24. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx = \frac{1}{2}\log 2.$

25. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+2x\cos x+x^2} = \frac{\varphi}{2\operatorname{sen}\varphi}.$

26. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+2x\cos\varphi+x^2} = \frac{\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}.$

27. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{a+b\cos\cancel{\varphi}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$

28. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(\alpha x+\beta)(\alpha' x+\beta')} = \frac{\log\frac{\alpha\beta'}{\alpha'\beta}}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}.$

29. $\displaystyle\int_0^1 \left[\frac{x^n-1}{x\log x} - \frac{n}{\log n}\right]dx = \log n - n.$

30. $\int_0^\infty e^{-nx}\,dz = \frac{1}{n}$.

31. $\int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-uz}}{z}\,dz = \log n$.

32. $\int_0^\infty e^{-ax} x^2 \operatorname{sen} x dx = \frac{2(3a^2 - 1)}{(a^2 + 1)^3}$.

33. $\int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax}}{x} \operatorname{sen} x dx = \operatorname{arc\,tg} a$.

34. $\int_0^\infty e^{-ax} x \cos x dx = \frac{a^2 - 1}{(a^2 + 1)^2}$.

35. $\int_0^\infty e^{-ax} x^2 \cos x dx = \frac{2a(a^2 - 3)}{(a^2 + 1)^3}$.

36. $\int_0^\pi \frac{\cos x\,dx}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x} = \pm \frac{\pi(1 + \alpha^2)}{2\alpha(1 - \alpha^2)} - \frac{\pi}{2\alpha}$.

37. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(x + \alpha^2 \operatorname{sen}^2 x)} = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha^2 + 1}}$.

38. $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x - a)\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$.

39. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax}{x} e^{-mx} dx = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{m}$.

40. $\int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax}}{x} \cos x dx = \frac{1}{2} \log (a^2 + 1)$.

CAPÍTULO VI

Integrales de las diferenciales totales

43. PROPIEDAD FUNDAMENTAL. Dada una expresión de la forma

$$P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + \ldots\ldots + P^n dx^n = \Sigma dx, \tag{1}$$

en la que $P_1, P_2, \ldots\ldots P_n$ son funciones de $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$, no existe, en general, una función de estas variables cuya diferencial sea la propuesta, de manera qué deben existir algunas condiciones necesarias para que esto suceda; y en efecto, si existe una función $F(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ cuya diferencial sea $\Sigma P dx$, es necesario que se tenga idénticamente

$$\Sigma \frac{\partial F}{\partial x} dx = \Sigma P dx,$$

es decir, identificando, que sea

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = P_1, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = P_2, \ldots\ldots, \frac{\partial F}{\partial x^n} = P_n.$$

Pero diferenciando la i^{sima} ecuación con relación á x_j y la j^{esima} ecuación y respecto á x_i, se tendrá

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial P_i}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i};$$

luego

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}. \tag{2}$$

Permutando los índices i y j de todas las maneras posibles, se obtienen $\frac{n(n-1)}{2}$ relaciones análogas, que deben verificarse para que la expresión (1) sea una diferencial exacta.

Recíprocamente, si se verifican las $\frac{n(n-1)}{2}$ relaciones (2) existirá siempre una función F cuya diferencial sea $\Sigma P dx$, pues si hacemos

$$F_1 = \int_{a_1}^{x_1} P_1 dx_1 + F_2(x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n),$$

se tendrá
$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = P_1, \tag{3}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \int_{a_1}^{x_1} \frac{\partial P_1}{\partial x_2} dx_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}; \tag{4}$$

ó, en virtud de (2)

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \int_a^{x_1} \frac{\partial F_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = P_2 - A_2 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2},$$

expresando A_2 lo que es P_2 cuando se sustituye en ella x_1 por a_1. Y si hacemos $\frac{\partial F_2}{\partial x_2} = A_2$, resultará que $\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = P_2$, ó, llamando F_3 á una función de $x_3, x_4, \ldots\ldots, x_n$,

$$F_2 = \int_{a_2}^{x_2} A_2 dx_2 + F_3(x_3, x_4, \ldots\ldots, x_n);$$

luego la función

$$F_1 = \int_{a_1}^{x_1} P_1 dx_1 + \int_{a_2}^{x_2} A_2 dx_2 + F_3(x_3, \ldots\ldots, x_n)$$

admite por derivadas, con relación á x_1 y x_2, las cantidades P_1 y P_2. Se tiene pues,

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_3} = \int_{a_1}^{x_1} \frac{\partial P_1}{\partial x_3} dx_1 + \int_{a_2}^{x_2} \frac{\partial A_2}{\partial x_3} dx_2 + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}$$

es decir,

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_3} = \int_{a_1}^{x_1} \frac{\partial P_3}{\partial x_1} dx_1 + \int_{a_2}^{x_2} \frac{\partial A_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}.$$

Expresando A_3 el valor de P_3 para $x_1 = a_1$, esta fórmula da

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_3} = P_3 - A_3 + A_3 - A'_3 + \frac{\partial F_3}{\partial x_3},$$

expresando A'_3 el valor de P_3 cuando se hace $x_1 = a_1$ y $x_2 = a_2$, de la que resulta:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_3} = P_3 - A'_3 + \frac{\partial F_3}{\partial x_3};$$

y se tendrá

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_3} = P_3, \quad \text{si} \quad A'_3 = \frac{\partial F_3}{\partial x_3}, \quad \text{es decir, si} \quad F_3 = \int_{a_3}^{x_3} A'_3\, dx_3;$$

entonces la función

$$F_1 = \int_{a_1}^{x_1} P_1\, dx_1 + \int_{a_2}^{x_2} A_2\, dx + \int_{a_3}^{x_3} A'_3\, dx + F_4$$

admitirá por derivadas, con relación á $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots$, las cantidades $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots$, resultando que la diferencial de la función

$$\int_{a_1}^{x_1} P_1\, dx + \int_{a_2}^{x_2} A_2\, dx_2 + \int_{a_3}^{x_3} A_3\, dx_3 + \ldots + \int_{a_n}^{x_n} A_n\, dx_n$$

será la expresión (1), si se tiene en general,

$$A_{i+1} = P_{i+1}(a_1, a_2, \ldots, a_i\; x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n).$$

Caso particular. Sea la expresión

$$M dx + N dy,$$

que debe ser la diferencial de $u = f(x, y)$.

Tendremos

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy,$$

y resultará, identificando, que

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}.$$

Recíprocamente, si se verifica esta condición, y buscamos una función u tal, que sea

$$du = \mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy;$$

debiendo tener á $\mathrm{M}dx$ por diferencial con relación á x, será igual á la integral de $\mathrm{M}dx$ aumentada en una cantidad $\varphi(y)$, independiente de x, pero función de y; u será pues de la forma

$$u = \int \mathrm{M}dx + \varphi(y) = v + \varphi(y),$$

haciendo $v = \int \mathrm{M}dx$.

Falta ahora determinar á $\varphi(y)$ de modo que sea $\frac{\partial u}{\partial y} = \mathrm{N}$; pero se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{de donde} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mathrm{N} - \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Se ve pues que $\mathrm{N} - \frac{\partial v}{\partial y}$ no debe contener x. Se tendrá pues

$$\frac{\partial\left(\mathrm{N} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial x} = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y};$$

y si esta condición queda satisfecha, será

$$\varphi(y) = \int\left(\mathrm{N} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy, \qquad u = \int \mathrm{M}dx + \int\left(\mathrm{N} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy.$$

Ejemplo 1.º Sea

$$du = \frac{ydx}{x^2+y^2} - \frac{xdy}{x^2+y^2}$$

$$\frac{dM}{dy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{dN}{dx}.$$

$$\int_{x_0}^{x} Mdx = \int_{x_0}^{x} \frac{ydx}{x^2+y^2} = \text{arc tg}\,\frac{x}{y} - \text{arc tg}\,\frac{x_0}{y}.$$

$$\int_{y_0}^{y} Ndy = -\int_{y_0}^{y} \frac{x_0dy}{x^2+y^2} = -\,\text{arc tg}\,\frac{x}{y} + \text{arc tg}\,\frac{x_0}{y_0},$$

$$u = \text{arc tg}\,\frac{x}{y} - \left(\text{arc tg}\,\frac{x_0}{y} + \text{arc tg}\,\frac{y}{x_0}\right) + \text{arc tg}\,\frac{x_0}{y_0};$$

y, puesto que $\text{arc tg}\,\frac{x_0}{y} + \text{arc tg}\,\frac{y}{x_0} = \frac{\pi}{2}$,

$$u = \text{arc tg}\,\frac{x}{y} + C.$$

Ejemplo 2.º Sea

$$du = \left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y^2)}\right]dx + \left[\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right]dy.$$

Tenemos $\quad \frac{dM}{dy} = -\frac{2yx}{(x-y)^3} = \frac{dN}{dx}$

$$u = \int Mdx + \varphi(y) = \log x + \frac{y^2}{x-y} + \varphi(y)$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dy} + \frac{d\varphi}{dy} = \frac{2xy-y^2}{(x-y)^2} + \frac{d\varphi}{dy} = \frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y};$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = 1 - \frac{1}{y}, \qquad \varphi = y - \log y + C$$

$$u = \frac{xy}{x-y} + \log\frac{x}{y} + C.$$

§ 2.º Aplicaciones

1. $du = \left[\operatorname{tg} y - \dfrac{y}{\cos^2 x}\right] dx + \left[\dfrac{x}{\cos^2 y} - (\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} y)\right] dy$

$u = x \operatorname{tg} y - y \operatorname{tg} x - \cos y + C.$

2. $du = \left[\dfrac{1}{x} + \dfrac{y(y + \sqrt{x^2+y^2})}{x^3}\right] dx + \left[\dfrac{1}{2y} - \dfrac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x^2}\right] dy$

$$u = \log x - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{1}{2}\frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{x^2} - \frac{1}{2}\frac{\log y + \sqrt{x^2+y^2}}{x}$$

$$+ \frac{1}{2}\log y + C.$$

3. $du = (y + z)\, dx + (x + z)\, dy + (x + y)\, dz$

$u = xy + xz + yz + C.$

4. $u = (2xy + z^2)\, dx + (2zy + x^2)\, dy + (2zy + y^2)\, dz$

$du = x^2 y + z^2 x + y^2 z + C.$

5. $\dfrac{a}{y}\, dx - \dfrac{ax + bz}{y^2}\, dy + \dfrac{b}{y}\, dz \qquad u = \dfrac{ax + bz}{y} + C.$

6. $\left[x + \dfrac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}\right] dx + \left[y - \dfrac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}\right] dy$

$u = \dfrac{x^2 + y^2}{2} + \operatorname{arc\,sen} \dfrac{x}{y} + C.$

7. $du = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \left[1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right] \dfrac{dy}{dx},$

$u = \log\left[x + \sqrt{x^2 + y^2}\right] + C.$

8. $du = (x^2 - 4xy - 2y^2)\, dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)\, dy;$

$u = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 y - 2y^2 x + \dfrac{y^3}{3} + C.$

CAPÍTULO VII

Integración por diferenciación é integración

§ 1.° Exposición de este método

44. Integración por diferenciación. Se pueden obtener integrales diferenciando con relación á un parámetro la expresión contenida bajo el signo de una integral definida. Por ejemplo:

1.° Diferenciando n veces respecto de a la igualdad

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2} a^{-\frac{1}{2}},$$

resulta

$$\int_0^\infty \frac{1 \,.\, 2 \,.\, \ldots \,.\, n}{(x^2+a)^{n+1}} = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, \ldots \,.\, (2n-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, \ldots \,.\, 2n} \; \frac{\pi}{2a^{n+\frac{1}{2}}}.$$

2.° Diferenciando $n-1$ veces respecto de a los dos miembros de

$$\int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a},$$

obtendremos

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1} dx = 1 \,.\, 2 \,.\, \ldots \,.\, (n-1)\, a^{-n}.$$

3.° Diferenciando $n-1$ veces la igualdad

$$\int_0^\infty e^{-(a+b\sqrt{-1})x} dx = \frac{1}{a+b\sqrt{-1}},$$

se tendrá

$$\int_0^\infty e^{-\left(a+b\sqrt{-1}\right)x}\, x^{n-1} dx = \frac{(n-1)!}{\sqrt{\left(a+b\sqrt{-1}\right)^n}}\,.$$

45. Integraciones obtenidas por la integración bajo $\int$. En vez de diferenciar con respecto á un parámetro puede integrarse, obteniéndose así la integral de muchas funciones.

1.º Sea la igualdad

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}\,.$$

Se tiene que

$$\int_c^a da \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \int_c^a \frac{a\,da}{a^2+b^2}\,;$$

pero

$$\int_c^a da \int_c^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \int_0^\infty dx \int_c^a e^{-ax}\cos bx\,da$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x}\cos bx\,dx.$$

Además $\displaystyle\int_c^a \frac{a\,da}{a^2+b^2} = \frac{1}{2}\log\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}\,;$

luego

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x}\cos bx\,dx = \frac{1}{2}\log\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}\,.$$

Observación. Si se hace $b=0$, se tiene

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x}\,dx = \log\frac{a}{c}\,.$$

Se obtendría también este resultado, integrando respecto de a entre los límites c y a la igualdad

$$\int_0^\infty e^{-ax}dx = \frac{\mathrm{I}}{a}.$$

2.° Por el mismo procedimiento, de la expresión

$$\int_0^\infty e^{-ax} \operatorname{sen} bx\, dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

se deduce

$$\int_c^a da \int_0^\infty e^{-ax} \operatorname{sen} bx\, dx = \int_c^a \frac{b\,da}{a^2+b^2}$$

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b} - \operatorname{arc\,tg} \frac{c}{b} = \operatorname{arc\,tg} \frac{b(a-c)}{b^2+ac}.$$

3.° Sea la integral

$$\int_0^\infty \left[\left(n-\frac{\mathrm{I}}{2}\right)e^{-x} + \left(\frac{\mathrm{I}}{x}+\frac{\mathrm{I}}{2}\right)\left(e^{-nx} - e^{-\frac{x}{2}}\right)\frac{dx}{x}\right].$$

Integrando por partes los términos en $\frac{\mathrm{I}}{x^2}$, se tendrá

$$\left(-\frac{e^{-nx}-e^{-\frac{x}{2}}}{x}\right)_0^\infty + \int_0^\infty \left[\left(n-\frac{\mathrm{I}}{2}\right)(e^{-x}-e^{-nx})\frac{dx}{x}\right].$$

El término integrado se reducirá á

$$\lim \left(\frac{e^{-n\varepsilon}-e^{-\frac{\varepsilon}{2}}}{\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$$

$$= \lim \left(\frac{\mathrm{I} - n\varepsilon + \ldots\ldots - \mathrm{I} + \frac{\varepsilon}{2} - \ldots\ldots}{\varepsilon}\right) = -n + \frac{\mathrm{I}}{2}.$$

El valor de la integral, restante será $\left(n - \frac{1}{2}\right) \log n$; luego la integral total será

$$\left(n - \frac{1}{2}\right) \log n - n + \frac{1}{2}.$$

4.° Análogamente, tendremos

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x^2} - \frac{e^{2x}}{x}\right) dx = 1 - \log 2.$$

5.° Puede obtenerse por el procedimiento de la integración bajo el signo de la integral ya obtenida

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \qquad \text{ó} \qquad I = \int_0^\infty e^{-\alpha^2 t^2} \alpha\, dt,$$

habiendo hecho $x = \alpha t$, y después multiplicando por $e^{-\alpha^2}$ é integrando con respecto á α desde o hasta ∞, pues tendremos

$$I \int_0^\infty e^{-\alpha^2} d\alpha = I^2 = \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+t^2)} \alpha\, d\alpha$$

$$= \int_0^\infty \frac{dt}{2(1 + t^2)} = \frac{\pi}{4}, \qquad I = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Con auxilio de esta integral podemos obtener otras. Así, haciendo $x = y\sqrt{a}$, en la hipótesis de ser a positiva, se tendrá

$$I = \int_0^\infty e^{-ay^2} \sqrt{a}\, dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

de donde
$$\int_0^\infty e^{-ay^2} dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, a^{-\frac{1}{2}};$$

y por una serie de derivaciones sucesivas respecto de a,

$$\int_0^\infty y^2 e^{-ay^2} dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{1}{2}\, a^{-\frac{3}{2}}, \quad \ldots\ldots$$

$$\int_0^\infty y^{2n} e^{-ay^2} dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2^n}\, a^{-\frac{2n+1}{2}}.$$

Falta demostrar que la integral

$$K = \int_p^\infty y^{2n} e^{-(a+\theta h)y^2} dy,$$

en la que θ es una función desconocida de y, comprendida entre o y 1, tiende hacia cero, cuando h tiende hacia o y p hacia ∞.

Pero α es una cantidad positiva menor que a; y cuando h se haga suficientemente pequeña, $a + \theta h$ será $> \alpha$, y la integral será inferior á la siguiente:

$$K_1 = \int_p^\infty y^{2n} e^{-\alpha y^2} dy;$$

y como para valores suficientemente grandes de y, se tiene

$$y^{2n} e^{\alpha y^2} < \frac{1}{y^2}, \quad \text{será } K_1 < \int_p^\infty \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{p},$$

que tiende hacia cero para p suficientemente grande.

6.° Sea la integral

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

Tendremos

$$\frac{dI}{da} = \int_0^\infty - \frac{2a}{x^2} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}}$$

y haciendo $x = \frac{a}{t}$,

$$\frac{dI}{da} = \int_\infty^0 2e^{-t^2 - \frac{a^2}{t^2}} dt = -2I, \quad \frac{dI}{J} = -2da;$$

luego $\quad \log I = -2a + \log C, \quad I = Ce^{-2a}.$

Para determinar la constante C, hagamos $a = 0$, y será

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi};$$

luego $$C = \frac{1}{2}\pi \quad \text{é} \quad I = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-2a}.$$

7.° Sea la integral
$$I = \int_0^\infty \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Se tiene (5°) que
$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\alpha^2 x}\, d\alpha;$$

luego $$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{ix}\, dx \int_0^\infty e^{-\alpha^2 x}\, d\alpha,$$

é invirtiendo las integraciones,
$$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty e^{(-\alpha^2 + i)x}\, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2 - i}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi i}{4}}\, d\alpha \left(\frac{1}{\alpha - e^{\frac{\pi i}{4}}} - \frac{1}{\alpha + e^{\frac{\pi i}{4}}} \right)$$
$$= \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{\pi}} \log\left(\alpha - e^{\frac{\pi i}{4}}\right) - \log\left(\alpha + e^{\frac{\pi i}{4}}\right)\Big]_0^\infty .$$

Pero $$e^{\frac{\pi i}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}},$$
$$\left[\log\left(\alpha - e^{\frac{\pi i}{4}}\right) - \log\left(\alpha + e^{\frac{\pi i}{4}}\right)\right]_0^\infty$$
$$= \left\{ \frac{1}{2}\log\left[\left(\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\right] - \frac{1}{2}\log\left[\left(\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\right]\right\}_0^\infty$$
$$+ i\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}} \right)_0^\infty .$$

La parte real de esta expresión puede ponerse bajo la forma

$$\left\{ \frac{1}{2} \log \left[\left(\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{2} \right] : \left[\left(\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{2} \right\}_0^\infty$$

y se anula en los límites, por reducirse la cantidad bajo el signo logaritmo á la unidad. Además cuando α varía desde o hasta ∞, los dos arcos tangentes varían respectivamente desde $\frac{\pi}{4}$ hasta π y desde $\frac{\pi}{4}$ hasta cero. La parte imaginaria será pues igual á πi; y se tendrá

$$I = \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} (1 + i).$$

Por otra parte $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$; luego

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}.$$

8.° Sea $I = \int_0^\infty e^{-ay^2} \cos 2by\, dy$.

Tendremos

$$I = \int_0^\infty e^{-ay^2} \left[1 - \frac{(2by)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(2by)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \right] dy.$$

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \left[a^{-\frac{1}{2}} - \frac{(2b)^2}{1 \cdot 2} \frac{1}{2} a^{-\frac{3}{2}} - \dots \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\pi}\, a^{-\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{b^2}{a} + \dots \right] = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}\, a^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{b^2}{a}}.$$

Observación 1.ª Si se hace en el ejemplo 2.° $a = \infty$, $c = 0$ se tendrá

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} bx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

siempre que $b > 0$. Si se tuviese $b < 0$, el segundo miembro sería $-\frac{\pi}{2}$. Esta integral ofrece pues una discontinuidad notable. Siendo constante cuando b varía conservando el mismo signo, pasa bruscamente de $= \frac{\pi}{2}$ á $\frac{\pi}{2}$ cuando, al anularse b, pasa de negativa á positiva.

Observación 2.ª Podemos concluir que es finita la integral

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

y obtendremos de otro modo su valor. En efecto, podemos escribir dicha integral de la manera siguiente

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx + \int_\pi^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx + \ldots\ldots$$

ó bien, sustituyendo x por $x + \pi$, $x + \pi$ por $x + 2\pi$, ...

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx - \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{x+\pi}\, dx + \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{x+2\pi}\, dx - \ldots\ldots$$

El límite del término general es cero, porque se puede escribir así

$$\frac{1}{\xi + n\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx = \frac{2}{\xi + n\pi},$$

permaneciendo ξ comprendido entre 0 y π. Esta cantidad para $n = \infty$ es nula. Por consiguiente, la serie y la integral tienen un valor finito.

Esto sentado, para $a > 0$ se tiene

$$\int e^{-ax} \operatorname{sen} x\, dx = -\frac{a \operatorname{sen} x + \cos x}{a^2 + 1} e^{-ax};$$

luego $$\int_0^\infty e^{-ax} \operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{a^2 + 1};$$

é integrando desde $a = \varepsilon > 0$ hasta $a = \infty$, se tiene

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon x} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \varepsilon. \qquad (1)$$

La integración puede efectuarse, puesto que la derivada segunda bajo el signo $\int$ es finita.

Restando $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$, tendremos

$$\int_0^\infty (1 - e^{-\varepsilon x}) \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \varepsilon - \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx.$$

Para hallar el límite del primer miembro, lo escribiremos así

$$\int_0^\pi (1 - e^{-\varepsilon x}) \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx + \int_\pi^{2\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} + \ldots\ldots,$$

ó también $$\int_0^\pi (1 - e^{-\varepsilon x}) \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

$$- \int_0^\pi (1 - e^{-\varepsilon x - \varepsilon\pi}) \frac{\operatorname{sen} x}{x + \pi} dx + \ldots\ldots$$

Todos los términos de esta serie son decrecientes, alternativamente positivos y negativos; luego es convergente, y en suma está comprendida entre su primer término y la suma de los dos primeros. Este valor es pues cero para $\varepsilon = 0$.

La fórmula (1) se reduce, para $\varepsilon = 0$, á

$$\frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = 0; \quad \text{luego} \quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Cuando se hace $x = \alpha z$, tenemos, suponiendo $\alpha > 0$,

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \alpha z}{z} dz = \frac{\pi}{2}.$$

46. Integrales de Fresnel. Si sustituimos x por $x\sqrt{a}$ en la fórmula $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ obtendremos

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,a^{-\frac{1}{2}},$$

de donde

$$a^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx.$$

Multipliquemos los dos miembros por cos $a\,da$, é integremos desde o hasta ∞; tendremos

$$\int_0^\infty \frac{da}{\sqrt{a}}\cos a = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos a\,da\,dx,$$

é igualmente

$$\int_0^\infty \frac{da}{\sqrt{a}}\operatorname{sen} a = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ax^2}\operatorname{sen} a\,da\,dx.$$

Multipliquemos la segunda por $\sqrt{-1}$ y sumemos; resultará

$$\int_0^\infty \frac{e^{ai}da}{\sqrt{a}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ax^2+ai}\,da\,dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2-i} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\left(\frac{x^2dx}{x^4+1}+i\,\frac{dx}{x^4+1}\right).$$

Haciendo $x = \frac{1}{z}$, se obtiene

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \int_0^\infty \frac{z^2dz}{z^4+1};$$

luego
$$\int_0^\infty \frac{e^{ai}da}{\sqrt{a}} = (1+i)\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{x^2dx}{x^4+1}.$$

Pero $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$ es igual á $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Se tiene pues, igualando á cero las partes reales y los coeficientes de $\sqrt{-1}$,

$$\int_0^\infty \frac{\cos a\,da}{\sqrt{a}} = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} a\,da}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

si se hace $a = x^2$, resulta

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2 dx = \int_0^\infty \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

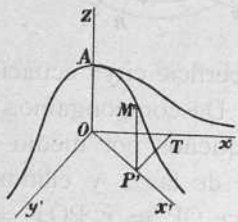
47. Empleo de consideraciones geométricas. La integral $A = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ fué obtenida por Poisson mediante un procedimiento muy notable. Cambiando x en y se tendrá todavía

$$A = \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy,$$

y por consiguiente,

$$A^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$



Sean tres ejes rectangulares Ox, Oy, Oz é

$$y = 0, \quad z = e^{-x^2},$$

las ecuaciones de una curva situada en el plano zOx

Si esta curva gira alrededor del eje Oz, engendrará una superficie cuya ecuación será

$$z = e^{-x^2-y^2}$$

y la integral doble

$$\int_0^\infty \int_0 e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

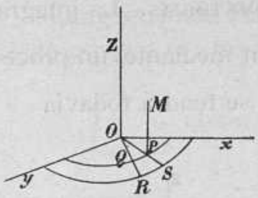
representará la cuarta parte del volumen comprendido entre la superficie y el plano xOy. Se puede valuar este volumen dividiéndolo en una infinidad de secciones cilíndricas, cuyo eje común sea Oz. La sección terminada en las superficies cuyos radios son r y $r + dr$ es igual á su base $2\pi r dr$ multiplicada por su altura z ó e^{-r^2}; luego

$$A^2 = \frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-r^2} x \,.\, 2\pi r dr = \frac{1}{4}\pi; \text{ de donde } A = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \quad (1)$$

Análogamente se determinarán otras integrales.

Supongamos que se trata de valuar

$$\int_0^\infty dy \int_0^\infty f(x, y)\, dx.$$



Esta integral representa la parte situada en el ángulo de las coordenadas positivas del volumen comprendido entre la superficie cuya ecuación es $z = f(x, y)$ y el plano xOy.

Descompongamos este volumen en elementos infinitamente pequeños por medio de los planos zOS y zOR, trazados por el eje de las z y cilindros PQ, RS cuyo eje común es Oz. Si se hace $OP = r$, $POx = \theta$, el volumen prisma infinitamente pequeño MPQRS, cuya base es el rectángulo $PQRS = rd\theta dr$ y la altura

$z = f(x, y) = f(r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$, será $rd\theta dr f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$.

La integral propuesta se podrá sustituir por la siguiente:

$$\int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\, rd\theta\, dr,$$

cuyo valor es fácil hallar.

Observación 1.ª La integral $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ conduce á la siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (2)$$

pues $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx,$

y cambiando x en $-x$ resulta

$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; luego $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

En general, se tendrá

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx \quad \text{ó} \quad = 0,$$

según que $f(x)$ sea función par ó impar, es decir, según que

$$f(x) = f(-x) \quad \text{ó} \quad f(-x) = -f(x).$$

Observación 2.ª Si en la integral (2) se sustituye x por $x\sqrt{a}$, se tendrá

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}.$$

Diferenciando n veces seguidas con relación á a, se tendrá

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} x^{2n}\,dx = \sqrt{\pi}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\,\ldots\ldots (2n-1)}{2^n}\,a^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)};$$

y si se hace $a = 1$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{2n}\,dx = \sqrt{\pi}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\,\ldots\ldots (2n-1)}{2^n}.$$

§ 2.º Aplicaciones

1. Diferenciando $\int_{0}^{\infty} e^{-ax}\,\text{sen}\,x\,dx = \frac{1}{a^2+1}$ se obtiene

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax} x\,\text{sen}\,x\,dx = \frac{2a}{(a^2+1)^2}$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax} x^2\,\text{sen}\,x\,dx = \frac{2\,(3a^2-1)}{(a^2+1)^3}.$$

Integrando entre o y a, se obtiene

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax}}{x} \operatorname{sen} x\,dx = \operatorname{arc\,tg} a.$$

Haciendo $a = \infty$, resulta

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

2. Diferenciando $\int_0^\infty e^{-ax} \cos x\,dx = \frac{a}{a^2 + 1}$, resulta

$$\int_0^\infty e^{-ax} x \cos x\,dx = \frac{a^2 - 1}{(a^2 + 1)^2}$$

$$\int e^{-ax} x^2 \cos x\,dx - \frac{2a(a^2 - 3)}{(a^2 + 1)^3}.$$

Por integración entre o y a resulta

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax}}{x} \cos x\,dx = \frac{1}{2} \log (a^2 + 1).$$

3. Integrando $\int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n}$, con relación á n, se obtiene

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1} - 1}{\log x}\,dx = \log n$$

$$\int_0^1 \left[\frac{x^n - 1}{x (\log x)^2} - \frac{n}{\log n}\right] dx = n \log n - n.$$

4. De $\int_0^\infty e^{-ax^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$, por diferenciación respecto a, resulta

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n - 1)}{2^{n+1} a^{\frac{2n+1}{2}}} \sqrt{\pi}.$$

5. Se obtiene directamente

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\alpha^2 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\pi}{2(1+\alpha)}.$$

Multipliquemos los dos miembros por $d\alpha$ é integremos entre 0 y α; obtendremos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\operatorname{tg} x} \operatorname{arc\,tg}(a \operatorname{tg} x) = \frac{\pi}{2} \log(1+a).$$

Si se hace $a = 1$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\operatorname{tg} x} = \frac{\pi}{2} \log 2.$

6. Demostrar la fórmula

$$\int_0^{\sqrt[n]{m}} \left(1 - \frac{x^n}{m}\right)^m dx = \frac{mn}{mn+1} \int_0^{\sqrt[n]{m}} \left(1 - \frac{x^n}{m}\right)^{m-1} dx.$$

Para obtenerla, hagamos

$$A_p = \int_0^{m^{1:n}} \left(1 - \frac{x^n}{n}\right)^p dx, \qquad \frac{x^n}{m} = u,$$

y tendremos

$$A_p = \frac{m^{\frac{1}{n}}}{n} \int_0^1 (1-u)^p\, u^{\frac{1}{n}-1}\, du.$$

Integrando por partes,

$$A_p = p m^{\frac{1}{n}} \int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{\frac{1}{n}}\, du. \text{ etc.}$$

CAPÍTULO VIII

Integrales definidas entre límites imaginarios

§ 1.° Integración de las funciones variables imaginables

48. La consideración de las integrales definidas, cuando la variable pasa por una serie de valores imaginarios, se debe á Cauchy, que constituyendo un método fecundo para el estudio de las propiedades de las funciones, señaló un gran progreso en el Análisis matemático; y aunque parezca salir del dominio de la práctica es utilísimo este empleo de las imaginarias para proporcionar el camino más corto en la obtención de resultados dentro del dominio real. La teoría de Cauchy se funda en los teoremas siguientes:

Teorema I. *Sea* $f(z)$ *una función continua, cuando la variable* z *describe una curva* $z_0 z$. *Si se toman en la curva puntos intermedios* $z_1, z_2, \ldots\ldots z_{n-1}$, *la suma*

$$f(z_0)(z_1 - z_0) + f(z_1)(z_2 - z_1) + \ldots + f(z_{n-1})(Z - z_{n-1}) \quad (1)$$

tiende hacia un límite determinado, cuando se aumenta indefinidamente el número de puntos de división, de manera que cada uno de los arcos tienda hacia cero.

En efecto, al describir el punto $z = x + yi$ la curva $z_0 Z$, se pueden considerar á x é y como funciones continuas $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ de una variable real t que crece desde t_0 hasta T. De esta manera la variable imaginaria z es una función de la variable t,

$$z = \varphi_1(t) + i\,\varphi_2(t) = \varphi(t).$$

Supondremos que cada una de las funciones reales $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$

admite una derivada. Y para fijar las ideas, podrá tomarse como variable real auxiliar t la longitud del arco de curva contado á partir del punto z_0. Las derivadas $\varphi'_1(t)$ y $\varphi'_2(t)$ designarán entonces los cosenos de los ángulos que la tangente á la curva forma con los ejes Ox y Oy. Llamemos $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ los valores de t que corresponden á los diferentes puntos de división señalados en la curva. Por tener derivadas las funciones $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ podremos escribir

$$\varphi_1(t_1) - \varphi_1(t_0) = (t_1 - t_0)[\varphi'_1(t_0) + \varepsilon'_0],$$

$$\varphi_2(t_1) - \varphi_2(t_0) = (t_1 - t_0)[\varphi'_2(t_0) + \varepsilon''_0],$$

tendiendo ε'_0 y ε''_0 hacia cero al mismo tiempo que $t_1 - t_0$.

Se deduce enseguida

$$z_1 - z_2 = \varphi_1(t_1) - \varphi_1 t_0 + i[\varphi_2(t_1 - \varphi_2(t_0)]$$

$$= (t_1 - t_0)[\varphi'_1(t_0) + i\varphi'_2(t_0) + \varepsilon'_0 + i\varepsilon''_0] = (t_1 - t_0)[\varphi'(t_0 + \varepsilon_0],$$

siendo ε_0 una cantidad imaginaria que tiende hacia cero con $t_1 - t_0$. Se tiene igualmente

$$z_2 - z_1 = (t_2 - t_1)[\varphi'(t_1) + \varepsilon_1], \ldots\ldots,$$

$$Z - z_{n-1} = (T - t_{n-1})[\varphi'(t_{n-1}) + \varepsilon_{n-1}],$$

tendiendo hacia cero las cantidades $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_{n-1}$ respectivamente con las diferencias $t_2 - t_1, \ldots\ldots, T - t_{n-1}$.

La suma (1) se reduce, por consiguiente, á

$$[f(z_0)\varphi'(t_0)(t_1 - t_0) + f(z_1)\varphi'(t_1)t_2 - t_1) + \ldots\ldots$$

$$+ f(z_{n-1})\varphi'(t_{n-1})(T - t_{n-1}) + [f(z_0)\varepsilon_0(t_1 - t_0)$$

$$+ f(z_1)\varepsilon_1(t_2 - t_1) + \ldots\ldots + f(z_{n-1})\varepsilon_{n-1}(T - t_{n-1})$$

cuya segunda parte tiende á cero, porque si se llama M al máximo del módulo de $f(z)$ en la curva z_0Z, y ε el mayor módulo de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_{n-1}$, el módulo del segundo paréntesis es menor que $M\varepsilon(T - t_0)$.

En cuanto á la primera parte, si se hace

$$f(z)\,\varphi'(t) = \psi(t) + i\,\chi(t),$$

se descompone en dos

$$[\psi(t_0)(t_1 - t_0) + \psi(t_1)(t_2 - t_1) + \ldots + \psi(t_{n-1})(\mathrm{T} - t_{n-1})]$$
$$+ i[\chi(t_0)(t_1 - t_0) + \chi(t_1)(t_2 - t_1) + \ldots + \chi(t_{n-1})(\mathrm{T} - t_{n-1})],$$

la una real y la otra imaginaria, y los límites de las dos sumas contenidas en los paréntesis son

$$\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \psi(t)\,dt, \qquad \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \chi(t)\,dt.$$

La suma (1) tiende pues hacia el límite

$$\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \psi(t)\,dt + i \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \chi(t)\,dt,$$

que se llama la integral definida

$$\int_{z_0}^{\mathrm{Z}} f(z)\,dz$$

tomada á lo largo de la curva $z_0\,\mathrm{Z}$. (*)

Corolario I. *Se tiene*

$$\int_{z_0}^{\mathrm{Z}} f(z)\,dz = \int_{t_0}^{\mathrm{T}} [\psi(t) + i\chi(t)]\,dt = \int_{t_0}^{\mathrm{T}} f(z)\,\varphi'(t)\,dt.$$

Corolario II. Si se llaman $c_0, c_1, \ldots\ldots, c_{n-1}$ las longitudes de las cuerdas que subtienden los arcos $z_0 z_1, z_1 z_2, \ldots\ldots, z_{n-1}\mathrm{Z}$ y l á la longitud de la curva $z_0\mathrm{Z}$, el módulo de la suma (1) es menor que

$$\mathrm{M}(c_0 + c_1 + \ldots\ldots + c_{n-1}) < \mathrm{M}\,l.$$

Se tiene pues, $\quad$ mod. $\int_{z_0}^{\mathrm{Z}} f(z)\,dz < \mathrm{M}\,l.$

(*) Véase t II pág. 202.

TEOREMA II. *Si se cambia de variable haciendo* $z = \varphi(z')$, *se tiene*

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \int_{z'_0}^{Z'} f(z)\,\varphi'(z')\,dz'.$$

Se supone continua la función $\varphi(z')$ cuando z' describe cierta curva $z'_0 Z'$ y que además admite una derivada $\varphi'(z')$. La variable z describe una curva correspondiente $z_0 Z$, tomándose las integrales según estas dos curvas; y se tiene

$$Z_1 - z_0 = (z'_1 - z'_0)\,[\varphi'(z'_0) + \varepsilon_0], \ldots\ldots$$

$$Z - z_{n-1} = (Z' - z'_{n-1})\,[\varphi'(z'_{n-1}) + \varepsilon_{n-1}].$$

Por consiguiente,

$$f(z_0)(z_1 - z_0) + f(z_1)(z_2 - z_1) + \ldots + f(z_{n-1})(Z - z_{n-1})$$

$$= [f(z_0)\,\varphi'(z'_0)(z'_1 - z'_0) + \ldots + f(z_{n-1})\,\varphi'(z'_{n-1})(Z' - z'_{n-1})]$$

$$+ [f(z_0)\,\varepsilon_0\,(z'_1 - z'_0) + \ldots + f(z_{n-1})\,\varepsilon_{n-1}\,(Z' - z'_{n-1})].$$

Si llamamos M al máximo del módulo de $f(z)$, y ε al de las cantidades $\varepsilon_1, \ldots\ \varepsilon_{n-1}$, y $c_0, \ldots, c_{n-1}$ á las cuerdas que subtienden los arcos $z'_0\, z'_1, \ldots\ z'_{n-1}\, Z$, y l' á la longitud de la curva $z'_0\, Z'$, el módulo de la segunda parte es menor que

$$M\,\varepsilon\,(c_0 + c_1 + \ldots + c_{n-1}) < M\,\varepsilon\, l';$$

tendiendo esta segunda parte hacia cero, las dos integrales son iguales.

COROLARIO. *Si cuando la variable* z *describe la curva* $z_0 Z$, *la función* F(z) *es continua y admite á* f(z) *por derivada, se tiene*

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = F(Z) - F(z_0),$$

hallándose tomada la integral á lo largo de la curva.

Hagamos $u = F(z)$. Cuando la variable z describe la curva $z_0 Z$, la variable u describe una curva correspondiente $u_0 U$, y en virtud del teorema precedente, se tiene

$$\int_{u_0}^{U} du = \int_{z_0}^{Z} F'(z)\,dz = \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz.$$

Si se designa por $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_{n-1}$ una serie de puntos intermedios en la curva $u_0 U$, la primera integral es la suma

$$(u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \ldots\ldots + (U - u_{n-1}).$$

Pero esta suma es igual á $U - u_0$; luego la integral definida es igual á $U - u_0$, es decir, igual á $F(Z) - F(z_0)$.

Teorema III. *Si la función* f(z) *puede desarrollarse en una serie*

$$f(z) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots$$

cuyos términos son funciones continuas de z, *cuando esta variable describe la curva* z_0Z, *convergente en todos los puntos de esta curva, y tal que se pueda tomar* n *bastante grande para que, en cada uno de estos puntos el módulo de la suma* $u_n + u_{n+1} + \ldots\ldots$ *sea menor que un número dado* α, *se tiene*

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{Z} u_0\,dz + \int_{z_0}^{Z} u_1\,dz + \ldots\ldots$$

tomándose todas estas integrales á lo largo de la curva z_0Z.

Designando por S_n la suma de los n primeros términos, tendremos

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = S_n + \int_{z_0}^{Z} \varphi(z)\,dz;$$

y siendo el módulo de $\varphi(z)$ menor que α, el módulo de la última integral es menor que αl. La suma S_n tiende pues hacia un límite igual á la primera integral, cuando n aumenta indefinidamente.

Teorema IV. *Cuando una función* f(z) *es holomorfa en una parte del plano de contorno simple, la integral definida*

$$\int_c f(z)\,dz$$

relativa á una curva cerrada situada en este punto del plano, es nula.

No es necesario demostrar este teorema y sus consecuencias inmediatas por haberse demostrado en el tomo II de esta obra; y únicamente terminaremos este párrafo con algunas aplicaciones después de demostrar el siguiente

TEOREMA V. *Si para* z = ∞ *ó para* z = o *el producto* zf(z) *tiende hacia cero, la integral* ∫f(z)dz, *tomada á lo largo de una circunferencia de radio infinito, ó de una circunferencia de radio infinitamente pequeño, cuyo centro está en el origen, es nula.*

En efecto, siendo

$$\operatorname{mod} \int (z)dz < \int |f(z)|\,|dz|,$$

hagamos
$$z = \mathrm{R}(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi),$$

de donde

$$dz = \mathrm{R}i(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)d\varphi, \qquad |dz| = \mathrm{R}d\varphi;$$

pero $\lim zf(z) = o$; luego $|f(z)| < \frac{\varepsilon}{|z|}$,

siendo ε un número arbitrario, ó

$$|f(z)| < \frac{\varepsilon}{\mathrm{R}};$$

y será

$$\operatorname{mod} \int f(z)dz < \int \frac{\varepsilon}{\mathrm{R}} \mathrm{R}d\varphi < 2\pi\varepsilon,$$

lo que demuestra el teorema, porque ε puede tomarse tan pequeño como se quiera.

Ejemplo. Sea la función e^{-z^2} holomorfa en todo el plano. La integral

$$\int e^{-z^2}\,dz$$

relativa á un contorno cerrado cualquiera es nula, pues si consideramos el rectángulo A_1ABB_1 formado por el eje de las x, una paralela B_1 B á este eje, á la distancia b y dos paralelas AB, A_1 B_1 al eje de las y á la misma distancia a, se tiene $z = x$, según A_1A, variando x desde $-a$ hasta $+a$; según AB, se tiene $z = a + yi$, variando y desde o hasta b; según BB_1, se tiene $z = x + bi$, variando x desde $+a$ hasta $-a$, y según B_1A_1 se tiene $z = -z + yi$, variando y de b á o. Siendo la integral relativa al contorno nula, resulta que

$$\int_{-a}^{+a} e^{-x^2}\,dx + i\int_0^b e^{-(a+yi)^2}\,dy$$

$$+\int_{+a}^{-a} e^{-(x+bi)^2}\,dx + i\int_b^0 e^{-(-a+yi)^2}\,dy = 0.$$

La segunda integral

$$\int_0^b e^{-(a+yi)^2}\,dy = e^{-a^2}\int_0^b e^{y^2-2ayi}\,dy$$

tiende hacia cero cuando a aumenta indefinidamente, y lo mismo sucede á la cuarta. Pero el límite de la primera es $\sqrt{\pi}$ (p. 156); luego

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+bi)^2}\,dx = \sqrt{\pi},$$

ó

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-2bxi+b^2}\,dx$$

$$= e^{b^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}(\cos 2bx - i \operatorname{sen} 2bx)\,dx = \sqrt{\pi};$$

por consiguiente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = \sqrt{\pi}\,e^{-b^2}.$$

49. Otro método. La integral $\int_0^b e^{-x^2}\,dx$ puede escribirse así

$$\lim_{h=0} \Sigma h(1 + e^{-h^2} + e^{-4h^2} + \ldots\ldots + e^{-n^2h^2}) \qquad (1) \qquad (nh = b)$$

é $$\int_b^c e^{-x^2}\,dx = \lim_{h=0} \sum_{i=0}^{i=m-1} h\left[e^{-b^2}\right.$$

$$\left. + e^{-(b+h)^2} + \ldots\ldots + e^{-[b+(m-1)h]^2}\right].$$

Pero en ésta se tiene

$$e^{-(b+ih)^2} = e^{-b^2}\,e^{-2bih}\,e^{-i^2h^2} < e^{-b^2}\,e^{-i^2h^2},$$

de lo que resulta

$$\int_b^c e^{-x^2}\,dx < e^{-b^2} \lim_{h=0} \Sigma h\left[1 + e^{-h^2} + e^{-4h^2} + \ldots\ldots\right].$$

Esta suma prolongada al infinito, es finita. La escribiremos así:

$$S = \frac{h}{\sqrt{1 - e^{-h^2}}}\sqrt{1-q}\,f(q),$$

haciendo

$$e^{-h^2} = q, \qquad f(q) = 1 + q + q^4 + \ldots\ldots + q^{n^2} + \ldots\ldots$$

Expresemos por $[\sqrt{n}]$ el mayor entero contenido en $\sqrt{n}$, y comparemos las dos series, divergentes para $q \geqslant 1$,

$$\frac{f(q)}{1-b} = \psi(q) = 1 + [\sqrt{1}]\,q + [\sqrt{2}]\,q^2 + \ldots + [\sqrt{n}]\,q^n + \ldots$$

$$F(q) = (1-q)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}q + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots\ldots 2n}(2n+1)\,q^n + \ldots\ldots$$

En ésta puede escribirse, en virtud de la fórmula de Wallis, el coeficiente de q^n, así:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}(1+\varepsilon)\sqrt{2n+1} = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}(1+\varepsilon')$$

tendiendo ε y ε' hacia cero para $x = \infty$. El límite, pues, de la relación de los coeficientes de q^n en $\psi(q)$ y en $F(q)$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} \quad \text{es} \quad \frac{1}{2}\sqrt{\pi};$$

Pero: *Cuando dos series ordenadas según las potencias ascendentes de una misma letra son divergentes y la relación de los coeficientes de una misma potencia de la letra ordenatriz tiene un límite, la relación de la suma de los* n *primeros términos tiene el mismo límite cuando* n *crece al infinito*, porque la relación

$$\frac{a_0 + a_1 + \ldots\ldots + a_n}{b_0 + b_1 + \ldots\ldots + b_n}$$

está comprendida entre el mayor y el menor valor de las relaciones $\frac{a_0}{b_0}, \frac{a_1}{b_1}, \ldots\ldots$ De manera, que si n es bastante grande; para que la relación de los términos de igual lugar de las series divergentes

$$f(n) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots, \quad \varphi(n) = b_0 + b_1 x + \ldots\ldots$$

difiera, para dicho valor de n y para los valores superiores, de su límite l en un número inferior á ε, se podrá escribir

$$l + \varepsilon < \frac{a_n x^n + \ldots\ldots + a_{n+p} x^{n+p}}{b_n x^n + \ldots\ldots + b_{n+p} x^{n+p}} < l + \varepsilon.$$

Si pues, $f_p(x)$ es la suma de los $n+p$ primeros términos de $f(x)$ y $\varphi_p(x)$, la relación intermedia podrá escribirse así

$$\frac{f_p(x) - (a_0 + a_1 x + \ldots\ldots + a_{n-1} x^{n-1})}{\varphi_p(x) - (b_0 + b_1 x + \ldots\ldots + b_{n-1} x^{n-1})}$$

ó
$$\frac{f_p(x)}{\varphi_p(x)} \cdot \frac{1 - \dfrac{a_0 + a_1 x + \ldots\ldots + a_{n-1} x^{n-1}}{f_p(x)}}{1 - \dfrac{b_0 + b_1 x + \ldots\ldots + b_{n-1} x^{n-1}}{\varphi_p(x)}};$$

y $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ se hallará comprendida entre $l - \varepsilon$ y $l + \varepsilon$ para n suficientemente grande.

Por consiguiente, haciendo tender q hacia 1, será

$$\lim_{q=1} \frac{\psi(q)}{f(q)} = \lim_{q=1} \sqrt{1-q}\, f(q) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi};$$

luego
$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \lim_{h=0} \frac{h}{\sqrt{1-e^{-h^2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Esto sentado, se tiene que

$$\int_b^c e^{-x^2} dx < e^{-b^2} S.$$

Si pues, se hace crecer b hacia el infinito, el segundo miembro tiende hacia cero, y también el primero; y tendremos

$$I = \lim_{h=0} \Sigma h (1 + e^{-h^2} + e^{-4h^2} + \ldots\ldots)$$

El segundo miembro es precisamente S; luego

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

§ 2.º Cálculo de residuos de Cauchy

Definiciones. Ya se expusieron en el tomo II algunas nociones de la teoría de los residuos. El *residuo* de una función monódroma y monógena es, según se expuso, la integral

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int f(z)\, dz$$

tomada á lo largo de un contorno circular infinitamente pequeño descrito desde el punto c, en el que $f(z)$ se hace infinita, como centro y recorrido en sentido directo.

Se demostró también que: *La integral de una función monódroma y monógena, tomada á lo largo de un contorno cerrado simple es igual al residuo integral de esta función relativo á dicho contorno, ó sea, á la suma de los residuos de dicha función relativos á cada uno de los infinitos contenidos en el contorno, multiplicado por* $2\pi\sqrt{-1}$.

Vamos ahora á aplicar la teoría de los residuos á la obtención de algunas integrales.

1.º Sea

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^m} = 2\pi\sqrt{-1}\ \Sigma\ \mathfrak{R}\ \frac{1}{(z^2+a^2)^m}, \qquad (1)$$

El residuo es relativo á los infinitos situados sobre el eje de las x, no existiendo más que el solo infinito $a\sqrt{-1}$, situado en la parte superior de dicho eje. Dicho residuo será pues,

$$\left[\frac{1}{(m-1)!}\,\frac{dz^{m-1}}{d^{m-1}}\,\frac{1}{\left(z+a\sqrt{-1}\right)^m}\right]_{z=a\sqrt{-1}}$$

ó

$$\frac{(-1)}{\left(2a\sqrt{-1}\right)^{2m-1}}\ \frac{m(m+1)\ldots\ldots(2m-1)}{(m-1)!},$$

la fórmula (1) da por consiguiente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^m} = 2\pi\ \frac{m(m+1)-(2m-1)}{(m-1)!}\cdot\left(\frac{1}{2a}\right)^{2m-1}.$$

2.º Sea la integral $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} bx}{x}\,dx$.

Supongamos que se integra la función $\frac{e^{bz\sqrt{-1}}}{z}$ á lo largo de un contorno formado por el eje de las x negativas, desde un punto situado á la distancia $-$ R del origen hasta otro situado á la distancia $-\varepsilon$, enseguida por una semicircunferencia de radio ε situada sobre el eje de las x con su centro en el origen, enseguida por el eje de las x positivas desde $+\varepsilon$ hasta $+\mathrm{R}$ y, por último, cerrándose el contorno con una semicircunferencia A situada sobre el eje de las x y cuyo radio es R.

La integral á lo largo de este contorno será nula. La integral tomada á lo largo de la circunferencia de radio R será nula para $\mathrm{R}=\infty$, si se supone que b sea positivo; pues estonces $z\dfrac{e^{bzi}}{z}$ ó e^{bzi} se reduce á cero, cuando la parte imaginaria de z es positiva, lo que se verifica á lo largo de dicha circunferencia. Se tiene pues, suponiendo $\mathrm{R}=\infty$,

$$0=\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{e^{bxi}}{x}dx+\int_{\mathrm{A}}\frac{e^{bzi}}{z}dz+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{e^{bxi}}{x}dx.$$

La segunda integral á lo largo del semicírculo A para $\varepsilon=0$ es, salvo el signo, el semi-residuo de $\dfrac{e^{bzi}}{z}$ para $z=0$, multiplicado por $2\pi i$ ó $-\pi i$. Se obtiene pues,

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{e^{bxi}}{x}dx+\frac{e^{bxi}}{x}dx=\pi\sqrt{-1}.$$

Si se sustituye e^{bxi} por $\cos bx+i\operatorname{sen} bx$, se ve que la parte real del primer miembro es nula, y que

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\operatorname{sen} bx}{x}dx+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} bx}{x}dx=\pi.$$

Añadiendo el elemento $\displaystyle\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\operatorname{sen} bx}{x}dx$, que es infinitamente pequeño, se tiene

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} bx}{x}dx=\pi$, y por consiguiente $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} bx}{x}=-\frac{\pi}{2}$.

Si $b=0$, se tiene $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} bx}{x}dx=0$.

La integral $\int_0^\infty \frac{\text{sen } ax \cos bx}{x} dx$ se deduce de la anterior, puesto que se descompone en

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\text{sen }(a+b)x}{x} dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\text{sen }(a-b)x}{x} dx.$$

Supongamos que a y b sean positivos. Si $a > b$, esta suma es $\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$ ó $\frac{\pi}{2}$; si $a < b$, dicha suma es igual á cero. Si $a = b$ será igual á $\frac{\pi}{4}$.

3.º Sea la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx$.

Si se integra la función $\frac{e^{azi}}{1+z^2}$, en la que a es positivo, á lo largo del eje de las x desde $-\infty$ hasta $+\infty$ y á lo largo de una semicircunferencia de radio infinito descrita desde el origen como centro, á la parte superior de dicho eje; la suma de las integrales así calculadas será igual al residuo de $\frac{e^{azi}}{1+z^2}$ relativo al punto $z = \sqrt{-1}$ para el que la función se hace infinita, multiplicado por $2\pi i$, es decir, á

$$2\pi\sqrt{-1}\,\frac{e^{-a}}{2\sqrt{-1}} \quad \text{ó} \quad \pi e^{-a}.$$

Pero la integral tomada á lo largo de la semicircunferencia es nula. Se tendrá pues,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{axi}\,dx}{1+x^2} = \pi e^{-a};$$

y separando las partes reales y los coeficientes de i,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} = \pi e^{-a}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen } ax}{1+x^2} dx = 0.$$

La primera fórmula queda sustituída por πe^a, cuando a es negativo. Diferenciando esta fórmula, se obtiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} ax}{1 + x^2} dx = \pi e^{-a}.$$

4.° Sea la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{az}}{1 + e^z} dz.$
Si se integra la función

$$y = \frac{e^{az}}{1 + e^z} \qquad (0 < a < 1)$$

á lo largo de un contorno rectangular formado por el eje de las x, una perpendicular á éste en el infinito en la parte superior del mismo é igual á 2π, una paralela también al eje de las x á la distancia $+ 2\pi$ de él y por otra perpendicular trazada al mismo en el infinito negativo, de longitud 2π; la integral tomada á lo largo del contorno será igual á $2\pi i$ por el residuo de la función y, relativo al punto $z = \pi i$ que la hace infinita; luego

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{a(x+2\pi i)}\, dx}{1 + e^x} = 2\pi i \mathfrak{R} \frac{1 + e^z}{e^{az}},$$

observando que á lo largo de los lados verticales del rectángulo la integral y es nula.

Podemos por lo tanto escribir,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}dx}{1 + e^x} (1 - e^{2a\pi i}) = 2\pi i \frac{e^{a\pi i}}{-1},$$

de la que resulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}dx}{1 + e^x} = 2\pi i \frac{1}{e^{a\pi i} - e^{-a\pi i}}$$

ó en fin,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}dx}{1 + e^x} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}.$$

Cambiando a en $1-a$, resulta

$$\int_0^\infty \frac{t^{-a}dt}{1+t} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}.$$

§ 3.º APLICACIONES

1. $$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Si se trazan dos circunferencias infinitamente pequeñas, que rodeen los puntos -1 y $+1$ y se forma el contorno C, tendremos que calcular la integral á lo largo de C.

Partiremos del origen, tomando el radical igual á $+1$.

A lo largo de la circunferencia descrita alrededor del punto 1, la integral es infinitamente pequeña; pero después de haber caminado la variable z alrededor del punto 1, el radical $\sqrt{1-x^2}$ cambia de signo, y la integral tomada desde el punto 1 hasta el punto cero, adquiere todavía el valor

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

A lo largo del resto del contorno C la integral adquiere el valor

$$-\int_0^{-1} \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{1-x^2}};$$

luego la integral, tomada á lo largo de C, es

$$2\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Siendo cero la integral á lo largo de la circunferencia de radio infinito, la expresión precedente será igual á $2\pi\sqrt{-1}$ multiplicada por los residuos relativos á las puntos $a\sqrt{-1}$ y $-a\sqrt{-1}$. Los valores absolutos de estos residuos son

$$\frac{1}{2a\sqrt{-1}}\,\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \quad \text{y} \quad \frac{1}{+2a\sqrt{-1}}\,\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Como la integral propuesta no es nula ni negativa, es necesario tomar estos residuos con el signo $+$, y se tiene

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{a\sqrt{1+a^2}}.$$

Por otra parte, se pueden determinar los signos de los residuos, observando que el argumento de x á lo largo del eje de las x tomado en el origen igual á cero, es igual $\frac{\pi}{2}$ en $a\sqrt{-1}$ y á $\frac{3\pi}{2}$ en $-a\sqrt{-1}$.

2. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax}{e^{2\pi x}-1}\,dx = \frac{1}{4}\,\frac{e^a+1}{e^a-1} - \frac{1}{2a}.$$ Legendre.

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} 2x}{1-2a\cos x+a^2}\,x\,dx = \frac{\pi}{4a}\log(1+a)$$

$$\text{si} \quad -1<a<1, \qquad = \frac{\pi}{4a}\log\left(1+\frac{1}{a}\right) \quad \text{si} \quad a^2>1.$$

4. $$\int_0^\infty e^{a-1}\operatorname{sen}\left(\frac{a\pi}{2}-bx\right)\frac{r\,dx}{x^2+r^2} = \frac{\pi}{2}\,r^{a-1}e^{-br}.$$

5. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-r\cos 2\theta}{1-2r\cos 2\theta+r^2}\log\cos\theta\,d\theta = \frac{\pi}{4}\log\frac{1+r}{4}.$$

CAPÍTULO IX

Cálculo de las integrales definidas por series

§ 1.º TEOREMAS FUNDAMENTALES

50. PRIMER TEOREMA DE CAUCHY. *Si las funciones reales* $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ *de* x *son susceptibles de integración entre los límites* x_0 *y* X, *y si además es uniformemente convergente entre dichos límites la serie*

$$\varphi(x) = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1)$$

y representa una función $\varphi(x)$ *susceptible de integración; si, por último, se tiene que* $x_0 < a < b < X$, *se verificará que*

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b u_0\,dx + \int_a^b u_1\,dx + \ldots + \int_a^b u_n\,dx + \ldots$$

Hagamos $R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$

Por ser la serie uniformemente convergente entre x_0 y X, se podrá suponer en este intervalo n tal, que sea mod. $R < \varepsilon$; y de (1) resultará

$$\varphi(x) = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + R_n(x)$$

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b u_0\,dx + \ldots + \int_a^b u_n\,dx + \int_a^b R_n(x)\,dx.$$

Pero, siendo mód $R_n(x) < \varepsilon$, será mód $\int_a^b R_n\,dx$ menor que $\varepsilon(b-a)$, que se podrá representar por $\theta\varepsilon(b-a)$, expresando θ un número comprendido entre -1 y $+1$, de modo que la fórmula anterior, para $n = \infty$, será

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b u_0\,dx + \ldots + \int_a^b u_n\,dx + \ldots$$

Observación. Esta regla solo es aplicable cuando a y b son finitos, pues la serie

$$\varphi(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{(x+n)^2} + \ldots\ldots,$$

es uniformemente convergente entre o é ∞; porque el resto puede hacerse $< \varepsilon$, tomando n de manera que

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\ldots \text{ sea } < \varepsilon;$$

y se tendrá, integrando desde x hasta ∞, el resultado absurdo

$$-\int_x^\infty \varphi(x)\,dx = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{x+n} + \ldots\ldots$$

puesto que el segundo miembro es divergente.

51. SEGUNDO TEOREMA DE CAUCHY. *Si las funciones* u_0, $u_1, \ldots\ldots, u_n, \ldots\ldots$ *de* x *son sinécticas en el interior de un contorno* C *cerrado simple, siendo además uniformemente convergente en el interior de este contorno la serie*

$$\varphi(x) = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots \qquad (3)$$

1.° $\varphi(x)$ *es continua y monódroma en el interior de* C.

2.° *Se tendrá*

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b u_0\,dx + \ldots\ldots + \int_a^b u_n\,dx + \ldots\ldots$$

si el contorno ab *no encuentra al contorno C.*

3.° *Para todo punto* x *interior al contorno* C, *se tendrá*

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \ldots\ldots + \frac{du_n}{dx} + \ldots\ldots,$$

y la función φ *será sinéctica en el contorno* C.

En efecto, por ser la serie (3) uniformemente convergente, se podrá tomar n tal, que se tenga, cualquiera que sea x contenido en C,

$$\text{mod}\,(u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots) < \varepsilon$$

ó, llamando R_n á la cantidad colocada entre paréntesis,

$$\text{mod } R(x) < \varepsilon; \tag{4}$$

y puesto que (3) da

$$\varphi(x) = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n + R(x),$$

resultará

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b u_0 ds + \ldots + \int_a^b u_n dx + \int_a^b R(x) dx; \tag{5}$$

pero llamando ds al elemento de arco del contorno de integración, será

$$\int_a^b R(x) dx = \int_0^\sigma R(x) \frac{dx}{ds} ds;$$

y si se observa que el módulo de $\dfrac{dx}{ds} = 1$,

$$\text{mód} \int_a^b R(x)\, dx < \int_0^\sigma \varepsilon ds \quad \text{ó} \quad < \sigma\varepsilon.$$

La integral $\int_a^b R dx$ puede pues representarse por $\theta\sigma\varepsilon$, expresando θ una imaginaria de módulo inferior ó á lo más igual á 1; y la fórmula (5) se reduce á

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = \int_a^b u_0 dx + \ldots\ldots + \int_a^b u_n dx + \theta\sigma\varepsilon.$$

Si pues, el contorno de integración σ es de longitud finita, $\theta\sigma\varepsilon$ podrá hacerse tan pequeño como se quiera, y se tendrá

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = \int_a^b u_0 dx + \ldots\ldots + \int_a^b u_n dx + \ldots\ldots$$

Además, si se toma por contorno de integración una circunferencia infinitamente pequeña descrita alrededor del punto x interior á C, será

$$\int \frac{\varphi(x)}{(z-x)^2} dz = \int \frac{u_0(z)}{(z-x)^2} dz + \ldots + \int \frac{u_n(z)}{(z-x)^2} dz + \ldots$$

es decir

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \ldots\ldots + \frac{du_n}{dx} + \ldots\ldots$$

§ 2.° DIGRESIÓN ACERCA DE ALGUNAS SERIES Y PRODUCTOS INFINITOS

52. LEMA. *La inversa de la suma de una serie entera cuyo primer término no es nulo es desarrollable en serie entera.*

Sea $\varphi(x) = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots\ldots$

una serie entera en la que los valores absolutos de los coeficientes son á lo más iguales á la unidad. Esta serie es convergente para todos los valores de x comprendidos en el intervalo $(-1, +1)$. Además se pueden obtener siempre números $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots$ tales, que la serie

$$\psi(x) = 1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \ldots\ldots$$

sea convergente en el interior del intervalo $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$ y satisfaga á la ecuación

$$\varphi(x)\,\psi(x) = 1, \quad \text{ó} \quad (1 + \alpha_1 x + \ldots)(1 + \beta_1 x + \ldots) = 1.$$

En efecto, las ecuaciones

$$\alpha_1 + \beta_1 = 0, \quad \alpha_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2 = 0, \ldots\ldots$$

$$\alpha_n + \alpha_{n-1}\beta_1 + \ldots\ldots + \alpha_1\beta_{n-1} + \beta_n = 0, \ldots\ldots$$

determinan sucesivamente los coeficientes $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots$; y por ser el valor absoluto de α_n á lo más igual á la unidad, resulta que

$$|\beta_1| < 1, \quad |\beta_2| < 2, \quad |\beta_3| < 2^2, \ldots\ldots, \quad |\beta_n| < 2^{n-1}.$$

La serie $\psi(x)$ es pues absolutamente convergente en el interior del intervalo $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$; luego en este intervalo, la función $\varphi(x)$ no se anula, y su inversa puede desarrollarse en serie entera.

Sea ahora $f(x)$ una función desarrollable según la serie entera

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots,$$

cuyo radio de convergencia es R, no siendo nulo su primer término a_0. Para un valor positivo x_0 de x inferior á R, se puede determinar un número entero m tal, que á partir de $n = m$, se tenga

$$|a^n x_0^n| < |a_0|;$$

entonces, si r es una constante inferior á x_0 y al menor de los números

$$\left|\frac{a_0}{a_2}\right|, \quad \sqrt{\left|\frac{a_0}{a_2}\right|}, \quad \sqrt[3]{\left|\frac{a_0}{a_3}\right|}, \quad \ldots\ldots \quad \sqrt[m-1]{\left|\frac{a_0}{a_{m-1}}\right|},$$

haciendo $x = rt$, se tiene que

$$\frac{1}{a_0} f(x) = 1 + r\frac{a_1}{a_0} t + r^2 \frac{a_2}{a_0} t^2 + \ldots\ldots;$$

pero, cualquiera que sea n, el valor absoluto del coeficiente de t^n queda inferior á la unidad; luego, según lo que se ha concluído, $\frac{1}{f(x)}$ es desarrollable en serie entera en el intervalo $\left(-\frac{r}{2}, +\frac{r}{2}\right)$, siendo ciertamente superior á $\frac{r}{2}$ el menor valor absoluto de las raíces de la ecuación $f(x) = 0$.

53. Números de Bernoulli. Sea

$$y = \frac{x}{2}\,\frac{e^x + 1}{e^x - 1} \quad \text{ó} \quad y = \frac{x}{2} + \frac{x}{e^x - 1}.$$

Siendo desarrollable en serie entera de primer término no nulo la función $\dfrac{e^x - 1}{x}$, también lo será su inversa (p. 179); luego también lo será y. Pero y no cambia al cambiarse x en $-x$; luego se puede escribir

$$\frac{x}{2}\frac{e^x + 1}{e^x - 1} = 1 + B_1 \frac{x^2}{2!} - B_2 \frac{x^4}{4!} + \frac{B_3 x^6}{6!} + \ldots\ldots,$$

$$- (-1)^n B_n \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \ldots\ldots$$

de lo que resulta

$$x \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - 1} = 1 + 2^2 B_1 \frac{x^2}{2!} - 2^4 B_2 \frac{x^3}{4!} + \ldots\ldots$$

$$- (-1)^n 2^{2n} B_n \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \ldots\ldots \qquad (*)$$

Y por ser

$$(e^x - e^{-x})_0^{(2n+1)} = 2, \quad (e^x + e^{-x})_0^{(2n)} = 2,$$

$$(e^x - e^{-x})_0^{(2n)} = 0, \qquad (e^x + e^{-x})^{(2n+1)} = 0;$$

si se representa por z la función $x\,\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, tomando la derivada de orden $2n + 1$ de los dos miembros de la ecuación

$$z\,(e^x - e^{-x}) = x(e^x + e^{-x}),$$

se obtendrá, para $x = 0$,

$$\frac{2n+1}{1} z_0^{(2n)} + \frac{(2n+1)\,2n\,(2n-1)}{3!} z_0^{(2n-2)} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{(2n+1)\,2n}{2!} z_0'' + z_0 = 2n + 1;$$

(*) Euler *Institutiones Calculi differentialis* prs. § 2 114.

pero
$$z_0^{(2n)} = -(-1)^n 2^{2n} B^n,$$
$$z^{(2n-2)} = -(-1)^{n-1} 2^{2n-2} B_{n-1}, \ldots\ldots, z''_0 = 2^2 B_1;$$

y sustituyendo, resulta que los coeficientes $B_0, B_1, \ldots\ldots, B_n$ satisfacen á la relación recurrente

$$(1) \quad \frac{2n+1}{1} 2^{2n} B_n - \frac{(2n+1)\,2n\,(2n-1)}{3\,!} 2^{2n-2} B^{n-1} + \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1} \frac{(2n+1)\,2n}{2\,!} 2^2 B_1 + (-1)^n 2n = 0,$$

relación que permite calcular sucesivamente $B_1, B_2, \ldots\ldots$, obteniéndose

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30},$$
$$B = \frac{5}{66}, \quad B_6 = \frac{691}{2730}, \quad B_7 = \frac{7}{6}, \quad B_8 = \frac{3617}{510},$$

que son los números de Bernoulli.

COROLARIO. *La suma de las potencias de los números enteros puede expresarse por medio de los números de Bernoulli.*

En efecto, de
$$y = 1 + e^x + e^{2x} + \ldots\ldots + e^{(n-1)x},$$
se deduce
$$y^{(p)} = 1^p e^x + 2^p e^{2x} + \ldots\ldots + (n-1)^p e^{(n-1)x},$$
y por consiguiente:
$$y_0^{(p)} = 1^p + 2^p + \ldots\ldots + (n-1)^p;$$
pero
$$\frac{x}{e^{nx}-1} = n + n^2 \frac{x}{2!} + n^3 \frac{x^2}{3!} + \ldots\ldots$$
y
$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + B_1 \frac{x^2}{2!} - B_2 \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots$$

Se puede por tanto escribir

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_p x^p + \ldots\ldots,$$

hallándose determinado el coeficiente a_p por la relación

$$a_p = \frac{n^{p+1}}{(p+1)!} - \frac{1}{2}\frac{n^p}{p!} + \frac{B_1}{2!}\frac{n^{p-1}}{(p-1)!} - \ldots\ldots$$

Por otra parte

$$y_0^{(p)} = 1 . 2 \ldots\ldots p a_p;$$

luego, si S_p expresa la suma de las potencias de orden p de los n primeros números enteros, se tendrá

$$S_p = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{2} n^p + p B_1 \frac{n^{p-1}}{2!}$$

$$- p(p-1)(p-2) B_2 \frac{n^{p-2}}{4!} + \ldots$$

y, en particular,

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + (n-1) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2},$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + (n-1)^2 = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6},$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + (n-1)^3 = \frac{n^4}{4} - \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4},$$

. . . .

Observación. Para $n = \infty$,

$$\lim \frac{1^p + 2^p + \ldots\ldots + (n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

54. Polinomios de Bernoulli. Se llama *polinomio de Ber-*

noulli á todo polinomio $B_p(x)$ que se anula con x y satisface á la relación

$$B_p(x+1) - B_p(x) = x^p,$$

siendo p un número entero positivo ó nulo.

Expresemos por m el grado de $B_p(x)$; la diferencia

$$B_p(x+1) - B_p(x)$$

es un polinomio de grado $m-1$; pero por ser dicha diferencia igual á x^p, su grado es p, y $m = p+1$, pudiéndose escribir

$$B_p(x) = A_0 x^{p+1} + A_1 x^p + A_2 x^{p-1} + \ldots + A_{p-1} x^2 + A_p$$

$$B_p(x+1) = A_0 (x+1)^{p+1} + A_1 (x+1)^p + \ldots\ldots$$

Si desarrollamos y obtenemos la expresión $B_p(x+1) - B_p(x)$, igualamos á 1 el coeficiente de x^p é igualamos á cero los coeficientes de las demás potencias de x, resultará

$$\frac{p+1}{1} A_0 = 1,$$

$$\frac{p}{1} A_1 + \frac{(p+1)p}{2!} A_0 = 0,$$

$$\frac{p-1}{1} A_1 + \frac{p(p-1)}{2!} A_1 + \frac{(p+1)p(p-1)}{3!} A_0 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$A_p + A_{p-1} + A_{p-2} + \ldots\ldots + A_1 + A_0 = 0.$$

Estas ecuaciones permiten calcular A_0, A_1, ... y determinar el polinomio $B_p(x)$. Si en

$$B_p(x+1) - B_p(x) = x^p$$

se sustituye x sucesivamente por $0, 1, 2, \ldots\ldots, n-1$, hallaremos

$$B_p(1) - B_p(0) = 0, \quad B_p(2) - B_p(1) = 1^p, \ldots\ldots,$$

$$B_p(n) - B_p(n-1) = (n-1)^p,$$

y por consiguiente

$$B_p(n) = 1^p + 2^p + \ldots\ldots + (n-1)^p.$$

Los coeficientes del polinomio $B_p(x)$ son pues los mismos que los de las potencias de n en el desarrollo de la suma s_p de las potencias del orden p de los $n - 1$ primeros números enteros; luego

$$B_p(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{2}x^p + pB_1\frac{x^{p-1}}{2!}$$

$$-p(p-1)(p-2)B_2\frac{x^{p-3}}{x!} + \ldots\ldots$$

figurando los números de Bernoulli en la expresión de los *polinomios de Bernoulli* $B_p(x)$.

55. Series de Euler. Hagamos

$$(1+ax)(1+a^2x)\ldots\ldots(1+a^nx) = F_n(a,x).$$

Se tiene evidentemente, que

$$F_n(a,x)(1+a^{n+1}x) = F_n(a,ax)(1+ax). \qquad (1)$$

Si se hace ahora

$$F_n(a, x) = 1 + A_1x + A_2x^2 + \ldots\ldots + A_nx^n,$$

se tendrá, en virtud de (1),

$$(1 + A_1x + \ldots\ldots + A_nx^n)(1+a^{n+1}x)$$
$$= (1 + a_1A_1x + \ldots\ldots + A_na^nx^n)(1+ax),$$

é identificando,

$$A_1 + a^{n+1} = A_1a + a, \qquad A_1 = a\frac{1-a^n}{1-a},$$

$$A_2 + A_1a^{n+1} = A_2a^2 + A_1a^2, \quad A_2 = a^{1+2}\frac{1-a^n}{1-a}\frac{1-a^{n-1}}{1-a^2},$$

. . . .

Por consiguiente el desarrollo de $F(a, x)$ es

$$(1 + ax)(1 + a^2x) \ldots\ldots + (1 + a^n x)$$

$$= 1 + \frac{1 - a^n}{1 - a} ax + \frac{1 - a^n}{1 - a} \frac{1 - a^{n-1}}{1 - a^2} a^{1+2} x^2 + \ldots\ldots$$

Los términos de la serie positiva

$$\rho = \left(\frac{1}{1} - \log \frac{2}{1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \log \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \log \frac{4}{3}\right) + \ldots\ldots$$

son desarrollables según las series convergentes

$$\frac{1}{1} - \log\left(1 + \frac{1}{1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2} - \log\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3} \frac{1}{2^3} - \frac{1}{4} \frac{1}{2^4} - \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{3} \frac{1}{n^3} - \frac{1}{4} \frac{1}{n^4} - \ldots\ldots$$

Estos desarrollos, excepto el primero, son convergentes.

Además, la serie positiva de término general

$$\frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{n^3} + \frac{1}{4} \frac{1}{n^4} + \ldots\ldots$$

es convergente, porque según la fórmula de los incrementos finitos (t. I, pág. 44), se tiene que

$$-\frac{1}{n} - \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n - \theta} - \frac{1}{n}, \quad (0 < \theta < 1)$$

igualdad cuyo segundo miembro es menor que $\frac{1}{n(n-1)}$; luego, si se hace

$$S_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots\ldots,$$

y aplicando el teorema de la serie de series, se obtiene

$$\rho = \frac{S_2}{2} - \frac{S_3}{3} + \frac{S_4}{4} - \ldots\ldots$$

fórmula descubierta por Euler.

56. Fórmula de Wallis. La fórmula de Wallis obtenida ya por medio de las integrales definidas (119) se deduce de la fórmula de Euler (t. I, p. 219)

$$\operatorname{sen} x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots\ldots,$$

haciendo $x = \frac{\pi}{2}$, pues se obtiene que

$$\frac{2}{\pi} = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\left(1 - \frac{1}{36}\right)\ldots\ldots$$

El factor general de este producto puede escribirse bajo la forma

$$1 - \frac{1}{4n^2} = \frac{2n-1}{2n}\,\frac{2n+1}{2n};$$

luego

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\,\frac{6}{5}\,\frac{6}{7}\ldots\ldots$$

57. Desarrollo de $\log \frac{\text{sen } x}{x}$. Sea P_n el producto de los n primeros factores de $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ y R_n el producto de los factores siguientes. El límite de R_n es la unidad; por consiguiente, siendo el valor absoluto de x menor que π, se tiene

$$\log \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \log\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) + \log\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\ldots\ldots$$

Pero, para todo valor de x comprendido en el intervalo

$(-\pi, +\pi)$, los términos de esta serie son desarrollables según las series enteras absolutamente convergentes

$$\log\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)=-\frac{x^2}{\pi^2}-\frac{1}{2}\frac{x^4}{\pi^4}-\frac{1}{3}\frac{x^6}{\pi^6}-\ldots\ldots$$

$$\log\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)=-\frac{x^2}{2^2\pi^2}-\frac{1}{2}\frac{x^4}{2^4\pi^4}-\frac{1}{3}\frac{x^6}{2^6\pi^6}-\ldots\ldots$$

. . . .

$$\log\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)=-\frac{x^2}{n^2\pi^2}-\frac{1}{2}\frac{x^4}{n^4\pi^4}-\frac{1}{3}\frac{x^5}{n^6\pi^6}-\ldots\ldots$$

. . . .

Por otra parte, si se considera un valor positivo de x menor que π, la serie positiva de término general

$$\frac{x^2}{n^2\pi^2}+\frac{1}{2}\frac{x^4}{n^4\pi^4}+\frac{1}{3}\frac{x^6}{n^6\pi^6}+\ldots\ldots$$

es convergente, y su suma es $\log\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$; luego, haciendo

$$S_n=\frac{1}{1^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\ldots\ldots,$$

la suma por columnas verticales da

$$\log\frac{\operatorname{sen} x}{x}=-\frac{S_2}{\pi^2}x^2-\frac{1}{2}\frac{S_4}{\pi^4}x^4$$
$$-\frac{1}{3}\frac{S_6}{\pi^6}x^6-\ldots\ldots\qquad(-\pi<x<\pi).$$

58. Desarrollo de log cos x. Análogamente se ve que los términos de la serie

$$\log\cos x=\log\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)+\log\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\ldots\ldots$$

son desarrollables en series de la forma

$$-\frac{2^2 x^2}{(2n-1)^2\pi^2}-\frac{1}{2}\frac{2^4 x^4}{(2n-1)^4\pi^4}-\frac{1}{3}\frac{2^6 x^6}{(2n-1)^6\pi^6}-\ldots\ldots;$$

y si se hace

$$T_n=\frac{1}{1^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\ldots\ldots,$$

se obtendrá,

$$\log\cos x=-2^2\frac{T_2}{\pi^2}x^2-\frac{1}{2}2^4\frac{T_4}{\pi^4}x^4$$

$$-\frac{1}{3}2^6\frac{T_6}{\pi^6}x^6-\ldots\ldots\quad\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

59. DESARROLLO DE x COT x Y DE TANG x EN SERIES ENTERAS. Derivando las expresiones obtenidas de $\log\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ y $\log\cos x$, se obtienen las series

$$x\cot x=1-2\frac{S_2}{\pi^2}x^2-2\frac{S_4}{\pi^4}x^4$$

$$-2\frac{S_6}{\pi^6}x^6-\ldots\ldots\qquad(-\pi<x<\pi),$$

$$\operatorname{tg} x=2^3\frac{T^2}{\pi^2}+2^5\frac{T_4}{\pi^4}x^3+2^7\frac{T_6}{\pi^6}x^5+\ldots\quad\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

60. EXPRESIÓN DE LAS SUMAS S_{2n} Y T_{2n} EN FUNCIÓN DE LOS NÚMEROS DE BERNOULLI. Sea

$$y=1-2\frac{S_2}{\pi^2}x^2-2\frac{S_4}{\pi^4}x^4-2\frac{S_6}{\pi^6}x^6-\ldots\ldots$$

Considerando los desarrollos en series enteras de $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$, se deduce inmediatamente que

$$(\cos x)_0^{(2n)}=(-1)^n,\quad(\operatorname{sen} x)_0^{(2n+1)}=(-1)^n,$$

$$(\cos x)_0^{(2n+1)}=0,\qquad(\operatorname{sen} x)_0^{(2n)}=0;$$

por consiguiente, tomando la derivada de orden $(2n+1)$ de los dos miembros de la relación

$$y \text{ sen } x = x \cos x,$$

se obtiene, para $x = 0$,

$$\frac{2n+1}{1} y_0^{(2n)} - \frac{(2n+1)\,2n\,(2n-1)}{3\,!} y_0^{(2n-2)} + \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{(2n+1)\,2n}{2\,!} y_0'' - (-1)_n\, 2n = 0.$$

Pero, en virtud de la relación recurrente (1) de los números de Bernoulli (pág. 181) resulta que

$$y_0^{(2n)} = 2^{2n} B_n, \qquad \text{ó} \qquad S_{2n} = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,2n} B_n;$$

Deduciremos de esta relación, debida á Euler, la expresión de T_{2n} en función de B_n, resultando que

$$\frac{1}{2^{2n}} S_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \ldots\ldots$$

y restando las expresiones de S_{2n} y T_{2n},

$$T_{2n} = S_{2n} - \frac{1}{2^{2n}} S_{2n}, \quad T_{2n} = \frac{1}{2} \frac{(2^{2n}-1)\,\pi^{2n}}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,2n} B_n.$$

Si en la expresión de S_{2n}, en función de B_n, se da á x los valores, 1, 2, 3, ..., se obtiene

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\ldots; \qquad \frac{\pi^4}{90} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots\ldots$$

Puede deducirse también de

$$x = \text{tg}\, x - \frac{1}{3} \text{tg}^3 x + \frac{1}{5} \text{tg}^5 x - \ldots\ldots$$

la expresión

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \ldots\ldots\right)$$

tomando para x el arco de 30^0 cuya tangente es $\frac{1}{\sqrt{3}}$, fórmula que empleó Lagny para calcular π con 127 cifras decimales.

Análogamente se obtienen, por medio de la expresión de T_{2n} en función de B_n las relaciones siguientes:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots\ldots \qquad \frac{\pi^4}{96} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots\ldots$$

Si se sustituyen las sumas S_2, S_4, ..., T_2, T_4, ... por sus valores en función de B_1, B_2, ..., los diversos desarrollos en series obtenidos anteriormente, se reducen á

$$\log\frac{\operatorname{sen} x}{x} = -2\,\frac{B_1}{1}\,\frac{x^2}{2!} - 2^3\,\frac{B^2}{2}\,\frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots$$

$$\log\cos x = -2(2^2 - 1)\,\frac{B_1}{1}\,\frac{x^2}{2!} - 2^3(2^4 - 1)\,\frac{B_2}{2}\,\frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots$$

$$\log\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 2^2(2 - 1)\,\frac{B_1}{1}\,\frac{x^2}{2!} + 2^4(2^3 - 1)\,\frac{B_2}{2}\,\frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots$$

$$\operatorname{tg} x = 2^2(2^2 - 1)B_1\,\frac{x}{2!} + 2^4(2^4 - 1)B_2\,\frac{x^3}{4!} + \ldots\ldots$$

$$x \cot x = 1 - 2^2 B_1\frac{x^2}{2!} - 2^4 B_2\frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots$$

ó, efectuando el cálculo de los coeficientes,

$$\log\frac{\operatorname{sen} x}{x} = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} - \ldots\ldots$$

$$\log\cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \ldots\ldots$$

$$\log \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{x^2}{3} + \frac{7x^4}{90} - \frac{62x^6}{2835} + \ldots\ldots$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots\ldots$$

$$x \cot x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} - \ldots\ldots$$

61. Números de Euler. De la identidad

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} x + \cos^2 \frac{1}{2} x = 1$$

resulta $\qquad x \operatorname{cosec} x = \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \cot \frac{x}{2},$

y sustituyendo $x \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ y $x \cot \frac{x}{2}$ por sus desarrollos en series enteras, se obtiene (para $-\pi < x < \pi$).

$$x \operatorname{cosec} x = 1 + (2^2 - 2)\, B_1 \frac{x^2}{2!} + (2^4 - 2)\, B_2 \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots$$

En cuanto á la función $\sec x$, es el producto de las funciones $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ y $x \operatorname{cosec} x$, que son desarrollables en series enteras, en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$; por consiguiente es desarrollable en serie entera para los valores de x comprendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$, y además permanece invariable cuando se cambia x en $-x$, reduciéndose á 1 cuando x se anula; por consiguiente su desarrollo es de la forma $\left(\text{siendo } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\sec x = 1 + E_1 \frac{x^2}{2!} + E_2 \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots + E \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\ldots$$

Para determinar los coeficientes E_1, E_2, ..., E_n, ..., basta multiplicar esta serie por la siguiente

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\ldots,$$

y anular en el producto el coeficiente de x^{2n}, obteniéndose

$$1 - \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} E_1$$
$$+ \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} E_2 - \ldots\ldots + (-1)^n E_n = 0,$$

fórmula por medio de la que se pueden calcular sucesivamente E_1, E_2, ..., E_n, ...

Si se da á n los valores 1, 2, 3, ..., se obtiene

$$1 - E_1 = 0, \quad 1 - \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} E_1 + E_2 = 0,$$

$$1 - \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} E_1 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} E_2 - E_3 = 0, \ldots\ldots$$

de donde $\quad E_1 = 1, \quad E_2 = 5, \quad E_3 = 61, \quad \ldots\ldots$

Estos números, enteros, se llaman *números de Euler*.

62. Desarrollo de $\cot x$ y de $\operatorname{tg} x$ en series. Si en la serie entera

$$\frac{1}{x} - \cot x = 2\frac{S_2}{\pi^2} x + 2\frac{S_4}{\pi^4} x^3 + 2\frac{S_6}{\pi^6} x^5 + \ldots\ldots$$

se desarrollan las sumas S_2, S_4, ... y se agrupan los términos cuyos denominadores forman potencias pares de múltiplos de π, resulta

$$\frac{2x}{\pi^2 - x^2} = \frac{2x}{\pi^2} + \frac{2x^3}{\pi^4} + \frac{2x^5}{\pi^6} + \ldots\ldots \quad (*)$$

(*) Maurice Godefroy *Théorie élémentaire des séries*, p. 172.

$$\frac{2x}{4\pi^2 - x^2} = \frac{2x}{2^2\pi^2} + \frac{2x^3}{2^4\pi^4} + \frac{2x^5}{2^6\pi^6} + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{2x}{n^2\pi^2 - x^2} = \frac{2x}{n^2\pi^2} + \frac{2x^3}{n^4\pi^4} + \frac{2x^5}{n^6\pi^6} + \cdots\cdots$$

series absolutamente convergentes para todos los valores de x comprendidos en el intervalo $(-\pi, +\pi)$. Pero en este intervalo es absolutamente convergente la serie cuyo término general es $\frac{2x}{n^2\pi^2 - x^2}$; por consiguiente, según el teorema de series de series

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{4\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{9\pi^2 - x^2} - \cdots\cdots$$

$$\text{ó} \quad \cot x = \frac{1}{x} - \frac{1}{\pi - x} + \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \frac{1}{2\pi + x} - \cdots$$

Si se cambia x en $\frac{\pi}{2} - x$, resulta

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + x} + \frac{1}{3\frac{\pi}{2} - x} - \frac{1}{3\frac{\pi}{2} + x} + \cdots\cdots$$

$$\text{ó} \quad \operatorname{tg} x = \frac{2x}{\frac{\pi^4}{4} - x^2} + \frac{2x}{9\frac{\pi^2}{4} - x^2} + \frac{2x}{25\frac{\pi^2}{4} - x^2} + \cdots\cdots$$

Si en el desarrollo de $\cot x$ se da á la variable el valor πx, se obtiene

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x + 2} + \cdots\cdots$$

que también resulta mediante la derivada logarítmica de

$$\operatorname{sen} \pi x = \pi x\, \Pi \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$$

bajo la forma

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} - \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{n^2} + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{n^3} - \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{n^4} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{x} - 2x \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 2x^3 \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^4} - \ldots\ldots$$

Además, se tiene que

$$\pi \cot \pi x = \pi \frac{\cos \pi x}{\operatorname{sen} \pi x} = \pi i \frac{e^{i\pi x} + e^{-i\pi x}}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}} = \frac{1}{x} \frac{2\pi i x}{2} \frac{e^{2i\pi x} + 1}{e^{2i\pi x} - 1}$$

$$= \frac{1}{x}\left[1 + B_1 \frac{(2i\pi x)^2}{1 \cdot 2} - B_2 \frac{(2i\pi x)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots\ldots\right],$$

expresando $B_1, B_2, \ldots\ldots$ los números de Bernoulli; é identificando

$$B_1 \frac{2\pi^2}{1 \cdot 2} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \ldots\ldots, \quad B_m = \frac{2^{2m-1}\pi^{2m}}{1 \cdot 2 \ldots\ldots 2m} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}}.$$

63. Desarrollo de cosec x y de sec x. Se tiene

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x}\right) - \left(\frac{1}{2\pi - x} - \frac{1}{2\pi + x}\right) + \ldots,$$

$$\frac{\pi}{\operatorname{sen} x\pi} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2-x} + \ldots\ldots$$

$$\sec x = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + x}\right) - \left(\frac{1}{3\frac{\pi}{2} - x} + \frac{1}{3\frac{\pi}{2} + x}\right) + \ldots$$

$$\sec x = \frac{\pi}{\frac{\pi^2}{4} - x^2} - \frac{3\pi}{9\frac{\pi^2}{4} - x^2} + \frac{5\pi}{25\frac{\pi^2}{4} - x^2} - \ldots\ldots$$

64. Serie de Burmann. Supongamos que la función $\varphi(z)$ es sinéctica en el interior del contorno cerrado C, y que en dicha región tenga solamente una raíz. Si el número x no difiere mucho de esta raíz, es decir, si $\varphi(x)$ no tiene un módulo muy grande, se podrá suponer que, á lo largo del contorno C,

$$\text{mód}\ \varphi(z) > \text{mód}\ \varphi(x). \tag{1}$$

Supongamos pues, que: 1.º Sea $\varphi(x)$ sinéctica en el interior del contorno y que tenga un solo cero. 2.º que hallándose x en el interior de C, se verifique siempre, para los puntos z situados en el contorno, la desigualdad (1). Si pues, $f(z)$ es una función sinéctica en el interior de C, podrá desarrollarse según las potencias ascendentes de $\varphi(z)$.

En efecto, si N es el número de las raíces de $\varphi(z) - \varphi(x) = 0$, de las que una se halla contenida en el contorno C, se tendrá

$$N = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\varphi'(z)\,dz}{\varphi(z) - \varphi(x)}.$$

En virtud de (1), se podrá desarrollar el segundo miembro de esta fórmula según las potencias de $\varphi(x)$; y se tendrá

$$N = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left[\int \frac{\varphi'(z)\,dz}{\varphi(z)} + \int \frac{\varphi'(z)\,\varphi(x)\,dz}{\varphi^2(z)} + \ldots\ldots \right].$$

Todos los términos del segundo miembro son nulos, como lo hace ver la integración inmediata, excepto el primero que es igual al número de raíces de $\varphi(z) = 0$ contenidas en C, es decir, á uno; luego $N = 1$. Se tendrá pues, integrando siempre á lo largo del contorno C,

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\psi(z)\,\varphi'(z)\,dz}{\varphi(z) - \varphi(x)}. \tag{2}$$

Si en el interior del contorno C, la ecuación $\varphi(z) = 0$ tuviese α raíces, la ecuación $\varphi(z) - \varphi(x) = 0$ también tendría α raíces, siempre bajo la condición (1); y, llamando x, x', x'',..... á estas raíces, la fórmula (2) deberá modificarse. Su primer miembro deberá sustituirse por $f(x) + f(x') + f(x'') + \ldots\ldots$

Esto sentado, puesto que se supone que á lo largo del contorno C, el módulo de $\varphi(x)$ es inferior al de z, la integral que entra en (2) podrá desarrollarse según las potencias ascendentes de la función $\varphi(x)$, y se tendrá

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left[\int \frac{\psi(z)\varphi'(z)dz}{\varphi(z)} + \varphi(x)\int \frac{\psi(z)\varphi'(z)dz}{\varphi^2(z)} + \ldots\ldots \right.$$
$$\left. + \varphi^n(x)\int \frac{\psi(z)\varphi'(z)dz}{\varphi^{n+1}(z)} + \ldots\ldots\right]. \qquad (9)$$

Integrando por partes, resulta

$$\int \frac{\psi(z)\varphi'(z)}{\varphi^{n+1}(z)}dz = -\frac{\psi(z)}{n\varphi^n(z)} + \int \frac{\psi'(z)\,dz}{n\varphi^n(z)}.$$

Si ahora hacemos $\varphi(z) = (z-a)\,\Theta(z)$, y se integra á lo largo del contorno C, resultará

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{\psi(z)\varphi'(z)dz}{\varphi^{n+1}(z)} = \frac{1}{1.2\ldots n}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left[\frac{\psi'(a)}{\Theta^n(a)}\right];$$

luego:

$$\left.\begin{aligned}\psi(x) = \psi(a) + \varphi(x)\frac{\psi'(a)}{\Theta(a)} + \frac{\varphi^2(x)}{1.2}\frac{d}{da}\left[\frac{\psi'(a)}{\Theta^2(a)}\right] + \ldots \\ + \frac{\varphi^n(x)}{1.2\ldots n}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left[\frac{\psi'(a)}{\Theta^n(a)}\right] + \ldots\ldots\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

que es la serie de Burmann, la cual puede obtenerse bajo otra forma. Para ello, hagamos

$$\mathrm{PF}(z) = \frac{1}{\varphi'(z)}\frac{d\mathrm{F}}{dz};$$

y tendremos:

$$\int \frac{\psi(z)\,\varphi'(z)}{\varphi^{n+1}(z)}dz = -\frac{1}{n}\frac{1}{\varphi^n(z)}\psi(z) + \frac{1}{n}\int \frac{\psi'(z)\,\varphi'(z)\,dz}{\varphi'(z)\,\varphi^n(z)};$$

y observando que, si se integra á lo largo del contorno C, se anula la cantidad que se halla fuera del signo $\int$,

$$\int \frac{\psi(z)\,\varphi'(z)}{\varphi^{n+1}(z)} = \frac{1}{n}\int \frac{\varphi'(z)}{\varphi^n(z)}\,\mathrm{P}\,\psi(z)\,dz.$$

Integrando nuevamente por partes, será

$$\int \frac{\psi(z)\,\varphi'(z)\,dz}{\varphi^{n+1}(z)} = \frac{1}{n(n-1)}\int \frac{\varphi'(z)}{\varphi^{n-1}(z)}\,\mathrm{P}^2\,\psi(z)\,dz,$$

y así sucesivamente. Por último, se tendrá

$$\int \frac{\psi(z)\,\varphi'(z)\,dz}{\varphi^{n+1}(z)} = \frac{1}{1\,.\,2\ldots n}\int \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,\mathrm{P}^n\,\psi(z)\,dz;$$

luego $$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{\psi(z)\,\varphi'(z)\,dz}{\varphi^{n+1}(z)} = \frac{1}{1\,.\,2\,3\ldots n}\,\mathrm{P}^n\,\psi(a).$$

La fórmula (3) se deduce á

$$\psi(x) = \psi(a) + \frac{\varphi(1)}{1}\,\frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)} + \frac{\varphi^2(x)}{1\,.\,2}\,\mathrm{P}^2\,\psi(a) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{\varphi^n(x)}{1\,.\,2\ldots n}\,\mathrm{P}^n\,\psi(a) + \ldots\ldots$$

Comparando esta fórmula con la (4), resulta la identidad

$$\mathrm{P}\,\psi(a) = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left[\frac{\varphi'(a)}{\Theta^n(a)}\right].$$

Aplicación. La fórmula de Burmann, aplicada al desarrollo de e^{ax} según las potencias de xe^{bx} da

$$e^{ax} = 1 + axe^{bx} + a(a-2b)\,\frac{x^2}{1\,.\,2}\,e^{2bx}$$

$$+ a(a-3b)\,\frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,e^{3bx} + \ldots\ldots$$

El resto R de la fórmula de Burmann, cuando el último término empleado es $\varphi^a(x)$, está expresado por la fórmula

$$R = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\psi(z)\varphi'(z)}{\varphi(z)-\varphi(x)} \frac{\varphi^{n+1}(x)}{\varphi^{n+1}(z)}\, dz,$$

de manera que, si M expresa el valor máximo del módulo de

$$\frac{\psi(z)\varphi'(z)}{[\varphi(z)-\varphi(x)]\,\varphi^{a+1}(z)}$$

á lo largo de un contorno C que contiene el punto x y tal, que el módulo de $\varphi(z)$ sea mayor que el módulo de $\varphi(x)$, se tendrá:

$$\mathrm{mod}\ R < \frac{sM}{2\pi}\ \mathrm{mod}\ \varphi^{n+1}(x).$$

65. Teorema de Burmann. *Siendo* y, z *dos funciones de* x *que se anulan simultáneamente y tales, que* $\frac{z}{y}$ *puede ser desarrollada bajo la forma* $A + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots\ldots$, *entonces, si* P *es otra función de* x *que puede transformarse en una función, ya de* y, *ya de* z, *resulta que, cuando* $z = 0$,

$$\frac{d^n P}{dy^n} = \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\frac{dP}{dz}\cdot\left(\frac{z}{y}\right)^n\right].$$

En efecto, sea $z : y = t$; entonces cuando $z = 0$, será

$$\frac{d^n(y^r t^n)}{dz^n} = n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)\frac{d^{n-r}t^{n-r}}{dz^{n-r}},$$

y
$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(y^r \frac{dt^n}{dz}\right) = \frac{d^n}{dz^n}(y^r t^n).$$

Puesto que $t = A + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots\ldots$, podrá t^{n-r} tomar la forma $B + B_1 z + \ldots\ldots$ é $y^r t^n$ será $z^r t^{n-r}$ ó $Bz^r + B_1 z^{r+1} + \ldots\ldots$, que diferenciada n veces respecto á z, cuando $n > r$, da por término independiente de z el que se obtiene para $B_{n-r} z^n$, ó sea $n(n-1)\ldots\ldots 2.1\, B_{n-r}$, cuando $n \geqslant r$

y o, cuando $r < n$. Pero B_{n-r} es el coeficiente de z^{n-r} en el desarrollo de t^{n-r}, ó el valor de la $(n-r)^{\text{sima}}$ derivada, dividida por $1 . 2 \ldots . (n-r)$, cuando $z = 0$. Por consiguiente, cuando $z = 0$,

$$\frac{d^n(y^n t^n)}{dz^n} = \frac{d^n(z^r t^{n-r})}{dz^n} = \frac{n(n-1) \ldots . 2 . 1}{1 . 2 \ldots . (n-r)} \frac{(d^{n-r} t^{n-r})}{dz^{n-r}}$$

$$= n(n-1) \ldots . (n-r+1) \frac{d^{n-r}(t^{n-r})}{dz^{n-r}}.$$

Pero

$$y^r \frac{d . t^n}{dz} = n y^r t^{n-1} \frac{dt}{dz} = n z^r t^{n-r-1} \frac{dt}{dz} = \frac{n}{n-r} z^r \frac{d . t^{n-r}}{dz}$$

$$= \frac{n}{n-r} z^r (B_1 + 2B_2 z + 3B_3 z^2 + \ldots .)$$

$$= \frac{n}{n-r} (B_1 z^r + 2B_2 z^{r+1} + \ldots .)$$

que se anula con todas las derivadas sucesivas hasta la r^{sima} exclusive con z. Si pues n es mayor que r, la derivada $(n-1)^{\text{sima}}$ se reduce á $(n : (n-r) . (n-1) \ldots . 2 . 1 . (n-r) B_{n-r}$, ó bien á $n . (n-1) \ldots . 2 . 1 . B_{n-r}$; luego, cuando $z = 0$,

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(y^r \frac{dt^n}{dz} \right) = n(n-1) \ldots (n-r+1) \frac{d^{n-r} t^{n-r}}{dz^{n-r}}, \quad (n > r)$$

que es cero cuando $n \leqslant r$.

Por el teorema de Mac Laurin $P = P_0 + P'_0 y + P''_0 \frac{y}{2} + \ldots$,

siendo P_0, $P'_0, \ldots$ los valores de P considerados como funciones de y, para $y = 0$, que da $z = 0$. Multiplicando por t^n y derivando n veces, respecto á z, resulta

$$\frac{d^n(Pt^n)}{dz^n} = P_0 \frac{d^n t^n}{dz} + P'_0 \frac{d^n(yt^n)}{dz^n} + \ldots .,$$

que, para $z = 0$ es

$$P_0 \frac{d^n t^n}{dz^n} + n P'_0 \frac{d^{n-1} t^{n-1}}{dz^{n-1}}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2} P''_0 \frac{d^{n-2} t^{n-2}}{dz^{n-2}} + \ldots\ldots + nP_0^{n-1} \frac{dt}{dz} + P_0^n,$$

expresión, en la que se anulan los términos siguientes, según el teorema anterior. Multiplicando P por $\frac{dt^n}{dz}$, y derivando $n-1$ veces respecto á z tenemos

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(P \frac{dt^n}{dz}\right) = P_0 \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{dt^n}{dz} + P'_0 \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(y \frac{dt^n}{dz}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} P'_0 \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(y^2 \frac{dt^n}{dz}\right) + \ldots\ldots,$$

que, para $z = 0$ se reduce á

$$P_0 \frac{d^n t^n}{dz^n} + nP'_0 \frac{d^{n-1} t^{n-1}}{dz^{n-1}}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} P''_0 \frac{d^{n-2} t^{n-2}}{dz^{n-2}} + \ldots\ldots + nP_0^{n-1} \frac{dt}{dz};$$

que tiene un término menor que la anterior; y puesto que la derivada n^{sima} de $(y^r t^n)$ no se anula mientras sea $r > n$ y la derivada $(n-1)^{\text{sima}}$ se anula para $r = n$, tendremos para $z = 0$,

$$\frac{d^n}{dz^n}(Pt^n) - \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(P \frac{dt^n}{dz}\right) = P_0^n$$

ó

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{dP}{dz} t^n\right) = \frac{d^n P}{dy^n},$$

que demuestra el teorema.

Ejemplo. Sea $z = x^2 - 1$, $y = x - 1$, que se anulan para $x = 1$, en la relación de 2 á 1; y sea $P = x^{2a}$, tendremos:

$$t = x + 1 = \sqrt{1 + z} + 1, \quad P = (1 + y)^{2a} = (1 + z)^a$$

$$\frac{d^2P}{dy^2} = 2a(2a - 1)(1 + y)^{2a-2};$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{dP}{dz}t^2\right) = \frac{d}{dz}\left[a(1+z)^{a-1}\left(\sqrt{1+z}+1\right)^2\right]$$

$$= a(a-1)(1+z)^{a-2}\left[\sqrt{1+z}+1\right]^2$$

$$+ a(1+z)^{a-1}\frac{\sqrt{1+z}+1}{\sqrt{1+z}},$$

cuando $x = 1$ é $y = 0$, $z = 0$, la primera expresión se reduce á $2a\ (2a - 1)$ y la segunda á $4a\ (a - 1) + 2a$, que son iguales.

Consecuencias. Del teorema demostrado, resultan los siguientes problemas ya conocidos:

1.º Desarrollar $\psi\,(x)$ en potencias de $\varphi\,(x)$.

Sea a una de las raíces de $\varphi\,(x)$, $y = \varphi\,(x)$, $z = x - a$, por lo que y, z se anulan simultáneamente y en la razón de $\varphi'(a)$ á 1, que es infinita (excluimos los casos de ser a raíz múltiple ó $\varphi'\,(a)$ infinita).

Y puesto que $z = x - a$, tenemos

$$\frac{dA}{dx} = \frac{dA}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{dA}{dz},\ \frac{d^2A}{dx^2} = \frac{d}{dz}\frac{dA}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{d^2A}{dz^2}, \ldots\ldots$$

$$\psi\,(x) = \psi\,(a) + \left(\frac{d\,\psi\,x}{dy}\right)y + \left(\frac{d^2\,\psi\,x}{dy^2}\right)\frac{y^2}{2}$$

$$+ \left(\frac{d^3\,\psi\,x}{dy^3}\right)\frac{y^3}{2\,.\,3} + \ldots\ldots$$

Pero

$$\left(\frac{d^n\,\psi\,x}{dy^n}\right) = \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{\left[\frac{d\,\psi\,x}{dz}\left(\frac{x-a}{\varphi z}\right)^2\right]\right\},$$

siendo $x = a$ en las derivadas de φx, $(\varphi x)^2, \ldots\ldots$; luego

$$\psi(x) = \psi\,(a) + \left(\frac{\psi'\,(x)\,(x-a)}{\varphi\,(x)}\right)\varphi(x)$$

$$+ \frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'\,(x)\ (x-a)^2}{(\varphi x)^2}\right)\frac{(\varphi x)^2}{2} + \ldots\ldots$$

2.° Desarrollar $\psi\varphi^{-1}$ en potencias de x, siendo $\varphi^{-1}x$ la función inversa de $\varphi(x)$ ó $\varphi(\varphi^{-1}x) = x$.

Si escribimos $\varphi^{-1}x$ por x en la fórmula anterior, tendremos

$$\psi\varphi^{-1}x = \psi(a) + \left(\frac{\psi'x\,(x-a)}{\varphi x}\right)x + \frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'x\,.\,(x-a)^2}{(\varphi x)^2}\right)\frac{x^2}{2}$$

$$+ \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\psi'x\,(x-a)^3}{(\varphi x)^3}\right)\frac{x^3}{2\,.\,3} + \ldots\ldots$$

$$\varphi^{-1}(x) = a + \left(\frac{x-a}{\varphi x}\right)x + \frac{d}{dx}\left(\frac{x-a}{\varphi x}\right)^2\frac{x^2}{2} + \ldots\ldots$$

Si tenemos, por ejemplo, $\varphi(x) = (x-a)\,\varepsilon^{-x}$; hallar $\varphi^{-1}(x)$ será lo mismo que obtener y en la ecuación $x = (y-a)\,\varepsilon^{-y}$; y el teorema da

$$y = a + \varepsilon^{a}x + 2\varepsilon^{2a}\frac{x^2}{2} + 3^2\varepsilon^{3a}\frac{x^3}{2\,.\,3} + 4^3\varepsilon^{4a}\frac{x^4}{2\,.\,3\,.\,4} + \ldots\ldots$$

Si x y φx se anulan simultáneamente, tendremos

$$\varphi^{-1}x = \left(\frac{x}{\varphi x}\right)x + \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\varphi x}\right)^2\frac{x^2}{2} + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x}{\varphi x}\right)^3\frac{x^3}{2\,.\,3} + \ldots$$

Sea $\qquad \varphi(x) = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots\,;$

de manera que la determinación de $\varphi^{-1}x$ equivale á obtener x en función de u, partiendo de $u = ax + bx^2 + \ldots\ldots$ (t. I pág. 159).

Tendremos, siendo $P_{m,n}$ el coeficiente de x^m en el desarrollo de $(a + bx + \ldots)^{-n}$:

$$P_{10} = \frac{1}{a},\ P_{12} = -\frac{2b}{a^3},\ P_{23} = -\frac{3c}{a^4} + \frac{6b^2}{a^5},$$

$$P_{34} = -\frac{4e}{a^5} + \frac{20bc}{a^6} - \frac{20b^3}{a^7},$$

$$P_{45} = -\frac{5f}{a^6} + \frac{15\,(2be + c^2)}{a^7} - \frac{105\,b^2c}{a^8} + \frac{70\,b^4}{a^9},$$

Pero

$$\varphi^{-1}x = P_{01}\,x + \frac{1}{2}P_{12}\,x^2 + \frac{1}{3}P_{23}\,x^3 + \frac{1}{4}P_{34}\,x^4 + \ldots\ldots$$

Si pues $u = ax + bx^2 + cx^3 + ex^4 + fx^5 + \ldots\ldots$

será

$$x = \frac{u}{a} - b\frac{u^2}{a^3} + (2b^2 - ac)\frac{u^3}{a^5} - (5b^3 - 5abc + a^2e)\frac{u^4}{a^7}$$

$$+ [\,14\,b^4 - 21\,ab^2c + 3a^2(2be + c^2) - a^3f\,]\frac{u^5}{a^9}$$

$$- [42b^5 - 84ab^3c + 28a^2(b^2e + bc^2)$$

$$- 7a^3(bf + ce) + a^4g]\frac{u^6}{a^{11}} + \ldots\ldots \quad (*)$$

66. Serie de Wronski Supongamos que se haya demostrado la posibilidad del desarrollo

$$f(x) = a_0 + a_1\,\omega_1 + a_2\,\omega_2 + \ldots\ldots + a_n\,\omega_n + \ldots\ldots,$$

expresando $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$ constantes y $\omega_1, \omega_2, \ldots\ldots$ funciones dadas de x; y supongamos que se puedan calcular las derivadas de $f(x)$, derivando cada término del segundo miembro. Tendremos

$$f'(x) = a_1\omega'_1 + a_2\omega'_2 + \ldots\ldots + a_n\,\omega'_n + \ldots\ldots$$

$$\frac{f'(x)}{\omega'_1} = a_1 + a_2\frac{\omega'_2}{\omega'_1} + \ldots\ldots + a_n\frac{\omega'_n}{\omega'_1} + \ldots\ldots$$

Si se deriva de nuevo, tendremos

$$\frac{f''\,\omega'_1 - f'\,\omega''_1}{\omega'^2_1} = a_2\frac{\omega''_2\,\omega'_1 - \omega''_1\,\omega'_2}{\omega'^2_1} + \ldots\ldots$$

lo que puede escribirse bajo la forma

$$\begin{vmatrix} \omega'_1 & f' \\ \omega''_1 & f'' \end{vmatrix} = a_2\begin{vmatrix} \omega'_1 & \omega'_2 \\ \omega''_1 & \omega''_2 \end{vmatrix} + \ldots\ldots + a_n\begin{vmatrix} \omega'_1 & \omega'_n \\ \omega''_1 & \omega''_n \end{vmatrix} + \ldots\ldots$$

---

* *A. Morgan.* The diferencial and integral calculus.

La fórmula más general

$$\begin{vmatrix} \omega'_1 \dots\dots \omega'_{n-1} & f' \\ \omega''_1 \dots\dots \omega''_{n-1} & f'' \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \omega_1^n \dots\dots \omega_{n-1}^n & f^n \end{vmatrix} = \sum_{\mu=n}^{\mu=\infty} a_\mu \begin{vmatrix} \omega'_1 \dots\dots \omega'_\mu \\ \omega''_1 \dots\dots \omega''_\mu \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \omega_1^n \dots\dots \omega_\mu^n \end{vmatrix} \qquad (2)$$

es cierta para $n+2$. Admitamos que sea verdadera para cierto valor de n. Vamos á demostrar que es cierta para el valor $n+1$.

Hagamos, para obreviar

$$\begin{vmatrix} \omega'_1 & \omega'_2 \dots\dots \omega'_{n-1} & F' \\ \omega''_1 & \omega''_2 \dots\dots \omega''_{n-1} & F'' \\ \cdot\cdot & \dots\dots\dots\dots & \cdot\cdot \\ \omega_1^n & \omega_2^n \dots\dots \omega_{n-1}^n & F^n \end{vmatrix} = \Omega_n(F); \qquad (3)$$

entonces la fórmula (2) se podrá escribir así:

$$\Omega_n(f) = \sum_{\mu=n}^{\mu=\infty} \alpha_\mu \Omega_n(\omega_\mu).$$

Derivando después de haber dividido por $\Omega_n(\omega_n)$, será

$$\frac{d}{dx}\frac{\Omega_n(f)}{\Omega_n(\omega_n)} = a_\mu \frac{d}{dx}\frac{\Omega_n(\omega_\mu)}{\Omega_n(\omega_n)}. \qquad (4)$$

Pero, en general,

$$\frac{d}{dx}\frac{\Omega_n(F)}{\Omega_n(\omega_n)} = \frac{\Omega'_n(F)\Omega_n(\omega_n) - \Omega_n(F)\Omega'_n(\omega_n)}{\Omega_n^2(\omega_n)}. \qquad (5)$$

Además la derivada respecto á x de un determinante tal como el (3), se obtiene tomando las derivadas de los elementos de la última línea; y por consiguiente

$$\Omega'_n(F) = \frac{\partial\Omega_{n+1}(F)}{\partial\omega_n^n}, \qquad \Omega_n(\omega_n) = \frac{\partial\Omega_{n+1}(F)}{\partial F^n}$$

$$\Omega_n(F) = \frac{\partial\Omega_{n+1}(F)}{\partial\omega_n^{n+1}}, \qquad \Omega'(\omega_n) = \frac{\partial\Omega_{n+1}(F)}{\partial F^{n-1}};$$

luego (5) se reduce á

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\Omega_n(F)}{\Omega_n(\omega_n)} = \frac{1}{\Omega_n^2(\omega_n)}$$

$$\times\left[\frac{\partial\Omega_{n+1}(F)}{\partial\omega_n^n}\frac{\partial\Omega_{n+1}(F)}{\partial F^n} - \frac{\partial\Omega_{n+1}(F)}{\partial\omega_n^{n+1}}\frac{\partial\Omega_{n+1}(F)}{\partial F^{n-1}}\right],$$

es decir, $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\Omega_n(F)}{\Omega_n(\omega_n)} = \dfrac{1}{\Omega_n^2(\omega_n)}\dfrac{\partial^2\Omega_{n+1}(F)}{\partial\omega_n^n F^{n+1}}\Omega_{n+1}(F)$

pero $$\frac{\partial^2\Omega_{n+1}}{\partial\omega_n^n\,\partial F^{n+1}} = \Omega_n(\omega_n)$$

luego $$\frac{d}{dx}\frac{\Omega_n(F)}{\Omega_n(\omega_n)} = \frac{\Omega_{n+1}(F)}{\Omega_n(\omega_n)},$$

y en virtud de ésta, (4) puede escribirse así:

$$\Omega_{n+1}(f) = \sum_{\mu=n+1}^{\mu-\infty} a_\mu\Omega_{n+1}(\omega_\mu),$$

quedando el teorema demostrado.

67. Serie de Lagrange. La serie de Lagrange, como se ha visto, tiene por objeto obtener el desarrollo en serie de las raíces de la ecuación.

$$z - x - tf(z) = 0, \tag{1}$$

ó una función cualquiera de esta raíz.

Consideremos un contorno simple cerrado C, y supongamos que en su interior sea $f(z)$ sinéctica. El número N de las raíces de (1) contenidas en dicho contorno está expresado por

$$2\pi\sqrt{-1}\,N = \int\frac{1 - tf'(z)}{z - x - tf(z)}\,dz, \tag{2}$$

tomándose la integral á lo largo del contorno, para el cual se tenga

$$\bmod\,(z - x) > \bmod\,t\,f(x);$$

lo que se verificará siendo t suficientemente pequeño.

Podremos desarrollar el segundo miembro de (2) según las potencias de t y será

$$2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{N} = \int [1 - t f'(z)]\, dz \left[\frac{1}{z-x} + \frac{t f(z)}{(z-x)^2} + \ldots\ldots + \frac{t^n f^n(z)}{(z-x)^{n+1}} + \ldots\ldots\right]$$

$$2\pi\,\mathrm{N}\sqrt{-1} = \int dz \left\{ \frac{1}{z-x} + t\left[\frac{f(z)}{(z-x)^2} - \frac{f'(z)}{z-x}\right] + \ldots\ldots + t^n \left[\frac{f^n(z)}{(z-x)^{n+1}} - \frac{f^{n-1}(z) f'(z)}{(z-x)^n}\right] \ldots\ldots \right\}$$

Supongamos á x en el interior del contorno C. Entonces, por ser,

$$\int \frac{\mathrm{F}(z)\, dz}{(z-x)^n} = \frac{2\pi\sqrt{-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{F}^{n-1}(x);$$

y por destruirse todos los términos en t, será $\mathrm{N} = 1$. Así, el contorno C, á lo largo del que se verifica la fórmula (3) contiene una sola raíz de (1). Llamémosla α, y sea $\mathrm{F}(z)$ una función sinéctica en el contorno C.

Se tendrá

$$2\pi\sqrt{-1}\;\mathrm{F}(\alpha) = \int \frac{1 - t f'(z)}{z - x - t f(z)}\,\mathrm{F}(z)\, dz,$$

tomándose la integral á lo largo de C. Si desarrollamos ahora, según los potencias de t, será

$$2\pi\sqrt{-1}\;\mathrm{F}(\alpha) = \int \mathrm{F}(z)[1 - t f'(z)]dz \left\{ \frac{1}{z-x} + \frac{t f(z)}{(z-x)^2} + \ldots \right\}$$

$$= \int \mathrm{F}(z) dz \left\{ \frac{1}{1-x} + t\left[\frac{f(z)}{(z-x)^2} - \frac{f'(z)}{z-x}\right] + \ldots + t^n \left[\frac{f^n(z)}{(z-x)^{n+1}} - \frac{f^{n-1}(z) f'(z)}{(z-x)^n}\right] + \ldots \right\},$$

y en virtud de la fórmula (4),

$$F(\alpha) = F(x) + t\left[\frac{d}{dx}F(x)f(x) - f'(x)F(x)\right] + \ldots.$$

$$+ t^n\left[\frac{1}{1\,.\,2\,\ldots\,n}\frac{d^n}{dx^n}F(x)f^n(x)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{1\,.\,2\ldots(n-1)}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}F(x)f^{n-1}(x)f'(x)\right] + \ldots.$$

y haciendo reducciones,

$$F(\alpha) = F(x) + \frac{t}{1}F'(x)f(x) + \frac{t^2}{1\,.\,2}\frac{d}{dx}[F'(x)f^2(x)] + \ldots.$$

$$+ \frac{t^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[F(x)f^n(x)] + \ldots.$$

68. SERIE DE LAPLACE. Para resolver por series la ecuación

$$z = \Phi\,[x + tf(z)]$$

se hace $\theta = x + tf(z)$ y $z = \Phi(\theta)$; luego $\theta = x + tf[(\Phi(\theta))]$.

Para desarrollar z bastará desarrollar $\Phi(\theta)$ por la fómula de Lagrange, y tendremos, salvo las notaciones, la expresión dada en el tomo I, pág. 192.

69. SERIE DE HERSCHEL. PROBLEMA. *Determinar los coeficientes del desarrollo de una función cualquiera $f(e^t)$ de e^t.*

$$f(e^t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots. + A_x t^x + \ldots.$$

Tenemos por el teorema de Taylor

$$f(e^t) = f(1) + \frac{f'(t)}{1}(e^t - 1) + \frac{f''(1)}{1\,.\,2}(e^t - 1)^2 + \ldots.;$$

y expresando según Herschel, por $\Delta^n 0^m$ el valor de $\Delta^n x^m$ para $x = 0$, el coeficiente de t^x en el primer miembro de la última ecuación es igual á la suma de los coeficientes de t^x en los diferentes términos del segundo miembro, calcularemos primero el coeficiente de t^x en $f(1)$ que es $f(1) . 0^x = f(1)$ para $x = 0$, y nulo en los demás casos; en seguida veremos que en

$$f' \frac{(1)}{1}(e^t - 1) \quad \text{es} \quad \frac{f'(1)}{1} \frac{1^x - 0^x}{1.2\ldots x} = \frac{f'(1)}{1} \frac{\Delta\, 0^x}{1\ldots x}$$

$$\text{en} \quad \frac{f''(1)}{1.2}(e^t - 1)^2 \quad \text{ó} \quad \frac{f''(1)}{1.2}(e^{2t} - 2e^t + 1) \quad \text{es}$$

$$\frac{f''(1)}{1.2} \frac{2^x - 2.1^x + 0^x}{1.2\ldots x} = \frac{f''(1)}{1.2} \frac{\Delta^2\, 0^x}{1.2\ldots x};$$

como se ve, considerando la igualdad

$$e^{nt} = 1 + \frac{n}{1} t + \frac{n^2}{1.2} t^2 + \ldots\ldots + \frac{n^x}{1\ldots x} t^x + \ldots\ldots$$

de manera que

$$A_x = \frac{1}{1.2\ldots x} \left\{ f(1)\, 0^x + \frac{f'(1)}{1} \Delta 0^x + \frac{f''(1)}{1.2} \Delta^2 0^x + \ldots\ldots \right\},$$

ó, separando los símbolos de operaciones y de cantidades,

$$A_x = \frac{1}{1.2\ldots x} \left\{ f(1) + \frac{f'(1)}{1} \Delta + \frac{f''(1)}{1.2} \Delta^2 + \ldots\ldots \right\} 0^x$$

$$= \frac{f(1 + \Delta)\, 0^x}{1.2\ldots x};$$

y obtenemos la siguiente expresión:

$$f(e^t) = f(1) + \frac{t}{1} f(1 + \Delta)\, 0 + \frac{t^2}{1.2} f(1 + \Delta)\, 0^2 + \ldots \qquad (*)$$

(*) J. Herschel, *Sammlung v Aufgaben a endl. Differenzen se Summenrechnung.*

§ 4.° Nociones sobre las factoriales

70. Definiciones. Una factorial es un producto cuyos factores son términos de una progresión aritmética. Así

$$a(a+r)(a+2r)\ldots\ldots(a+(m-1)r)=a^{m|r}$$

es una factorial, en la que m es el exponente y r el incremento de la base a. Tenemos

$$a^{1|r}=a,\quad a^{2|r}=a(a+r),\quad a^{3|r}=a(a+r)(a+2r),\quad \ldots\ldots$$

$$a^{m|r}=a(a+r)(a+2r)(a+3r)\ldots\ldots(a+(m-1)r). \quad (1)$$

Esta factorial puede expresarse por medio de

$$[a+(m-1)r]^{m|-r},$$

de manera que $a^{m|r}=[a+(m-1)r]^{m|-r}$.

Enunciaremos las siguientes propiedades relativas al producto y al cociente de dos factoriales

$$a^{m+n|r}=a^{n|r}.(a+nr)^{m|r}, \quad (2)$$

$$a^{m-n|r}=\frac{a^{m|r}}{[a+(m-n)r]^{n|r}}. \quad (3)$$

71. Determinación de los coeficientes. Considerando el desarrollo del producto $(a+b)(a+c)\ldots\ldots$ en el caso de ser $a(a+r)(a+2r)\ldots\ldots[a+(m-1)r]$, y expresando por $(m\text{I}1)$, $(m\text{I}2)\ldots\ldots$ las sumas de los productos 1 á 1, 2 á 2, ... de los números naturales 0, 1, 2, ...$(m-1)$, tendremos que

$$a^{m|r}=a^m+(m\text{I}1)a^{m-1}r+(m\text{I}2)a^{m-2}r^2+\ldots\ldots$$
$$+(m\text{I}m-1)ar^{m-1}. \quad (4)$$

Para obtener los coeficientes del desarrollo que corresponden á un exponente $m+1$, cuando se supone conocidos los correspondientes á m, multiplicaremos por $a + mr$ los dos miembros de

$$a^{m+1|r} = a^{m|r}(a + mr),$$

y tendremos

$$a^{m+1|r} = a^{m+1} + (m\text{I}1)\,a^m r + (m\text{I}2)\,a^{m-1}r^2 + \ldots\ldots$$
$$+\, m a^m r + m\,(m\text{I}1)\,a^{m-1}r^2 + \ldots\ldots$$

Los coeficientes de las potencias descendentes de a serán:

$$m + (m\text{I}1),\quad m\,(m\text{I}1) + (m\text{I}2),\quad m\,(m\text{I}2) + (m\text{I}3),\quad \ldots\ldots$$

Pero sustituyendo m por $m + 1$ en (4) tenemos

$$a^{m+1|r} = a^{m+1} + (m + 1\text{I}1)\,a^m r + (m + 1\text{I}2)\,a^{m-1}r^2 + \ldots$$

é identificado será

$$(m + 1\text{I}1) = m + (m\text{I}1),\ (m + 1\text{I}2) = m\,(m\text{I}1) + (m\text{I}2), \ldots;$$

expresiones por las que se obtienen los coeficientes, para el exponente $m + 1$, por medio de los coeficientes para el exponente m. Así para

$$a^{2|r} = a^2 + ar, \qquad \text{se tiene} \qquad (2\text{I}1) = 1,\ (2\text{I}2) = 0;$$

para $\quad a^{3|r}$, $\quad$ se tiene $\ (3\text{I}1) = 2 + 1 = 3,\ \ (3\text{I}2) = 2;$

luego $\qquad a^{3|r} = a^3 + 3a^2 r + 2ar.$

Siendo $(3\text{I}1) = 3$, $(3\text{I}2) = 2$, se tendrá:

$$(4\text{I}1) = 3 + 3 = 6,\ (4\text{I}2) = 3.3 + 2 = 11,\ (4\text{I}3) = 3.2 + 0 = 6,$$

$$a^{4|r} = a^4 + 6a^3 r + 11\,a^2 r^2 + 6ar^3.$$

Y tendremos el siguiente cuadro de coeficientes y exponentes:

1	1.					
2	1,	1.				
3	1,	3,	2.			
4	1,	6,	11,	6.		
5	1,	10,	35,	50,	24	etc.

El procedimiento seguido, no es más que un modo particular para obtener los coeficientes. Para llegar á la ley general de obtención de éstos, consideramos la expresión fundamental

$$(a + mr)^{n|r} \cdot a^{m|r} = a^{n|r} \, (a + nr)^{m|r},$$

ó (haciendo $n = 1$) $\quad (a + mr) \cdot a^{m|r} = a\,(a + r)^{m|r}.$

El desarrollo del primer miembro se ha obtenido multiplicando por $a + mr$ el desarrollo de $a^{m|r}$, habiéndose deducido que:

$$(a + mr)\, a^{m|r} = a^{m+1} + [m + m\text{I}1]\, a^m r$$
$$+ \;[m\,(m\text{I}1) + (m\text{I}2)]\, a^{m-1} r^2$$
$$+ \;[m\,(m\text{I}2) + (m\text{I}3)]\, a^{m-2} r^3 + \ldots\ldots$$

Y el desarrollo del segundo miembro $a\,(a + r)^{m|r}$ se obtendrá sustituyendo a por $a + r$ en el desarrollo de $a^{m|r}$, y multiplicando enseguida todos los términos por a. Tendremos pues,

$$a(a + r)^{m|r} = a(a + r)^m + (m\text{I}1)a(a + r)^{m-1}r$$
$$+ \;(m\text{I}2)\,(a + r)^{m-2}r^2 + \ldots\ldots$$

y sustituyendo los desarrollos de las potencias de $a + r$, resulta:

$$a(a + r)^{m|r} = a^{m+1} + [m + (m\text{I}1)]a^m r$$
$$+ \left[\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + (m-1)\,(m\text{I}1) + (m\text{I}2)\right] a^{m-1} r^2 + \ldots\ldots$$

é identificando, tendremos;

$$m + (m\text{I}1) = m + (m\text{I}1),$$

$$m(m\text{I}1) + (m\text{I}2) = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + (m-1)\,(m\text{I}1) + (m\text{I}2),$$

$$m(m\text{I}2) + (m\text{I}3) = \frac{m(m-1)\,(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(m-1)\,(m-2)}{1 \cdot 2}\,(m\text{I}1)$$
$$+ \;(m-2)\,(m\text{I}2) + (m\text{I}3), \ldots\ldots;$$

Restando de los dos términos de la segunda igualdad, primero el término (mI2) y luego (m — 1 (mI1) será

$$mI1 = \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2}$$

Restando de los dos miembros de la tercera igualdad el término común (mI3) y luego (m — 2) (mI2) será

$$2(mI2) = \frac{(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2}(mI1) + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}, \text{ etc.}$$

§ 4.° Ejemplos y Aplicaciones

a) El cálculo de las diferencias finitas nos ofrece ejemplos del empleo de factoriales. Así tenemos, por ejemplo,

$$\Sigma x^4 = \frac{1}{2}x^{2|-1} + \frac{7}{3}x^{3|-1} + \frac{6}{4}x^{4|-1} + \frac{1}{5}x^{5|-1}$$

$$\Sigma x^5 = \frac{1}{2}x^{2|-1} + 5x^{3|-1} + \frac{25}{4}x^{4|-1} + 2x^{5|-1} + \frac{1}{6}x^{6|-1}.$$

Si los factores son x, $x + a$, $x + 2a$, ... tendremos:

$$x^2 = x(x+a) - ax, \qquad x^3 = x^{3|a} - 3ax^{2|a} + a^2x$$

$$x^4 = x^{4|a} - 6ax^{3|a} + 7a^2x^{2|a} + a^3x$$

$$x^5 = x^{5|a} - 10ax^{4|a} + 25a^2x^{3|a} - 15a^3x^{2|a} + a^4x.$$

b) Considerando los factores x, $x - a$, $x - 2a$, tenemos la siguiente ley:

$$x^m = a^{m-1}x + \Delta''0^m . a^{m-2}x^{2|-a} + \Delta'''0^m . a^{m-3}x^{3|-a}$$
$$+ \Delta''''0^m a^{m-4}x^{4|-a} + \ldots\ldots$$
$$= x^{m|-a} + \Delta^{(m-1)}0^m . ax^{m-1|-a} + \Delta^{(m-2)}0^m a^2 x^{m-2|-a} + \ldots$$

b) Siendo $a(a+b)(a+2b) \ldots\ldots (a+xb)$ el primer término, $(a+b) \ldots\ldots (a+(x+1)b)$ el segundo, $(a + (n-1)b)$

$(a+nb)\ldots\ldots(a+(x+n-1)b)$ el n^{simo} términos de una serie, las diferencias se expresan por las fórmulas

$$\Delta a = b,\ \Delta a(a+b) = (a+b)(a+2b) - a(a+b) = 2b(a+b),$$

$$\Delta a(a+b)(a+2b) = 3b(a+b)(a+2b),$$

$$\Delta a(a+b)(a+2b)(a+3b) = 4b(a+b)(a+2b)(a+3b)$$

$$\Delta a(a-b)(a-2b)(a-3b) = 4ba(a-b)(a-2b).$$

d) Expresado por $[a, a+xb]$ el producto de $a, a+b, \ldots\ldots, a+xb$, tendremos, en la hipótesis de que los términos sucesivos se forman cambiando a en $a+b$.

$$\Delta[a, a+xb] = (x+1)b[a+b, a+xb]:$$

$$\Delta[a+yb,\ a+xb] = (x-y+1)b[a+(y+1)b,\ a+xb],$$

$$\Delta^2[a+yb,\ a+xb] = (x-y+1)(x-y)b^2$$

$$\times\ [a+(y+2)b,\ \ b+xb],\quad \text{etc.}$$

e) Hallar la suma de la serie

$$x\,[a, a+yb] + [a+b, a+(y+1)b] + \ldots\ldots$$

$$+ [a+xb, a+(y+x)b].$$

Esta es la función cuya diferencia, cuando x se cambia en $x+1$, es $[a+(x+1)b,\ a+(y+x+1)b]$. Y, bien se cambie x en $x+1$ ó a en $a+b$, el resultado es el mismo, expresándose por $\Sigma[\,a+(x+1)b,\ a+(y+x+1)\,b]$. Ahora bien,

$$(y+2)\,b\,[a+(x+1)\,b,\ a+(y+x+1)\,b]$$

$$= \Delta\,[a+xb,\ a+(y+x+1)\,b],$$

ó

$$\Sigma\,[a+(x+1)\,b,\ a+(y+x+1)\,b]$$

$$= c + \frac{[a+xb,\ (a+y+x+1)\,b]}{(y+2)\,b}$$

Pero, por hipótesis, $\Sigma[a, a + yb] = 0$, puesto que no hay términos anteriores á $[a, a + yb]$; luego haciendo $x = -1$, tenemos

$$0 = C + \frac{[a - b, a + yb]}{(y + 2)b},$$

siendo el resultado final:

$$[a, a + yb] + \ldots\ldots + [a + xb, a + (y + x)b]$$
$$= \frac{[a + xb, a + (y + x + 1)b]}{(y + 2)b} - \frac{[a - b, a + yb]}{(y + 2)b}.$$

Ejemplos:

$$2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot 6 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 1} = 204$$

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 - 1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 1} = 68.$$

§ 5.° Cálculo de las integrales por series

72. Algunos desarrollos de serie. *Ejemplo 1.°* Se sabe que para todos los valores del módulo de x menores que 1,

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - \ldots\ldots \pm x^n \mp \ldots\ldots$$

El segundo miembro es uniformemente convergente para todos los valores de x contenidos en un círculo de radio 1 descrito desde el origen como centro. Consideremos un contorno de longitud finita interior á este círculo, é integremos los dos miembros á lo largo de este contorno.

Tendremos para todos los valores de x tales que mód $x < 1$,

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots \pm \frac{x^{x+1}}{n + 1} \mp \ldots\ldots$$

2.º Sea la ecuación

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots\ldots \pm x^{2n} \mp \ldots\ldots$$

que se verifica para todos los valores de x de módulo < 1. El segundo miembro es uniformemente convergente en todo el contorno interior al círculo del radio 1, descrito desde el origen como centro; é integrando á lo largo del contorno terminado en los puntos 0 y x, interior al círculo de convergencia, se tendrá

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots \pm \frac{x^{n+1}}{2n+1} \mp \ldots\ldots$$

para todos los valores de x cuyo módulo es < 1. El valor de arc tg x está definido por la condición de que para $x = 0$, arc tg $x = 0$ y que el valor que toma arc tg x en el punto x, cuyo módulo debe ser < 1, se obtiene haciendo variar á x de una manera continua, sin encontrar la circunferencia de radio 1 descrita desde el origen como centro, en el interior de la que arc tg x es monódroma.

3.º Sea $u = \int_0^x e^{-x^2}\,dx$.

Sustituyendo e^{-x^2} por su desarrollo en serie, tenemos

$$u = \int_0^x \left(1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2\,!} - \ldots\ldots \pm \frac{x^{2n}}{n!} \mp \ldots\ldots\right) dx;$$

é integrando cada término, se tiene

$$u = 1 - \frac{x^3}{1\,.\,3} + \frac{x^5}{1\,.\,2\,.\,5} - \frac{x^7}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,7} + \ldots\ldots,$$

serie muy convergente para valores de x menores que 1.

Para $x = 1$ resulta

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots$$

Ejemplo 4.º $\dfrac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$, haciendo $\sqrt{x}=u$, se tiene $\dfrac{2du}{\sqrt{1-u^2}}$,

$$\int\frac{2du}{\sqrt{-u^2}}=2\left(u+\frac{1}{2}\frac{u^3}{3}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{u^5}{5}+\frac{1\,.\,3\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\frac{u^7}{7}+\ldots\right)+C$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}=2\left(1+\frac{1}{2}\frac{x}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^2}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^3}{7}+\ldots\right)\sqrt{x}+C.$$

$$5.^{\circ}\quad dx\sqrt{2ax-x^2}=(2a)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\int dx\sqrt{2ax-x^2}=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5\,.\,2a}\right.$$

$$\left.-\frac{1\,.\,1}{2\,.\,4}\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7\,.\,4a^2}-\frac{1\,.\,1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{9\,.\,8a^3}-\ldots\ldots\right)\sqrt{2a}.$$

$$\int dx\sqrt{2ax-x^2}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\frac{x}{5\,.\,2a}\right.$$

$$\left.-\frac{1\,.\,1}{2\,.\,4}\frac{x^2}{7\,.\,4a^2}-\frac{1\,.\,1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\frac{9\,.\,8x^3}{a^3}-\ldots\ldots\right)2\sqrt{x}\sqrt{2ax}+C.$$

$$6.^{\circ}\quad\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=lx-\frac{1}{2\,.\,2x^2}-\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,4x^4}-\ldots..+C.$$

Haciendo $x=1+u$, se tiene

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{du}{\sqrt{2u+u^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int u^{-\frac{1}{2}}du\left(1+\frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\int\frac{du}{\sqrt{2u+u^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2u^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3\,.\,2}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5\,.\,4}-\ldots\ldots\right)$$

$$=\left(1-\frac{1\,.\,u}{2\,.\,3\,.\,2}+\frac{1\,.\,3\,.\,u^2}{2\,.\,4\,.\,5\,.\,4}-\frac{1\,.\,3\,.\,5u^3}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,7\,.\,8}+\ldots\ldots\right)\sqrt{2u}.$$

7.º Sea $\dfrac{dx\sqrt{1-\alpha^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$, expresando α una cantidad muy pequeña; se tendrá que integrar la serie

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\left(1-\frac{1}{2}\alpha^2x^2-\frac{1\,.\,1}{2\,.\,4}\alpha^4x^4-\ldots\ldots\right).$$

Sustituyendo en vez de

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \ldots\ldots,$$

sus valores, se tendrá

$$\int\frac{dx\sqrt{1-\alpha^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}=A+\frac{1}{2}\alpha^2\left\{\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}-\frac{A}{2}\right\}$$

$$+\frac{1\,.\,1}{2\,.\,4}\alpha^4\left\{\left(\frac{x^3}{4}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}x\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}A\right\}$$

$$+\frac{1\,.\,1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\alpha^6\left\{\left(\frac{x^5}{6}+\frac{1\,.\,5}{4\,.\,6}x^3+\ldots\ldots\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}A\right\},$$

habiendo hecho, por brevedad, el arco indicado en

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\text{arc sen } x.$$

8.º Siendo

$$(b-x)^{-\frac{1}{2}}=b^{-\frac{1}{2}}\left[1+\frac{1}{2}\frac{x}{b}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{x^2}{b^2}+\ldots\ldots\right],$$

la integración de la diferencial

$$\frac{dx}{\sqrt{(2cx-x^2)(b-x)}}$$

se reduce á la fórmula

$$\int\frac{x^q\,dx}{\sqrt{2cx-x^2}}=-\frac{x^{q-1}\sqrt{2cx-x^2}}{q}+\frac{(2q-1)c}{q}\int\frac{x^{q-1}\,dx}{\sqrt{2cx-x^2}}.$$

9.° Consideremos la integral estudiada por Fourier en la teoría del calor:

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2bx \, dx.$$

Por ser

$$\cos 2bx = 1 - \frac{(2bx)^2}{2!} + \frac{(2bx)^4}{4!} + \dots + (-1)^m \frac{(2bx)^{2m}}{(2m)!} + \dots$$

se tendrá

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx - \frac{4b^2}{2} \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx + \dots\dots$$

$$+ (-1)^m \frac{(2b)^{2m}}{(2m)!} \int_0^\infty x^{2m} e^{-x^2} dx + \dots\dots$$

La fórmula obtenida en el ejemplo 11 (cap. IV) da la fórmula recurrente.

$$A_m = \frac{2m-3}{2m-2} \frac{1}{a^2} A_{m-1}$$

aplicable á todos los valores de m mayores que 1. Pero

$$A_1 = \int_0^\infty \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \left[\text{arc tg} \frac{x}{a} \right]_0^\infty = \frac{1}{a} \frac{\pi}{2};$$

luego, dando á m los valores 2, 3, ... m:

$$A_m = \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \dots\dots \frac{2m-3}{2m-2} \frac{1}{a^{2m}-1} \frac{\pi}{2}.$$

Hagamos $x = \frac{z}{\sqrt{m}}$, $dx = \frac{dz}{\sqrt{m}}$, y la fórmula anterior se reduce á

$$A_m \sqrt{m} = \int_0^\infty \frac{dz}{\left(a^2 + \frac{z^2}{m}\right)^m} = \frac{1.3.5 \dots (2m-3)}{3.4.6 \dots (2m-2)} \frac{\sqrt{m}}{a^{2m-1}} \frac{\pi}{2}.$$

Hagamos $a = 1$, suponiendo que m crezca al infinito, y la última fómula se reduce á

$$\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz = \frac{\pi}{2} \lim_{m=\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 2m-3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \quad 2m-2} \sqrt{m},$$

y escribiendo $m + 1$ en vez de m,

$$\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz = \frac{\pi}{2} \lim_{m=\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots m-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \quad 2m} \sqrt{2m+1} \sqrt{\frac{m}{2m+1}}$$

y en virtud de la fórmula de Wallis

$$\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

10. Sea $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x\,dx}{1-x}$. Se tiene para $x < 1$,

$$\frac{\log x}{1-x} = \log x\,(1 + x + x^2 + \ldots\ldots + x^n + \ldots\ldots)$$

Pero
$$\int_0^1 x^n \log x\,dx = -\frac{1}{(n+1)^2};$$

$$\int_0^1 \log x\,dx = -1, \qquad \int_0^1 x \log x\,dx = -\frac{1}{2}, \ldots\ldots$$

luego

$$\int_0^1 \frac{\log x\,dx}{1-x} = -\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots\ldots\right) = -\frac{\pi^2}{6}.$$

11. $$\int_0^1 \frac{\log x\,dx}{1+x} = -\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots\ldots\right)$$

$$= -\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{6}\right) = -\frac{\pi^2}{12}.$$

12. $$\int_0^1 \frac{\log x\,dx}{1-x^2} = -\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right) = -\frac{\pi^2}{8}. \qquad (1)$$

Esta integral puede servir para calcular las dos anteriores. En efecto, sea

$$\int_0^1 \frac{x \log x \, dx}{1 - x} = \mathrm{P}. \tag{2}$$

Haciendo $x^2 = z$, se tiene

$$\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dz \log z}{1 - z} = \mathrm{P} \quad \text{ó} \quad \int_0^1 \frac{\log x \, dx}{1 - x} = 4\mathrm{P} \tag{3}$$

Sumando (1) y (2),

$$\int_0^1 \frac{(1 + x) \log x \, dx}{1 - x^2} = \int_0^1 \frac{\log x \, dx}{1 - x} = 4\mathrm{P} = \mathrm{P} - \frac{\pi^2}{8};$$

luego $\quad \mathrm{P} = -\dfrac{\pi^2}{24} \quad$ é $\quad \displaystyle\int_0^1 \frac{\log x \, dx}{1 - x} = -\frac{\pi^2}{6}.$

De igual manera restando 2 y 1, resulta

$$\int_0^1 \frac{(1 - x) \log x \, dx}{1 - x^2} = \int_0^1 \frac{dx \log x}{1 + x} = -\frac{\pi^2}{8} - \mathrm{P} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

13. $$\int_0^1 \frac{(\log x)^{2n-1} dx}{1 + x} = \int_0^1 (\log x)^{2n-1} dx \, (1 - x + x^2 - \ldots)$$

$$= -1 \,.\, 2 \ldots (2n - 1)\left(1 - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{4^{2n}} + \ldots\ldots\right).$$

Pero $\quad 1 + \dfrac{1}{2^{2n}} + \dfrac{1}{3^{2n}} + \ldots\ldots = \dfrac{2^{2n-1}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots 2n} \pi^{2n} \mathrm{B}_n;$

luego $\quad \dfrac{1}{2^{2n}} + \dfrac{1}{4^{2n}} + \ldots\ldots = \dfrac{1}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots 2n} \dfrac{\pi^{2n}}{2} \mathrm{B}_n,$

y $\quad 1 - \dfrac{1}{2^{2n}} + \dfrac{1}{3^{2n}} - \ldots\ldots = \dfrac{2^{2n-1} - 1}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots 2n} \pi^{2n} \mathrm{B}_n;$

luego $\quad \displaystyle\int_0^1 \frac{(\log x)^{2n-1} dx}{1 + x} = -\frac{2^{2n-1} - 1}{2n} \pi^{2n} \mathrm{B}_n,$

y haciendo $x = e^{-z}$, resulta

$$\int_0^1 \frac{z^{2n-1}\,dz}{1 + e^z} = \frac{2^{2n-1} - 1}{2n}\,\pi^{2n}\,B_n. \qquad (4)$$

14. Sea
$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} mx}{1 + e^x}\,dx.$$

Desarrollando sen mx é integrando por medio de la fórmula (4), se obtiene

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} mx}{1 + e^x}\,dx = \frac{m\pi^2 B_1}{1.2} - \frac{m^3\pi^4}{1.2.3} B_2 + \frac{m^5\pi^6}{5!}\,\frac{2^5 - 1}{6}\,B_3 + \ldots..$$

$$= \frac{1}{2m} + \frac{\pi}{2\sqrt{-1}} \operatorname{cosec} m\pi\sqrt{-1} = \frac{1}{2m} - \frac{\pi}{e^{m\pi} - e^{-m\pi}}.$$

15. $$\int_0^1 \frac{\log(1 + x)\,dx}{x} = \int_0^1 dx\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \ldots..\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots.. = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}.$$

16. $$\int_0^1 \frac{dx}{x} \log\frac{1 + x}{1 - x} = 2\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

17. Sea
$$\int_0^1 \frac{dx \log x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Hagamos

$$\sqrt{1 - x^2} = y, \quad dx = \frac{-y\,dy}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad \log x = \frac{1}{2}\log(1 - y^2).$$

Tendremos

$$\int_0^1 \frac{dx \log x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\int_0^1 \frac{dy}{2\sqrt{1 - y^2}}\left(y^2 + \frac{y^4}{2} + \frac{y^6}{3} + \ldots..\right)$$

luego

$$\int_0^1 \frac{dx \log x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^2}+\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6^2}+\ldots\ldots\right).$$

Para sumar esta serie, observaremos que se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = 1+\frac{1}{2}z^2+\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}z^4+\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}z^6+\ldots\ldots$$

$$\int_0^1 dz\left(\frac{1}{z\sqrt{1-z^2}}-\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2^2}+\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^2}+\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6^2}+\ldots\ldots;$$

luego

$$\int_0^1 \frac{dx \log x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{2}\int_0^1 dz\left(\frac{1}{z\sqrt{1-z^2}}-\frac{1}{z}\right).$$

Se tiene

$$\int dz\left(\frac{1}{z\sqrt{1-z^2}}-\frac{1}{z}\right) = -\log\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z^2}-\log z$$

$$= -\log\left(1+\sqrt{1-z^2}\right)$$

é

$$\int_0^1 dz\left(\frac{1}{z\sqrt{1-z^2}}-\frac{1}{z}\right) = \log 2;$$

luego

$$\int_0^1 \frac{\log x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{2}\log 2.$$

Si se hace $x = \operatorname{sen}\varphi$ esta fórmula se reduce á

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi}{2}\log 2,$$

integral que puede obtenerse directamente, pues se tiene

$$\frac{1}{2}\log 4 \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\varphi = -\left(\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos 2\varphi+\ldots\ldots\right)$$

y haciendo $$\frac{1}{2}\varphi = x,$$

$$\log \operatorname{sen} x = -\log 2 - \cos 2x - \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{3}\cos 6x - \ldots \quad (5)$$

Pero $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2mx\,dx = 0;$$

luego $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2\,dx = -\frac{\pi}{2}\log 2.$$

La fórmula (5) permite obtener la integral más general

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2mx \log \operatorname{sen} x\,dx = -\frac{\pi}{4m}.$$

18. $\int_0^1 \frac{dx}{x}(x^\alpha - x^\beta)$. Se tiene

$$x^\alpha = e^{\alpha lx} = 1 + \alpha \log x + \frac{\alpha^2 (\log x)^2}{1 . 2} + \ldots .$$

$$x^\beta = e^{\beta lx} = 1 + \beta \log x + \beta^2 \frac{(\log x)^2}{1 . 2} + \ldots .$$

y por ser $\int_0^1 dx\,(\log x)^n = (-1)^n\, 1 . 2 . 3 \ldots . n$ será

$$\int_0^1 \frac{dx}{\log x}(x^\alpha - x^\beta) = \alpha - \beta - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} + \frac{\alpha^3 - \beta^3}{3} - \ldots .$$

es decir, $$\int_0^1 \frac{dx}{\log x}(x^\alpha - x^\beta) = \log \frac{1+\alpha}{1+\beta}.$$

19. $\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x\,dx}{1 + \cos^2 x}$. Se tiene

$$\frac{1}{1+\cos^2 x} = 1 - \cos^2 x + \cos^4 x - \ldots .$$

La integración por partes, observando que $\int_0^\pi \cos^{2n+1} x\,dx = 0$,

da
$$\int_0^\pi x \operatorname{sen} x \cos^{2n} x\,dx = \frac{\pi}{2n+1};$$
luego
$$\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx = \pi\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

20. $\int_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2} \cos 2\beta x\,dx.$ Se tiene
$$e^{-\alpha^2 x^2} \cos 2\beta x = e^{-\alpha^2 x^2}\left[1 - \frac{(2\beta x)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(2\beta x)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots\right];$$
luego
$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2} \cos 2\beta x\,dx$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\left[1 - \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}{1} + \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^4}{1 \cdot 2} - \ldots\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}.$$

73. Descomposición en integrales parciales. 1.° Sea
$$\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2}.$$
Tenemos que
$$\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2} + \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2} + \ldots.$$
Haciendo $x = 2n\pi + y$, se tiene
$$\int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi} \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos y\,dy}{a^2+(2n\pi+y)^2},$$
y haciendo $x = (2n+2)\pi - y$,
$$\int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi} \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos y\,dy}{a^2+[(2n+2)\pi - y]^2};$$

luego $$\int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi} \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\cos y\,dy}{a^2+(2n\pi+y)^2}$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\cos y\,dy}{a^2+[(2n+2)\pi-y]^2},$$

é $$\int_0^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dy \cos y \left[\frac{1}{a^2+y^2} + \frac{1}{a^2+(2\pi+y)^2}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{a^2+(2\pi-y)^2} + \ldots\ldots\right].$$

Diferenciando la última fórmula, después de haber tomado el logaritmo de los dos miembros, resulta

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{4a}\int_0^{2\pi} \frac{(e^a-e^{-a})\cos y\,dy}{e^a-2\cos y+e^{-a}}.$$

Pero

$$\frac{e^a-e^{-a}}{e^a-\cos y+e^{-a}} = 1 + 2e^{-a}\cos y + 2e^{-2a}\cos 2y + \ldots\ldots$$

y además

$$\int_0^{2\pi} \cos ny \cos y\,dy = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \cos^2 y\,dy = \pi;$$

luego $$\int_0^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-a}.$$

2.º Sea $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{x}$. Haciendo la descomposión en integrales parciales, y escribiendo $x = n\pi \pm y$, podremos reducir á los límites comunes o y $\frac{\pi}{2}$, obteniendo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} y\,dy \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{\pi+y} + \frac{1}{2\pi+y} + \ldots \frac{1}{\pi-y} + \ldots\right).$$

Y la integral propuesta se reduce á $\frac{\pi}{2}$.

CAPÍTULO X

Métodos diversos de integración

§ 1.° Por cambio de variable

1.° $$u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen} x dx. \qquad (1)$$

Haciendo $x = \frac{\pi}{2} - y$, se tiene

$$u = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} - \log \cos y\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos y\, dy;$$

luego $$u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x dx. \qquad (2)$$

Sumando (1) y (2), resulta

$$2u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (l \operatorname{sen} x + l \cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \operatorname{sen} 2x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} l 2 dx.$$

Haciendo $2x = z$, se tiene

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \operatorname{sen} 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} l \operatorname{sen} z dz = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} l \operatorname{sen} x\, dx.$$

Siendo la curva cuya ecuación es $y = \text{sen}\, x$ simétrica con relación á una paralela al eje de las y cuya abscisa es $\frac{\pi}{2}$, la integral $\log \text{sen}\, x\, dx$, entre los límites o y π, es doble que aquélla cuyos límites son o y $\frac{\pi}{2}$; luego

$$2u = u - \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \log 2 = u - \frac{\pi}{2} \log 2,$$

es decir, $$u = -\frac{\pi}{2} \log 2 = \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2}.$$

2.° $$u = \int_0^{\pi} x \log \text{sen}\, x\, dx.$$

Haciendo $x = \pi - y$, se obtiene

$$\int_0^{\pi} x^2 \log \text{sen}\, x\, dx = \int_0^{\pi} (\pi - y)^2 \log \text{sen}\, y\, dy;$$

y sustituyendo y por x, después de suprimir términos comunes,

$$0 = \pi^2 \int_0^{\pi} l\, \text{sen}\, x\, dx - 2\pi \int_0^{\pi} x\, l\, \text{sen}\, x\, dx.$$

Pero $$\int_0^{\pi} l\, \text{sen}\, x\, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} l\, \text{sen}\, x\, dx = \pi l \frac{1}{2};$$

luego $$\int_0^{\pi} x\, l\, \text{sen}\, x\, dx = \frac{1}{2} \pi^2 l \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \pi^2 l 2.$$

3.° Sea $$\int_0^{\pi} \frac{x \,\text{sen}\, x\, dx}{1 + \cos^2 x}.$$

Haciendo $x = \pi - y$, se obtiene

$$\int_0^{\pi} \frac{x \,\text{sen}\, x\, dx}{1 + \cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - y)\, \text{sen}\, y\, dy}{1 + \cos^2 y}$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\text{sen}\, y\, dy}{1 + \cos^2 y} - \int_0^{\pi} \frac{y \,\text{sen}\, y\, dy}{1 + \cos^2 y}.$$

Si se hace pasar al primer miembro el segundo término del segundo, después de cambiar y por x, se tendrá

$$2\int_0^\pi \frac{x\,\mathrm{sen}\,x\,dx}{1+\cos^2 x} = \pi\int_0^\pi \frac{\mathrm{sen}\,y\,dy}{1+\cos^2 y}$$

$$= -\pi(\mathrm{arc\ tg}\cos\pi - \mathrm{arc\ tg}\cos 0) = \frac{\pi^2}{2};$$

luego
$$\int_0^\pi \frac{x\,\mathrm{sen}\,x\,dx}{1+\cos^2 x} = \frac{\pi^2}{4}.$$

§ 2.° Fórmula de Frullani

74. Esta fórmula se reduce á la igualdad siguiente:

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(ax)-\varphi(bx)}{x} = \varphi(0)\,l\,\frac{b}{a},$$

cualquiera que sea la función φ. Para demostrarla hagamos

$$u = \int_0^{\frac{h}{a}} \frac{\varphi(ax)-\varphi(0)}{x}\,dx.$$

Si se hace $ax = z$, se tendrá

$$u = \int_0^h \frac{\varphi(z)-\varphi(0)}{z}\,dz.$$

Siendo u independiente de a, conserva el mismo valor si esta constante se sustituye por otra, b por ejemplo, y se tiene

$$\int_0^{\frac{h}{a}} \frac{\varphi(ax)-\varphi(0)}{x}\,dx = \int_0^{\frac{h}{b}} \frac{\varphi(bx)-\varphi(0)}{x}\,dx;$$

luego

$$\int_0^{\frac{h}{a}} \frac{\varphi(ax)}{x}\,dx - \int_0^{\frac{h}{b}} \frac{\varphi(bx)}{x}\,dx = \int_0^{\frac{h}{a}} \frac{\varphi(0)}{x}\,dx - \int_0^{\frac{h}{b}} \frac{\varphi(0)}{x}\,dx$$

$$= \int_{\frac{h}{b}}^{\frac{h}{a}} \frac{\varphi(0)}{x}\,dx = \varphi(0)\log\frac{b}{a}.$$

El primer miembro puede escribirse así:

$$\int_0^{\frac{h}{a}} \frac{\varphi(ax) - \varphi(bx)}{x}\,dx - \int_{\frac{h}{a}}^{\frac{h}{b}} \frac{\varphi(bx)}{x}\,dx;$$

y si se supone h infinito, resulta la fórmula de Frullani.

Ejemplo: Sea $\varphi(x) = \cos x$. Siendo nula la integral

$$\int_{\frac{h}{a}}^{\frac{h}{b}} \frac{\cos bx}{x}\,dx$$

cuando h es infinito, se tiene

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx = \log\frac{b}{a},$$

es decir,

$$2\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)x \operatorname{sen}\left(\frac{b-a}{2}\right)x}{x}\,dx = \log\frac{b}{a},$$

y haciendo $\dfrac{a+b}{2} = p, \quad \dfrac{b-a}{2} = q,$

será $$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} px \operatorname{sen} qx}{x}\,dx = \frac{1}{2}\log\frac{p+q}{p-q}.$$

LIBRO SEGUNDO

FUNCIONES REPRESENTADAS POR INTEGRALES

CAPÍTULO I

Generalidades sobre las ecuaciones diferenciales

§ 1.º TEOREMA FUNDAMENTAL

75. DEFINICIONES. Toda relación entre una ó varias funciones de una ó de varias variables, éstas variables y las derivadas de las funciones se llama *ecuación diferencial.*

Una ecuación diferencial *ordinaria* es una relación entre una ó varias funciones de una sola variable y sus derivadas.

Una ecuación es de *derivadas parciales*, cuando contiene derivadas parciales relativas á varias variables.

Ecuación de diferenciales totales es la que contiene las diferenciales totales de una ó de varias funciones y de sus variables.

Integrar ó resolver una ecuación difererencial ó un sistema de ecuaciones diferenciales, es hallar la forma que debe atribuirse á las funciones contenidas en dicha ecuación ó en el sistema de ecuaciones para que se reduzcan á una identidad ó á un sistema de identidades.

TEOREMA FUNDAMENTAL. *Sea* t *una variable real y* x, y, z, ... *un sistema de* ν *funciones desconocidas de* t. *Si las funciones* $\varphi, \chi, \psi \ldots\ldots$ *de* x, y, z, ..., t *permanecen finitas y continuas, así como sus derivadas, cuando* x, y, z, ..., t *varían en la proximidad de* $x_0, y_0, z_0, \ldots\ldots, t_0$, *las ecuaciones diferenciales*

$$\frac{dx}{dt} = \varphi, \quad \frac{dy}{dt} = \chi, \quad \frac{dz}{dt} = \psi, \ldots\ldots$$

admitirán una solución tal, que para $t = t_0$ *se tenga* $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0, \ldots\ldots$

Diremos que las variables $x, y, z, \ldots\ldots, t$ se hallan comprendidas en el dominio D, si t varía entre $t_0 - k$ y $t_0 + k$ y al mismo tiempo $x, y, \ldots\ldots$ varían respectivamente entre $x_0 - a$ y $x_0 + a$, entre $y_0 - b$ é $y_0 + b, \ldots\ldots$

Supongamos ahora que, hallándose las variables comprendidas en el dominio D, las funciones $\varphi, \chi, \psi, \ldots\ldots$ y

$$\varphi_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \varphi_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \ldots\ldots, \chi_1 = \frac{\partial\chi}{\partial x}, \quad \chi_2 = \frac{\partial\chi}{\partial y}, \ldots\ldots$$

permanecen finitas y continuas. Hagamos $t_1 = t_0 + h$, siendo h una cantidad muy pequeña y

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \varphi(x_0, y_0, \ldots\ldots, t)\, dt \\ y_1 &= y_0 + \int_{t_0}^{t_1} \chi(x_0, y_0, \ldots\ldots, t)\, dt \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Llamemos M al máximo de φ tomado en valor absoluto, en el dominio D, N al máximo de χ, etc. Es claro que se tendrá

$$x_1 = x_0 + \theta h\mathrm{M}, \qquad y_1 = y_0 + \theta h\mathrm{N}, \ldots\ldots$$

hallándose θ comprendida entre -1 y $+1$; y si h es suficientemente pequeña, $x_1, y_1, \ldots\ldots$ quedarán dentro del dominio D. Supongamos que esto suceda, y hagamos $t_2 = t_1 + h$ y

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \int_{t_1}^{t} \varphi(x_1, y_1, \ldots\ldots, t)\, dt, \\ y_2 &= y_1 + \int_{t_1}^{t_2} \chi(x_1, y_1, \ldots\ldots, t)\, dt, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Se tendrá

$$x_2 = x_1 + \theta h\mathrm{M}, \qquad y_2 = y_1 + \theta h\mathrm{N}, \ldots\ldots$$

y por consiguiente

$$x_2 = x_0 + 2\theta h\mathrm{M}, \qquad y_2 = y_0 + 2\theta h\mathrm{N}, \ldots\ldots;$$

luego, si h es bastante pequeña, x_2, y_2, ... estarán también comprendidas en el dominio D; y continuando así tendremos

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{X} &= x_{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{\mathrm{T}} \varphi(x_{n-1}, y_{n-1}, \ldots\ldots, t)\,dt, \\ \mathrm{Y} &= y_{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{\mathrm{T}} \chi(x_{n-1}, y_{n-1}, \ldots\ldots, t)\,dt, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} (n)$$

$$\mathrm{X} = x_0 + n\theta h\mathrm{M}, \qquad \mathrm{Y} = y_0 + n\theta h\mathrm{N}, \ldots\ldots;$$

y si h es suficientemete pequeña, X, Y, Z, ... estarán comprendidas en el dominio D. Bastará para ello que

$$n\theta h\mathrm{M} < a, \; n\theta h\mathrm{N} < b, \;\ldots.. \;\; \text{ó} \;\; \mathrm{T} - t_0 < \frac{a}{\mathrm{M}}, < \frac{b}{\mathrm{N}}, \;\ldots..,$$

teniendo presente que $nh = \mathrm{T} - t_0$.

Resulta pues, que se puede elegir T bastante próximo de t_0 para que, por grande que sea n, las cantidades T, X, Y, ... se hallen contenidas en el dominio D. Sumando las fórmulas (1), (2), ..., (n), tendremos

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{X} &= x_0 + \sum_{i=0}^{i=n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi(x_i, y_i, \ldots.., t)\,dt, \\ \mathrm{Y} &= y_0 + \sum_{i=0}^{i=n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \chi(x_i, y_i, \ldots.., t)\,dt, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} (a)$$

Podemos simplificar estas ecuaciones, llamando ξ á una función de t sujeta á permanecer igual á x_0 cuando t varía desde t_0 hasta t_1, á permanecer igual á x_1 cuando t varía desde t_1 hasta

t_2, ...; y llamando η á una función sujeta á permanecer igual á y_0 cuando t varía desde t_0 hasta t_1, á permanecer igual á y_1 cuando t varía desde t_1 hasta t_2, ... Las fórmulas (a) se escribirán así:

$$\left.\begin{array}{l} X = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{T} \varphi(\xi, \eta, \ldots\ldots, t)\, dt, \\ Y = y_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{T} \chi(\xi, \eta, \ldots\ldots, t)\, dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (b)$$

Esto sentado, si T es un valor fijo de t contenido en el dominio D, haciendo crecer indefinidamente el número n, las cantidades X, Y, Z, ... tenderán hacia límites finitos, funciones de T, pues comparando los valores de (b) con los siguientes:

$$X_0 = x_0 + \int_{t_0}^{T} \varphi(x_0, y_0, \ldots\ldots, t)\, dt, \ldots\ldots,$$

tendremos

$$X - X^0 = \int_{t_0}^{T} [\varphi(\xi, \eta, \ldots\ldots, t) - \varphi(x_0, y_0, \ldots\ldots, t)]\, dt$$

ó

$$X - X^0 = \int_{t_0}^{T} [(\xi - x_0)\varphi_1(x_0 + \theta\,\overline{\xi - x_0}, y_0 + \theta\,\overline{\eta - y_0}, \ldots, t) + \ldots]\, dt.$$

Llamemos μ á una cantidad mayor que la mayor de las cantidades $\varphi, \chi, \ldots\ldots, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots, \chi_1, \chi_2, \ldots\ldots$ en el dominio D; y observemos que siendo $\xi - x_0$ una de las cantidades $x_i - x_0$, es de la forma $ih\theta$M ó $nh\theta$M ó $nh\theta\mu$. La fórmula anterior se reducirá pues á

$$X - X^0 = \int_{t_0}^{T} \nu n h \theta \mu^2\, dt = (T - t_0)\nu n h \theta \mu^2,$$

expresando, como se sabe, ν el número de funciones de t; y observando que $nh = T - t_0$

$$X - X^0 = \theta\nu\mu^2(T - t_0)^2, \quad Y - Y^0 = \theta\nu\mu^2(T - t_0)^2, \ldots\ldots$$

Estas fórmulas dan á conocer las diferencias entre los valores de X, Y, ... calculadas, sin subdividir el intervalo $T - t_0$.

Dividamos ahora el intervalo $T - t_0$ en n^2 partes iguales, dividiendo en n partes iguales los intervalos $t_1 - t_0$, $t_2 - t_1$, . . . , $T - t_{n-1}$, y llamemos X^2, Y^2, . . . á los valores de X, Y, . . . correspondientes á este modo de división. La diferencia entre X y X^2 será una suma de n cantidades de la forma $\theta\nu\mu^2 \left(\frac{T - t_0}{n}\right)^2$, y por consiguiente de la forma $\frac{\theta\nu\mu^2}{n}(T - t_0)^2$. Dividamos el intervalo $T - t_0$ en n^3 partes iguales, subdividiendo en n partes iguales cada uno de los nuevos intervalos; y llamemos X^3, Y^3, . . . los nuevos valores de X, Y, . . . ; la diferencia entre X^2 y X^3 será de la forma $\frac{\theta\nu\mu^2}{n^2}(T - t_0)^2$, y así sucesivamente; luego tendremos

$$X - X_0 = \theta\nu\mu^2 (T - t_0)^2, \ldots, X^p - X^{p-1} = \theta\nu \frac{\mu^2}{n^{p-1}}(T - t_0)^2;$$

y sumando

$$X^p - X^0 = \mu^2 \nu (T - t_0)^2 \left(\theta + \frac{\theta}{n} + \frac{\theta}{n^2} + \ldots + \frac{\theta}{n^{p-1}}\right).$$

En esta fórmula, la letra θ expresa cantidades diferentes, pero todas comprendidas entre -1 y $+1$ y bien determinadas. La cantidad escrita entre paréntesis es, para $p = \infty$, una serie convergente, y por consecuencia X^p tiene un límite para $p = \infty$, ó también X, Y, ... tienen límites determinados para $p = \infty$ (Cauchy demuestra que este límite permanece el mismo, cualquiera que sea la manera de crecer n).

Supongamos pues $n = \infty$, y calculemos las derivadas de las funciones X, Y, ... dadas por las fórmulas (b). Se tiene que

$$\Delta X = \int_T^{T+\Delta T} \varphi(\xi, \eta, \ldots\ldots, t)\, dt;$$

la cantidad colocada bajo el signo $\int$ difiere infinitamente poco de $\varphi(X, Y, \ldots, T)$. Se puede escribir pues, expresando por ε un infinitamente pequeño

$$\Delta X = \Delta T\,[\varphi(X, Y, \ldots, T) + \varepsilon],$$

y
$$\frac{\Delta X}{\Delta T} = \varphi(X, Y, \ldots, T) + \varepsilon,$$

cualquiera que sea n; luego para $n = \infty$ y $\Delta T = 0$,

$$\frac{dX}{dT} = \varphi(X, Y, \ldots, T), \quad \frac{dY}{dT} = \chi(X, Y, \ldots, T), \ldots$$

luego:

1.º Las cantidades X, Y, ..., calculadas como se acaba de exponer, satisfacen á las ecuaciones diferenciales del enunciado.

2.º Para $T = t_0$, es evidente que se reducen á $x_0, y_0, \ldots$ respectivamente, quedando el teorema demostrado.

§ 2.º Continuidad de las soluciones

76. Supongamos ahora que las funciones $\varphi, \chi, \psi, \ldots$ contienen un parámetro α. Vamos á ver que las soluciones de las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = \varphi, \quad \frac{dy}{dt} = \chi, \quad \frac{dz}{dt} = \psi, \quad \ldots \tag{1}$$

cuya existencia se ha demostrado, y que para $t = t_0$ se reducen á $x_0, y_0, \ldots$, son continuas con relación á α.

En efecto; hagamos variar α en g, y llamemos $\varphi', \chi', \psi', \ldots$ las derivadas $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \frac{\partial\chi}{\partial\alpha}, \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}, \ldots$, $x_1, y_1, z_1, \ldots$ variarán en $h_1, k_1, l_1, \ldots$; $x_2, y_2, z_2, \ldots$ en $h_2, k_2, l_2, \ldots$; y aun para mayor generalidad, si se suponen $x_0, y_0, z_0, \ldots$ funciones de

α, se podrá suponer que estas cantidades varían en h_0, k_0, l_0, ... Se tendrá pues

$$x_1 = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \varphi(x_0, y_0, \ldots\ldots, t)\, dt$$

$$x_1 + h_1 = x_0 + h_0 + \int_{t_0}^{t_1} \varphi(x_0 + h_0, \ldots\ldots, t)\, dt,$$

$$y_1 = y_0 + \ldots\ldots, \quad y_1 + k_1 = y_0 + k_0 + \ldots\ldots, \quad \ldots\ldots;$$

y por consiguiente

$$h_1 = h_0 + \int_{t_0}^{t} [h_0 \varphi_1(x_0 + \theta h_0, \ldots\ldots, \alpha + \theta g, t)$$
$$+ k_0 \varphi_2(x_0 + \theta h_0, \ldots\ldots, \alpha + \theta g, t) + \ldots\ldots$$
$$+ g\varphi'(x_0 + \theta h_0, \ldots\ldots, \alpha + \theta g, t]\, dt,$$

$$k_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Llamando M á una cantidad mayor que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots, \varphi', \chi_1, \chi_2, \ldots\ldots, \chi', \ldots\ldots$ en el dominio D, sin que ninguna sea infinita, y llamando H_0 una cantidad superior á la mayor de las cantidades g, h_0, k_0, ..., tomada en valor absoluto, se tendrá

$$H_1 = \theta[H_0 + (t_1 - t_0)M(\nu + 1)H_0]$$

ó, haciendo $\quad \tau = t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \ldots\ldots,$

$$H_1 = \theta H_0[1 + \tau M(\nu + 1)], \qquad H_2 = \theta H_1[1 + \tau M(\nu + 1)], \ldots\ldots$$

y por consiguiente

$$H_n = \theta H_0 \left[1 + \frac{M(\nu + 1)(T - t_0)}{n} \right]^n$$

ó en fin $\qquad H_n = \theta H_0 e^{M(\nu+1)(T-t_0)}.$

Si pues g es infinitamente pequeño, H_0 lo será y por consiguiente H_n, lo mismo que h_n, k_n, l_n, ... y sus límites, lo que prueba la continuidad de las funciones $x, y, z, \ldots\ldots$ con respecto á α y en particular con respecto á $x_0, y_0, \ldots\ldots$

Si ahora suponemos que, variando α en la cantidad g, se representan los incrementos de $x, y, z, \ldots\ldots$ por $x'g, y'g, z'g, \ldots$ las ecuaciones (1) se reducirán á

$$\frac{d(x+gx')}{dt} = \varphi(x+gx', \ldots\ldots, t), \ldots\ldots,$$

que combinadas con los (1) dan

$$\frac{dgx'}{dt} = \varphi(x+gx', \ldots\ldots, t) - \varphi(x, \ldots\ldots, t), \ldots\ldots$$

ó bien

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= x'\varphi_1 + y'\varphi_2 + \ldots\ldots + \varphi' + g\omega, \\ \frac{dy'}{dt} &= x'\chi_1 = y'\chi_2 + \ldots\ldots + \chi' + g\overline{\omega}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

expresando $\omega, \overline{\omega}, \ldots$ funciones finitas de $x, y, \ldots, x', y', \ldots, \alpha, g$.

Supongamos ahora, en estas ecuaciones (2), $x, y, z, \ldots\ldots$ funciones de t dadas por las fórmulas (1). Estas ecuaciones definen un sistema de valores de $x', y', z', \ldots\ldots$ que se reducen á $x'_0, y'_0, z'_0, \ldots\ldots$ para $t = t_0$ (y uno solo) en un dominio convenientemente elegido. Además estos valores son continuos con relación al parámetro g; luego cuando g tiende hacia cero, las soluciones tienden hacia las del sistema

$$\frac{dx'}{dt} = x'\varphi_1 + \ldots\ldots + \varphi', \qquad \frac{dy'}{dt} = x'\chi_1 + \ldots\ldots + \chi', \ldots\ldots$$

Esto equivale á decir que para $g=0$, las cantidades $x', y', \ldots$ tienen límites, y que por consiguiente:

Las soluciones de las ecuaciones (1) *tienen derivadas con relación á* α, *y en particular, con relación á* $x_0, y_0, z_0, \ldots\ldots$

Definición. Hemos visto que el sistema de ν ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = \varphi, \quad \frac{dy}{dt} = \chi, \quad \frac{dz}{dt} = \psi, \ldots\ldots \tag{1}$$

en el que $\varphi, \chi, \varphi, \ldots\ldots$ expresan funciones de $x, y, z, \ldots\ldots, t$ admite una solución que contiene ν constantes arbitrarias que son los valores de $x, y, z, \ldots\ldots, t$ para $t = t_0$, expresando t_0 un valor arbitrario de t.

Toda solución de las ecuaciones (1) que contiene ν constantes arbitrarias, *distintas*, se llama una *integral general* del sistema (1), ó una solución general de este sistema.

ν constantes se consideran como *distintas*, cuando se las puede elegir de manera que, para $t = t_0$ las funciones $x, y, z, \ldots$ reciban valores dados arbitrariamente. Así, las ν constantes que entran en una integral general deben ser tales, que se las pueda elegir de modo que, para $t = t_0$, adquieran $x, y, z, \ldots\ldots$ valores dados previamente $x_0, y_0, z_0, \ldots\ldots$ Sea

$$H_1 = 0, \quad H_2, \ldots\ldots, \quad H_\nu = 0 \tag{2}$$

un sistema de ecuaciones que contienen ν constantes arbitrarias $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_\nu$. Para que estas constantes sean distintas, es preciso que haciendo $t = t_0$, $x = x_0$, $y = y_0, \ldots\ldots$ se puedan resolver estas ecuaciones con relación á $a_1, a_2, \ldots\ldots a_\nu$. Por consiguiente, para que las constantes sean distintas, es necesario y suficiente, que se tenga

$$\frac{\partial\,(H_1, H_2, \ldots\ldots, H_\nu)}{\partial\,(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_\nu)} = 0.$$

Ejemplo 1.° Sean una ecuación primitiva y su diferencial

$$y = ce^{\alpha x} + c'e^{\alpha' x}, \ (1) \qquad \frac{dy}{dx} = c\alpha e^{\alpha x} + c'\alpha' e^{\alpha' x}.$$

Resolviendo estas dos ecuaciones con respcto á c y c', el denominador común será $(\alpha - \alpha')\,e^{(\alpha+\alpha')x}$. Luego si α es diferente de α', los valores de c y de c', correspondientes á valores arbitrarios a, b, b' atribuidos á x, y, $\frac{dy}{dx}$ serán finitos y determinados; y en este caso la ecuación (1) será la integral general de una ecuación diferencial de segundo orden.

Ejemplo 2.º La ecuación

$$y = c \operatorname{sen}(x + \alpha) + c' \operatorname{sen}(x + \alpha') + c'' \operatorname{sen}(x + \alpha'')$$

no puede ser la integral general de una ecuación diferencial de tercer orden, porque se tiene

$$\frac{dy}{dx} = c \cos(x + \alpha) + c' \cos(\alpha + \alpha') + c'' \cos(x + \alpha''),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -c \operatorname{sen}(x + \alpha) - c' \operatorname{sen}(x + \alpha') - c'' \operatorname{sen}(x + \alpha'');$$

y de la primera y la tercera resulta $\frac{d^2y}{dx^2} = -y$.

Hallándose determinado el valor de y, no se puede dar un valor arbitrario á $\frac{d^2y}{dx^2}$.

También se llega á esta conclusión escribiendo la ecuación propuesta bajo la forma

$$y = (c \cos\alpha + c' \cos\alpha' + c'' \cos\alpha'') \operatorname{sen} x$$
$$+ (c \operatorname{sen}\alpha + c' \operatorname{sen}\alpha' + c'' \operatorname{sen}\alpha'') \cos x,$$

ó
$$y = \mathrm{A} \operatorname{sen} x + \mathrm{B} \cos x,$$

que solo contiene dos contantes arbitrarias.

Volviendo á nuestro razonamiento, supongamos que se resuelvan las ecuaciones (2) con relación á a_1, a_2, ... obtendremos

$$a_1 = \omega_1, \quad a_2 = \omega_2, \quad \ldots\ldots, \quad a_\nu = \omega_\nu, \qquad (3)$$

expresando ω_1, ω_2, ... funciones de x, y, z, ..., t. Cada una de las ecuaciones (3) es una *integral* del sistema (1); y en general, toda ecuación en x, y, z, ..., t que contenga una constante arbitraria y concurra á formar la solución general, es lo que se llama una *integral.*

Ejemplo: Sea el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x. \qquad (a)$$

Cuando se trate de las ecuaciones diferenciales se verá que para obtener la integral general del sistema propuesto, hay que recurrir á lo que se llama un sistema de ecuaciones lineales sin segundo miembro, es decir, á ecuaciones de la forma

$$\frac{d^ny}{dx^n} + \mathrm{P}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + \mathrm{U}y = 0, \qquad (1)$$

en la que P, Q, ... expresan funciones algebráicas de x, cuya integral se obtiene fácilmente, pues si suponemos que $y = e^{rx}$ sea una de sus integrales, tendrá que satisfacer á la ecuación (1). Derivando n veces y sustituyendo en (1), tendremos después de haber suprimido el factor cumún e^{rx} la ecuación algebráica

$$r^n + \mathrm{P}r^{n-1} + \mathrm{Q}r^{n-2} + \ldots\ldots \mathrm{U} = 0 \qquad (2)$$

y las n raíces r_1, r_2, ..., r_n de ésta darán otras tantas soluciones e^{r_1x}, e^{r_2x}, ..., e^{r_nx} de la ecuación (1) que también la satisfarán, multiplicadas cada una por una constante arbitraria, de manera que tendremos las n integrales particulares $c_1e^{r_1x}$, $c_2e^{r_2x}$, ..., $c_ne^{r_nx}$ que sumadas, dan la integral general

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} + \ldots\ldots + c_ne^{r_nx}$$

Esto sentado, podemos resolver el sistema (a) propuesto. Para ello acudiremos á un artificio sencillo, que se reduce á derivar la primera ecuación, y tendremos inmediatamente

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = x \text{ que dan } \frac{d^2x}{dt^2} = x \text{ ó } \frac{d^2x}{dt^2} - x = 0.$$

La ecuación algebráica ó característica correspondiente es

$$r^2 - 1 = 0 \quad \text{que da} \quad r = \pm 1;$$

luego la integral general de $\dfrac{d^2x}{dt^2} = x$ será

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$$

Para obtener la segunda función derivaremos, y resultará

$$\frac{dx}{dt} = C_1 e^t - C_2 e^{-t};$$

y en virtud de $\dfrac{dx}{dt} = y$, tendremos determinada la segunda función

$$y = C_1 e^t - C_2 e^{-t}.$$

Las dos integrales

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad y = C_1 e^t - C_2 e^{-t}$$

constituyen la integral general.

§ 2.º Propiedades de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales

Teorema I. *Si entre las ecuaciones* (2) (pág. 239) *que forman una integral general del sistema* (1) *y sus derivadas relativas á* t, *se eliminan* $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_\nu$, *se obtendrán las ecuaciones* (1) *ó un sistema equivalente, es decir, que dé los mismos valores de* x, y, z, ..., t *en función de* $\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \ldots\ldots$

En efecto, si se obtienen los valores de $x, y, \ldots\ldots$ en (2) para sustituirlos en (1), estas ecuacioncs se reducen á identidades, por hipótesis; es decir, quedan satisfechas, cualquiera que sea t, y también cualesquiera que sean $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_\nu$; de manera que si se diferencian las ecuaciones (2) y de las ecuaciones obtenidas juntamente con las (2) se despeja x, y, ..., $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, ... para sustituirlas en (1) éstas se hacen idénticas.

Corolario. *Si se dan* ν *ecuaciones entre* x, y, ... t, *que contienen* ν *constantes arbitrarias, y se eliminan éstas entre las ecuaciones dadas y sus derivadas relativas á* t, *considerando á* x, y, z, ... *como funciones de* t, *se obtendrán ecuaciones diferenciales cuya integral general será el sistema de las ecuaciones propuestas.*

Teorema II. *La condición necesaria y suficiente para que* $\omega = a$, *en la que* ω *expresa una función de* x, y, z, ..., t *y* a *una constante arbitraria, sea una integral del sistema de ecuaciones* (1), *es que se tenga idénticamente, esto es para cualquier valor de* x, y, z, ... t,

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial x}\varphi + \frac{\partial\omega}{\partial y}\chi + \frac{\partial\omega}{\partial z}\psi + \ldots\ldots = 0. \qquad (4)$$

En efecto, decir que (4) es una integral de (1), es decir que existen otras $\nu - 1$ ecuaciones

$$\omega_1 = a_1, \quad \omega_2 = a_2, \ldots\ldots, \quad \omega_{\nu-1} = a_{\nu-1}, \qquad (6)$$

en las que ω_1, ω_2, ... son funciones de $x, y, z, \ldots\ldots, t$ y $a_1, a_2, \ldots\ldots$ constantes arbitrarias que con (4) forman la integral general de (1).

Si diferenciamos las ecuaciones (4) y (6), tendremos

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \ldots\ldots = 0, \\ \frac{\partial\omega_1}{\partial t} + \frac{\partial\omega_1}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\omega_1}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \ldots\ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}; \qquad (7)$$

y si de (4), (6) y (7) se sacan los valores de $x, y, \ldots \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \ldots$ para sustituirlos en (1), las fórmulas se hacen idénticas, es decir, se verifican cualesquiera que sean t y $a_1, \ldots\ldots a_\nu$.

Eliminemos desde luego $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \ldots\ldots$ y tendremos

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} + \varphi \frac{\partial \omega}{\partial y} \chi + \ldots\ldots = 0, \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial t} + \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \varphi + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \chi + \ldots\ldots = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\end{array}\right\} \quad (8)$$

Estas fórmulas deben reducirse á identidades, sustituyendo $x, y, \ldots\ldots$ por sus valores sacados de (4) y (6); y hecha esta sustitución, se verifican para valores cualesquiera de $a_1, a_2, \ldots.$

Pero podemos elegir $a_1, a_2, \ldots\ldots$ de modo que $x, y, \ldots.$ tengan valores dados arbitrarios; luego las fórmulas (8) se verifican para valores arbitrarios de x, y... Son pues identidades aún antes de sustituir $x, y, \ldots\ldots$ por sus valores deducidos de (4) y (6); luego (5) es una identidad, y recíprocamente, luego: *La condición necesaria y suficiente para que* $\omega =$ const. *sea una integral de la ecuación* (1), *es que* ω *sea una integral de la ecuación*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \chi + \ldots\ldots = 0.$$

§ 4.° Ecuaciones de orden superior al primero

77. Sea la ecuación diferencial de orden m,

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots, \frac{d^my}{dx^m}\right) = 0. \qquad (1)$$

Esta determina $\frac{d^my}{dx^m}$ en función de $x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots\ldots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$; y, si se diferencia sucesivamente, quedarán también determinados los coeficientes diferenciales $\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}, \frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}}, \ldots\ldots$ en función de las mismas cantidades.

Toda función de x puede desarrollarse en serie por medio de los teoremas de Taylor y de Mac Laurin, hallándose el primero menos sujeto á excepciones, porque puede elegirse el valor de x que entra en los coeficientes, de manera que ninguno de estos se haga infinito.

Sea pues y el valor más general que satisfaga á la ecuación (1): si se la supone desarrollable según la fórmula de Mac Laurin

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \ldots\ldots; \qquad (2)$$

y si se sustituyen todos los coeficientes, á partir del de x^m, por sus valores en función de los precedentes, determinados como hemos dicho, la función buscada se hallará necesariamente comprendida entre las que representa este desarrollo, porque no hemos expresado mas que condiciones á que debe satisfacer. Y recíprocamente, la función así determinada satisface necesariamente á la ecuación diferencial; porque, si se diferencian m veces los dos miembros de la ecuación (2), se obtendrá precisamente el desarrollo de la ecuación (1), resuelta con relación á $\frac{d^my}{dx^m}$.

La ecuación (2) daría pues la solución completa de la cuestión, si todos los valores de y fuesen desarrollables de esta manera. Y en todo caso faltarán tan sólo aquéllos en los cuales ciertos coeficientes diferenciales dejen de ser finitos y determinados para el valor particular $x = 0$.

Si se hubiese desarrollado conforme al teorema de Taylor, según las potencias de $x - x_0$, se habría obtenido como consecuencia de la ecuación (1)

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} \frac{(x - x_0)^{m-1}}{1 \cdot 2 \ldots (m-1)} + \ldots; \qquad (5)$$

determinándose los coeficientes diferenciales, á partir del de orden m, con auxilio de la ecuación (1), y referidos á $x = x_0$. Y recíprocamente la ecuación (1) se reduciría á ésta mediante m diferenciaciones sucesivas.

El valor arbitrario de x_0 podría elegirse de manera que ningún coeficiente de la serie se hiciese infinito, si los coeficientes dependiesen tan sólo de x_0; pero como contienen además el valor correspondiente de y con los de sus derivadas, podría suceder que cierta función $y = \varphi(x)$, satisfaciendo á la ecuación diferencial, hiciera infinitos ó indeterminados los coeficientes del desarrollo, cualquiera que fuera x.

Por consiguiente, las fórmulas (2) y (3) pueden no contener todas las funciones que satisfacen á la ecuación (1). Es evidente que estas dos fórmulas coinciden cuando todas las soluciones son desarrollables por medio de ambas; puesto que entonces representan las mismas funciones.

La ecuación (3) es la *integral general* de la (1); y la (2) es solamente un caso particular de aquélla correspondiente á $x = x_0$. Y por satisfacer la ecuación (3) á la propuesta, para valores cualesquiera de los m coeficiente primeros,

$$y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \left(\frac{d^2y}{dy^2}\right)_0, \ldots\ldots, \left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)_0;$$

puesto que desaparecen mediante m diferenciaciones que conducen de la ecuación (3) á la propuesta, *la integral general de una ecuación diferencial de orden* m *contiene necesariamente* m *constantes arbitrarias*, que son los valores de la función y de sus $m - 1$ primeras derivadas, correspondientes á un valor arbitrario de x.

Recíprocamente, toda ecuación entre x é y que satisface á la ecuación diferencial y que contiene m constantes arbitrarias, es idéntica á la integral general representada por el desarrollo (3), puesto que si desarrollamos, según las potencias de x, el valor de y dado por esta ecuación, los m primeros coeficientes contendrán á x_0 y á las m constantes arbitrarias, pudiendo adquirir todos los valores posibles, al elegirse convenientemente dichas constantes, cualquiera que sea el valor elegido para x_0. Pueden pues considerarse como absolutamente arbitrarios; y como los siguientes, dependen éstos, en virtud de la ecuación (1), el desarrollo no diferirá del que da la ecuación (3). De modo que: *Toda ecuación entre* x *é* y *que satisface á una ecuación diferencial de orden* m, *es su integral general, cuando contiene* m *constantes arbitrarias,* por medio de las que es posible dar valores arbitrarios á la función y á sus $m - 1$ primeras derivadas, para cierto valor de x,

Para cerciorarnos de que una ecuación constituye la integral general de una ecuación diferencial será preciso diferenciarla $m - 1$ veces, y ver si se puede dar á las m constantes valores tales, que para un valor dado de x se puedan obtener valores arbitrarios de y y de sus $m - 1$ primeras derivadas. Para ello bastará reconocer si las m ecuaciones pueden resolverse, respecto á las constantes, sin que resulte ningún absurdo; porque entonces se podrán elegir arbitrariamente, para un valor cualquiera de x, y juntamente con sus $m - 1$ primeras derivadas. Si, por ejemplo como ya hemos visto, una ecuación de segundo orden queda satisfecha, por el valor

$$y = \mathrm{C}\, e^{ax} + \mathrm{C}'\, e^{a'x},$$

siendo C y C′ constantes arbitrarias, se deducirá

$$\frac{dy}{dx} = a\mathrm{C}\, e^{ax} + a_1 \mathrm{C}'\, e^{a'x};$$

y para cualquier valor finito de x, estas ecuaciones darán valores finitos de C y de C′, mientras que no tengamos $a = a'$.

Cuando se da en la integral general, valores particulares á una ó á varias constantes arbitrarias, se tendrá una *integral particular*.

Ya hemos visto que una *solución singular* es aquélla que satisface á la ecuación diferencial, pero que no está contenida en la integral general.

§ 5.º NOCIONES ACERCA DE LAS ECUACIONES DE DERIVADAS PARCIALES

78. ECUACIONES DE PRIMER ORDEN. Las ecuaciones diferenciales de derivadas parciales se distinguen porque contienen en su expresión derivadas parciales, tal es la siguiente:

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots\ldots + P_n p_n = R, \tag{1}$$

en la que P_1, P_2, ..., P_n, R son funciones de las n variables independientes x_1, x_2, ..., x_n y de una función desconocida z de estas variables, mientras que p_1, p_2, ..., p_n expresan las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x_1}$, $\frac{\partial z}{\partial x_2}$, ..., $\frac{\partial z}{\partial x_n}$. Dicha ecuación es también lineal respecto á los coeficientes diferenciales.

Si α_1, α_2, ..., α_n, funciones conocidas de x_1, x_2, ..., x_n y de z se hallan ligadas por una relación

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n) = 0 \quad \text{ó} \quad \alpha_1 = \varphi(\alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_n); \tag{2}$$

y si se elimina la función arbitaria ψ ó φ, se llega á una ecuación de la misma forma que la propuesta. Diferenciando la ecuación (2) con relación á x_1, x_2, ..., x_n, tendremos

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial\alpha_1}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_2}\left(\frac{d\alpha_2}{dx_1} + p_1\frac{\partial\alpha_2}{\partial z}\right) + \ldots\ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_n}\left(\frac{\partial\alpha_n}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial\alpha_n}{\partial z}\right),$$

. . . .

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_n} + p_n\frac{\partial\alpha_1}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_2}\left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial x_n} + p_n\frac{\partial\alpha_2}{\partial z}\right) + \ldots\ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_n}\left(\frac{\partial\alpha_n}{\partial x_n} + p_n\frac{\partial\alpha_n}{\partial z}\right).$$

Sumándolas, miembro á miembro, después de haberlas multiplicado respectivamente por $P_1, \ldots\ldots, P_n$, resulta

$$P_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \ldots\ldots + P_n \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_n} + (Pp_1 + \ldots\ldots + P_n p_n) \frac{\partial \alpha_1}{\partial z}$$

$$= \sum_{i=2}^{i=n} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} \left[P_1 \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_1} + \ldots + P_n \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_n} + (P_1 p_1 + \ldots + P_n p_n) \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \right]$$

Pero si la ecuación (2) es una integral de la propuesta, $P_1 p_1 + \ldots\ldots + P_n p_n$ será idénticamente igual á R, y se tendrá

$$P_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \ldots\ldots + P_n \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_n} + R \frac{\partial \alpha_1}{\partial z}$$

$$= \sum_{i=2}^{i=n} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} \left(P_1 \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_1} + \ldots\ldots + P_n \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_n} + R \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \right).$$

Esta ecuación quedará satisfecha cualquiera que sea la función φ, si se eligen las α de modo que se tenga, para $k = 1, 2, \ldots\ldots, n$,

$$P_1 \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_2} + \ldots\ldots + P_n \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_n} + R \frac{\partial \alpha_k}{\partial z} = 0; \qquad (3)$$

Pero, en virtud del teorema II (pág. 243) bastará tomar para $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$ funciones de $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, z$ tales, que las ecuaciones simultáneas

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots\ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{R} \qquad (4)$$

tengan por integrales á las siguientes:

$$\alpha_1 = c_1, \quad \alpha_2 = c_2, \ldots\ldots, \quad \alpha_n = c_n.$$

De manera que si obtenemos las integrales del sistema (4), se habrá obtenido la integral de la ecuación propuesta bajo la forma (2).

Supongamos que la ecuación de derivadas parciales y su integral sean, respectivamente

$$Pp + Qq = R \quad (5) \qquad \text{y} \qquad \alpha = \varphi(\beta), \quad (6)$$

siendo $\alpha = f(x, y, z), \quad \beta = f_1(x, y, z). \quad (7)$

Tendremos
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial z} p &= \varphi'(\beta)\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial z} p\right) \\ \frac{\partial\alpha}{y} + \frac{\partial\alpha}{\partial z} q &= \varphi'(\beta)\left(\frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\beta}{\partial z} q\right) \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Es necesario que eliminando p y q entre las ecuaciones (5) y (7) se llegue á una ecuación idéntica, ó que se haga idéntica teniendo presente la ecuación de la integral general $F(x, y, z) = 0$.

Si se suman las ecuaciones (7), después de haberlas multiplicado respectivamente por P y Q, se tendrá, teniendo presente la (5),

$$P\frac{\partial\alpha}{\partial x} + Q\frac{\partial\alpha}{\partial y} + R\frac{\partial\alpha}{\partial z} = \varphi'(\beta)\left[P\frac{\partial\beta}{\partial x} + Q\frac{\partial\beta}{\partial y} + R\frac{\partial\beta}{\partial z}\right];$$

y se satisfará idénticamente á esta ecuación, eligiendo α y β de modo que se tenga

$$P\frac{\partial\alpha}{\partial x} + Q\frac{\partial\alpha}{\partial y} + R\frac{\partial\alpha}{\partial z} = 0, \qquad P\frac{\partial\beta}{\partial x} + Q\frac{\partial\beta}{\partial y} + R\frac{\partial\beta}{\partial z} = 0;$$

y estas condiciones quedan satisfechas, si se toman por α y β las funciones $f(x, y, z)$, $f_1(x, y, z)$, que igualadas á constantes, den las integrales de las ecuaciones simultáneas

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{P} = \frac{dz}{R}. \quad (9)$$

La integral $\alpha = \varphi(\beta)$ definida así, satisface á la condición característica de las integrales generales, de: *Dar para* z, *una expresión que pueda reducirse á una función dada* ω (y) *de* y *cuando se atribuye á* x *cierto valor* ξ, debiéndose tener

$$\alpha = f[\xi, y, \omega(y)], \qquad \beta = f_1[\xi, y, \omega(y)].$$

Si se elimina y entre estas dos ecuaciones, se tendrá un resultado de la forma

$$\alpha = \Phi(\beta),$$

de donde se concluye la forma que debe darse á la función arbitraria φ para satisfacer á la condición impuesta.

Además, toda integral general $F(x, y, z) = 0$ puede ponerse bajo la forma $\alpha = \varphi(\beta)$, pues de la primera se deduce

$$p = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial z}, \quad q = -\frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z};$$

y sustituídos estos valores en la ecuación (5), á la que deben transformar en una identidad, y por ser $F = 0$ una integral, se tendrá

$$P\frac{\partial F}{\partial x} + Q\frac{\partial F}{\partial y} + R\frac{\partial F}{\partial z} = 0;$$

y vamos á ver que toda función θ que satisface á esta ecuación de derivadas parciales, es una función de α y de β; en cuyo caso la ecuación $F(x, y, z) = 0$ equivaldrá á una relación $\alpha = \varphi(\beta)$ entre estas dos funciones; y en efecto siendo $\theta = \omega(x, y, z)$, si hacemos

$$\alpha = f_1(x, y, z), \quad \beta = f_2(x, y, z);$$

eliminando y, z, llegaremos á una ecuación $\theta = \pi(\alpha, \beta, x)$, de la que debe desaparecer x, ya que sustituyendo en

$$P\frac{\partial \theta}{\partial x} + Q\frac{\partial \theta}{\partial y} + R\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

tendremos

$$P\left(\frac{\partial \pi}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \pi}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \pi}{\partial x}\right)$$

$$+ Q\left(\frac{\partial \pi}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \pi}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial \pi}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial \pi}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial z}\right) = 0. \tag{2}$$

Y por satisfacer α, β á la ecuación (1), la ecuación (2) se reduce á $P\frac{\partial\pi}{\partial x}=0$, de donde $\frac{\partial\pi}{\partial x}=0$; ya que P solo puede ser nula para valores particulares de las variables. Así π no contiene x, reduciéndose á una función de α y β.

Queda probado que siendo $F(x, y, z)=0$ una integral de $Pp+Qq=R$, $F(x, y, z)=0$ equivale á una relación $\alpha=\varphi(\beta)$ entre estas dos funciones, es decir, que: *Si*

$$f(x, y, z)=c, \quad f_1(x, z, z)=c_1 \tag{10}$$

son dos integrales del sistema

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R},$$

y si se hace $\alpha=f(x, y, z)$, $\beta=f_1(x, y, z)$,

la integral de $Pp+Qq=R$ *será* $\alpha=\varphi(\beta)$, *designando* φ *una función arbitraria.*

Observación. De las integrales (10) puede deducirse una infinidad de otras integrales, como por ejemplo $\varphi(\alpha, \beta)=c$, lo que se demuestra derivando, y sumando término á término después de multiplicar respectivamente por P y Q.

79. Ecuación diferencial de segundo orden. La forma general de las ecuaciones diferenciales parciales ó de derivadas parciales de tres variables, es

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0. \tag{1}$$

Esta ecuación solo puede integrarse en casos particulares, siendo el más importante el en que las derivadas segundas se presentan únicamente en el primer grado, tomando esta ecuación la forma

$$Rr+Ss+Tt=V, \tag{2}$$

en la cual R, S, T y V son funciones de x, y, z, p y q.

El método de Monge consiste en cierto procedimiento para obtener una ó dos integrales primeras de la forma $u=f(v)$ siendo u y v funciones determinadas de x, y, z, p, q, y f una función arbitraria; después se obtiene por medio de estas integrales, ya separadamente ó combinadas, la integral que sigue.

Debe observarse que el método de Monge se funda en la hipótesis de que la primera integral es de la forma $u = f(v)$, caso que no ocurre siempre. Existen ecuaciones primitivas con dos funciones arbitrarias que pueden eliminarse por diferenciación, obteniéndose una ecuación de la forma (2), de la que es imposible eliminar una función tan solo, que conduzca á una ecuación de la forma (3). Así, la ecuación primitiva

$$z = \Phi(y + x) + \Psi(y - x)$$
$$- x[\Phi'(y + x) - \Psi'(y - x)] \tag{4}$$

conduce á la ecuación diferencial parcial

$$r - t = \frac{2p}{x};$$

pero no á una ecuación de la forma (3).

Propongámonos averiguar: 1.° bajo qué condiciones una ecuación de primer orden de la forma (3) debe conducir á una ecuación de segundo orden de la forma (2). 2.° establecer mediante los resultados de esta investigación el método inverso de resolución.

TEOREMA. *Una ecuación de derivadas parciales de primer orden de la forma* u = f(v) *puede conducir únicamente á otra de segundo orden de la forma*

$$\mathrm{R}r + \mathrm{S}s + \mathrm{T}t = \mathrm{V}, \tag{6}$$

cuando u *y* v *satisfacen á la condición*

$$\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial q} - \frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial v}{\partial p} = 0. \tag{7}$$

En efecto, diferenciando la ecuación $u = f(v)$ respecto á x é y sucesivamente, tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z} + r\frac{\partial u}{\partial p} + s\frac{\partial u}{\partial q} = f'(v)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z} + r\frac{\partial v}{\partial p} + s\frac{\partial v}{\partial q}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + q\,\frac{\partial u}{\partial z} + s\,\frac{\partial u}{\partial p} + t\,\frac{\partial u}{\partial q} = f'(v)\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\,\frac{\partial v}{\partial z} + s\,\frac{\partial v}{\partial p} + t\,\frac{\partial v}{\partial q}\right);$$

y eliminando $f'(v)$, resulta

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\,\frac{\partial u}{\partial z} + r\,\frac{\partial u}{\partial p} + s\,\frac{\partial u}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\,\frac{\partial v}{\partial z} + s\,\frac{\partial v}{\partial p} + t\,\frac{\partial v}{\partial q}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\,\frac{\partial v}{\partial z} + r\,\frac{\partial v}{\partial p} + s\,\frac{\partial v}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\,\frac{\partial u}{\partial z} + s\,\frac{\partial u}{\partial p} + t\,\frac{\partial u}{\partial q}\right) = 0. \quad (8)$$

Haciendo reducciones, se obtiene

$$\mathrm{R}r + \mathrm{S}s + \mathrm{T}t + \mathrm{U}\,(rt - s^2) = \mathrm{V} \qquad (9)$$

en la que $$\mathrm{U} = \frac{\partial u}{\partial p}\,\frac{\partial v}{\partial q} - \frac{\partial u}{\partial q}\,\frac{\partial v}{\partial p}.$$

Esta proposición puede también demostrarse observando que de $u = f(v)$, resulta $du = f'(v)dv$, ecuación que por ser $f(v)$ arbitraria, implica las ecuaciones $du = 0$, $dv = 0$, es decir,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}\,\partial x + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz + \frac{\partial u}{\partial p}\,dp + \frac{\partial u}{\partial q}\,dq = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy + \frac{\partial v}{\partial z}\,dz + \frac{\partial v}{\partial p}\,dp + \frac{\partial v}{\partial q}\,dq = 0 \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

y $\quad dz = pdx + qdy, \quad dp - rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy;$

luego

$$\frac{\partial u}{\partial x} + p\,\frac{\partial u}{\partial z} + r\,\frac{\partial u}{\partial p} + s\,\frac{\partial u}{\partial q}\Big)\,dx$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\,\frac{\partial u}{\partial z} + s\,\frac{\partial u}{\partial p} + t\,\frac{\partial u}{\partial q}\right)dy = 0,$$

$$\frac{dv}{dx} + p\,\frac{\partial v}{\partial z} + r\,\frac{\partial v}{\partial p} + s\,\frac{\partial v}{\partial q}\Big)\,dx$$

$$+\left(\frac{dv}{dy} + q\,\frac{\partial v}{\partial z} + s\,\frac{\partial v}{\partial p} + t\,\frac{\partial v}{\partial q}\right)dy = 0;$$

y eliminando dx y dy resulta lo mismo que anteriormente.

Problema. *Obtener, cuando sea posible, una integral primera de la forma* u = f(v) *de la ecuación* (6).

En virtud del teorema anterior u y v deben satisfacer á la condición (7) que puede expresarse bajo la forma

$$\frac{\partial u}{\partial q} : \frac{\partial u}{\partial p} = \frac{\partial v}{\partial q} : \frac{\partial v}{\partial p} = m, \tag{11}$$

de manera que

$$\frac{\partial u}{\partial q} = m \frac{\partial u}{\partial p}, \qquad \frac{\partial v}{\partial q} = m \frac{\partial v}{\partial p}.$$

Sustituyendo estos valores en (10), tenemos

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \frac{\partial u}{\partial p}(dp + mdq) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz + \frac{\partial v}{\partial p}(dp + mdq) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Y, puesto que este sistema es equivalente á $du = 0$, $dv = 0$ modificado por la condición (7), solo puede tener un sistema integral de la forma $u = a$, $v = b$, (14) siendo a y b constantes arbitrarias y u, v funciones ligadas por la relación (11).

Haciendo $dz = pdx + qdy$ en (13), tenemos (15)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}\right) dy + \frac{\partial u}{\partial p}(dp + mdq) = 0$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right) dx + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}\right) dy + \frac{\partial v}{\partial p}(dp + mdq) = 0$$

Eliminando entre éstas y

$$dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy \tag{16}$$

las diferenciales dx, dy, dp, dq, obtendremos un sistema de la forma (6). Para efectuar esta eliminación, sumando las dos últimas ecuaciones después de multiplicar la segunda por m, tendremos

$$dp + mdq = (r + ms)\,dx + (s + mt)\,dy,$$

$$rdx + s\,(dy + mdx) + tmdy = dp + mdq. \qquad (17)$$

Pero el sistema (15) nos permite obtener las razones de dy y $dp + mdq$ á dx, que sustituídas en (17), la reduce á la forma (6); y para que sea equivalente á la ecuación (6), es necesario y suficiente que

$$\frac{dx}{\mathrm{R}} = \frac{dy + mdx}{\mathrm{S}} = \frac{mdy}{\mathrm{T}} = \frac{dp + mdq}{\mathrm{V}}. \qquad (18)$$

Este sistema incluye así á las ecuaciones (15); y juntamente con $dz = pdx + qdy$ incluye al sistema (13). Por consiguiente, en su sistema integral final incluye á las ecuaciones $u=a$, $v=b$. Concluímos pues, que si la ecuación $\mathrm{R}r + \mathrm{S}s + \mathrm{T}t = \mathrm{V}$ resulta de una ecuación de primer orden de la forma $u = f(v)$, juntamente con la ecuación $dz = pdx + qdy$, debe admitir un sistema integral que determina á u y á v por ecuaciones de la forma $u = a$, $v = b$.

Para eliminar m de (18), obtendremos su valor mediante el primero y tercer miembro, sustituyendo en el segundo y cuarto. Reduciendo después, obtendremos

$$\mathrm{R}dy^2 - \mathrm{S}dxdy + \mathrm{T}dx^2 = 0 \qquad (20)$$

$$\mathrm{R}dpdy + \mathrm{T}dqdx = \mathrm{V}dxdy. \qquad (21)$$

Y estas ecuaciones con la (19) forman un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias con cinco variables x, y, z, p, q. Pero como entre cinco variables deben existir cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias, se desprende el carácter hipotético del método de Monge. Únicamente, cuando la ecuación propuesta origina una ecuación de la forma $u = f(v)$, el sistema en cuestión admite dos integrales de la forma $u = a$, $v = b$.

Por ser la ecuación (20) de segundo grado, será resoluble, mientras no sea un cuadrado, en dos ecuaciones de primer grado; y esta juntamente con (19) y (21) conducirán á un sistema integral final que determinará u y v.

Teorema. *Si, en virtud de la proposición anterior, obtenemos dos ecuaciones integrales primeras de la forma*

$$u_1 = f(v_1), \qquad u_2 = \Phi(v_2);$$

y si considerando éstas como simultáneas, determinamos p *y* q *en función de* x, y, z, *éstos valores serán susceptibles de hacer integrable la ecuación* dz = pdx + qdy, *y conducirán á una integral segunda.*

Representemos para mayor sencillez, $u_1 - f(v_1)$ por F y $u_2 - \psi(v_2)$ por (Φ). Así las primeras integrales supuestas serán

$$F = 0, \qquad \Phi = 0. \tag{23}$$

Volviendo ahora al sistema (18), y haciendo $dy : dx = n$, sus dos integrales primeras toman la forma

$$\frac{1}{R} = \frac{n+m}{S} = \frac{nm}{T},$$

lo que manifiesta que m y n son las dos raíces de la ecuación $R\mu^2 - S\mu + T = 0$. De manera que el valor de la razón $dy : dx$ correspondiente á una de las integrales primeras (23), es el mismo que el correspondiente de m en la otra. Pero tenemos que

$$m = \frac{\dfrac{\partial u_1}{\partial q}}{\dfrac{\partial u_1}{\partial p}} = \frac{\dfrac{\partial v_1}{\partial q}}{\dfrac{\partial v_1}{\partial p}} = \frac{\dfrac{\partial u_1}{\partial q} - f'(v)\dfrac{\partial v_1}{\partial q}}{\dfrac{\partial u_1}{\partial p} - f'(v)\dfrac{\partial v_1}{\partial p}} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial q}}{\dfrac{\partial F}{\partial p}}; \tag{24}$$

luego, considerando el valor de $dy : dx$ correspondiente á la integral Φ, tendremos

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} p + \frac{\partial \Phi}{\partial p} r + \frac{\partial \Phi}{\partial q} s\right) dx$$
$$+ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} q + \frac{\partial \Phi}{\partial p} s + \frac{\partial \Phi}{\partial q} t\right) dy = 0.$$

Igualando el valor obtenido de $dy : dx$ al de m, dado por (24), tendremos después de reducir:

$$\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial p}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial z}p+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial z}q$$

$$+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial p}r+\left(\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial q}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)s+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial q}t=0. \quad (25)$$

De igual manera, igualando los valores de m correspondientes á la integral $\Phi = 0$ y el de $dy : dx$ correspondiente á la integral $F = 0$, tendremos

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial q}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial p}p+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial q}q$$

$$+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial p}r+\left(\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial p}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial q}\right)s+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial q}t=0. \quad (26)$$

Restando (25) de (26) se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)p+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)q=0, \quad (27)$$

condición que debe quedar satisfecha para que los valores de p y de q dados por $F = 0$ y $\Phi = 0$ puedan hacer exacta á la diferencial $dz = pdx + qdy$.

Observación. Cada una de las integrales primeras satisface á la ecuación diferencial parcial de primer orden y grado formada para integrar la otra.

El método de Monge queda comprendido en la

REGLA. *Dada la ecuación* $Rr + Ss + Tt = V$, *fórmese primero la ecuación*

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0 \quad (28)$$

y resuélvase, suponiendo que no sea el primer miembro un cuadrado perfecto, en dos ecuaciones de la forma

$$dy - m_1 dx = 0, \quad dy - m_2 dx = 0. \quad (29)$$

De la primera de éstas y de la ecuación

$$R\,dp\,dy + T\,dq\,dx - V\,dx\,dy = 0, \tag{30}$$

combinada, si es necesario, con la ecuación $dz = pdx + qdy$, *se obtendrán las ecuaciones* $u_1 = a$, $v_1 = b$. *Procediendo de igual manera con la segunda ecuación* (29), *obtendremos otras dos ecuaciones* $u_2 = \alpha$, $v_2 = \beta$, *y entonces las dos integrales primeras de la propuesta serán*

$$u_1 = f_1(v_1), \quad u_2 = f_2(v_2). \tag{31}$$

Para deducir la integral segunda, podemos integrar una de éstas, ó sacar de éstas los valores de p *y de* q *en funciones de* x, y, z, *para sustituirlos en* $dz = pdx + qdy$, *que satisfará entonces á las condiciones de integrabilidad. Su solución dará la integral segunda.*

Si m_1 y m_2 son iguales, solo se obtendrá una integral primera, y la solución final se obtendrá por su integración.

Ejemplo. Sea $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Tenemos $R = 1$, $S = 0$, $T = -a^2$, $V = 0$. Por (29) y (30)

$$dy^2 - a^2 dx^2 = 0, \quad dpdy - a^2 dqdx = 0. \tag{a}$$

La primera se puede resolver en las dos ecuaciones

$$dy + adx = 0, \quad dy - adx = 0. \tag{b}$$

De la primera resulta $y + ax = c$, que reduce la segunda de las (*a*) á la forma $dp + adq = 0$, cuya integral es $p + aq = c$.

La integral primera de la ecuación propuesta es, por tanto,

$$p + aq = \phi(y + ax). \tag{c}$$

Procediendo de igual manera con la segunda ecuación (*b*) obtendremos la integral primera

$$p - aq = \psi(y - ax). \tag{d}$$

Determinando enseguida p y q por medio de estas dos integrales, $dz = pdx + qdy$ se reduce á

$$dz = \frac{\Phi(y+ax)+\psi(y-ax)}{2}dx - \frac{\Phi(y+ax)-\psi(y-ax)}{2a}dy,$$

$$dz = \frac{\Phi(y+ax)(dy+adx) - \psi(y-ax)(dy-adx)}{2a}.$$

De manera que si hacemos

$$\frac{1}{2a}\int \Phi(t)\,dt = \Phi_1(t), \qquad -\frac{1}{2a}\int \Psi(t)\,dt = \Psi(t),$$

tendremos $\quad z = \Phi_1(y+ax) + \Psi_1(y-ax),$

siendo Φ_1 y Ψ_1 funciones arbitrarias, por serlo Φ y Ψ.

Hemos visto que en cada una de las integrales primeras se verifica la condición (7); y suponiendo

$$p + aq - \Phi(y+ax) = F, \quad p - aq - \Psi(y-ax) = \Phi,$$

es fácil verificar la condición (27).

§ 6.º Cambio de variables en las ecuaciones diferenciales

80. Diferenciaciones sucesivas. *a)* Aunque ya se han expuesto algunos problemas en los tomos 1.º y 2.º, vamos á añadir otros que serán útiles y se resuelven mediante la aplicación de la fórmula de Leibnitz.

1.º Sea

$$u = e^{ax}\cos nx, \quad \text{será} \quad \frac{du}{dx} = e^{ax}(a\cos nx - n \operatorname{sen} nx);$$

haciendo

$$\frac{n}{a} = \operatorname{tg}\varphi, \quad a = (a^2+n^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi, \quad n = (a^2+n^2)^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen}\varphi;$$

$$\frac{du}{dx} = (a^2 + n^2)^{\frac{1}{2}} e^{ax} (\cos\varphi \cos nx - \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} nx)$$

$$= (a^2 + n^2)^{\frac{1}{2}} e^{ax} \cos(nx + \varphi);$$

$$\frac{d^r u}{dx^r} = (a^2 + n^2)^{\frac{r}{2}} e^{ax} \cos(nx + r\varphi).$$

2.° Sea $uv = e^{ax} \cos nx \,.\, x^m$,

y supongamos

$$u = e^{ax} \cos nx; \quad v = x^m, \quad \frac{n}{a} = \operatorname{tg}\varphi.$$

Será $\dfrac{d^p u}{dx^p} = (a^2 + n^2)^{\frac{p}{2}} e^{ax} \cos(nx + p\varphi).$

Y desarrollando $\dfrac{d^r(uv)}{dx^r}$ por el teorema de Leibnitz, será

$$\frac{d^r(uv)}{dx^r} = e^{ax} (a^2 + n^2)^{\frac{r}{2}} \Bigg[x^m \cos(nx + r\varphi)$$

$$+ rm\, x^{m-1} \frac{\cos[nx + (r-1)\varphi]}{(a^2 + n^2)}$$

$$+ \frac{r(r-1)}{1 \,.\, 2} m(m-1) x^{m-2} \frac{\cos[nx + (r-2)\varphi]}{(a^2 + n^2)} + \ldots\ldots \Bigg]$$

3.° Sea $uv = e^{ax}$ X, siendo función de x. Haremos $u =$ X, $v = e^{ax}$, y será

$$\frac{d^r(uv)}{dx^r} = e^{ax} \left[\frac{d^r \mathrm{X}}{dx^r} + r.a \frac{d^{r-1}\mathrm{X}}{dx^{r-1}} + \frac{r(r-1)}{1 \,.\, 2} a^2 \frac{d^{r-2}\mathrm{X}}{dx^{r-2}} + \ldots \right]$$

$$= e^{ax} \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^r + \ldots\ldots + \frac{r(r-1)}{1 \,.\, 2} a^2 \left(\frac{d}{dx}\right)^{r-2} + \ldots\ldots \right] \mathrm{X}$$

$$= e^{ax} \left(\frac{d}{dx} + a \right)^r \mathrm{X}.$$

De modo que $\left(\dfrac{d}{dx} + a\right)^r X = e^{-ax}\left(\dfrac{d}{dx}\right)^r (e^{ax} X.$

b) Sea $(u)^n = (a + bx + x^2)^n$, $u' = b + 2cx$.

Sustituyendo $x + h$ á x en u^n, esta expresión se cambia en $(u + u'h + ch^2)^n$; y $\dfrac{d^r u}{dx^r}$ será el coeficiente de $\dfrac{h^r}{r!}$ en el desarrollo. Considerando pues, $u + u'h$ como el primer término de un binomio, se tendrá $(u + u'h)^n + n(u + u'h)^{n-1} ch^2 + \ldots\ldots$

Desarrollando enseguida cada binomio, y tomando tan solo términos que tengan h^r por factor, corresponderá

á $(u + u'h)^n$, $\qquad \dfrac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!} u^{n-r} u'^r$;

á $(u + u'h)^{n-1} h^2$ $\qquad \dfrac{(n-1)\ldots(n-r+2)}{(r-2)!} u^{n-r+1} u'^{r-2}$,

á $(u + u'h)^{n-2} h^4$ $\qquad \dfrac{(n-2)\ldots(n-r+3}{(n-3)!} u^{n-r+2} u'^{r-4}$, etc.

Reunamos estos términos multiplicándolos por $1.2\ldots\ldots r$, y obtendremos para el r^{simo} coeficiente diferencial de u^n;

$$\frac{d^r (u)^n}{dx^n} = n(n-1)\ldots(n-r+1)u'^r \left[1 + \frac{r(r-1)}{1.(n-r+1)} \frac{cu}{u'^2}\right.$$

$$\left. + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2(n-r+1)(n-r+2)} \frac{c^2u^2}{u'^2} + \ldots\ldots\right].$$

Se puede obtener una fórmula más cómoda desarrollando la expresión propuesta como sigue:

$$(u + u'h + ch^2)^n = u^n \left(1 + \frac{u'}{u} h + \frac{c}{u} h^2\right)^n$$

$$= u^n \left[\left(1 + \frac{u'}{2u} h\right)^2 + \frac{4uc - u'^2}{4u^2} h^2\right]^n.$$

Supongamos $4uc - u'^2 = 4ac - b^2 = e^2$.

Desarrollando $u^n \left[\left(1 + \frac{u'}{2u} h \right) \right]^2 + \frac{e^2}{(2u)^2} h^2 \Big]^n$

por la fórmula del binomio, se tendrá:

$$u^n \left[\begin{array}{l} \left(1 + \frac{u'}{2u} h\right)^{2n} + n\left(1 + \frac{u'}{2u} h\right)^{2n-2} \frac{e^2}{(2u)^2} h^2 \\ + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\left(1 + \frac{u'}{2u} h\right)^{n2-4} \frac{e^4}{(2u)^4} h^4 + \ldots\ldots \end{array} \right];$$

y la r^{sima} derivada de u^n será el coeficiente de h^r en este desarrollo, multiplicado por $1 \cdot 2 \ldots\ldots r$.

Desarrollemos cada término, y tendremos por coeficiente de h^r respectivamente, en el primero, en el segundo, ... términos:

$$\left(\frac{u'}{2}\right)^r \frac{1}{u'} \frac{2n(2n-1)\ldots\ldots(2n-r+1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots r},$$

$$\left(\frac{u'}{2}\right)^{r-2} \frac{1}{2^2 u^r} \frac{(2n-2)\ldots\ldots 2n-r+1}{1 \cdot 2 \ldots\ldots (r-4)} \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} e^4,$$

. . . .

Sumando y multiplicando por $1 \cdot 2 \ldots\ldots r$, se tendrá

$$\frac{d^r (u)^n}{dx^r} = 2n(2n-1)\ldots\ldots(2n-r+1)\left(\frac{u'}{2}\right)^r u^{nr}$$

$$\times \left[1 + \frac{n}{1} \frac{r(r-1)}{2n(2n-1)} \frac{e^2}{u'^2} \right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)\,r(r-1)(r-2)(r-3)}{2n(2n-1)\ldots\ldots(2n-3)} \frac{e^4}{u'^4} + \ldots\ldots \right].$$

Sea $u^n = (a^2 + x^2)$; será $u' = 2x$, $e^2 = 4a^2$; y haciendo $r = n$, tendremos:

$$\frac{d^n (a^2 + x^2)^n}{dx^n} = 2n(2n-1)\ldots\ldots(n+1)\,x^n \Big[1$$

$$+ \frac{n^2}{1} \frac{n-1}{2n(2n-1)} \frac{a^2}{x^2} + \frac{[n(n-1)]^2}{1 \cdot 2} \frac{(n-2)(n-3)}{2n \ldots (2n-3)} \frac{a^4}{x^4} + \ldots \Big].$$

El método de Lagrange sirve para obtener las derivadas sucesivas de funciones de otra forma. Así para $u = e^{cx^2}$ se escribirá

$$e^{c(x+h)^2} = e^{c(x^2+2hx+h^2)} = e^{cx^2} . e^{2cxh} . e^{ch^2}.$$

Pero

$$e^{2cxh} = 1 + 2cxh + \ldots., \qquad e^{ch^2} = 1 + ch^2 + \frac{c^2}{1 . 2} h^4 + \ldots..$$

Multiplicando estas ecuaciones, miembro á miembro, y tomando el coeficiente de h^r después de multiplicar por $1 . 2 \ldots r$, se obtendrá

$$\frac{d^r u}{dx^r} = e^{cx^2} [c^r (2x)^r + r(r-1) c^{r-1} (2x)^{r-2} + \ldots..].$$

Sea $u = \dfrac{1}{e^x + 1}$ que podría obtenerse en serie infinita por el procedimiento de Lagrange, pero por el siguiente procedimiento, debido á Laplace, puede obtenerse mediante un número finito de términos. Se ve que $\dfrac{d^r u}{dx^r}$ es de la forma

$$\frac{a_r e^{rx} + a_{r-1} e^{(r-1)x} + \ldots.. + a_1 e^x}{(e^x + 1)^{r+1}};$$

de manera que

$$(e^x + 1)^{r+1} \frac{d^r u}{dx^r} = a_1 e^{rx} + a_{r-1} e^{(r-1)x} + \ldots + a_1 e^x. \qquad (1)$$

Pero $\qquad u = e^{-x} - e^{-2x} + e^{-3x} + \ldots..;$

luego $\dfrac{d^r u}{dx^r} = (-1)^r [1^r e^{-x} - 2^r e^{-2x} + 3^r e^{-3x} - \ldots] \quad (2)$

Además tenemos que

$$(e^x + 1)^{r+1} = e^{(r+1)x} + \frac{r+1}{1} e^{rx} + \frac{(r+1)r}{1 . 2} e^{(r-1)x} + \ldots \quad (3)$$

Debiendo ser el producto de (2) y (3) igual á (1); por no contener ésta más que un número finito de términos con exponentes positivos, los términos con exponentes negativos deben destruirse; luego tendremos

$$(e^x + 1)^{r+1} \frac{d^r u}{d x^r} = (-1)^r 1^r e^{rx}$$

$$- \left[2^r - \frac{r+1}{1} 1^r \right] e^{(r-1)x} + \ldots \Big\}$$

$$\frac{d^r u}{d x^r} = \frac{(-1)^r \left\{ 1^r e^{rx} - \left[2^r + \frac{r+1}{1} \right] e^{(r-1)x} + \ldots \right\}}{(e^x + 1)^{r+1}}.$$

81. *b)* Cambio de variables. 1.° Transformar

$$x \frac{\partial R}{\partial y} - y \frac{\partial R}{\partial x} \quad \text{siendo} \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta.$$

Tenemos $x^2 + y^2 = r^2$, $\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$;

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial R}{\partial \theta} \frac{\operatorname{sen} \theta}{r}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial R}{dr} \operatorname{sen} \theta + \frac{\partial R}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r};$$

luego

$$x \frac{\partial R}{\partial y} - y \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial \theta}.$$

Esta transformación se presenta en la teoría de los planetas. Análogamente será

$$x \frac{\partial R}{\partial x} + y \frac{\partial R}{\partial y} = r \frac{\partial R}{\partial \theta}.$$

2.° Transformar $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ dada $x^2 + y^2 = r^2$ y $u = \varphi(r)$.

Será

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^3} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{x}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{1}{r} - \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{x}{r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{y^2}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right);$$

de donde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\,\frac{x^2+y^2}{r^2}+\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{2}{r}-\frac{x^2+y^2}{r^3}\right);$$

luego $$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r}=0.$$

Esta ecuación se presenta en el estudio del movimiento de los fluídos.

3.º Sea $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0$, siendo $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$.

Para transformarla obtendremos

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\operatorname{sen}^2\theta\,\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\frac{\cos^2\theta}{r}\,\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$+\frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial\theta}-\frac{\partial V}{\partial\theta}\right).$$

El valor de $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ se deduce del de $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ sustituyendo $\frac{\pi}{2}-\theta$ por θ; y se obtiene

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\cos^2\theta\,\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r}\,\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$-\frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial\theta}-\frac{\partial V}{\partial\theta}\right).$$

Sumando estas dos ecuaciones, resulta

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial r}=0.$$

4.º Transformar $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$, en una función de r, θ y φ, siendo

$$x = r\cos\theta, \quad y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \quad z = r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi.$$

Hagamos $\rho = r\operatorname{sen}\theta$, y se tendrá

$$y = \rho\operatorname{sen}\varphi, \quad z = \rho\cos\varphi; \quad \rho = r\operatorname{sen}\theta, \quad x = r\cos\theta.$$

Tomemos primero las variables y, z; y tendremos, como anteriormente:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho}.$$

Siendo iguales las ecuaciones de condición, obtendríamos análogamente:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}.$$

Y procediendo como anteriormente, será

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

Sumando las tres ecuaciones, resultará

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$$

$$+ \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0.$$

Sustituyendo el valor de ρ, y haciendo reducciones,

$$r\frac{\partial^2 (rV)}{\partial x} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\left(\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial V}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta} = 0.$$

Esta ecuación es la base de la teoría matemática de la atracción y de la electricidad.

5.° Sea $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

siendo $$x^2+y^2+z^2=r^2\ u=\varphi r.$$

Se tendrá que $$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=0.$$

6.° Transformar la integral doble

$$\int\int x^{m-1}y^{n-1}\,dydx,$$

en otra, siendo u y v las nuevas variables independientes, hallándose ligadas las variables por

$$x+y=u,\qquad y=uv.$$

Tendremos

$$dydx=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)dudv.$$

Pero $$\frac{\partial x}{\partial u}=1,\qquad \frac{\partial y}{\partial v}=0,\qquad \frac{\partial x}{\partial v}=0;$$

luego $$dydx=ududv;$$

$$\int\int x^{m-1}y^{n-1}dydx=\int\int u^{m+n-1}(1-v)^m v^n\,du\,dv.$$

7.° Transformar la expresión

$$\int\int dxdy\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

en función de θ y φ, siendo: 1.° z función de x é y determinada por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

2.° $x=a$ sen θ cos φ, $y=b$ sen θ sen φ.

Se tendrá

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = a \cos \theta \cos \varphi, \qquad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = - a \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = b \cos \theta \operatorname{sen} \varphi, \qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = b \operatorname{sen} \theta \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = - c \operatorname{sen} \theta, \qquad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0.$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \theta} = ab \operatorname{sen} \theta \cos \theta,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \theta} = - bc(\operatorname{sen} \theta)^2 \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \theta}\, ac\, (\operatorname{sen} \theta)^2 \operatorname{sen} \varphi.$$

Sustituyendo estos valores en las expresiones de

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \ \frac{\partial z}{\partial y}, \ dx, \ dy,$$

se obtendrá que la expresión buscada es:

$$\iint d\theta\, d\varphi \operatorname{sen} \theta \, [a^2 b^2 (\cos \theta)^2 + (c \operatorname{sen} \theta)^2 (a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi]^{\frac{1}{2}}.$$

(Ivory Phil. Trans. 1809).

CAPÍTULO II

Polinomios de Legendre

§ 1.° Propiedades generales

82. Definición. Sea la expresión

$$u = (1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}} = X_0 + X_1 z + \ldots + X_n z^n + \ldots \qquad (1)$$

desarrollada según las potencias ascendentes de z (se supone á x menor que 1 y á z comprendida entre 0 y 1). El coeficiente general X_n es una función de x llamada *función* X_n *de Legendre.*

83. Propiedades. I. Evidentemente $X_0 = 1$, $X_1 = x$ además X_n *es un polinomio entero en* x *de grado* n. En efecto, si hacemos

$$T = z^2 - 2zx = z(z - 2x),$$

el desarrollo de $(1 - 2zx + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ se expresará como sigue:

$$(1 + T)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} T + \frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{T^2}{2} + \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \ldots\ldots (2k - 1)}{2^k} \frac{T^k}{k!} + \ldots\ldots$$

siendo

$$T^k = z^k \left[z^k - k \frac{2x}{1} z^{k-1} \right.$$

$$\left. + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} (2x)^2 z^{k-2} + \ldots\ldots + (-1)^k (2x)^k \right].$$

Para que T^k contenga un término en z^n será necesario que k

sea por lo menos igual á $\frac{n}{2}$ y á lo más igual á n. Tomemos el término general de T^k

$$(-1)^p \frac{k(k-1)\ldots\ldots(k-p+1)}{p\,!}(2k)^p z^{2k-p}.$$

Para que el exponente de z sea igual á n, es necesario tomar el exponente p de x igual á $2k - n$, valor comprendido entre cero y n.

II. *Se tiene que*

$$X_n = \frac{1}{2.4\ldots\ldots 2n}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}, \qquad (2)$$

fórmula de Olinde Rodrígues (T. II pág. 169), que se obtiene tomando en el desarrollo de $(x^2-1)^n$ el término en x^{2k} y derivando n veces.

III. *La ecuación* $X_n = 0$ *tiene todas sus raíces reales, distintas y comprendidas entre* -1 y $+1$. En efecto, sea

$$u = (x^2-1)^n.$$

La función continua u tiene n raíces iguales á -1 y n raíces iguales á 1. La derivada tiene $n-1$ raíces iguales á -1 y $n-1$ raíces iguales á $+1$ y, según el teorema de Rolle, una raíz a_1 comprendida entre -1 y $+1$. La derivada segunda tendrá $n-2$ raíces iguales á -1 y $n-2$ raíces iguales á $+1$, y según el teorema de Rolle una raíz b_1 comprendida entre -1 y a_1 y una raíz b_2 comprendida entre a_1 y $+1$, y así sucesivamente, quedando el teorema demostrado.

IV. $X_n(1) = 1$, $X_n(-1) = (-1)^n$. En efecto, para $x = 1$ ó $x = -1$, la expresión $(1 - 2zx + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ se reduce á

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + \ldots\ldots + z^n + \ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + \ldots\ldots + (-1)^n z^n + \ldots\ldots$$

V. *La función* X_n *satisface á la relación* (t. II, pág. 233)

$$n(n+1)X_n - 2xX'_n - (x^2-1)X''_n = 0. \tag{3}$$

VI. *Existe la siguiente relación recurrente entre las tres funciones sucesivas* X_{n+1}, X_n *y* X_{n-1},

$$(n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0. \tag{4}$$

Para obtenerla basta diferenciar la ecuación (1) con relación á z y hallaremos

$$(x-z)(1-2zx+z^2)^{-\frac{3}{2}} = \Sigma n X_n z^{n-1}.$$

Multipliquemos los dos miembros de esta igualdad por $1-2zx+z^2$, y sustituyamos en el primero $(1-2zx+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ por su valor $\Sigma X_n z^n$; tendremos la identidad

$$(x-z)\Sigma X_n z^n = (1-2zx+z^2)\Sigma n X_n z^{n-1},$$

é identificando los términos en z^n, resulta la relación (4), que permite calcular X_{n+1} cuando se conoce X_n y X_{n-1}, y dicha identidad demuestra además que las raíces de la función X_n dan signos contrarios á las dos funciones que la comprenden.

VII. *Tenemos que*

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n dx = 0 \quad \text{si} \quad m \gtrless n. \qquad \int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1}.$$

En efecto, integrando por partes varias veces seguidas, se tendrá siendo $y = (x^2-1)^n$,

$$\int_{-1}^{+1} y^{(n)} y^{(m)} dx = \Big[y^{(n)} y^{(m-1)}\Big]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} y^{(n+1)} y^{(m-1)} dx$$

$$= \Big[y^{(n)} y^{(m-1)} - y^{(n+1)} y^{(m-2)}\Big]_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{+1} y^{(n+2)} y^{(m-2)} dx$$

$$= \left[y^{(n)} y^{(m-1)} - y^{(n+1)} y^{(m-2)} + \ldots + (-1)^k y^{(n+k)} y^{(m-k-1)} \right]_{-1}^{+1}$$

$$+ (-1)^{k+1} \int_{-1}^{+1} y^{(n+k+1)} y^{(m-k-1)} dx.$$

Si $m < n$, todas las derivadas $y^{(m-1)}, y^{(m-2)}, \ldots\ldots$ son nulas para $x = \pm 1$; la derivada de orden $m+1$ y las siguientes son nulas idénticamente, lo que demuestra la primera fórmula.

Si $m = n$, y $k = n - 1$, se tendrá

$$\int_{-1}^{+1} y^{(n)} y^{(n)} dx = (-1)^n \int_{-1}^{+1} y^{(2n)} y dx$$

$$= (-1)^n 2n! \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^n dx.$$

Considerando $x^2 - 1$ como el producto de $x - 1$ por $x + 1$ é integrando n veces por partes, se obtiene

$$\int_{-1}^{+1} y^{(n)} y^{(n)} dx = (n!)^2 \frac{2^{2n+1}}{2n+1}$$

y siendo $X_n = \dfrac{y^n}{2^n n!}$ se tendrá $\displaystyle\int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1}$. (5)

VIII. *El polinomio X_n puede escribirse bajo la forma de determinante*

$$X_n = M \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \ldots\ldots & a_n \\ a_1 & a_2 \ldots\ldots & a_{n-1} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_n \ldots\ldots & a_{2n-1} \\ 1 & x \ldots\ldots & x^n \end{vmatrix} \qquad (6)$$

siendo M un coeficiente numérico

$$a_r = \frac{1 + (-1)^r}{2(r+1)}. \qquad (\textit{Rouché}\ \text{C. R., t. LXVII}).$$

IX. *La función* u *satisface á las ecuaciones diferenciales*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{1}{u^2}=ux \qquad (7) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(x-z)=z\,\frac{\partial u}{\partial z}. \qquad (8)$$

En efecto de la fórmula (1) resulta

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(1-2xz+z^2)^{-\frac{3}{2}}\,z=u^3\,z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=(1-2xz+z^2)^{-\frac{3}{2}}\,(x-z)=u^3\,(x-z).$$

Sumando después de haber multiplicado por $\frac{1}{u^2}$ cada una de estas derivadas, se obtiene la fórmula (7) y eliminando u^3 entre dichas derivadas, resulta la (8).

X. *Cuatro funciones consecutivas satisfacen á la relación*

$$(n+1)\,X_{n-1}-(2n+1)\,x\,X_n+(n-1)\,X_{n-1}$$

$$+\frac{dX_n}{dx}-2x\,\frac{dX_{n-1}}{dx}+\frac{dX_{n-2}}{dx}=0, \qquad (9)$$

que se obtiene sustituyendo $\frac{1}{u^2}$ por $(1-2xz+z^2)$, u y sus derivadas por sus valores desarrollados, é igualando los coeficientes de z^n en los dos miembros.

XI. *Dos funciones consecutivas se hallan ligadas por la relación*

$$nX_n=x\,\frac{dX_n}{dx}-\frac{dX_{n-1}}{dx} \qquad (10)$$

que resulta de (8) cuando, después de sustituir los valores desarrollados de las derivadas, se igualan los coeficientes de z^n. (Bertrand. *Calcul différentiel*).

XII. *Se tiene entre tres funciones consecutivas la relación*

$$(2n+1)X_n=\frac{dX_{n+1}}{dx}-\frac{dX_{n-1}}{dx}. \qquad (11)$$

Para demostrarlo, basta sustituir en (9) por $(n+1)X_{n+1}$ y $(n-1)X_{n-1}$ sus valores sacados de (10) y simplificar (*Chistoffel*, Journ. de Crelle, t. LV).

Si se cambia n en $n-2$, $n-4$, ..., la adición de los resultados da la fórmula

$$\frac{dX_{n+1}}{dx}=(2n+1)X_n+(2n-3)X_{n-2}+(2n-7)X_{n-4}+\dots$$

$$+\,3X_1\ (n\ \text{impar});\ \dots\dots+5X_2+X_0\ (n\ \text{par}) \qquad (12)$$

Siendo $\dfrac{dX_0}{dx}=0,\quad \dfrac{dX_1}{dx}=X_0$

deduciremos fácilmente

$$\frac{dX_{n+1}}{dx}+\frac{dX_n}{dx}=(2n+1)X_n$$

$$+(2n-1)X_{n-1}+\dots\dots+5X_2+3X_1+X_0 \qquad (13)$$

XIII. *Entre* X_n *y* X_{n+1} *se tiene la relación*

$$(n+1)X_n=\frac{dX_{n+1}}{dx}-x\frac{dX_n}{dx}, \qquad (14)$$

que resulta eliminando $\dfrac{dX_{n-1}}{dx}$ entre (10 y 11). (*Catalan* Mém. de l' Acad. de Belgique).

XIV. *Entre* X_{n+1}, X_n *y* X_{n-1} *se verifica*

$$X_n=\frac{dX_{n+1}}{dx}-2x\frac{dX_n}{dx}+\frac{dX_{n-1}}{dx}, \qquad (15)$$

que se obtiene restando (10) de (14) (Bertrand. Cal. diff.) Aplicando esta relación á los tres últimos términos de (9) se obtiene la relación

$$(n+1)X_{n+1}-(2n+1)xX_n+nX_{n-1}=0 \qquad (16)$$

XV. *Dos funciones consecutivas satisfacen á las relaciones*

$$\frac{n}{1+x}(X_n+X_{n-1})=\frac{dX_n}{dx}-\frac{dX_{n-1}}{dx}. \qquad (17)$$

$$\frac{n}{1-x}(X_{n-1}-X_n)=\frac{dX_{n-1}}{dx}+\frac{dX_n}{dx}. \qquad (18)$$

Cambiando n por $n-1$ en (14) y agregando (10) se obtiene la (17), y restando la (18).

La eliminación de una de las derivadas entre 17 y 18 conduce á

$$(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}=n(X_{n-1}-xX_n). \quad \textit{(Catalán)}. \qquad (19)$$

$$(1-x^2)\frac{dX_{n-1}}{dx}=n(xX_{n-1}-X_n). \quad \textit{(O. Bonnet)}. \qquad (20)$$

XVI. *Entre tres funciones consecutivas se tiene*

$$X_{n+1}-X_{n-1}=\frac{2n+1}{n(n+1)}(x^2-1)\frac{dX_n}{dx}. \quad \textit{(Catalán)}. \qquad (21)$$

$$X_{n+1}-2xX_n+X_{n-1}=\frac{1-x^2}{n(n+1)}\frac{dX_n}{dx}. \qquad (22)$$

Se dividen los dos miembros de (19) por n, y después de haber cambiado n en $n+1$ en (20) se dividen los dos miembros por $n+1$. La adición da (21) y la sustracción la (22).

§ 2.° Formas de la función X_n

84. Teorema de Legendre. *Toda función X_n satisface á la fórmula*

$$(1-x^2)\frac{d^{p+1}X_n}{dx^{p+1}}-2px\frac{d^pX_n}{dx^p}=(p+n)(p-n-1)\frac{d^{p-1}X_n}{dx^{p-1}}$$

ó

$$\frac{d[(1-x^2)^p d^pX_n]}{dx^{p+1}}$$

$$=(p+n)(p-n-1)(1-x^2)^{p-1}\frac{d^{p-1}X_n}{dx^{p-1}}. \qquad (23)$$

Basta derivar p veces la fórmula (21). Cuando $p = 1$ se tiene

$$\frac{d\left[(1-x^2)\dfrac{dX_n}{dx}\right]}{dx} + n(n+1)X_n = 0. \quad (Laplace). \quad (24)$$

85. Función de Legendre. La fórmula (18) da

$$(1-x)\left(\frac{dX_1}{dx} + \frac{dX_0}{dx}\right) + X_1 - X_0 = 0.$$

Pero $$\frac{dX_1}{dx} = X_0 \quad \text{y} \quad \frac{dX_0}{dx} = 0;$$

luego $(1-x)X_0 + X_1 - X_0 = 0$ ó $X_1 = xX_0$.

Siendo X_0 el término independiente de z, y haciendo $z = 0$ en la expresión $(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$, se tiene $X_0 = 1$ y por consiguiente $X_1 = x$.

La fórmula (16) permite obtener sucesivamente las otras funciones

$$X_2 = \frac{3}{2}xX_1 - \frac{1}{2}X_0 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2},$$

$$X_3 = \frac{5}{3}xX_2 - \frac{2}{3}X_1 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x,$$

$$X_4 = \frac{7}{4}xX_3 - \frac{3}{4}X_2 = \frac{5\cdot 7}{2\cdot 4}x^4 - \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}2x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}$$

$$X_5 = \frac{9}{5}xX_4 - \frac{4}{5}X_3 = \frac{7\cdot 9}{2\cdot 4}x^5 - \frac{5\cdot 7}{2\cdot 4}2x^3 + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}x.$$

Escribamos X_5 bajo la forma

$$X_5 = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{2}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{1}\frac{1}{2\cdot 4}x;$$

Podremos escribir, por analogía,

$$X_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n!}x^n - \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{(n-2)!}\frac{1}{2}x^{n-2}$$

$$+\frac{1.3.5\ldots(2n-5)}{(n-4)!}\frac{1}{2.4}x^{n-4} - \ldots\ldots,$$

y aplicando la fórmula (16), se obtendrá

$$X_{n+1} = \frac{1.3.5\ldots\ldots(2n+1)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$-\frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{(n-1)!}\frac{1}{2}x^{n-1}+\ldots\ldots$$

que es la forma de la función de Legendre. Esta fórmula puede obtenerse también aplicando la fórmula del binomio de Newton á la expresión $[1 - z(2x - z)]^{\frac{1}{2}}$ en la fórmula de definición

$$u = [1 - z(2x - z)]^{-\frac{1}{2}} = X_0 + X_1 z + \ldots\ldots + X_n z^n + \ldots\ldots$$

X_n es el coeficiente de z^n en el desarrollo

$$u = 1 + \frac{1}{2}z(2x - z)\frac{1.3}{2.4}z^2(2x - z)^2 + \ldots\ldots$$

86. Forma de Rodrigues. Esta forma se deduce de la de Legendre observando que el coeficiente $\dfrac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{n!}$, multiplicado en el numerador por $2.4.6\ldots\ldots 2n$ y en el denominador por su igual $2^n n!$ se reduce á $\dfrac{2n(2n-1)\ldots\ldots(n+1)}{2^n n!}$, y que el término general de $2^n.n!\,X_n$ puede escribirse sucesivamente

$$(-1)^m 2n(2n-1)\ldots\ldots(n+1)$$

$$\times\frac{n(n-1)\ldots(n-2m+1)}{2.4\ldots 2m(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2m+1)}x^{n-2m},$$

$$(-1)^m \frac{2n(2n-2)\ldots(2n-2m+2)}{2.4.6\ldots 2m}$$
$$\times (2n-2m)(2n-2m-1)\ldots(n-2m+1)\,x^{n-2m},$$
$$(-1)^m \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}$$
$$\times (2n-2m)(2n-2m-1)\ldots(n-2m+1)\,x^{n-2m}$$

y por ser

$$(2n-2m)(2n-2m-1)\ldots(n-2m+1)\,x^{n-2m}$$
$$=\frac{d^n x^{2n-2m}}{dx^n},$$

el término general de $2^n n! X_n$ toma la forma

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[(-1)^m \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-m+1)}{m!} x^{2n-2m}\right]$$

siendo la cantidad entre paréntesis el desarrollo de $(x^2-1)^n$; y obtenemos finalmente el valor

$$X_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

También puede deducirse esta forma de la de Legendre.

87. Método de Jacobi. Si se hace

$$y = x + \frac{z}{2}(y^2-1),$$

resolviendo la ecuación con relación á y, se obtiene

$$y = \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\sqrt{1-2xz+z^2}$$

de donde $$\frac{dy}{dx} = (1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Pero si se aplica á $y = x + \frac{z}{2}(y^2-1)$ la fórmula de Lagrange,

$$y = x + \frac{z}{2}(x^2-1) + \frac{z^2}{1.2}\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x^2-1)^2 + \ldots\ldots$$

y por consiguiente,

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{z}{2}\frac{d(x^2-1)}{dx} + \ldots + \frac{z^n}{n!\,2^n}\frac{d^n(x^2-1)}{dx^n} + \ldots;$$

resultando el desarrollo

$$(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{z}{2}\frac{d(x^2-1)}{dx} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{z^n}{n!\,2^n}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} + \ldots\ldots$$

que da para el coeficiente de z^n el valor

$$X_n = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

88. Forma de Laplace. La expresión

$$u = (1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

puede escribirse así

$$u = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1 + \frac{(z-x)^2}{1-x^2}}.$$

En virtud de la fórmula de Mac Laurin, se tiene

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{n!}\left(\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}}\right)_{z=0.}$$

Hagamos $\dfrac{z-x}{\sqrt{1-x^2}} = \lambda\sqrt{-1}.$

Tendremos $u = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\dfrac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}$

y $$X_n = \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^{n+1} \, . \, (\sqrt{-1})^n \, . \, n\,!}$$
$$\times \left(\frac{d^n}{d\lambda^2} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \right)_{\lambda = \frac{x\sqrt{-1}}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

Obtenida esta fórmula, Laplace, en su *Théorie analytique des probabilités* observa que se tiene

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} = \frac{n\,!}{\pi\,(1-\lambda^2)^{n+\frac{1}{2}}} \int_0^\pi (\lambda + \cos\omega)^n \, d\omega,$$

y sustituyendo λ por su valor $\frac{x\sqrt{-1}}{\sqrt{1-x^2}}$ y á $1-\lambda^2$ su igual $\frac{1}{1-x^2}$, obtiene

$$\left(\frac{d^n}{d\lambda^n} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \right)_{\lambda = \frac{x\sqrt{-1}}{\sqrt{1-n^2}}}$$

$$= \frac{n\,!\,(1-x^2)^{\frac{n+1}{2}}}{\pi} \int_0^\pi (x\sqrt{-1} + \sqrt{1-x^2}\cos\omega)^n \, d\omega;$$

llevando después este valor á la expresión de X_n y simplificando, resulta

$$X_n = \frac{1}{\pi\,(\sqrt{-1})^n} \int_0^\pi (x\sqrt{-1} + \sqrt{1-x^2}\cos\omega)^n \, d\omega,$$

ó más sencillamente,

$$X_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x - \sqrt{-1}\,\sqrt{1-x^2}\cos\omega)^n \, d\omega. \; (*)$$

Para demostrar que se puede expresar la derivada n^{sima} de

(*) E. Brand. *Notice sur la théorie de la fonction* X_n *de Legendre.*

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ó de $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ por una integral definida, podemos emplear el método siguiente de Hermite. (*)

Sea la integral definida

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}$$

en la que $a > 1$, y en la que por consiguiente el elemento infinitesimal no es infinito más que en los límites. Hagamos

$$x = \frac{1 + a\cos\varphi}{a + \cos\varphi},$$

y tendremos que

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{a^2-1}\,\frac{\operatorname{sen}\varphi}{a+\cos\varphi}, \quad a - x = +\frac{a^2-1}{a+\cos\varphi},$$

$$dx = -(a^2-1)\frac{\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi}{(a+\cos\varphi)^2};$$

$d\varphi$ es negativa; para $x = -1$ haremos $\varphi = \pi$ y para $x = +1$, $\varphi = 0$. La integral se reducirá á

$$-\int_{\pi}^{0} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2-1}} = +\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}};$$

tenemos pues

$$\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}.$$

Diferenciemos respecto de a bajo el signo $\int$, y obtendremos

$$\frac{\pi}{n!}\,\frac{d^n \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}}{da^n} = \int_{-1}^{+1} \frac{(-1)^n\, dx}{(a-x)^{n+1}\sqrt{1-x^2}};$$

(*) **Tisserand** *Recueil d'exercices de Calcul infinitesimal*, p. 35.

la integral del segundo miembro, cuando se sustituye el valor de x en función de φ, se reduce á

$$\frac{(-1)^n}{(a^2-1)^{n+\frac{1}{2}}}\int_0^\pi (a+\cos\varphi)^n\,d\varphi;$$

Tendremos pues

$$\frac{\pi}{n!}\frac{d^n\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}}{da^n}=\frac{(-1)^n}{(a^2-1)^{n+\frac{1}{2}}}\int_0^\pi (a+\cos\varphi)^n\,d\varphi.$$

Pero en virtud de la fórmula del binomio

$$(a+\cos\varphi)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}\cos\varphi+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}\cos^2\varphi+\dots$$

y además

$$\int_0^\pi \cos\varphi d\varphi=0,\quad \int_0^\pi \cos^2\varphi d\varphi=\frac{1}{2}\pi,$$

$$\int_0^\pi \cos^3\varphi\,d\varphi=0,\quad \int_0^\pi \cos^4\varphi\,d\varphi=\frac{1.3}{2.4}\pi,\quad \dots\dots;$$

luego

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}}{da^n}=\frac{(-1)^n}{(a^2-1)^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$\times\left[a^n+\binom{n}{2}\frac{1}{2}a^{n-2}+\binom{n}{4}\frac{1.3}{2.4}a^{n-4}+\dots\dots\right].$$

Dividiendo por $\sqrt{-1}$, obtendremos la expresión de

$$\frac{d^n\dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}}}{da^n}$$ y la de $$\frac{d^n\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}}{da^n},$$ cambiando a por $a\sqrt{-1}$.

89. Aplicación á la función X_n. Vamos á aplicar el método de Laplace á la función X_n para representar por una integral definida el coeficiente y_s de t^s en el desarrollo, según las potencias ascendentes de la variable, de una potencia cualquiera de una función racional y entera de t.

Partamos de la fórmula (4) (pág. 272), escrita bajo la forma

$$(n+1)\,X_{n+1} - 2n\,X_n\,x + (n-1)\,X_{n-1} = xX_n - X_{n-1},$$

y hagamos $X_n = \int y^{n-1}\,.\,\psi\,.\,dy$, siendo ψ una función arbitraria, y además n puede tener todos los valores enteros.

La sustitución conducirá á la igualdad

$$(n+1)\int y^n\,.\,\psi\,.\,dy - 2n\int y^{n-1}\,.\,\psi\,dy + (n-1)\int y^{n-2}\,\psi\,dy$$

$$= x\int y^{n-1}\,.\,\psi\,dy - \int y^{n-2}\,.\,\psi\,dy.$$

Integrando por partes el primer miembro, resulta

$$y^{n+1}\,.\,\psi - 2x\,y^n\,.\,\psi + y^{n-1}\,\psi = x\int y^{n-1}\,\psi\,.\,dy - \int y^{n-2}\,\psi\,.\,dy$$

$$+\int y^{n+1}\,.\,d\psi - 2x\int y^n\,.\,d\psi + \int y^{n-1}\,.\,d\psi.$$

Si se iguala á cero la parte de esta ecuación bajo el signo integral, será

$$0 = xy^{n-1}\,\psi\,dy - y^{n-2}\,\psi\,.\,dy + y^{n-1}\,.\,d\psi - 2xy^n\,.\,d\psi + y^{n-1}\,.\,\psi,$$

$$\frac{d\psi}{\psi} = \frac{y^{n-2} - xy^{n-1}}{y^{n+1} - 2xy^n + y^{n-1}}\,dy \quad \text{ó} \quad \frac{d\psi}{\psi} = \frac{\dfrac{1}{y^3} - \dfrac{x}{y^2}}{\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{2x}{y} + 1}\,dy,$$

é integrando

$$\psi = A\left(\frac{2x}{y} - 1 - \frac{1}{y^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = A\,\frac{y\sqrt{-1}}{(1 - 2xy + y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

siendo A una constante arbitraria; y los límites de la integración estarán dados por la ecuación primera, reducida á

$$y^{n+1}\psi - 2xy^n\psi + y^{n-1}\psi = 0;$$

de donde

$$y = x - \sqrt{x^2 - 1}, \quad y = 0, \quad y = x + \sqrt{x^2 - 1}.$$

Se tiene pues

$$X_n = A\int_{x-\sqrt{x^2-1}}^{0} y^{n-1}\frac{y\sqrt{-1}\,dy}{(1 - 2xy + y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ A'\int_{0}^{x+\sqrt{x^2-1}} y^{n-1}\frac{y\sqrt{-1}\,dy}{(1 - 2xy + y^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Haciendo $y = x - \sqrt{x^2 - 1}\cos\omega$, los límites se reducirán á

$$\omega = 0, \quad \omega = \text{arc cos}\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad \omega = \pi;$$

luego

$$X_n = A\int_0^{\text{arc cos}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}} (x - \sqrt{x^2 - 1}\cos\omega)^n\,d\omega$$

$$+ A'\int_{\text{arc cos}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}^{\pi} (x - \sqrt{x^2 - 1}\cos\omega)^n\,d\omega.$$

Para determinar las constantes A y A′, haremos $n = 0$ y por ser $X_0 = 1$, se obtiene

$$1 = (A - A')\,\text{arc cos}\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} + A'\pi;$$

y puesto que esta relación ha de verificarse independientemente de x, es necesario que se tenga $A = A' = \frac{1}{\pi}$.

Las dos integrales se reducen á una sola y resulta

$$X_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x - \sqrt{x^2 - 1}\cos\omega)^n\, d\omega.$$

90. Método de Jacobi. Por hallarse x comprendida entre -1 y $+1$, puede hacerse $x = \cos\varphi$, y escribir

$$u = (1 - 2\cos\varphi z + z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - z\cos\varphi)^2 + z^2\operatorname{sen}^2\varphi}}.$$

Pero se tiene que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{a - bi\cos\omega} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a + bi\cos\omega}{a^2 + b^2\cos^2\omega}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a\,d\omega}{a^2 + b^2\cos^2\omega} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{bi\cos\omega\, d\omega}{a^2 + b^2\cos^2\omega};$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a\,d\omega}{a^2 + b^2\cos^2\omega} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a\sec^2\omega\, d\omega}{b^2 + a^2\sec^2\omega}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a\sec^2\omega\, d\omega}{a^2 + b^2 + a^2\operatorname{tg}^2\omega} = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{a\,d\operatorname{tg}\omega}{a^2 + b^2 + a^2\operatorname{tg}^2\omega}$$

$$= \frac{4}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\int_0^{\infty} \frac{\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, d\,.\operatorname{tg}\omega}{\frac{a^2}{a^2 + b^2}\operatorname{tg}^2\omega + 1}$$

$$= \frac{4}{2\pi\sqrt{a^2 + b^2}}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\operatorname{tg}\omega\right)_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{bi\cos d\omega}{a^2 + b^2\cos^2\omega} = 2\int_0^{\pi} \frac{bi\cos\omega\, d\omega}{a^2 + b^2\cos^2\omega} = 0,$$

porque $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\omega\, d\omega}{a^2 + b^2 \cos^2\omega} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos\omega\, d\omega}{a^2 + b^2 \cos^2\omega};$$

luego $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{a - bi\cos\omega} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

obtenida esta fórmula, resultará que

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{1 - z\cos\varphi - z\,\mathrm{sen}\,\varphi i\cos\omega}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{1 - z(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\omega)}$$

y efectuando la división,

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega \left\{1 + z(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\omega) + \ldots\ldots \right.$$
$$\left. + z^n(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\omega)^n + \ldots\ldots\right\}$$

Siendo X_n el coeficiente de z^n en el desarrollo de u, resulta

$$X_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\omega)^n\, d\omega;$$

pero, por ser $\cos\varphi = x$,

$$X_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (x + i\sqrt{1 - x^2}\cos\omega)^n\, d\omega;$$

ó bien $$X_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x + i\sqrt{1 - x^2}\cos\omega)^n\, d\omega.$$

91. Empleo de la integral de Hermite. La integral de Hermite

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}\,(\lambda - y)} = \frac{\pi}{\sqrt{-1}\,\sqrt{1 - \lambda^2}}$$

permite llegar á las formas de Laplace y Jacobi. En efecto, se deduce inmediatamente

$$\frac{1}{\pi\sqrt{x^2-1}}\int_{-1}^{+1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\,(\lambda-y)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-\lambda^2}};$$

y si se hace $\lambda=\dfrac{x-z}{\sqrt{x^2-1}}$ é $y=\cos\omega$, resulta

$$u=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\omega}{(x-\sqrt{x^2-1}\cos\omega)-z};$$

luego $$X_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\omega}{(x-\sqrt{x^2-1}\cos\omega)^{n+1}};$$

y cambiando z en $\dfrac{1}{z}$, se obtiene

$$u=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\omega}{1-(x-\sqrt{x^2-1}\cos\omega)\,z},$$

$$X_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x-\sqrt{x^2-1}\cos\omega)^n\,d\omega.$$

92. Método de Laurent. De la fórmula

$$(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}=X_0+X_1z+\ldots\ldots+X_nz^n+\ldots\ldots$$

y haciendo $z=e^{\theta i}$ y $\left(1-2xe^{\theta i}+e^{2\theta i}\right)^{\frac{1}{2}}=f(\theta)$, resulta

$$f(\theta)=X_0+X_1e^{\theta i}+\ldots\ldots+X_ne^{n\theta i}+\ldots\ldots$$

Integrando entre 0 y 2π después de haber multiplicando los dos miembros de este desarrollo por $\dfrac{1}{2\pi}e^{-n\theta i}\,d\theta$, se obtiene

$$X_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\,e^{-n\theta i}\,d\theta,$$

y volviendo á la variable z

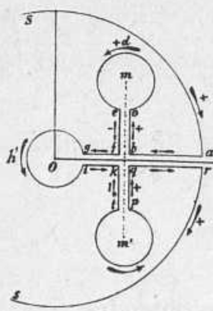
$$X_n = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{dz}{z^{n+1}\sqrt{1 - 2xz + z^2}},$$

hallándose tomada la integral alrededor del origen; X_n es pues el residuo de la función $\frac{1}{z^{n+1}\sqrt{1 - 2xz + z^2}}$ relativo al polo $z = 0$.

La función bajo el signo integral presenta dos puntos críticos m y m' cuyas afijas son

$$z = x + \sqrt{x^2 - 1}, \qquad z = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

Tracemos el contorno *abcdefghiklnpqrsa* formado por una circunferencia de radio infinito unida á circunferencias de radio infinitamente pequeñas trazadas alrededor del polo y de los dos puntos críticos.



Permaneciendo la función sinéctica en el interior de este contorno, se tiene

$$\int_{abc.....sa} = 0.$$

Siguiendo el contorno en el sentido señalado, el radical $\sqrt{1 - 2xz + z^2}$, que tiene el signo $+$ en a, tomará el signo $-$ después de la rotación *cde* y volverá á tomar el signo $+$ después de la rotación *lnp*. Entonces, señalando en la figura el signo de la integral el sentido de la flecha, se concluye la igualdad

$$\int_{ghi} = 2\int_{mm'} - \int_{lnp} + \int_{cde} - \int_{asr}.$$

Las tres últimas integrales valen cero, pues por el cálculo de los residuos

$$\int_{lnp} \frac{dz}{z^{n+1}\sqrt{1 - 2xz + z^2}}$$

$$=2\pi i \lim\left[\left(z-x+\sqrt{x^2-1}\right)\frac{1}{z^{n+1}\sqrt{1-2xz+z^2}}\right]_{z=x-\sqrt{x^2-1}}=0$$

lo mismo sucede respecto á la integral á lo largo de *cde*, é

$$\int_{asr}=2\pi i \lim\left[z\frac{1}{z^{n+1}\sqrt{1-2xz+z^2}}\right]_{z=\infty}=0;$$

luego la integral alrededor del origen vale dos veces la integral á lo largo del contorno rectilíneo mm' que une los dos puntos críticos.

Si pues, hacemos $z=x+\sqrt{x^2-1}\cos\omega$; como entonces $dz=-\sqrt{x^2-1}\operatorname{sen}\omega\,d\omega$ y $\sqrt{1-2xz+z^2}=\pm\sqrt{1-x^2}\operatorname{sen}\omega$, tendremos

$$X_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{ghi}=\pm\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{d\omega}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\omega)^{n+1}}.$$

Si se cambia z por $\frac{1}{z}$ en

$$X_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{ghi}\frac{dz}{z^{n+1}\sqrt{1-2xz+z^2}},$$

se obtendrá

$$X_n=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{z^n\,dz}{\sqrt{1-2xz+z^2}},$$

hallándose tomada la integral á lo largo de una circunferencia de radio infinito.

Por ser la nueva función sinéctica entre los mismos contornos, en virtud de análogas consideraciones, se tendrá

$$\int_{asr}=2\int_{mm'}\quad\text{y}\quad X_n=\pm\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(x+\sqrt{x^2-1}\cos\omega)^n\,d\omega.\ (*)$$

(*) E. Brand. *Notice sur la théorie de la fonction* X_n *de Legendre.*

§ 3.° Expresión de los números de Bernoulli por integrales definidas

93. Integrando por partes, resulta

$$\int_0^1 (\log x)^n x^p \, dx = -\int_0^1 \frac{n}{p+\text{I}} (\log x)^{n-1} x^p \, dx =$$

$$= \ldots\ldots = (-\text{I})^n \frac{n\,!}{(p+\text{I})^n} \int_0^1 x^p \, dx = (-\text{I})^n \frac{n\,!}{(p+\text{I})^{n+1}}.$$

Esto sentado, se tiene suponiendo $\alpha < \text{I}$ y $x \leqslant \text{I}$,

$$\frac{\text{I}}{\text{I}-\alpha x} = \text{I} + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \alpha^3 x^3 + \ldots\ldots$$

Multipliquemos por $(\log x)^n \, dx$ é integremos desde o hasta I; y tendremos

$$\int_0^1 \frac{(\log x)^n \, dx}{\text{I}-\alpha x} = n\,!\,(-\text{I})^n \left(\text{I} + \frac{\alpha}{2^{n+1}} + \frac{\alpha^2}{3^{n+1}} + \ldots\ldots \right).$$

Si se hace $x = e^{-z}$, resulta

$$\int_0^\infty \frac{z^n \, dz}{e^z - \alpha} = n\,! \left(\text{I} + \frac{\alpha}{2^{n+1}} + \frac{\alpha^2}{3^{n+1}} + \ldots\ldots \right).$$

El primer miembro es continuo con relación á α, y el segundo tiende hacia $n!\, s_{n+1}$; luego para $\alpha = \text{I}$,

$$s_{n+1} = \frac{\text{I}}{n\,!} \int_0^\infty \frac{z^n \, dz}{e^z - \text{I}}.$$

Pero $\quad \text{B}_{2n} = \dfrac{2 s_{2n}}{(2\pi)^{2n}} (2n)\,!; \quad$ luego se tendrá

$$\text{B}_{2n} = \frac{2}{(2\pi)^{2n}} (2n)\,! \frac{\text{I}}{(2n-\text{I})\,!} \int_0^\infty \frac{z^{2n-1} dz}{e^z - \text{I}} \quad \text{ó} \quad \frac{4n}{(2\pi)^{2n}} \int_0^\infty \frac{z^{2n-1} dz}{e^z - \text{I}}.$$

CAPÍTULO III

Funciones eulerianas

§ 1.° La función gamma como límite de un producto

94. Preliminar histórico. La introducción en el Análisis de la función gamma se debe á Euler, aunque algunos resultados concernientes á esta función obtuvieron ya Wallis y Stirling; pero la Memoria de Gauss sobre la serie hypergeométrica señala un nuevo progreso en el estudio de dicha función, pues consideró á dicha transcendente como el límite, para $k = \infty$ del producto

$$\Pi(k, z) = \frac{k!}{(z+1)(z+2)\ldots\ldots(z+k)}\, k^z$$

Weierstrass, por fin, reconoció el carácter propio de la inversa de la función gamma, $\Gamma(x)$, á que llamó *factorial de x.*

La doctrina de Euler y Legendre tiende á expresar las numerosas relaciones que ligan á dicha función con las integrales definidas. Pero la definición de Gauss tiene la ventaja de gran generalidad, porque la variable solo tiene la condición restrictiva de no ser igual á un número negativo y además permite establecer todas sus propiedades de una manera más concisa, más rigurosa, más natural. (*)

95. Definiciones. La expresión

$$\Pi(x) = n^x \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n}{x(x+1)\ldots\ldots(x+n)} \tag{1}$$

(*) Maurice Godefroy. *La fonction gamma.* Introduction.

tiende hacia un límite cuando n aumenta indefinidamente, para cualquier valor de x que no sea nulo ni entero negativo. En efecto de $n = \frac{2 \, . \, 3 \, . \, . \, . \, . \, . \, n}{1 \, . \, 2 \, . \, . \, . \, . \, (n-1)}$ resulta

$$n^x = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^x \left(1 + \frac{1}{2}\right)^x \cdots\cdots \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^x,$$

de manera que el producto $\Pi(x)$ puede escribirse bajo la forma

$$\Pi(x) = \frac{1}{x} \frac{\left(1 + \frac{1}{1}\right)^x \left(1 + \frac{1}{2}\right)^x \cdots\cdots \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^x}{\left(1 + \frac{x}{1}\right)\left(1 + \frac{x}{2}\right) \cdots\cdots \left(1 + \frac{x}{n}\right)}.$$

Tomando los logaritmos, se obtiene que $x \Pi(x)$ es igual á

$$\sum_{p=1}^{p=n} \left[\frac{x}{p} - \log\left(1 + \frac{x}{p}\right)\right]$$

$$- x \sum_{p=1}^{p=n} \left[\frac{1}{p} - \log\left(1 + \frac{1}{p}\right)\right] - x \log\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

expresión en la que la segunda suma se deduce de la primera haciendo en ésta $x = 1$. Pero desde que n excede al mayor entero contenido en el módulo de x, se tiene

$$\frac{x}{n} - \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{n}\right)^3 + \cdots\cdots,$$

luego, si r es un entero positivo tan grande como se quiera, cuando se sustituye en este desarrollo x por r, y todos los coeficientes por la unidad resulta que

$$\left|\frac{x}{n} - \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right| < \frac{r^2}{n(n-r)},$$

que se verifica á partir de $n = r + 1$, si el módulo de x permanece inferior á r. Así la serie

$$\left[\frac{x}{1} - \log\left(1 + \frac{x}{1}\right)\right] + \left[\frac{x}{2} - \log\left(1 + \frac{x}{2}\right)\right] + \ldots\ldots$$

es absoluta y uniformemente convergente para todo valor de x interior al círculo de radio r que no sea igual á un entero negativo. En particular, para $x = 1$, la serie positiva

$$\left[\frac{1}{1} - \log\left(1 + \frac{1}{1}\right)\right] + \left[\frac{1}{2} - \log\left(1 + \frac{1}{2}\right)\right] + \ldots\ldots$$

es convergente. Su suma, que expresaremos por ρ, se llama *constante de Euler.*

Resulta pues, lo que nos proponíamos demostrar. El límite del producto $\Pi(x)$ es una función transcendente de x que se llama *función gamma* y se representa por el símbolo $\Gamma(x)$, que empleó Legendre por vez primera. La constante de Euler, que es el límite para $n = \infty$ de la expresión

$$\rho_n = s_n - \log n,$$

en la que s_n expresa la suma de los n primeros términos de la serie armónica, representa en la teoría de la función gamma el mismo papel que el número π en la teoría de las funciones circulares. Su valor es

$$\rho = 0{,}5772156649015328606\ldots\ldots$$

Weierstrass en su Memoria sobre las *facultades analíticas*, llama *factorial de* x á la inversa de $\Gamma(x)$, y la escribe bajo la forma siguiente:

$$\mathrm{F}c(x) = x \prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^x, \tag{2}$$

que se deduce de la igualdad

$$\frac{1}{\Pi(x)} = \frac{1}{n^x}\,\frac{x(x+1)\ldots\ldots(x+n)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots n},$$

obteniéndose

$$\frac{1}{\Pi(x)} = x\left(1+\frac{x}{n}\right)\left[\frac{x+1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]$$

$$\times\left[\frac{x+2}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]\cdots\cdots\left[\frac{x+n-1}{n-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^x\right],$$

y haciendo $n=\infty$.

Podremos demostrar más brevemente la convergencia de la expresión (1) que define $\Gamma(z)$ escribiendo

$$\log\Gamma(x) = \log 2 + \log 3 + \cdots\cdots + \log(n-1) + \log n$$
$$+ (x-1)\log n - \log x - \log(x+1) - \ldots - \log(x+n-1),$$

$$\log x + \log\Gamma(x) = x\log n - \log(x+1)$$
$$-\log\left(1+\frac{x}{2}\right) - \cdots\cdots - \log\left(1+\frac{x}{n}\right).$$

Sustituyendo $\log n$ por

$$\log\frac{2}{1} + \log\frac{3}{2} + \log\frac{4}{3} + \cdots\cdots + \log\frac{n}{n-1}$$

tendremos que

$$\log x\,\Gamma(x) = [x\log 2 - \log(1+x)]$$
$$+\left[x\log\frac{3}{2} - \log\left(1+\frac{x}{2}\right)\right] + \cdots\cdots$$
$$= \sum_1^\infty\left[x\log\left(1+\frac{1}{p}\right) - \log\left(1+\frac{x}{p}\right)\right].$$

Pero

$$u_p = x\log\left(1+\frac{1}{p}\right) - \log\left(1+\frac{x}{p}\right)$$

$$= x\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{3p^3}\cdots\cdots\right) - \left(\frac{x}{p} - \frac{x^2}{2p^2} + \frac{x^3}{3p^3}\cdots\cdots\right).$$

Luego la serie es absolutamente convergente.

96. Fórmula de Weierstrass. Se tiene

$$\frac{1}{\Pi(x)} = \frac{1}{n^x}\,\frac{x(x+1)\ldots\ldots(x+n)}{1\,.\,2\ldots\ldots n},$$

ó, designando por s_n la suma de los n primeros términos de la serie armónica,

$$\frac{1}{\Pi(x)} = x\left(\frac{e^{s_n}}{n}\right)^x\left[\left(1+\frac{x}{1}\right)e^{-\frac{x}{1}}\right]$$

$$\times\left[\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}\right]\left[\left(1+\frac{x}{3}\right)e^{-\frac{x}{3}}\right]\ldots\ldots\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right].$$

Sea $\lambda_n = \dfrac{e^{s_n}}{n}$. Tomando los logaritmos, se obtiene

$$\log\lambda_n = s_n - \log n.$$

Cuando n crece indefinidamente, el límite del segundo miembro de esta igualdad es la constante de Euler ρ, y por consiguiente

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\rho x}\left[\left(1+\frac{x}{1}\right)e^{-\frac{x}{1}}\right]\left[\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}\right]\ldots\ldots$$

Esta expresión, que puede servir para definir la función gamma, da la descomposición de su inversa en factores primarios y fué obtenida por Weierstrass.

Si consideramos la fórmula

$$\operatorname{sen}\pi x = \pi x \prod\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}},$$

se ve que $\Gamma(x)$ se halla formada por la mitad de los factores que constituyen la función simplemente periódica sen πx.

Este hecho conduce á imaginar funciones formadas con la mitad ó aun la cuarta parte de factores que constituyen ciertas funciones doblemente periódicas, como las funciones de Heine, la función gamma doble de Barnes, etc.

La fórmula de Weierstrass manifiesta que la función $\Gamma(x)$

es *meromorfa* (semejante á las fracciones racionales) para todo valor finito de x, pues admite como puntos singulares tan solo polos simples, correspondientes á los valores, $0, -1, -1, \ldots\ldots n, \ldots\ldots$ de la variable x, siendo $x = \infty$ un punto singular esencial.

97. TEOREMA. *La inversa de la función gamma es desarrollable en una serie entera de radio de convergencia infinito*, pues descomponiéndose dicha función inversa en factores primarios, ésta función es desarrollable en una serie entera convergente en todo el plano.

Weierstrass demostró esta proposición de la manera siguiente:

Si hacemos $$1 + u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}},$$ resulta

$$u_n = -\frac{1}{1 \cdot 2}\frac{x^2}{n^2} + \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{x^3}{n^3} - \ldots\ldots$$
$$- (-1)^p \frac{p-1}{n!}\frac{x^p}{n^p} - \ldots\ldots$$

Si r es el módulo de x, y consideramos la serie positiva

$$a_n = \frac{1}{2!}\frac{r^2}{n^2} + \frac{2}{3!}\frac{r^3}{n^3} + \ldots\ldots + \frac{p-1}{p!}\frac{r^p}{n^p} + \ldots\ldots,$$

cuyos coeficientes son menores que la unidad, desde que n llega al entero m inmediatamente superior á r, se tiene

$$a_n < \frac{r^2}{n(n-2)};$$

luego la serie positiva de término general a_n es convergente.

El producto infinito de término general $1 + u_n$ es por tanto desarrollable en una serie entera convergente para todo valor de la variable; luego la inversa de $\Gamma(x)$ es una función transcendente entera.

La función Γ se llama *función euleriana de segunda especie.*

§ 2º. Propiedades de las funciones eulerianas de segunda especie

98. Relación funcional. Se tiene que

$$\Pi(x+1) = n^{x+1} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)}$$

$$= \frac{nx}{n+x+1}\Pi(x); \qquad (1)$$

luego, para $n=\infty$, $\quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Esta relación se llama *relación funcional.* Si en ésta se sustituye sucesivamente x por $x+1$, $x+2$, ..., $x+m-1$, tendremos

$$\Gamma(x+2) = (x+1)\Gamma(x+1), \quad \ldots\ldots$$

$$\Gamma(x+m) = (x+m-1)\Gamma(x+m-1),$$

y si m es un entero positivo,

$$\Gamma(x+m) = x(x+1)\ldots\ldots(x+m-1)\Gamma(x).$$

Sea x un valor real de la variable exterior al intervalo $(0, 1)$. Designando por m el entero positivo inmediatamente inferior á x ó superior á $-x$, según que x sea positivo ó negativo, la fórmula precedente permite reducir el cálculo de $\Gamma(x)$ á la determinación de esta función para un valor de x interior al intervalo $(0, 1)$. En efecto, si x es positivo, se tiene

$$\Gamma(x) = (x-m)(x-m+1)\ldots\ldots(x-1)\Gamma(x-m).$$

Si x es negativo, se puede hacer

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x(x+1)\ldots\ldots(x+m-1)}\Gamma(x+m).$$

Si la variable es un entero $m+1$, se tiene

$$\Gamma(m+1) = 1.2\ldots\ldots m.$$

De la fórmula (1) resulta

$$\log\Gamma(x+1) = x\log n - \log(1+x)$$
$$-\log\left(1+\frac{x}{2}\right)\ldots\ldots-\log\left(1-\frac{x}{n}\right),$$

aumentando n indefinidamente. Si se supone x menor que 1, se pueden ordenar los logaritmos en series ordenadas según las potencias de x, y resulta

$$\log(x+1) = -x\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$
$$+\frac{1}{2}x^2\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{n^2}\right)$$
$$-\frac{1}{3}x^3\left(1+\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n^3}\right)+\ldots\ldots$$

Y haciendo para $n=\infty$

$$S_m = \lim\left(1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\ldots\ldots+\frac{1}{n^m}\right)$$

y $$C = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}-\log n,$$

se tendrá

$$\log\Gamma(1+x) = -Cx+\frac{1}{2}S_2x^2-\frac{1}{3}S_3x^3+\frac{1}{4}S_4x^4+\ldots\ldots$$

99. Módulo de $\Gamma(\alpha+\beta i)$. Si la variable es imaginaria, se puede reducir su parte real á hallarse comprendida entre 0 y 1. Sea pues $x=\alpha+\beta i$, siendo $0 \leqq \alpha \leqq 1$. Se tendrá

$$\frac{1}{|\Gamma(\alpha+\beta i)|} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,e^{C\alpha}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left[\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^2+\frac{\beta^2}{n^2}\right]^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\alpha}{n}};$$

pero $$\prod_{n=1}^{n=\infty}\left[\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^2+\frac{\beta^2}{n^2}\right]^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha}{n}}$$

$$=\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)e^{-\frac{\alpha}{n}}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left[1+\frac{\beta^2}{(\alpha+n)^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

por otra parte

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}=e^{\alpha\rho}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)e^{-\frac{\alpha}{n}},$$

y el producto $\prod_{n=1}^{n=\infty}\left[1+\frac{\beta^2}{(\alpha+n)^2}\right]$ está comprendido entre los productos $\prod_{n=1}^{n=\infty}\left[1+\frac{\beta^2}{(n+1)^2}\right]$, $\prod_{n=1}^{n=\infty}\left[1+\frac{\beta^2}{n^2}\right]$, que corresponden á los dos valores extremos de α, siendo sus límites

$$\frac{1}{1+\beta^2}\,\frac{e^{\beta\pi}-e^{-\beta\pi}}{2\beta\pi},\qquad \frac{e^{\beta\pi}-e^{-\beta\pi}}{2\beta\pi};$$

se puede pues hacer por lo tanto,

$$|\Gamma(\alpha+\beta i)|=\lambda\,\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sqrt{\frac{2\beta\pi}{e^{\beta\pi}-e^{-\beta\pi}}},$$

siendo $1<\lambda<\sqrt{1-\beta^2}$, resultado debido á Herr. M. Lerch.

Cuando $\alpha=0$, λ se reduce á 1, y se obtiene la fórmula de Stieltjes,

$$|\Gamma(\beta i)|=\frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{2\beta\pi}{e^{\beta\pi}-e^{-\beta\pi}}}.$$

100. Límite para $n=\infty$ de la expresión $\frac{1}{n^x}\frac{\Gamma(x+1)}{1.2\ldots(n-n)}$.

Se tiene $\frac{1}{n^x}\frac{\Gamma(x+n)}{(n-1)!}=\frac{1}{n^x}\frac{x(x+1)\ldots\ldots(x+n-1)}{(n-1)!}\Gamma(x),$

es decir, $$\frac{1}{n^x}\frac{\Gamma(x+n)}{(n-1)!} = \frac{n}{n+x}\frac{\Gamma(x)}{\Pi(x)}.$$

El límite de $\frac{1}{n^x}\frac{\Gamma(x+n)}{(n-1)!}$ para $n=\infty$ es la unidad. Este resultado debido á Weierstrass, juntamente con la relación funcional bastan para caracterizar á la función gamma (*).

101. Propiedades principales. Podemos fundándonos en la relación

$$\varphi(n, x) = \frac{n!\, n^{x-1}}{x(x+1)\ldots\ldots(x+n-1)}$$

escribir que $\Gamma(x) = \lim \varphi(n, x)$, lo que nos permitirá enunciar las siguientes propiedades:

I. La igualdad $$\frac{\varphi(n, x+1)}{\varphi(n, x)} = \frac{nx}{n+x},$$

conduce, pasando al límite, á la fórmula ya establecida

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x). \tag{1}$$

II. Sustituyento en (1) x por $1, 2, \ldots\ldots p$, tendremos

$$\Gamma(2)=1,\quad \Gamma(3)=2,\quad \Gamma(4)=2.3,\quad \ldots\ldots \Gamma(p)=(p-1)! \tag{2}$$

III. Hagamos $x=\frac{1}{2}$. Tendremos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \lim \frac{n!}{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\ldots\ldots\left(n-\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}}$$

$$= \lim \frac{2.4.6\ldots\ldots 2n}{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)\sqrt{n}};$$

(*) Godefroy *La fonction gamma.*

Pero la fórmula de Wallis puede escribirse bajo la forma

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots 2n}{3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n-1)\sqrt{2n+1}};$$

luego $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

IV. El producto $\varphi(n, x)\,\varphi(n, 1-x)$ puede escribirse así:

$$\frac{1}{x\left(1-\frac{x}{n}\right)(1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left[1-\frac{x^2}{(n-1)^2}\right]};$$

luego, aplicando la fórmula

$$\operatorname{sen} \pi x = \pi x \prod_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right),$$

podremos escribir $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen} \pi x}$.

Corolario. Multiplicando las igualdades

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}, \quad \ldots\ldots,$$

$$\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\frac{n-1}{n}\right)\pi}$$

resulta

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}^2 = \frac{\pi^{n-1}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\,.\,\ldots\,\operatorname{sen}\left(\frac{n-1}{n}\right)\pi}.$$

Para obtener la expresión del denominador del segundo miembro, hagamos sucesivamente $x = 1$ y $x = -1$ en la identidad

$$\frac{1 - x^{2n}}{1 - x^2} = \left(1 - 2x\cos\frac{2\pi}{2n} + x^2\right)\left(1 - 2x\cos\frac{4\pi}{2n} + x^2\right)\ldots\ldots$$
$$\left(1 - 2x\cos\frac{(2n-2)\pi}{2n} + x^2\right)$$

y tendremos

$$n = \left(2\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2n}\right)^2\ldots\ldots\left(2\,\mathrm{sen}\,\frac{n-1}{n}\right)^2,$$

$$n = \left(2\cos\frac{\pi}{2n}\right)^2\ldots\ldots\left(2\cos\frac{n-1}{n}\right)^2$$

de las que resulta

$$n = 2^{n-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{n}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{n}\ldots\ldots\mathrm{sen}\,\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Por consiguiente

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{-\frac{1}{2}}.$$

Observación. Suponiendo $x < 1$, de

$$\Gamma(x+n) = x(x+1)\ldots\ldots(x+n-1)\,\Gamma(x)$$
y $\Gamma(n+1-x) = (1-x)(2-x)\ldots\ldots(n-x)\,\Gamma(1-x)$,

resulta

$$\Gamma(x+n)\,\Gamma(n+1-x) = x(1^2-x^2)(2^2-x^2)(3^2-x^2)\ldots\ldots$$
$$[(n-1)^2-x^2](n-x)\frac{\pi}{\mathrm{sen}\,x\pi}.$$

V. En virtud del teorema ya demostrado (pág. 168):

Si en dos series divergentes ordenadas según las potencias ascendentes de la variable, la relación de los coeficientes de la potencia m^{sima} *de la variable tiende hacia un límite finito* l, *las dos series se hallan en la misma relación,* podremos expresar $\Gamma(x)$

por medio de una integral definida. En efecto, las dos series son

$$f(z) = 1^{x-1}z + 2^{x-1}z^2 + 3^{x-1}z^3 + \dots\dots$$

$$\varphi(z) = (1 - z)^{-x} = 1 + \frac{x}{1}z + \frac{x(x+1)}{1 \cdot 2}z^2 + \dots\dots$$

que son divergentes para $x > 0$ y $\lim z = 1$.

La relación de los coeficientes de z^n es la función designada por $\varphi(n, x)$. Tenemos pues, suponiendo $z = \infty$,

$$\Gamma(x) = \lim_{n=\infty} \varphi(n, x) = \lim_{z=1} \frac{f(z)}{\varphi(z)}$$

$$= \lim_{x=1} [1^{x-1}z + 2^{x-1}z^2 + \dots\dots](1 - z)^x.$$

Sea $z = e^{-h}$; podemos hacer

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = \frac{(1 - e^{-h})^x}{h}[h^{x-1}e^{-h} + (2h)^{x-1}e^{-2h}$$

$$+ (3h)^{x-1}e^{-3h} + \dots\dots]h.$$

Cuando z tiende hacia 1, h tiende hacia cero. El primer factor tiende pues hacia 1. En cuanto al producto de la cantidad entre paréntesis por h, tiende por definición, hacia

$$\int_0^\infty z^{x-1}e^{-z}\,dz;$$

luego $$\Gamma(x) = \int_0^\infty z^{x-1}e^{-z}\,dz.$$

102. Otra forma de la función Γ. Hagamos $e^{-x} = y$, de donde $e^{-x}dx = -dy$, $x = \log\frac{1}{y}$, correspondiendo los límites 0 é ∞ de x á los límites 1 y 0 de y. Por consiguiente

$$\int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{z-1}\,dx = \int_0^1 \left(\log\frac{1}{y}\right)^{z-1} dy.$$

Podemos pues escribir

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\, dx = \int_0^1 \log\left(\frac{1}{y}\right)^{a-1} dy.$$

Valores particulares. Haciendo $a = 1$ y $a = 2$,

$$\Gamma(1) = \int_0^1 dy = 1, \qquad \Gamma(2) = -\int_0^1 \log y\, dy = 1.$$

103. Aplicación del teorema de Riemann. *Si dos funciones uniformes* U *y* V *que tienen un número cualquiera finito ó infinito de polos ó puntos singulares esenciales, coinciden á lo largo de un elemento de magnitud finita, tan pequeño como se quiera, son necesariamente idénticas.*

Consideremos la diferencia U — V (*), que es una función uniforme nula á lo largo del elemento dado, y que será nula, por consiguiente, para todos los puntos situados en el interior de un contorno que no contenga ninguna discontinuidad de U ó de V, porque en el interior de tal contorno, U — V es una función holomorfa. Aumentemos este contorno, haciéndolo pasar por la proximidad de un punto de discontinuidad a de U ó V, pues no puede ser un polo, porque á una distancia suficientemente pequeña de este punto, la función se hace mayor que cualquier cantidad dada, debiendo ser nula para todos los puntos tan próximos como se quiera, ni puede ser un punto esencial, porque en la proximidad de dicho punto, una función uniforme es absolutamente indeterminada. La función U — V no admite pues, discontinuidades; y siendo nula en un elemento finito, es nula en todo el plano.

El teorema de Riemann manifiesta que una función dada á lo largo de una línea de magnitud finita, solo puede extenderse más allá de una manera, si se le impone la condición de ser uniforme y tener tan solo discontinuidades en puntos aislados. Se puede pues concluir que una parte tan pequeña como se

(*) Hermite *Cours d'Analyse*, p. 88.

quiera de una curva algebráica de grado conocido, la determina completamente en toda su extensión.

El ilustre Hermite aplicó este teorema al estudio de la integral euleriana de segunda especie, como sigue:

Sea $$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx.$$

Hallemos en primer lugar los valores de z para los que esta integral define una función.

Limitándonos desde luego á los valores reales, vemos que en el límite inferior o, la función bajo el signo $\int$ es finita para $z > 0$ pero se hace infinita para z negativo (*); y para que la integral $\int_\varepsilon^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$ tenga un límite finito cuando ε tiende hacia cero, z debe ser positivo.

Esto sentado, escribamos

$$\int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{z-1} e^{-x} dx + \int_1^\infty x^{z-1} e^{-x} dx.$$

La primera integral del segundo miembro es finita, porque $z > 0$. La segunda aumenta con z, porque para todo valor de x superior á 1, $x^{z-1}e^{-x}$ crece con z. Pero cuando z es igual á un número entero $n+1$, se obtiene para $\Gamma(n+1)$ el valor finito $1 . 2 . 3 \ldots\ldots n$, pues integrando por partes, se tiene

$$\int x^n e^{-x} dx = -x^n e^{-x} + n \int e^{-x} x^{n-1} dx.$$

Ahora bien, $x^n e^{-x}$ se anula para $x = 0$ y también para $x = \infty$, porque siendo

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 . 2} + \ldots\ldots + \frac{x^i}{1 . 2 \ldots\ldots i} + \ldots\ldots,$$

(*) Si tuviésemos que $n = -p$, sería

$$\int_a^1 e^{-x} \frac{dx}{x^{1+p}} > \int_a^1 \frac{1}{e} \frac{dx}{x} = \frac{1}{e} \log \frac{1}{a};$$

y para $a = 0$, $\frac{1}{e} \log \frac{1}{a}$ es infinito; luego lo será la integral última, y con mayor razón la dada.

se tiene, cualquiera que sea i,

$$e^x > \frac{x^i}{1 \cdot 2 \ldots\ldots i}, \quad \text{y por consiguiente} \quad x^{-n} e^x > \frac{x^{2-n}}{1 \cdot 2 \ldots\ldots i};$$

de manera que si se hace $i > n$, lo que es permitido, el segundo miembro se hace infinito para $x = \infty$; luego el producto $x^{-z}e^x$ se hace infinito, y por consiguiente su inverso $x^z e^{-x}$ se hace nulo para $x = \infty$. Integrando pues entre o é ∞ resulta

$$\int_0^\infty x^z e^{-x} dx = z \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} dx;$$

ó $\Gamma(z + 1) = z\,\Gamma(z)$, y análogamente

$$\Gamma(z) = (z - 1)\,\Gamma(z - 1),$$

$$\Gamma(z - 1) = (z - 2)\,\Gamma(z - 2) \ldots\ldots \Gamma(2) = 1\,\Gamma(1)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1.$$

Volviendo al razonamiento de Hermite, se concluye que para todos los valores positivos de z, y solo para ellos, la integral $\int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$ define una función $\Gamma(z)$.

Supongamos que z sea imaginaria de la forma $\alpha + i\beta$. Tendremos

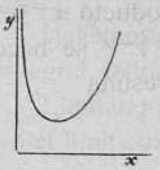
$$\int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{lx(\alpha - 1 + i\beta)} e^{-x} dx$$

$$= \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} \cos l(x^\beta)\, dx + i \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} \operatorname{sen} l(x^\beta)\, dx,$$

tomándose el logaritmo en el sentido aritmético, y se ve que las dos integrales solo serán finitas, suponiendo $\alpha > 0$. Esta condición que es necesaria, es también suficiente; y por tanto, la función uniforme representada por la integral euleriana de segunda especie solo existe en la mitad del plano que se encuentra á la derecha del eje oy.

Observación. La fórmula $\Gamma(z + 1) = z\,\Gamma(z)$ que permite disminuir el argumento en una unidad y por consiguiente en tantas unidades como se quiera, permitirá reducir á z á hallarse comprendida entre 0 y 1.

Con auxilio de la fórmula $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}$ se reducirá á z á estar comprendida entre 0 y $\frac{1}{2}$, y bastará tener una tabla de los valores de argumento comprendido entre estos dos últimos límites, representándose la curva en la figura adjunta, para una variación de z desde 0 hasta ∞.



El mínimo de $\Gamma(z)$, que es igual á 0,8856032 corresponde á $z=1{,}4616321$.

La igualdad $\Gamma(z)=\frac{\Gamma(1+z)}{z}$, hace ver que $\Gamma(z)=\infty$ para x infinitamente próxima á cero; y también observaremos que de la fórmula $\Gamma(z+1)=z\,\Gamma(z)$ resulta la siguiente

$$\Gamma(z+p)=(z+p-1)(z+p-2)\ldots\ldots z\,\Gamma(z),$$

deduciéndose que la integral euleriana de segunda especie es infinita al mismo tiempo que el argumento.

104. Funciones de Prym. Hagamos

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx=\mathrm{P}(z)+\mathrm{Q}(z),$$

$$\mathrm{P}(z)=\int_0^\omega x^{z-1}e^{-x}dx,\quad \mathrm{Q}(z)=\int_\omega^\infty x^{z-1}e^{-x}dx,$$

designando ω una función cualquiera positiva. La integral $\mathrm{Q}(z)$ define una función analítica de z en toda la extensión del plano, cualquiera que sea el valor real ó imaginario de z, pues hemos visto que la circunstancia del límite cero de la integral $\int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx$ obligaba á suponer que z fuese positiva. La función $\mathrm{Q}(z)$ es pues finita, continua y uniforme en todo el plano, es decir, una función holomorfa. La función $\mathrm{P}(z)$ está dada por la integral $\int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx$ tan solo en la mitad del plano, á la derecha de Oy. Pero, sustituyendo e^{-x} por su desarrollo en serie convergente, $1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \, . \, 2} + \ldots\ldots$ se obtiene la siguiente expresión:

$$P(z) = \frac{\omega^z}{z} - \frac{\omega^{z+1}}{z+1} + \frac{1}{1 \, . \, 2}\frac{\omega^{z+2}}{z+2} - \ldots\ldots$$

$$\text{ó} \quad P(z) = \omega^z\left[\frac{1}{z} - \frac{\omega}{z+1} + \frac{\omega^2}{1 \, . \, 2\,(z+2)} - \ldots\ldots\right].$$

Además esta serie obtenida por medio de la integral

$$\int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx,$$

en la que debe suponerse positiva la parte real de z, es convergente para todo valor real ó imaginario de z, por lo que define una función analítica uniforme.

Designándola por $P(z)$, tenemos la fórmula

$$\Gamma(z) = P(z) + Q(z),$$

que nos da la expresión general de la función euleriana obtenida por Herr Prym. Se observará que $P(z)$ representa la parte fraccionaria ó meromorfa de $\Gamma(z)$, que pone en evidencia los polos $z = 0, -1, -2, \ldots\ldots$ Se ve además que los numeradores de las fracciones parciales se reducen á constantes. La parte meromorfa y la parte entera de $\Gamma(z)$ se reducen á

$$P(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{1 \, . \, 2\,(z+2)} - \ldots + \frac{(-1)^n}{1 \, . \, 2 \ldots (z+n)} + \ldots$$

y
$$Q(z) = \int_\omega^\infty x^{z-1}e^{-x}dx.$$

Podremos obtener las funciones de Prym determinando la forma de las funciones $F(z)$ que satisfacen á la relación funcional

$$\Gamma(z+1) - z\,F(z) = A, \tag{1}$$

en la que A expresa una constante, y tales, que sea igual á una contante B, para $n=\infty$, el límite de la expresión

$$\frac{1}{n^x}\,\frac{F(z+n)}{1\,.\,2\,.\,\ldots\,.\,n}$$

Si suponemos que esté satisfecha la relación funcional, tendremos

$$F(z) = \frac{1}{z}\,F(z+1) - A\,\frac{1}{z},$$

$$F(z+1) = \frac{1}{z+1}\,F(z+2) - A\,\frac{1}{z+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F(z+n) = \frac{1}{z+n}\,F(z+n+1) - A\,\frac{1}{z+n};$$

y si se suman estas igualdades, multiplicadas respectivamente por las razones

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{z},\ \frac{1}{z(z+1)},\ \ldots\ldots,\ \frac{1}{z(z+1)\ldots\ldots(z+n-1)};$$

tendremos

$$F(z) = \frac{F(z+n+1)}{z(z+1)\ldots\ldots(z+n)}$$

$$-\,A\left[\frac{1}{z} + \frac{1}{z(z+1)} + \ldots\ldots + \frac{1}{z(z+1)\ldots\ldots(z+n)}\right]$$

pero

$$\frac{F(z+n+1)}{z(z+1)\ldots\ldots(z+n)} = \frac{1}{n}\,\frac{A+(z+n)\,F(z+n)}{n^z\,.\,1\,.\,2\,.\,\ldots\,.\,(n-1)}\,\Pi(x);$$

y siendo $B\,\Gamma(z)$ el límite de esta expresión, si se representa por $S(z)$ el límite de la serie convergente

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{z(z+1)}+\frac{1}{z(z+1)(z+2)}+\ldots\ldots;$$

se tiene $F(z)=B\,\Gamma(z)-A\,S(z)$.

Esta es la forma general de las funciones $F(z)$, de las que la función gamma es la más sencilla, la cual corresponde al caso de ser $A=0$ y $B=1$.

Si ahora, en la relación funcional

$$F(z+1)=A+z\,F(z)$$

se sustituye z sucesivamente por $z-1$, $z-2$, ..., $z-m$, se deducirá

$$F(z)=A+(z-1)\,F(z-1),$$

$$F(z-1)=A+(z-2)\,F(z-2),\ \ldots\ldots$$

$$F(z-m+1)=A+(z-m)\,F(z-m).$$

Multiplicando estas igualdades respectivamente por los productos 1, $z-1$, $(z-1)(z-2)$ ....., se obtiene

$$F(z)=A[1+(z-1)+(z-1)(z-2)+\ldots+(z-1)\ldots(z-m+1)$$
$$+(z-1)(z-2)\ldots\ldots(z-m)\,F(z-m)],$$

de donde, para $z=m+1$, siendo m entero positivo,

$$F(m+1)=A\,[1.2\ldots\ldots m+2.3\ldots\ldots m+\ldots\ldots$$
$$+(m-1)\,m+m+1]+1.2\ldots\ldots m\,(B-Ae).$$

La serie $S(z)$ es el producto de dos series. En efecto, quitando denominadores en

$$\frac{1}{z(z+1)\ldots\ldots(z+n)}=\frac{a_0}{z}+\frac{a_1}{z+1}+\ldots\ldots+\frac{a_n}{z+n},$$

y haciendo después z igual á $0, -1, -2, \ldots\ldots$, se obtiene

$$a_0 = \frac{1}{n!}, \quad a_1 = -\frac{1}{1}\frac{1}{(n-1)!}, \quad a_2 = \frac{1}{n!}\frac{1}{(n-2)!}, \quad \ldots\ldots;$$

luego

$$\frac{1}{z(z+1)\ldots.(z+n)} = \frac{1}{n!}\frac{1}{z} - \frac{1}{(n-1)!}\frac{1}{1}\frac{1}{z+1}$$
$$+ \frac{1}{(n-2)!}\frac{1}{2!}\frac{1}{z+2} - \ldots\ldots + (-1)^n \frac{1}{n!(z+n)}$$

que es el término general del producto de

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots\ldots$$

y
$$\frac{1}{z} - \frac{1}{1}\frac{1}{z+1} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z+2} + \ldots\ldots$$

Se designa por $P(z)$ la suma de esta última y por $Q(z)$ la diferencia entre $P(z)$ y $\Gamma(z)$, de modo que

$$P(z) = \frac{1}{e} S(z), \quad Q(z) = \Gamma(z) - P(z);$$

las funciones $P(z)$ y $Q(z)$ son las *funciones de Prym* (*).

La función $\Gamma(z)$ se presenta como la suma de las funciones $P(z)$ y $Q(z)$, reduciéndose la expresión general de las funciones $F(z)$ á

$$F(z) = (B - Ae)\, P(z) + B\, Q(z).$$

La función $F(z)$ se reduce á la una ó á la otra de las funciones de Prym, según que se elije por constantes arbitrarias A y B los números

$$A_1 = \frac{1}{e}, \quad B_1 = 0 \quad ó \quad A_2 = \frac{1}{e}, \quad B_2 = 1.$$

(*) *Jour. für die reine und angew.* Maht. t. LXXXII. Godefroy. *La fonction gamma.*

La descomposición de la función gamma en funciones de Prym constituye una aplicación del teorema de Mittag-Leffler, pues no admitiendo como puntos singulares más que los polos simples $z=0$, $z=-1$, $z=-2$, ... y el punto singular $z=\infty$, se ve que la serie

$$P(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{1}\frac{1}{z+1}+\frac{1}{1.2}\frac{1}{z+2}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\frac{1}{x+n}+\ldots$$

es uniformemente convergente para todo valor de z distinto de cero ó de un entero negativo; porque si r es un entero positivo tan grande como se quiera, la desigualdad

$$\left|(-1)^n\,\frac{1}{n!}\,\frac{1}{z+n}\right|<\frac{1}{n!}\,\frac{1}{n-r}$$

se verifica para todo valor de z correspondiente al interior del círculo de radio r, que no es igual á cero ni á un entero negativo. Así, la serie precedente representa la parte meromorfa de $\Gamma(z)$, mientras que la diferencia

$$Q(z)=\Gamma(z)-P(z)$$

es holomorfa en todo el plano (*).

105. Representación analítica de Gauss. Consideremos la integral definida

$$\int_0^1 x^{z-1}dx=\frac{1}{z} \quad \text{ó} \quad \int_0^1 x^z dx=\frac{1}{z+1}$$

siendo z un número positivo. Restando, tendremos

$$\int_0^1 x^{z-1}(1-x)\,dx=\frac{1}{z(z+1)}.$$

Repitamos la misma operación y tendremos

$$\int_0^1 x^{z-1}(1-x)^2\,dx=\frac{2}{z(z+1)(z+2)}$$

(*) Godefroy. Obra citada, p. 23.

y en general,

$$\int_0^1 x^{z-1}(\text{I} - x)^n\,dx = \frac{\text{I}\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,n}{z(z+\text{I})\,.\,.\,.\,.\,.\,(z+n)}.$$

Sustituyamos x por $\frac{x}{n}$ en la integral, y tendremos sucesivamente

$$\int_0^n x^{z-1}\left(\text{I} - \frac{x}{n}\right)^n dx = \frac{n^z}{z\left(\text{I}+\frac{z}{\text{I}}\right)\,.\,.\,.\,.\,.\left(\text{I}+\frac{z}{n}\right)}$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}\,dx = \lim\left[\frac{n^z}{z\left(\text{I}+\frac{z}{\text{I}}\right)\ldots\left(\text{I}+\frac{z}{n}\right)}\right]_{n=\infty}$$

fórmula obtenida por Euler y hallada también por Gauss, que constituyen una definición de la función gamma, y ofrece la ventaja de presentar una significación determinada, cualquiera que sea el valor positivo, negativo, real ó imaginario de z.

106. Consecuencias de la representación de Gauss. Tomando la última expresión bajo la forma

$$l\Gamma(z) = zln - lz - l\left(\text{I}+\frac{z}{\text{I}}\right) - \ldots\ldots - l\left(\text{I}+\frac{z}{n}\right)$$

la expresión de la derivada respecto á z será

$$D_z \log\Gamma(z) = \log n - \frac{\text{I}}{z} - \frac{\text{I}}{z+\text{I}} - \ldots\ldots - \frac{\text{I}}{z+n}$$

y derivando una vez más, resulta

$$D_z^2 \log\Gamma(z) = \lim\left[\frac{\text{I}}{z^2} + \frac{\text{I}}{(z+\text{I})^2} + \ldots + \frac{\text{I}}{(z+n-\text{I})^2} + \ldots\right]$$

en la que el segundo miembro es una serie absolutamente convergente, para cualquier valor real ó imaginario de z. Podemos pues integrar entre o y I y escribir

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = D\log\Gamma(z) = -C + \left(\text{I} - \frac{\text{I}}{z}\right) + \left(\frac{\text{I}}{2} - \frac{\text{I}}{z+\text{I}}\right) + \ldots.$$

$$\ldots\ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n-1}\right) + \ldots\ldots \qquad (1)$$

D log $\Gamma(z)$ se presenta bajo la forma de una serie absolutamente, porque su término general es

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n-1} = \frac{z-1}{n(n+z-1)}.$$

De la fórmula (1) resulta que la constante C de Euler se presenta bajo la forma $C = -\Gamma'(1)$. Y por ser

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty x^{z-1} \log x \,.\, e^{-x} dx$$

resulta
$$C = -\int_0^\infty \log x \,.\, e^{-x} dx.$$

Para obtenerla bajo otra forma más cómoda, hagamos $z = 1$ y tendremos

$$-\Gamma'(1) = C = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} - \log n\right).$$

Cambiando z en $z+1$ en (1), resulta

$$D \log \Gamma(z+1) = -C + \left(1 - \frac{1}{z+1}\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{z+2}\right) + \ldots\ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n}\right) + \ldots\ldots$$

Integremos entre 0 y z, y resultará

$$\log \frac{1}{\Gamma(z+1)} = C_1 + Cz + [\log(z+1) - z] + \ldots\ldots$$

$$+ \left[\log(z+1) - \frac{z}{n}\right] = Cz + [\log(z+1) - z] + \ldots\ldots$$

$$+ \left[\log\left(1 + \frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n}\right] + \ldots\ldots$$

Las derivadas sucesivas son

$$\frac{1}{1}\frac{d^2\log\Gamma(z)}{dz^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{(z+2)^2}+\ldots..$$

$$-\frac{1}{1\,.\,2}\frac{d^3\log\Gamma(z)}{dz^3}=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{(z+1)^3}+\frac{1}{(z+2)^3}+\ldots..$$

$$\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{d^4\log\Gamma(z)}{dz^4}=\frac{1}{z^4}+\frac{1}{(z+1)^4}+\frac{1}{(z+2)^4}+\ldots..$$

Considerando la fórmula

$$\mathrm{D}\log\Gamma(x+1)=\frac{d\log\Gamma(z+1)}{dz}=-\mathrm{C}+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{z+1}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{z+2}\right)+\ldots..+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{z+n}\right)+\ldots..$$

é integrando entre los límites o y x, se tiene

$$\log\Gamma(z+1)=-\mathrm{C}z+[z-\log(z+1)]$$

$$+\left[\frac{z}{2}-\log\left(1+\frac{z}{2}\right)\right]+\ldots..$$

$$\Gamma(z+1)=e^{-\mathrm{C}z}\,\frac{e^z}{1+z}\,\frac{e^{\frac{z}{2}}}{1+\frac{z}{2}}\,\ldots..=e^{\mathrm{C}z}\,\Pi\left(1+\frac{z}{n}\right)^{e^{-\frac{z}{n}}}$$

ó su inversa, cambiando los signos de los exponentes.

La función $\dfrac{1}{\Gamma(z+1)}$ es pues monódroma y monógena en toda la extensión del plano y el punto en el infinito es un punto esencial. Se obtiene el desarrollo de $\dfrac{1}{\Gamma(z+1)}$ según las potencias de z observando que

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)}=e^{\mathrm{C}z+\frac{1}{2}s_2z^2+\frac{1}{3}s_3z^3-\ldots.}$$

$$= e^{Cz}\left[1 - \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}s_2 z^2 - \frac{1}{3}s_3 z^3 \ldots\ldots\right) + \ldots\ldots\right]$$

$$= e^{Cz}\left[1 - \frac{1}{2}s_2 z^2 + \frac{1}{3}s_3 z^3 + \ldots\ldots\right].$$

107. FÓRMULA DE EULER. Euler estableció la siguiente fórmula

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{-nz+\frac{1}{2}}\,\Gamma(nz). \quad (1)$$

Para demostrarla, observaremos que el primer miembro es el límite de

$$\varphi(p, z)\,\varphi\left(p, z+\frac{1}{n}\right)\ldots\ldots\varphi\left(p, z+\frac{n}{n-1}\right)$$

para $p = \infty$. Además el producto

$$n^{-nz}\,\varphi(pn, nz) \qquad \text{se reduce á} \qquad n^{-nz}\,\Gamma(nz)$$

para $p = \infty$; y el cociente de los dos productos $\dfrac{p!^n\, n^{np+1}}{(np)!\, p^{\frac{n-1}{2}}}$ es independiente de z. Debemos pues hallar el límite de esta fracción para p infinito, ó calcular dicho cociente para un valor particular de z. Hagamos $z = 1$, y calculemos

$$Q = \frac{\Gamma(1)\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(1+\frac{n-1}{n}\right)}{n^{-n}\,\Gamma(n)}.$$

El valor del denominador es $n^{-n}(n-1)!$. El numerador equivale en virtud de $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$, á

$$\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right).\frac{2}{n}\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\frac{n-1}{n}\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Pero en virtud de IV (pág. 302).

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}},\quad \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}}\ldots.$$

$$\ldots\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

Y multiplicando estas igualdades, en virtud de la fórmula que da el producto de senos, será

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=\sqrt{\frac{\pi^{n-1}}{n\,2^{1-n}}}.$$

Por último, se tendrá

$$Q=\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}\,\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}\,2^{\frac{n-1}{2}}\,\frac{n^n}{(n-1)!}=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{\frac{1}{2}},$$

que demuestra la fórmula de Euler.

Esta fórmula permite calcular la integral

$$I=\int_0^1 \log\Gamma(x)\,dx.$$

En efecto; se tiene por definición $\operatorname{sen} nh=1$.

$I=\lim\left[h\log\Gamma h+h\log\Gamma(2h)+\ldots\ldots+h\log\Gamma(nh)\right]$

$$=\lim_{n=\infty}\frac{\log\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\Gamma(n-1)}{n}$$

$$=\lim\frac{\frac{n-1}{2}\log 2\pi-\frac{1}{2}\log n}{n}=\frac{1}{2}\log 2\pi.$$

ó
$$\int_0^1 \log\Gamma(x)\,dx=\log\sqrt{2\pi}.$$

Se demuestra de una manera análoga la fórmula de Raabe

$$\int_0^{n+1} \log \Gamma(x)\, dx = a \log (a - 1) + \log \sqrt{2\pi}.$$

108. Consecuencias. Podemos llegar también á obtener la fórmula (1) y á otras propiedades que constituyen la base de la teoría de las funciones eulerianas de segunda especie, según Hermite, considerando la expresión

$$\mathrm{F}(z+1) - \mathrm{F}(z) = -\frac{1}{z^2}.$$

Podemos escribir además

$$\mathrm{F}(z) + \mathrm{F}(1-z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$$

lo que manifiesta que el segundo miembro es una función periódica, cuyo período es 1. Pero diferenciando la igualdad

$$\pi \cot z\pi = \frac{1}{z} + \Sigma\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{z-n}\right),$$

en la que n adquiere todos los valores positivos y negativos, excepto el cero, resulta

$$\left(\frac{\pi}{\operatorname{sen} z\pi}\right)^2 = \frac{1}{z^2} + \sum \frac{1}{(z+n)^2} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{(z+n)^2};$$

luego $$\mathrm{F}(z) - \mathrm{F}(z-1) = \left(\frac{\pi}{\operatorname{sen} z\pi}\right)^2.$$

Consideremos, en fin, la suma

$$\mathrm{F}(z) + \mathrm{F}\left(z + \frac{1}{n}\right) + \ldots\ldots + \mathrm{F}\left(z + \frac{n-1}{n}\right).$$

Tendremos $$\sum_{k=0}^{k=n-1} \mathrm{F}\left(z + \frac{k}{n}\right)$$

ó $$\sum\sum \frac{1}{\left(z+\frac{k}{n}+\nu\right)^2} = \sum\sum \frac{n^2}{(nz+k+n\nu)^2},$$

variando k desde o hasta $n-1$ y adquiriendo ν todos los valores desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

Pero la expresión $k+n\nu$ da: Para $k=0$, todos los múltiplos de n; para $k=1$, todos estos múltiplos aumentados en 1; para $k=2$, todos estos múltiplos aumentados en 2, y así sucesivamente hasta $n-1$. Luego $k+n\nu$ puede tomar un valor entero cualquiera y una vez solamente. Se puede pues escribir

$$\sum\sum \frac{n^2}{(nz+k+n\nu)^2} = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \frac{n^2}{(nz+\mu)^2} = n^2\,F(nz),$$

de la que se concluye la relación

$$F(z)+F\left(z+\frac{1}{n}\right)+\ldots\ldots+F\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = n^2\,F(nz).$$

Tales son las propiedades fundamentales de $F(z)$. De estas podemos deducir las propiedades correspondientes de $\Gamma(z)$.

En primer lugar, consideremos nuevamente la ecuación

$$F(z+1)-F(z) = -\frac{1}{z^2}.$$

Integremos dos veces, y resulta

$$\log\Gamma(z+1) = \log z + \log\Gamma(z) + Cz + C'$$

ó $$\log\frac{\Gamma(z+1)}{z\,\Gamma(z)} = Cz + C',$$

siendo C y C′ constantes. Pero se tiene para cualquier valor entero de z, $\Gamma(z+1) = z\,F(z)$. C y C′ son por consiguiente, nulas y se concluye para cualquier valor de z

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z).$$

Además, considerando la igualdad

$$\Gamma(z) + \Gamma(1 - z) = \left(\frac{\pi}{\operatorname{sen} z\pi}\right)^2,$$

é integrando dos veces y pasando de los logaritmos á los números, obtendremos

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} z\pi}\, e^{Cz + C'}.$$

El primer miembro de esta igualdad es una función par de z, lo mismo sucede á $\frac{z\pi}{\operatorname{sen} z\pi}$; luego $e^{Cz+C'}$ debe ser también función par; luego $C = 0$. Hagamos ahora $z = 0$; el primer miembro se reduce á 1 así como $\frac{z\pi}{\operatorname{sen} z\pi}$; luego resulta $e^{C'} = 1$, es decir, $C' = 0$. Así, la segunda derivada de la función $\Gamma(z)$ se expresa por la fórmula

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} z\pi}.$$

La función $\frac{1}{\Gamma(z)}$ es holomorfa en todo el plano, pues siendo

$$\frac{1}{\Gamma(1 - z)} = \frac{\Gamma(z) \operatorname{sen} z\pi}{\pi},$$

si sustituímos $\Gamma(z)$ por $P(z) + Q(z)$ en el segundo miembro, el producto $P(z) \operatorname{sen} z\pi$ no tendrá ya polos y siendo $Q(z)$ holomorfa, lo mismo sucede á $\frac{1}{\Gamma(1 - z)}$.

109. Sea

$$N = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) . \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \quad \text{ó} \quad N = \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{1}{n}\right).$$

Multiplicando y aplicando la fórmula precedente, resulta

$$N^2 = \frac{\pi^{n-1}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} \ldots\ldots \operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

Pero según hemos visto (pág. 303), el denominador es igual á $\frac{n}{2^{n-1}}$; luego

$$N = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.n^{-\frac{1}{2}}.$$

Consideremos ahora la igualdad

$$\sum_0^{n-1} F\left(z+\frac{k}{n}\right) = n^2 F(nz),$$

é integremos dos veces; se obtendrá la relación

$$\sum_0^{n-1} \log\Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right) = \log\Gamma(nz) + Cz + C',$$

en la que determinaremos primero la constante C'. Para ello, escribamos, restando $\log z$ de los dos miembros,

$$\sum_1^{n-1} \log\Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right) = \log\frac{\Gamma(nz)}{\Gamma(z)} + Cz + C',$$

y sea $z = 0$; el primer miembro se reduce á

$$\sum_1^{n-1} \log\Gamma\left(\frac{k}{n}\right) = \log N = \log\left[(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Para obtener enseguida el valor de $\frac{\Gamma(nz)}{\Gamma(z)}$, observaremos que se tiene

$$\frac{\Gamma(nz)}{\Gamma(z)} = \frac{nz\,\Gamma(nz)}{nz\,\Gamma(z)} = \frac{\Gamma(nz+1)}{n\Gamma(z+1)};$$

de modo que para $z = 0$, $\frac{\Gamma(nz)}{\Gamma(z)}$ es igual á $\frac{1}{n}$; luego

$$C' = \log n + \log\left[(2\pi^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}\right] = \log\left[(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}}\right].$$

Para calcular C, cambiaremos z en $z + 1$ en

$$\sum_0^{n-1} \log \Gamma\left(z + \frac{k}{n}\right) = \log \Gamma(nz) + Cz + C';$$

y restaremos la nueva ecuación de la anterior. Empleando la relación $\Gamma(z + 1) = z\,\Gamma(z)$, se obtiene para el primer miembro la cantidad $\sum_0^{n-1} \log\left(z + \frac{k}{n}\right)$. El segundo se obtiene sustituyendo z por nz en la igualdad

$$\Gamma(z + n) = z(z + 1) \ldots\ldots (z + n - 1)\,\Gamma(z);$$

y llegamos á la condición:

$$\sum_0^{n-1} \log\left(z + \frac{k}{z}\right) = \log\left[nz(nz + 1) \ldots\ldots (nz + n - 2)\right] + C,$$

de donde resulta $C = -n \log n$. Luego

$$\sum_0^{n-1} \log \Gamma\left(z + \frac{k}{n}\right) = \log \Gamma(nz) - zn \log n + \log\left[(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}}\right],$$

y pasando de los logaritmos á los números

$$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z + \frac{1}{n}\right) \ldots \Gamma\left(z + \frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2} - 2n}\,\Gamma(nz).$$

Se observará que el cociente de $\Gamma(nz)$ por el producto

$$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z + \frac{1}{n}\right) \ldots\ldots \Gamma\left(z + \frac{n-1}{n}\right)$$

es holomorfo; para $z = -\frac{k}{n}$ la relación de $\Gamma(nz)$ á $\Gamma\left(z + \frac{k}{n}\right)$ es la cantidad finita: $\frac{(-1)^K}{n} \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots\ldots K}$.

110. Cálculo de $\log \Gamma$. La derivada

$$\Gamma'(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \log x\, dx$$

de $\Gamma(a)$ puede descomponerse en otras dos cuyos límites respectivos sean o y 1, 1 é ∞, pudiéndose sustituir en cada una $\log x$ por su expresión en integral definida,

$$\log x = \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-xz}}{z} dz,$$

invertiremos el orden de las integraciones, y reuniremos nuevamente las dos integrales. Tendremos pues,

$$\Gamma'(a) = \int_0^\infty \frac{dz}{z} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} (e^{-z} - e^{-xz})\, dx.$$

Pero se tiene que

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} e^{-z} dx = e^{-z}\, \Gamma(a),$$

y además, haciendo $x(1+z) = y$,

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x-xz} dx = \frac{1}{(1+z)^a} y^{a-1} e^{-y} dy = \frac{\Gamma(a)}{(1+z)^a};$$

luego $$\Gamma'(a) = \Gamma(a) \int_0^\infty \frac{dz}{z} \left[e^{-z} - \frac{1}{(1+z)^a} \right].$$

Dividamos por $\Gamma(a)$ é integremos desde 1 hasta a. En el primer miembro tendremos $\log \Gamma(a)$, porque $\log \Gamma(1) = \log(1) = 0$.

En el segundo miembro podremos invertir el orden de las integraciones, porque si descomponemos el campo de la integración relativo á z en dos partes, la una desde 0 hasta 1 y la otra desde 1 hasta ∞, la inversión en la primera podrá hacerse sin dificultad y en la segunda, si es finita la integral

$$\int_1^a \int_1^\infty \operatorname{mod} \frac{dz\, da}{z} \left[e^{-z} - \frac{1}{(1+z)^a} \right].$$

Pero esta integral tiene sus elementos inferiores á los de

$$\int_1^a \int_1^\infty dz\, da \left(e^{-z} + \frac{1}{z^{a+1}} \right) = \int_1^a da \left(- e^{-z} - \frac{1}{a z^a} \right)_1^\infty$$

$$= \int_1^a da \left(e^{-1} + \frac{1}{a} \right) = (a-1)\, e^{-1} + \log a.$$

Así pues, efectuando la integración con relación á a, tendremos

$$\log \Gamma(a) = \int_0^{\infty} \frac{dz}{z}\left[(a-1)e^{-z} - \frac{(1+z)^{-1}-(1+z)^{-a}}{\log(1+z)}\right].$$

Haciendo $a = 2$, resultará, observando que

$$\log \Gamma(2) = \log 1 = 0, \quad 0 = \int_0^{\infty} dz \left[\frac{e^{-z}}{z} - \frac{(1+z)^{-2}}{\log(1+z)}\right].$$

Multiplicando por $(a-1)$, y restando de la fórmula anterior resulta

$$\log \Gamma(a) = \int_0^{\infty} \left[(a-1)(1+z)^{-2}\right.$$

$$\left. - \frac{(1+z)^{-1}-(1+z)^{-a}}{z}\right]\frac{dz}{\log(1+z)},$$

y, haciendo $\log(1+z) = x$, de donde $z = e^x - 1$,

$$\log \Gamma(a) = \int_0^{\infty} \left[(a-1)e^{-x} - \frac{e^{-x}-e^{-ax}}{1-e^{-x}}\right]\frac{dx}{x}.$$

Desarrollando el factor $\dfrac{1}{1-e^{-x}}$ en serie según las potencias crecientes de x, tendremos por primeros términos $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}$; y reuniendo estos términos $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\right)e^{-ax}$ á los independientes de esta exponencial, resultará

$$\log \Gamma(a) = F(a) + \omega(a),$$

haciendo, por brevedad,

$$F(a) = \int_0^{\infty} \left[\left(a-1-\frac{1}{1-e^{-x}}\right)e^{-x} + \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)e^{-ax}\right]\frac{dx}{x},$$

$$\omega(a) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)e^{-ax}\frac{dx}{x}.$$

La integral $F(a)$ puede calcularse exactamente, pues se tiene que

$$F(a) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \left[\left(a - \frac{1}{2}\right) e^{-x} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\right.$$

$$\left.\times \left(e^{-ax} - e^{-\frac{x}{2}}\right)\right] \frac{dx}{x} = \left(a - \frac{1}{2}\right) \log a - a + \frac{1}{2}.$$

Se tiene además que

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \log \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \omega\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \log \pi - \omega\left(\frac{1}{2}\right).$$

y $$\omega\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} \frac{dx}{x}. \qquad (1)$$

Además,

$$\omega(1) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) e^{-x} \frac{dx}{x};$$

y cambiando x en $2x$,

$$\omega(1) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-2x}} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\right) e^{-2x} \frac{dx}{x},$$

y restando

$$0 = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-2x}} - \frac{2 - e^{-x}}{2x} - \frac{1 - e^{-x}}{2}\right) e^{-x} \frac{dx}{x}.$$

Restando esta fórmula de la (1), resulta

$$\omega\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x^2} - \frac{e^{-2x}}{x}\right) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2;$$

luego $$\Gamma(a) = \left(a - \frac{1}{2}\right) \log a - a + \frac{1}{2} \log 2\pi.$$

En cuanto á la segunda integral, tiende hacia cero cuando aumenta a. Se puede pues, desarrollar en serie.

Desarrollemos e^{-ax} según las potencias de x. Tendremos

$$\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}-\frac{1}{x}=\frac{i}{2}\cot\frac{ix}{2}-\frac{1}{x}.$$

Pero $$\pi\cot\pi z-\frac{1}{z}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{2z}{z^2-a^2},$$

y multiplicando por $\frac{i}{2\pi}$ después de hacer $z=\frac{ix}{2\pi}$,

$$\frac{i}{2}\cot\frac{ix}{2}-\frac{1}{x}=2\sum_1^\infty\frac{x}{x^2+4a^2\pi^2},$$

luego: $$\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}=2\sum_1^\infty\frac{1}{x^2+4a^2\pi^2}$$

$$=2\sum_1^\infty\left[\frac{1}{4a^2\pi^2}-\frac{x^2}{(4a^2\pi^2)^2}+\ldots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(4a^2\pi^2)^m(x^2+4a^2\pi^2)}\right]$$

Además

$$2\sum_1^\infty\frac{1}{(4a^2\pi^2)^p}=\frac{1}{2^{2p-1}\pi^{2p}}\sum_1^\infty\frac{1}{a^{2p}}=\frac{B_p}{1.2\ldots\ldots 2p}$$

y $$2\sum_1^\infty\frac{1}{(4a^2\pi^2)^m(x^2+4a^2\pi^2)}$$

$$=2\theta\sum_1^\infty\frac{1}{(4a^2\pi^2)^{m+1}}=\theta\,\frac{B_{m+1}}{1.2\ldots\ldots(2m+2)},$$

hallándose θ comprendido entre 0 y 1; luego

$$\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}=\frac{B_1}{1.2}-\frac{B_2}{1.2.3.4}x^2+\ldots\ldots$$

$$+(-1)^m\frac{B_{m+1}}{1.2\ldots\ldots(2m+2)}\theta x^{2m},$$

de la que se deducirá $\omega(a)$, multiplicando por e^{-ax} é integrando entre o é ∞. Pero, se tiene

$$\int_0^\infty x^{2p} e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(2p+1)}{a^{2p+1}} = \frac{1 \cdot 2 \ldots\ldots 2p}{a^{2p+1}},$$

$$\int_0^\infty \theta x^{2m} e^{-ax} dx = \theta_1 \int_0^\infty x^{2m} e^{-ax} dx = \theta_1 \frac{1 \cdot 2 \ldots\ldots 2m}{a^{2m+1}},$$

hallándose θ_1 entre o y 1; luego

$$\omega(a) = \frac{B_1}{1 \cdot 2} \frac{1}{a} - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \frac{1}{a^3} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{(-1)^{m-1} B_m}{(2m-1)\, 2m} \frac{1}{a^{2m-1}} + \frac{(-1)^m B_{m+1}}{(2m+1)(2m+2)} \frac{\theta_1}{a^{2m+1}}.$$

La serie obtenida para el valor de $\omega(a)$ sería divergente, si se prolongase al infinito. Sin embargo, los primeros términos decrecen rápidamente por poco grande que sea n, y la expresión del resto manifiesta que el error es menor que el primer término despreciado. Deteniéndonos en el momento en que los términos comienzan á crecer de nuevo, se tendrá pues, un valor de $\omega(a)$ cuyo grado de exactitud será fácil de apreciar y, en general, suficiente.

Si a tiende al infinito, $\omega(a)$ tenderá hacia cero y podrá despreciarse. Se tendrá pues, en el límite

$$\log \Gamma(a) = \Gamma(a)$$

y por ser $\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a)$, será

$$\log \Gamma(a+1) = F(a) + \log a$$

$$= \left(a + \frac{1}{2}\right) \log a - a + \frac{1}{2} \log 2\pi.$$

111. Producto de dos funciones Γ. Se tiene, cambiando

x en x^2, y en y^2

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \int_0^\infty 2x^{2p-1}e^{-x^2}dx\int_0^\infty 2y^{2q-1}e^{-y^2}dy$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty 4x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-x^2-y^2}dx\,dy,$$

y, haciendo $x = \rho\cos\varphi,\quad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi,$

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty 4\cos^{2p-1}\varphi\,\mathrm{sen}^{2q-1}\varphi\,\rho\,\rho^{2p+2q-1}e^{-\rho^2}d\rho\,d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^{2p-1}\varphi\,\mathrm{sen}^{2q-1}\varphi\,d\varphi\int_0^\infty 2\rho^{2p+2q-1}e^{-\rho^2}d\rho$$

$$= \mathrm{B}(p, q)\,\Gamma(p+q), \qquad \text{ó} \qquad \mathrm{B}(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

haciendo, por brevedad,

$$\mathrm{B}(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^{2p-1}\mathrm{sen}^{2q-1}\varphi\,d\varphi.$$

Sea, en particular, $p = q = \frac{1}{2}$. Tendremos

$$\mathrm{B}(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,d\varphi = \pi, \qquad \Gamma(p+q) = 1;$$

luego
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi.$$

Si hacemos $q = 1 - p$, resultará

$$\mathrm{B}(p,\ 1-q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\mathrm{sen}\,p\pi}.$$

112. Integrales eulerianas de primera especie. La integral $\mathrm{B}(p, q)$ se llama *integral euleriana de primera especie*, que puede escribirse bajo la forma

$$\mathrm{B}(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad (1)$$

haciendo $\cos^2\varphi = x$ de donde $-2 \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\, d\varphi = dx$
y haciendo

$$x = \frac{y}{1+y} \quad \text{de donde} \quad 1 - x = \frac{1}{1+y}, \quad dx = \frac{dy}{(1+y)^2},$$

resultará $$B(p, q) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}\,dy}{(1+y)^{p+q}}.$$

Si en (1) hacemos $x = \dfrac{u}{a}$, tendremos

$$\int_0^a \frac{u^{p-1}}{a^{p-1}} \frac{(a-u)^{q-1}}{a^{q-1}} \frac{du}{a} = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

$$\int_0^a u^{p-1}(a-u)^{q-1}\,du = a^{p+q-1}\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

113. Integral múltiple. Sea la integral múltiple

$$I = \iiint f\left[\left(\frac{x}{a}\right)^l + \left(\frac{y}{b}\right)^m + \left(\frac{z}{a}\right)^n\right] x^{p-1}\,y^{q-1}\,z^{r-1}\,dx\,dy\,dz,$$

tomada en el sistema de valores de las variables que satisfacen á la desigualdad

$$\left(\frac{x}{a}\right)^l + \left(\frac{y}{b}\right)^m + \left(\frac{z}{a}\right)^n \leqq 1.$$

Hagamos $x = a x_1^{\frac{1}{l}}$, $y = b y_1^{\frac{1}{m}}$, $z = c z_1^{\frac{1}{n}}$

$$p = l p_1, \quad q = m q_1, \quad r = n r_1.$$

La integral se reducirá á

$$\frac{a^p\,b^q\,c^r}{lmn}\iiint f(x_1 + y_1 + z_1)\,x_1^{p_1-1}\,y_1^{q_1-1}\,z_1^{r_1-1}\,dx_1\,dy_1\,dz_1,$$

y deberá extenderse á todos los sistemas de valores positivos de las variables que satisfacen á la relación

$$x_1 + y_1 + z_1 \leqq 1.$$

Hagamos

$$X = x_1 + y_1 + z_1 = \xi, \quad Y = y_1 + z_1 = \xi\eta, \quad Z = z_1 = \xi\eta\zeta.$$

Resulta

$$x_1 = \xi(1-\eta), \quad y_1 = \xi\eta(1-\zeta), \quad z_1 = \xi\eta\zeta$$

$$dX\,dY\,dZ = dx_1\,dy_1\,dz_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \eta & \xi & 0 \\ \eta\zeta & \xi\zeta & \xi\eta \end{vmatrix} d\xi\,d\eta\,d\zeta = \xi^2\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

variando ξ, η, ζ entre 0 y 1. Tendremos

$$\frac{a^p b^q c^r}{lmn}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(\xi)\,\xi^{p_1+q_1+r_1}(1-\eta)^{p_1-1}\eta^{q_1+r_1-1}$$
$$\times (1-\zeta)^{q_1-1}\zeta^{r_1-1}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Esta integral será el producto de las tres

$$\int_0^1 f(\xi)\,\xi^{p_1+q_1+r_1-1}\,d\xi,$$

$$\int_0^1 (1-\eta)^{p_1-1}\eta^{q_1+r_1-1}d\eta = \mathrm{B}(p_1, q_1+r_1) = \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(q_1+r_1)}{\Gamma(p_1+q_1+r_1)},$$

$$\int_0^1 (1-\zeta)^{q_1-1}\zeta^{r_1-1}d\zeta = \mathrm{B}(q_1, r_1) = \frac{\Gamma(q_1)\,\Gamma(r_1)}{\Gamma(q_1+r_1)}.$$

Tendremos pues

$$I = \frac{a^p b^q c^r}{lmn}\,\frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(q_1)\,\Gamma(r_1)}{\Gamma(p_1+q_1+r_1)}\int_0^1 f(\xi)\,\xi^{p_1+q_1+r_1-1}\,d\xi$$

$$= \frac{a^p b^q c^r}{lmn}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{l}\right)\Gamma\left(\frac{q}{m}\right)\Gamma\left(\frac{r}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{l}+\frac{q}{m}+\frac{r}{n}\right)}\int_0^1 f(\xi)\,\xi^{\frac{p}{l}+\frac{q}{m}+\frac{r}{n}-1}\,d\xi,$$

y la integral múltiple habrá quedado reducida á una integral simple.

Aplicación. Busquemos el momento de inercia de un elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

homogéneo y de densidad 1, con relación al eje de las z. Tendremos que calcular la integral

$$\iiint (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz,$$

cuya octava parte obtendremos, limitándonos á los valores positivos de las coordenadas. El primer término de la integral se obtiene haciendo

$$l = m = n = 2, \quad p = 3, \quad q = r = 1, \quad f = 1.$$

El valor buscado será

$$\frac{a^3bc}{8} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{a^3bc}{8} \frac{\pi}{\frac{1}{2}\frac{5}{2}}.$$

Calculando el segundo término, sumando y multiplicando por 8, resultará

$$\frac{4}{15}(a^2 + b^2)\pi abc.$$

114. Fórmula de Stirling. Sea la fórmula

$$\log(n+1) - \log n = \frac{2}{2n+1}\left[1 + \frac{\theta}{12n(n+1)}\right]$$

que se deduce de

$$\log p - \log q = \log(1+x) - \log(1-x)$$

haciendo $\quad x = \dfrac{p-q}{p+q} \quad$ ó $\quad \dfrac{p}{q} = \dfrac{1+x}{1-x}; \quad (p > q)$

y será:

$$\log p - \log q = 2\left[\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots + \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \ldots\ldots\right].$$

Si tomamos los k primeros términos, el error será menor que

$$2\left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \frac{x^{2k+3}}{2k+1} + \frac{x^{2k+5}}{2k+1} + \ldots\ldots\right],$$

ó á $\quad \dfrac{2 \cdot x^{2k+1}}{2k+1}(1 + x^2 + x^4 + \ldots\ldots) = \dfrac{2x^{2k+1}}{(2k+1)(1-x^2)}.$

Podremos pues hacer

$$\log p - \log q = 2\left[\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots + \frac{\theta x^{2k+1}}{(2k+1)(1-x^2)}\right],$$

hallándose θ comprendido entre 0 y 1.

Si $p = \mathrm{N} + h$, $q = \mathrm{N}$, $k = 1$, será

$$l(\mathrm{N}+h) - l\mathrm{N} = \frac{2h}{2\mathrm{N}+h}\left(1 + \frac{\theta h^2}{12\mathrm{N}(\mathrm{N}+h)}\right). \qquad (1)$$

Esta fórmula (1) puede escribirse bajo la forma

$$\frac{\theta}{12n(n+1)} = -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)[\log(n+1) - \log n]$$

que se reduce á

$$\frac{\theta}{12n(n+1)} = \log\varphi(n) - \log\varphi(n+1),$$

si se hace $\qquad \varphi(n) = \dfrac{1 \cdot 2 \ldots\ldots n}{e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}}, \qquad (2)$

resultando que $\qquad \log\varphi(n) > \log\varphi(n+1)$

y $\qquad \log\varphi(n) - \dfrac{1}{12n} < \log\varphi(n+1) - \dfrac{1}{12(n+1)};$

de manera que de las dos funciones $\varphi(n)$ y $\varphi(n)\,e^{-\frac{1}{12n}}$ la primera es creciente y la segunda decreciente. Si pues p es un entero positivo cualquiera, se tiene que

$$\varphi(n) > \varphi(n+p), \qquad \varphi(n)\,e^{-\frac{1}{12n}} < \varphi(n+p)\,e^{-\frac{1}{12(n+p)}}$$

desigualdades que pueden sustituirse por la igualdad

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+p)} = \frac{\theta_p}{e^{12n(n+1)}}, \tag{3}$$

hallándose θ_p comprendido entre 0 y 1.

De esta fórmula se deduce fácilmente la fórmula de Stirling, por la evaluación aproximada del producto $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n$, cuando n es muy grande.

En efecto, la relación (3) aplicada al caso en que $n = p$, hace ver inmediatamente que el límite de $\frac{\varphi(p)}{\varphi(2p)}$ es la unidad, cuando p crece indefinidamente. Se tiene pues, para $p = \infty$,

$$\lim \varphi(p) = \lim \frac{\varphi(p)^2}{\varphi(2p)}, \tag{5}$$

ó según (2),

$$\lim \varphi(p) = \lim \sqrt{4 \,.\, \frac{2}{1} \,.\, \frac{2}{3} \,.\, \frac{4}{3} \,.\, \frac{4}{5} \ldots \ldots \frac{2p-2}{2p-1} \,.\, \frac{2p}{2p-1}},$$

y en virtud del teorema de Wallis,

$$\lim \varphi(p) = \sqrt{2\pi}. \tag{5}$$

Si pues, en la fórmula (3) se deja fijo á n, haciendo crecer á p indefinidamente, se obtiene

$$\frac{\varphi(n)}{\sqrt{2\pi}} = e^{\frac{\theta}{12n}} \qquad \text{ó} \qquad 1 \,.\, 2 \ldots\ldots n = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{\frac{\theta}{12n}} \tag{6}$$

ó sea la fórmula de Stirling que da los dos límites

$$\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \quad \text{y} \quad \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{\frac{1}{12n}}$$

entre los que se halla comprendido el producto $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$.

Tomando los logaritmos puede escribirse

$$\log \Gamma(n+1) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - n + \frac{1}{2} \log 2\pi + \frac{\theta}{12n}. \quad (7)$$

El término complementario, dado por Euler, es

$$R_n = \frac{B_1}{1 \cdot 2} \frac{1}{n} - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \frac{1}{n^2} + \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^p \theta_p \frac{B_{p+1}}{(2p+1)(2p+2)} \frac{1}{n^{2p+1}}. \qquad (0 < \theta_p < 1)$$

115. Relación entre la función gamma y la serie hipergeométrica. La relación

$$\gamma[(\gamma-1)-(2\gamma-\alpha-\beta-1)x]F + (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)xF(\gamma+1)$$
$$-\gamma(\gamma-1)(1-x)F(\gamma-1) = 0,$$

que existe entre la función F y las dos funciones contiguas $F(\gamma+1)$ y $F(\gamma-1)$, se reduce para $x = 1$ á

$$\frac{F(\alpha, \beta, \gamma, 1)}{F(\alpha, \beta, \gamma+1, 1)} = \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)};$$

igualmente

$$\frac{F(\alpha, \beta, \gamma+1, 1)}{F(\alpha, \beta, \gamma+2, 1)} = \frac{(\gamma-\alpha+1)(\gamma-\beta+1)}{(\gamma+1)(\gamma-\alpha-\beta+1)},$$

. . . .

$$\frac{F(\alpha, \beta, \gamma+n-1, 1)}{F(\alpha, \beta, \gamma+n, 1)} = \frac{(\gamma-\alpha+n-1)(\gamma-\beta+n-1)}{(\gamma+n-1)(\gamma-\alpha-\beta+n-1)}$$

de donde

$$\frac{F(\alpha, \beta, \gamma, 1)}{F(\alpha, \beta, \gamma+n, 1)} = \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha+1)\ldots\ldots(\gamma-\alpha+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots\ldots(\gamma+n-1)}$$

$$\times \frac{(\gamma-\beta)(\gamma-\beta+1)\ldots\ldots(\gamma-\beta+n-1)}{(\gamma-\alpha-\beta)(\gamma-\alpha-\beta+1)\ldots\ldots(\gamma-\alpha-\beta+n-1)}$$

$$=\frac{(\gamma+n)(\gamma-\alpha-\beta+n)\,\Pi(\gamma)\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta)}{(\gamma-\alpha+n)(\gamma-\beta+n)\,\Pi(\gamma-\alpha)\,\Pi(\gamma-\beta)}.$$

Cuando n aumenta indefinidamente, $F(\alpha, \beta, \gamma+n, 1)$ tiene por límite la unidad, y resulta

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1)=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}.$$

Los parámetros α, β, γ supuestos reales, deben verificar á la desigualdad $\alpha+\beta-\gamma<0$.

Esta relación sirve para establecer las principales propiedades de la función gamma, constituyendo el método de Gauss. Así se tiene que

$$F\left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)=\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}\right)};$$

ó, $$F\left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)=1-\frac{n^2}{1 \cdot 2}+\frac{n^2(n^2-2^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}+\ldots\ldots,$$

serie que se obtiene haciendo $x=\frac{\pi}{2}$ en el desarrollo de $\cos nx$ en función de $\operatorname{sen} x$:

$$1-\frac{n^2}{1 \cdot 2}\operatorname{sen}^2 x+\frac{n^2(n^2-2^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\operatorname{sen}^2 x$$

$$-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\operatorname{sen}^6 x+\ldots\ldots;$$

luego $$\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}\right)=\frac{\pi}{\cos\frac{n\pi}{2}},$$

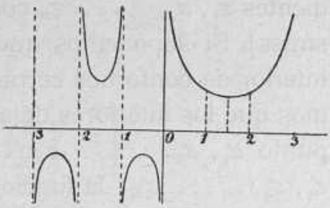
ó, sustituyendo n por $2x$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + x\right) = \frac{\pi}{\cos \pi x},$$

y, sustituyendo x á $\frac{1}{2} - x$; se tiene $\Gamma(x)\,\Gamma(1 - x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi x}$.

Así la teoría de la función Γ se deduce de la de la serie hipergeométrica.

116. Discusión de la curva $y = \Gamma(x)$. Para $x = 0$, -1, -2, ... $\Gamma(x)$ es infinita. Para $x = 1, 2, 3, \ldots .\ \Gamma(x)$ es igual á $1, 2, 1.2, 1.2.3, \ldots .$ se tiene



$$\frac{d \log \Gamma(x+1)}{dx} = -C$$
$$+x\left[\frac{1}{1.(x+1)} + \frac{1}{2(x+2)} + \ldots\right]$$

Anulándose el primer miembro de esta ecuación, se tendrá una ecuación transcendente para calcular los máximos y los mínimos de la función $\Gamma(x + 1)$. Esta ecuación será

$$\frac{C}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)} + \frac{1}{3(x+3)} + \ldots .$$

Existe evidentemente un máximo entre 0 y $+\infty$, porque para $x = 0$ como para $x = \infty$, $\Gamma(x)$ es infinita. Además no hay más que uno; porque $\frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2}$ es siempre positivo; y puesto que para $x = 1$ y $x = 2$, adquiere $\Gamma(x)$ valores iguales á uno, el mínimo de $\Gamma(x)$ se halla comprendido entre 1 y 2 para valores iguales á 1. Se obtiene para este mínimo

$$x = 1{,}4616321 \ldots ., \qquad \Gamma(x) = 0.8856032 \ldots .$$

La ecuación $\Gamma(x + 1) = x\,\Gamma(x)$ conduce á la construcción de la curva $y = \Gamma(x)$ para valores negativos de x, curva que próximamente tiene la forma indicada en la figura, puesto que las distancias relativas de las diversas ramas al eje de las x no pueden conservarse.

CAPÍTULO IV

Funciones sinécticas de muchas variables

PRELIMINARES. Un conjunto de muchas variables independientes $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$ constituye un *punto* [*Eine Stelle*, Weierstrass]. Si suponemos que $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$ se mueven en el interior de contornos cerrados simples $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$, diremos que los interiores de estos contornos forman el *dominio* del punto $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$ *(Umgebung)*. Sea el dominio del punto $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$; la función $f(z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n)$ se llamará sinéctica en el dominio D, si lo es respecto á cada variable, considerándose las otras como constantes.

117. FUNCIONES DESARROLLABLES EN SERIES ENTERAS. Si $P_0, P_1, \ldots\ldots, P_n, \ldots\ldots$ expresan polinomios enteros y homogéneos en $z_1, z_2, \ldots, z_n$ respectivamente de grados 0, 1, 2, ..., llamaremos serie entera á una serie de la forma

$$P_0 + P_1 + \ldots\ldots + P_n + \ldots\ldots \quad \text{ó} \quad \sum_0^\infty A_{\nu_1, \nu_2} \ldots\ldots z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \ldots\ldots,$$

expresando $A_{\nu_1, \nu_2}, \ldots$ un coeficiente independiente de $z_1, z_2, \ldots$

TEOREMA I. *Suponiéndose que las variables* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *se hallan contenidas en círculos* $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$, *cuyos radios son* $r_1, r_2, \ldots\ldots, r_n$, *y descritos desde el origen como centro; si los módulos de los términos de la serie*

$$\sum_0^\infty A_{\nu_1, \nu_2}, \ldots\ldots z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \ldots\ldots \tag{1}$$

son finitos cuando $\mathrm{mod}\, z_1 = r_1$, $\mathrm{mod}\, z_2 = r_2$, $\ldots\ldots$, *la serie es convergente en el dominio* $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$.

En efecto, la serie

$$\sum_0^\infty \left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^{\nu_1} \left(\frac{\rho_2}{r_2}\right)^{\nu_2} \ldots\ldots, \tag{2}$$

en la cual se supone

$$\rho_1 < r_1, \quad \rho_2 < r_2, \quad \ldots\ldots, \quad \text{y} \quad \rho_1 > 0, \quad \rho_2 > 0,$$

es convergente; lo que se puede ver de varias maneras, y en particular observando que la suma de los p primeros grupos homogéneos de la serie (2) es igual al producto

$$\left[1 + \left(\frac{\rho_1}{r_1}\right) + \left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^{n-1}\right]$$
$$\times \left[1 + \left(\frac{\rho_2}{r_2}\right) + \ldots\ldots + \left(\frac{\rho_2}{r_2}\right)^{p-1}\right] \ldots\ldots$$

que tiende hacia un límite finito para $p = \infty$.

Sea $a_{\nu_1, \nu_2, \ldots\ldots}$ el módulo de $A_{\nu_1, \nu_2, \ldots\ldots}$, siendo finitos por hipótesis los números $a_{\nu_1, \nu_2, \ldots\ldots} r_1^{\nu_1} r_2^{\nu_2} \ldots\ldots$ La serie

$$\Sigma\, a_{\nu_1, \nu_2, \ldots\ldots} \rho_1^{\nu_1} \rho_2^{\nu_2} \ldots\ldots \tag{3}$$

será convergente, y por tanto la serie (1), cuyos módulos son los diversos términos de (3), será convergente.

Teorema II. *Cuando una función* $f(z_1, z_2, \ldots\ldots z_n)$ *es sinéctica en un dominio* D *compuesto de círculos* $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$ *descritos desde el origen como centro con radios* $R_1, R_2, \ldots\ldots, R_n$, *será desarrollable en este dominio en serie entera.*

En efecto, consideremos los puntos $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ contenidos en el dominio D, la función de t

$$\varphi(t) = f(tx_1, tx_2, \ldots\ldots, tx_n)$$

será sinéctica con relación á t en un círculo descrito desde el origen como centro con un radio un poco superior á 1, y se tendrá

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi(0) + \ldots\ldots + \frac{t^n}{n!}\varphi^n(0) + \ldots\ldots$$

y por ser $\quad \varphi^n(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n\right)^{(n)}$,

en la cual hay que hacer $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ... en las derivadas, resulta el desarrollo de $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \ldots\ldots + \frac{t^n}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \ldots\ldots\right)^n + \ldots\ldots,$$

que verificándose para $t = 1$, da

$$f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = f(0, 0, \ldots\ldots) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \ldots\ldots\right)^n + \ldots\ldots$$

Corolario I. *Si una función* $f(z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n)$ *es sinéctica en un dominio* D *compuesto de círculos* C_1, C_2, ... *descritos alrededor de los puntos* a_1, a_2, ... *como centros, es desarrollable en dicho dominio, en serie de la forma*

$$\Sigma A_{\nu_1, \nu_2, \ldots\ldots} (z_1 - a_1)^{\nu_1} (z_2 - a_2)^{\nu_2} \ldots\ldots$$

Esta condición, suficiente para que el desarrollo sea posible, no es necesaria.

Corolario II. *Los coeficientes del desarrollo de* $f(z_1, z_2, \ldots)$ *pueden ponerse bajo la forma de integrales definidas.*

En efecto, se tiene

$$f(x_1, x_2, \ldots\ldots) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z_1, z_2, \ldots\ldots)\, dz_1}{z_1 - x_1}$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\!\!\int \frac{f(z_1, z_2, \ldots\ldots)\, dz_1\, dz_2}{(z_1 - x_1)(z_2 - x_2)}$$

. . . .

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\!\!\int \ldots\ldots \frac{f(z_1 \ldots\ldots, z_n)\, dz_1 \ldots\ldots dz_n}{(z_1 - x_1) \ldots\ldots (z_n - x_n)},$$

habiéndose tomado las integrales á lo largo de los círculos

$C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$ que forman el dominio D y que se hallan descritos desde los puntos $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ como centros con radios $R_1, R_2, \ldots\ldots, R_n$; luego

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\cdots} f}{\partial x_1{}^\alpha \partial x_2{}^\beta \ldots\ldots}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \iint \ldots\ldots \frac{f(z_1, z_2, \ldots\ldots)}{(z_1 - x_1)^{\alpha+1}(z_2 - x_2)^{\beta+1}} \frac{dz_1\, dz_2 \ldots\ldots}{\alpha!\, \beta! \ldots\ldots}.$$

En particular, cuando $x_1 = x_2 \ldots\ldots = 0$, se tiene

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\cdots} f}{\partial x_1{}^\alpha \partial x_2{}^\beta} = \frac{1}{2\pi i} \iint \ldots \frac{f(z_1, z_2, \ldots\ldots)}{z_1{}^{\alpha+1} z_2{}^{\beta+1} \ldots\ldots} \frac{dz_1\, dz_2}{\alpha!\, \beta! \ldots\ldots}.$$

Si se hace $z_1 = R_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = R_2 e^{i\theta_2}$, ... se obtiene

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\cdots} f}{\partial x_1{}^\alpha \partial x_2{}^\beta \ldots\ldots}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \iint \ldots\ldots \frac{f(z_1, z_2, \ldots\ldots)}{R_1{}^\alpha R_2{}^\beta \ldots\ldots} e^{-(\alpha\theta_1+\ldots)i} \frac{d\theta_1\, d\theta_2 \ldots\ldots}{\alpha!\, \beta! \ldots\ldots}.$$

TEOREMA IV. *Dos series enteras*

$$\Sigma A_{\nu_1, \nu_2, \ldots\ldots} (z_1 - a_1)^{\nu_1} (z_2 - a_2)^{\nu_2} \ldots\ldots$$

$$\Sigma B_{\nu_1, \nu_2, \ldots\ldots} (z_1 - a_1)^{\nu_1} (z_2 - a_2)^{\nu_2} \ldots\ldots$$

que son iguales en un dominio de dimensiones finitas, tienen el mismo dominio de convergencia y representan dos funciones iguales en este dominio. Además, se tiene

$$A_{\nu_1, \nu_2, \ldots\ldots} = B_{\nu_1, \nu_2 \ldots\ldots}$$

TEOREMA V. *Una función no puede permanecer sinéctica en toda la extensión del plano; en otros términos, una función que permanece monódroma, monógena, finita y continua para todos los valores finitos de sus variables, se hace necesariamente infinita para valores infinitos de sus variables.*

En efecto, si la función $f(z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n)$ fuese sinéctica en el infinito, lo sería también la función $f(z_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$ obtenida atribuyendo á $z_2, \ldots\ldots, z_n$ valores $a_2, \ldots\ldots, a_n$, lo que exige que $f(z_1, a_1, \ldots\ldots, a_n)$ sea una constante, es decir, independiente de z_1; luego será $\frac{\partial f}{\partial z_1} = 0$, cualesquiera que sean $z_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$, ó $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$, luego será f independiente de z_1. Se verá de igual modo que es independiente de las demás variables, es decir, que es constante.

118. Teorema de Weierstrass. *Sea* $f(z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n)$ *una función sinéctica en el interior de un dominio* D *que contiene el punto*

$$z_1 = z_2 = \ldots\ldots = z_n = 0,$$

y nula en este punto. Si la función $f(z_1, 0, 0, \ldots\ldots, 0)$ *obtenida haciendo* $z_2 = z_3 = \ldots\ldots = z_n = 0$ *en* $f(z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n)$ *no es nula cualquiera que sea* z_1, *existirá un dominio* D′ *contenido* D *en tal, que se tenga para los puntos interiores á este dominio*

$$f = P\varphi,$$

expresando P *un polinomio entero en* z_1 *con coeficientes sinécticos en* $z_2, \ldots\ldots, z_n$ *y* φ *una función sinéctica en el dominio* D′ *que no se anula en el dominio* D.

Hagamos, en efecto, $f = f(z_1, \ldots, z_n)$, $f_0 = f(z_1, 0, \ldots, 0)$,

$$f_1 = f_0 - f. \tag{1}$$

La función f_0 tiene un número limitado de ceros en el dominio D, porque es sinéctica y no es idénticamente nula; se puede pues, suponer que no tiene más ceros que 0 en un círculo de radio ρ_1 descrito desde el origen como centro. La función f_1, en virtud de (1) es nula para $z_2 = 0, \ldots\ldots, z_n = 0$, cualquiera que sea z_1. Se puede pues suponer que hallándose $z_2, \ldots\ldots, z_n$ en el interior de un círculo de radio ρ y z_1 exterior á un círculo de radio $\rho_0 < \rho$, se tenga

$$\operatorname{mod} f_1 < \operatorname{mod} f_0.$$

En este dominio se tiene

$$\log f = \log (f_0 - f_1) = \log f_0 - \sum_1^\infty \frac{\mathrm{I}}{n} \left(\frac{f_1}{f_0}\right)^n,$$

y diferenciando con relación á z_1,

$$\frac{\mathrm{I}}{f} \frac{\partial f}{\partial z_1} = \frac{\mathrm{I}}{f_0} \frac{\partial f_0}{\partial z_1} \sum_1^\infty \frac{\mathrm{I}}{n} \left(\frac{f_1}{f_0}\right)^n; \tag{2}$$

si se supone que f_0 sea de la forma

$$a_m z_1^m + a_{m+1} z_1^{m+1} + \ldots\ldots$$

$\frac{\mathrm{I}}{f_0} \frac{\partial f_0}{\partial z_1}$ será de la forma $\frac{m}{z_1} + g(z_1)$, expresando $g(z_1)$ una serie ordenada según las potencias enteras de z_1, es decir, una función sinéctica en el dominio D′. En cuanto á $\frac{f_1}{f_0}$, vemos que será desarrollable bajo la forma $\frac{\mathrm{A}}{z_1} + \theta$, expresando θ una función sinéctica así como A; de manera que $\Sigma \frac{\mathrm{I}}{n} \left(\frac{f_1}{f_0}\right)^n$ será desarrollable en una doble serie ordenada según las potencias enteras de z_1 y de $\frac{\mathrm{I}}{z_1}$, con coeficientes sinécticos en $z_2, z_3, \ldots\ldots$ Su derivada con relación á z_1 será una serie de igual forma que no contiene $\frac{\mathrm{I}}{z_1}$, de modo que la fórmula (2) se pondrá bajo la forma

$$\frac{\mathrm{I}}{f} \frac{\partial f}{\partial z_1} = \frac{m}{z_1} + g(z) + \sum_0^\infty \mathrm{Q}_\nu z_1^\nu + \sum_2^\infty \mathrm{Q}_{-\nu} z_1^{-\nu}. \tag{3}$$

Se ve que $\frac{m}{z_1} + \sum_2^\infty \mathrm{Q}_{-\nu} z_1^{-\nu}$ será la parte del desarrollo de $\frac{\mathrm{I}}{f} \frac{\partial f}{\partial z_1}$ efectuando según las potencias de $\frac{\mathrm{I}}{z_1}$. Esta parte tiene pues, por coeficientes funciones sinécticas de $z_2, \ldots\ldots, z_n$ en el dominio D′.

Esto sentado, llamando $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots$ á los valores de z_1 que anulan á f_0 y cuyo módulo es menor que el de z_1, se puede escribir la fórmula (3) así;

$$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial z_1} = \frac{m}{z_1} + \frac{a_1}{z_1 - a_1} + \frac{a_2}{z_1 - a_2} + \ldots + g(z_1) + \sum_0^\infty Q_\nu z_1^\nu,$$

expresando $a_1, a_2, \ldots\ldots$ los grados de multiplicidad de los ceros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots$; y si se observa que $g(z_1) + \sum\limits_0^\infty Q_\nu z_1^\nu$ es una función sinéctica h en el dominio D′, y que se puede hacer

$$P = z_1^m (z_1 - \alpha_1)^{a_1} (z_1 - \alpha_2)^{a_2} \ldots\ldots,$$

se deducirá, integrando la fórmula precedente,

$$f = P e^{\int h dz_1}.$$

Pero $e^{\int h dz}$ es una función sinéctica que se puede llamar φ y que no se anula en D′; luego en el dominio D′, $f = P\varphi$. Pero P es un polinomio entero en z_1, y sus coeficientes son sinécticos en $z_2, z_3, \ldots\ldots$ porque $\frac{P'}{P}$ se desarrolla en una serie cuyos coeficientes $m_1, Q_{-2}, Q_{-3}, \ldots\ldots$ son sinécticos, los cuales son $\Sigma\alpha, \Sigma\alpha^2, \ldots\ldots$ Los coeficientes de P son funciones enteras de $\Sigma\alpha, \Sigma\alpha^2, \ldots\ldots$; luego los coeficientes de P son sinécticos.

De este teorema de Weierstrass resulta que, dados los valores de $z_2, \ldots\ldots z_n$, el valor de z_1 que debe adjuntarse para anular á $f(z_0, \ldots\ldots, z_n)$ en un dominio de círculos cuyo centro es el origen, es raíz de la ecuación $P = 0$ con coeficientes sinécticos. Esto supone que $f(z_1, 0, \ldots\ldots, 0)$ no es idénticamente nula, ó sea que $f(z_1, z_2, \ldots\ldots)$ contiene por lo menos un término independiente de $z_2, \ldots\ldots, z_n$, ó un término con una sola variable.

CAPÍTULO V

Transcendentes engendradas por la integración indefinida

§ 1.º FUNCIONES IMPLÍCITAS.

119. TEOREMA. *Sea el sistema de* ν *ecuaciones diferenciales simultáneas*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial t} = \varphi(x, y, z, \ldots\ldots, t), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \chi(x, y, z, \ldots\ldots, t), \\ &\frac{\partial z}{\partial t} = \psi(x, y, z, \ldots\ldots, t), \quad \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

entre las ν *funciones* x, y, z, ..., *la variable* t *y sus derivadas* $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \ldots\ldots$, *resueltas con relación á estas derivadas.*

Si se supone que al variar x, y, z, ..., t *alrededor de los puntos* $x_0, y_0, z_0, \ldots\ldots, t_0$, *las funciones* $\varphi, \chi, \psi, \ldots\ldots$ *permanecen sinécticas con relación á estas variables, las ecuaciones* (1) *admitirán una solución, reduciéndose al sistema* $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0, \ldots\ldots$ *para* $t = t_0$.

Cada una de las funciones x, y, z, ... *permanecerá sinéctica en el interior de un círculo descrito desde* t_0 *como centro con un radio* R *definido por la fórmula*

$$R = \lambda\left[1 - e^{-\frac{1}{(\nu+1)M}}\right],$$

expresando λ *una cantidad menor que el menor de los módulos de* $x - x_0$, $y - y_0, \ldots\ldots$ *para los cuales* $\varphi, \chi, \ldots\ldots$, *dejarían de ser sinécticas alrededor de los puntos* $x_0, y_0, \ldots\ldots, t_0$, *y expresando* M *una cantidad mayor que los módulos máximos de* φ,

χ, ..., *cuando* x, y ..... *se mueven en circunferencias de radio* λ *alrededor de sus centros* x_0, y_0, ..., t_0.

Admitamos que sea cierta la propiedad por demostrar, y calculemos las derivadas sucesivas de las funciones x, y, z, ..., para lo que derivaremos las fórmulas (1), y tendremos

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \ldots\ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \ldots\ldots + \frac{\partial\chi}{\partial t},$$

. . . .

ó, sustituyendo $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \ldots\ldots$ por sus valores (1),

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \chi\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \ldots, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \varphi\frac{\partial\chi}{\partial x} + \chi\frac{\partial\chi}{\partial y} + \ldots, \quad \ldots \qquad (2)$$

Se obtendrán igualmente $\frac{d^3x}{dt^3}, \frac{d^3y}{dt^3}$, derivando las fórmulas (2) y sustituyendo $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \ldots\ldots$ por sus valores (1), y así sucesivamente. Las derivadas $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots\ldots$ serán la función φ y sus derivadas totales sucesivas $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, ...; lo mismo $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots\ldots$ se representarán por $\chi(t)$, $\chi'(t)$, ...; y tendremos, aplicando la fórmula de Taylor; que suponemos aplicable:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + (t - t_0)\,\varphi(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{1 \cdot 2}\varphi''(t) + \ldots\ldots \\ y &= y_0 + (t - t_0)\,\chi(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{1 \cdot 2}\varphi''(t_0) + \ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Vamos á demostar que estas fórmulas son *efectivamente* integrales de (1). Para ello demostraremos desde luego que son convergentes. En efecto se sabe que

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\cdots}\varphi(x_0, y_0\ .....)}{\partial x_0^\alpha \partial y_0^\beta\ .....}$$

$$= \alpha!\,\beta!\left(\frac{1}{2\pi}\right)^\nu \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\ .....\ \frac{e^{-(\alpha\xi+\beta\eta+\cdots)i}}{A^\alpha B^\beta\ .....}$$

$$\times\ \varphi_0(x_0 + Ae^{\xi i}, y_0 + Be^{\eta i},\ .....)\, d\xi\, d\eta\ .....$$

expresando A, B, C, ... cantidades menores que los radios de los mayores círculos, descritos desde x_0, y_0, ... como centros, que no contienen puntos críticos de la función φ. Si en esta fórmula se sustituyen, la exponencial por su módulo 1, la función φ por una cantidad M superior al mayor valor que puede tomar su módulo en los círculos de radios A, B, ... y A, B, ... por una cantidad λ menor que cada uno de ellos, se tendrá

$$\text{mod.}\ \frac{\partial^{\alpha+\beta+\cdots}\varphi(x_0, y_0,\ .....)}{\partial x_0^\alpha \partial y_0^\beta\ .....}$$

$$< \frac{\alpha!\,\beta!\ldots M}{(2\pi)^\nu}\int_0^{2\pi}\ .....\ \frac{M}{\lambda^{\alpha+\beta+\cdots}}\, d\xi\, d\eta\ .....$$

ó

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\cdots}\varphi(x_0, y_0,\ .....)}{\partial x_0^\alpha \partial y_0^\beta\ .....} < \frac{\alpha!\,\beta!\ .....\ M}{\lambda^{\alpha+\beta+\cdots}}. \tag{4}$$

Consideremos ahora las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{M}{\left(1-\frac{x-x_0}{\lambda}\right)\left(1-\frac{y-y_0}{\lambda}\right)\ .....\ \left(1-\frac{t-t_0}{\lambda}\right)}\\
\frac{dy}{dt} &= \frac{M}{\left(1-\frac{x-x_0}{\lambda}\right)\left(1-\frac{y-y_0}{\lambda}\right)\ .....\ \left(1-\frac{t-t_0}{\lambda}\right)}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

De estas ecuaciones resulta $dx = dy = \ldots\ldots$, y por consiguiente

$$x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = \ldots\ldots;$$

luego
$$\frac{dx}{dt} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x - x_0}{\lambda}\right)^{\nu}\left(1 - \frac{t - t_0}{\lambda}\right)};$$

luego
$$dx\left(1 - \frac{x - x_0}{\lambda}\right)^{\nu} = M\,\frac{dt}{1 - \frac{t - t_0}{\lambda}}.$$

Integrando desde $t = t_0$, se obtiene

$$\frac{1}{\nu + 1}\left[1 - \left(1 - \frac{x - x_0}{\lambda}\right)^{\nu+1}\right] = -M\log\left(1 - \frac{t - t_0}{\lambda}\right); \quad (6)$$

y las funciones x, y, ... permanecerán sinécticas, mientras que esta ecuación y su derivada con respecto á x no tengan ninguna raíz común. Esta derivada es

$$\left(1 - \frac{x - x_0}{\lambda}\right)^{\nu} = 0;$$

si se sustituye el valor de x en (6), resulta:

$$1 + (\nu + 1)\,M\log\left(1 - \frac{t - t_0}{\lambda}\right) = 0$$

$$t - t_0 = \left(1 - e^{-\frac{1}{(\nu+1)M}}\right)\lambda.$$

Las ecuaciones (5) dan pues valores de x, y, ... sinécticos alrededor del punto $t = t_0$, que se pueden desarrollar en serie en el interior de un círculo descrito alrededor de t_0 con un radio finito R, determinado por la fórmula

$$R \leqslant \left(1 - e^{-\frac{1}{(\nu+1)M}}\right)\lambda.$$

Las fórmulas (3) servirán para efectuar los desarrollos de

$x, y, \ldots\ldots$; pero será preciso suponer que $\varphi, \chi, \ldots$ son iguales á

$$\frac{\mathrm{M}}{\left(1-\frac{x-x_0}{\lambda}\right)\cdots\cdots}.$$

Volvamos ahora á las ecuaciones (1). Si con auxilio de éstas, se obtienen, como se ha explicado, las fórmulas (3), éstas serán convergentes, pues se ha visto que lo eran cuando se sustituían $\varphi, \chi, \ldots\ldots$ por

$$\frac{\mathrm{M}}{\left(1-\frac{x-x_0}{\lambda}\right)\left(1-\frac{y-y_0}{\lambda}\right)\cdots\cdots}=\Phi.$$

Pero en este caso: 1.º Los módulos $\varphi, \chi, \ldots\ldots$ para $t=t_0$ solo pueden aumentar, porque se hallan sustituídos por M, que es mayor que todos ellos. 2.º Los módulos de sus derivadas solo pueden aumentar, porque son menores en virtud de (4) que las derivadas de Φ, es decir,

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\cdots}\Phi}{\partial x_0^{\alpha}\,\partial y_0^{\beta}\cdots\cdots}=\frac{\alpha!\,\beta!\ldots\ldots\mathrm{M}}{\lambda^{\alpha+\beta+\cdots}}.$$

En virtud, pues, de las fórmulas (1), (2) y de las que se obtendría derivando todavía $x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots\ldots y, \frac{dy}{dt}, \ldots\ldots$ para $t=t_0$, es decir, los valores de los módulos de las funciones $\varphi(t_0), \varphi'(t_0), \ldots\ldots, \psi(t_0), \psi'(t_0), \ldots\ldots$ solo pueden aumentar, y, puesto que siendo convergentes las series después de la sustitución, debían serlo antes; si de las fórmulas (3) se sacan los valores de $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \ldots\ldots$ para sustituirlos en (1), se tendrá

$$\varphi(t_0)+\frac{t-t_0}{1}\varphi'(t_0)+\ldots\ldots=\varphi(x, y, \ldots\ldots, t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pero desarrollando los segundos miembros, se tiene

$$\varphi(t_0) + \frac{t - t_0}{1} \varphi'(t_0) = \varphi(x_0, y_0, \ldots\ldots, t_0)$$

$$+ (t - t_0)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 + \frac{(t - t_0)^2}{1 \cdot 2}\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_0 + \ldots\ldots, \qquad (6)$$

expresando $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0, \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_0, \ldots\ldots$ las derivadas totales de φ para $t = t_0$, tomadas considerando x, y, ... como funciones de t, definidas por las fórmulas (3). Ahora bien,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \ldots\ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial t};$$

y si se hace $t = t_0$, resulta, según las fórmulas (3),

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(t_0), \qquad \frac{dy}{dt} = \chi(t_0), \quad \ldots\ldots;$$

luego $$\left(\frac{\partial\varphi}{dt}\right)_0 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\varphi_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\chi_0 + \ldots\ldots$$

El segundo miembro de esta fórmula es precisamente lo que hemos llamado $\varphi'(t_0)$, y así sucesivamente; la fórmula (6) es pues idéntica; luego queda demostrado que las fórmulas (1) admiten una solución x, y, ... que para $t = t_0$ se reduce á x_0, y_0, ..., y permanece sinéctica en la proximidad de este punto, siempre que el módulo de $t - t_0$ sea inferior á $\lambda[1 - e^{-\frac{1}{(\nu+1)M}}]$.

§ 2.º Existencia de las funciones sinécticas

120. Para demostrar la sinecticidad de las funciones implícitas, consideremos las ecuaciones

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots\ldots, \quad f_n = 0,$$

en las cuales $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$ expresan funciones de $n + 1$ variables y_1, y_2, ... y_n y x. Estas ecuaciones definen n funciones implícitas y_1, y_2, ..., y_n de x, las cuales son sinécticas, porque satisfacen á las ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} y'_1 + \ldots\ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} y'_n = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y_1} y'_1 + \ldots\ldots + \frac{\partial f_n}{\partial y_n} y'_n = 0,$$

ó bien $$y'_1 = A_{11} \frac{\partial f_1}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial f_2}{\partial x} + \ldots\ldots + A_{1n} \frac{\partial f_n}{\partial x},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y'_n = A_{n1} \frac{\partial f_1}{\partial x} + A_{n2} \frac{\partial f_2}{\partial x} + \ldots\ldots + A_{nn} \frac{\partial f_n}{\partial x},$$

en las cuales A_{11}, A_{12}, ... tienen valor bien determinados si

$$\frac{\partial (f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n)}{\partial (y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)} \neq 0,$$

y son desarrollables según las potencias enteras de $x - x_0$ en el interior de un círculo cuyo radio es

$$R = \lambda \left(1 - e^{-\frac{1}{M(n+1)}}\right)$$

expresando λ el menor de los módulos $x - x_0$, $y - y_0$, ... para los que los segundos miembros de (1) dejan de ser sinécticos y M el módulo máximo de dichas funciones, cuando x, y_1, y_2, ... se mueven en círculos de radio λ cuyos centros son x_0, y_{10}, y_{20}, expresando y_{10}, y_{20}, ... los valores de y_1, y_2, ... para $x = x_0$.

Aplicando las conclusiones expuestas acerca de los lazos fundamentales á la integración á lo largo de un contorno, podemos enunciar el siguiente

TEOREMA. *Cuando se trata de integrar la función* $f(z)\,dz$ *entre los límites* z_0 *y* Z, *á lo largo de un contorno cualquiera, éste puede reducirse, sin cambiar de valor la integral, á una serie de* *lazos que envuelven los puntos críticos, teniendo su entrada en* z_0, *y al camino rectilíneo* $z_0 Z$.

§ 3.º Transcendentes á que conduce la integración de las funciones racionales

121. Uno de los primeros problemas que se presenta al principio del cálculo integral, es la integración de las funciones racionales. Para resolverlo, lo natural es descomponer estas funciones en fracciones simples de la forma Ax^m y $\frac{A}{(x - a)^n}$, en las que A, m, n expresan constantes, de las que las dos últimas son enteros. Cada una de estas funciones simples puede ser integrada. Sin embargo, cuando $n = 1$, no hallamos en el caso de la función

$$\int \frac{dx}{x - a} \quad \text{ó} \quad \int_1^x \frac{dx}{x} = \int_1^x \frac{dz}{z}.$$

Esta función es la logarítmica, y si bien nos es conocida, será interesante deducir de las propiedades de la ecuación

$$\log x = \int_1^x \frac{dz}{z}$$

que esta función no puede expresarse en función algebráica de x, y que constituye una transcendente.

Según lo expuesto en el párrafo anterior, todo contorno de integración que conduce desde 1 hasta x, puede reducirse á una serie de lazos que tienen su entrada en el punto 1, envolviendo al punto crítico cero, y al contorno rectilíneo que va del punto 1 al x. Llamemos u al valor de la integral tomada á lo largo de este último camino.

La integral tomada á lo largo del lazo se compone: 1.º de la integral

$$\int_1^\varepsilon \frac{dz}{z} = -\int_\varepsilon^1 \frac{dz}{z},$$

tomada á lo largo de un borde; 2.° de la integral tomada á lo largo de la circunferencia, que es igual á $\pm 2\pi i$ multiplicada por el residuo de $\frac{1}{z}$ ó 1; 3.° de la integral $\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dz}{z}$ tomada á lo largo del otro borde, que destruye á la primera; luego en total se tiene para la integral tomada á lo largo del lazo, $\pm 2\pi i$, según que este lazo se haya recorrido en sentido directo ó retrógrado.

Supongamos que el lazo se haya recorrido m veces en un sentido, n veces en otro, y que después se haya recorrido el camino rectilíneo; el valor de la integral será

$$2N\pi i + u$$

expresando N la diferencia de los enteros m y n, y u la integral tomada á lo largo del camino rectilíneo que va desde el punto 1 hasta el z. La integral tiene pues una infinidad de valores.

Si pues y expresa el logaritmo de x, de modo que se tenga

$$y - \int_{1}^{x} \frac{dz}{z} = 0,$$

la función inversa x de y podrá expresarse por e^y, y en virtud del teorema de la pág. 345, e^y será monódroma, monógena, finita y continua en toda la extensión del plano, excepto para $x = 0$ y $x = \infty$; pero entonces y es infinito. Según lo que se ha deducido anteriormente, se tendrá, para todos valores enteros de N,

$$e^{y+2N\pi i} = e^y,$$

y la función e^y es periódica; su período es $2\pi i$.

La ecuación

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0 \quad \text{ó} \quad d(\log x + \log y) = 0,$$

que puede escribirse

$$ydx + xdy = 0 \quad \text{ó} \quad dxy = 0,$$

manifiesta que $\log x + \log y = f(xy)$, expresando f una función que determinaremos haciendo $x = 1$; entonces $\log x = 0$, y se tiene $\log y = f(y)$. La función f es pues un logaritmo, y se tiene

$$\log x + \log y = \log xy \quad \text{ó} \quad u + v = \log(e^u e^v), \quad e^{u+v} = e^u e^v,$$

habiendo hecho $\quad \log x = u, \quad \log y = v.$

Se ve pues que la teoría de las exponenciales y de los logaritmos se deduce sencillísimamente de los principios elementales del cálculo integral.

La función $\log x$ no puede ser algebráica ni su inversa e^x, pues para un mismo valor de x, una función algebráica de x solo tiene un número limitado de valores, que se permutan entre sí.

§ 4.º Integrales de las funciones algebráicas de segundo orden, de las funciones circulares é hiperbólicas

Sea y una función algebráica de segundo orden definida por la ecuación

$$X_0 y^2 + X_1 y + X_2 = 0, \tag{1}$$

en la que X_0, X_1, X_2 expresan polinomios de los grados 0, 1, 2.

Toda integral de la forma

$$\int f(x, y)\, dx$$

en la que y expresa una solución de la ecuación (1), podrá obtenerse por medio de funciones algebráicas y logarítmicas.

Desde luego, suponiendo $y = u - \dfrac{X_1}{2X_0}$, la ecuación (1) se reduce á

$$X_0 u^2 + X_2 + \frac{X_1^2}{4X_0} = 0,$$

y u^2 es la raíz de un polinomio de segundo grado. La integral

(2) es pues la integral de una función racional de x y de un radical de la forma $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ (que se integra reduciendo la expresión irracional á racional por un cambio de variable). La integral (2) depende algebráicamente y aun racionalmente de las integrales simples

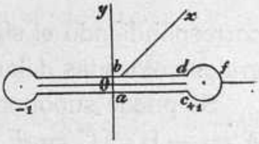
$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

que son arc sen x y $\mathrm{Arg\,S}h\,x$, $\mathrm{Arg\,C}h\,x$.

Vamos á estudiar directamente la función arc sen x, definida por la ecuación

$$\text{arc sen}\, x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{2}$$

El radical se supone igual á $+1$, cuando es igual á su límite inferior. Veamos cuantos valores puede adquirir esta función para cada valor de x. Todos los caminos que conducen desde O hasta x pueden reducirse á lazos, seguidos del camino rectilíneo Ox. Sea u el valor de la integral tomada á lo largo del camino rectilíneo. La función bajo el signo integral tiene los dos puntos críticos $+1$ y -1 que dan lugar á dos lazos. Consideremos uno de ellos $bdfca$, habiéndose tomado el radical con el valor $+1$ para el valor inicial $x = 0$. La integral tomada á lo largo del borde bd será



$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

La integral tomada á lo largo del círculo es nula; la relativa al borde ca es igual á

$$\int_0^1 \frac{dx}{-\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

En efecto, cuando la variable z ha girado á lo largo de la circunferencia dfc, el radical ha tomado en c un signo contrario al que tenía en d, y es necesario integrar $\dfrac{dx}{-\sqrt{1-x^2}}$ á lo largo de ca. La integral relativa al lazo $+1$ es pues π. Se verá igualmente que la integral relativa á -1 es $-\pi$.

Supongamos ahora que la variable z, después de haber recorrido el lazo $+1$, describa todavía esté lazo. El radical toma á la salida del lazo un valor igual y de signo contrario al que tenía á su entrada. Si z describe por segunda vez dicho lazo, la integral crecerá, no en π, sino en $-\pi$, lo que dará o para su valor total, después de haber descrito dos veces el lazo. Si se describiese por tercera vez el lazo, se obtendría de nuevo π para valor de la integral, y el valor del radical, á la salida, sería -1, y así sucesivamente.

Si z, después de haber descrito el lazo $+1$, describe el -1, la integral adquirirá el valor $\pi-(-\pi)$ ó 2π, y el radical vuelve á tomar en el origen el valor $+1$.

De una manera general: Llamemos A, B, C, ... á los valores de la integral tomada á lo largo de uno de los dos lazos, y supongamos que, después de haber recorrido varias veces en un orden cualquiera los lazos, la variable z describe el contorno rectilíneo Ox, la integral tomará el valor general

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{C}-\mathrm{D}\,.....\pm\mathrm{F}\mp u,$$

correspondiendo el signo $+$ ó $-$ á que el número de las integrales colocadas delante de u sea par ó impar.

Se puede suponer siempre $\mathrm{A}\mp\mathrm{B}$, $\mathrm{B}\mp\mathrm{C}$, ... Ahora bien $\mathrm{A}=-\mathrm{B}=\mathrm{C}=\pm\pi$; luego el valor general de la integral que hemos llamado arc sen x es

$$2n\pi+u \quad \text{ó} \quad (2n+1)\pi-u,$$

expresando n un número entero. La función inversa de arc sen x ó sen u gozará de las propiedades siguientes:

$$\operatorname{sen}(2n\pi+u)=\operatorname{sen}u, \qquad \operatorname{sen}(2n\pi+\pi-u)=\operatorname{sen}u.$$

Es fácil ver que la función definida por la ecuación

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{1 - x^2}, \tag{3}$$

es monódroma. Solo podría haber excepción en la regla, si x se hallase en la proximidad de $+1$ ó -1 (119); pero si se hace $x = 1 - \xi^2$, se tiene

$$\frac{d\xi\, d\xi}{du} = \sqrt{2\xi^2 - \xi^4} \quad \text{ó} \quad \frac{d\xi}{du} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \xi^2},$$

para $x = 1$, $\xi = 0$. Pero ξ es monódroma alrededor del punto para el que $\xi = 0$; luego x es también monódroma alrededor del punto para el que $x = 1$. Se vería igualmente que x no deja de ser monódroma alrededor del punto -1. Así pues, la ecuación (2) define á sen x como función de u, monódroma en toda la extensión del plano.

§ 5.° Fórmula fundamental de la Trigonometría

122. La fórmula fundamental de la Trigonometría puede deducirse del cálculo integral, pues tenemos que

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \text{arc sen } x;$$

y adoptando esta fórmula como definición de arc sen x, se tendrá para la integral de la ecuación

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = 0, \tag{1}$$

$$\text{arc sen } x + \text{arc sen } y = \text{arc sen } c, \tag{2}$$

expresando c una constante. Pero se puede integrar de otro modo la ecuación diferencial, y escribirla así

$$dx\sqrt{1 - y^2} + dy\sqrt{1 - x^2} = 0$$

ó

$$\int dx\sqrt{1 - y^2} + \int dy\sqrt{1 - x^2} = a,$$

en la que a es una constante; é integrando por partes,

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}-\int xy\left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\right)=a.$$

Pero en virtud de la ecuación diferencial (1)

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=a$$

y haciendo en (2) $x=0$, resulta $y=c$. Haciendo en (3) $x=0$, $y=c$; luego

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=c; \qquad (3)$$

llamando sen x á la función inversa de arc sen x y haciendo arc sen $x=a$, arc sen $y=b$, tenemos $a+b=$ arc sen c; y tendremos en vez de (3)

$$\operatorname{sen} a\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 b}+\operatorname{sen} b\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}=\operatorname{sen}(a+b).$$

§ 6.° Método general para el estudio de las funciones definidas por ecuaciones diferenciales

123. *Lema I.* Sea $f(x)$ una función sinéctica de la variable imaginaria x, en el círculo descrito desde x_0 como centro con radio r. Llamemos M al máximo del módulo de la función $f(x)$ en el círculo de radio r. Si en la fórmula

$$f^n(x_0)=\frac{n!}{r^n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0+re^{\theta i})\,e^{-n\theta i}\,d\theta,$$

se sustituye cada elemento de la integral definida por la cantidad $Md\theta$, mayor que su módulo, se aumenta el módulo de la integral definida, que se reduce á

$$\operatorname{mod} f^n(x_0)<n!\,\frac{M}{r^n}.$$

Lema II. Sea $f(x, y, z)$ una función sinéctica respecto á x, y, z, hallándose estas variables en círculos de radios r, r' .... descritos desde x_0, y_0, z_0 como centros.

Sustituyendo análogamente cada elemento por $Md\theta d\theta' d\theta''$ en la fórmula conocida

$$D_{xyz}^{n+n'+n''} f(x_0, y_0, z_0) = n!\, n'!\, n''!\, \frac{r^{-n} r^{-n'} r^{-n''}}{(2\pi)^3}$$

$$\times \iiint_0^{2\pi} f(x_0 + re^{\theta i}, y_0 + r'e^{\theta' i},$$

$$z_0 + r''e^{\theta'' i})\, e^{-(n\theta + n'\theta' + n''\theta^2)} d\theta\, d\theta'\, d\theta''$$

se reducirá á

$$\operatorname{mod} D_{xyz}^{n+n'+n''} f(x_0, y_0, z_0) < n!\, n'!\, n''!\, \frac{M}{r^n r'^{n'} r''^{n''}}.$$

Lema III. Es fácil componer una función cuyas derivadas parciales tengan en x_0, y_0, z_0 valores iguales á los límites asignados para los módulos de las derivadas correspondientes de la función propuesta $f(x, y, z)$.

Sea, en efecto, la función

$$\varphi(x, y, z) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x - x_0}{r}\right)\left(1 - \frac{y - y_0}{r'}\right)\left(1 - \frac{z - z_0}{r''}\right)}.$$

que se desarrolla en serie convergente, mientras que los módulos de las diferencias $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ son respectivamente menores que r, r', r''. El término general de la serie es de la forma

$$M \frac{(x - x_0)^n (y - y_0)^{n'} (z - z_0)^{n''}}{r^n r'^{n'} r''^{n''}}.$$

Si se toma una derivada cualquiera, $D_{xyz}^{n+n'+n''}$ de la función $\varphi(x, y, z)$, y se hace en ella $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, el término arriba escrito da

$$n!\, n'!\, n''!\, \frac{M}{r^n r'^{n'} r''^{n''}},$$

y los resultados dados por los demás se anulan. Luego

$$[D_{xyz}^{n+n'+n''} \varphi(x, y, z)]_0 = n!\, n'!\, n''!\, \frac{M}{r^n r'^{n'} r''^{n''}}.$$

Así, en x_0, y_0, z_0, las derivadas de la función φ son límites superiores de los módulos de las derivadas de la función f.

Para demostrar con auxilio de estos principios debidos á Cauchy, la existencia de las funciones integrales, consideremos la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial z} = f(z, u);$$

la variable z parte del punto $z = z_0$, teniendo la función el valor inicial u_0. Supondremos que la derivada $f(z, u)$ es una función sinéctica de z y u en la proximidad de los valores z_0 y u_0.

Representemos las variables por $z_0 + z$, $u_0 + u$; la variable partirá de $z = 0$ teniendo u el valor inicial $u = 0$. Sea M el máximo del módulo de f, y ρ, r los radios de las circunferencias de sinectitud. Si la ecuación admite una integral sinéctica, tendremos

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{du}{dz} = f(u, z) \\[2ex] \dfrac{d^2u}{dz^2} = \dfrac{df}{dz} + \dfrac{df}{du}\dfrac{du}{dz} \\[2ex] \dfrac{d^3u}{dz^3} = \dfrac{d^2f}{dz^2} + 2\dfrac{d^2f}{dz\,du}\dfrac{du}{dz} + \dfrac{d^2f}{du^2}\left(\dfrac{du}{dz}\right)^2 + \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (5)$$

que se deduce por derivación.

Supongamos que en los segundos miembros se sustituyan los valores de f y de sus derivadas parciales, para $z = 0$ y $u = 0$, por sus módulos. La primera dará el módulo de $\left(\dfrac{du}{dz}\right)_0$. Sustituyendo este valor en la segunda, se tendrá un límite superior del módulo de $\left(\dfrac{d^2u}{dz^2}\right)_0$. Sustituyendo estos valores en la tercera, se tendrá un límite superior del módulo de $\left(\dfrac{d^3u}{d^3z}\right)_0$, y así sucesivamente.

En virtud del lema III, las derivadas parciales de la función

$f(z, u)$, para $z = 0$ y $u = 0$, tienen valores cuyos módulos son menores que las derivadas correspondientes de la función

$$\varphi(z, u) = \frac{M}{\left(1 - \frac{z}{\rho}\right)\left(1 - \frac{u}{r}\right)}.$$

Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{dv}{dz} = \varphi(z, v) = \frac{M}{\left(1 - \frac{z}{\rho}\right)\left(1 - \frac{v}{r}\right)}, \tag{6}$$

en la que damos á la función v el valor inicial $v = 0$ para $z = 0$. Si esta nueva ecuación admite una integral sinéctica, se obtendrán sus derivadas sucesivas por medio de las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dv}{dz} = \varphi(z, v) \\
&\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{d\varphi}{dz} + \frac{d\varphi}{dv}\frac{dv}{dz} \\
&\frac{d^3v}{dz^3} = \frac{d^2\varphi}{dz^2} + 2\frac{d^2\varphi}{dz\,dv}\frac{dv}{dz} + \frac{d^2\varphi}{dv^2}\left(\frac{dv}{dz}\right)^2 + \frac{d\varphi}{dv}\frac{d^2v}{dz^2} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

análogas á las ecuaciones (5). Cuando se sustituye en ellas $z = 0$ y $v = 0$, la función φ y sus derivadas parciales adquieren todas valores positivos, por lo que los segundos miembros son sumas de términos positivos; luego se obtienen para $\left(\frac{dv}{dz}\right)_0$, $\left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)_0$, ... valores positivos. Así pues la función v tiene, para $z = 0$, todas sus derivadas reales y positivas.

Comparemos las ecuaciones (5) y (7). Se ve desde luego que $\mathrm{mod}\left(\frac{du}{dz}\right)_0 < \mathrm{mod}\left(\frac{dv}{dz}\right)_0$, y así sucesivamente; luego, si existen las funciones u y v, las derivadas de la primera, para $z = 0$, tienen valores cuyos módulos son respectivamente menores que las derivadas de la segunda. Pero la función v existe, porque la integral de la ecuación (6) es

$$v - \frac{v^2}{2r} = - M\rho L\left(1 - \frac{z}{\rho}\right), \tag{8}$$

anulándose v con z. Esta ecuación define una función implícita v que se anula con z, permaneciendo sinéctica para todos los valores de la variable z inferiores ó iguales á cierto módulo R que se puede asignar, pues la función v permanece monódroma hasta que las dos raíces de la ecuación (8) se hacen iguales, lo que sucede cuando la derivada $1 - \frac{v}{r}$ del primer miembro con relación á v se anula, es decir, cuando $v = r$. El valor correspondiente R de z, se deduce de la ecuación

$$L\left(1 - \frac{R}{\rho}\right) = - \frac{r}{2M\rho}.$$

Si se llama A al máximo del módulo de v en el círculo de radio R, tendremos, según el lema I,

$$\left(\frac{d^n v}{dz^n}\right)_0 < n!\,\frac{A}{R^n}; \quad \text{luego} \quad \operatorname{mod}\left(\frac{d^n u}{dz^n}\right)_0 < n!\,\frac{A}{R^n}.$$

Resulta pues que la serie

$$u = \left(\frac{du}{dz}\right)_0 \frac{z}{1} + \left(\frac{d^2 u}{dz^2}\right)_0 \frac{z^2}{1\,.\,2} + \ldots . \tag{9}$$

ordenada según las potencias crecientes de z, es convergente para todos los valores de z cuyos módulos son menores que R, porque teniendo el término general de la serie un módulo $< \left(\frac{\operatorname{mod} z}{R}\right)^n A$, se ve que, si el módulo de z es $< R$, la serie de los módulos es convergente, y por tanto la serie propuesta. Esta serie convergente define una función sinéctica en el círculo de radio R.

Falta hacer ver que la función u definida por la serie (9), satisface á la ecuación propuesta (4). Si en esta ecuación se sustituye u por su valor, se tiene por una parte

$$\frac{du}{dz} = \left(\frac{du}{dz}\right)_0 + \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_0 \frac{z}{1} + \dots\dots$$

y por otra $f(z, u) = f_0 + f_0' \frac{z}{1} + f_0'' \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \dots\dots$

llamando $f, f'', \dots\dots$ á las derivadas totales de f calculadas por medio de las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} f' = \dfrac{df}{dz} + \dfrac{df}{du}\dfrac{du}{dz} \\ f'' = \dfrac{d^2f}{dz^2} + 2\dfrac{d^2f}{dz\,du}\dfrac{du}{dz} + \dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Se hará en estas ecuaciones $z = 0$, $u = 0$, y se sustituirán $\left(\frac{du}{dz}\right)_0, \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_0, \dots\dots$ por sus valores deducidos de las ecuaciones (5).

Pero los segundos miembros de la ecuaciones (5) y (10) son entonces idénticamente los mismos; luego

$$f_0' = \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_0, \quad f_0'' = \left(\frac{d^3u}{dz^3}\right)_0, \dots\dots$$

y la ecuación diferencial queda verificada.

124. APLICACIÓN Á LAS ECUACIONES SIMULTÁNEAS. Sean las m ecuaciones simultáneas

$$\frac{du}{dz} = f(z, u, u', \dots\dots), \quad \frac{du'}{dz} = f_1(z, u, u', \dots\dots), \dots\dots,$$

en las cuales suponemos que la variable z parte de $z = 0$, teniendo las funciones $u, u', \dots\dots$ por valores iniciales cero.

Las derivadas son funciones sinécticas con relación á z, u, u', $\dots\dots$, mientras que los módulos de estas variable permanecen inferiores á ρ, r, r', . , . . . Llamemos M, M_1, ... á los máximos de los módulos de las funciones f, f_1, ... en, esta extensión, y hagamos

$$\varphi = \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{\rho}\right)\left(1 - \frac{u}{r}\right)\left(1 - \frac{u'}{r'}\right) \ldots\ldots}.$$

En virtud del lema III, las derivadas parciales de las funciones f, f_1, ... tienen para $z = 0$, $u = 0$, ... valores cuyos módulos son menores que las derivadas correspondientes de las funciones $M\varphi$, $M_1\varphi$, ... Si se comparan las ecuaciones diferenciales propuestas á las ecuaciones diferenciales simultáneas

$$\frac{dv}{dz} = M\varphi\,(z, v, v', \ldots\ldots), \quad \frac{dv'}{dz} = M_1\varphi\,(z, v, v', \ldots\ldots), \ldots\ldots$$

se verá, como anteriormente, que las derivadas

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_0, \quad \left(\frac{du'}{dz}\right)_0, \ldots\ldots, \quad \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_0, \quad \left(\frac{d^2u'}{dz^2}\right)_0, \ldots\ldots$$

deducidas de las primeras por un cálculo sucesivo, tienen módulos menores que las cantidades reales y positivas

$$\left(\frac{dv}{dz}\right)_0, \quad \left(\frac{dv'}{dz}\right)_0, \ldots\ldots, \quad \left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)_0, \quad \left(\frac{d^2v'}{dz^2}\right)_0, \ldots\ldots,$$

que se deducen de las segundas por un cálculo análogo.

Pero estas últimas ecuaciones pueden integrarse fácilmente, pues se tiene desde luego

$$\frac{dv}{M} = \frac{dv'}{M_1} = \ldots\ldots \quad \text{de donde} \quad \frac{v}{M} = \frac{v'}{M_1} = \ldots\ldots = k.$$

Si se sustituyen los valores de v, v', ... en una de ellas resulta

$$\left(1 - \frac{M}{r}\,k\right)\left(1 - \frac{M_1}{r'}\,k\right) \ldots\ldots dk = \frac{dz}{1 - \frac{z}{\rho}}, \qquad (12)$$

ó integrando:

$$k - \left(\frac{M}{r} + \frac{M_1}{r'} + \ldots\ldots\right)\frac{k^2}{2}$$

$$+ \left(\frac{MM_1}{rr'} + \ldots\ldots\right)\frac{k^3}{2} - \ldots\ldots = -\rho L\left(1 - \frac{z}{\rho}\right). \quad (13)$$

Esta ecuación define una función k que se anula con z, permaneciendo sinéctica hasta cierto módulo R. Si se llama A al máximo del módulo de la función k en esta extensión, se tiene

$$\left(\frac{d^n k}{dz^n}\right)_0 < n!\,\frac{A}{R^n};$$

y se tendrá con mayor razón,

$$\operatorname{mod}\left(\frac{d^n u}{dz^n}\right)_0 < n!\,\frac{MA}{R^n}, \quad \operatorname{mod}\left(\frac{d^n u'}{dz^n}\right)_0 < n!\,\frac{M_1 A}{R^n}, \ldots\ldots$$

Resulta pues, que las series

$$u = \left(\frac{du}{dz}\right)_0 \frac{z}{1} + \left(\frac{d^2 u}{dz^2}\right)_0 \frac{z^2}{1\,.\,2} + \ldots, \quad u' = \left(\frac{du'}{dz}\right)_0 \frac{z}{1} + \ldots, \ldots$$

son convergentes para todos los valores de z cuyo módulo es menor que R. Estas series definen funciones sinécticas en el círculo de radio R, y satisfacen á las ecuaciones diferenciales propuestas.

Es fácil obtener el valor del radio de convergencia R. Anulándose la función k con z, permanece monódroma hasta que se hacen iguales dos raíces de la ecuación (13). Esto se verifica cuando la derivada del primer miembro de la ecuación (13), con relación á v, se anula. Los valores de k que anulan á esta derivada, son $\frac{r}{M}, \frac{r'}{M_1}, \ldots\ldots$ Sustituyendo el menor de estos valores en la ecuación (13), se deducirá el valor correspondiente R, real y positivo, de z.

125. Caso de ser infinita la derivada. Supongamos que se parte del punto z_0 con el valor inicial u_0, y que al llegar la va-

riable al punto z_1, la función adquiera un valor u_1 tal, que para $z = z_1$ y $u = u_1$ la derivada $f(u, z)$ se haga infinita, de modo que su inversa $\frac{1}{f(u, z)}$ quede finita y continua en la proximidad de estos valores. Hagamos

$$z = z_1 + z', \; u = u_1 + u' \text{ de donde } \frac{du'}{dz'} = f(u_1 + u', \; z_1 + z').$$

Si se considera á z' como función de u', esta función deberá satisfacer á la ecuación diferencial

$$\frac{dz'}{du'} = \frac{1}{f(u_1 + u', \; z_1 + z')},$$

y admitir el valor inicial $z' = 0$ para $u' = 0$.

Permaneciendo finita y continua la función

$$\frac{1}{f(u_1 + u', \; z_1 + z')},$$

es desarrollable en una serie convergente, ordenada según las potencias crecientes de u' y z', de manera que

$$\frac{dz'}{du'} = au'^m + bz' + cu'z' + cz'^2 + \ldots.. \tag{14}$$

Si el segundo miembro no contuviese un término independiente de z, la ecuación diferencial podría escribirse bajo la forma

$$\frac{dz'}{du'} = z'(b + cu' + ez' + \ldots..)$$

de la que se deduciría

$$\log \frac{z'}{z'_1} = \int_{u'_1}^{u'} (b + cu' + ez' + \ldots..)\, du',$$

llamando z'_1 al valor de z que corresponde á u'_1. Cuando z' y u' tienden hacia cero, el segundo miembro tiende hacia un valor finito, mientras que el primero crece indefinidamente. En este caso la ecuación diferencial no admite ninguna integral que se anule con z'. Por consiguiente, la serie contiene por lo menos un término independiente de z', y representaremos por au'^m aquél de los términos de este género que tenga menor grado.

Con el valor inicial $z' = 0$ para $u' = 0$, la ecuación diferencial (14) define una función de u' sinéctica en la proximidad de $u' = 0$, y, por consiguiente, desarrollable en serie convergente, ordenada según las potencias enteras y crecientes de u'.

Sea $$z' = A_0 u^\alpha + A_1 u^{\alpha+1} + \ldots\ldots$$

esta función. La ecuación diferencial debe quedar satisfecha, si se sustituye dicho valor en vez de z', y se tendrá

$$A_0 \alpha u'^{\alpha-1} + A_1 (\alpha + 1) u'^\alpha + \ldots\ldots = au'^m + bA_0 u'^\alpha + \ldots\ldots$$

Identificando estas dos series, iguales para todos los valores de u' inferiores á cierto módulo, se determinarán los exponentes y los coeficientes de la serie z'. Así tendremos

$$\alpha = m + 1, \quad A_0 = \frac{a}{\alpha} = \frac{a}{m+1},$$

de donde $$z' = \frac{a}{m+1} u'^{m+1} + \ldots\ldots \qquad (15)$$

Recíprocamente, si se considera u' como una función de z', esta función quedará determinada implícitamente por la ecuación (15). A cada valor muy pequeño de z' corresponden $(m+1)$ valores muy pequeños de u', que son sensiblemente iguales á los de la ecuación binomia

$$\frac{a}{m+1} u'^{m+1} = z', \quad \text{siendo aproximadamente} \quad u = B_0 z'^{\frac{1}{m+1}},$$

expresando B_0 la cantidad $\left(\frac{m+1}{a}\right)^{\frac{1}{m+1}}$.

Hagamos $z' = \rho e^{\theta i}$, y llamemos $u'_0, u'_1, \ldots, u'_m$ á los $m + 1$

valores de u' dispuestos según los vértices de un polígono regular, á saber:

$$u'_0 = B_0 \rho^{\frac{1}{m+1}} e^{\frac{\theta i}{m+1}}, \quad u'_1 = B_0 \rho^{\frac{1}{m+1}} e^{\frac{\theta+2\pi}{m+1} i}, \ldots\ldots$$

$$u'_m = B_0 \rho^{\frac{1}{m+1}} e^{\frac{\theta+2m\pi}{m+1} i}.$$

Cuando el punto z' describe una circunferencia muy pequeña alrededor del punto $z'=0$, el argumento aumenta en 2π, u'_0 se cambia en u'_1, u'_1 en u'_2, ... u'_m en u'_0, luego.

TEOREMA II. *Cuando, para un sistema de valores simultáneos* z_1 *y* u_1, *la derivada se hace infinita, si se expresa por* m *el orden de la primera derivada parcial de la función* $\frac{1}{f}$ *con relación á* u *que no se anula, la integral* u *adquiere* $m+1$ *valores que se permutan entre sí circularmente, cuando la variable* z *gira alrededor del punto* z_1. *Después de* $m+1$ *vueltas, la función vuelve á su valor primitivo.*

Las funciones algebráicas estudiadas por Puiseux entran en esta categoría (*); y en efecto, cuando en un punto del plano la ecuación admite raíces iguales, la derivada se hace, en general, infinita.

§ 7.º APLICACIÓN Á LAS FUNCIONES SIMPLEMENTE PERIÓDICAS

126. FUNCIÓN e^z. Sea la función definida por la ecuación diferencial

$$\frac{du}{dz} = u \tag{1}$$

que admite el valor $u=1$ para $z=0$. Por ser la derivada una función sinéctica de u, mientras que u conserva un valor finito, la función integral u permanece función monódroma de z. Pero

(*) Briot et Bouquet *Théorie des fonctions doublement périodiques.*

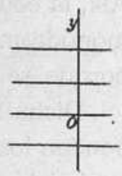
esta función no se hace infinita por ningún valor finito de z, porque hallándose dada la función inversa por la integral definida

$$z = \int_1^u \frac{du}{u}, \tag{2}$$

si u se aleja al infinito según una línea cualquiera, z va también al infinito. Permaneciendo finita, continua, monódroma y monógena la función u definida por la ecuación diferencial, para todos los valores finitos de z, es una función *sinéctica* de z en toda la extensión del plano.

Dicha función es periódica, porque á un mismo valor de u corresponden todos los valores que puede adquirir la integral definida (2), cuando se va del punto 1 al punto u por caminos distintos, y por hacerse infinita la función colocada bajo el signo $\int$ para $u = 0$, todos estos caminos pueden reducirse al camino rectilíneo aumentado en un número cualquiera de veces el contorno elemental que envuelve al punto $u = 0$. Si pues z expresa la integral rectilínea y ω la integral á lo largo del contorno elemental, se ve que á cada valor de u corresponde una infinidad de valores de z en progresión aritmética, esto es, $z + m\omega$, siendo m un entero cualquiera positivo ó negativo; luego u es una función simplemente periódica de z, cuyo periodo ω tiene el valor $2\pi i$. La función u no es más que la función e^z, cuando z es real, y conviene representarla con el mismo signo, cuando z es imaginaria.

Sea u_1 el valor de la función para un valor determinado z_1 de la variable. Hagamos $z = z_1 + z'$, $u = u_1 u'$, siendo z' una variable y u' la nueva función. La ecuación diferencial



se reduce á $\dfrac{du'}{dz'} = u'$, y todavía $u' = 1$ para $z' = 0$; luego $u' = e^{z'}$, lo que da la relación fundamental $e^{z_1 + z'} = e^{z_1} . e^{z'}$.

Si trazamos, en el plano, paralelas al eje ox, á igual distancia 2π las unas de las otras, estas paralelas dividirán al plano en bandas iguales. Cuando z se mueve en una de ellas, la función e^z pasa por todos los valores posibles y una sola vez por cada uno, haciéndose infinita, si z se aleja al infinito hacia la derecha, y nula si se aleja hacia la izquierda. Cuando z pasa de una banda á otra, la función vuelve á tomar periódicamente el el mismo valor.

127. Función tg. z. Sea la ecuación diferencial

$$\frac{du}{dz} = 1 + u^2 \tag{3}$$

que admite el valor inicial $u = 0$ para $z = 0$.

Siendo la derivada una función sinéctica de u, la integral u permanece monódroma, mientras conserva un valor finito. Pero puede suceder ahora que u se haga infinita para un valor finito de z, porque la integral definida

$$z = \int_0^u \frac{du}{1 + u^2} \tag{4}$$

tiende hacia un valor finito cuando u se aleja al infinito en una dirección cualquiera. Sea pues α un valor finito de z que hace á u infinita. Para ver lo que sucede en la proximidad de este punto $z = \alpha$, haremos $z = \alpha + z'$, $u = \frac{1}{v}$, y la ecuación diferencial se reduce á

$$\frac{dv}{dz'} = -(1 + v^2), \tag{5}$$

reduciéndose v á cero para $z' = 0$. Permaneciendo la función v monódroma en la proximidad de $z = \alpha$, lo mismo sucede á u. Así, la ecuación diferencial propuesta define una función de z monódroma en toda la extensión del plano; pero no es sinéctica porque se hace infinita para valores finitos de z.

Dicha función es periódica. A un mismo valor de u corresponden los valores de z dados por la integral definida (4), en la cual debe suponerse que la línea de integración toma todas las formas posibles. Haciéndose infinita la función $\frac{1}{1 + u^2}$, para

$u = +i$ y $u = -i$, todos los caminos pueden reducirse al camino rectilíneo aumentado en un número cualquiera de contornos elementales, alrededor de uno ú otro de los puntos $u = +i$, $u = -i$. Estos dos contornos elementales dan la misma integral $\omega = \pi$, y á cada valor de u corresponden los valores $z + m\omega$. Así la función u es simplemente periódica y el período es π. Se expresa esta función por el signo $\operatorname{tg} z$, porque para los valores reales de z se confunde con la tangente trigonométrica del ángulo z.

Si se trazan paralelas al eje de las y, á la distancia π unas de otras, dividirán el plano en bandas iguales. Cuando z se mueve en una banda, la función $\operatorname{tg} z$ pasa por todos los valores posibles y una vez por cada uno de ellos. Cuando la variable pasa de una banda á otra, la función vuelve á adquirir periódicamente el mismo valor. La función $\operatorname{tg} z$ solo tiene un cero y un infinito en cada banda, en la primera el cero es $z = 0$ y el infinito $z = \frac{\pi}{2}$.

La función $\operatorname{tg} z$ es impar, porque si en la integral definida (4) se hace marchar á u según dos caminos opuestos, respecto al origen $u = 0$, se obtendrán para z valores iguales y de signos contrarios. Así

$$\operatorname{tg}(-z) = -\operatorname{tg} z.$$

128. Funciones $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$. Sea la función definida por la ecuación diferencial

$$\frac{du}{dz} = \sqrt{G(u-a)(u-b)}, \tag{6}$$

que admite el valor inicial $u = 0$ para $z = 0$. Se da además el valor inicial de la derivada que expresaremos por U_0. Para estudiar la función inversa

$$z = \int_0^u \frac{du}{G\sqrt{(u-a)(u-b)}},$$

señalaremos en el plano dos puntos a y b que corresponden á los valores $u = a$, $u = b$. Expresemos por (A) el contorno elemental que se obtiene cuando la variable u va en línea recta desde el origen O hasta un punto muy próximo del a, describe una circunferencia muy pequeña alrededor de este punto, y vuelve al origen por la misma recta. Expresemos por (B) el contorno elemental que envuelve el punto b, y llamemos A y B á los valores obtenidos por la integral definida, cuando la variable u describe cada uno de estos contornos con el valor inicial U_0 del radical.

Observaremos desde luego que la integral relativa á cada uno de los círculos pequeños es infinitamente pequeña. Cuando la variable u, después de haber recorrido la recta Oa, describe una de las circunferencias alrededor del punto a, el radical cambia de signo y vuelve al origen con el valor $-U_0$. En la segunda parte del movimiento, la recta aO se recorre en sentido contrario con un radical cambiado de signo, y por consiguiente los elementos de la integral se reproducen con el mismo signo, por lo que la integral A, relativa al contorno elemental (A) es igual á dos veces la integral rectilínea según Oa. Lo mismo se dirá respecto al contorno elemental B.

Esto sentado, todos los caminos que van del origen O á un punto cualquiera M, pueden reducirse al camino rectilíneo, precedido de una combinación cualquiera de los contornos elementales (A) y (B): 1.º Los que se reducen al camino rectilíneo OM, sin pasar por ninguno de los puntos a y b, dan la integral rectilínea que llamamos z. 2.º Los que se reducen al contorno elemental (A) seguido del camino rectilíneo OM, dan la integral $A - z$, porque al cambiar de signo el radical, después de haber recorrido el contorno elemental (A), el camino rectilíneo da un resultado de signo contrario $-z$, lo que hace $A - z$. 3.º Los caminos que se reducen al contorno elemental (B), seguido del camino rectilíneo OM dan $B - z$. 4.º Si la variable u describe primero el contorno elemental (A), después el contorno elemental (B) y por fin el camino rectilíneo OM, el primer contorno dará A; habiendo cambiado el radical de signo, el segundo dará $-B$, y por cambiar el radical por segunda vez de signo, vuelve á tomar en el origen su valor primitivo $+U_0$; de manera que el camino rectilíneo dará de nuevo el valor z, en resumen, $A - B + z$. En general, el doble contorno elemental $(A) + (B)$, precediendo á un camino cualquiera, aumenta la integral en una cantidad constante $\omega = A - B$. Y como puede introducirse este doble contorno cuantas veces se quiera, se añadirá á la integral un múltiplo cualquiera de ω.

Hemos encontrado pues, una primera serie $z + m\omega$ y enseguida un segundo valor $A - z$ que aumentado en un múltiplo cualquiera de ω, da una segunda serie $A - z + m\omega$. El tercer valor $B - z$ entra en las series anteriores, porque se tiene $B - z = A - z - \omega$.

Resulta pues, que á cada valor de u corresponden dos series de valores de z, á saber, $z + m\omega$ y $A - z + m\omega$ en progresión aritmética. Así la función u definida por la ecuación diferencial es simplemente periódica. En cada banda la función pasa dos veces por el mismo valor, y la suma de los dos valores de z, que en cada banda dan el mismo valor de u, tienen una suma constante A, abstracción hecha de los múltiplos del período ω.

La ecuación particular

$$\frac{du}{dz} = \sqrt{1 - u^2},$$

á la que se unen las condiciones $u = 0$ y $U_0 = 1$ para $z = 0$, origina la función sinéctica impar y simplemente periódica llamada sen z. Siendo la integral rectilínea desde $u = 0$ hasta $u = 1$ igual á $\frac{\pi}{2}$, se tiene $A = \pi$, por otra parte $B = -A$; luego $\omega = 2\pi$. A cada valor de u corresponden dos valores de z, cuya suma constante es igual á π. Se tiene pues la relación

$$\operatorname{sen}(\pi - z) = \operatorname{sen} z \quad \text{y por tanto} \quad \operatorname{sen}(\pi + z) = -\operatorname{sen} z$$

Si se hace $u' = \sqrt{1 - u^2}$, la ecuación diferencial se reduce á

$$\frac{du'}{dz} = -\sqrt{1 - u'^2},$$

teniendo u' el valor inicial $u' = 1$ para $z = 0$, esta nueva función u', sinéctica con relación á z y simplemente periódica, se llama $\cos z$.

129. Propiedades. Una función simplemente periódica, monódroma y monógena se hace infinita, por lo menos una vez en el intervalo de cada período. Esta función debe también hacerse nula y pasar por todos los valores posibles.

La más simple de todas las funciones simplemente periódicas es la función sinéctica $e^{\frac{2\pi i}{\omega}}$, que admite el período ω. Si se divide el plano en bandas iguales por rectas paralelas á una dirección arbitraria, trazadas á la distancia ω, la función adquiere periódicamente el mismo valor en cada una de las bandas, en los puntos correspondientes, es decir, situados en una paralela á una misma dirección y á la distancia ω unos de otros. Dicha función solo pasa una vez por el mismo valor en cada banda, se hace infinita para $z = +\infty$ y nula para $z = -\infty$.

La función
$$\operatorname{tg} \frac{\pi z}{\omega} = \frac{e^{\frac{2\pi z i}{\omega}} - 1}{i\left(e^{\frac{2\pi z i}{\omega}} + 1\right)}$$

como la precedente, no pasa más que una vez por el mismo valor en cada banda. Admite un solo infinito y un solo cero simples en cada banda.

Por medio de una función monódroma, simplemente periódica $\varphi(z)$ con un solo infinito, se pueden formar funciones simplemente periódicas, con el mismo período, y en cada período infinitos cualesquiera $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$ y ceros cualesquiera en igual número $a, b, c, \ldots\ldots$ Basta para ello tomar la función

$$F(z) = A\,\frac{\varphi(z) - \varphi(a)}{\varphi(z) - \varphi(\alpha)} \times \frac{\varphi(z) - \varphi(b)}{\varphi(z) - \varphi(\beta)} \times \ldots\ldots$$

Cuando una función monódroma y monógena tiene una infinidad de infinitos colocados en línea recta y á igual distancia, y una infinidad de ceros colocados también en una misma línea paralela á la precedente y á igual distancia, esta función es simplemente periódica porque se puede formar una función simplemente periódica con infinitos y ceros dados, y según el teorema V (pág. 238, t. II), la función propuesta será igual á esta función periódica multiplicada por una cantidad constante.

Mas generalmente, consideremos una función $f(z)$ cuyos infinitos y ceros se hallen dispuestos por grupos iguales y equidistantes según una misma dirección. Vamos á ver que en cada grupo hay tantos ceros como infinitos, pues si suponemos que $f(z)$ contiene más ceros que infinitos, se podrá formar una función $F(z)$ simplemente periódica que admita todos los infinitos de $f(z)$ y una parte de los ceros. El cociente $\frac{f(z)}{F(z)}$, por no tener ya infinitos, será constante; luego $f(z)$ no puede tener más ceros que $F(z)$. Supongamos al contrario, que $f(z)$ tenga menos ceros que infinitos; formaremos una función simplemente periódica $F(z)$ que admita todos los ceros de $f(z)$ y una parte de los infinitos; y por no tener el cociente $\frac{F(z)}{f(z)}$ infinitos, será constante; luego $f(z)$ tiene tantos ceros como $F(z)$; y $f(z)$ tiene tantos ceros como infinitos. Si llamamos $F(z)$ á la función simplemente periódica que admite estos ceros é infinitos, el cociente $\frac{f(z)}{F(z)}$ es constante y $f(z)$ es simplemente periódica.

Si la función periódica no fuese monódroma y tomase m valores para cada valor de z, sería raíz de una ecuación de grado m, cuyos coeficientes fuesen funciones periódicas monódromas; porque toda función simétrica de los m valores de la función, es una función monódroma.

Se puede pues caracterizar el orden ó grado de una función simplemente periódica por el número de infinitos que admite en cada banda. Si es monódroma y admite n infinitos, se expresará por una función racional en $e^{\frac{2\pi z i}{\omega}}$ del grado n.

§ 8.º Nociones de las funciones doblemente periódicas

130. Origen. Sea la función definida por la ecuación diferencial

$$\frac{du}{dz} = \sqrt{G(u-a)(u-b)(u-c)}$$

con el valor inicial $u = 0$ para $z = 0$, y propongámonos estudiar la función inversa

$$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{G(u-a)(u-b)(u-c)}}.$$

131. Los períodos. Señalemos en el plano que sirve para representar la variación de u los tres puntos a, b, c. Designemos por (A), (B), (C) los tres contornos elementales correspondientes, y llamemos A, B, C á los valores de la integral definida relativa á estos contornos. Todos los caminos que van desde el origen á un punto cualquiera del plano M, pueden reducirse al camino rectilíneo OM, ó á este camino rectilíneo precedido de uno de los contornos elementales ó de una combinación de estos contornos. Llamemos z á la integral rectilínea OM. Todos los caminos que se reducen al camino rectilíneo, sin pasar por uno de los puntos a, b, c, dan el mismo valor z.

Supongamos que la variable u describa desde luego el contorno elemental (A); por cambiar el radical de signo, volverá al origen con el valor $-U_0$, de manera que, si u recorre enseguida el camino rectilíneo OM, la integral tomará el valor $-z$, en resumen $A-z$. Supongamos ahora que la variable, después de haber descrito el contorno (A) describa otro contorno elemental (B). Por un segundo cambio de signo, el radical volverá al origen con su valor inicial U_0, y la integral tendrá entonces el valor $A-B$. Si se marcha enseguida, siguiendo un camino cualquiera, se ve que la integral quedará aumentada en la cantidad constante $A-B$; de manera que si se sigue después el camino rectilíneo OM, se tendrá $A-B+z$.

Pudiendo la variable u describir el doble contorno $(A) + (B)$ tantas veces como se quiera, la integral quedará aumentada en un múltiplo cualquiera de la cantidad constante $\omega = A - B$, que constituye así un período. Se tendrán además otros dos períodos $\omega' = A - C$, $\omega'' = B - C$; pero como $\omega'' = \omega' - \omega$, este tercero entra en los dos primeros. Si se recorriese dos veces sucesivamente el mismo contorno (A), se volvería al valor inicial U_0 del radical, pero el valor de la integral $A - A$ sería nulo; por consiguiente solo existen los dos períodos obtenidos.

Resulta pues, que á cada valor de u corresponden dos series de valores de z, representados por las fórmulas

$$z + m\omega + m'\omega', \qquad A - z + m\omega + m'\omega',$$

en las cuales m y m' expresan números enteros cualesquiera positivos ó negativos. Los valores $B - z$, $C - z$, que se obtendrían recorriendo al principio uno de los contornos (B) ó (C), y después el camino rectilíneo OM, entran en la segunda serie; porque

$$B = A + B - A = A - \omega, \qquad C = A + C - A = A - \omega'.$$

Recíprocamente, u es una función monódroma de z, doblemente periódica; y cuando la variable z aumenta ó disminuye en una de las cantidades ω y ω', la función vuelve á adquirir su primitivo valor.

En el plano que sirve para representar las variaciones de z, tomaremos á continuación unas de otras, las longitudes oo_1, o_1o_2, o_2o_3, ... iguales al primer período ω y las longitudes oo', $o'o''$, $o''o'''$, ... iguales al segundo período ω'; y si trazamos por los puntos o, o', o'', ... paralelas á oo_1 y por o, o_1, o_2, ... paralelas á oo', quedará dividido el plano en paralelógramos iguales, en los cuales la función u adquirirá periódicamente el mismo valor.

En cada paralelógramo, la función u pasa dos veces por todos los estados de magnitud, y la suma de los dos valores de z, que corresponden al mismo valor de u, es constante é igual á A, despreciando los múltiplos de los períodos. La función, en cada paralelógramo admite dos ceros simples $z = o$, $z = A$ y un infinito doble $z = \frac{A}{2}$.

132. PROPIEDADES GENERALES. Para que existan dos períodos, es necesario que la relación $\frac{\omega'}{\omega}$ sea imaginaria, porque de otro modo, teniendo las dos cantidades geométricas la misma dirección, los paralelógramos se reducirían á rectas, lo que es fácil ver directamente, pues, siendo $\omega = n\omega''$ y $\omega' = n'\omega''$, donde n y n' son primos entre sí, tendremos

$$p\omega + q\omega' = (pn + qn')\,\omega'';$$

las combinaciones de los dos períodos son múltiplos de ω'', y recíprocamente por poderse elegir p y q de modo que $pn + qn'$ sea igual á un entero dado, estas combinaciones darán todos los múltiplos de ω''. Así, los dos períodos ω y ω' se reducen al período ω'', y la función es simplemente periódica.

Se pueden elegir de infinidad de maneras los períodos de una función doblemente periódica. Para fijar las ideas, supongamos que la función sea monódroma y monógena. Sea o un punto cualquiera del plano para el que la función tiene el valor u_0 y la derivada el valor u'_0. A este punto corresponde una infinidad de otros puntos para los que la función y su derivada vuelven á adquirir los mismos valores u_0 y u'_0. Unamos dos cualesquiera de estos puntos o y o_1. Si en la recta oo_1 y en el intervalo que comprende no existe ningún otro punto, se podrá tomar la magnitud geométrica oo_1 como un primer período ω; porque al tener la función y su derivada el mismo valor en o y o_1, si se mueve la variable z, á partir de estos puntos, según rectas iguales y paralelas, la función y su derivada tendrán los mismos valores en los puntos correspondientes. Resulta pues, que en la recta indefinida determinada por o y o_1, existe una infinidad de puntos correspondientes o, o_1, o_2, ... separados por el mismo intervalo ω. Si ahora hacemos moverse la recta paralelamente á su posición primitiva, hasta encontrar á otro punto o', en esta nueva posición contendrá una nueva fila de puntos correspondientes, separados por el mismo intervalo ω. Si se unen dos puntos o y o', la magnitud oo' podrá servir de segundo período, etc. La función y su derivada tienen los mismos valores en los puntos homólogos de los paralelógramos formados. Uno cualquiera de éstos se llama *paralelógramo elemental.*

Sean ω y ω' ciertos períodos que forman un paralelógramo elemental. Siendo otros dos períodos ω_1 ω'_1 magnitudes geométricas que van del punto o á dos puntos homólogos, se tendrá

$$\omega_1 = p\omega + q\omega', \qquad \omega'_1 = p'\omega + q'\omega'.$$

Para que estos dos períodos puedan reemplazar á los otros dos y formar un nuevo paralelógramo elemental, es necesario desde luego que p y q sean primos entre sí, como p' y q', y además que, recíprocamente ω y ω' combinaciones de ω_1 y ω'_1, lo que exige que los números enteros p, q, p', q' verifiquen la la relación $pq' - qp' = \pm 1$.

Esta condición expresa que los dos paralelógramos son equivalentes. En efecto, sean

$$\omega = a + bi, \qquad \omega' = a' + b'i';$$

el área del primer paralelógramo es $\pm(ab' - ba')$, y la del segundo

$$\pm [(pa + qa')(p'b + q'b') - (pb + qb')(p'a + q'a')] = \\ \pm (pq' - qp')(ab' - ba').$$

Si la condición $pq' - qp' = \pm 1$ no se hubiese verificado, el nuevo paralelógramo sería demasiado grande, y se compondría de varios elementales.

Sea el paralelógramo $oo_1o'_1o'$. Conservando el primer período ω y tomando por segundo la recta que une o con un punto cualquiera o'_1 de la segunda fila, se obtiene un nuevo paralelógramo elemental $oo_1o'_2o'_1$ equivalente al primero; los nuevos períodos son ω y $\omega' + p\omega$, lo que añade á uno de los períodos un múltiplo del otro.

Se vería que se puede pasar, por una serie de transformaciones, de los períodos ω y ω' á los períodos equivalentes ω_1 y ω'_1.

133. PROPIEDADES.—TEOREMA I. *El residuo integral de toda función doblemente periódica, monódroma y monógena, relativo al área de un paralelógramo elemental, es nulo.*

Sea el paralelógramo formado por los dos períodos AB y AC. Consideremos el residuo integral de $f(z)$ relativo al paralelógramo ABCD y la integral definida tomada á lo largo de un contorno en el sentido ABDC. Siendo la función $f(z)$ la misma á lo largo de los lados opuestos AB y CD; pero como los lados opuestos están recorridos en sentido contrario, la integral definida es nula, y por consiguiente el residuo integral es nulo (*).

TEOREMA II. *Toda función doblemente periódica, monódroma y monógena admite por lo menos dos infinitos en cada paralelógramo elemental.*

En efecto, siendo periódica la función, admite un primer infinito en cada paralelógramo. Si solo tuviese un infinito simple $z=\alpha$ en un paralelógramo, se escribiría así:

$$f(z)=\frac{A}{z-\alpha}+\varphi(z),$$

no haciéndose infinita la función $\varphi(z)$ en dicho paralelógramo; y siendo el residuo integral en éste igual á A, no sería nulo; luego hay por lo menos un segundo infinito.

Si la función doblemente periódica admite dos infinitos simples, $z=\alpha$, $z=\beta$ en un paralelógramo, se podrá escribir bajo la forma

$$f(z)=\frac{A}{z-\alpha}+\frac{B}{z-\beta}+\varphi(z),$$

no haciéndose $\varphi(z)$ infinita en este paralelógramo; para que el residuo sea nulo, será preciso que $B=-A$. Si la función admite un infinito doble, se tendrá

$$f(z)=\frac{A}{(z-\alpha)^2}+\varphi(z).$$

(*) Este teorema es debido á Hermite

TEOREMA III. *Cada paralelógramo de los períodos contiene tantos ceros como infinitos.*

Sea la función $\frac{f'(z)}{f(z)}$. Esta función doblemente periódica, no admite como la propuesta $f(z)$ más que infinitos simples, á saber, los ceros y los infinitos de la función $f(z)$, pues si a es un cero de grado p de $f(z)$ se tendrá

$$f(z) = (z - a)^p \varphi(z),$$

no haciéndose $\varphi(z)$ ni nula ni infinita para $z = a$; luego

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{p}{z-a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Así, la cantidad a es un infinito simple de la función $\frac{f'(z)}{f(z)}$, y el residuo de esta función, relativo á a es igual á p.

De igual manera, si α es un infinito de grado q de $f(z)$, se tendrá

$$f(z) = (z - \alpha)^{-q} \varphi(z),$$

no siendo $\varphi(z)$ ni nula ni infinita para $z = \alpha$; y tendremos que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{q}{z-\alpha} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)};$$

de manera que la cantidad α es un infinito simple de la función $\frac{f'(z)}{f(z)}$ y el residuo correspondiente es igual á $-q$.

En fin, puesto que $\frac{f'(z)}{f(z)}$ es doblemente periódica, el residuo integral de esta función, relativo al área del paralelógramo es nulo, luego se tiene

$$\Sigma p - \Sigma q = 0 \quad \text{ó} \quad \Sigma p = \Sigma q.$$

COROLARIO. Sea n el número de los infinitos de la función $f(z)$ en cada paralelógramo, el número de los ceros será también n. La función $f(z) - u$ que tiene n infinitos, tiene también

n ceros, lo que manifiesta que $f(z)$ pasa n veces por un valor cualquiera u.

Resulta pues, que puede caracterizar el orden de una función doblemente periódica el número de sus infinitos en cada paralelógramo, porque este número indica cuántas veces pasa la función por cada valor.

§ 9.° Nociones de las integrales y funciones elípticas

134. Definición. Se llaman *integrales elípticas* á los tipos más sencillos á que pueden reducirse las expresiones de la forma

$$V = \int F(x, y)\, dx, \tag{1}$$

en la que F es una función racional de x é y y ésta un radical de la forma

$$y = \sqrt{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4} = R,$$

pudiendo también ser la cantidad subradical de tercer grado.

Hasta Fagnano, y Legendre solo se habían estudiado las transcendentes más simples, consideradas como integrales de ciertas diferenciales algebráicas; pero Legendre estudió las nuevas transcendentes

$$E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}\, d\varphi$$

y

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \tag{2}$$

á las que llamó *integrales elípticas*, porque la primera permite valuar los arcos de elipse, cuya excentricidad es k, y la segunda por su analogía de expresión con la primera, especialmente de sus diferenciales, dependientes del parámetro φ, *amplitud*, y del parámetro k, *módulo*, no debiendo su existencia dichas integrales á ningún hecho algebráico ó geométrico elemental, sino á su propiedad de integrales.

Además calificó las integrales de *completas* y las representó por $F^1(k)$, $E^1(k)$ cuando la amplitud φ tiene el valor $\frac{\pi}{2}$, para la que el radical $\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}$ toma tan solo una vez, bajo el signo $\int$, todos los valores comprendidos entre 1 y $\sqrt{1 - k^2}$, por los cuales volvería á pasar, pero en orden inverso, cuando φ pasara desde $\frac{\pi}{2}$ hasta π, después en el directo desde $\varphi = \pi$ hasta $\varphi = \frac{3\pi}{2}, \dots$ De manera que las funciones E y F crecen en $2E^1$ y $2F^1$ cada vez que la variable φ aumenta en π, y además toman valores equidistantes á una y otra parte de E_1 y de F_1 para valores de φ equidistantes á una y otra parte de $\frac{\pi}{2}$; y por consiguiente no hay más que calcularlas directamente en el intervalo comprendido entre $\varphi = 0$ y $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Para calcularlas basta desarrollar en series convergentes según las fórmulas

$$\sqrt{1-u} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{u^2}{3} + \dots - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\dots\frac{2n-1}{2n}\,\frac{u^n}{2n-1} - \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-u}} = 1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\frac{3}{4}u^2 + \dots + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\dots\frac{2n-1}{2n}u^n + \dots$$

las dos funciones bajo el signo $\int$, $(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\pm\frac{1}{2}}$, lo que es posible, por ser k y $\operatorname{sen}\varphi$ menores que la unidad; y si multiplicamos por $d\varphi$, indicando además la integración de cada término, tendremos

$$\left.\begin{aligned} E(k, \varphi) &= \varphi - \frac{1}{2}\frac{k^2}{1}\int_0^\varphi \operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{k^4}{3}\int_0^\varphi \operatorname{sen}^4\varphi\, d\varphi - \dots \\ F(k, \varphi) &= \varphi + \frac{1}{2}k^2\int_0^\varphi \operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi + \frac{1}{2}\frac{3}{3}k^4\int_0^\varphi \operatorname{sen}^4\varphi\, d\varphi + \dots \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Pero en el cálculo integral se ve, empleando la integración por partes, que las integrales de la forma $\int_0^\varphi \operatorname{sen}^{2n}\varphi\, d\varphi$ se desdoblan en términos, funciones enteras de sen φ y cos φ y en otras integrales análogas, que se reducen finalmente á la integral $\int_0^\varphi \operatorname{sen}^0 \varphi d\varphi = \varphi$, y por consiguiente los segundos miembros de (3) llegarán á quedar libres del signo $\int$ y desarrollados en series convergentes, cuyos términos serán simplemente trigonométricos ó algebráicos, y se obtendrá:

$$E^1(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 - \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}k\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}k^2\right)^2 - \ldots\ldots\right]$$

$$F^1(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}k\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}k^2\right)^2 + \ldots\ldots\right]$$

La integral $F^1(k)$ menos complicada es la llamada por Legendre de primera especie y la $E^1(k)$ es la *integral elíptica de segunda especie*, según ya se vió (pág. 39).

Para calcular estas integrales y formar una tabla de sus valores, Legendre empleó el *módulo complementario* $k^1 = \sqrt{1 - k^2}$, que le condujo á una serie muy convervente según las potencias de $k'^2 \operatorname{tg}^2 \varphi$ (*).

Para dar una idea de los procedimientos que se han empleado en el cálculo de las integrales elípticas, se puede recordar la transformación de Landen, cuya aplicación repetida indefinidamente á la integral de primera especie $F(k, \varphi)$, hace tender al módulo hacia cero, lo que condujo á Gauss á una importante expresión de la integral completa $F^1(k)$.

Si dividimos por a la función $F(k, \varphi)$ que se reduce á

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + (1 - k^2)\operatorname{sen}^2\varphi}},$$

de manera que se escriba el cociente $\dfrac{F(k, \varphi)}{a}$ bajo la forma

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\operatorname{sen}^2\varphi}}, \tag{4}$$

(*) Véase Boussinesq *Cours d'Analyse infinitesimal, Cal. integ. part élém.*, pág. 85.

en la que la b representa la cantidad positiva $a\sqrt{1-k^2} < a$; se trata de sustituirla por una integral de la forma

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{a^2_1 \cos^2 \varphi_1 + b^2_1 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}},$$

cuya amplitud φ_1 se halle comprendida entre o y $\frac{\pi}{2}$, si la propuesta φ está ya comprendida en el mismo intervalo, expresando a_1 y b_1 respectivamente las dos medias de los dos números dados a y b, la una aritmética $a_1 = \frac{1}{2}(a+b)$ y la otra $b_1 = \sqrt{ab}$ geométrica. Como se tiene idénticamente

$$a^2_1 - b^2_1 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

y por consiguiente

$$\frac{a^2_1 - b^2_1}{a^2 - b^2} = \frac{1}{4}\frac{a-b}{a+b} < \frac{1}{4}, \tag{5}$$

la diferencia $a^2_1 - b^2_1$ será á lo más un cuarto de la diferencia análoga en la integral propuesta. Luego, repitiendo la transformación un número suficiente n de veces, se llegará á una integral de la misma forma, pero en la que, bajo el radical de la diferencial por integrar, el coeficiente del cuadrado del coseno de la variable no exceda al del cuadrado del seno de una cantidad inferior á $\frac{a^2 - b^2}{4^n}$ tan pequeña como se quiera, sin que estos coeficientes, evidentemente comprendidos entre a^2 y b^2, tiendan á anularse, de modo que el cuadrado del módulo, relación de la diferencia de los dos coeficientes al mayor de ellos, se aproxime indefinidamente á cero.

Dicha relación, que se ha de establecer entre φ y φ_1 es

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{a} = \frac{\operatorname{sen}\varphi_1}{a_1 + \sqrt{a^2_1 - b^2_1 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}}, \tag{6}$$

la que da una relación $\frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi_1}$ igual á la cantidad esencialmente positiva

$$\frac{a}{a_1 + \sqrt{a^2{}_1 - b^2{}_1 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}} \text{ decreciente de } \frac{a}{a_1} \text{ á } \frac{a}{a_1 + \sqrt{a^2{}_1 - b^2{}_1}} = 1$$

cuando φ_1 crece de o á $\frac{\pi}{2}$; lo que hace variar gradualmente á φ de o á $\frac{\pi}{2}$ al mismo tiempo que φ_1, permaneciendo φ_1 inferior en el intervalo. De (6), donde a puede sustituirse por $a_1 + \sqrt{a^2{}_1 - b^2{}_1}$, se deduce para $\cos \varphi = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \varphi}$, la expresión

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{a^2{}_1 \cos^2 \varphi_1 + b^2{}_1 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}}{a_1 + \sqrt{a^2{}_1 - b^2{}_1 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}} \cos \varphi_1. \tag{7}$$

Diferenciando (6) resulta

$$\frac{\cos \varphi \, d\varphi}{a} = \frac{a_1 - \sqrt{a^2{}_1 - b^2{}_1 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}}{[a_1 + \sqrt{a^2{}_1 - b^2{}_1 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}]^2} \cos \varphi_1 \, d\varphi_1;$$

ó, después de sustituir por $\cos \varphi$ su valor (7),

$$d\varphi = a \frac{a_1 - \sqrt{a^2{}_1 - b^2{}_1 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}}{a_1 + \sqrt{a^2{}_1 - b^2{}_1 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{a^2{}_1 \cos^2 \varphi_1 + b^2{}_1 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}}; \tag{8}$$

y si en el radical propuesto se sustituye $\frac{\operatorname{sen} \varphi}{a}$ por su valor, después de haberlo transformado en

$$a \sqrt{\cos^2 \varphi + \left(\frac{a_1 - \sqrt{a^2{}_1 - b^2{}_1}}{a} \operatorname{sen} \varphi\right)^2},$$

se obtiene

$$\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} = a \frac{a_1 - \sqrt{a^2{}_1 - b^2{}_1 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}}{a_1 + \sqrt{a^2{}_1 - b^2{}_1 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}}. \tag{9}$$

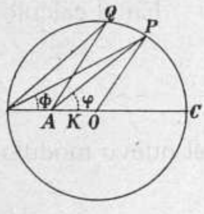
Dividiendo (8) por (9), é indicando la integración desde o á φ,

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{a^2_1 \cos^2 \varphi_1 + b^2_1 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}}. \quad (10)$$

Así como el primer miembro expresa $\frac{F(k, \varphi)}{a}$ cuando se hace $k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, el segundo miembro será $\frac{F(k_1, \varphi_1)}{a_1}$ cuando por k_1 se sustituya la expresión análoga ó sea $\frac{a-b}{a+b}$. Luego, haciendo $a = 1$ y, por consiguiente, $a_1 = \frac{1+k'}{2}$, la fórmula (9) se reducirá á otra cuyo módulo es menor

$$F(k, \varphi) = \frac{2}{1+k'} F\left(\frac{1-k}{1+k}, \varphi_1\right). \quad (11)$$

135. Interpretación geométrica. Jacobi dió una interpretación geométrica de la transformación de Landen. Sea una circunferencia de radio 1 y un punto A situado en el diámetro BC á una distancia AO$=k$ del centro y P un punto cualquiera de la circunferencia. Unamos P con A, B y O; y designemos con φ y ψ los ángulos PAO y PBO. Tendremos que POC $= 2\psi$ y APO$=2\psi-\varphi$. Esto sentado, se obtiene que



$$AP^2 = 1 + k^2 + 2k \cos 2\psi = (1+k)^2 - 4k \operatorname{sen}^2 \psi$$

$$\operatorname{sen}(2\psi - \varphi) = k \operatorname{sen} \varphi, \qquad \cos(2\psi - \varphi) = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}.$$

Sea Q un punto de la circunferencia infinitamente próximo de P; unamos Q con P, A y B. Podremos hacer PAQ $= d\varphi$, PBQ $= d\psi$; y resultará que

$$\frac{\operatorname{sen} d\varphi}{PQ} = \frac{\operatorname{sen} APQ}{AQ}.$$

Pero se tiene aproximadamente que

$$\operatorname{sen} d\varphi = d\varphi, \quad PQ = \operatorname{arc} PQ = 2d\psi,$$

$$\operatorname{sen} APQ = \cos APO = \cos(2\psi - \varphi) = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}$$

$$AQ = AP = \sqrt{(1+k)^2 - 4k \operatorname{sen}^2 \psi};$$

luego
$$\frac{d\varphi}{2d\psi} = \frac{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}{\sqrt{(1+k)^2 - 4k \operatorname{sen}^2 \psi}},$$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \frac{2}{1+k} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2_1 \operatorname{sen}^2 \psi}} \qquad \left(k_1 = \frac{2k}{1+k}\right).$$

Integrando desde $\varphi = 0$ hasta $\varphi = \Phi$ resulta

$$\int_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \frac{2}{1+k} \int_0^{\Psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2_1 \operatorname{sen}^2 \psi}},$$

hallándose determinado el límite superior de la nueva integral por la ecuación

$$\operatorname{sen}(2\Psi - \Phi) = k \operatorname{sen} \Phi.$$

En el cálculo de la integral análoga

$$\int_0^{\Psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2_1 \operatorname{sen}^2 \psi}} \tag{12}$$

el nuevo módulo k_1 es todavía menor que 1, porque se tiene

$$1 - k_1 = \frac{1 + k - 2\sqrt{k}}{1+k} = \frac{(1-\sqrt{k})^2}{1+k} > 0;$$

pero es menor que $\sqrt{k}$, porque se tiene que $\dfrac{2}{1+k} > 1$.

Una transformación análoga reducirá el cálculo de la integral (12) al de otra cuyo módulo k_2 será $> \sqrt{k_1}$, y así sucesivamente hasta que se llegue á una integral cuyo módulo esté bastante próximo de 1.

136. Transformación de Gauss. Consideremos el caso de la integral completa en el que los dos límites superiores φ y

φ_1, al tener el valor $\frac{\pi}{2}$, se hacen iguales como los inferiores. Entonces la transformación (10) aplicada al segundo miembro, cuyos dos parámetros a_1 y b_1 están comprendidos entre a y b, dará una nueva integral análoga, con límites siempre entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, pero cuyos parámetros sean las medias aritmética y geométrica de a_1 y b_1, que llamaremos a_2 y b_2. Continuando así, formaremos una serie de medias aritméticas a_3, a_4, ..., a_n cada vez más pequeñas y una serie de medias geométricas b_3, b_4, ..., b_n cada vez más grandes, cuyo intervalo mútuo tenderá hacia cero, según la desigualdad (5). Es decir, que existe cierto límite común M de las medias aritmeticas y geométricas formadas sucesivamente, á partir de los dos números dados a y b, que se llama *media aritmético-geométrica* de estos números. La integral propuesta (4), sin cambiar de valor, adquirirá una infinidad de formas, y variará finalmente hacia cuando, bajo el radical, los dos coeficientes de $\cos^2\varphi$ y $\operatorname{sen}^2\varphi$ tengan el valor común M^2. Pero *bajo esta forma límite* es inmediatamente integrable, puesto que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{M^2\cos^2\varphi + M^2\operatorname{sen}^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{M} = \frac{\pi}{2M}.$$

Siendo pues su valor $\frac{\pi}{2M}$, resulta que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\operatorname{sen}^2\varphi}} = \frac{\pi}{2M},$$

ó bien, sustituyendo el primer miembro por

$$\frac{F^1(k)}{a} = \frac{1}{a} F^1\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right),$$

y resolviendo con relación á M, tendremos que

$$\text{med. arit. geom. de } a \text{ y } b = \frac{\pi a}{2F^1\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right)}.$$

Propiedades. Entre las propiedades de las funciones elípticas citaremos primeramente las relativas á la adición y sustracción, que son análogas á las de las funciones circulares. Así tenemos, adoptando la notación de Gudermann (véase p. 393),

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \tag{1}$$

$$\operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \tag{2}$$

$$\operatorname{dn}(u+v) = \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \tag{3}$$

y análogas para las diferencias.

Además

$$\operatorname{sn}(u+v) + \operatorname{sn}(u-v) = \frac{2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \tag{4}$$

y sus correspondientes para los demás casos.

Nos fijaremos en las analogías que ofrece la doble periodicidad respecto á las funciones circulares é hiperbólicas, pues del mismo modo que las circulares tienen un período real al que hay que agregar un período imaginario, como las hiperbólicas.

La doble periodicidad de las funciones elípticas se deduce fácilmente de las fórmulas que dan las funciones elípticas de la suma ó diferencia de dos argumentos, haciendo $v = \mathrm{F}$, por ejemplo en (1) y teniendo presente que $\operatorname{sn} \mathrm{F} = 1$, $\operatorname{cn} \mathrm{F} = 0$, $\operatorname{dn} \mathrm{F} = k'$, se obtendrá

$$\operatorname{sn}(u \pm \mathrm{F}) = \pm \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}$$

y además $\quad \operatorname{cn}(u \pm \mathrm{F}) = \mp k' \dfrac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \quad \operatorname{dn}(u \pm \mathrm{F}) = \dfrac{k'}{\operatorname{dn} u}.$

Pero llegaremos á las propiedades fundamentales, empleando otras consideraciones. Así, vemos que la ecuación

$$u = \int_0^z \frac{\mathrm{G}\, dz}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}}$$

permite considerar, á voluntad, u como función de z ó z como función de u. Si se considera z como función de u, observaremos que á cada valor de u corresponde un valor y solo uno de z, lo que resulta de la teoría de las ecuaciones diferenciales (pág. 345); z se halla definida por la condición de anularse para $u = 0$ y de satisfacer á la ecuación

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{G}\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}.$$

La función no puede cesar de ser monódroma más que alrededor de los puntos $z = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \infty$.

Supongamos que z esté muy próxima de α. Si se hace $z = \alpha + \zeta^2$, tendremos

$$2\frac{d\zeta}{du} = \frac{1}{G}\sqrt{(\zeta^2+\alpha-\beta)(\zeta^2+\alpha-\gamma)(\zeta^2+\alpha-\delta)}.$$

Cuando $z = \alpha$, se tiene $\zeta = 0$. Cuando u varía de manera que z permanezca en la proximidad de α, ζ permanece monódroma, y lo mismo sucede á la función z. Si z es muy grande, hagamos $z = \frac{1}{\zeta}$, la ecuación diferencial que define á z se reduce á

$$\frac{d\zeta}{du} = -\frac{1}{G}\sqrt{(\alpha\zeta-1)(\beta\zeta-1)(\gamma\zeta-1)(\delta\zeta-1)}.$$

Cuando z es muy grande, ζ se halla muy próxima de cero; luego ζ es una función monódroma de u; lo mismo sucede á z cuando esta variable es muy grande.

A cada valor de z corresponde una infinidad de valores de u, á saber,

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + u \quad \text{y} \quad m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + A - u,$$

expresando m_1 y m_2 números enteros arbitrarios.

Si se hace $z = f(u)$, se tendrá:

1.° *En cada paralelógramo de los períodos, la función* $z = f(\omega)$

no pasa más que dos veces por el mismo valor, porque, despreciando los múltiplos de los períodos, se tiene para un mismo valor de z *dos, y solamente dos valores de* u, *á saber,* u *y* A — u.

2.º *La función* f(ω) *es siempre monódroma y monógena.*

3.º Puesto que, para cada paralelógramo pasa dos veces por el mismo valor, *tiene en cada paralelógramo dos ceros, á saber,* o *y* A.

4.º *Tiene también en cada paralelógramo dos infinitos,* uno de ellos es el valor de la integral

$$\int_0^\infty \frac{G\,dz}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}} = a$$

y el otro A — *a*.

5.º *Se puede verificar que la función* f(u) *pasa por todos los valores dos veces, en cada paralelógramo de los períodos.*

En efecto, si se considera la ecuación

$$f(u) - a = 0,$$

se obtendrá el número de las raíces disminuído en el número de los infinitos, calculando la integral

$$V = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f'(u)\,du}{f(u) - a},$$

tomada á lo largo del paralelógramo de los períodos; pero esta integral es nula; porque, siendo $\frac{f(u)}{f'(u) - a}$ como $f(u)$, doblemente periódica, toma valores iguales á lo largo de los lados opuestos del paralelógramo de los períodos, y hallándose cada dos lados opuestos recorridos en sentido contrario, dan elementos que se destruyen; luego V = o; luego el número de las raíces de $f(u) - a = 0$ es igual al número de los infinitos de $f(u)$, es decir, igual á dos. De las tres integrales elípticas la más importante es la de primera especie

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}}.$$

Al considerarse φ como función de u, se llama la *amplitud*, y se representa por el símbolo *am*; así

$$\varphi = am\, u.$$

Luego
$$x = \text{sen}\, \varphi = \text{sen}\, am\, u,$$
$$\sqrt{1 - x^2} = \cos \varphi = \cos am\, u.$$

De manera que x y $\sqrt{1 - x^2}$ son dos funciones de u que se denominan *seno de la amplitud* y *coseno de la amplitud.*

Análogamente $\sqrt{1 - k^2 x^2}$ se considera como una tercera función de u que se llama la *delta de la amplitud* y se representa por

$$\sqrt{1 - k^2 x^2} = \Delta\, am\, u.$$

Dichas tres funciones x, y, z de u que hemos considerado según las denominaciones de Jacobi, se representan más sencillamente por las denominaciones debidas á Gudermann

$$x = \text{sn}\, u, \quad y = \text{cn}\, u, \quad z = \text{dn}\, u.$$

La variable u, considerada como función inversa, se llama *argumento*, de modo que

$$u = \arg am\, \varphi = \arg \text{sn}\, x = \arg \text{cn}\, y = \arg \text{dn}\, z.$$

La constante k se llama módulo y $\sqrt{1 - x^2}$ *módulo complementario.*

137. Función sn u. La función $\text{sn}\, u = z$ se define por la ecuación

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)},$$

con la condición $z = 0$ para $u = 0$, ó por la fórmula

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}.$$

Si se hace, según Jacobi,

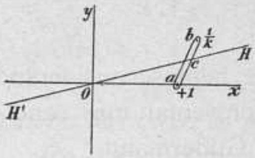
$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}},$$

$$K'\sqrt{-1} = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z)(1-k^2z^2)}},$$

ó haciendo en la última $k'^2 = 1 - k^2$ y $1 - k^2z^2 = k'^2t^2$,

$$K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}.$$

Las integrales tomadas á lo largo de los lazos relativos á los puntos críticos están dadas por el cuadro siguiente:



el punto	$+1$	da	$2K$
»	-1	»	$-2K$
»	$+\frac{1}{k}$	»	$2K + 2K'\sqrt{-1}$
»	$-\frac{1}{k}$	»	$-2K - 2K'\sqrt{-1}$

En cuanto á los puntos críticos $+1$ y -1 es evidente. Para calcular la integral relativa al lazo del punto $\frac{1}{k}$, se observará que el contorno cerrado, que se compone de los lazos sucesivos del punto $\frac{1}{k}$ y del punto 1, es equivalente al lazo doble *abc*. Así

$$2\int_0^{\frac{1}{k}} - 2\int_0^1 = 2\int_1^{\frac{1}{k}} \quad \text{de donde} \quad 2\int_0^{\frac{1}{k}} = 2K + 2K'\sqrt{-1}$$

luego:

1.º *La función* sn u *es monódroma y monógena.*

2.º *Tiene dos períodos distintos* $4K$ *y* $2K'\sqrt{-1}$.

3.º *Tiene dos ceros en cada paralelógramo de los períodos, á saber*, 0 *y* $2K$.

4.º *Tiene dos infinitos, uno de ellos* α *dado por la fórmula*

$$\alpha = \int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

de donde $$2\alpha = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Se puede suponer que la integración se efectúa á lo largo de la recta HH′ que pasa por O un poco inclinada respecto al eje Ox. Se puede sustituir esta recta por los dos lazos situados sobre ella y por una semicircunferencia de radio infinito, cuyo diámetro sea HH′, que da un valor nulo de la integral. Se tiene pues,

$$2\alpha = 2K + 2K'\sqrt{-1} + 2K = 4K + 2K'\sqrt{-1}$$

ó $$\alpha = 2K + K'\sqrt{-1}.$$

Los dos infinitos son entonces

$$2K + K'\sqrt{-1}$$

y $$2K - (2K + K'\sqrt{-1}) = -K'\sqrt{-1} \quad \text{ó} \quad K'\sqrt{-1}.$$

§ 8.° Imposibilidad de expresar las funciones abelianas por medio de los signos ordinarios del Álgebra

138. Definición. El caso general de una integral de diferencial algebráica es una integral de la forma

$$\int F(x, y)\, dx,$$

en la que F es una función racional de x é y, hallándose ligadas x é y por la ecuación

$$f(x, y) = 0,$$

cuyo primer miembro es un polinomio irreducible en x é y.

La integral considerada se llama una *integral abeliana*, es decir, que integrales *abelianas* son las integrales de las funciones algebráicas irracionales.

139. Imposibilidad de expresión algebráica. Liouville llama *transcendentes de primera especie* á las funciones algebráicas e^{u_1}, e^{u_2}, . . . , log u_1, log u_2, . . . u_1, u_2, . . . en las que las letras

$u_1, u_2, \ldots$ expresan funciones algebráicas. Se llaman *transcendentes de segunda especie* á las funciones algebráicas de $e^{v_1}, e^{v_2}, \ldots,$ $\log v_1$, $\log v_2, \ldots, v_1, \ldots$ en las que las letras $v_1, v_2, \ldots$ expresan transcendentes de primera.

Esto sentado, vamos á buscar la condición para que la integral abeliana $\int y dx$ en la que y es una función algebráica, sea expresable por medio de funciones algebráicas de funciones exponenciales y logarítmicas.

Supongamos desde luego $\int y dx$ expresable en función algebráica de funciones de primera especie y sea

$$\int y dx = f(x, e^{u_1}, e^{u_2}, \ldots, \log u_1, \log u_2, \ldots) \qquad (1)$$

Nada impide el suponer que entre $e^{u_1}, e^{u_2}, \ldots, \log u_1, \log u_2, \ldots$ no existe ninguna relación algebráica, sin lo que, si existiera se podría sustituir, por ejemplo, $\log u_1$ por su valor mediante otras transcendentes.

Vamos á demostrar que la función e^{u_1} no podrá figurar en el segundo miembro de (1).

En efecto, sustituyendo f por $\varphi(e^{u_1}, x)$, ó por $\varphi(\theta, x)$, haciendo $e^{u_1} = \theta$, tendremos

$$\int y dx = \varphi(\theta, u),$$

y diferenciando
$$y = \varphi_1(\theta, x)\frac{du_1}{dx} + \varphi_2(\theta, x), \qquad (2)$$

en la que expresamos por φ_1 y φ_2 las derivadas $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}$; pero esta fórmula (2) no podría tener lugar, porque establecería una relación algebráica entre las transcendentes que consideramos, lo que es contrario á la hipótesis, mientras que las transcendentes bajo los signos funcionales no desaparezcan idénticamenre. Si estas exponenciales desaparecen, se pueden sustituir θ por $\mu\theta$ ó por una cantidad cualquiera, sin alterar la igualdad (2), y se tiene entonces

$$y = \varphi_1(\theta, x)\,\theta\frac{du_1}{dx} + \varphi_2(\theta, x) = \varphi_1(\mu\theta, x)\,\mu\theta\frac{du_1}{dx} + \varphi_2(\mu\theta, x); \quad (3)$$

de donde resulta, integrando:

$$\varphi(\theta, x) = \varphi(\mu\theta, x) + \psi(\mu). \tag{4}$$

Siendo (3) una identidad, (4) también lo será, cualquiera que sea θ. Se puede pues suponer $\theta = 1$, y tendremos

$$\varphi(1, x) = \varphi(\mu, x) + \psi(\mu),$$

que determina á μ, y (4) se reduce á

$$\varphi(\theta, x) - \varphi(1, x) = \varphi(\mu\theta, x) - \varphi(\mu, x).$$

Si se diferencia sucesivamente con relación á θ y μ, se tendrá

$$\varphi_1(\theta, x) = \mu\varphi_1(\theta\mu, x), \qquad \theta\varphi_1(\mu\theta, x) = \varphi_1(\mu, x);$$

de las que resulta, eliminando $\varphi_1(\theta\mu, x)$,

$$\mu\varphi_1(\mu, x) = \theta\varphi_1(\theta, x) = \text{const.} = a.$$

Así $\varphi_1(\theta, x) = \dfrac{a}{\theta}$ é integrando, $\varphi(\theta, x) = a \log \theta + b$, en la que b expresa una nueva constante. Se tiene pues

$$\varphi(\theta, x) = a \log e^{u_1} + b = au_1 + b;$$

la función φ no contiene pues exponenciales; luego:

Una integral abeliana no puede contener exponenciales en su expresión, si es transcendente de primera especie.

Supongamos ahora que $\theta = \log u_1$ y hagamos,

$$\int y\,dx = \varphi(\theta, x) \tag{5}$$

$$\varphi_1(\theta, x) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad \varphi_2(\theta, x) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Diferenciando (1), se tiene

$$y = \varphi_1(\theta, x)\frac{u'_1}{u} + \varphi_2(\theta, x).$$

El segundo miembro debe ser independiente de θ. Se puede pues sustituir θ por $\theta + \mu$, y se tiene idénticamente

$$\varphi_1(\theta + \mu, x)\frac{u'_1}{u_1} + \varphi_2(\theta + \mu, x) = \varphi_1(\theta, x)\frac{u'_1}{u_1} + \varphi_2(\theta, x)$$

Integrando, se tiene

$$\varphi(\theta + \mu, x) = \varphi(\theta, x) + \psi(\mu),$$

en la que $\psi(\mu)$ expresa una constante con relación á x. Si se hace $\theta = 0$, resulta

$$\varphi(\mu, x) = \varphi(0, x) + \psi(\mu)$$

ó por sustracción

$$\varphi(\theta + \mu, x) - \varphi(\mu, x) = \varphi(\theta, x) - \varphi(0, x).$$

Si se diferencia sucesivamente con relación á μ y á θ, se tiene

$$\varphi_1(\theta + \mu, x) - \varphi_1(\mu, x) = 0, \quad \varphi_1(\theta + \mu, x) - \varphi_1(\theta, x) = 0;$$

luego $$\varphi_1(\mu, x) = \varphi_1(\theta, x) = \text{const.} = a \tag{6}$$

de donde $$\varphi(\theta, x) = a\theta + b,$$

expresando a y b constantes de integración, es decir, cantidades independientes de θ, pero que pueden depender de x.

Se tiene pues

$$\varphi(\theta, x) = \int y\,dx = a \log u_1 + b, \tag{7}$$

pudiéndose demostrar que a es constante, pues en virtud de (6) se puede hacer

$$\varphi_1(\theta + \mu, x) = a,$$

expresando μ una constante, luego

$$\varphi(\theta + \mu, x) = a\theta + b_1.$$

Cambiando θ en $\theta - \mu$, se tendrá

$$\varphi(\theta, x) = \int y\,dy = a(\theta - \mu) + b_1;$$

pero los valores de $\int y\,dy$, dados por esta fórmula y por (7), solo pueden diferir por una constante; luego

$$a\theta + b - a(\theta - \mu) - b_1 = \text{const};$$

luego $a\mu - b - b_1$ debe ser constante, cualquiera que sea μ, y en particular, suponiendo μ constante

$$\mu \frac{da}{dx} + \frac{d(b - b_1)}{dx} = o,$$

cualquiera que sea μ; luego $\frac{da}{dx} = o$ y $\frac{d(b - b_1)}{dx} = o$; luego a es constante. Por consiguiente:

TEOREMA 1.º DE LIOUVILLE. *Si la integral* $\int y\,dx$ *es una transcendente de primera especie, se tiene necesariamente que*

$$\int y\,dx = u_0 + A_1 \log u_1 + A_2 \log u_2 + \ldots\ldots,$$

expresando $u_0, u_1, \ldots\ldots$ *funciones algebráicas, y* $A_1, A_2, \ldots\ldots$ *constantes.*

TEOREMA 2.º DE LIOUVILLE. *Si una integral abeliana es expresable por los signos del Álgebra ordinaria, adjuntando los signos logarítmicos ó trigonométricos, es necesariamente de la forma*

$$\int y\,dx = u_0 + A_1 \log u_1 + A_2 \log u_2 + \ldots\ldots,$$

expresando $u_0, u_1, \ldots\ldots$ *funciones algebráicas y* $A_1, A_2, \ldots\ldots$ *constantes.*

En efecto, si suponemos que la integral $\int y dx$ sea expresable por medio de una transcendente de segunda especie, se podrá escribir

$$\int y\,dx = \varphi(e^{u_1}, e^{u_2}, \ldots\ldots, \log u_1, \log u_2, \ldots\ldots),$$

expresando φ una función algebráica de funciones de primera especie y de $e^{u_1}, e^{u_2}, \ldots\ldots, \log u_1, \log u_2, \ldots\ldots, u_1, u_2, \ldots\ldots$, donde las u expresan, no ya funciones algebráicas, sino transcendentes de primera especie.

Se probará como anteriormente que $e^{u_1}, e^{u_2}, \ldots\ldots$ no pueden figurar en la expresión de $\int y dx$ y que $\log u_1, \log u_2, \ldots\ldots$ no entran en ella más que en forma lineal con coeficientes constantes, de manera que

$$H = \int y\,dx = u_0 + A_1 \log u_1 + A_2 \log u_2 + \ldots\ldots,$$

expresando $u_1, u_2, \ldots.$ transcendentes de primera especie. Pero Liouville halló que $u_0, u_1, \ldots.$ son simplemente algebráicas, lo que se demuestra haciendo

$$\int y\,dx = \varphi\,(e^v, x) = \varphi\,(\theta, x),$$

en la cual v expresa una de las funciones algebráicas que figuran en $u_1, u_2, \ldots.$ y empleando la misma demostración que anteriormente, que resulta, porque las derivadas φ son algebráicas con relación á $u_1, u_2, \ldots.$; y se demuestra que e^v no puede figurar en $u_1, u_2, \ldots.$; se ve también que haciendo

$$\int y\,dx = \varphi\,(\log v, x) = \varphi\,(\theta, x)$$

que θ no puede entrar en $\int y\,dx$.

El mismo razonamiento se aplicaría al caso en que $\int y\,dx$ fuese transcendente de tercera especie, y así sucesivamente.

Observación.—Abel demostró que $u_0, u_1, \ldots, u_n$ son funciones racionales de x é y. Para verlo, es suficiente expresar $u_0, u_1 \ldots,$ en función racional de una misma función algebráica λ. Esta funcion λ satisfará á una ecuación irreducible con coeficientes enteros en x, que se podrá alterar de modo que sus coeficientes contengan y. Podemos suponer esta ecuación $\Lambda = 0$ irreducible en λ. Y diferenciando la ecuación H tendremos una relación racional en x é y. Siendo $\Lambda = 0$ irreducible, dicha relación admite todas sus raíces. Haciendo λ igual á cada una en H, y sumando tendremos por fin

$$\mu \int y\,dx = \Sigma u_0 + A_1 \log H u_1 + A_2 \log H_2 + \ldots.$$

siendo Σu_0, $H u_1, \ldots$ funciones simétricas de las raíces de $\Lambda = 0$.

LIBRO TERCERO

CÁLCULO DE LAS VARIACIONES

CAPÍTULO I

Variación de una integral definida

§ 1.° Nociones preliminares

140. Objeto del cálculo de las variaciones. En las cuestiones ordinarias de máximo y de mínimo, se da la *forma* de una función de una ó de varias variables, y se buscan los valores particulares que es preciso atribuir á estas variables para que la función disminuya ó aumente cuando se modifican muy poco estas variables. En el *cálculo de las variaciones* se considera una integral definida

$$\int_{x_0}^{x} f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots.\right)$$

que contiene bajo el signo $\int$ una variable x, una función desconocida de la misma y algunas de sus derivadas; y es necesario hallar para y una función $F(x)$ tal, que esta integral tenga un valor mayor ó menor que el obtenido sustituyendo $F(x)$ por una función de una forma muy poco diferente. Así pues, no se trata de obtener una ó varias variables, sino la forma de cierta función desconocida, ó el valor de y en función de x.

Ejemplo: Dados dos puntos C *y* D, *hallar una curva plana* CMD *tal, que la superficie de revolución engendrada por el mo-*

vimiento de esta curva al girar alrededor de un eje Ox, *situado en su plano, sea un máximo ó un mínimo.*

Sea u el área. Haciendo $OA = x_0$ y $OB = x_1$, se tendrá

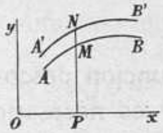
$$u = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \frac{ds}{dx} dx.$$

Hay que obtener pues, una función de x, $y = F(x)$ tal, que la integral precedente tenga un valor mayor ó menor que los que se obtendrían modificando infinitamente poco la forma de la función $F(x)$.

La marcha que debe seguirse para resolver estas nuevas cuestiones difiere poco de la seguida en las cuestiones ordinarias de máximo y de mínimo. Se supone conocida la función que se busca, se la hace variar infinitamente poco, y se expresa que el valor de la integral aumenta si esta integral debe ser un mínimo ó disminuye si debe ser un máximo.

Para llegar á este resultado, es necesario obtener los incrementos ó *variaciones* de y y de las cantidades que de ella dependen, cuando se cambia la función de x que expresa y.

141. Definiciones y notaciones. Sea $y = F(x)$ é $y = f(x)$ las ecuaciones de una curva CMD y de la C′ND′ obtenida haciendo variar muy poco la función $f(x)$. Si se llama δy el incremento de la ordenada PM, cuando se pasa á la segunda curva siendo x la misma, se tendrá



$$\delta y = NP - MP \quad ó \quad \delta y = F(x) - f(x).$$

Esta diferencia δy se llama *variación* de la ordenada ó de la función.

Se ve por lo tanto, que la diferencial es el incremento de la ordenada cuando se pasa del punto M á un punto infinitamente próximo *en la misma curva*, mientras que la variación es el incremento de esta ordenada, cuando se pasa del punto M á un punto infinitamente próximo *en una curva infinitamente poco diferente* de la curva dada.

Se reduce el cálculo de las variaciones á las diferenciales, considerando y como una función de x y de un parámetro arbitrario t. Sea $y = \varphi(x, t)$; y supongamos que $\varphi(x, t)$ se reduzca á $F(x)$ para cierto valor de t y que para un valor poco diferente $t + \delta t$, esta función se reduzca á $F(x)$. Llamando δy al incremento infinitamente pequeño de y, según que t reciba el incremento δt, permaneciendo x constante, ó que x reciba el incremento dx, permaneciendo t constante, se tendrá

$$\delta y = \frac{d\varphi}{dt}\delta t \quad \text{ó} \quad dy = \frac{d\varphi}{dx}dx.$$

Así pues, δy y dy son las diferenciales de una misma cantidad; pero δy ó dy corresponden tan solo al caso de variar t ó x sola.

Puede suceder que varíen x é y simultáneamente, cuando se pasa de la curva dada á la infinitamente próxima, representándose entonces los incrementos arbitrarios de dichas variables por δx y por δx. Se puede también, sin fijar ninguna relación entre dichos incrementos, considerar á x é y como funciones de una variable independiente u y de cierto parámetro t. Sea

$$x = \varphi(u, t), \quad y = \psi(u, t).$$

Supondremos que para un valor particular de t, $t = 0$ por ejemplo, y se reduzca á cierta función de x, $F(x)$, y que x se reduzca á una función cualquiera de u, fu. Tendremos

$$\varphi(u, 0) = f(u), \qquad \psi(u, 0) = F[f(u)].$$

Haciendo variar á t de una manera continua, á partir de 0, la forma de la función de x, representada por y, cambiará insensiblemente.

Para obtener las variaciones de x y de y, se multiplicarán por δt las derivadas de $\varphi(u, t)$ y de $\psi(u, t)$ con relación á t, y se tendrá

$$\delta x = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 \delta t, \qquad \delta y = \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0 \delta t;$$

y si, permaneciendo t constante, se hiciera variar á u, resultaría

$$dx = \frac{d\varphi}{du}\,du, \quad dy = \frac{d\psi}{du}\,du.$$

142. Variaciones. Cuando x é y adquieren incrementos δx y δy, toda función U dependiente de x, y y de una ó varias derivadas de y con relación á x, adquiere un incremento correspondiente Δu. Se llama *variación* de U á la parte de ΔU que depende tan solo de las primeras potencias de las variaciones δx y $\delta\,y$. Pero, según la fórmula de Taylor, se tiene

$$\Delta u = \frac{dU}{dx}\,\delta x + \frac{dU}{dy}\,\delta y$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2U}{dx^2}\,\delta x^2 + 2\,\frac{dy\,dx}{d^2U}\,\delta x\,\delta y + \frac{d^2U}{dy^2}\,\delta y^2\right] + \ldots\ldots$$

luego $$\delta U = \frac{dU}{dx}\,\delta x + \frac{dU}{dy}\,\delta y.$$

Si se considera á x é y como funciones de una variable independiente u y de un parámetro t, se tendrá

$$\delta U = \frac{dU}{dt}\,\delta t,$$

expresando $\frac{dU}{dt}$ la derivada con relación á t, de U considerada como función de $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots$ y estas últimas cantidades como funciones de t.

Se llama *variación segunda* de una función U á la variación de δU; se representa por δ^2U. *Variación tercera* de U es la variación δ^3U de δ^2U, y así sucesivamente.

§ 2.° Propiedades generales

143. Permutación de los signos d y δ. — Teorema. *La variación de la diferencial de una función de* X *es igual á la diferencial de la variación.*

En efecto, siendo y la ordenada del punto de la curva dada, la de un punto próximo de la misma curva es $y+dy$, y la correspondiente á la curva inmediata es $y+\delta y$; luego la ordenada del punto siguiente de esta misma curva será

$y+dy+\delta(y+dy)$ ó $y+\delta y+d(y+\delta y)$; luego $\delta dy = d\delta y$, ó se tiene que

$$\delta d\mathrm{U} = \frac{d\dfrac{d\mathrm{U}}{du}}{dt}\, du\,\delta t, \quad d\delta\mathrm{U} = \frac{d\dfrac{d\mathrm{U}}{dt}}{du}\,\delta t\, du;$$

luego $$\delta d\mathrm{U} = d\delta\mathrm{U}.$$

Además $\delta \,.\, d^2\mathrm{U} = d^2 \,.\, \delta\mathrm{U}$, porque

$$\delta d^2\mathrm{U} = \delta d \,.\, d\mathrm{U} = d \,.\, \delta d\mathrm{U} = d \,.\, d \,.\, \delta\mathrm{U};$$

y, en general $$\delta^m d^n\mathrm{U} = d^n\delta^m\mathrm{U}. \qquad (1)$$

144. PERMUTACIÓN DE δ CON $\int$. TEOREMA.—*Se puede invertir el orden de los signos δ é $\int$.*

En efecto, sea $$\mathrm{U} = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{V}\, dx;$$

sean u_0 y u_1 los valores de la variable independiente u que corresponden á los límites x_0 y x_1. Se tendrá

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{V}dx = \int_{u_0}^{u_1} \mathrm{V}\ \frac{dx}{du}\, du.$$

Supongamos que u_0 y u_1 son independientes de la variable t á la que se refieren las diferenciaciones expresadas por el signo δ. Se puede diferenciar bajo el signo $\int$; y tendremos

$$\delta\mathrm{U} = \int_{u_0}^{u_1} \delta\left(\mathrm{V}\,\frac{dx}{du}\right) du;$$

pero, no variando u con t, se tiene que

$$\delta\left(\mathrm{V}\,\frac{dx}{du}\right) = \frac{\delta(\mathrm{V}dx)}{du};$$

y si se integra con relación á x, resultará

$$\delta \mathrm{U} = \int_{x_0}^{x_1} \delta (\mathrm{V} dx) \quad \text{ó} \quad \delta \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{V} dx = \int_{x_0}^{x_1} \delta (\mathrm{V} dx). \qquad (2)$$

§ 3.º VARIACIÓN DE UNA INTEGRAL DEFINIDA

145. CASO EN QUE LA FUNCIÓN NO DEPENDE DE LOS LÍMITES. Vamos á obtener la variación de la integral definida

$$\mathrm{U} = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{V} dx,$$

siendo V una función cualquiera de x, de y y de cierto número de derivadas de y tomadas con relación á x. Para simplificar, supondremos que sean dos las derivadas. Sea

$$\mathrm{V} = f(x, y, p, q), \qquad p = \frac{dy}{dx}, \qquad q = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Según el teorema anterior, tendremos

$$\delta \mathrm{U} = \int_{x_0}^{x_1} \delta (\mathrm{V} dx). \qquad (1)$$

Pero $\delta . \mathrm{V} dx = \delta \mathrm{V} . dx + \mathrm{V} . \delta dx = \delta \mathrm{V} . dx + \mathrm{V} . d\delta x;$

y, en general, $\int \mathrm{V} d\delta x = \mathrm{V}\delta x - \int \delta x . d\mathrm{V};$

luego, si $(\mathrm{V}\delta x)_0$ y $(\mathrm{V}\delta x)_1$ expresan los valores $\mathrm{V}\delta x$ correspondientes á $x = x_0$ y á $x = x_1$, y se escribe por brevedad

$$(\mathrm{V}\delta x)_0^1 = (\mathrm{V}\delta x)_1 - (\mathrm{V}\delta x)_0,$$

se tendrá $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{V} d\delta x = (\mathrm{V}\delta x)_0^1 - \int_{x_0}^{x_1} \delta x d\mathrm{V} \qquad (2)$

y puesto que

$$\delta \mathrm{U} = \int_{x_0}^{x_1} \delta (\mathrm{V} dx) = \int_{x_0}^{x_1} (\delta \mathrm{V} dx + \mathrm{V} d\delta x),$$

será
$$\delta U = (V\delta u)_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} (\delta V dx - \delta x dV). \qquad (3)$$

Hagamos ahora

$$M = \frac{\partial V}{\partial x},\ N = \frac{\partial V}{\partial y},\ P = \frac{\partial V}{\partial p},\ Q = \frac{\partial V}{\partial q};$$

y tendremos

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq,\ \delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (3) y sustituyendo $\frac{dy}{dx}, \frac{dp}{dx}, \frac{dq}{dx}$ por p, q, r, será

$$\delta U = (V\delta x)_0^1$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} [N(\delta y - p\delta x) + P(\delta p - q\delta x) + Q(\delta q - r\delta x)]\, dx. \qquad (4)$$

La función V no entra ya bajo el signo de integración. Para simplificar esta expresión, hagamos $\omega = \delta y - p\delta x$, expresando ω la diferencia de las ordenadas que corresponden, en las dos curvas, á la abscisa $x + \delta x$, tendremos $d\omega = d\delta y - pd\delta x - dp\delta x$ ó $d\omega = \delta dy - pd\delta x - dp\delta x$.

Pero, en virtud de ser $dy = pdx$, resulta

$$\delta dy = p\delta dx + \delta pdx = pd\delta x + \delta pdx;$$

luego $d\omega = \delta pdx\ dp\delta x$ ó $\frac{d\omega}{dx} = \delta p - q\delta x$.

Se obtendrá de igual manera

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} = \delta q - r\delta x,$$

y la ecuación (4) se transforma en

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} V dx = (V\delta x)_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} \left(N\omega + P\frac{d\omega}{dx} + Q\frac{d^2\omega}{dx^2} \right) dx \qquad (5)$$

Podemos simplificar todavía el segundo miembro de esta ecuación, y hacer salir del signo $\int$ las derivadas de la función arbitraria ω. Así

$$\int \mathrm{P}\,\frac{d\omega}{dx}\,dx = \mathrm{P}\omega - \int \omega\,\frac{d\varphi}{dx}\,dx.$$

E integrando por partes, dos veces,

$$\int \mathrm{Q}\,\frac{d^2\omega}{dx^2}\,dx = \mathrm{Q}\,\frac{d\omega}{dx} - \omega\,\frac{d\mathrm{Q}}{dx} + \int \omega\,\frac{d^2\mathrm{Q}}{dx^2}\,dx.$$

Sustituyendo en la ecuación (5), resulta

$$\delta\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{V}dx = \left[\mathrm{V}\delta x + \left(\mathrm{P} - \frac{d\mathrm{Q}}{dx}\right)\omega + \mathrm{Q}\,\frac{d\omega}{dx}\right]_0^1$$
$$+ \int_{x_0}^{x_1}\left(\mathrm{N} - \frac{d\mathrm{P}}{dx} + \frac{d^2\mathrm{Q}}{dx^2}\right)\omega dx. \tag{6}$$

En esta fórmula se consideran á y, p, q ligadas á x por medio de la ecuación $y = f(x)$. Escribiendo por brevedad

$$\Gamma = \left[\mathrm{V}\delta x + \left(\mathrm{P} - \frac{d\mathrm{Q}}{dx}\right)\omega + \mathrm{Q}\,\frac{d\omega}{dx}\right]_0^1, \tag{7}$$

$$\mathrm{K} = \mathrm{N} - \frac{d\mathrm{P}}{dx} + \frac{d^2\mathrm{Q}}{dx^2}, \tag{8}$$

la fórmula (6) puede escribirse bajo la forma

$$\delta\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{V}dx = \Gamma + \int_{x_0}^{x_1}\mathrm{K}\omega\,dx,$$

ó

$$\delta\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{V}dx = \Gamma + \int_{x_0}^{x_1}(\mathrm{K}\delta y - \mathrm{K}p\delta x)\,dx, \tag{I}$$

puesto que $\omega = \delta y - p\delta x$.

Se puede escribir también Γ bajo otra forma, sustituyendo ω

y $\frac{d\omega}{dx}$ por sus valores arriba obtenidos, y será

$$\Gamma = \left\{ \left[V - \left(P - \frac{dQ}{dx} \right) p - Qq \right] \delta x + \left(P - \frac{dQ}{dx} \right) \delta y + Q \delta p \right\}_0^1,$$

Si V contiene dos funciones de x, siendo

$$V = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2} \right),$$

tendremos $\delta \int_{x_0}^{x_1} V dx = \Gamma' + \int_{x_0}^{x_1} (K\omega + K'\omega')\, dx,$

haciendo $\frac{dz}{dx} = p', \quad \frac{d^2z}{dx^2} = q',$

$$\frac{dV}{dz} = N', \quad \frac{dV}{dp'} = P', \quad \frac{dQ}{dq'} = Q', \quad \omega' = \delta z - p'\delta x,$$

$$K' = N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2}.$$

La parte representada por Γ' se obtendrá agregando á Γ los términos que resultan de cambiar las cantidades $P, Q, p, \ldots\ldots$ por $P', Q', p', \ldots\ldots$ en la expresión (7).

146. Caso en el que V depende de los límites. Supongamos que V contenga una sola función de x, pero que dependa de los límites x_0 y x_1 de la integración. Es necesario, en este caso, añadir á la variación de la integral los términos que provienen de la variación de estos límites, á saber:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{dV}{dx_0} \delta x_0 + \frac{dV}{dy_0} \delta y_0 + \frac{dV}{dp_0} \delta p_0 + \frac{dV}{dq_0} \delta q_0 \right) dx$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{dV}{dx_1} \delta x_1 + \frac{dV}{dy_1} \delta y_1 + \frac{dV}{dp_1} \delta p_1 + \frac{dV}{dq_1} \delta q_1 \right) dx$$

Pero como $\delta x_0, \delta y_0, \ldots\ldots, \delta x_1, \delta y_1, \ldots\ldots$ son constantes en la integración relativa á x, se podrá escribir los términos que deben añadirse á Γ, bajo la forma siguiente:

$$\delta x_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dV}{dx_0} dx + \delta y_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dV}{dy_0} dx + \ldots\ldots + \delta x_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dV}{dx_1} dx \ldots\ldots$$

Las integrales contenidas en los términos de esta expresión no contienen ya nada que dependa de las variaciones.

Se completaría de igual manera el valor de $\delta \int_{x_0}^{x_1} V dx$, si V contuviese dos funciones y, z con las derivadas de estas funciones y sus valores en los límites.

147. Otro procedimiento. Los cálculos hechos, pueden modificarse ventajosamente en las aplicaciones. Para ello, sustituyamos en V (fórm. (2) pág. 406) p y q por $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$, considerando á $x, y, dx, dy, d\frac{dy}{dx}$ como funciones del parámetro t. El resultado contendrá, bajo forma lineal, las variaciones δx, δy y δdx, δdy, ... ó las diferenciales $d\delta x$, $d\delta y$, ... Y puesto que debe integrarse con relación á x, se hará salir del signo $\int$, mediante integraciones por partes, las diferenciales de las variaciones δx, δy; de manera que solo quedarán bajo el signo, estas variaciones multiplicadas por cantidades independientes de las mismas. El resultado será de la forma

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} V dx = \Gamma + \int_{x_0}^{x_1} (H\delta x + K\delta y)\, dx, \qquad \text{(II)}$$

siendo H y K funciones conocidas de x, y y de las derivadas de y, sin contener las variaciones de estas variables. Comparando este resultado con el obtenido anteriormente,

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} V \delta x = \Gamma + \int_{x_0}^{x_1} (K\delta y - Kp\delta x)\, dx, \qquad \text{(I)}$$

se concluirá que Γ y K deben ser las mismas en las dos expresiones, y se tendrá idénticamente $H = -Kp$.

El cálculo que ha dado la ecuación (I) ha servido para poner en evidencia esta relación.

En las aplicaciones se debe seguir la marcha que ha conducido á la relación (II), sin pasar por la intermediaria de la cantidad ω, y sin recurrir á las fórmulas generales.

Si varía tan solo y, se tendrá $\delta x = 0$, y

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{V} dx = \Gamma' + \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{K} \delta y dx,$$

deduciéndose Γ' de Γ por la supresión de los términos que contienen δx_0 y δx_1.

Si tan solo varía x, se tendrá

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{V} dx = \Gamma'' + \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{H} \delta x dx = \Gamma'' - \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{K} p \delta x dx,$$

expresando Γ'' el resultado de hacer $\delta y_0 = 0$ y $\delta y_1 = 0$ en Γ.

En el caso de entrar en V otra función z de x con las derivadas p' y q' en z, se llegará á la ecuación

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{V} dx = \Gamma + \int_{x_0}^{x_1} (\mathrm{H} \delta x + \mathrm{K} \delta y + \mathrm{K}' \delta z)\, dx.$$

Pero el procedimiento que conduce á la relación (II) daría

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{V} dx = \Gamma + \int_{x_0}^{x_1} [\mathrm{K}(\delta y - p \delta x) + \mathrm{K}'(\delta z - p' \delta x)]\, dx,$$

debiendo ser estos valores idénticos.

Será pues $\qquad \mathrm{H} = -(\mathrm{K} p + \mathrm{K}' p').$

CAPÍTULO II

Aplicaciones

§ 1.º Máximos y mínimos

148. Condición de existencia. Supongamos que la función U deba ser un mínimo, y sea $y = f(x)$ la función que se busca. Si esto se verifica, el incremento de $\int_{x_0}^{x_1} V dx$ será constantemente positivo para valores cualesquiera de δx y de δy. Pero

$$\Delta U = \delta U + \rho,$$

conteniendo δU linealmente á las variaciones δx, δy, δp, δq y ρ potencias de grado superior al primero de estas variaciones ó sus productos. De manera que si δU no es nula, el límite de $\frac{\rho}{\delta U}$ es cero; luego, si δx y δy son infinitamente pequeñas, el signo de Δu y de δU será el mismo. Para que U tenga un valor mínimo se necesita pues que $\delta U = 0$; porque en el caso contrario, al cambiar los signos de las variaciones δx y δy, sin cambiar sus valores absolutos, cambiaría el signo de δU y por consiguiente el de ΔU, y U no sería un mínimo.

Así $\delta U = 0$ es la condición necesaria para que ΔU sea un mínimo y también para que sea un máximo. Esta condición no es suficiente; porque siendo

$$\Delta U = \delta U + \frac{1}{2!} \delta^2 U + \frac{1}{3!} \delta^3 U + \ldots,$$

si δU es nula, el signo de ΔU dependerá del de $\delta^2 U$ para valores pequeños de δx y de δy; luego, si $\delta^2 U$ permanece positiva ó negativa cuando las variaciones δx y δy cambian de una manera cualquiera, permaneciendo infinitamente pequeñas, U será respectivamente un mínimo ó un máximo. Y si $\delta^2 U$ puede cambiar de signo, U no será ni máximo ni mínimo. En cada caso la naturaleza de la cuestión, hace innecesario este examen, indicando claramente la existencia del máximo ó del mínimo.

Tenemos pues, que la condición

$$\delta U = 0, \quad \text{se reduce á} \quad \Gamma + \int_{x_0}^{x_1} K\omega\, dx = 0. \qquad (1)$$

Esta condición lleva consigo las dos siguientes: $\Gamma = 0$, $K = 0$.

En efecto, si K no fuese igual á cero, se podría para cada valor de x comprendido entre x_0 y x_1 cambiar como se quiera los valores de δx y de δy que son arbitrarios, y por consiguiente el de ω ó $\delta y - p\delta x$, suponiendo constantes los valores de δx_0, δy_0, δp_0, δx_1, δy_1, δp_1 relativos á los límite x_0 y x_1. Pero el término Γ, que no contiene más que las variaciones relativas á los límites, permanecería constante, mientras que la integral $\int_{x_0}^{x_1} K\omega dx$, en la que se halla la función arbitraria ω, no podría conservar el mismo valor, cualquiera que fuese esta función ω; luego la ecuación (1) no podría quedar satisfecha siempre, mientras K no fuese cero.

También podemos llegar á esta conclusión observando que por ser ω una función arbitraria, podemos elegirla de manera que tenga de igual signo que K para cada valor de x, cuando Γ es positiva ó nula, y signo contrario á K, si Γ es negativa. La suma $\Gamma + \int_{x_0}^{x_1} K\omega dx$ sería positiva en el primer caso y negativa en el segundo. Es necesario pues que se tenga $K = 0$, de lo que también resulta que $\Gamma = 0$.

149. Condiciones relativas á los límites. Cuando V contiene tan solo x, y, p y q, la ecuación $K = 0$, ó

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0,$$

es de cuarto orden, porque $\frac{d^2Q}{dx^2}$ contiene á $\frac{d^2q}{dx^2}$ ó á $\frac{d^4y}{dx^4}$. Al integrar esta ecuación se tendrá, pues un rsultado de la forma

$$y = f(x, C, C', C'', C'''),$$

que contendrá cuatro constantes arbitrarias. Para determinarlas se tendrá presente la ecuación $\Gamma = 0$, relativa á los límites de la integración, distinguiéndose cuatro casos.

1.º Si se dan los valores de x, y, p, q en los dos límites, siendo nulas las variaciones de dichas cantidades en éstos, la ecuación $\Gamma = 0$ queda satisfecha idénticamente; y si representamos por $f'(x, C, C', C'', C''')$ la derivada de $f(x, C, C', C'', C''')$, se tendrá

$$\left.\begin{array}{l} y_0 = f(x_0, C, C', C'', C'''),\ p_0 = f'(x_0, C, C', C'', C'''), \\ y_1 = f(x_1, C, C', C'', C'''),\ p_1 = f'(x_1, C, C', C'', C'''), \end{array}\right\} \quad (1)$$

ecuaciones que determinan las cuatro constantes.

2.º Si una de las seis cantidades $x_0, y_0, p_0, x_1, y_1, p_1$ permanece arbitraria, p_1 por ejemplo, la ecuación $\Gamma = 0$ no quedará satisfecha idénticamente; pero será preciso igualar á cero el coeficiente de δp_1, y se tendrá la ecuación $Q_1 = 0$, que con la ecuación (1) determinará las cuatro constantes y el valor de p_1.

3.º Si se tuviese entre los valores de x, y, p relativos á los límites, una ecuación

$$\varphi(x_0, y_0, p_0, x_1, y_1, p_1,) = 0, \quad (2)$$

se diferenciaría esta ecuación con relación al parámetro t, y se tendría

$$\frac{d\varphi}{dx_0}\delta x_0 + \frac{d\varphi}{dy_0}\delta y_0 + \frac{d\varphi}{dp_0}\delta p_0 + \frac{d\varphi}{dx_1}\delta x_1 + \ldots\ldots = 0.$$

Sustituyendo el valor de δp_1, sacado de esta ecuación, en la ecuación $\Gamma = 0$, será preciso igualar á cero los coeficientes de δx_0, $\delta y p_0$, δy_0, δx_1 y δy_1. Se tendrá pues cinco ecuaciones, que juntamente con las (1) (2) determinarán las diez incógnitas C, C', C'', C''', $x_0, y_0, p_0, x_0, y_0, p_1$.

150. Caso en que V contiene dos funciones. Sean y, z las dos funciones de x. Se tendrá entonces

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{V}\, dx = \Gamma + \int_{x_0}^{x_1} (\mathrm{K}\omega + \mathrm{K}'\omega')\, d\omega = 0,$$

ecuación equivalente á las tres

$$\Gamma = 0, \quad \mathrm{K} = 0, \quad \mathrm{K}' = 0.$$

En efecto: ω y ω' son dos funciones de x arbitrarias é independientes la una de la otra y Γ solo contiene las variaciones relativas á los límites; luego, si K y K′ fuesen nulas, dejando constantes los valores relativos á los límites, se tendría $\Gamma = 0$; mientras que se podría hacer variar á ω y ω' de modo que la integral $\int_{x_0}^{x_1} (\mathrm{K}\omega + \mathrm{K}'\omega')\, dx$ no fuese igual á cero; luego se debe tener $\mathrm{K} = 0$, $\mathrm{K}' = 0$, y por consiguiente, $\Gamma = 0$. Las dos primeras ecuaciones determinan y y z en función de x, y la tercera las constantes introducidas por la integración de las dos primeras.

Hemos supuesto que y y z son independientes entre sí. En el caso de existir entre ellas una relación

$$\mathrm{F}(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

las variaciones δy y δz no serían ya independientes, y tendríamos

$$\frac{d\mathrm{F}}{dx}\delta x + \frac{d\mathrm{F}}{dy}\delta y + \frac{d\mathrm{F}}{dz}\delta z = 0,$$

ecuación que se obtiene diferenciando (1) con relación á t. Sustituyamos δy y δz por sus valores

$$\delta y = p\delta x + \omega, \qquad \delta z = p'\delta x + \omega'$$

y será $$\frac{d\mathrm{F}}{dx}\delta x + \frac{d\mathrm{F}}{dy}(p\delta x + \omega) + \frac{d\mathrm{F}}{dz}(p'\delta x + \omega') = 0,$$

ó $$\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx} + \frac{d\mathrm{F}}{dy}p + \frac{d\mathrm{F}}{dz}p'\right)\delta x + \frac{d\mathrm{F}}{dy}\omega + \frac{d\mathrm{F}}{dz}\omega' = 0,$$

ó $$\frac{dF}{dy}\omega + \frac{dF}{dz}\omega' = o, \qquad (2)$$

por ser $$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}p + \frac{dF}{dx}p' = o,$$

En virtud de la ecuación (2) tendremos

$$\omega' = -\frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dz}}\omega \quad \text{y} \quad \int_{x_0}^{x_1} V dx = \Gamma + \int_{x_0}^{x_1}\left(K - K'\frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dz}}\right)\omega dx.$$

Para que esta variación sea nula, se necesita que

$$\Gamma = o, \qquad K\frac{dF}{dz} - K'\frac{dF}{dy} = o.$$

Estas ecuaciones darán los valores de y, z en función de x, y $\Gamma = o$ servirá para determinar las constantes.

§ 2.º Problemas de máximos y mínimos

151. Línea más corta entre dos puntos. *Problema.—Se pide hallar la línea situada en un plano que pasa por dos puntos* A *y* B, *siendo la más corta que se pueda trazar entre dichos puntos.*

Sean x_0, y_0 las coordenadas rectangulares del punto A y x_1, y_1 las del punto B. En este ejemplo debemos tener

$$\delta\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+p^2}\,dx = o \quad \text{y} \quad K = N - \frac{dp}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = o;$$

pero $$N = o, \quad P = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \quad Q = o;$$

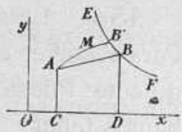
luego será $$\frac{d}{dx}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = o, \quad \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \text{const.},$$

es decir, $p = C$ de donde $y = Cx + C'$, siendo C y C′ dos constantes. Además, basta que la ecuación K = o quede satisfecha, porque siendo fijos los valores de x é y relativos á los límites, las variaciones δx_0, δy_0, δx_1, δy_1 son nulas; luego se tiene idénticamente $\Gamma = o$. La línea buscada es por lo tanto una recta. Las constantes C y C′ se determinarán por las ecuaciones

$$y_0 = Cx_0 + C', \qquad y_1 = Cx_1 + C'.$$

152. Línea más corta entre un punto y una curva plana. Sean A y EF el punto y la curva dada en el plano xOy, é $y = \psi(x)$ la ecuación de la curva.

Sea AB la línea más corta trazada desde A á un punto de la curva dada. Hallándose fijo el extremo A de AB, el otro extremo puede variar de posición en la curva EF. Tendremos, según el problema anterior, que la línea buscada es una recta $y = Cx + C'$. Para hallar las constantes, tenemos $\delta x_0 = o$, $\delta y_0 = o$, $Q = o$; pero las variaciones δx_1 y δy_1 se hallan sujetas solamente á la condición de que el punto $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$ debe hallarse en la curva dada; luego



$$y_1 = \psi(x_1), \quad \text{de donde} \quad \delta y_1 = \psi'(x_1)\,\delta x_1;$$

y para que Γ se anule, $\delta x_0 + p_1 \delta y_1 = o$; luego

$$1 + p_1\psi'(x_1) = o \quad \text{ó} \quad 1 + C\psi'(x_1) = o.$$

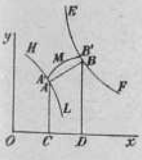
Las constantes se determinan por las ecuaciones

$$y_0 = Cx_0 + C', \; 1 + C\psi'(x_1) = o, \; y_1 = Cx_1 + C', \; y_1 = \psi(x_1).$$

Por consiguiente: *La línea más corta entre un punto y una curva es una recta normal á la curva.*

153. Línea más corta entre dos curvas planas. Sean

$$y = \varphi(x), \qquad y = \psi(x)$$



las ecuaciones de las dos curvas situadas en el mismo plano. Razonando como en los problemas anteriores, se obtendrá una recta $y = Cx + C'$.

En este caso δx_0, δy_0, δx_1, δy_1 pueden variar, siempre que $A'(x_0 + \delta x_0, y_0 + \delta y_0)$ y $B'(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$ se hallen respectivamente en la primera y en la segunda curva. Pero la ecuación $\Gamma = 0$ se reduce á

$$\frac{\delta x_1 + p_1 \delta y_1}{\sqrt{1 + p_1^2}} - \frac{\delta x_0 + p_0 \delta y_0}{\sqrt{1 + p_0^2}} = 0,$$

que en el caso actual se transforma en

$$\delta x_1 [1 + C\psi'(x_1)] - \delta x_0 [1 + C\varphi'(x_0)] = 0, \qquad (a)$$

por tenerse que $y_0 = \varphi(x_0)$, $y_1 = \psi(x_1)$.

Pero siendo las variaciones δx_0 y δx_1, independientes entre sí, la ecuación (a) se descompone en las dos:

$$1 + C\psi'(x_1) = 0, \qquad 1 + C\varphi'(x_0) = 0,$$

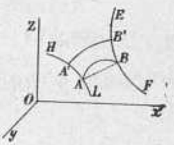
que juntamente con las ecuaciones

$$y_0 = Cx_0 + C', \quad y_0 = \varphi(x_0); \quad y_1 = Cx_1 + C', \quad y_1 = \psi(x_1),$$

determinan las constantes C y C' y las coordenadas x_0, y_0, x_1, y_1 de los extremos de la recta mínima. *La recta más corta es, por lo tanto, una normal común á dos curvas.*

154. Línea más corta entre dos puntos, en el espacio. Para resolver este problema emplearemos el procedimiento siguiente: Puesto que para resolver los problemas anteriores debemos tener

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{dx^2 + dy^2} = 0, \qquad (1)$$



y haciendo $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, resulta

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx\, d\delta x + dy\, d\delta y}{ds}.$$

Integrando por partes, se tiene

$$\int \frac{dx}{ds} d\delta x = \frac{dx}{ds} \delta x - \int \delta x d \frac{dx}{ds},$$

$$\int \frac{dy}{ds} d\delta y = \frac{dy}{ds} \delta y - \int \delta y d \frac{dy}{ds},$$

y la ecuación (1) se reduce á

$$\left(\frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y\right)_1 - \left(\frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y\right)_0$$
$$-\int_{x_0}^{x_1}\left(\delta x\, d\,\frac{dx}{ds} + \delta y\, d\,\frac{dy}{ds}\right) = 0.$$

Pero $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$ y $\frac{dx}{ds}\, d\,\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\, d\,\frac{dy}{ds} = 0;$

luego $$d\,\frac{dx}{ds} = -\frac{dy}{dx}\, d\,\frac{dy}{ds} = -p d\,\frac{dy}{ds};$$

luego, para que la cantidad colocada bajo el signo $\int$ sea nula, basta que se tenga $d\,\frac{dx}{ds} = 0$ ó $d\,\frac{dy}{ds} = 0$. Supongamos $d\,\frac{dx}{ds} = 0$. De esta hipótesis resultará

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = \text{const.},\quad \text{de donde}\quad p = \frac{dy}{dx} = C,\quad y = Cx + C',$$

ecuación de una recta.

Determinemos las constantes, según la naturaleza del problema propuesto.

1.° Si se dan los dos puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1), las variaciones de los límites δx_0, δy_0, δx_1, δy_1 son nulas y la ecuación $\Gamma = 0$ ó

$$\left(\frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y\right)_1 - \left(\frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y\right)_0 = 0,$$

queda satisfecha idénticamente. Las constantes se determinan por las ecuaciones

$$y_0 = Cx_0 + C',\qquad y_1 = Cx_1 + C'.$$

2.° Si el punto A (x_0, y_0) es fijo, y el otro punto B (x_1, y_1) debe estar en una curva dada $y = \psi(x)$, se tendrá $\delta x_0 = 0$, $\delta y_0 = 0$, y la ecuación $\Gamma = 0$ se reducirá

$$dx_1 \delta y_1 + dy_1 \delta y_1 = 0,\qquad \text{de donde}\qquad 1 + \frac{dy_1}{dx_1}\frac{\delta y_1}{\delta x_1} = 0;$$

luego la recta $y = Cx + C'$ es normal á la curva $y = \psi(x)$; porque $y_1 = \psi(x_1)$ da $\delta y_1 = \psi'(x_1)\,\delta x_1$ y, por consiguiente, será $1 + C\psi'(x_1) = 0$.

Las constantes se determinan por las ecuaciones

$$Y_0 = Cx_0 + C',\ 1 + C\psi'(x_1) = 0,\ y_1 = Cx_1 + C',\ y_1 = \psi(x_1).$$

3.º Si los dos puntos A y B se hallan en dos curvas $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, se tendrá $y_1 = \psi(x_1)$, $y_0 = \varphi(x_0)$, lo que da

$$\delta y_1 = \psi'(x_1)\delta x_1, \qquad \delta y_0 = \varphi'(x_0)\,\delta x_0.$$

La ecuación $\Gamma = 0$ se reduce entonces á

$$[dx_1 + dy_1\,\psi'(x_1)]\,dx_1 - [dx_0 + dy_0\,\varphi'(x_0)]\,\delta x_0 = 0,$$

y se divide en las dos ecuaciones:

$$1 + \frac{dy_1}{dx_1}\psi'(x_1) = 0, \qquad 1 + \frac{dy_0}{dx_0}\varphi'(x_0) = 0,$$

porque δx_0 y δx_1 son cantidades independientes y arbitrarias. Estas dos ecuaciones hacen ver que la recta buscada es normal á las curvas dadas.

Las constantes C y C′ y las coordenadas x_0, y_0, x_1, y_1 de los extremos de la línea mínima se determinan por las seis ecuaciones

$$y_0 = Cx_0 + C', \quad y_0 = \varphi(x_0), \quad 1 + C\varphi'(x_0) = 0,$$
$$y_1 = Cx_1 + C', \quad y_1 = \psi(x_1), \quad 1 + C\psi'(x_1) = 0.$$

155. Resolución del problema de la menor distancia. Sean x_0, y_0, z_0 y x_1, y_1, z_1 las coordenadas de los dos puntos A y B. La longitud del arco AMB estará representada por

$$\int_{x_0}^{x_1} dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Tendremos pues,

$$Vdx = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},\ \delta Vdx = \frac{dx\,d\delta x + dy\,d\delta y + dz\,d\delta z}{ds};$$

é integrando por partes

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{V}dx = \left(\frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y + \frac{dz}{ds}\delta z\right)_1$$

$$- \left(\frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y + \frac{dz}{ds}\delta z\right)_0$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}\left(\delta x\, d\,\frac{dx}{ds} + \delta y d\,\frac{dy}{ds} + \delta z d\,\frac{dz}{ds}\right). \qquad (1)$$

Es necesario igualar á cero la expresión colocada bajo el signo $\int$; y puesto que las variaciones δx, δy, δz son independientes y arbitrarias, se tendrá

$$d\,\frac{dx}{ds} = 0, \quad d\,\frac{dy}{ds} = 0, \quad d\,\frac{dz}{ds} = 0. \qquad (2)$$

Pero estas ecuaciones se reducen á dos distintas. En efecto, de la identidad

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dz^2}{ds^2} = 1$$

resulta $$\frac{dx}{ds}\,d\,\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\,d\,\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}\,d\,\frac{dz}{ds} = 0;$$

luego, si se tiene $d\,\frac{dx}{ds} = 0$, $d\,\frac{dy}{ds} = 0$, resultará $d\,\frac{dz}{ds} = 0$.

De las ecuaciones $d\,\frac{dy}{ds} = 0$, $d\,\frac{dz}{ds} = 0$, resulta, por una primera integración,

$$\frac{dy}{ds} = a, \quad \frac{dz}{ds} = a', \quad \text{ó bien} \quad \frac{dy}{dx} = c, \quad \frac{dz}{dx} = c';$$

é integrando nuevamente,

$$y = \mathrm{C}x + \mathrm{C}, \qquad e = \mathrm{C}'x + \mathrm{C}', \qquad (3)$$

ecuaciones de una recta. Para determinar las constantes hay que distinguir varios casos.

1.° Si se dan los puntos A y B, las variaciones δx_0, δy_0, δz_0,

δx_1, δy_1, δz_1 son nulas, y la ecuación $\Gamma = 0$ queda satisfecha. Las cuatro constantes se determinarán sustituyendo las coordenadas de los puntos A y B en las ecuaciones de la recta.

2.º Supongamos que los puntos A y B se hallen en dos curvas

$$y = \varphi(x), \quad z = \psi(x) \quad \text{é} \quad y = \Phi(x), \quad z = \psi(x); \tag{4}$$

la ecuación $\Gamma = 0$, formada por medio de la ecuación (1) dará

$$\left(\frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y + \frac{dz}{ds}\delta z\right)_1 = 0, \left(\frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y + \frac{dz}{ds}\delta z\right)_0 = 0.$$

En efecto, siendo $\delta\sigma_0$ y $\delta\sigma_1$ los dos arcos infinitamente pequeños AA′ y BB′ situados en las curvas dadas; y siendo A′B′ una curva cualquiera infinitamente próxima á la recta AB, se podrá escribir Γ bajo la forma

$$\left.\begin{aligned} \Gamma = \delta\sigma_1 &\left(\frac{dx}{ds}\frac{\delta x}{\delta\sigma} + \frac{dy}{ds}\frac{\delta y}{\delta\sigma} + \frac{dz}{ds}\frac{\delta z}{\delta\sigma}\right)_1 \\ - \delta\sigma_0 &\left(\frac{dx}{ds}\frac{\delta x}{\delta\sigma} + \frac{dy}{ds}\frac{\delta y}{\delta\sigma} + \frac{dz}{ds}\frac{\delta z}{\delta\sigma}\right)_0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Los factores colocados entre paréntesis tienen valores finitos, porque representan los cosenos de los ángulos que la recta AB forma con las curvas en los puntos A y B.

Como, por otra parte $\delta\sigma_0$ y $\delta\sigma_0$ son cantidades independientes entre sí, vemos que la ecuación $\Gamma = 0$, lleva consigo las siguientes:

$$\left(\frac{dx}{ds}\frac{\delta x}{\delta\sigma} + \frac{dy}{ds}\frac{\delta y}{\delta\sigma} + \frac{dz}{ds}\frac{\delta z}{\delta\sigma}\right)_1 = 0,$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\frac{\delta x}{\delta\sigma} + \frac{dy}{ds}\frac{\delta y}{\delta\sigma} + \frac{dz}{ds}\frac{\delta z}{\delta\sigma}\right)_0 = 0;$$

estas ecuaciones expresan que la recta AB es normal á las dos curvas. Pero, en virtud de las ecuaciones (3), $\frac{dy}{dx} = c$, $\frac{dz}{dx} = c'$; y puesto que los extremos de la línea AB deben permanecer en las curvas (4), se tendrá:

$$\delta y_1 = \Phi'(x_1)\delta x_1,\ \delta z_1 = \Psi'(x_1)\delta x_1,\ \delta y_0 = \varphi'(x_0)\delta x_0,\ \delta z_0 = \psi'(x^0)\delta x^0.$$

Las ecuaciones (5) pueden pues escribirse bajo la forma

$$1 + c\,\Phi'(x_1) + c'\,\Psi'(x_1) = 0, \quad 1 + c\varphi'(x_0) + c_1\,\psi'(x_0) = 0,$$

y juntamente con las ocho

$$y_0 = cx_0 + C,\quad z_0 = c'\,x_0 + C',\quad y_0 = \varphi(x_0),\quad z_0 = \psi(x_0),$$
$$y_1 = cx_1 + C,\quad z_1 = c'\,x_1 + C',\quad y_1 = \Phi(x_1),\quad z_1 = \Psi(x_1),$$

forman un sistema de diez ecuaciones, que determinan las cuatro constantes y las seis coordenadas de los extremos de la recta.

3.° Supongamos que los dos puntos se hallen en dos superficies dadas. Se podrá escribir todavía la ecuación $\Gamma = 0$ bajo la forma (6) representando por $\delta\sigma_0$ y $\delta\sigma_1$ dos arcos infinitamente pequeños AA' y BB', situados en las dos superficies; y por ser las mutaciones de los puntos A y B independientes entre sí, se tendrá todavía

$$\left(\frac{dx}{ds}\frac{\delta x}{\delta\sigma} + \frac{dy}{ds}\frac{\delta y}{\delta\sigma} + \frac{dz}{ds}\frac{\delta z}{\delta\sigma}\right)_0 = 0,$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\frac{\delta x}{\delta\sigma} + \frac{dy}{ds}\frac{\delta y}{\delta\sigma} + \frac{dz}{ds}\frac{\delta z}{\delta\sigma}\right)_1 = 0.$$

La primera ecuación expresa que la recta AB es normal á una curva cualquiera situada en la primera superficie y que pasa por el punto A; luego la recta AB es normal á la primera superficie. Y por la misma razón es normal á la segunda.

156. Línea más corta en una superficie dada. *Sea* $F(x, y, z) = 0$ *la ecuación de una superficie curva; y propongámonos hallar la línea más corta que se puede trazar en esta superficie entre dos de sus puntos* A *y* B.

Sean x_0, y_0, z_0 las coordenadas del punto A y x_1, y_1, z_1 las del punto B.

Hallándose todas las curvas que se van á comparar en la superficie dada, las variaciones de las coordenadas deben satisfacer á la ecuación

$$\frac{dF}{dx}\delta x + \frac{dF}{dy}\delta y + \frac{dF}{dz}\delta z = 0 \tag{1}$$

y una de las condiciones para el mínimo es

$$K = \delta x d\frac{dx}{ds} + \delta y d\frac{dy}{ds} + \delta z d\frac{dz}{ds} = 0. \tag{2}$$

Pero de la ecuación (1) se puede sacar el valor de δz y sustituirlo en la (2). Tendremos pues,

$$\delta x\left(d\frac{dx}{ds} - \frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dz}}d\frac{dz}{ds}\right) + \delta y\left(d\frac{dy}{dx} - \frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dz}}d\frac{dz}{ds}\right) = 0.$$

Esta ecuación, en virtud de la independencia de las variaciones δx y δy, se reduce á las dos

$$d\frac{dx}{ds} + \frac{dF:dx}{dF:dz}d\frac{dz}{ds} = 0,\quad d\frac{dy}{ds} + \frac{dF:dy}{dF:dz}d\frac{dz}{ds} = 0: \tag{3}$$

que con la ecuación de la superficie forman un sistema de tres ecuaciones para determinar y y z. Pero una de estas últimas ecuaciones es una consecuencia de la otra y de la ecuación de la superficie. En efecto, dichas ecuaciones se reducen á

$$\frac{d\frac{dx}{ds}}{\frac{dF}{dx}} = \frac{d\frac{dy}{ds}}{\frac{dF}{dy}} = \frac{d\frac{dz}{ds}}{\frac{dF}{dz}}$$

ó, representando por λ el valor común de estas relaciones

$$d\frac{dx}{ds} = \frac{dF}{dx}d\lambda,\quad d\frac{dy}{ds} = \frac{dF}{dy}d\lambda,\quad d\frac{dz}{ds} = \frac{dF}{dz}d\lambda.$$

Sumando estas ecuaciones, después de haberlas multiplicado respectivamente por $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, tendremos

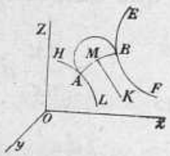
$$\frac{dx}{ds} d\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} d\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds} d\frac{dz}{ds}$$

$$= \left(\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{dz} dz\right) \frac{d\lambda}{ds}; \tag{4}$$

y por ser nulo el primer miembro, y el coeficiente de $\frac{d\lambda}{ds}$ también, en virtud de la ecuación de la superficie, la ecuación (4) es una identidad; luego una de las ecuaciones (3) y la $F(x, y, z) = 0$ es consecuencia las otras dos. Bastará considerar dos de estas ecuaciones para determinar la línea buscada

Definición. Las líneas más cortas trazadas en una superficie se llaman *líneas geodésicas.*

157. Superficie mínima de revolución. Problema.—*Dados, en un mismo plano, dos puntos* A *y* B *y una recta* CD, *hallar una curva* AMB *situada en este plano y que al girar alrededor de* CD, *engendre una superficie de revolución cuya área sea un mínimo.*



Tomemos la recta CD por eje de las x, y por eje de las y una perpendicular á esta recta. Sean x_0 é y_0 las coordenadas del punto A y x_1, y_1 las del punto B. Siendo $2\pi \int_{x_0}^{x_1} yds$ la expresión de la superficie engendrada por AMB, la cuestión propuesta se reduce á buscar el mínimo de la integral definida. Pero se tiene

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} yds = \int_{x_0}^{x_1} \delta y ds = \int_{x_0}^{x_1} (\delta y ds + y \delta ds)$$

y

$$ds^2 = dx^2 + dy^2;$$

$$dy \delta ds = dx \delta dx + dy \delta dy = dx d\delta x + dy d\delta y;$$

luego $\delta \int_{x_0}^{x_1} y\,ds = \int_{x_0}^{x_1} \left(\delta y\,ds + y \frac{dx}{ds}\,d\delta x + y \frac{dy}{ds}\,d\delta y \right)$.

Integrando por partes, tendremos

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} y\,ds = \left(y \frac{dx}{ds}\,\delta x + y \frac{dy}{ds}\,\delta y \right) - \left(y \frac{dx}{ds}\,\delta x + y \frac{dy}{ds}\,\delta y \right)_0$$

$$- \int_{x_0}^{x_1} \left[\delta x\,d\left(y \frac{dx}{ds} \right) + \delta y\,d\left(y \frac{dy}{ds} \right) - \delta y\,ds \right].$$

Es necesario igualar á cero á la cantidad colocada bajo el signo $\int$ en el segundo miembro, lo que da

$$d\left(y \frac{dx}{ds} \right) = 0, \quad (1) \qquad ds - d\left(y \frac{dy}{ds} \right) = 0. \quad (2)$$

Pero la segunda ecuación es una consecuencia de la primera, pues se tiene idénticamente

$$d\left(y \frac{dx}{ds} \right) = \left[ds - d\left(y \frac{dy}{ds} \right) \right] \frac{dy}{dx},$$

ya que esta ecuación se reduce á

$$\frac{dx}{ds}\,d\left(y \frac{dx}{ds} \right) - \frac{dy}{ds}\,ds + \frac{dy}{ds}\,d\,\frac{y\,dy}{ds} = 0,$$

$$\text{ó} \quad dy \left(\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} \right) - dy + y \left(\frac{dx}{ds}\,d\,\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\,d\,\frac{dy}{ds} \right) = 0,$$

consecuencia de las ecuaciones

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} = 1, \quad \frac{dx}{ds}\,d\,\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\,d\,\frac{dy}{ds} = 0;$$

luego basta considerar la ecuación (1) que da

$$y \frac{dx}{ds} = c \quad \text{de donde} \quad y = c \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}};$$

cuya integral es

$$x - c' = cl\left(\frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c}\right), \quad y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-c'}{c}} + e^{-\frac{x-c'}{c}}\right),$$

ecuación de una catenaria.

Las constantes c y c' se determinan como en el ejemplo anterior. Si se hace pasar el eje de las y por el punto más bajo de la curva, se tiene $c' = 0$

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right).$$

158. Braquistócrona. Problema.—*Dados dos puntos* A *y* B, *hallar la curva* AMB *que debe seguir un punto pesado para ir desde el punto* A *hasta el punto* B *en el menor tiempo posible.* Esta curva se llama *braquistócrona* ó curva del más rápido descenso.

Tomemos una vertical cualquiera por eje de las x y dos ejes rectangulares Oz, Oy en un plano horizontal cualquiera. Si se supone que el móvil parte del punto A (x_0, y_0, z_0) sin velocidad inicial, se tendrá, expresando por V su velocidad en el punto M (x, y, z),

$$V^2 = 2g(x - x_0). \tag{1}$$

Pero siendo s el arco recorrido y t el tiempo correspondiente, se tiene $V = \frac{ds}{dt}$, valor que debe tomarse positivamente, porque el arco aumenta continuamente con el tiempo. Resulta pues

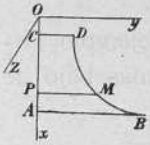
$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(x - x_0)}, \quad dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{ds}{\sqrt{x - x_0}}.$$

Se tendrá pues, llamando T al tiempo necesario para recorrer el arco AB y x_1 á la abscisa del punto B,

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{\sqrt{x - x_0}}. \tag{2}$$

Para hallar la variación de la integral definida, haremos $X = \frac{1}{\sqrt{x - x^0}}$, y se tendrá

$$\delta \int X ds = \int (\delta X ds + \delta ds).$$



Pero $\delta X = -\frac{1}{2}(x - x_0)^{-\frac{3}{2}}(\delta x - \delta x_0)$.

Además $\delta ds = \frac{dx}{ds} d\delta x + \frac{dy}{ds} d\delta y + \frac{dz}{ds} d\delta z$.

Sustituyendo en la ecuación $\delta \int X ds = 0$, se tendrá

$$\delta x_0 \int \frac{1}{2}(x - x_0)^{-\frac{3}{2}} ds - \int \left[\frac{1}{2}(x - x_0)^{-\frac{3}{2}} \delta x ds \right.$$
$$\left. - X\left(\frac{dx}{ds} d\delta x + \frac{dy}{ds} d\delta y + \frac{dz}{ds} d\delta z\right)\right] = 0.$$

Integrando por partes, y haciendo salir del signo $\int$ las diferenciales de las variaciones, resulta

$$\left[X\left(\frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y + \frac{dz}{ds}\delta z\right)\right]_0^1 + \frac{1}{2}\delta x_0 \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)^{-\frac{3}{2}} ds$$
$$- \int_{x_0}^{x_1} \left[\delta x d\left(X\frac{dx}{ds}\right) + \delta y d\left(X\frac{dy}{ds}\right)\right.$$
$$\left. + \delta z d\left(X\frac{dz}{ds}\right) + \frac{1}{2}\delta x (x - x_0)^{-\frac{3}{2}} ds\right] = 0.$$

Para que la cantidad colocada bajo el signo $\int$ en la segunda integral sea nula, es necesario igualar á cero los coeficientes de las variaciones δx, δy, δz, lo que da

$$\frac{1}{2}(x - x_0)^{-\frac{3}{2}} ds + d\left(X\frac{dx}{ds}\right) = 0, \tag{3}$$

$$d\left(X\frac{dy}{ds}\right) = 0, \quad d\left(X\frac{dz}{ds}\right) = 0. \tag{4}$$

Las dos últimas ecuaciones son suficientes, porque se tiene idénticamente

$$\frac{dx}{ds} d\left(X \frac{dx}{ds}\right) + \frac{dy}{ds} d\left(X \frac{dy}{ds}\right) + \frac{dz}{ds} d\left(X \frac{dz}{ds}\right) = dX.$$

Pero $$dX = -\frac{1}{2}\frac{dx}{(x-x_0)^{3:2}}.$$

Resultará pues, teniendo presentes las ecuaciones anteriores,

$$\frac{dx}{ds} d\left(X \frac{dx}{ds}\right) = -\frac{1}{2}\frac{dx}{(x-x_0)^{3:2}},$$

es decir, la ecuación (3). Y deducimos de las (4)

$$X \frac{dy}{ds} = C, \qquad X \frac{dz}{ds} = C',$$

ó $$\frac{1}{\sqrt{x-x_0}}\frac{dy}{ds} = C, \qquad \frac{1}{\sqrt{x-x_0}}\frac{dz}{ds} = C'; \tag{5}$$

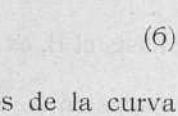
luego $$\frac{dy}{ds} = \frac{C}{C'}, \quad y = \frac{C}{C'}z + C''. \tag{6}$$

Esta ecuación manifiesta que todos los puntos de la curva están en un mismo plano vertical. Sustituyendo ds por su valor, y C por $\frac{1}{\sqrt{a}}$, para la homogeneidad, se deduce de la primera ecuación (5)

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (x-x_0)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x - x_0, \quad dy = dx\sqrt{\frac{x-x_0}{a-x-x_0}}$$

Si se toma el plano de la curva por plano de las xy, y el punto A por origen de coordenadas, se tendrá $x_0 = 0$, y la ecuación diferencial de la curva se reduce á

$$dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}. \tag{7}$$



La cicloide, representada por esta ecuación, tiene un punto de retroceso en A; su base es horizontal y el diámetro de su círculo generador es igual á a. La integral de la ecuación (7) es

$$y = \frac{a}{2} \operatorname{arc\,cos} \frac{a - 2x}{a} - \sqrt{ax - x^2}.$$

Determinaremos la constante a, es decir, el diámetro del círculo generador, expresando que la curva pasa por el punto B (x_1, y_1), de la manera siguiente:

Tracemos una cicloide cualquiera cuyo vértice esté en el punto A, siendo Al su base y b el punto en que AB encuentra á esta curva. En virtud de la semejanza de las dos cicloides, siendo c y C los centros de las dos circunferencias generatrices, que corresponden á los dos puntos b y B, los triángulos ABC y Abc son semejantes. Pero, por ser conocidos los puntos b, B y c, bastará para tener el centro C trazar BC paralela á bc, hasta encontrar á Ac prolongada.

El tiempo empleado por el móvil para ir desde el punto A hasta el B, es igual á $\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1} \frac{ds}{\sqrt{x}}$, tomando el origen de coordenadas en A. Se tendrá por tanto, en virtud de la ecuación de la curva

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{a}\,dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \sqrt{\frac{a}{2g}} \operatorname{arc\,cos} \frac{a - 2x_1}{a}.$$

Supongamos ahora que los dos puntos, en vez de estar dados, se hallan sujetos á estar en dos curvas dadas CD y EF. Se obtiene todavía una cicloide situada en un plano vertical. Para determinar los puntos A y B que fijan su posición, es necesario recurrir á la ecuación general $\Gamma' = 0$, que es en este caso

$$\left[X\left(\frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y + \frac{dz}{ds}\delta z\right)\right]_1$$

$$-\left[X\left(\frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y + \frac{dz}{ds}\delta z\right)\right]_0 + \delta x_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{2}\frac{ds}{(x - x_0)^{2:3}} = 0.$$

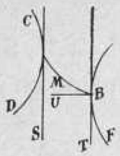
Puesto que las mutaciones de los puntos A y B en las dos curvas son independientes entre sí, se tendrá desde luego

$$\left[X\left(\frac{dx}{ds}\,\delta x + \frac{dy}{ds}\,\delta y + \frac{dz}{ds}\,\delta z\right)\right]_1 = 0. \qquad (8)$$

Esta ecuación expresa que el coseno del ángulo TBU de las tangentes BM y BU á las curvas EF y AB en B, es nulo. Por consiguiente la cicloide AMB corta á la curva EF según un ángulo recto.

Es necesario igualar á cero el resto de la ecuación $\Gamma = 0$; pero antes, se puede simplificar ésta. En efecto, se tiene para todos los puntos de la curva AMB,

$$\frac{dx}{ds}\,d\left(X\frac{dx}{ds}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{dx}{(x - x_0)^{3:2}} = 0$$



ó $$d\left(X\frac{dx}{ds}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{ds}{(x - x_0)^{3:2}} = 0,$$

obteniéndose

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{2}\,\frac{ds}{(x - x_0)^{1:2}} = -\left(X\frac{dx}{ds}\right)_1 + \left(X\frac{dx}{ds}\right)_0$$

Sustituyendo este valor en la ecuación $\Gamma = 0$, esta se reduce á

$$\left(X\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_0 + \left(X\frac{dy}{ds}\right)_0 \delta y_0 + \left(X\frac{dz}{ds}\right)_0 \delta z_0 = 0. \qquad (9)$$

Esta ecuación puede hacerse simétrica respecto á las variables. Así, habiéndose obtenido que $X\dfrac{dy}{ds} = C$, $X\dfrac{dz}{ds} = C'$, se tendrá

$$\left(X\frac{dy}{ds}\right)_1 = \left(X\frac{dy}{ds}\right)_0, \quad \left(X\frac{dz}{ds}\right)_1 = \left(X\frac{dz}{ds}\right)_0.$$

La ecuación (9) se reduce á

$$\left(X\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_0 + \left(X\frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_0 + \left(X\frac{dz}{ds}\right)_1 \delta z_0 = 0,$$

y dividiendo por X_1, factor común,

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_0 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_1 \delta z_0 = 0.$$

Esta ecuación expresa que la tangente á la cicloide en el punto B es perpendicular á la tangente trazada á la curva CD por el punto A.

Las constantes y las incógnitas $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1$ se determinarán como en los ejemplos precedentes:

Observación sobre la integración de $K = 0$. Sea

$$K = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0.$$

1.º Supongamos $N = 0$, es decir, que no entre y explícitamente en V. La ecuación (1) se reduce á

$$-\frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0 \quad \text{de donde} \quad P - \frac{dQ}{dx} = C. \qquad (2)$$

Esta ecuación solo es de tercer orden, si V no contiene derivadas de un orden superior al segundo.

2.º Si $M = 0$, es decir, si x no entra explícitamente en V, la ecuación $K = 0$ se reducirá también al tercer orden tomando y por variable independiente. Pero se la puede reducir también al tercer orden de la manera siguiente. Por ser $M = 0$, se tiene

$$dV = Ndy + Pdp + Qdq;$$

pero
$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0.$$

Eliminando N entre estas ecuaciones, se tendrá

$$dV = \left(\frac{dP}{dx} - \frac{d^2Q}{dx^2}\right) dy + Pdp + Qdq$$

$$= pdP + Pdp + Q\left(\frac{d^2p}{dx^2} - p\frac{d^2Q}{dx^2}\right) dx;$$

de donde $$V = Pp + Q\frac{dp}{dx} - p\frac{dQ}{dx} + c \tag{3}$$

ecuación de tercer orden solamente.

3.° Si se tuviese $M = 0$ y $N = 0$, la ecuación se reduciría al segundo orden. Se tendría entonces:

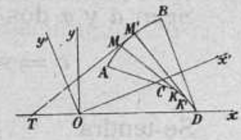
$$\frac{dP}{dx} - \frac{d^2Q}{dx^2} = 0 \qquad \text{de donde} \qquad P - \frac{dQ}{dx} = c',$$

y la ecuación (3) se reduciría á

$$V = Qq + c'p + c.$$

Estas simplificaciones se presentan en el siguiente

PROBLEMA. *Hallar una curva plana* AMB *tal que el área comprendida entre el arco* AMB, *los rayos de curvatura* AC *y* BD *que corresponden á los dos puntos extremos* A *y* B *y la parte de evoluta* CD *comprendida entre los centros de curvatura* C *y* D, *sea un mínimo.*



No puede haber máximo, porque al reducirse AB á una recta, el área correspondiente se haría infinita; y tomando una curva poco distinta de esta recta, se tendría una área tan grande como se quisiera.

Sean MK y M'K' los radios de curvatura de dos puntos M y M' infinitamente próximos. El triángulo infinitamente pequeño MK'M' es igual á $\frac{1}{2}\rho ds$, llamando ρ al radio de curvatura MK y ds al arco infinitamente pequeño MM'. La expresión de la medida del área es

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{2}\frac{(1+p^2)^2}{q}\,dx,$$

siendo x_0 y x_1 las abscisas de los puntos extremos A y B.

Puesto que la función V no contiene explícitamente ni á x ni á y, aplicaremos la fórmula

$$V = Qq + c'p + c, \qquad \text{siendo} \qquad Q = -\frac{(1+p^2)^2}{2q^2};$$

luego $$\frac{(1+p^2)^2}{2q} = -\frac{(1+p^2)^2}{2q} + c'p + c$$

ó $$\frac{(1+p^2)^2}{q} = c'p + c.$$

Y puesto que $\rho = \frac{(1+p^2)^{3:2}}{2}$, esta ecuación se reduce á

$$\rho = \frac{c'p + c}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Sea θ el ángulo MTx de la tangente en M con el eje Ox.

$$\operatorname{tg}\theta = p, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Por consiguiente $\rho = c'\operatorname{sen}\theta + c\cos\theta$,

Sean a y α dos nuevas constantes tales, que sea

$$c = -2a\operatorname{sen}\alpha, \qquad c' = 2a\cos\alpha'.$$

Se tendrá $$a = \frac{1}{2}\sqrt{c + c'},$$

$$\operatorname{sen}\alpha = -\frac{c}{\sqrt{c^2 + c'^2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{c'}{\sqrt{c^2 + c'^2}},$$

y $$\rho = 2a\operatorname{sen}(\theta - \alpha).$$

Tomemos dos nuevos ejes rectangulares Ox' y Oy' tales que sea $x'\mathrm{O}x = \alpha$.

Si se hace $\theta - \alpha = \theta'$ se tendrá $\rho = 2a\operatorname{sen}\theta'$.

Formemos la ecuación diferencial que conviene á estos nuevos ejes. Se tiene

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{dy}{dx} \quad \text{de donde} \quad \operatorname{sen}\theta' = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}}.$$

Sustituyamos ρ por

$$\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{3:2} : -\frac{d^2y}{dx^2},$$

valor que supone á la curva cóncava hacia el eje de las x. Tendremos

$$\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2=-a\frac{d\frac{dy^2}{dx^2}}{dx},$$

ecuación diferencial de la curva buscada, con relación á los nuevos ejes. De esta ecuación se deduce

$$dx=-\frac{ad\frac{dy^2}{dx^2}}{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2} \text{ de donde } x-c-\frac{a}{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$$

Suponiendo conocida la constante c, podemos imaginar que se transporta el eje de las y paralelamente á sí mismo, de manera que todas las antiguas abscisas queden disminuídas en c. La ecuación diferencial de la curva será entonces

$$x=\frac{a}{1+\frac{dy^2}{dx^2}} \quad \text{ó} \quad dy=dx\sqrt{\frac{a}{x}-1}.$$

La curva buscada es pues una cicloide cuyo eje está dirigido según el eje de las x y cuya tangente en el vértice es el eje de las y.

Para determinar las cuatro constantes de la ecuación de la curva referida á los ejes primitivos, distinguiremos varios casos.

1.° Si están dados los puntos A y B, así como las tangentes á la curva en estos puntos, la ecuación $\Gamma=0$ queda satisfecha idénticamente; porque se tiene $\delta x_0=0$, $\delta y_0=0\ldots.$ Se obtendrán las cuatro constantes sustituyendo las coordenadas de A y B en la ecuación de la curva, y expresando que están dadas las tangentes en estos puntos.

2.° Si se dan los puntos A y B sin darse las tangentes á la curva en estos dos puntos, la ecuación $\Gamma=0$ se reducirá

$$Q_1\,\delta p_1-Q_0\,\delta p_0=0;$$

y, como las variaciones δp_1 y δp_0 son independientes entre sí, es necesario que se tenga separadamente $Q_1 = 0$, $Q_0 = 0$.

Se ha obtenido generalmente

$$Q = -\frac{(1+p^2)^2}{2q^2},$$

y como $1 + p^2$ no puede anularse, es necesario que se tenga

$$Q_1 = \infty\,, \; q_0 = \infty\,.$$

De esto se deduce el radio de curvatura es nulo en A y B. Estos puntos son pues, de retroceso.

3.º Supongamos dado el punto A y la tangente á la cicloide en este punto y que el punto B se halla en la curva $y = \psi(x)$. En este caso la ecuación $\Gamma = 0$ se compone de dos partes. Un término que contiene δx_1 y el término $Q_1\,\delta p_1$. Siendo δx_1 y δp_1 independientes, se debe tener $Q_1 = 0$, de donde $q_1 = \infty$. Así, el punto B es todavía un punto de retroceso de la cicloide.

159. MÁXIMO Ó MÍNIMO RELATIVO. En las cuestiones anteriores se trataba de hacer máxima ó mínima una integral definida $\int_{x_0}^{x_1} V\,dx$, sin más condiciones. Se puede añadir al problema la condición de que otra integral definida $\int_{x_0}^{x_1} U\,dx$ tenga un valor determinado l. Por ejemplo, propongámonos hallar, entre todas las curvas planas de igual longitud l terminadas en los puntos A y B, aquélla cuya área comprendida entre dicha curva, el eje de abscisas y las dos curvas extremas, sea un máximo.

La cuestión consiste en determinar y en función x, de modo que siendo

$$\int_{x_0}^{x_1} dx\sqrt{1+p^2} = l,$$

la integral $\int_{x_*}^{x_1} y\,dx$ tenga un valor mayor ó menor que si se sustituye y por cualquiera otra función de x que satisfaga á la ecuación precedente. Se dice entonces que la integral admite un *máximo* ó un *mínimo* relativo.

Por ejemplo, si se trata de hacer máxima la integral $\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{V}dx$ con la condición $\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{U}dx = l$, las variaciones de estas integrales deben ser nulas, cuando se compara la función obtenida de x con aquellas que hacen conservar á $\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{U}dx$ el mismo valor. Se debe pues tener

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{V}dx = 0, \quad \delta \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{U}dx = 0. \tag{2}$$

Desarrollando estas dos condiciones, como se ha hecho para el máximo absoluto, se tendrá dos ecuaciones tales como

$$\Gamma + \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{K}\lambda\, dx = 0, \quad (3) \qquad \Theta + \int_{x_0}^{x_1} \Gamma\omega dx = 0, \tag{4}$$

Γ, Θ, K, L son funciones que se formarán, como se ha dicho arriba. Pero no es necesario hacer separadamente $\Gamma = 0$, $\mathrm{K} = 0$, porque ω no es ya una función completamente arbitraria de x. Para obtener las condiciones que deben satisfacerse en este caso, es necesario eliminar ω. Hagamos

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{L}\omega dx = \varphi(x), \tag{5}$$

de donde $\quad \varphi(x_0) = 0, \quad \int_{x^0}^{x_1} \mathrm{L}\omega dx = \varphi(x_1).$

Por consiguiente,

$$\Theta + \varphi(x_1) = 0 \quad \text{ó} \quad \varphi(x_1) = -\Theta.$$

De esto resulta, por efecto de la indeterminación de ω, que $\varphi(x)$ es una función arbitraria de x, sujeta solamente á anularse para $x = x_0$ y á ser igual á $-\Theta$ para $x = x_1$. Pero, en virtud de la ecuación (5)

$$\omega = \frac{1}{\mathrm{L}} \frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (3) resulta

$$\Gamma + \int_{x_0}^{x_1} \frac{K}{L}\, d\,\varphi(x) = 0,$$

ó, integrando por partes,

$$\Gamma - \left(\frac{K}{L}\right)_1 \Theta - \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\, d\left(\frac{K}{L}\right) = 0. \qquad (6)$$

Puesto que $\varphi(x)$ es una función arbitraria de la que se dan tan solo los valores para $x = x_0$, $x = x_1$, se deben verificar separadamente las ecuaciones

$$d\left(\frac{K}{L}\right) = 0, \quad (7) \qquad\qquad \Gamma - \left(\frac{K}{L}\right)_1 \Theta = 0. \quad (8)$$

La primera da $\frac{K}{L} = -a$ ó $K + aL = 0$, expresando a una constante arbitraria.

La segunda condición se reduce á $\Gamma + a\Theta = 0$, porque $\left(\frac{K}{L}\right)_1 = -a_1$, por tener $\frac{K}{L}$ un valor constante $-a_1$. Se tiene pues las dos ecuaciones

$$\Gamma + a\Theta = 0, \qquad K + aL = 0. \qquad (9)$$

Habrá una constante más que cuando se busca un mínimo absoluto; pero se tiene también una ecuación de más $\int_{x_0}^{x_1} V dx = l$.

Si se hubiese buscado el máximo de la integral definida

$$\int_{x_0}^{x_1} (V + aU)\, dx,$$

se habría llegado á dos ecuaciones (9). Por consiguiente, la investigación del máximo *relativo* de la integral $\int_{x_0}^{x_1} V dx$, cuando la integral $\int_{x_0}^{x_1} U dx$ debe conservar un valor constante, se reduce á buscar el máximo absoluto de la integral $\int(V + aU)\,dx$, lo que puede razonarse como sigue:

Si $\int_{x_0}^{x_1}(V + aU)\,dx$ es un máximo, mientras que $\int_{x_0}^{x_1} U dx$ conserva un valor constante é igual á l, expresando U′ y V′ funciones poco diferentes de U y V, debe tenerse

$$\int_{x_0}^{x_1}(V + aU)\,dx > \int_{x_0}^{x_1}(V' + aU')\,dx \tag{10}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} U dx = \int_{x_0}^{x_1} U' dx = l \tag{11}$$

luego
$$\int_{x_0}^{x_1} V dx > \int_{x_0}^{x_1} V' dx \tag{12}$$

lo que demuestra que $\int_{x_0}^{x_1} V dx$ es un máximo, cuando queda satisfecha la condición $\int_{x_0}^{x_1} U dx = l$. Recíprocamente, de la desigualdad (12) y de la (1) se deducirá la (10).

160. Problemas de los isoperímetros. *Dados dos puntos* C *y* D *en un plano, hallar entre todas las curvas de igual longitud, situadas en este plano, y terminadas en* C *y* D, *aquélla para la que el área* ABCD *es un máximo.*

Se debe tener
$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{dx^2 + dy^2} = l$$

y es necesario hallar el máximo de la integral $\int_{x_0}^{x_1} y dx$.

Según la teoría precedente, se deberá buscar el máximo absoluto de la integral $\int_{x_0}^{x_1}(y dx + a\sqrt{dx^2 + dy^2})$ lo que conduce á escribir

$$\delta\int_{x_0}^{x_1}(y dx + a\sqrt{dx^2 + dy^2}) = 0. \tag{1}$$

Puesto que los límites x_0 y x_1 son fijos, la parte Γ de la variación es idénticamente nula. Además puede hacerse que no varíe más que x. Se tiene pues,

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(y+a\,\frac{dx}{ds}\right)d\delta x=0, \tag{2}$$

ó, integrando por partes y suprimiendo la cantidad exterior á la integral, que es nula,

$$\int_{x_0}^{x_1}\delta x d\left(y+a\,\frac{dx}{ds}\right)=0,$$

é igualando á o el coeficiente de δx,

$$d\left(y+a\,\frac{dx}{ds}\right)=0 \quad \text{de donde} \quad y+a\,\frac{dx}{ds}=c'.$$

Sustituyendo por ds su valor y resolviendo respecto á dx

$$dx=\frac{(y-c')\,dy}{\sqrt{a^2-(y-c')^2}}, \qquad x-c=\sqrt{a^2-(y-c')^2}$$

y $$(x-c)^2+(y-c')^2=a^2.$$

La curva buscada es una circunferencia.

PROBLEMA. *De todas las curvas isoperímetras que pueden trazarse en un plano entre dos puntos dados* A *y* B, *obtener la que, girando alrededor de la recta* Ox, *engendra una superficie máxima ó mínima.*

Hay que hallar el máximo ó mínimo de $\int_{x_0}^{x_1} yds$ con la condición $\int_{x_0}^{x_1} ds=l$; y la cuestión se reduce á obtener el máximo ó mínimo absoluto de $\int_{x_0}^{x_1}(y+a)\,ds$, que por ser a una constante, se reducirá á obtener el máximo absoluto de $\int yds$.

PROBLEMA. *Entre todas las curvas isoperímetras hallar la que engendra el volumen de revolución mínimo.* La ecuación del problema es

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} (y^2 dx + a ds) = 0.$$

Puesto que están dados los puntos A y B, puede no hacerse variar más que x y prescindir de la parte Γ que es idénticamente. nula, puesto que no hay derivada de orden superior al primero Según esto, se tendrá

$$d\left(y^2 + a\frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad y^2 + a\frac{dx}{ds} = 0.$$

y $$ds = \frac{(y^2 - c)\,dy}{\sqrt{a^2 - (y^2 - c)^2}}.$$

FIN DEL TOMO CUARTO

ÍNDICE

LIBRO PRIMERO

INTEGRALES INDEFINIDAS Y DEFINIDAS

LIBRO SEGUNDO

FUNCIONES REPRESENTADAS POR INTEGRALES

LIBRO TERCERO

CÁLCULO DE LAS VARIACIONES

NUEVA ENCICLOPEDIA MATEMÁTICA.—T. VIII

Tratado de Análisis Matemático

TOMO QUINTO

Aplicaciones del Cálculo Infinitesimal

AL ESTUDIO DE LAS FIGURAS EN EL ESPACIO

POR EL

Dr. Zoel G. de Galdeano

Catedrático de Cálculo infinitesimal
en la Universidad de Zaragoza, corresponsal de las RR. Academias de Ciencias
de Madrid y de Lisboa y miembro de otras asociaciones matemáticas

ZARAGOZA
TIPOGRAFÍA DE E. CASAÑAL, COSO, 100
1905

LIBRO PRIMERO

LÍNEAS Y SUPERFICIES

CAPÍTULO I

Propiedades primeras de las curvas alabeadas

§ 1.° Tangente y plano normal

1. Coordenadas homogénas. Si en la ecuación $f(x, y, z) = o$ de una superficie se cambian x, y, z por $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ y se quitan los denominadores, dicha ecuación se transforma en otra homogénea del mismo grado $f(x, y, z, t) = o$ que para $t = o$ adquiere la forma primitiva.

Los puntos en el infinito corresponden al valor $t = o$. Si se observa que toda ecuación de primer grado, en x, y, z, t representa un plano, exceptuada la ecuación que contiene tan solo t, se podrá convenir en que aun en este caso representa un plano en el infinito. Así la ecuación $t = o$ es la ecuación límite hacia la que converge la ecuación $ax + by + cz + dt = o$, lo cual conviene con el crecimiento indefinido de las coordenadas en el origen $-\frac{d}{a}, -\frac{d}{b}, -\frac{d}{c}$. Todos los puntos en el infinito pueden pues considerarse como pertenecientes al plano *analítico* $t = o$.

Sea la recta

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = \rho. \qquad (1)$$

Esta recta que pasa por el punto $M(x_0, y_0, z_0)$ corta á una superficie $f(x, y, z) = 0$ en m puntos, cuyas distancias ρ á M están determinadas por la ecuación $f(x_0 + a\rho,\ y_0 + b\rho,\ z_0 + c\rho) = 0$.

Si esta ecuación pasa del grado m al $m - 1$, se podrá decir que tiene una raíz infinita y que uno de los puntos de intersección con la recta de la superficie, ha pasado al infinito. Si se expresa por $\varphi(x, y, z)$ el conjunto de los términos de mayor grado de $f(x, y, z)$, se ve que para que una recta tal como (1) encuentre á una superficie en el infinito, es necesario y suficiente que sea $\varphi(a, b, c) = 0$, condición independiente de x_0, y_0, z_0. Así pues, diremos que toda recta paralela á una recta que encuentra á una superficie en el infinito la encuentra también en el infinito.

Las rectas que encuentran á una superficie en el infinito son *rectas asintóticas* y sus direcciones se llaman *direcciones asintóticas.* Las rectas asintóticas que pasan por (x_0, y_0, z_0) forman el cono de las direcciones asintóticas relativas á este punto, para obtener su ecuación, se elimina a, b, c entre $\varphi(a, b, c) = 0$ y las ecuaciones (1). El cono de las direcciones asintóticas se llama *cono director.*

2. Tangentes á las curvas alabeadas. Sean las ecuaciones

$$f(x, y, z) = 0 \qquad \varphi(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

que determinan una curva de doble curvatura, x, y, z las coordenadas del punto M y $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ las del punto M′. Las ecuaciones de la secante MM′ serán

$$Y - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(X - x), \qquad Z - z = \frac{\Delta z}{\Delta x}(X - x),$$

en la que X, Y, Z expresan las coordenadas generales. Y si M′ se aproxima á M indefinidamente, en el límite, se tendrá que las ecuaciones de la tangente son

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x), \qquad Z - z = \frac{dz}{dx}(X - x). \tag{2}$$

Dividiendo estas ecuaciones entre sí, se obtiene la ecuación de la proyección de la tangente á la curva sobre el plano yz,

$$Y - y = \frac{dy}{dz}(Z - z).$$

La forma de estas ecuaciones hace ver que la proyección de la tangente sobre cada plano coordenado es tangente á la proyección de la curva sobre este plano.

Los coeficientes diferenciales $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dz}{dx}$ se obtienen por la diferenciación de las ecuaciones (1), lo que da

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0 \quad (3)$$

Sacando los valores de los coeficientes diferenciales, y sustituyendo en (2) se obtendrán las ecuaciones de la tangente. Pero se llegará más brevemente á este resultado, deduciendo de (2) que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y - y}{X - x}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{Z - z}{X - x},$$

y sustituyendo en (3), lo que da

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z - z) = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial \varphi}{dz}(Z - z) = 0.$$

Se obtienen pues las ecuaciones de la tangente, sustituyendo en las ecuaciones diferenciales, dx, dy, dz por las diferencias $X - x$, $Y - y$, $Z - z$.

Observación. Para expresar que una recta, representada por las ecuaciones (1) del número 1 es tangente á una curva basta, en general, expresar que encuentra á la curva en dos puntos coincidentes, es decir, que las ecuaciones de la recta y las de la curva tienen *dos* soluciones comunes coincidentes, ó que las ecuaciones en ρ obtenidas sustituyendo $x + a\rho, \ldots\ldots$ por $X, \ldots\ldots$ tienen una solución doble. Pero en el caso de que el punto sea singular, una recta encuentra á la curva en dos puntos coincidentes; por esta razón es preferible expresar que la recta coincide con una tangente, identificando las fórmulas (1) del número 1 con las de la tangente. Tendremos, respecto á los planos xz é yz,

$$x+(Z-z)\frac{dx}{dz}=x_0+(Z-z_0)\frac{a}{c},\ y+(Z-z)\frac{dy}{dz}=y_0+(Z-z_0)\frac{b}{c},$$

que deben verificarse independientemente de Z, lo que da

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{dz}{c},$$

3. Ángulos de la tangente. Supongamos que los ejes de coordenadas son rectangulares. Por la figura se ve que

$$\cos\gamma'=\frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}},$$

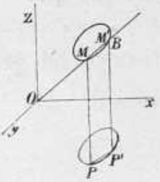


Figura 1

$$\cos\gamma'=\frac{\Delta z:\Delta t}{\sqrt{\frac{\Delta x^2}{\Delta t^2}+\frac{\Delta y^2}{\Delta t^2}+\frac{\Delta z^2}{\Delta t^2}}}.$$

y en el límite $\cos\gamma=\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$

Concluyéndose para todos los ángulos

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\qquad \cos\beta=\frac{dy}{ds},\qquad \cos\gamma=\frac{dz}{ds},$$

como en el caso de las curvas planas.

4. Plano normal. Las ecuaciones de un plano y de la tangente á una curva, que pasan por el punto M (x, y, z), son

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$$

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x),\qquad Z-z=\frac{dz}{dx}(X-x),$$

Para que el plano sea perpendicular á la tangente, se necesita que se tenga

$$\frac{B}{A} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{C}{A} = \frac{dz}{dx};$$

luego la ecuación del plano normal es

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy + (Z - z)\,dz = 0.$$

También podemos obtener este resultado sustituyendo en la expresión conocida

$$\cos TMN = \cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma'$$

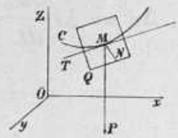


Figura 2

los valores de los cosenos

$$\cos\alpha' = \frac{X - x}{MN}, \ \cos\beta' = \frac{Y - y}{MN}, \ \cos\gamma' = \frac{Z - z}{MN},$$

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \ \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \ \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

§ 2.º Plano osculador

5. Definición. Se llama *plano osculador* de una curva alabeada al límite hacia el que tiende el plano que pasa por tres puntos de una curva, que tienden indefinidamente á reducirse á uno solo, ó lo que es lo mismo al límite de las posiciones de un plano que pasa por la tangente en uno de los puntos M de la curva, cuando pasa por otro punto m que tiende á confundirse con el primero.

Sea un plano que pasa por el punto $M(x, y, z)$

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0. \quad (1)$$

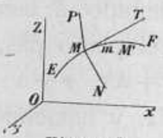


Figura 3

Si pasa además por la tangente en M,

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x), \quad Z - z = \frac{dz}{dx}(X - x),$$

tendremos $A(X - x) + B\frac{dy}{dx}(X - x) + C\frac{dz}{dx}(X - x) = 0$

ó $$A dx + B dy + C dz = 0. \qquad (2)$$

Puesto que dicho plano ha de pasar por el punto

$$M'(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)$$

tendremos $$A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z = 0. \qquad (3)$$

Considerando á x, y, z como dependientes de un parámetro t, será

$$\Delta x = \Delta t \frac{dx}{dt} + \frac{\Delta t^2}{1.2}\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\right),\quad \Delta y = \Delta t \frac{dy}{dt} + \frac{\Delta t^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} + \beta\right),$$

$$\Delta z = \Delta t \frac{dz}{dt} + \frac{\Delta t^2}{1.2}\left(\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma\right),$$

de manera que la ecuación (3) se reducirá á

$$A\left[\frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{1.2}\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\right)\right] + B\left[\frac{dy}{dt}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} + \beta\right)\right]$$
$$+ C\left[\frac{dz}{dt}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{1.2}\left(\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma\right)\right].$$

que, en virtud de (2), y pasando al límite, se reduce á

$$A d^2x + B d^2y + C d^2z = 0. \qquad (3)$$

Eliminando A, B, C entre (1), (2) y (3) resulta la ecuación del plano osculador

Figura 4

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

También habríamos llegado á este resultado suponiendo que el plano pasa por los puntos x, y, z, $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ y $x+2\Delta x+\Delta^2 x$, $y+2\Delta y+\Delta^2 y$, $z+2\Delta z+\Delta^2 z$, y haciendo tender á los puntos M′ y M″ hacia el M.

6. Ángulos con los planos coordenados. Sean λ, μ, ν los ángulos que forma con los ejes la perpendicular PM al plano osculador, que se llama *binormal*. Se tendrá

$$\cos\lambda = \frac{A}{D}, \quad \cos\mu = \frac{B}{D}, \quad \cos\nu = \frac{C}{D}. \qquad (D^2 = A^2 + B^2 + C^2)$$

Haciendo, por brevedad, $dx = a$, $dy = b$, $dz = c$, $d^2x = a'$, $d^2y = b'$, $d^2z = c'$, obtendremos

$$D^2 = (bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2$$

$$D^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc'),$$

que, en virtud de ser

$$ds^2 = a^2 + b^2 + c^2, \qquad ds\, d^2s = aa' + bb' + cc',$$

se transforma en

$$D = ds\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}$$

que puede escribirse también bajo las formas

$$D = \sqrt{(ds\, d^2x - dx\, d^2s)^2 + (ds\, d^2y - dy\, d^2s)^2 + \ldots\ldots}$$

$$D = ds^3\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}$$

$$\cos\lambda = \rho\begin{vmatrix} \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2y}{dz^2} & \frac{d^2s}{ds^2} \end{vmatrix}, \quad \cos\mu = \rho\begin{vmatrix} \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \\ \frac{d^2z}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} \end{vmatrix}, \quad \cos\nu = \rho\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} \end{vmatrix}.$$

$$\cos\lambda = \frac{\rho}{ds^3}(dy\, d^2z - dz\, d^2y), \quad \cos\mu = \frac{\rho}{ds^3}(dz\, d^2x - dx\, d^2z),$$

$$\cos\nu = \frac{\rho}{ds^3}(dx\, d^2y - dy\, d^2x).$$

7. Orden de contacto del plano osculador. Puesto que el plano osculador en un punto M de la curva, la corta en tres puntos confundidos, puede decirse que tiene con ésta un contacto de *segundo orden*.

Esta consideración permite obtener la fórmula ya obtenida del plano osculador, pues siendo

$$AX + BY + CZ + D = 0 \quad y \quad x = f(u), \quad y = \varphi(u), \quad z = \psi(u)$$

las ecuaciones de un plano y una curva cualesquiera, las condiciones del contacto de segundo orden están dadas por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} Af(u) + B\varphi(u) + C\psi(u) &= D, \\ Af'(u) + B\varphi'(u) + C\psi'(u) &= D, \\ Af''(u) + B\varphi''(u) + C\psi''(u) &= D, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

que son las condiciones para que una ecuación tenga una raíz triple.

TEOREMA. *El plano osculador de una curva en un punto* M *de esta curva, es un plano situado á una distancia infinitamente pequeña de tercer orden de un punto* M' *de la curva infinitamente próximo del* M.

En efecto, la distancia del punto $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ al plano se expresa por

$$\frac{A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Y para hacer ver que esta distancia es de tercer orden, basta sustituir por Δx, Δy, Δz sus expresiones

$$dx + \frac{1}{2} d^2x + \ldots, \quad dy + \frac{1}{2} d^2y + \ldots, \quad dz + \frac{1}{2} d^2z + \ldots$$

é igualando á cero los términos que contienen infinitamente pequeños de primero y de segundo orden, resultan las ecuaciones (2) y (3).

8. PUNTOS EN QUE EL PLANO OSCULADOR PERMANECE ESTACIONARIO. Pueden existir en una curva alabeada puntos excepcionales en los que el plano osculador tenga *más* de tres puntos comunes confundidos. Se dice que en estos puntos el plano osculador es *estacionario*, análogamente á la tangente de inflexión de las curvas planas. En el caso de que tratamos, á las tres ecuaciones arriba consideradas hay que agregar una cuarta

$$Af'''(u) + Bf'''(u) + Cf'''(u) = 0.$$

Sustituyendo en ésta, valores proporcionales á A, B, C sacados de las ecuaciones (1), tendremos la condición

$$(\varphi'\psi'' - \psi'\varphi'')f''' + (\psi'f'' - f'\psi'')\varphi''' + (f'\varphi'' - \varphi'f'')\psi''' = 0,$$

que determina los valores de u correspondientes á los puntos en que el plano osculador es *sobreosculador* ó *estacionario*.

9. Disposición del plano osculador respecto á la curva. Teorema.—*En general, el plano osculador atraviesa á la curva.* En efecto, si suponemos que un móvil al recorrer la curva, encuentra á los puntos M_1, M, M_2 en el orden indicado, antes de llegar á M_1 describe un arco 1 situado en la parte inferior del plano (fig. 5 *a*), atraviesa después el plano en M_1 y recorre un arco 2, en la parte superior, enseguida el arco 3 inferior, y por último, el arco 4. Si pues M_1 y M_2 tienden hacia M, el plano tiende hacia el plano osculador en M, los arcos 2 y 3 se anulan, quedando la disposición de la figura 5, *b*, por la que se ve que la curva atraviesa al plano.

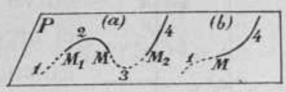


Figura 5

Excepción. Cuando el plano osculador corta á la curva en cuatro puntos coincidentes, no atraviesa á ésta.

10. Perspectiva de una curva alabeada. Sea O un punto fijo, P un plano fijo y C una curva alabeada. Para definir su perspectiva, uniremos O con el punto M de la curva alabeada, obteniendo la traza m en el plano P. El lugar de los puntos m es una curva plana c llamada perspectiva ó proyección central de C. Cuando el punto O se aleja indefinidamente, la perspectiva se transforma en la proyección de C paralela á dicha dirección.

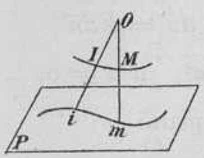


Figura 6

Se ve inmediatamente que la tangente á la curva perspectiva es la perspectiva de la tangente en M á la curva C.

Teorema. *Si en una curva* C *existe un punto* p *tal, que el plano osculador* P *en este punto pasa por el centro de perspectiva* O, *la perspectiva* p′ *de* p *es un punto de inflexión de la curva perspectiva* c. En efecto. Sea *ab* la traza del plano osculador en p sobre el plano de proyección Q y Opp' la proyectante de p situada en el plano P. El punto p' estará

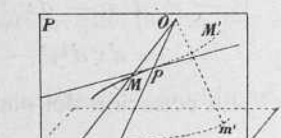


Figura 7

en ab. Si AB es la tangente en p á la curva alabeada estará en el plano osculador P y su perspectiva será ab; luego la curva perspectiva será tangente en p' á ab. Además la tangente ab atraviesa á la curva perspectiva en p', pues en el espacio, la curva C atraviesa al plano osculador P, hallándose el arco Mp delante y el pM' detrás; y por consiguiente, mp' estará delante y $p'm'$ detrás de ab. Por atravesar la tangente ab á la curva plana c en p', éste será un punto de inflexión.

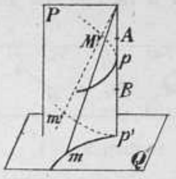


Figura 8

Caso de excepción. Cuando la tangente AB en p pasa por el centro de perspectiva, la perspectiva de AB será un punto p', y la curva presentará en este punto un retroceso (fig. 8).

11. Plano osculador de la hélice cilíndrica. Supongamos que el eje del cilindro sea el eje de las z. Puesto que la ordenada de la hélice es proporcional al arco AP, llamando u al ángulo AOP, tendremos para un punto M(x, y, z)

$$x = a \cos u, \quad y = a \operatorname{sen} u, \quad z = ku.$$

Diferenciando dos veces será

$$dx = -a \operatorname{sen} u\, du, \quad dy = a \cos u\, du, \quad dz = k\, du$$

$$d^2x = -a \cos u\, du^2, \quad d^2y = -a \operatorname{sen} u\, du^2, \quad d^2z = 0.$$

Para que sea osculador en el punto M el plano

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0,$$

tendremos que hacer

$$A = dy\, d^2z - dz\, d^2y = ak \operatorname{sen} u\, du^3$$

$$B = dz\, d^2x - dx\, d^2z = -ak \cos u\, du^3$$

$$C = dx\, d^2y - dy\, d^2x = a^2 du^3.$$

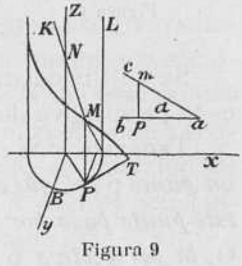


Figura 9

La ecuación del plano osculador será

$$(X - x)\, ak \operatorname{sen} u - (Y - y)\, ak \cos u + (Z - z)\, a^2 = 0$$

ó

$$(X - x)\, ky - (Y - y)\, kx + (Z - z)\, a^2 = 0.$$

CAPÍTULO II

Propiedades descriptivas de las superficies

§ 1.° Plano tangente de una superficie

12. Teorema. *Las tangentes á todas las curvas que pasan por un punto* P *en una superficie se hallan contenidas en un plano, que se llama el* plano tangente á la superficie.

En efecto, si trazamos en la superficie $f(x, y, z) = 0$ una curva cualquiera, que podremos obtener considerando simultáneamente la ecuación $f(x, y, z) = 0$ y la de otra superficie $\varphi(x, y, z) = 0$, las ecuaciones de las tangentes á la curva, intersección de dichas superficies, son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z - z) = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(Z - z) = 0. \qquad (2)$$

Pero dicha tangente se hallará siempre en el plano representado por la ecuación (1), cualquiera que sea la superficie $\varphi = 0$ que pase por el punto P de contacto; luego dicho plano es el lugar de las tangentes á todas las intersecciones ó curvas que pasan por P en la superficie propuesta.

Otra forma de la ecuación del plano tangente. Dividiendo la ecuación (1) del número anterior por $\frac{\partial f}{\partial z}$, y sustituyendo por los coeficientes que resultan sus valores p y q, tendremos

$$p(X - x) + q(Y - y - (Z - z) = 0.$$

13. Grado de la ecuación del plano tangente. Podemos escribir el plano tangente bajo la forma

$$\frac{\partial f}{\partial x} X + \frac{\partial f}{\partial y} Y + \frac{\partial f}{\partial z} Z = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z},$$

y agrupando los términos de los diferentes grados, será

$$f(x, y, z) = u + u_1 + u_2 + \ldots\ldots,$$

igualdad en la que u expresa la suma de los términos de grado m, u_1 la de los términos de grado $m - 1$, y así sucesivamente. Además, tendremos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \ldots; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + \ldots; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \ldots$$

Multiplicando respectivamente por x, y, z y sumando, tendremos

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = \left(x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$
$$+ \left(x \frac{\partial u_1}{\partial x} + y \frac{\partial u_1}{\partial y} + z \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) + \ldots;$$

y en virtud de una propiedad conocida de las funciones homogéneas, será

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = mu + (m - 1) u_1 + \ldots\ldots$$

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = - u_1 - 2u_2 - 3u_3 \ldots\ldots$$

Por lo tanto, *la ecuación del plano tangente es del grado* m — 1 *con relación á las coordenadas del punto de contacto.*

14. Superficies podares. Definición. Sean O un punto fijo y S una superficie fija. El lugar de los pies de las perpendiculares bajadas desde el punto O á los planos tangentes á la superficie se llama *superficie podar* de la superficie S con relación al punto O.

15. Superficies paralelas. Definición. Sea M un punto cualquiera de una superficie S y MN la normal en M. Si se toma

MN = const., el lugar de los puntos N será una superficie Σ á la que se llama *superficie paralela* á la S. Los puntos M y N se llaman *puntos correspondientes.*

16. TEOREMA. *Los planos tangentes en dos puntos correspondientes de dos superficies paralelas son paralelas.*

En efecto, sean x, y, z las coordenadas del punto M situado en S y x', y', z' las del punto correspondiente N de la superficie paralela, sea además l la longitud constante cuyos extremos son M y N. Se tiene

$$x' = x + l\alpha, \quad y' = y + l\beta, \quad z' = z + l\gamma$$

expresando α, β, γ los cosenos directores de la normal á S, y diferenciando tendremos

$$dx' = dx + ld\alpha, \quad dy' = dy + ld\beta, \quad dz' = dz + ld\gamma.$$

Multiplicando respectivamente por α, β, γ, sumando y suprimiendo la parte que se anula, en virtud de la relación conocida de los cosenos directores y su derivada, resultará

$$\alpha dx' + \beta dy' + \gamma dz' = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz.$$

Pero el segundo miembro es nulo, luego el primero también lo será; luego la dirección dx', dy', dz' situada en el plano tangente, es normal á α, β, γ.

17. PUNTOS SINGULARES. Cuando en la ecuación $f(x, y, z) = 0$ se verifica que $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, deja de existir la ecuación del plano tangente. Los valores de p y q se presentan bajo la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, los puntos especiales que se hallan en estas circunstancias se llaman *puntos singulares.*

Las tangentes á las curvas que pasan por él se hallan en un cono cuyo grado puede ser más ó menos elevado.

Observación. Si M′ y M″ son dos puntos infinitamente próximos al M, el plano M′MM″ tenderá hacia límites distintos, según las circunstancias. Así, cuando M′ y M″ tienden hacia M de manera que las rectas MM′ y MM″ tienden hacia dos tangentes *distintas* á la superficie, el plano $MM'M''$ tiende hacia el plano tangente, porque su posición límite contiene dos tangentes á la superficie. Pero si los puntos M' y M'' tienden hacia M, siguiendo los dos una misma curva trazada en la superficie que pasa por M, dicho plano tiende hacia el plano osculador á esta curva y no hacia el plano tangente á la superficie.

18. Posición de una superficie con respecto al plano tangente. Tomemos en la superficie $z = f(x, y)$ un punto $A(a, b, c)$, ó sea $c = f(a, b)$, cuya proyección sobre el plano de las xy es O'. Sea M un punto próximo al A, cuya proyección sobre el mismo plano es P.

Transportemos paralelamente los ejes al punto O', y tendremos $x = a + x'$, $y = b + y'$, conservando z el mismo valor. Tendremos

$$z = f(a + x', b + y'),$$

ó desarrollando según la fórmula de Taylor.

$$z = f(a, b) + px' + qy' + \frac{1}{2}(rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2) + \ldots\ldots$$

La ordenada MP encuentra al plano tangente en A, en un punto M_1, cuya ordenada $M_1 P$ designaremos por z_1. Siendo

$$Z - c = p(X - a) + q(Y - b)$$

la ecuación del plano tangente con relación á los ejes primitivos, y $X = a + x'$, $Y = b + y'$ las coordenadas de P, la ordenada z_1 del plano tangente será $z_1 = c + px' + qy'$. Pero tenemos que

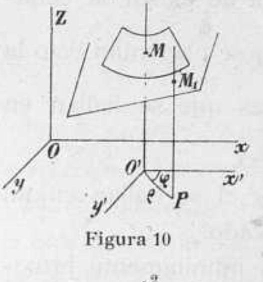


Figura 10

$$z - z_1 = \frac{1}{2}(rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2) + \ldots\ldots$$

ó, pasando á coordenadas polares

$x' = \rho \cos \varphi$, $y' = \rho \operatorname{sen} \varphi$ se tendrá

$$z - z_1 = \frac{\rho^2}{2}[r \cos^2 \varphi + 2s \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi + t \operatorname{sen}^2 \varphi + \rho f_3(\varphi) + \ldots]$$

expresando $f_3(\varphi)$ un polinomio homogéneo de tercer grado en

$\cos\varphi$ y $\operatorname{sen}\varphi$. Si el valor de φ no anula al trinomio, haciendo á ρ suficientemente pequeño, la diferencia $z - z_1$ tendrá el mismo signo que el trinomio. Y razonando como en el tomo primero (página 254) veremos que en caso de ser $rt - s^2 > 0$, la superficie se hallará totalmente á un mismo lado del plano tangente, es *convexa* en este punto, como sucede en la esfera, el elipsoide y el hiperboloide de dos hojas, y se dice que *tiene curvatura total positiva.*

En el caso de ser $rt - s^2 < 0$, podremos escribir

$$f_2(\varphi) = \cos^2\varphi\,(t\operatorname{tg}^2\varphi + 2s\operatorname{tg}\varphi + r)$$

que se anula para dos valores $\operatorname{tg}\varphi = \lambda$, $\operatorname{tg}\varphi = \lambda'$. Y se verá que $z - z_1$, cuando $\operatorname{tg}\varphi$ no es igual á λ ni λ', tiene el mismo signo que el trinomio para valores suficientemente pequeños de ρ; y puesto que este trinomio tiene signos distintos según que $\operatorname{tg}\varphi$ se halle ó no comprendida entre dichas raíces, $z - z_1$ cambiará de signo, al pasar de una región á la otra. La superficie *atraviesa* al plano tangente en la proximidad del punto A.

La proyección de la intersección de la superficie con el plano tangente, será

$$0 = rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2 + \ldots,$$

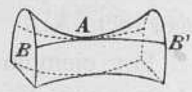


Figura 11

y

$$0 = rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2$$

la ecuación del haz de tangentes, que son reales. Luego el plano tangente corta á la superficie según una curva, cuyas dos tangentes se llaman las *direcciones asintóticas* en el punto A.

Un hiperboloide de una hoja, un paraboloide hiperbólico (figura 11) son superficies, cuya convexidad se cambia en concavidad á lo largo de las dos direcciones asintóticas, lo que se expresa también diciendo que cambia el signo de su curvatura.

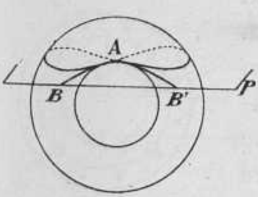


Figura 12

Cuando $rt - {}^2 = 0$, el trinomio es un cuadrado perfecto

$$t\cos^2\varphi\,(\operatorname{tg}\varphi - \lambda)^2,$$

cuyo signo es constante para cualquier valor de φ.

Para ρ suficientemente pequeño, $z - z_1$ tiene el signo del primer término de su desarrollo que no se anula para $tg\varphi = \lambda$; luego la superficie se halla á un mismo lado del plano tangente, en todas direcciones alrededor de A, excepto en una dirección AD, cuya proyección es O'E y la dirección opuesta. Para estas direcciones opuestas no se puede afirmar nada, sin estudiar los términos sucesivos del desarrollo de $z - z_1$, cuando se hace $\varphi = \lambda$.

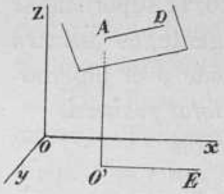


Figura 13

El plano tangente en A corta á la superficie según la curva cuya proyección es

$$0 = rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2 + \ldots.$$

En el caso actual esta curva tiene en O' un punto doble *con tangentes coincidentes* con O'E. El plano tangente en A corta pues, á la superficie según una curva que tiene en A un punto de retroceso cuya tangente es AD, ó más generalmente, un punto singular en el que dos ramas de la curva son tangentes entre sí y á la recta AD. Las dos direcciones asintóticas en A están confundidas con esta recta AD.

Por ejemplo, siendo en una superficie cónica ó cilíndrica el plano tangente en A, tangente á lo largo de la generatriz AD del punto A, corta á la superficie según dos rectas confundidas con AD. Así, la cantidad $rt - s^2$ es nula en todos los puntos de una superficie cónica ó cilíndrica. Veremos más adelante que ésta es una propiedad característica de las superficies desarrollables.

En un toro, el plano tangente perpendicular al eje es tangente á la superficie á lo largo de una circunferencia C. En un punto A (fig. 12) de ésta, la curvatura es nula. La tangente AB á C es la dirección asintótica en A. El círculo C y su simétrico respecto al ecuador del toro dividen á la superficie en dos partes. En la opuesta al eje la curvatura es positiva, en la vuelta hacia el eje es negativa.

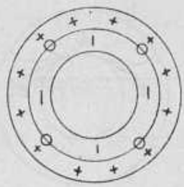


Figura 14

19. Normal. La perpendicular al plano tangente en el punto M de contacto (fig. 15) se llama *normal* á la

superficie. Para obtener su ecuación, observaremos que una recta

$$\frac{X-x}{a}=\frac{Y-y}{b}=\frac{Z-z}{c}$$

que pasa por el punto (x, y, z) será perpendicular al plano tangente, cuando los coeficientes directores a, b, c, sean proporcionales á las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$.

Las ecuaciones de la normal serán pues

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \qquad (1)$$

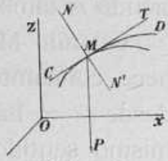


Figura 15

y sustituyendo p y q por sus expresiones conocidas, las ecuaciones (1) se reducirán á las siguientes:

$$X-x+p(Z-z)=0, \qquad Y-y+q(Z-z)=0.$$

Las expresiones de los ángulos que forma con los ejes son

$$\cos\alpha=-\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \cos\beta=-\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$$

§ 2.º Superficies regladas

20. Fórmulas generales. Consideremos la generatriz G

$$x=az+h, \qquad y=bz+k; \qquad (1)$$

en la que a, b, h, k son funciones continuas de un parámetro u. Cuando u varía, la generatriz G engendra una superficie reglada, cuyas generatrices son las rectas (1).

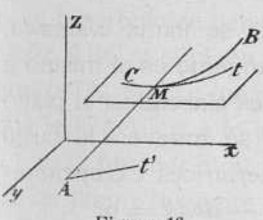


Figura 16

Tracemos la tangente Mt á la intersección C de la superficie con un plano P paralelo al de las xy en el punto M de intersección de P con la generatriz AM.

Puesto que el plano tangente en M debe contener las tangentes á todas las curvas que pasan por M en la superficie, contendrá á las dos rectas Mt y MA, que determinan el plano tMA, cuya traza At' con el plano de las xy es paralela á Mt, que tiene por coeficiente angular

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{z\,db + dk}{z\,da + dh},$$

siendo m también el coeficiente angular de At'.

Cuando M se mueve á lo largo de la generatriz AM, u permanece constante, así como da, db, dh y dk, mientras que z varía desde $-\infty$ hasta $+\infty$. Además, m varía con z siempre en el mismo sentido, tomando una sola vez todos los valores posibles comprendidos entre dichos límites, puesto que no cambia de signo al variar z, la derivada

$$\frac{dm}{dz} = -\frac{dadk - dbdh}{(z\,da + dh)^2},$$

Cuando M describe la generatriz AM, de un extremo á otro, el plano gira pues, en el mismo sentido alrededor de AM y adquiere una sola vez todas las posiciones posibles, exceptuándose cuando m sea independiente de z, lo que se verificará cuando $dadk - dbdk = 0$, en cuyo caso el plano tangente será el mismo en todos los puntos de la generatriz.

21. Clasificación de las superficies regladas. Cuando se verifica la condición última, del caso excepcional, para todas las generatrices de la superficie reglada, es decir, que se halla satisfecha para cualquier valor de u, se dice que la superficie es desarrollable.

En el caso contrario, la superficie reglada se llama *alabeada*. Para las superficies desarrollables, el plano tangente es el mismo á lo largo de cada generatriz; para las superficies alabeadas, el plano tangente varía, cuando el punto de contacto se mueve á lo largo de la generatriz. En estas últimas existen generatrices excepcionales para las que se verifica la condición $dadk - dbdh = 0$.

Observación. El plano tangente corta á la superficie desarrollable según dos rectas coincidentes con la generatriz de contacto, como se verifica en los conos y cilindros; y en las superficies alabeadas, el plano tangente queda á distinto lado de la superficie, variando el sentido de la curvatura, como se verifica en el hiperboloide de una hoja, conforme expresan las condiciones $rt - s^2 = 0$ y $rt - s^2 < 0$ (casos de la *curvatura total nula ó negativa).*

22. TEOREMA. *Dos superficies regladas alabeadas, que tienen una generatriz común, son, en general, tangentes á lo más en dos puntos de dicha generatriz; y si son tangentes en más de dos puntos, se ajustan, es decir, son tangentes á lo largo de la generatriz.*

Sean las generatrices de las dos superficies (fig. 16)

$$x = az + h, y = bz + k; \quad x = a_1 z + h_1, y = b_1 z + k_1;$$

y supongamos que estas dos superficies tengan una generatriz común AB. Los coeficientes angulares de las trazas de sus planos tangentes con el xy, en el punto M de la generatriz común AM, son

$$m = \frac{zdb + dk}{zda + dh}, \quad m_1 = \frac{zdb_1 + dk_1}{zda_1 + dh_1}.$$

Y la condición de coincidencia de los dos planos tangentes es la ecuación de segundo grado que resulta de igualar estas dos ecuaciones, cuando es $m = m_1$.

Ejemplo. Para construir un hiperboloide que tenga el mismo plano tangente que la superficie en M, consideremos tres puntos A, B, C de la generatriz, la tangente AA′ á la superficie en A, la BB′ en B y la CC′ en C; y consideremos también el hiperboloide engendrado por una recta móvil que se apoya en las tres rectas AA′, BB′, CC′. Este hiperboloide tiene común con la superficie la generatriz ABC y el plano tangente en cada uno de los tres puntos A, B y C; luego tiene el mismo plano tangente que la superficie á lo largo de ABC, es el *hiperboloide tangente.*

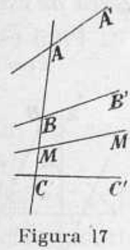


Figura 17

Para obtener el plano tangente en M de la superficie, basta trazar el plano tangente al hiperboloide en M, es decir, construir la generatriz rectilínea del hiperboloide del segundo sistema MM′. El plano tangente buscado será AMM′.

Definición. Se dice que una superficie reglada tiene un plano director, cuando sus generatrices son paralelas á un mismo plano, que es *plano director.*

TEOREMA. *Si dos superficies regladas alabeadas, con el mismo plano director, tienen una generatriz común, son tangentes en general en un solo punto á distancia finita en esta generatriz. Y si son tangentes en más de un punto á distancia finita en la generatriz, lo son totalmente á lo largo de la generatriz.*

En efecto, suponiendo que el plano director común sea el de las yz, las ecuaciones de una generatriz de cada superficie serán respectivamente

$$x = h, \quad y = bz + k; \qquad x = h_1, \quad y = b_1 z + k_1;$$

y la ecuación de segundo grado arriba considerada, se reduce á la de primero

$$\frac{z\,db + dk}{dh} = \frac{z\,db_1 + dk_1}{dh_1}.$$

23. PUNTO CENTRAL. LÍNEA DE ESTRICCIÓN. PARÁMETRO DE DISTRIBUCIÓN. Se llama *punto central* de una generatriz, en una superficie reglada, al pie de la perpendicular común á esta generatriz y á la generatriz infinitamente próxima. El lugar de los puntos centrales forma una línea situada en la superficie, que se llama *línea de estricción.*

Para estudiar la distribución de los planos tangentes á lo largo de una generatriz, tomemos esta generatriz por eje Oz, por origen O el punto central y por eje de las x la perpendicular común OA á la generatriz Oz y á la generatriz infinitamente próxima AB (fig. 18).

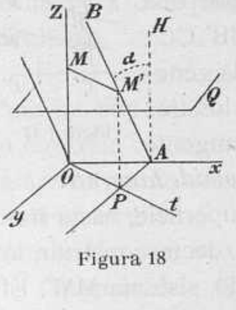


Figura 18

Siendo AB perpendicular á Ox, su proyección AH sobre el plano xOz se expresará por $x = \delta$ y su proyección sobre el yOz por $y = z \operatorname{tg} \alpha$, siendo α el ángulo de AB con Oz. En estas ecuaciones, δ y α representan la distancia de las dos generatrices infinitamente próximas Oz y AB, y el ángulo que forman, las cuales son cantidades infinitamente pequeñas. Elijamos el sentido de Oy de modo que α y δ sean positivas.

Si se corta la superficie por un plano Q, paralelo al de las xy, encontrará á Oz y AB en M y M'. El plano tangente en M se halla determinado por la generatriz Oz y por la tangente en M á la curva de intersección. Esta tangente es la recta MM' porque M' se halla infinitamente próximo á M. La traza horizontal Ot del plano tangente en M es pues paralela á MM', siendo $m = \frac{y}{x}$ su coeficiente angular. Pero hallándose el punto M' cuyas coordenadas son x é y, en AB, éstas satisfacen á las ecuaciones

$$x = \delta, \quad y = z \operatorname{tg} \alpha \qquad \text{de donde} \qquad m = z \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\delta}.$$

Y siendo α y δ infinitamente pequeñas, la relación $\frac{\delta}{\operatorname{tg} \alpha}$ tiene el mismo límite que $\frac{\delta}{\alpha}$. Si pues se hace $k = \lim \frac{\delta}{\alpha}$, se tendrá $m = \frac{z}{k}$. Este coeficiente k se llama *parámetro de distribución* á lo largo de Oz.

24. Ángulo del plano tangente con el plano central. Sean G y G' dos generatrices infinitamente próximas de una superficie reglada. Tracemos la perpendicular oo' (fig. 19) común á G y G'. El límite de las posiciones del pie o es el punto central y el lugar de los puntos centrales la línea de *estricción* de la superficie reglada. El plano de G y de la perpendicular común oo' es el *plano central* para la generatriz G.

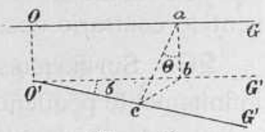


Figura 19

Tracemos por o' una paralela G_1 á G y por un punto a de G tracemos un plano perpendicular á esta recta. Este plano corta á G_1 en el punto b y á G' en el c. Siendo G' una generatriz infinitamente próxima á G, el punto c se halla infinitamente próximo del a y la recta ac es la tangente en a á la línea de estricción de la superficie reglada y del plano que hemos trazado en a perpendicularmente á G. El plano de G y de ac es entonces el

plano tangente en a de la superficie reglada. Tenemos $\operatorname{tg}\theta = \frac{bc}{ab}$.
Y siendo $x = oa$ y σ el ángulo de G y G′, tendremos $\operatorname{tg}\theta = \frac{s \operatorname{tg}\sigma}{ab}$, fórmula en la que ab expresa la longitud de la perpendicular común á G y G′, que llamaremos p, y será $\operatorname{tg}\theta = \frac{x \operatorname{tg}\sigma}{p}$, ó $\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{p:\sigma}$, sustituyendo el ángulo á la tangente. Representando por k el parámetro de distribución, será $\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{k}$. *La tangente del ángulo que el plano tangente en un punto de* G *forma con el plano central, es proporcional á la distancia del punto que se considera al punto central.*

25. Superficies alabeadas. Si suponemos que α y δ son infinitamente pequeños de igual orden, k es finito y diferente de cero. El plano tangente M varía, cuando M describe la generatriz; la superficie es *alabeada*. En el punto central O, $m = 0$, el plano tangente se confunde con zOx. Cuando M va de O al infinito positivo en Oz, z varía desde o hasta $+\infty$, é igualmente m. El plano tangente gira alrededor de Oz desde la posición xOz hasta la yOz. Cuando M va de O al infinito negativo, en Oz, z varía desde o hasta $-\infty$, é igualmente m. El plano gira al rededor de Oz en sentido contrario desde xOz hasta $y'Oz$.

26. Superficies desarrollables. Puede suceder que δ sea infinitamente pequeño de un orden supererior á α. Entonces el parámetro de distribución k es igual á cero, y para z diferente de cero se tiene $m = \infty$, cualquiera que sea z. El plano tangente es el mismo á lo largo de la generatriz Oz. Si esto se verifica para todas las generatrices de la superficie, esta es *desarrollable*.

El ejemplo más sencillo es el del cono. Entonces δ es rigorosamente nulo, porque las dos generatrices se encuentran. Puede suceder que también α sea infinitamente pequeño de orden superior á δ, entonces $k = \infty$ y $m = 0$, para cualquier valor de z. El plano tangente lo es todavía á lo largo de Oz. Así, en un cilindro, α es nulo, porque las generatrices son todas paralelas; luego $k = \infty$.

27. Superficie cónica. Teorema I. *Todo plano tangente al*

cono pasa por el vértice, y recíprocamente, toda superficie cuyo plano tangente pasa por un punto es un cono cuyo vértice es dicho punto.

En efecto, siendo

$$f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0$$

la ecuación de una superficie cónica (t. I, pág. 103), por depender las funciones $\frac{x-a}{z-c}$ é $\frac{y-b}{z-c}$, la una de la otra, su determinante es nulo, es decir,

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{z-c} - p\frac{x-a}{(z-c)^2} & -p\frac{y-b}{(z-c)^2} \\ -q\frac{x-a}{(z-c)^2} & \frac{1}{z-c} - q\frac{y-b}{(z-c)^2} \end{vmatrix} = 0$$

ó bien $z - c - p(x-a) - q(y-b) = 0$.

Esta ecuación expresa que el plano tangente en (x, y, z) pasa por (a, b, c), y fácilmente se demostrará el recíproco.

Teorema II. *El plano tangente al cono es el mismo á lo largo de la generatriz.* Este teorema que ya se ha demostrado, se puede demostrar también diferenciando la ecuación de las superficies cónicas respecto á x é y. Hagamos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{x-a}{z-c} = \alpha, \quad \frac{y-b}{z-c} = \beta,$$

y resultará $\frac{\partial f}{\partial \alpha}\left[\frac{1}{z-c} - p\frac{x-a}{(z-c)^2}\right] - \frac{\partial f}{\partial \beta} p \frac{y-b}{(z-c)^2} = 0.$

Se ve que p es función de $\frac{x-a}{z-c}$ y $\frac{y-b}{z-c}$, lo mismo se verá respecto á q; y en virtud de

$$z - c - p(x-a) - q(y-b) = 0,$$

lo mismo sucede respecto á $z - px - qy$. Los tres coeficientes $p, q, z - px - qy$ del plano tangente

$$Z - z - p(X-x) - q(Y-y) = 0$$

son funciones de dichas fracciones, que son las mismas á lo largo de una generatriz.

Para las superficies cilíndricas enunciaremos:

TEOREMA I. *Todo plano tangente á un cilindro contiene á la generatriz del punto de contacto.*

TEOREMA II. *Si el plano tangente á una superficie permanece paralelo á una recta fija, esta superficie es cilíndrica.*

28. CONOS Y CILINDROS CIRCUNSCRITOS. DEFINICIÓN. Se dice que dos superficies se hallan *circunscritas* entre sí según una curva común, llamada *curva de contacto*, cuando tienen el mismo plano tangente en todos los puntos de esta curva.

PROBLEMA I. *Trazar por un punto dado un plano tangente á la superficie*

$$f(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Este problema es, en general, indeterminado, existiendo una infinidad de planos que satisfacen al enunciado. Sea

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

la ecuación de un plano tangente á la superficie (1); y puesto que pasa por un punto (a, b, c), tendremos

$$c - z = p(a - x) + q(b - y). \tag{2}$$

Las ecuaciones (1) y (2) dan las coordenadas x, y, z de los puntos de contacto posibles. Así pues,

Las ecuaciones (1) *y* (2) *son las de la curva de contacto del cono circunscrito á la superficie representada por la ecuación* f = 0 *y cuyo vértice es* (a, b, c).

En efecto, la ecuación (2) expresa que el plano tangente á la superficie en (x, y, z), pasa por (a, b, c); y lo mismo sucederá á una superficie cónica cuyo vértice sea (a, b, c) y cuya directriz es el lugar de los puntos (x, y, z), representado por las ecuaciones (1) y (2), es decir, que el cono cuyo vértice es (a, b, c) y cuya directriz es la curva (1) y (2) se halla circunscrito á la superficie.

29. POLAR DE UN PUNTO. TEOREMA. *Si desde un punto dado como vértice, se circunscribe un cono á una superficie algebráica de* *grado* m, *la curva de contacto se hallará en una superficie de orden* $m - 1$, pues siendo $f = 0$ de grado m, la ecuación (2), es algebráica de gradó $m - 1$. Dicha superficie de órden $m - 1$ se llama la *polar* del punto (a, b, c) con relación á la superficie (1).

Observación. La teoría de las superficies polares es análoga á la de las curvas polares de la geometría plana.

PROBLEMA II. *Hallar la ecuación del cono circunscrito á una superficie dada por la ecuación* f (x, y, z) = 0, *cuyo vértice es el punto* (a, b, c).

Hagamos pasar por el vértice (a, b, c) la recta

$$\frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma} = \rho \qquad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1)$$

Las generatrices del cono son tangentes á la superficie $f = 0$; porque hallándose contenidas en el plano tangente común á las dos superficies, son tangentes á ambas.

Para expresar que la recta (1) encuentra á la superficie en dos puntos coincidentes, formemos la ecuación en ρ

$$f(a + \alpha\rho,\ b + \beta\rho,\ c + \gamma\rho) = 0,$$

y expresemos que tiene dos raíces iguales, eliminando ρ entre esta ecuación y su derivada

$$\alpha \frac{\partial f}{\partial a} + \beta \frac{\partial f}{\partial b} + \gamma \frac{\partial f}{\partial c} = 0.$$

Obtendremos una ecuación de la forma $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ (2).

Eliminando α, β, γ entre (1) y (2), se tendrá el lugar buscado, es decir, el cono circunscrito.

Ejemplo. Sea la superficie $f = \Sigma a_{ij} x_i x_j = 0$. Se tiene

$$f(a + \alpha\rho, \ldots) = \rho^2\varphi + \rho\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial a} + \beta\frac{\partial f}{\partial b} + \gamma\frac{\partial f}{\partial c}\right) + f(a, b, c) = 0,$$

expresando φ los términos de segundo grado en $f(\alpha, \beta, \gamma)$. La condición de tener raíces iguales es

$$\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial a} + \beta\frac{\partial f}{\partial b} + \gamma\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 = 4f(a, b, c)\,\varphi(\alpha, \beta, \gamma).$$

Por ser homogénea, eliminaremos fácilmente α, β, γ, y tendremos

$$\left[(x-a)\frac{\partial f}{\partial a}+(y-b)\frac{\partial f}{\partial b}+(z-c)\frac{\partial f}{\partial c}\right]^2$$
$$=4f\varphi[(x-a),\,(y-b),\,(z-c)]$$

ó $$\left(x\frac{\partial f}{\partial a}+y\frac{\partial f}{\partial b}+z\frac{\partial f}{\partial c}+t\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)=4f(a,b,c)\,f(x,y,z).$$

PROBLEMA III. *Trazar por una recta dada un plano tangente á una superficie dada.*

La ecuación de un plano tangente á la superficie $f=0$ es

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}+T\frac{\partial f}{\partial t}=0.$$

Si x_0, y_0, z_0, t_0 y x_1, y_1, z_1, t_1 son las coordenadas de dos puntos de la recta, se tendrá

$$x_0\frac{\partial f}{\partial x}+y_0\frac{\partial f}{\partial y}+z_0\frac{\partial f}{\partial z}+t_0\frac{\partial f}{\partial t}=0,$$

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x}+y_1\frac{\partial f}{\partial y}+z_1\frac{\partial f}{\partial z}+t_1\frac{\partial f}{\partial t}=0.$$

Estas dos ecuaciones con la de la superficie determinarán los puntos de contacto, cuyo número es $m(m-1)^2$ si la superficie es algebráica de grado m, y se obtendrán en la intersección de las curvas de contacto conos circunscritos cuyos vértices serán (x_0, y_0, z_0) y (x_1, y_1, z_1).

DEFINICIÓN. Se llama *clase* de una superficie al número de planos tangentes que se le pueden trazar por una recta. Si la superficie es de orden m, la clase será lo más $m(m-1)^2$.

PROBLEMA IV. *Trazar por un punto dado una normal á una superficie dada.*

Sea la ecuación de la superficie

$$f(x, y, z)=0. \qquad (1)$$

Las ecuaciones de la normal serán

$$\frac{X-x}{f_1}=\frac{Y-y}{f_2}=\frac{Z-z}{f_3}.$$

Si expresamos que pasa esta normal por el punto (α, β, γ), tendremos

$$\frac{\alpha - x}{f_1} = \frac{\beta - y}{f_2} = \frac{\gamma - z}{f_3}. \qquad (2)$$

Estas ecuaciones con la (1) determinarán el punto (x, y, z) de la normal en la superficie. Las ecuaciones (1) y (2) son de grado m, darán pues m^3 soluciones. Pero algunas son extrañas. En efecto, si (α, β, γ) está en el origen, las ecuaciones (2) se reducirán á $\frac{x}{f_1} = \frac{y}{f_2} = \frac{z}{f_3}$; pero puede escribirse

$$f(x, y, 0) + zf_3(x, y, 0) + \ldots\ldots = 0.$$

Y estas dos últimas ecuaciones quedarán satisfechas haciendo

$$z = 0, \quad f(x, y, 0) = 0, \quad f_3 = 0.$$

Las $m(m-1)$ soluciones de estas ecuaciones son extrañas á la cuestión (*), luego: *Por un punto dado no se pueden trazar más que* $m^3 - m^2 + m$ *normales á una superficie de grado* m.

§ 4.° Envolvente de una familia de curvas en el espacio

30. Condición para la existencia de una envolvente. Sea una curva definida en el espacio por las ecuaciones dependientes del parámetro α

$$f(x, y, z, \alpha) = 0, \qquad \varphi(x, y, z, \alpha) = 0. \qquad (1)$$

Cuando se hace variar á α de una manera continua, la curva C mueve de una manera continua. Vamos á hallar las condiciones para que exista una curva á la que sean tangentes todas las curvas C.

Supongamos que exista la envolvente E, y sea M (x, y, z) un punto de contacto de una curva C con la envolvente. Las coordenadas de un punto cualquiera de C son funciones de un parámetro

(*) O. Terquem. *Journal de Liouville*, 1.ª serie, t. IV.

u que verifica idénticamente á las dos ecuaciones (1), en las que α tiene un valor constante dado. Cuando u varía, las funciones $f(x, y, z, \alpha)$ y $\varphi(x, y, z, \alpha)$ permanecen nulas, y por tanto, sus diferenciales. Tendremos pues

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0. \quad (2)$$

Estas ecuaciones definen las proyecciones dx, dy, dz de un elemento infinitesimal MM′ de la curva C (fig. 20) y dan valores determinados de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, mientras que no sea

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} : \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

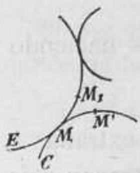


Figura 20

Si estas condiciones se verifican, el punto es singular. En el caso de no ser M un punto singular, se tendrá

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}.$$

Para obtener las proyecciones $d_1 x$, $d_1 y$, $d_1 z$ de un elemento de arco infinitamente pequeño MM_1 de la envolvente E, observaremos que á lo largo de la envolvente, las coordenadas x, y, z de uno de sus puntos, son funciones de α, porque para cada valor de α existe, en la envolvente, un punto de contacto con la envuelta C correspondiente. Sean $x = \psi_1(\alpha)$, $y = \psi_2(\alpha)$, $z = \psi_3(\alpha)$.
Estas funciones de α verifican idénticamente á las dos ecuaciones

$$f(x, y, z, \alpha) = 0, \qquad \varphi(x, y, z, \alpha) = 0.$$

Permaneciendo nulos los dos miembros de estas ecuaciones cuando varía α, sus diferenciales son nulas. Se tiene pues, expresando por $d_1 x$, $d_1 y$, $d_1 z$ las diferenciales de z, y, x consideradas como funciones de α,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} d_1 x + \frac{\partial f}{\partial y} d_1 y + \frac{\partial f}{\partial z} d_1 z + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} d_1 x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} d_1 y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} d_1 z + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} d\alpha = 0. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Las proyecciones del elemento de arco infinitamente pequeño MM_1 verifican estas dos relaciones. Las ecuaciones de la tangente en M á la envolvente E son

$$\frac{X - x}{d_1 x} = \frac{Y - y}{d_1 y} = \frac{Z - z}{d_1 z}.$$

Para que esta tangente coincida con la de la curva C, es necesario y suficiente que se tenga

$$\frac{d_1 x}{dx} = \frac{d_1 y}{dy} = \frac{d_1 z}{dz} = k.$$

Podemos, mediante estas relaciones, eliminar xd_1, yd_1, zd_1 en (3) y resultará

$$k\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz\right) + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,d\alpha = 0,$$

$$k\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,dz\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\,d\alpha = 0.$$

Pero, según las relaciones (2) estas ecuaciones se reducen á

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0;$$

luego, si las curvas C tienen una envolvente, las coordenadas x, y, z de un punto de esta envolvente, consideradas como funciones de α, deben satisfacer á las cuatro ecuaciones simultáneas

$$\left.\begin{aligned} &f(x, y, z, \alpha) = 0, \qquad && \varphi(x, y, z, \alpha) = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, && \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Es necesario, por consiguiente, que los valores de x, y, z en función de α sacados de las tres primeras ecuaciones (4) satisfagan idénticamente á la cuarta. Si esta condición no queda satisfecha, no hay envolvente.

Si queda satisfecha, sean

$$x = \psi_1(\alpha), \qquad y = \psi_2(\alpha), \qquad z = \psi_3(\alpha) \qquad (5)$$

los valores de x, y, z en función de α sacados de (4). La curva definida por las ecuaciones (5) es, ó bien la envolvente de las curvas C, ó bien el lugar de los puntos singulares de estas curvas En efecto, llamando d_1x, d_1y, d_1z las diferenciales de las funciones x, y, z de α definidas por las relaciones (5), estas funciones hacen idénticamente nulas á las expresiones $f(x, y, z, \alpha)$ y $\varphi(x, y, z, \alpha)$. Por consiguiente hacen idénticamente nulas á sus diferenciales, y se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial x} d_1x + \frac{\partial f}{\partial y} d_1y + \frac{\partial f}{\partial z} d_1z + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} d_1x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} d_1y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} d_1z + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} d\alpha = 0.$$

Pero los valores (5) de x, y, z anulan por hipótesis á $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$; luego será

$$\frac{\partial f}{\partial x} d_1x + \frac{\partial f}{\partial y} d_1y + \frac{\partial f}{\partial z} d_1z = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} d_1x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} d_1y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} d_1z = 0. \quad (6)$$

Estas relaciones determinan las relaciones $\frac{d_1y}{d_1x}$ y $\frac{d_1z}{d_1x}$ si las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$, ... no son proporcionales á las $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, ... es decir, si el punto considerado no es un punto singular de la curva C. Por ser estas relaciones idénticas á las (2), se ve que la curva (5) es tangente á la curva C, con la condición de que el punto considerado no sea singular.

Aplicación á la recta. Para que las rectas

$$x = az + h, \quad y = bz + k$$

en las que a, b, c son funciones del parámetro α, tengan una envolvente es necesario y suficiente que

$$da\,dk - db\,dh = 0.$$

Esto resulta de considerar el sistema de ecuaciones de la recta y de sus derivadas respecto á α

$$z\frac{da}{d\alpha} + \frac{dh}{d\alpha} = 0, \quad z\frac{db}{d\alpha} + \frac{dk}{d\alpha} = 0,$$

obteniéndose $z = -\dfrac{dh}{da}, \quad z = -\dfrac{dk}{db},$

que deben ser idénticas para que las rectas dadas tengan envolventes, ó formen una *superficie desarrollable.* En este caso, las coordenadas de un punto de la envolvente quedan definidas por

$$z = -\frac{dh}{da} = -\frac{dk}{db}, \quad x = az + h, \quad y = bz + k.$$

Esta envolvente se llama *arista de retroceso de la superficie desarrollable.*

Tenemos pues, nuevamente, que:

Si las rectas móviles no tienen envolvente, engendran una superficie alabeada; y si tienen una envolvente, engendrarán una superficie desarrollable, siendo envolvente de ésta la arista de retroceso.

TEOREMA. *El plano tangente á una superficie desarrollable coincide con el plano osculador de la arista de retroceso.*

En efecto, cuando el punto M representado por

$$x = f(u), \quad y = \varphi(u), \quad z = \psi(u),$$

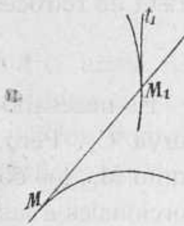


Figura 21

describe la arista de retroceso, la tangente Mt engendra la superficie desarrollable; y el plano tangente á la superficie desarrollable en un punto cualquiera M_1 de la generatriz M_1t es el mismo para cualquier posición del punto M_1, y coincide con el plano osculador en M á la arista de retroceso. Para determinarlo, observaremos primeramente que un plano tangente á una superficie se determina por las tangentes á dos curvas trazadas en ésta por el punto M. Desde luego vemos que M_1 pasa por la generatriz M_1M; luego el plano tangente en M_1 contiene á esta generatriz.

En cuanto á la segunda curva C_1 que pasa por M_1, vemos que al describir M_1 esta curva, la longitud MM_1 de la tangente á la arista de retroceso varía en función del parámetro u que fija la posición del punto M, siendo las ecuaciones de la tangente MM_1,

$$\frac{X - x}{f'(u)} = \frac{Y - y}{\varphi'(u)} = \frac{Z - z}{\psi'(u)};$$

y por hallarse el punto $M_1(x_1, y_1, z_1)$ en esta recta, tenemos

$$\frac{x_1 - x}{f'(u)} = \frac{y_1 - y}{\varphi'(u)} = \frac{z_1 - z}{\psi'(u)} = \rho,$$

y puesto que $x = f(u)$, $y = \varphi(u)$, $z = \psi(u)$, las coordenadas de M_1 serán

$$x_1 = f(u) + \rho f'(u), \quad y_1 = \varphi(u) + \rho\varphi'(u), \quad z = \psi + \rho\psi'(u).$$

En estas expresiones debe considerarse á ρ como una función de u tal, que cuando u varía, el punto M_1 describe la curva C_1. Esto sentado, el plano tangente á la superficie desarrollable en M_1 contiene á la generatriz MM_1, y pasa, en virtud de lo dicho, por el punto M, siendo su ecuación de la forma

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0. \qquad (1)$$

Y si expresamos que contiene á la recta MM_1, tangente á la arista de retroceso, tendremos

$$Af'(u) + B\varphi'(u) + C\psi'(u) = 0. \qquad (2)$$

Es necesario que contenga también á la tangente M_1t_1 de la curva C_1. Pero, según las expresiones de las coordenadas del punto M_1, los cosenos directores de esta tangente M_1t_1 son proporcionales á las diferenciales dx_1, dy_1, dz_1; luego

$$dx_1 = f'(u)[du + d\rho] + \rho f''(u)du, \quad dy_1 = \varphi'(u)[du + d\rho] + \rho\varphi''(u)du,$$
$$dz_1 = \psi'(u)[du + d\rho] + \rho\psi''(u)\,du;$$

y debe pues, verificarse que

$$Adx_1 + Bdy_1\ Cdz_1 = 0.$$

Sustituyendo los valores de las diferenciales, y en virtud de (2), se anula el coeficiente de $du + d\rho$, y queda

$$Af''(u) + B\varphi''(u) + C\psi''(u) = 0. \qquad (3)$$

Las condiciones (2) y (3) determinan los coeficientes A, B, C del plano tangente (1), que son las ecuaciones del plano osculador en M á la arista de retroceso.

31. Consideraciones geométricas. Una serie continua de planos engendra una superficie tangente á todos estos planos y desarrollable en un plano.

En efecto, los planos E_1, E_2 se cortan en una recta g_1, los E_2 y E_3 en otra recta g_2, y así sucesivamente. La superficie puede también engendrarse por la serie de rectas $g_1, g_2, \ldots$, de manera que se corten cada dos rectas consecutivas. Así, g_1 es la intersección de E_1 y E_2, g_2 la de E_2 y E_3, etc. Y puesto que los elementos lineales de la superficie que unen un punto de g_1 á otro infinitamente próximo de g_2 se hallan en E_2, este es un plano tangente á la superficie, lo mismo que el E_3, etc. Todos estos planos tangentes á lo largo de cada recta, al girar respectivamente, el E_2 alrededor de g_1, el E_3 alrededor de g_2,... podrán colocarse en un mismo plano.

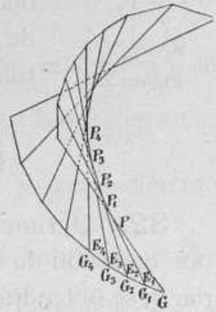


Figura 22

Las generatrices de la superficie son tangentes á la arista de retroceso. En cada plano del sistema se hallan tres puntos consecutivos de la arista de retroceso, por ejemplo, en E_2 los puntos P, P_1 y P_2. Así pues, los planos tangentes á la superficie son los planos osculadores de la arista de retroceso.

Recíprocamente, las tangentes de una curva alabeada cualquiera son las generatrices de una superficie desarrollable y los planos osculadores de la curva son tangentes á dicha superficie, ó la *envuelven*. La superficie es, por tanto, la envolvente del plano osculador, quedando dividida en dos partes cada generatriz en el punto de contacto por la arista de retroceso, cada una de las cuales engendra una de las dos hojas de la superficie, que son tangentes en la arista de retroceso.

Podemos concluir brevemente que: *Una superficie desarrollable puede aplicarse exactamente sobre un plano*, pues si consideramos la arista de retroceso como un polígono ABC ..... (fig. 23) de un número infinitamente grande de lados infinitamente pequeños, las tangentes sucesivas serán las prolongaciones de los lados del polígono. Una primera tangente es ABB', la segunda BCC', etc. Las tangentes definen una superficie poliedral formada por los ángulos B'BC', C'CD', ..., y cuyo límite es la superficie desarrollable, cuando el polígono ABC..... se reduce á una curva.

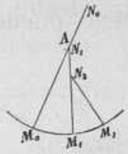


Figura 23

Haciendo girar el plano de la primera cara alrededor de BCC', hasta que se halle en la prolongación de la segunda, y así sucesivamente, se habrá efectuado el desarrollo de la superficie en el plano.

§ 4.º Superficies envolventes

32. Definición. Sea $f(x, y, z, \alpha) = 0$ (1) una ecuación de tres variables con un parámetro variable α. Al variar α, se obtendrá una serie de superficies que forman una *familia.*

Supongamos que se da á α un incremento $d\alpha$; tendremos otra superficie

$$f(x, y, z, \alpha + d\alpha) = 0 \qquad (2)$$

que cortará á la primera según una curva, que para $d\alpha = 0$ adquirirá una forma límite llamada *característica.* Las ecuaciones de la característica son (1) y (2) ó (1) y

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0. \qquad (3)$$

Si se elimina α entre $f = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$, se obtendrá el lugar de las características ó la *envolvente* de la superficie (1). La envolvente puede representarse también por las dos ecuaciones simultáneas (1) y (3) á condición de considerar α como función de x, y, z, deducida de una de las dos ecuaciones.

Teorema. *Las superficies de la familia* (1) *son tangentes á la envolvente á lo largo de una misma característica.*

En efecto, $f(x, y, z, \alpha) = 0$ representa á voluntad una envolvente ó una envuelta, según que se considere á α como una constante ó como una función de x, y, z deducida de

$$\frac{\partial f(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha} = 0.$$

Vamos ahora á demostrar que $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ ó p y q son las mismas para la envolvente y para la envuelta. Para ello calcularemos estos valores.

Diferenciemos $f = 0$ con relación á x y tendremos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{dz} p\right) = 0, \tag{4}$$

ecuación de la que se deduce p, y derivando con relación á y se obtendrá la ecuación análoga por la que deduce q. Pero $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ es nula, porque la ecuación $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ sirve de definición á α; y la ecuación (1) se reduce á $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p = 0$, resultado que se habría obtenido considerando á α como constante; y lo mismo se habría llegado á $\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q = 0$; luego $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ son las mismas para la envolvente y la envuelta á lo largo de una característica, sus planos tangentes son pues los mismos, y dichas superficies se hallan circunscrita la una á la otra.

RECÍPROCAMENTE *Si una superficie móvil* f (x, y, z, α) = 0 *se halla siempre circunscrita á otra fija* F = 0, *ésta es su envolvente.*

En efecto, toda superficie fija F = 0 puede representarse por la ecuación $f(x, y, z, \varphi) = 0$, siempre que φ se halle determinada por la identidad $f(x, y, z, \varphi) = F$.

Resolvamos estas dos ecuaciones, la una con relación á α y la otra con relación á φ. Los valores de α y de φ serán idénticos, y se tendrá $\alpha = \varphi$. Las fórmulas

$$f(x, y, z, \alpha) = 0 \quad (5) \qquad \text{y} \qquad f(x, y, z, \varphi) = 0 \quad (6)$$

no podrán verificarse simultáneamente, más que siendo $\varphi = \alpha$.

Esto sentado, calculemos p en la superficie (6) y tendremos

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial z} p + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} p\right) = 0.$$

La $\frac{\partial z}{\partial x}$ de la superficie (5) está dada por la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p=0.$$

Para que los valores de p sacados de estas ecuaciones sean iguales, es necesario que

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}p\right)=0.$$

Igualmente, para que los valores de q sean iguales, es necesario que

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}q\right)=0.$$

Pero las cantidades

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}p=\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}q=\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

no pueden anularse á la vez sin que $d\varphi$ sea nula ó φ una constante, en cuyo caso la superficie $F=0$ se confundiría con una de las envueltas; luego es necesario que se tenga $\frac{\partial f}{\partial \varphi}=0$, para cada punto en el que es tangente la superficie $F=0$ á una de las superficies de la familia, es decir, en cada punto de $F=0$; luego φ se determina por medio de la misma ecuación que la envolvente propiamente dicha de las superficies de la familia considerada.

33. Teorema. *Todas las características son tangentes á una misma curva real ó imaginaria.*

Desde luego podemos ver que dos características sucesivas se encuentran, cuando se prescinde de los términos de segundo orden, pues siendo

$$f(\alpha+d\alpha)=0 \quad \text{y} \quad f'(\alpha+d\alpha)=0$$

ó $$f(\alpha)+f'(\alpha)\,d\alpha=0, \quad f'(\alpha)+f''(\alpha)\,d\alpha=0,$$

la primera de estas ecuaciones es una combinación de las ecuaciones $f(x, y, z, \alpha) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial \alpha} \equiv f'(\alpha) = 0$, lo que conduce á $f''(\alpha) = 0$.

Por otra parte, las ecuaciones de las dos caracteríscas son

$$f(\alpha) = 0,\quad f'(\alpha) = 0,\quad f(\alpha) + f'(\alpha)\,d\alpha = 0,\quad f'(\alpha) + f''(\alpha)\,d\alpha = 0,$$

que se reducen á

$$f(\alpha) = 0,\quad f'(\alpha) = 0,\quad f''(\alpha) = 0.$$

La curva obtenida eliminando α, es decir, *el lugar de los puntos de intersección de dos características próximas, es la arista de retroceso de la envolvente;* y á esta curva es tangente cada una de las características, pues $f = 0$ y $f' = 0$ representarán á voluntad una característica ó la envolvente, según que α sea constante ó se determine por medio de $f'' = 0$.

Diferenciando $f = 0$ y $f' = 0$ respecto á z, tendremos, suponiendo á α variable,

$$\frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\left(\frac{d\alpha}{dx} x' + \frac{d\alpha}{dy} y' + \frac{d\alpha}{dz}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial f'}{\partial x} x' + \frac{\partial f'}{\partial y} y' + \frac{\partial f'}{\partial z} z' + \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot = 0.$$

Las derivadas x' é y' de x é y, respecto á z, tendrán los mismos valores en el punto común de la característica y la arista de retroceso, porque $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ y $\frac{\partial f'}{\partial \alpha}$ ó $f'(\alpha)$ y $f''(\alpha)$ son nulas en cada uno de dichos puntos; y para obtener la x' y la y' de la característica será preciso suponer que sean nulos los coeficientes de $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ y $\frac{\partial f'}{\partial \alpha}$, lo que conduce al mismo resultado. Los coeficientes directores de las tangentes en los puntos comunes á las dos curvas son iguales; por consiguiente estas curvas son tangentes.

34. Teorema. *La arista de retroceso es el lugar de las intersecciones sucesivas de tres superficies próximas de la familia.*

En efecto, las ecuacianes de las tres superficies próximas son

$$f(\alpha) = 0,\quad f(\alpha + h) = 0,\quad f(\alpha + k) = 0$$

ó $f(\alpha) = 0,\ f(\alpha) + hf'(\alpha) + \ldots = 0,\ f(\alpha) + kf'(\alpha) + \ldots = 0,$

que equivalen á

$$f(\alpha) = 0, \quad f'(\alpha) = 0, \quad f''(\alpha) = 0.$$

Estas ecuaciones determinan un punto de la arista de retroceso.

EJEMPLO 1.º *Envolvente de un plano móvil con un parámetro.*

Sea
$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

la ecuación de un plano móvil, cuyos coeficientes A, B, C, D son funciones de un parámetro α.

Primeramente obtendremos la característica según la que este plano es tangente á su envolvente, adjuntando á la ecuación (1) la que se obtiene derivando esta con relación á α,

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0. \qquad (2)$$

La característica es por tanto una *recta*, y la envolvente será una superficie reglada, que será desarrollable, porque al ser tangente el plano móvil á su envolvente á lo largo de la característica, el plano tangente á la superficie reglada es el mismo á lo largo de la generatriz. Además las características (generatrices rectilíneas de las superficies) tienen una envolvente A, cuyos puntos se hallan definidos por las ecuaciones

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$
$$A''x + B''y + C''z + D'' = 0, \qquad (3)$$

que determinan á x, y, z en función de α, y cuando varía α, el punto así definido, describe la envolvente de las generatrices de la superficie desarrollable, es decir, la arista de retroceso de la superficie.

Hemos visto que el plano tangente á una superficie desarrollable es el plano osculador á la arista de retroceso definida por las tres ecuaciones (3), de manera que un plano móvil, con un parámetro, envuelve una superficie desarrollable, siendo osculador á la arista de retroceso de la superficie.

Recíprocamente, toda superficie desarrollable puede considerarse como envolvente de un plano móvil de un parámetro, puesto que es la envolvente de su plano tangente, es decir, del plano osculador de su arista de retroceso.

PROBLEMA 2.° *Hallar la envolvente de una esfera de radio constante* R, *cuyo centro describe una curva dada*, es decir, *hallar una superficie canal.*

Expresando α, β, γ las coordenadas de un punto de esta curva, la ecuación de la superficie será

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2, \quad (1)$$

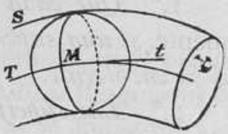


Figura 24

á la que uniremos

$$(x-\alpha)\,\alpha'+(y-\beta)\,\beta'+(z-\gamma)\,\gamma'=0, \quad (2)$$

expresando α', β', γ' las derivadas de α, β, γ con relación á un parámetro t.

Diferenciemos la ecuación (1), y será

$$(x-\alpha)(dx-\alpha' dt)+(y-\beta)(dy-\beta' dt)+(z-\gamma)(dz-\gamma' dt)=0,$$

que, en virtud de la (2), se reduce á

$$(x-\alpha)\,dx+(y-\beta)\,dy+(z-\gamma)\,dz=0;$$

luego la dirección $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$ es perpendicular á la dirección dx, dy, dz. La recta que une los puntos (x, y, z) y (α, β, γ) es normal á la superficie; luego: *En las superficies canales, la normal encuentra á la curva fija descrita por el centro de la esfera envuelta.*

CASO DE DOS PARÁMETROS. Sea la ecuación

$$f(x, y, z, \alpha, \beta)=0.$$

Las tres superficies infinitamente próximas

$$f(\alpha,\beta)=0, \quad f(\alpha+d\alpha,\beta)=0, \quad f(\alpha,\beta+d\beta)=0$$

se cortan en cierto punto, que tiene una posición determinada para $d\alpha=0$ y $d\beta=0$. En efecto, la intersección de dichas superficies es la misma que la de las tres siguientes:

$$f=0, \quad f+\frac{\partial f}{\partial \alpha}\,da+\ldots=0, \quad f+\frac{\partial f}{\partial \beta}\,d\beta+\ldots=0$$

ó
$$f=0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial \beta}=0.$$

Si se eliminan α y β entre estas tres ecuaciones, se tendrá el lugar de las intersecciones de tres superficies consecutivas, que se llama la *envolvente* de la superficie $f=0$.

Se demuestra repitiendo el razonamiento ya empleado:

1.° *Que cada envolvente es tangente á la envuelta* y recíprocamente, *si una superficie es tangente á todas las de una familia, lo es á su envolvente.*

2.° *Las superficies envolventes que resultan de eliminar tan solo α ó β tienen por envolvente á la envolvente fija, y dos envolventes de familias distintas son tangentes entre sí.*

Ejemplo. Hallar la envolvente del plano
$$\lambda x+\mu y+z+\lambda\mu=0.$$

Eliminaremos λ y μ entre esta ecuación y sus derivadas parciales $x+\mu=0$, $y+\lambda=0$, y obtendremos el paraboloide
$$z-xy=0.$$

§ 5.° Desarrollables isótropas

35. Definiciones. Si empleamos coordenadas rectangulares, la ecuación de las esferas de radio nulo y cuyo centro es el punto (α, β, γ) se expresará por
$$(x-\alpha t)^2+(y-\beta t)^2+(z-\gamma t)^2=0 \qquad (t=1).$$

Esta ecuación puede considerarse como representación de un cono imaginario cuyo vértice es (α, β, γ). Este cono asintótico á todas las esferas cuyo centro es $(\alpha, \beta, \gamma,)$ se llama *cono isótropo;* sus generatrices son lo que se llama *rectas isótropas.* Si se representan por a, b, c los coeficientes directores de una recta isótropa, tendremos
$$a^2+b^2+c^2=0;$$

esta ecuación caracteriza á las rectas isótropas que, en virtud de la misma ecuación, son perpendiculares á sí mismas. Si se supone $c = 0$ se tendrá $a^2 + b^2 = 0$, y se ve que de los coeficientes angulares de las rectas isótropas del plano xy son $\pm\sqrt{-1}$.

Un *plano isótropo* es un plano asintótico de la esfera, ó tangente al cono isótropo. Dos planos isótropos, infinitamente próximos, se cortan según una recta isótropa, y dos rectas isótropas, infinitamente próximas, que se cortan en un punto (α, β, γ), determinan un plano isótropo.

Todas las esferas pasan por una cónica fija situada en el plano del infinito, que es imaginaria, y se llama la *umbilical* (Laguerre) ó el círculo imaginario del infinito. Esta cónica es el lugar de los umbílicos de todos los planos del espacio.

Todas las rectas isótropas, que pasan por un punto del espacio, forman un *cono isótropo* ó *esfera de radio nulo*, cuyo centro es este punto.

Por una recta cualquiera pasan dos planos, cuyas trazas sobre el plano del infinito son tangentes á la umbilical ó círculo imaginario del infinito, que son los *planos isótropos* relativos á esta recta.

Se llaman *desarrollables isótropas* aquéllas cuyas generatrices son isótropas; son por tanto, las envolventes de los planos isótropos.

A toda superficie se le puede circunscribir una desarrollable isótropa que se llamará la *desarrollable isótropa* de esta superficie.

TEOREMA. *Las normales de las desarrollables isótropas son sus generatrices.*

En efecto, siendo una recta isótropa generatriz del cono

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = 0,$$

se la puede representar por

$$\frac{x - \alpha}{a} = \frac{y - \beta}{b} = \frac{z - \gamma}{c} = \rho \qquad a^2 + b^2 + c^2 = 0.$$

Para que esta recta engendre una desarrollable, es necesario que encuentre en cada una de sus posiciones á la generatriz próxima. Siendo pues,

$$x = \alpha + a\rho, \quad y = \beta + b\rho, \quad z = \gamma + c\rho$$
$$x = \alpha + d\alpha + (a + da)\rho + (\rho + d\rho)\, a, \quad \ldots .$$

las ecuaciones de dichas rectas, deberemos eliminar x, y, z, ρ, $d\rho$ entre las mismas, para obtener dicha condición. Obtendremos, eliminando x, y, z,

$$0 = d\alpha + a d\rho + \rho da, \quad 0 = d\beta + b d\rho + \rho db, \quad 0 = d\gamma + \dots$$

Se eliminarán ρ y $d\rho$ multiplicando estas ecuaciones respectivamente por a, b, c y sumando; y por ser además

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0 \quad \text{y} \quad ada + bdb + cdc = 0,$$

se tendrá $$ad\alpha + bd\beta + cd\gamma = 0.$$

La dirección a, b, c de la generatriz es, por consiguiente, perpendicular á la de la recta $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ trazada en la superficie. Pero la dirección a, b, c es ya perpendicular á sí misma; luego la generatriz de una desarrollable isótropa es normal á la superficie. Esta desarrollable debe ser tal, que si se hace $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, se tenga

$$p^2 + q^2 + 1 = 0;$$

lo que expresa que la normal á la superficie es normal á sí misma.

Recíprocamente: Esta ecuación es la de una desarrollable. Para tener la ecuación finita de ésta, basta buscar la envolvente de un plano representado por

$$Z = pX + qY + f(p),$$

siendo $f(p)$ cualquiera y $q = \sqrt{1 + p^2}\sqrt{-1}$. La característica, ó la generatriz de la envolvente quedará determinada por la ecuación anterior y su derivada

$$0 = X + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\sqrt{-1}\,Y + f'(p).$$

Los coeficientes de esta recta son $-p\sqrt{-1}$, $-q\sqrt{-1}$, $\sqrt{-1}$, siendo la suma de sus cuadrados nula. Luego la generatriz es isótropa. Por consiguiente la ecuación $p^2 + q^2 + 1 = 0$ caracteriza á las desarrollables isótropas.

§ 6.º Focos y focales de las superficies

36. Definiciones. Se llama *foco* de una superficie al centro de una esfera de radio nulo doblemente tangente á la superficie. Dicho punto tiene con la superficie dos secciones planas comunes. Los planos de estas secciones son los dos reales ó los dos imaginarios. En ambos casos se cortan según una recta real, que se llama la *directriz* correspondiente al foco, y es la recta de los contactos.

La esfera de radio nulo es un cono. Podremos pues decir también que *foco* de una superficie es el vértice de un cono isótropo doblemente tangente á la superficie.

Un foco es, por consiguiente, un punto por el que se puede trazar á la superfice dos planos tangentes isótropos á la superficie.

Unamos el foco F á los puntos de contacto M y M′ con la superficie del cono isótropo, cuyo vértice es F. Entonces serán FM y FM′ dos generatrices del cono isótropo bitangente, que serán dos rectas isótropas tangentes á la superficie.

Esto sentado, se llama *focal* de una superficie al lugar de sus focos.

37. Existencia de las focales. Sujetar á una esfera ser tangente á una superficie es sujetarla á una condición. Sujetarla á ser doblemente tangente es sujetarla á dos condiciones; y sujetarla á tener un radio nulo es sujetarla á una tercera condición. Luego, en general, existirá un lugar de focos que será una línea.

38. Nueva definición. *La focal de una superficie es la línea doble de la desarrollable isótropa circunscrita á la superficie.* Esta definición resulta de que por todos los puntos F de la focal Φ de la superficie S podemos suponer trazados conos bitangentes; y si FM y FM′ son las generatrices de contacto y $P_1 P'$ los planos tangentes correspondientes, el plano P cortará al plano infinitamente próximo según una recta isótropa que pasa por F, y que sólo puede ser una generatriz del cono isótropo, cuyo vértice está en F. Esta recta es FM. Las generatrices de contacto FM y FM′ son pues las generatrices de la desarrollable isótropa circunscrita á la superficie S. Pero esta desarrollable se halla determinada, porque siendo

$$p^2 + q^2 + 1 = 0$$

su ecuación diferencial, es también la ecuación de la curva de contacto con la superficie. Esta desarrollable se corta á sí misma, porque dos de sus generatrices pasan por un mismo punto (sin formar ángulo infinitamente pequeño). Tiene pues una línea, según la que se corta, ó *una línea doble* ó *singular*, lo que justifica la anterior definición.

39. FOCALES Y FOCOS DE LAS SUPERFICIES DE SEGUNDO ORDEN. Se obtienen las focales de las superficies de segundo orden, observando que si $S = 0$ es una superficie de este orden, $S + \lambda PQ = 0$, expresando P y Q dos polinomios de primer grado, representa la ecuación de las superficies de segundo orden bitangentes á la primera. Si expresamos que esta superficie es una esfera de radio nulo

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = 0,$$

α, β, γ representarán los focos. Se deberá tener pues idénticamente

$$S + \lambda PQ = \mu[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2]$$

siendo μ un factor constante, ó

$$S - \mu[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2] = \lambda PQ.$$

El primer miembro de esta ecuación deberá pues reducirse á una suma de dos cuadrados. Sea la ecuación dada,

$$S \equiv Ax^2 + By^2 + Cz^2 - H = 0.$$

Debiendo ser

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - \mu[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2] - H$$

una suma de dos cuadrados, es necesario que desaparezca una de las variables. Luego $\alpha = 0$ y $\mu = A$; luego

$$By^2 + Cz^2 - A[(y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2] - H$$

debe ser una suma de dos cuadrados que puede escribirse

$$(B - A)\, y^2 + (C - A)\, z^2 + 2\,A\beta y + 2\,A\gamma z - A\,(\beta^2 + \gamma^2) - H$$

ó
$$\frac{1}{B - A}\,[(B - A)\,y + A\beta]^2 + \frac{1}{C - A}\,[(C - A)\,z + A\gamma]^2$$

$$- \frac{A^2\,\beta^2}{B - A} - \frac{A^2\,\gamma^2}{C - A} - A\,(\beta^2 + \gamma^2) - H.$$

Esta ecuación, unida con $\alpha = 0$, representa la focal. Hay pues tres cónicas focales, una en cada plano principal. Cuando $H = 0$, las cónicas se reducen á rectas. Así, las focales de los conos son líneas rectas.

Supongamos que se trate de un elipsoide cuyos ejes sean $2a > 2b > 2c$, las ecuaciones de las focales serán

$$\frac{\beta^2}{a^2 - b^2} + \frac{\gamma^2}{a^2 - c^2} + 1 = 0, \quad \frac{\gamma^2}{b^2 - c^2} + \frac{\alpha^2}{b^2 - a^2} + 1 = 0,$$

$$\frac{\alpha^2}{c^2 - a^2} + \frac{\beta^2}{c^2 - b^2} + 1 = 0.$$

La primera es imaginaria, la segunda es una hipérbola, la tercera una elipse.

Se ve que estas ecuaciones dependen tan solo de las diferencias de los ejes.

Las superficies comprendidas en la fórmula

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1$$

son pues homofocales; las secciones principales tienen los mismos focos.

Para hallar la focal del paraboloide

$$Px^2 + Qy^2 = 2z,$$

se deberá hacer de modo que

$$Px^2 + Qy^2 - 2z - \lambda\,[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2]$$

sea una suma de dos cuadrados. Es necesario pues que $\lambda = P$ ó Q

y que α ó β sea nulo. Por consiguiente, es necesario que descomponiendo

$$Px^2 - Q(x-\alpha)^2 - Q(z-\gamma)^2 - 2z$$

en cuadrados, no se obtengan más que dos, lo que exige que

$$\frac{PQ\,\alpha^2}{Q-P} - \frac{2Q\gamma - 1}{Q} = 0.$$

Ejemplo. Para el paraboloide

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,$$

se tienen las dos focales

$$\frac{\alpha^2}{p-q} - 2\gamma + q = 0, \quad \frac{\beta^2}{q-p} - 2\gamma + p = 0$$

que son dos parábolas.

40. Superficies con centro. Sea la superficie

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = H. \tag{1}$$

Vamos á razonar, con pocas variantes, como lo hemos hecho. Para obtener los focos de la superficie identificaremos esta ecuación con la ecuación $S - LM = 0$, en la que S representa el punto-esfera siendo $L = 0$, $M = 0$ las ecuaciones de dos planos. Resulta, de que esta ecuación debe poder identificarse con la (1), que el producto LM no debe contener términos rectangulares de las variables. Será pues de la forma

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + bx + b'y + b''z + c,$$

ó lo que es lo mismo

$$a(x-\alpha)^2 + b(y-\beta)^2 + c(z-\gamma)^2 + d.$$

Debiendo poder descomponerse en factores, es necesario que sea $d = 0$ y que una de las tres cantidades a, b, c sea nula. Supongamos $c = 0$. Identificando la ecuación (1) con

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 + a(x-\alpha)^2 + b(y-\beta)^2 = 0$$

tendremos

$$z' = 0, \quad x' + a\alpha = 0, \quad y' + b\beta = 0$$

$$C = A(1 + a) = B(1 + b) = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2 + a\alpha^2 + b\beta^2}{H}.$$

De estas ecuaciones se deduce, eliminando a, b, α, β,

$$\frac{x'^2}{A - C} + \frac{y'^2}{B - C} = H.$$

La hipótesis adoptada corresponde á una focal situada en el plano de las xy.

Los dos planos L y M, correspondientes á un foco, representados por las ecuaciones

$$(x - \alpha)\sqrt{a} + (y - \beta)\sqrt{b} = 0,$$
$$(x - \alpha)\sqrt{a} - (y - \beta)\sqrt{b} = 0,$$

son perpendiculares al plano principal, en el que se halla el foco; y por consiguiente lo mismo sucede á la directriz correspondiente á este foco.

41. Caso de las superficies con centro. Sea la ecuación

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = H.$$

Teorema I. *El plano que pasa por un foco y la directriz correspondiente es normal á la focal, y corta á la superficie según una cónica, de la que son foco y directriz este punto y esta recta.*

En efecto, la ecuación de la normal en un punto x', y' de la focal situada en el plano de las xy es

$$\frac{(A - C)(x - x')}{x'} = \frac{(B - C)(y - y')}{y'}$$

ó
$$\frac{(A - C)x}{x'} - A = \frac{(B - C)y}{y'} - B,$$

ecuación que queda satisfecha por las coordenadas α y β del pie de la directriz.

Así el plano normal á la línea focal en el punto F pasa por la directriz D. Este plano corta á la superficie según una cónica y al punto-esfera, según un punto-círculo F, que tiene con la cónica un doble contacto según la recta D.

TEOREMA II. *El pie de la directriz correspondiente á un foco es el polo, con relación á la sección principal, de la tangente á la focal trazada por el foco considerado.*

En efecto, el punto α, β tiene por polar, respecto á la sección principal, la recta cuya ecuación es

$$\frac{\alpha x}{A} + \frac{\beta y}{B} = H.$$

Sustituyendo α y β por sus valores en función de las coordenadas del foco correspondiente, esta ecuación se reduce á la de la tangente á la línea focal en este punto,

$$\frac{xx'}{A - C} + \frac{yy'}{B - C} = H.$$

42. NATURALEZA DE LAS LÍNEAS FOCALES.

CASO 1.º *Elipsoide.* Sea $A > B > C$. En el plano xy, la focal es una elipse interior á la superficie. En el plano yz es una elipse imaginaria. En el plano zx es una hipérbola, cuyos vértices reales están en el eje de las x á una distancia del centro menor que la de los vértices de la elipse focal en el plano de las xy, situados en este mismo eje.

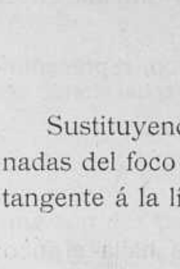


Figura 25

CASO 2.º *Hiperboloide de una hoja.* Sea $C < o$ y $A > B$. La focal en el plano de las xy es una elipse exterior á la superficie. En el plano de las yz es una elipse imaginaria. En el plano de las zx es una hipérbola cuyos vértices se hallan en el eje de las x, interior á la superficie (fig. 25).

CASO 3.º *Hiperboloide de dos hojas.* Sea $G > o$ y $A^2 > B^2$. La focal en el plano de las xy es una elipse imaginaria, en el plano de las yz es una elipse cuyos vértices en el eje de las z son interiores á la superficie; en el plano de las zx es una hipérbola cuyos vértices reales en el eje de las z, están más próximos que los de la elipse focal.

Caso 4.° *Cono.* Las focales, en el cono, se reducen á sistemas de rectas, de las que son reales únicamente, las situadas en el plano del ángulo mayor del cono.

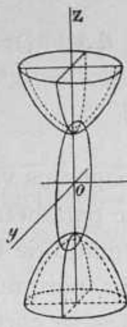


Figura 26

Teorema III. *Las focales de un cono son perpendiculares á los planos cíclicos del cono recíproco.* En efecto, si las ecuaciones del cono propuesto y de su recíproco son

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 0, \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0,$$

la ecuación de las focales del primer cono, situadas en el plano xy, es

$$\frac{x^2}{A - C} + \frac{y^2}{B - C} = 0;$$

y las trazas de los planos cíclicos del segundo, perpendiculares al plano de las xy, están representadas por la ecuación

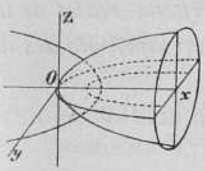


Figura 27

$$(A - C)\,x^2 + (B - C)\,y^2 = 0.$$

Estas ecuaciones representan dos sistemas de rectas perpendiculares, respectivamente.

43. Focales en las superficies sin centro. Empleando el mismo método, obtendremos que el paraboloide elíptico admite dos focales parabólicas. La situada en el plano de la parábola principal del mayor parámetro es interior á la superficie; la situada en el otro plano principal, tiene sus ramas infinitas dirigidas al otro lado y es, parcialmente, interior á la superficie (fig. 27).

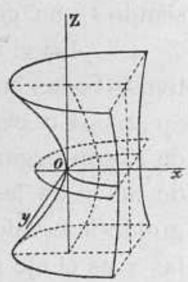


Figura 28

El paraboloide hiperbólico admite dos focales parabólicas situadas en los dos planos principales; y presenta sus ramas infinitas en el mismo sentido que la sección principal, en el plano en que se encuentra cada una (fig. 28).

§ 7.º SUPERFICIES HOMOFOCALES DE SEGUNDO GRADO

44. DEFINICIÓN. Sea la superficie de segundo grado

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2+\rho}+\frac{y^2}{b^2+\rho}+\frac{z^2}{c^2+\rho}-1=0 \qquad (a>b>c)$$

y hagamos variar á ρ desde $-\infty$ hasta $+\infty$. Para cada valor de este parámetro, obtenemos una superficie de segundo grado; y el conjunto de todas éstas se llama *un sistema de superficies homofocales*, porque cada uno de los tres planos de simetría de las superficies, se cortan según una serie de cónicas homofocales.

TEOREMA. *Estas superficies son tales, que sus secciones principales tienen los mismos focos que los del elipsoide*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

y, por cada punto real del espacio pasan tres superficies reales de la familia, siendo una de ellas un elipsoide y las otras hiperboloides de una y de dos hojas.

En efecto, podemos considerar, en la variación de ρ los siguientes intervalos:

$$\rho=-\infty,\quad \rho=-a^2-\varepsilon,\quad \rho=-a^2+\varepsilon,\quad \rho=-b^2\varepsilon,$$
$$\rho=-b^2+\varepsilon,\quad \rho=-c^2-\varepsilon,\quad \rho=-c^2+\varepsilon,\quad \rho=\infty,$$

siendo ε una cantidad positiva muy pequeña.

1.º En el intervalo $(-a^2-\infty)$, los denominadores son negativos. Todas las superficies son imaginarias.

2.º En el intervalo $(-b^2-a^2)$, los denominadores de y^2 y de z^2 son negativos. Los dos ejes principales situados en los ejes de las y de las z son imaginarios. Todas las superficies del segundo intervalo son *hiperboloides de dos hojas*, de los que el eje de las x es el eje real.

3.º En el intervalo $(-c^2-b^2)$, el denominador de z^2 es ahora negativo, y el eje principal, que se halla en el de las z, es imaginario. Las superficies son *hiperboloides de una hoja.*

4.° En el intervalo $(-c^2 + \infty)$ son positivos los denominadores de x^2, y^2, z^2. Las superficies correspondientes á este intervalo son *elipsoides.*

Para los valores de ρ comprendidos en dichos intervalos, el primer miembro de la ecuación (1) adquiere los signos siguientes:

$$-, -, +, -+, -, +, -.$$

Hay pues, una raíz entre $-a^2$ y $-b^2$, otra entre $-b^2$ y $-c^2$ y otra en $-c^2$ y $+\infty$. Expresándolas por λ, μ, ν, tendremos las ecuaciones de las tres superficies que pasan por x, y, z bajo la forma

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1, \\ \frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2}{b^2+\mu} + \frac{z^2}{c^2+\mu} = 1, \\ \frac{x^2}{a^2+\nu} + \frac{y^2}{b^2+\nu} + \frac{z^2}{c^2+\nu} = 1, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

y suponiendo $-a^2 < \lambda < -b^2 < \mu < -c^2 < \nu$, la primera superficie es, como hemos visto, un hiperboloide de dos hojas, la segunda un hiperboloide de una hoja y la tercera un elipsoide.

PROBLEMA. *Dados* λ, μ, ν, *calcular* x, y, z.

Siendo λ, μ, ν raíces de la ecuación (1), podemos escribir

$$\frac{x^2}{u} + \frac{y^2}{u+b^2-a^2} + \frac{z^2}{u+c^2-a^2} = 1,$$

haciendo $\rho = u - a^2$, tendremos:

$$x^2(u+b^2-a^2)(u+c^2-a^2) + \ldots - u(u+b^2-a^2)(u+c^2-a^2) = 0.$$

El producto de las raíces es $x^2(b^2-a^2)(c^2-a^2)$; y puesto que las raíces son $\lambda + a^2, \mu + a^2, \nu + a^2$, se tendrá

$$x^2(b^2-a^2)(c^2-a^2) = (\lambda+a^2)(\mu+a^2)(\nu+a^2)$$

ó

$$\left.\begin{aligned} x^2 = \frac{(\lambda+a^2)(\mu+a^2)(\nu+a^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} \\ y^2 = \frac{(\lambda+b^2)(\mu+b^2)(\nu+b^2)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}, \quad z^2 = \frac{(\lambda+c^2)(\mu+c^2)(\nu+c^2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

TEOREMA. *Las superficies homofocales* (2) *se cortan ortogonalmente, es decir, que sus planos tangentes ó sus normales en los puntos comunes se cortan así,* ó bien *las superficies homofocales de segundo grado forman un sistema triplemente ortogonal.*

En efecto, si se restan unas de otras las fórmulas (2), tendremos

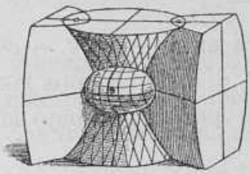


Figura 29

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2+\lambda} - \dfrac{x^2}{a^2+\mu} + \ldots\ldots = 0 \\ \text{ó} \qquad \Sigma \dfrac{x^2}{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)} = 0, \\ \Sigma \dfrac{x^2}{(a^2+\mu)(a^2+\nu)} = 0, \; \Sigma \dfrac{x^2}{(a^2+\nu)(a^2+\lambda)} = 0; \end{array}\right\} \quad (4)$$

pero, ya que $\dfrac{x^2(\mu-\lambda)}{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)} = \dfrac{x^2}{a^2+\lambda} - \dfrac{x^2}{a^2+\mu}$,

podremos escribir la ecuación anterior así:

$$\frac{x}{a^2+\lambda}\frac{x}{a^2+\mu} + \frac{y}{b^2+\lambda}\frac{y}{b^2+\mu} + \frac{z}{c^2+\lambda}\frac{z}{c^2+\mu} = 0.$$

Las direcciones

$$\frac{x}{a^2+\lambda}, \frac{y}{b^2+\lambda}, \frac{z}{c^2+\lambda} \quad \text{y} \quad \frac{x}{a^2+\mu}, \frac{y}{b^2+\mu}, \frac{z}{c^2+\nu}$$

de las normales á las superficies (2) en x, y, z son pues, rectangulares.

45. COORDENADAS ELÍPTICAS. Las tres ecuaciones (2), representan un elipsoide, un hiperboloide de una hoja y uno de dos, que pasan por un punto P (x, y, z).

En vez de determinar el punto P por medio de las coordenadas rectilíneas x, y, z, podemos determinarlo por medio de los parámetros λ, μ, ν de las tres superficies (2) que pasan por P. Dichos parámetros se llaman las coordenadas elípticas del punto P.

Ya que λ, μ, ν son las raíces de la ecuación (1) cuando se dan x, y, z, tendremos la identidad

$$\frac{x^2}{a^2+\vartheta} + \frac{y}{b^2+\vartheta} + \frac{z}{c^2+\vartheta} - 1 = -\frac{(\vartheta-\lambda)(\vartheta-\mu)(\vartheta-\nu)}{(a^2+\vartheta)(b^2+\vartheta)(c^2+\vartheta)}, \quad (1)$$

puesto que los dos miembros se anulan para $\vartheta = \lambda$, $\vartheta = \mu$, $\vartheta = \nu$ y el coeficiente de ϑ^3 es también igual á -1, como en el segundo miembro, después de haber multiplicado por $(a^2 + \vartheta)$ $(b^2 + \vartheta)$ $(c^2 + \vartheta)$.

La identidad (1) queda satisfecha para todos los valores de ϑ, y haciendo $\vartheta = -a^2$, $\vartheta = -b^2$, $\vartheta = -c^2$, obtendremos las fórmulas (3) pág. 53.

Las ecuaciones (3) (pág. 53) quedan tan solo satisfechas, cuando se hallan λ, μ, ν en los intervalos considerados.

Dividiendo las (3) por $(a^2 + \lambda)^2$ $(a^2 + \mu)^2$ $(a^2 + \nu)^2$ y sumando, se obtiene

$$\Sigma \frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^2} = \frac{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)} \tag{3}$$

y sus análogas por permutación circular.

Y de estas y las (4) (página 54), obtenemos por sustracción fácilmente

$$\Sigma \frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^2 (a^2 + \nu)} = \frac{\nu - \lambda}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}$$

y sus análogas por permutación circular.

Para obtener el elemento lineal ds, se toman los logaritmos en (3) y, por diferenciación resulta

$$2\,dx = \frac{x d\lambda}{a^2 + \lambda} + \frac{x d\mu}{a^2 + \mu} + \frac{x d\nu}{a^2 + \nu},$$

$$2\,dy = \frac{y d\lambda}{b^2 + \lambda} + \frac{y d\mu}{b^2 + \mu} + \frac{y d\nu}{b^2 + \nu},$$

$$2\,dz = \frac{z d\lambda}{c^2 + \lambda} + \frac{z d\mu}{c^2 + \mu} + \frac{c d\nu}{c^2 + \nu}.$$

Elevando al cuadrado, sumando y haciendo reducciones, se obtiene finalmente

$$4\,ds^2 = \Sigma \frac{d\lambda^2 (\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}.$$

46. Paraboloides homofocales. Las focales de los paraboloides

$$(1) \qquad \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \qquad \frac{x^2}{p+h} + \frac{y^2}{q+h} = 2z + h \qquad (2)$$

son respectivamente

$$\frac{x^2}{p-q} - 2z + q = 0, \quad \frac{y^2}{p-q} - 2z + p = 0,$$

$$\frac{x^2}{(p+h)-(q+h)} - 2z + (q+h) - h = 0, \; \ldots\ldots$$

ó

$$\frac{x^2}{p-q} - 2z + q = 0, \; \ldots\ldots$$

Los paraboloides

$$\frac{x^2}{p+h} + \frac{y^2}{q+h} = 2z + h$$

son pues homofocales, y se tiene que

1.º *Las coordenadas de los focos de las secciones principales son* $z = \frac{p}{z}$, $z = \frac{q}{z}$. *Estos focos son pues los mismos para todas las superficies consideradas.*

2.º *Por cada punto real del espacio pasan tres paraboloides de la familia* (1), *dos elípticos, inversamente semejantes, y uno hiperbólico,* pues si se dan x, y, z, la ecuación (2) será de tercer grado en h, y si se hace, suponiendo $p < q$ y ε positivo é infinitamente pequeño,

$$h = -\infty, \quad h = -p - \varepsilon, \quad h = -p + \varepsilon, \quad h = -q - \varepsilon,$$

la cantidad $$\frac{x^2}{h+p} + \frac{y^2}{h+q} - 2z - h$$

tomará los signos $+$, $-$, $+$, $-$. Habrá pues una raíz de (2) entre $-\infty$ y $-p$, otra entre $-p$ y $-q$ y una tercera entre q y $+\infty$.

Sean λ, μ, ν estas raíces. Las ecuaciones de los paraboloides homofocales que pasan por x, y, z serán

$$\frac{x^2}{p+\lambda} + \frac{y^2}{q+\lambda} = 2z + \lambda, \quad \frac{x^2}{p+\mu} + \frac{y^2}{q+\mu} = 2z + \mu,$$

$$\frac{x^2}{p+\nu} + \frac{y^2}{q+\nu} = 2z + \nu.$$

La primera y la última representan paraboloides elípticos y la segunda un paraboloide hiperbólico.

§ 8.° Rectas mínimas

47. Definición. La ecuación

$$(x - \alpha t)^2 + (y - \beta t)^2 + (z - \gamma t)^2 = 0 \qquad (t = 1) \qquad (1)$$

manifiesta que la distancia de cualquier punto del cono isótropo á su vértice es nula. Las generatrices del cono se llaman, por lo tanto, rectas de longitud mínima ó rectas mínimas. Tenemos pues

Teorema I. *Por todo punto del espacio* x_0, y_0, z_0 *pasan infinidad de rectas mínimas que cortan al círculo del infinito, y son las generatrices del cono isótropo que proyectan el círculo del infinito desde el punto* (x_0, y_0, z_0). *Las rectas mínimas son todas imaginarias.*

Teorema II. *Las generatrices imaginarias de la esfera son rectas mínimas. Las paralelas trazadas por un punto cualquiera del espacio á dichas generatrices proyectan el círculo imaginario, y determinan un cono de segundo orden (cono director); sus generatrices son rectas mínimas*, pues si v es un parámetro variable, las ecuaciones

$$x = x_0 + av, \quad y = y_0 + bv, \quad z = z_0 + cv \qquad (2)$$

representan una recta mínima que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0), cuando satisfacen las cantidades α, β, γ á la ecuación

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0, \qquad (3)$$

puesto que la ecuación (1) queda satisfecha por todos los valores de v, cuando se sustituyen por x, y, z sus valores (2).

También podemos considerar engendrada cada superficie de segundo orden por dos sistemas de generatrices, aun en el caso de ser imaginarias, reales para el hiperboloide de una hoja, imaginarias para el elipsoide y especialmente para la esfera. Los puntos en el infinito de éstas forman el círculo imaginario.

48. Expresión analítica. Para expresar analíticamente las rectas mínimas, consideremos la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{4}$$

puesto que es indiferente la elección del centro y del radio.

Para obtener la ecuación de las generatrices, escribamos en vez de la ecuación (4) las siguientes:

$$(5) \qquad \frac{x+iy}{1-z} = \frac{1+z}{x-iy} = u, \qquad \frac{x-iy}{1-z} = \frac{1+z}{x+iy} = -\frac{1}{v} \qquad (6)$$

Las ecuaciones (5) representan, para cada valor de u, una recta situada en la esfera, así como las (6) para cada valor de v. Cada una de estas ecuaciones define un sistema de generatrices imaginarias. Además se ve que son sistemas de rectas mínimas, porque la ecuación de las paralelas trazadas por el origen al sistema (5) es

$$\frac{x+iy}{-z} = \frac{z}{x-iy} = u, \tag{7}$$

y estas rectas se hallan en el cono $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, lo mismo que sucede para la serie (6). De las ecuaciones (7) resulta

$$x : y : z = \frac{1-u^2}{2} : \frac{i(1+u^2)}{2} : u \tag{8}$$

ó $$x = \frac{w}{2}(1-u^2), \quad y = \frac{iw}{2}(1+u^2), \quad z = wu,$$

siendo w el factor de proporcionalidad.

Estas ecuaciones son equivalentes á la (4). Así pues, *son las ecuaciones de las rectas mínimas que pasan por el origen*. A cada valor de u corresponde en (12) una recta mínima. Las ecuaciones de las rectas mínimas que pasan por el punto $(x_0\, y_0\, z_0)$ son

$$x = x_0 + \frac{w}{2}(1 - u^2), \quad y = y_0 + \frac{iw}{2}(1 + u^2), \quad z = z_0 + wu \qquad (9)$$

pues la ecuación (1) queda satisfecha idénticamente por los valores (9) de x, y, z. A cada valor de u corresponde en (9) una sola recta mínima, siendo w el parámetro.

Observación. De las ecuaciones (5) y (6) de las generatrices de la esfera, resulta la expresión siguiente de las coordenadas x, y, z de la esfera como funciones de los parámetros u y v

$$x = \frac{1 - uv}{u - v}, \quad y = \frac{i(1 + uv)}{u - v}, \quad z = \frac{u + v}{u - v}. \qquad (10)$$

Estos valores satisfacen á la ecuación (4) para todos los valores de u y de v. Las ecuaciones (10) representan pues la esfera (4). Cuando u es constante y v variable, el punto x, y, z recorre una generatriz del primer sistema y viceversa.

49. Curvas mínimas. Se llaman así las curvas cuyas tangentes engendran rectas mínimas ó que cortan al círculo imaginario. Para obtener su ecuación, debemos hallar la condición á que han de satisfacer las coordenadas x, y, z de uno de sus puntos, como función de uno de sus parámetros.

Las ecuaciones de la tangente son

$$X = x + v\alpha, \quad Y = y + v\beta, \quad Z = z + v\gamma.$$

Por ser esta tangente una recta mínima, se tendrá

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

y $\quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0 \quad$ es decir $\quad ds = 0$

Las curvas mínimas son pues curvas de longitud nula.

CAPÍTULO III

Propiedades métricas de las curvas alabeadas

§ 1.º LONGITUD DE UN ARCO DE CURVA

50. DEFINICIÓN. La definición que se dió en el tomo III (página 64) de la longitud del arco de curva plana se aplica á las curvas alabeadas. Así: *La longitud de un arco de curva alabeada es el límite hacia el que tiende el polígono inscrito, cuyos lados se hacen cada vez más pequeños, cuando su número crece indefinidamente.*

Sean x, y, z las coordenadas rectangulares de un punto cualquiera del arco. La expresión de la longitud L de un polígono inscrito CEF..... D (fig. 30), será

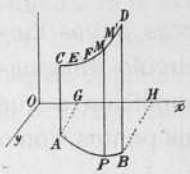


Figura 30

$$L = \Sigma \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

ó
$$L = \Sigma\, \Delta x \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + \frac{\Delta z^2}{\Delta x^2}},$$

pero
$$\sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + \frac{\Delta z^2}{\Delta x^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} + \varepsilon,$$

siendo ε una cantidad que se anula con Δx. Tendremos pues

$$L = \Sigma\, \Delta x \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}} + \Sigma\, \varepsilon\, \Delta x,$$

y
$$\lim L = \lim \Sigma \left[\Delta x \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}} \right].$$

Si suponemos que x sea la variable independiente, entonces $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, y $\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}$ podrán considerarse como funciones de x; y si consideramos, en un sistema de ejes rectangulares, la curva ef (fig. 31) cuya ecuación es

$$Y = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}},$$

suponiendo que x varíe desde $x = a$ hasta $x = b$, resultará

$$\Sigma \left[\Delta x \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}} \right] = \Sigma\,(Y \Delta x).$$

Pero $\Sigma\,(Y\Delta x)$ tiene por límite el área $efgh$; luego el límite de L y el área $efgh$ se hallan expresados por los mismos números.

Se representará, por consiguiente, el arco comprendido entre dos puntos P_0 y P_1 cuyos parámetros son t_0 y t_1, mediante la integral

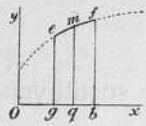


Figura 31

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{f'(t)^2 + \varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt.$$

suponiendo $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, $z = \psi(t)$.

Tenemos para la hélice que

$$dx = -a \operatorname{sen} t dt, \quad dy = a \cos t dt, \quad dz = ma dt \quad (m = \cot \delta)$$

$$ds = a\sqrt{1 + m^2}\, dt, \quad s = a\sqrt{1 + m^2}\, \varphi$$

§ 2.° Primera curvatura

51. Ángulo de contingencia. Se llama así al ángulo $d\tau$ que forman entre sí dos tangentes infinitamente próximas, ó con más precisión, una cantidad cuya relación al incremento de la variable independiente es igual al límite de la relación del ángulo de dichas tangentes á este incremento.

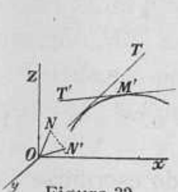


Figura 32

Para valuar $d\tau$, tracemos por O las rectas ON y ON′ iguales á la unidad y respectivamente paralelas á las tangentes MT y M′T′ (fig. 32). Sean $a = \frac{dx}{ds}$, $b = \frac{dy}{ds}$, $c = \frac{dz}{ds}$ los cosenos de los ángulos que MT ú ON forman con los ejes y a', b', c' los ángulos análogos de la tangente M′ T′ ó de la recta ON′, y tendremos

$$NN' = 2ON \operatorname{sen} \frac{d\tau}{2} = \sqrt{(a'-a)^2 + (b'-b)^2 + (c'-c)^2};$$

y, puesto que ON = 1,

$$2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} d\tau = \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2}$$

que, pasando al límite se reduce á

$$d\tau = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}.$$

52. Curvatura. Expresando por ρ el radio de curvatura, se tiene como para las curvas planas

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{da^2}{ds^2} + \frac{db^2}{ds^2} + \frac{dc^2}{ds^2}};$$

y sustituyendo por a, b, c sus valores

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}.$$

Y, puesto que $\rho = \frac{ds^3}{D}$, podremos escribir las dos expresiones de ρ

$$\rho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}},$$

$$\rho = \frac{ds^3}{\sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}}$$

53. Normal principal. Se llama normal principal, á la normal situada en el plano osculador. De la identidad

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

se deduce $\frac{dx}{ds} d\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} d\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds} d\frac{dz}{ds} = 0.$ (1)

Además la ecuación $A d^2x + B d^2y + C d^2z = 0$ puede escribirse así

$$A d\frac{dx}{ds} + B d\frac{dy}{ds} + C d\frac{dz}{ds} = 0. \qquad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) establecen la perpendicularidad de la recta, cuyos cosenos directores son proporcionales á

$$d\,\frac{dx}{ds},\quad d\,\frac{dy}{ds},\quad d\,\frac{dz}{ds},$$

con la tangente MT y la binormal MP.

Las ecuaciones de la normal principal son

$$\frac{X-x}{d\,\frac{dx}{ds}}=\frac{Y-y}{d\,\frac{dy}{ds}}=\frac{Z-z}{d\,\frac{dz}{ds}}.$$

Los cosenos de los ángulos ξ, η, ζ que forma la normal principal con los ejes, se expresan por las fórmulas

$$\cos\xi=\rho\,\frac{d^2x}{ds^2},\quad \cos\eta=\rho\,\frac{d^2y}{ds^2},\quad \cos\zeta=\rho\,\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Llamando R á la distancia de un punto M cualquiera de la normal al pie de ésta, podremos escribir sus ecuaciones de la manera siguiente

$$X-x=R\rho\,\frac{d^2x}{ds^2},\quad Y-y=R\rho\,\frac{d^2y}{ds^2},\quad Z-z=R\rho\,\frac{d^2y}{ds^2}.$$

La normal principal MN′ (fig. 33), definida por los cosenos directores α', β', γ', está situada al lado de la concavidad de la curva.

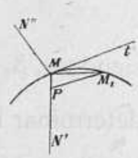


Figura 33

Para cerciorarnos de esto, debemos demostrar que si M_1 (fig. 33) es un punto infinitamente próximo del M, la proyección del segmento MM_1 sobre la dirección MN′ es positiva.

En efecto, siendo x, y, z las coordenadas del punto M y x_1, y_1, z_1 las del M_1, las proyecciones del segmento MM_1 sobre los ejes serán x_1-x, y_1-y, z_1-z; y tendremos, en la dirección MN′

$$P=\alpha'(x_1-x)+\beta'(y_1-y)+\gamma'(z_1-z). \tag{1}$$

Sean $\qquad x=f(s),\quad y=\varphi(s),\quad z=\psi(s).$

Tendremos $x_1 = f(s+h),\ \ y_1 = \varphi(s+h), \ldots\ldots$

$$f(s+h) = f(s) + \frac{h}{1} f'(s) + \frac{h^2}{1\,.\,2} f''(s) + \ldots\ldots$$

y $\quad f(s) = x,\ \ f'(s) = \alpha,\ \ f''(s) = \dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{\alpha'}{R}, \ldots\ldots$

y en virtud de ser

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0, \qquad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1,$$

sustituyendo en (1) los valores de $x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1$,

$$x_1 - x = h\alpha + \frac{h^2}{2}\frac{\alpha'}{R} + \ldots\ldots$$

$$y_1 - y = h\beta + \frac{h^2}{2}\frac{\beta'}{R} + \ldots\ldots$$

$$z_1 - z = h\gamma + \frac{h^2}{2}\frac{\gamma'}{R} + \ldots\ldots$$

resultará $P = \dfrac{h^2}{2R} + \ldots\ldots$, cantidad positiva para h infinitamente pequeño

54. Círculo osculador. En las curvas de alabeadas, como en las planas, llamaremos *círculo osculador* al límite del círculo que pasa por tres puntos infinitamente próximos. Las ecuaciones generales de un círculo son

$$(X-\alpha)^2 + (Y-\beta)^2 + (Z-\gamma)^2 = \rho^2$$

$$A(X-\alpha) + B(Y-\beta) + C(Z-\gamma) = 0,$$

siendo α, β, γ las coordenadas del centro y R el radio. Y podremos determinar los seis parámetros $\alpha, \beta, \gamma, \rho, \dfrac{B}{A}, \dfrac{C}{A}$, de modo que se tenga un contacto de segundo orden en el punto (α, β, γ), pues tendremos las ecuaciones

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - \rho^2 = 0 \qquad (1)$$

$$x'(x-\alpha) + y'(y-\beta) + z'(z-\gamma) = 0 \qquad (2)$$

$$x''(x-\alpha) + y''(y-\beta) + z''(z-\gamma) + x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0, \qquad (3)$$

$$A(x-\alpha) + A(y-\beta) + C(z-\gamma) = 0,$$

$$Ax' + By' + Cz' = 0, \quad Ax'' + By'' + Cz'' = 0,$$

deduciéndose de las tres últimas

$$\begin{vmatrix} x-\alpha & y-\beta & z-\gamma \\ dx & dy & dz \\ d''x & d''y & d''z \end{vmatrix} = 0$$

ó $$A(x-\alpha)+B(y-\beta)+C(z-\gamma)=0.$$

Esta ecuación manifiesta que el punto (α, β, γ) está en el plano osculador.

La segunda y la tercera manifiestan que este punto se encuentra en los dos planos $N=0$ (plano normal), $\frac{\partial N}{\partial t}=0$, cuya intersección es el *eje del plano osculador*. Así pues: *El centro del círculo osculador se encuentra en la intersección de este eje con el plano osculador.*

Para calcular α, β, γ y ρ, resolveremos las ecuaciones (1), (2) y (3) con relación á $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$; y siendo

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ A & B & C \end{vmatrix} = A^2+B^2+C^2,$$

se obtendrá

$$x-\alpha=\frac{(Cy'-Bz')(x'^2+y'^2+z'^2)}{A^2+B^2+C^2},$$

$$y-\beta=\frac{(Az'-Cx')(x'^2+y'^2+z'^2)}{A^2+B^2+C^2}, \text{ etc.}$$

y sustituyendo en (1)

$$\rho^2=\frac{x'^2+y'^2+z'^2}{[A^2+B^2+C^2]^2}[(Cy'-Bz')^2+(Az'-Cx')^2+(Bx'-Ay')^2]$$

y siendo la cantidad comprendida en el paréntesis igual á

$$(A^2+B^2+C^2)(x'^2+y'^2+z'^2)-(Ax'+By'+Cz')^2;$$

por ser $Ax'+By'+Cz'=0$, se tendrá

$$\rho=\frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^{1:2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

55. PROPIEDADES DEL CENTRO Y RADIO DE CURVATURA. TEOREMA I. *El radio del círculo osculador en el punto* M *es igual al radio de curvatura en este punto.*

En efecto, la ecuación de la perpendicular á la cuerda MM′ en su punto medio, es

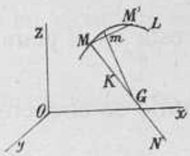


Figura 34

$$\Delta x\left(X-x-\frac{\Delta x}{2}\right)+\Delta y\left(Y-y-\frac{\Delta y}{2}\right)+\ldots=0$$

$$\text{ó}\qquad (X-x)\,\Delta x+(Y-y)\,\Delta y+\ldots..$$

$$=\frac{1}{2}\left(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2\right)$$

Eliminado $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ entre esta ecuación y las de la normal principal, se tendrá

$$\Delta x=\Delta s\,\frac{dx}{ds}+\frac{\Delta s^2}{2}\left(\frac{d^2x}{ds^2}+\alpha\right),\quad \Delta y=\Delta s\,\frac{dy}{ds}+\left(\frac{d^2x}{ds^2}+\beta\right),\ \ldots..$$

Sustituyendo en la ecuación precedente, y suprimiendo los términos multiplicados por Δs, cuya suma es nula, se tendrá

$$R\rho\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2+\alpha\,\frac{d^2x}{ds^2}+\ldots\right]=\frac{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}{\Delta s}$$

y en el límite $\quad \rho\cdot\frac{1}{\rho^2}\cdot\lim R=1 \quad$ ó $\quad \lim R=\rho.$

TEOREMA II. *La intersección de la normal principal* MN *con el plano normal á la curva que pasa por el punto* M′ *es, en el límite, el punto* K *ó el centro de curvatura.*

En efecto, la ecuación de este plano normal es

$$\left(\frac{dx}{ds}+\Delta\,\frac{dx}{ds}\right)(X-x-\Delta x)+\left(\frac{dy}{ds}+\Delta\,\frac{dy}{dz}\right)(Y-y-\Delta y)$$

$$+\left(\frac{dz}{ds}+\Delta\,\frac{dz}{ds}\right)(Y-z-\Delta z)=0.$$

Sustituyendo $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ por sus valores en la ecuación de la normal principal, se tendrá

$$R\rho\left[\frac{d^2x}{ds^2}\left(\frac{dx}{ds}+\Delta\frac{dx}{ds}\right)+\frac{d^2y}{ds^2}\left(\frac{dy}{ds}+\Delta\frac{dy}{ds}\right)+\ldots\ldots\right]$$

$$=\Delta x\frac{dx}{ds}+\Delta y\frac{dy}{ds}+\Delta z\frac{dz}{ds}+\Delta x\Delta\frac{dx}{ds}+\Delta y\Delta\frac{dy}{ds}+\ldots\ldots$$

Simplificando resulta

$$R\rho\left(\frac{d^2x}{ds^2}\frac{\Delta\frac{dx}{ds}}{ds}+\ldots\ldots\right)=\frac{\Delta x}{\Delta s}\frac{dx}{ds}+\ldots\ldots+\frac{\Delta x}{\Delta s}\Delta\frac{dx}{ds}+\ldots\ldots$$

y teniendo presente el valor de $\frac{1}{\rho^2}$ en función de las derivadas segundas, se llega á

$$\frac{1}{\rho}\lim R=1 \quad \text{ó} \quad \lim R=\rho.$$

Corolario. *El centro de curvatura puede considerarse como la intersección del plano osculador en* M *con el plano normal en este punto y un plano normal en otro punto infinitamente próximo al* M.

Para obtener las coordenadas ξ, η, ζ del centro de curvatura K, se sustituirá en las ecuaciones de la normal X, Y, Z por ξ, η, ζ. Entonces R se hará igual á ρ, y se tendrá

$$\xi-x=\rho^2\frac{d^2x}{ds^2},\quad \eta-y=\rho^2\frac{d^2y}{ds^2},\quad \zeta-z=\rho^2\frac{d^2z}{ds^2}.$$

§ 3.° Torsión ó segunda curvatura

56. Definición. Consideremos cuatro puntos P, P′, P″, P‴ tan próximos como se quiera de una curva alabeada. El plano que pasa por P′, P″ y P‴, es decir, los planos osculadores de la curva en P y P′ se cortan según una recta y forman un ángulo Φ. Y razonando como anteriormente, tendremos que

$$2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\Phi=\sqrt{\Delta a^2+\Delta b^2+\Delta c^2}\,.$$

Si se pasa al límite, expresando con $d\tau$ el límite de Φ, es decir, el ángulo de dos planos osculadores infinitamente próximos, se tendrá

$$d\tau = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2} \text{ ó } d\tau = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}$$

siendo λ, μ, ν los ángulos que forma con los ejes la perpendicular al plano osculador de la curva en M, y tendremos

$$\cos\lambda = \frac{dyd^2z - dzd^2y}{D}, \quad \cos\mu = \frac{dzd^2x - dxd^2z}{D},$$

$$\cos\nu = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{D}.$$

El ángulo infinitamente pequeño $d\tau$ formado por dos planos osculadores consecutivos se llama *ángulo de torsión* y se llama *segunda curvatura* ó *torsión* á la relación de $d\tau$ á ds. Si se toma ds constante, esta curvatura será proporcional al ángulo $d\tau$.

Por analogía con lo expuesto al tratar de la primera curvatura, se representa la relación $\frac{d\tau}{ds}$ por $\frac{1}{T}$, de manera que $T = \frac{ds}{d\tau}$; y se dice que T es el *radio de la segunda curvatura* ó *radio de torsión.*

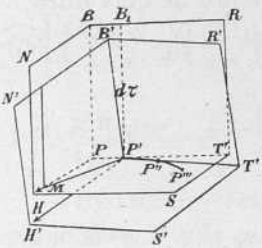


Figura 35

En la fig. 35 PB y P'B$_1$, perpendiculares respectivamente á los planos que pasan por los puntos P, P', P'' y P', P'', P''', son las rectas cuyos ángulos determinan los de los dos planos osculadores infinitamente próximos, en los puntos P y P', las cuales se llaman *binormales.*

TEOREMA. *La intersección de dos planos osculadores infinitamente próximos es una tangente á la curva.*

En efecto, si $P = 0$ es la ecuación del plano osculador en el punto (x, y, z), la del plano osculador en $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ será $P + dP = 0$, puede sustituirse por $dP = 0$. De manera que la intersección de ambos se representará por las dos ecuaciones

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0, \qquad (1)$$

$$dA(X-x)+dB(Y-y)+dC(Z-c)-(Adx+Bdy+Cdz)=0,$$

que se reduce á

$$dA\,(X-x)+dB\,(Y-y)+dC\,(Z-z)=0. \qquad (2)$$

Combinándola con (1), resultará

$$\frac{X-x}{BdC-CdB}=\frac{Y-y}{CdA-AdC}=\frac{Z-z}{AdB-BdA}, \qquad (3)$$

ecuaciones que expresan la intersección de los planos osculadores infinitamente próximos. Pero haciendo

$$\Delta=(dyd^2z-dzd^2y)\,d^3x+(dzd^2y-dyd^2z)\,d^3y$$
$$+(dxd^2y-dyd^2x)\,d^3z,$$

se tiene $BdC-CdB=dx.\,\Delta,\quad CdA-AdC=dy.\,\Delta,$

$$AdB-BdA=dz.\,\Delta.$$

Las ecuaciones (3) se reducen pues, á

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz},$$

que son las ecuaciones de la tangente.

Corolario. *La envolvente de los planos osculadores de una curva alabeada es el lugar de sus tangentes;* luego:

El lugar de las tangentes de una curva alabeada es una superficie desarrollable cuyos planos tangentes son osculadores á la arista de retroceso.

El punto en que la característica encuentra á la arista de retroceso se halla definido por las ecuaciones (1) y (2) juntamente con la diferencial de la ecuación (2) que se reduce á

$$d^2A\,(X-x)+d^2B\,(Y-y)+d^2C\,(Z-z)=0. \qquad (4)$$

Las ecuaciones (1), (2) y (4) combinadas, conducen á $X-x$, $Y-y$, $Z-z$; luego:

La superficie envolvente de los planos osculadores tiene por características las tangentes á la curva propuesta y por arista de retroceso esta curva.

57. Envolvente de los planos normales. Sea la ecuación del plano normal en (x, y, z) que contiene el parámetro t,

$$N \equiv dx\,(X - x) + dy\,(Y - y) + dz\,(Z - z) = 0.$$

La característica de esta superficie es el eje del plano osculador. Sus ecuaciones son

$$N = 0, \quad dN = (X - x)\,d^2x + (Y - y)\,d^2y + (Z - z)\,d^2z - dx^2 + dy^2 - dz^2 = 0.$$

Es perpendicular al plano osculador, en virtud de las ecuaciones (2) y (3) de la pág. 8. La arista de retroceso se halla expresada por las ecuaciones $N = 0$, $dN = 0$, $d^2N = 0$.

Angulo de los planos osculadores. Sea ψ el ángulo que forman los dos planos osculadores P y P_1 para los valores t y $t + dt$ de la variable independiente; tendremos la fórmula análoga á la (2) pág. 76.

$$\operatorname{sen}^2 \psi = \frac{(A\Delta C - C\Delta B)^2 + (C\Delta A - A\Delta C)^2 + \ldots..}{(A^2 + B^2 + C^2)\,[(A + \Delta A)^2 + (B + \Delta B)^2 + \ldots..]}$$

Podemos despreciar en el denominador ΔA, ΔB, ΔC y sustituirlos en el numerador por sus valores aproximados

$$dA = (y'z''' - z'y''')\,dt, \quad dB = (z'x''' - xz''')\,dt, \ldots..$$

y haciendo $D = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$, se obtendrá

$$B\Delta C - C\Delta B = Dx'\,dt, \quad C\Delta A - A\Delta C = Dy'\,dt, \ldots..$$

y por consiguiente

$$\operatorname{sen}^2 \psi = \frac{D^2\,(x'^2 + y'^2 + z'^2)\,dt^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2} = \frac{D^2\,ds^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2};$$

y sustituyendo el seno por el arco

$$\psi = \frac{D}{A^2 + B^2 + C^2}\,ds, \quad ó \quad \frac{\psi}{ds} = \frac{D}{A^2 + B^2 + C^2},$$

nueva forma de la torsión de la curva.

58. Arista de retroceso de los planos normales. Ante todo observaremos, que se puede establecer un contacto de tercer orden entre una curva alabeada y una esfera, por tener cuatro parámetros la ecuación de ésta

$$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=R^2$$

Para lo que se deberá satisfacer á esta ecuación y á las

$$M \equiv x'(x-a)+y'(y-b)+z'(z-c)=0,$$

$$\frac{\partial M}{\partial t}=0, \qquad \frac{\partial^2 M}{\partial t^2}=0.$$

Teorema. *El lugar de los centros de las esferas osculatrices es la arista de retroceso de la envolvente de los planos normales*, porque se obtiene este lugar, eliminando t entre las tres últimas ecuaciones; y la arista de retroceso, eliminando t entre $N=0$, $\frac{\partial N}{\partial t}=0$, $\frac{\partial^2 N}{\partial t^2}=0$, no difiriendo M de N más que por el signo y por la denominación de las coordenadas generales (a, b, c en vez de X, Y, Z).

Tomemos, para simplificar, por variable independiente el arco s, de manera que $t=s$, y

$$dt=ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt \quad \text{y} \quad x'^2+y'^2+z'^2=1.$$

Derivando la última ecuación, se tendrá

$$x'x'+y'y''+z'z''=0,$$

y, en virtud de estas relaciones, será

$$0=M=(x-a)x'+(y-b)y'+(z-c)z',$$

$$0=\frac{\partial M}{\partial t}=(x-a)\frac{d^2x}{dt^2}+(y-b)\frac{d^2y}{dt^2}+(z-c)\frac{d^2z}{dt^2}+1$$

$$0=\frac{\partial^2 M}{\partial t^2}=(x-a)\frac{d^3x}{dt^3}+(y-b)\frac{d^3y}{dt^3}+(z-c)\frac{d^3z}{dt^3}$$

y haciendo $\quad D=\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \quad$ deduciremos

$$x - a = \frac{y'z''' - z'y'''}{D} = \frac{A'}{D}, \quad a = x - \frac{A'}{D};$$

$$b = y - \frac{B'}{D}, \quad c = z - \frac{C'}{D}$$

$$R = \sqrt{(x-a)^2 + \ldots\ldots} = \frac{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}{D}.$$

Observación. Las conclusiones obtenidas se hacen visibles por medio de la fig. 36; AB, BC, CD son tres lados consecutivos de un polígono infinitesimal. La intersección de dos planos perpendiculares en los puntos medios de dos lados AB y BC es el eje de curvatura aH, siendo a el centro y $\rho =$ Ea el radio de curvatura. El ángulo EaF de dos normales consecutivas es el ángulo de contingencia $d\tau$; el plano normal en F contiene dos ejes de curvatura consecutivos, que se cortan en el centro H de la esfera osculatriz.

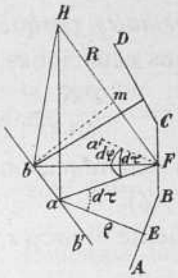


Figura 36

Como sabemos, las coordenadas de H se obtienen buscando la intersección de tres planos normales consecutivos

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0,$$
$$(\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z = ds^2,$$
$$(\xi - x)\,d^3x + (\eta - y)\,d^3y + (\zeta - z)\,d^3z = 3\,ds\,d^2s,$$

obteniéndose

$$\xi - x = -\frac{ds^5}{D}\,d\frac{A}{ds^3}, \quad \mu - y = -\frac{ds^5}{D}\,d\frac{B}{ds^3}, \quad \zeta - z = -\frac{ds^5}{D}\,d\frac{C}{ds^3}.$$

§ 4.° Problemas sobre distancias y ángulos

I. *Hallar el distancia mínima de un punto á una recta.*

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ las coordenadas del punto, a_1, a_2, a_3 las de un punto arbitrariamente tomado en la recta, b_1, b_2, b_3 sus cosenos directores. Las coordenadas x, y, z de un punto situado en la recta, á la distancia t del punto (a_1, a_2, a_3), serán

$$x = a + bt, \quad y = a_1 + b_1 t, \quad z = a_2 + b_2 t;$$

y su distancia δ al punto P estará expresada por

$$\delta^2 = (a + bt - \alpha)^2 + (a_1 + b_1 t - \alpha_1)^2 + a_2 + b_2 t - \alpha_2)^2 = \Sigma (a + bt - \alpha)^2.$$

Para que esta distancia sea mínima, se igualará su derivada á cero, y será

$$\Sigma b (a - \alpha) + \Sigma b^2 t = 0, \qquad \text{de donde} \qquad t = \frac{\Sigma b (a - \alpha)}{\Sigma b^2}.$$

Sustituyendo en la expresión

$$\delta^2 = \Sigma (a + bt - a)^2 = \Sigma (a - \alpha)^2 + 2t\Sigma b (a - \alpha) + t^2 \Sigma b^2,$$

resultará

$$\delta^2 = \Sigma (a - \alpha)^2 - 2 \frac{[\Sigma b (a - \alpha)]^2}{\Sigma b^2} + \frac{[\Sigma b (a - \alpha)]^2}{\Sigma b^2}$$

$$= \frac{\Sigma (a - \alpha)^2 \, \Sigma b^2 - [\Sigma b (a - \alpha)]^2}{\Sigma b^2}$$

$$= \frac{[a - \alpha_1) b_1 - (a_1 - \alpha_1) b]^2 + [(a_1 - \alpha_1) b_2 - (a_2 - \alpha_2) b_1]^2}{b^2 + b_1^2 + b_2^2}$$

$$+ \frac{[(a_2 - \alpha_2) b - (a - \alpha) b_2]^2}{b^2 + b_1^2 + b_2^2}.$$

Esta expresión representa un mínimo, porque su derivada segunda $\dfrac{d^2 \delta^2}{dt^2} = 2 \Sigma b^2$ es positiva.

II. *Hallar la mínima distancia de dos rectas.* Sean

$$x = a + bt, \quad y = a_1 + b_1 t, \quad z = a_2 + b_2 t$$

$$\xi = \alpha + \beta\tau, \quad \eta = \alpha_1 + \beta_1 \tau, \quad \zeta = \alpha_2 + \beta_2 \tau$$

las coordenadas de un punto de cada una de las rectas. La expresión de la distancia de estos puntos será

$$\delta^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 = (a - \alpha + bt - \beta\tau)^2$$

$$+ (a_1 - \alpha_1 + b_1 t - \beta_1 \tau)^2 + (a_2 - \alpha_2 + b_2 t - \beta_2 \tau)^2.$$

Vamos á determinar las variables t y τ, de manera que esta expresión sea un mínimo. Tendremos

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\delta^2}{\partial t} = b\,(a - \alpha + bt - \beta\tau) + b_1\,(a_1 - \alpha_1 + b_1 t - \beta_1\tau)$$
$$+ b_2\,(a_2 - \alpha_2 + b_2 t - \beta_2\tau) = 0.$$

Eliminando sucesivamente las cantidades entre paréntesis, y escribiendo por brevedad

$$b_1\beta_2 - b_2\beta_1 = \mathrm{A}, \quad b_2\beta - b\beta_2 = \mathrm{A}_1, \quad b\beta_1 - b_1\beta = \mathrm{A}_2,$$

tendremos

$$\frac{a - \alpha + bt - \beta\tau}{\mathrm{A}} = \frac{a_1 - \alpha_1 + b_1 t - \beta_1\tau}{\mathrm{A}_1} = \frac{a_2 - \alpha_2 + b_2 t - \beta_2\tau}{\mathrm{A}_2}.$$

Sea λ el valor común de estas relaciones. Tendremos para determinar t, τ y λ las tres ecuaciones lineales

$$\mathrm{A}\lambda + \beta\tau - bt = a - \alpha,$$
$$\mathrm{A}_1\lambda + \beta_1\tau - b_1 t = a_1 - \alpha_1,$$
$$\mathrm{A}_2\lambda + \beta_2\tau - b_2 t = a_2 - \alpha_2,$$

de las que se deduce

$$\lambda = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{D}}, \quad \tau = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{D}}, \quad t = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}},$$

expresando L, M, N y D los determinantes

$$\mathrm{L} = \begin{vmatrix} a - \alpha & \beta & -b \\ a_1 - \alpha_1 & \beta_1 & -b_1 \\ a_2 - \alpha_2 & \beta_2 & -b_2 \end{vmatrix} = \mathrm{A}\,(a - \alpha) + \mathrm{A}_1\,(a_1 - \alpha_1) \ldots\ldots$$

$$\mathrm{M} = \begin{vmatrix} \mathrm{A} & a - \alpha & -b \\ \mathrm{A}_1 & a_1 - \alpha_1 & -b_1 \\ \mathrm{A}_2 & a_2 - \alpha_2 & -b_2 \end{vmatrix}, \quad \mathrm{N} = \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \beta & a - \alpha \\ \mathrm{A}_1 & \beta_1 & a_1 - \alpha_1 \\ \mathrm{A}_2 & \beta_2 & a_2 - \alpha_2 \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \beta & -b \\ \mathrm{A}_1 & \beta_1 & -b_1 \\ \mathrm{A}_2 & \beta_2 & -b_2 \end{vmatrix} = \mathrm{A}^2 + \mathrm{A}_1^2 + \mathrm{A}_2^2.$$

Por último se tiene

$$\delta = \sqrt{A^2\lambda^2 + A_1^{\,2}\lambda^2 + A_2^{\,2}\lambda^2} = \frac{\pm L}{\sqrt{A^2 + A_1^{\,2} + A_2^{\,2}}}.$$

Observación. Las derivadas segundas son

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\delta^2}{\partial t^2} = b^2 + b_1^{\,2} + b_2^{\,2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\delta^2}{\partial t\,\partial\tau} = -\,b\beta - b_1\beta_1 - b_2\beta_2$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\delta^2}{\partial\tau^2} = \beta^2 + \beta_1^{\,2} + \beta_2^{\,2}.$$

La cantidad $AC - B^2$ es igual á

$$4\,(b^2 + b_1^{\,2} + b_2^{\,2})\,(\beta^2 + \beta_1^{\,2} + \beta_2^{\,2}) - 4\,(b\beta + b_1\beta_1 + b_2\beta_2)^2$$
$$= 4\,(A^2 + A_1^{\,2} + A_2^{\,2}).$$

III. *Hallar la distancia mínima de un punto á un plano.* Sean a, b, c las coordenadas del punto y

$$mx + ny + pz + q = 0$$

la ecuación del plano. Para que sea un mínimo la expresión

$$\delta^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

según las reglas para la obtención de los mínimos relativos, debemos igualar á cero las derivadas parciales de la expresión

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + \lambda\,(mx + ny + pz + q);$$

y tendremos las ecuaciones

$$2\,(x-a) + \lambda m = 0, \quad 2\,(y-b) + \lambda n = 0, \quad 2\,(z-c) + \lambda p = 0,$$

á las que será necesario agregar la siguiente:

$$0 = mx + ny + pz + q$$
$$= m\,(x-a) + n\,(y-b) + p\,(z-c) + ma + nb + pc + q;$$

y obtendremos

$$x - a = -\frac{\lambda m}{2}, \quad y - b = -\frac{\lambda n}{2}, \quad z - c = -\frac{\lambda p}{2},$$

$$\frac{1}{2}\lambda = \frac{ma + nb + pc + q}{m^2 + n^2 + p^2},$$

$$\delta^2 = \left(\frac{1}{2}\lambda\right)^2 (m^2 + n^2 + p^2) = \frac{(ma + nb + pc + q)^2}{m^2 + n^2 + p^2}.$$

Para verificar que esta expresión representa un mínimo, hallemos las derivadas parciales de δ^2, siendo x, y las variables independientes, y tendremos

$$\frac{\partial \delta^2}{\partial x} = 2\,(x - a + 2\,(z - c)\,\frac{\partial z}{\partial x} = (2x - a) - \frac{2m}{p}\,(z - c),$$

$$\frac{\partial^2 \delta^2}{\partial x^2} = 2 - \frac{2m}{p}\,\frac{\partial z}{\partial x} = 2 + \frac{2m^2}{p^2},$$

$$\frac{\partial^2 \delta^2}{\partial x \partial y} = -\frac{2m}{p}\,\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2mn}{p^2}.$$

Y se obtendrá igualmente, $\dfrac{\partial^2 \delta^2}{\partial y^2} = 2 + \dfrac{2n^2}{p^2}$.

Las expresiones $\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2$ y A de la teoría general son

$$\left(2 + \frac{2m^2}{p^2}\right)\left(2 + \frac{2n^2}{p^2}\right) - 4\,\frac{m^2 n^2}{p^4} = 4 + \frac{4m^2}{p^2} + \frac{4n^2}{p^2} \quad \text{y} \quad 2 + \frac{2m^2}{p^2}$$

que son positivas. Habrá pues, un minimo.

IV. Ángulo de dos tangentes. Sea φ el ángulo de dos rectas cuyos cosenos directores son respectivamente proporcionales á a, b, c, y á a_1, b_1, c_1, que se expresa por la fórmula

$$\cos\varphi = \frac{aa_1 + bb_1 + cc_1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{a_1^{\,2} + b_1^{\,2} + c_1^{\,2}}}. \qquad (1)$$

De esta se deduce

$$\operatorname{sen}^2\varphi = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)\,(a^2_1 + b^2_1 + c_1^{\,2}) - (aa_1 + bb_1 + cc_1)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)\,(a^2_1 + b^2_1 + c^2_1)}$$

$$= \frac{(bc_1 - cb_1)^2 + (ca_1 - ac_1)^2 + (ab_1 - ba_1)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)\,(a^2_1 + b^2_1 + c_1^{\,2})}. \qquad (2)$$

Para aplicar esta fórmula á dos puntos P (x, y, z) y P_1 (x', y', z')

correspondientes á los valores t y $t+dt$ de la variable, sustituiremos a, b, c, a_1, b_1, c_1 por sus valores actuales $x', y', z', x' + \Delta x', y' + \Delta y', z' + \Delta z'$, lo que dará

$$\operatorname{sen}^2 \varphi = \frac{(y'\,\Delta z' - z'\,\Delta y')^2 + (z'\,\Delta x' - x'\,\Delta z')^2 + \ldots}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)[(x' + \Delta x')^2 + (y' + \Delta y')]^2 + \ldots}$$

Podemos despreciar en el denominador las cantidades infinitamente pequeñas Δx, Δy, Δz y sustituirlas en el numerador por sus valores aproximados, $x''dt$, $y''dt$, $z''dt$; lo que dará (7).

$$\operatorname{sen}^2 \varphi = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^2}\, dt^2.$$

Y puesto que φ y sen φ difieren en un infinitamente pequeño de tercer orden, tendremos

$$\varphi = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt.$$

Observación. De esta fórmula resulta la expresión de la curvatura bajo la forma

$$k = \frac{\varphi}{ds} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{(x'^2 + y'^2 + c'^2)^{3:2}} = \frac{1}{\rho}$$

designando ρ el radio del círculo osculador.

V. Ángulo de un plano con una tangente. Sean el plano osculador en (x, y, z) correspondiente al valor t de la variable independiente y la tangente correspondiente al valor $t + dt$.

Llamando θ á dicho ángulo, tenemos

$$\operatorname{sen} \theta \frac{A\,(x' + \Delta x') + B\,(y' + \Delta y') + C\,(z' + \Delta z')}{\sqrt{A^2 + B^2 + \ldots\ldots}\;\sqrt{(x' + \Delta x')^2 + (y' + \Delta y')^2 + \ldots\ldots}}$$

Podemos despreciar $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$ en el denominador y sustituir estas cantidades en el numerador por sus valores aproximados

$$x''dt + \frac{1}{2}x'''dt^2, \quad y''dt + \frac{1}{2}y'''dt^2, \ldots\ldots.$$

y observando que se tiene

$$Ax' + By' + Cz' = 0, \quad Ax'' + \ldots = 0, \quad Ax''' + \ldots = D,$$

resultará

$$\theta = \frac{1}{2} \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} dt^2 = \frac{\tau k ds^2}{2},$$

siendo $k = \frac{\varphi}{ds}$, siendo φ el ángulo límite de las dos rectas consideradas en el problema anterior.

VI. Distancia de un punto á una tangente. Este problema es el I, resuelto para el punto $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ y la recta

$$X = a + bt, \quad Y = a_1 + b_1 t, \quad Z = a_2 + b_2 t.$$

Pero actualmente el punto es (x, y, z) y la recta corresponde, como el punto, al valor t de la variable. Tendremos pues

$$a = x, \qquad a_1 = y, \qquad a_2 = z,$$

$$\alpha = x + \Delta x, \quad \alpha_1 = y + \Delta y, \quad \alpha_2 = z + \Delta z,$$

$$b = x', \qquad b_1 = y', \qquad b_2 = z';$$

y la fórmula se reduce á

$$\delta = \sqrt{\frac{(y'\Delta x - z'\Delta y)^2 + (z'\Delta x - x'\Delta z)^2 + (x'\Delta y - y'\Delta x)^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

sustituyendo Δx, Δy, $z\Delta$ por sus valores

$$\Delta x = x' dt + x'' \frac{dt^2}{1.2} + \ldots, \ \Delta y = y' dt + \ldots \ \Delta z = z' dt + \ldots$$

será
$$\delta = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \frac{dt^2}{1.2} = \frac{1}{2} k ds^2.$$

VII. Distancia de un punto al plano osculador. Consideramos el plano osculador en x, y, z y el punto correspondiente á $t + td$. Dicha distancia será

$$\delta = \pm \frac{A(x + \Delta x - x) + B(y + \Delta y - y) + \ldots}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Sustituyendo Δx, Δy, Δz por sus valores aproximados

$$x' + dt + \frac{1}{2} x'' dt^2 + \frac{1}{6} x''' dt^3 + \ldots\ldots, \text{ etc.},$$

se tendrá $$\delta = \pm \frac{1}{2} \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} dt^2 = \frac{\tau k ds^3}{6}$$

VIII. Distancia de dos tangentes. Se trata de las dos tangentes que corresponden á t y á $t + dt$.

Aplicando la fórmula ya obtenida para la distancia de dos rectas (prob. IV), tendremos que sustituir

$$a,\ a_1,\ a_2,\ b,\ b_1,\ b_2,\ \alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta,\ \beta_1,\ \beta_2$$

por sus valores actuales

$$x',\ y',\ z',\ x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z, + \Delta z,\ x' + \Delta x',\ y' + \Delta y',\ z' + \Delta z',$$

y tendremos

$$\varepsilon = \frac{\pm L}{\sqrt{(y'\Delta z' - z'\Delta y')^2 + (z'\Delta x' - x'\Delta z')^2 + (x'\Delta y' - y'\Delta x')^2}}$$

de donde $$L = \begin{vmatrix} \Delta x & \Delta x' & -x' \\ \Delta y & \Delta y' & -y' \\ \Delta z & \Delta z' & -z' \end{vmatrix},$$

El valor principal del denominador es $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, dt$. Desarrollando en L, tendremos el nuevo determinante L

$$\begin{vmatrix} x'dt + x''\dfrac{dt^2}{2} + \ldots\ldots & x''dt + x'''\dfrac{dt^2}{2} + \ldots\ldots & -x' \\ y'dt + y''\dfrac{dt^2}{2} + \ldots\ldots & y''dt + y'''\dfrac{dt^2}{2} + \ldots\ldots & -y' \\ z'dt + z''\dfrac{dt^2}{2} + \ldots\ldots & z''dt + z'''\dfrac{dt^2}{2} + \ldots\ldots & -z' \end{vmatrix}.$$

Y sumando á los términos de la primera columna los de la segunda y de la tercera, multiplicados respectivamente por $-\frac{1}{2}dt$ y por dt, se tendrá para L el valor de

$$\begin{vmatrix} x''dt^3\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right)+\ldots\ldots & x''dt+x'''\frac{dt^2}{2}+\ldots\ldots & -x' \\ y''dt^3\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right)+\ldots\ldots & y''dt+y'''\frac{dt^2}{2}+\ldots\ldots & -y' \\ z''dt^2\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right)+\ldots\ldots & z''dt+z'''\frac{dt^2}{2}+\ldots\ldots & -z' \end{vmatrix}.$$

Y reduciendo cada término á su valor principal

$$L=\frac{1}{12}dt^4\begin{vmatrix} x''' & x'' & x' \\ y''' & y'' & y' \\ z''' & z'' & z' \end{vmatrix}=-\frac{D}{12}dt^4.$$

$$\varepsilon=\frac{\pm D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\frac{dt^3}{12}=\pm\frac{k\tau ds^3}{12}\ (*).$$

§ 5.º Problemas sobre distancias y ángulos

59. Teorema de Bouquet. *Si la distancia más corta de dos rectas que contienen en su ecuación un parámetro, es de orden superior al primero, es por lo menos de tercero.*

Sea la recta móvil

$$x=az+p,\quad y=bz+q \tag{1}$$

que depende de un solo parámetro, y sean

$$x=(a+\Delta a)z+p+\Delta p,\quad y=(b+\Delta b)z+q+\Delta q \tag{2}$$

las ecuaciones de una recta infinitamente próxima. La distancia más corta se expresa por

$$h=\frac{\Delta a\,\Delta q-\Delta b\,\Delta p}{\sqrt{\Delta a^2+\Delta b^2+(a\Delta b+b\Delta a)^2}}.$$

(*) C. Jordan *Cours d'Analyse*, t. I, págs. 462-66.

Sustituyendo por Δa y Δb sus valores

$$\Delta a = da + \frac{1}{2} d^2 a + \ldots\ldots, \quad \Delta b = db + \frac{1}{2} d^2 b + \ldots\ldots,$$

tendremos

$$h = \frac{(dadq - dbdq) + \frac{1}{2}(d^2 adq + dad^2 q - d^2 b dp - \ldots\ldots)}{\sqrt{da^2 + db^2 + (adb - bda)^2}}.$$

Si h es de orden superior al primero, $dadq - dodp$ es nulo. Pero el segundo grupo escrito entre paréntesis, en el numerador, es la diferencial del primero, que será nulo al mismo tiempo que éste; luego h es de orden superior al segundo.

Recíprocamente: *Si la distancia más corta de dos generatrices de una superficie reglada es de orden superior al primero, estas generatrices serán tangentes á una misma curva.*

Si identificamos las ecuaciones (1) con una tangente

$$X - x = \frac{dx}{dz}(Z - z), \quad Y - y = \frac{dy}{dz}(Z - z),$$

tendremos

$$a = \frac{dx}{dz}, \quad b = \frac{dy}{dz}, \quad p = x - z\frac{dx}{dz}, \quad q = y - z\frac{dy}{dz}.$$

Para que estas ecuaciones sean compatibles, se necesita que exista entre ellas una condición independiente de $\frac{dx}{dz}$ y $\frac{dy}{dz}$; y eliminando estas cantidades, se tendrá

$$p = x - az, \qquad q = y - bz$$

ó $$dp = dx - adz - zda, \qquad dq = dy - bdz - zbd.$$

Pero $$dx = adz, \qquad dy = ddz;$$ luego

$$dp.\, db - da.\, dq = 0.$$

Esta es la condición para que la distancia de dos generatrices sea de orden superior al primero.

Observación. El plano que pasa por una tangente paralelamente á una tangente infinitamente próxima, se halla siempre á una distancia de segundo orden de esta generatriz; y por consiguiente toca al lugar de las tangentes á lo largo de una de ellas.

60. Serie de rectas. Podemos establecer geométricamente que

I.° *Si la distancia* $\overline{\omega}$ *de dos rectas consecutivas cualesquiera de una serie es un infinitamente pequeño de orden superior al primero, las rectas de esta serie son las tangentes de una misma línea del espacio.*

En efecto, considerando la superficie reglada S, cuyas generatrices son las rectas de la serie dada; siendo el ángulo ω de dos generatrices consecutivas de primer orden, y su distancia más corta de orden superior al primero, el parámetro de distribución de los planos tangentes á lo largo de cada generatriz $k = \lim \frac{\omega}{\overline{\omega}}$ es infinito. La superficie tiene el mismo plano tangente á lo largo de cada generatriz, y coincide con la superficie desarrollable que sería la envolvente de estos planos tangentes. Además, las rectas de la serie dada, cada una contenida totalmente en la superficie, coinciden con las tangentes de su arista de retroceso.

También podemos considerar la línea de estricción OO′ de S, considerando las dos generatrices infinitamente próximas que cortan á esta línea en O, O′; y sea OO_1 su menor distancia. Por ser esta última línea, al menos de segundo orden, se concluye mediante el triángulo rectángulo OO_1O', ó que la cuerda OO′ de la línea de estricción es de segundo orden, ó que permaneciendo de primero, el ángulo que forma en O′ con la generatriz O′G′ es infinitamente pequeño. De esta segunda hipótesis se deduce inmediatamente que las generatrices son tangentes á la línea de estricción OO′, que se convierte en la arista de retroceso de la superficie. La primera hipótesis conduce á que la línea de estricción se reduce á un punto, y la superficie á un cono cuyo vértice es este punto.

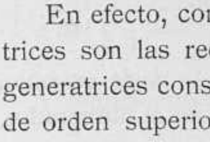


Figura 37

61. Aplicación á las tangentes á una curva. Sean las ecuaciones de una tangente cualquiera á una curva

$$X - x = \frac{dx}{dz}(Z - z), \quad Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x).$$

Tendremos en este caso

$$a = \frac{dx}{dz}, \quad b = \frac{dy}{dz}, \quad \alpha = x - z\frac{dx}{dz}, \quad \beta = y - z\frac{dy}{dz}.$$

Tomemos z por la constante que determina la posición de la recta y de la cual son x é y funciones. Esto sentado, tendremos

$$\frac{da}{dz} = \frac{d^2x}{dz^2}, \quad \frac{db}{dz} = \frac{d^2y}{dz^2},$$

$$\frac{d\alpha}{dz} = -z\frac{d^2x}{dz^2}, \quad \frac{d\beta}{dz} = -z\frac{d^2y}{dz^2};$$

luego $$da\,d\alpha - db\,d\beta = 0;$$

luego: *Por lo general, en toda curva alabeada la distancia más corta de dos tangentes, infinitamente próximas es un infinitamente pequeño de tercer orden, si la distancia de los dos puntos de contacto es de primero.*

§ 6.º Órdenes de contactos

62. Contacto de las curvas alabeadas. Definición. Dos curvas alabeadas que pasan por un punto M tienen en este punto un contacto de orden n, si considerando una secante PP′ común á estas dos curvas, trazada en la proximidad de M, la parte PP′ de secante comprendida entre las dos curvas es de orden $n + 1$ con relación á las distancias MP ó MP′.

Suponerse que MP y MP′ son de igual orden, equivale á suponer que PP′ no es paralela á la tangente en M á una de las dos curvas. Y como se vió en Geometría plana, el orden de PP′ no depende de su orientación.

Sean x, y, z ó x_1, y_1, z_1 las coordenadas del punto M, según que se le considere en la primera ó en la segunda curva. Las coordenadas de un punto P próximo al M, serán

$$x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z, \ldots,\ x_1 + \Delta x_1,\ y_1 + \Delta y_1,\ z_1 + \Delta z_1, \ldots$$

Y para que exista un contacto de orden n, será necesario que

PP′ ó sus proyecciones $\Delta x - \Delta x_1$, ... sean por lo menos de orden $n+1$ (ó una de ellas por lo menos).

Pero es necesario, en estas condiciones, que la variable independiente sea tal, que PP′ no sea paralela á la tangente á una de las dos curvas. Se podrá tomar, por ejemplo, $x = x_1$ por variable independiente y los puntos P y P′ se obtendrán cortando á las dos curvas por un plano paralelo al yz. Y puesto que

$$\Delta x - \Delta x_1 = dx - dx_1 + \frac{1}{2}(d^2x - d^2x_1) + \ldots\ldots,$$

$$\Delta y - \Delta y_1 = dy - dy_1 + \frac{1}{2}(d^2y - d^2y_1) + \ldots\ldots,$$

$$\Delta z - \Delta z_1 = dz - dz_1 + \frac{1}{2}(d^2z - d^2z_1) + \ldots\ldots,$$

las condiciones de un contacto de orden n serán

$$dx - dx_1 = 0,\quad d^2x - d^2x_1 = 0,\quad \ldots\ldots,\quad d^nx - d^nx_1 = 0,$$
$$dy - dy_1 = 0,\quad d^2y - d^2y_1 = 0,\quad \ldots\ldots,\quad d^ny - d^ny_1 = 0,$$
$$dz - dz_1 = 0,\quad d^2z - d^2z_1 = 0,\quad \ldots\ldots,\quad d^nz - d^nz_1 = 0.$$

Cuando se toma $x = x_1$ por variable independiente, se tiene

$$dx = 0,\ dx_1 = 0,\quad \ldots\ldots,\quad d^nx = 0,\quad d^nx_1 = 0;$$

y las condiciones escritas en la primera línea quedan satisfechas; luego son necesarias $2n$ condiciones para que exista el contacto de de orden n.

TEOREMA I. *Dos curvas tienen un contacto de orden* n, *cuando sus proyecciones sobre un plano cualquiera tienen un contacto de orden* n, *y recíprocamente.*

En efecto, la distancia PP′ arriba considerada, es de igual orden que su proyección, siempre que ésta no se efectúe sobre un plano normal á las dos curvas.

TEOREMA II. *Dos curvas tienen un contacto de orden* n *cuando son límites de dos curvas variables que se cortan en* n + 1 *puntos coincidentes.*

En efecto, las proyecciones de las dos curvas tienen un contacto de orden n, teniendo MP y MP′ la misma posición límite, puesto que en el triángulo MPM′ se tiene: $\frac{\operatorname{sen} M}{PP'} = \frac{\operatorname{sen} P}{MP'}$, siendo P finito por hipótesis y M nulo en el límite, cuando PP′ es de segundo orden.

63. Contacto de las curvas y de las superficies. Una curva tiene con una superficie un contacto de orden n en el punto común M, cuando una recta PP′, próxima á M, encuentra á la superficie en puntos P y P′ tales, que PP′ sea de orden $n+1$. Suponiendo que PP′ no sea en el límite, ni tangente á la curva ni á la superficie, se prueba que esta definición es independiente de la orientación de PP′.

Para hallar las condiciones de contacto de orden n de una curva y de una superficie, supondremos que el eje de las z no sea paralelo ni á la tangente en M á la curva, ni al plano tangente en M á la superficie. El cilindro que proyecta la curva sobre el plano xy, corta á la superficie según una curva que debe tener con la propuesta un contacto de orden n, porque la distancia de dos puntos de estas curvas, contada paralelamente al eje de las z, es de orden $n+1$, y recíprocamente. Sean pues

$$x = \varphi(z), \quad y = \psi(z), \quad f(x, y) = 0 \qquad (1)$$

las ecuaciones de la curva, y

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (2)$$

la de la superficie. Para asegurar el contacto de orden n, bastará expresar que las curvas

$$F = 0, \quad f = 0 \quad \text{y} \quad x = \varphi(x), \quad y = \psi(x)$$

tienen un contacto de orden n. Con este objeto, se expresará que los valores de dx, dy, dz, ..., deducidos de las ecuaciones de la curva, propuesta son los mismos que los que se deducirían de $F=0$ y $f=0$. Para expresar estas condiciones, se puede diferenciar n veces $F=0$ y $f=0$, sustituyendo x, y, z, dx, dy, ... por sus valores sacados de $x=\varphi(z)$, $y=\psi(z)$; pero entonces $f=0$, $df=0$, ... dan identidades; y las condiciones de contacto de orden n son que las ecuaciones

$$F = 0, \quad dF = 0, \quad \ldots\ldots, \quad d^n F = 0$$

se verifiquen cuando se sustituyan x, y, z por sus valores deducidos de $x = \varphi(z)$, $y = \psi(z)$.

TEOREMA. *Si una curva variable de forma, encuentra á una superficie en* n + 1 *puntos, y teniendo en cuenta la variación de ciertos parámetros, dichos puntos llegan á confundirse en uno solo, la curva y la superficie tendrán un contacto de orden* n.

En efecto, si se proyecta la curva sobre la superficie, con auxilio de proyectantes paralelas á una dirección fija, se obtendrá una curva, que en el límite, tendrá un contacto de orden n con la propuesta, porque tiene evidentemente con ésta $n + 1$ puntos comunes que, en el límite, terminan por confundirse con uno solo situado en la superficie.

64. OSCULACIÓN. Dos curvas son osculatrices y una curva es osculatriz de una superficie, cuando el orden de su contacto es lo más elevado posible, según el número de parámetros arbitrarios que contienen sus ecuaciones respectivas.

Pueden además dos curvas ó una curva y una superficie tener accidentalmente un contacto más elevado que el que se debiera esperar, según el número de parámetros. Entonces hay *sobreosculación.*

65. VALUACIÓN DE ALGUNOS INFINITAMENTE PEQUEÑOS. *Distancia de un punto de una curva á la tangente trazada por un punto infinitamente próximo.* Siendo

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}$$

las ecuaciones de la tangente, la distancia h del punto $(x + \Delta x,$ $y + \Delta y,$ $z \Delta z)$ á ésta será

$$h = \frac{\sqrt{(\Delta z dy - \Delta y dz)^2 + (\Delta x dz - \Delta z dx)^2 + \ldots\ldots}}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}.$$

Sustituyamos Δx, Δy, Δz por

$$dx + \frac{d^2x}{2} + \frac{d^3x}{6} + \ldots, \quad dy + \frac{d^2y}{2} + \ldots, \quad dz + \frac{d^2z}{2} + \ldots;$$

y despreciando los términos de orden superior, tendremos

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(d^2zdy - d^2ydz)^2 + \ldots\ldots}{ds^2}},$$

es decir, $h = \frac{1}{2}\frac{ds^2}{R}$; la cantidad h es de segundo orden.

Distancia de un punto de una curva al plano osculador trazado por un punto infinitamente próximo. Tenemos

$$(X - x)(dzd^2y - dyd^2z) + \ldots\ldots$$

ó $$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0.$$

La distancia del punto $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ al plano se expresa por la fórmula

$$k = \frac{A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

y siendo $Adx + Bdy + \ldots = 0$, $Ad^2x + Bd^2y + \ldots = 0$, si sustituímos Δx por $dx + \frac{d^2x}{2} + \ldots$, etc., se tendrá

$$k = \frac{Ad^3x + Bd^3y + Cd^3z}{6\sqrt{A^3 + B^3 + C^3}};$$

y en virtud de expresiones conocidas será finalmente

$$k = \frac{\Delta}{6}\frac{R}{ds^3} = \frac{ds^3}{6TR}$$

66. Diferencia entre un arco y su cuerda. Empleando las mismas notaciones y expresiones de Δx, Δy, Δz, llamando c á la cuerda, y sumando los cuadrados de las tres diferencias, será

$$c^2 = ds^2 + (dxd^2x + \ldots) + \frac{1}{3}(dxd^3x + \ldots) + \frac{1}{4}(d^2x^2 + \ldots),$$

prescindiendo de los términos superiores al cuarto orden. Diferenciando dos veces la expresión

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

y haciendo sustituciones, se llegará á

$$c^2 - ds^2 = -\frac{1}{12}\frac{ds^4}{R^2} \quad \text{ó} \quad (c + ds)(c - ds) = -\frac{1}{12}\frac{ds^4}{R^2}.$$

Sustituyendo $c + ds$ por $2ds$, llegaremos á

$$ds - c = \frac{1}{24}\frac{ds^3}{R^2}.$$

La diferencia buscada es por consiguiente de tercer orden.

§ 7.º Fórmulas de Serret ó de Frenet

67. Triedro móvil. La tangente, la normal principal y la binormal forman un triedro trirectángulo. El eje de las x se podrá considerar como fijando la dirección de la tangente en sentido positivo, así como el eje de las y y el de la normal principal y el eje de las z representará en sentido también positivo la dirección de la binormal. Este triedro se considerará en cada punto de la curva, y el triedro móvil podrá siempre llevar á la coincidencia con el triedro fijo (fig. 35).

Los ejes móviles se determinan por los cosenos de los ángulos que forman con los ejes fijos. Las relaciones de los nueve cosenos se reducen á

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \qquad aa' + bb' + cc' = 0$$

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1 \qquad ab + a'b' + a''b'' = 0$$

$$a = b'c'' - c'b'' \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 1$$

juntamente con las que pueden obtenerse mediante las permutaciones circulares efectuadas sobre las letras ó sobre los índices.

68. Fórmulas de Serret-Frenet. Vamos á establecer las fórmulas que expresan las derivadas de los cosenos de las tres direcciones principales mediante los mismos cosenos y los radios ρ y T de primera y de segunda curvatura.

Expresemos por α, β, γ, por l, m, n y por λ, μ y ν los ángulos que forman respectivamente con los ejes la tangente, la normal principal y la binormal. Y veremos que, desde luego, tres de las fórmulas resultan de las (1), pág. 89. Así tenemos

$$\frac{d\cos\alpha}{ds}=\frac{\cos l}{\rho},\quad \frac{d\cos\beta}{ds}=\frac{\cos m}{\rho},\quad \frac{d\cos\gamma}{ds}=\frac{\cos n}{\rho}. \tag{1}$$

Derivando con relación á s la ecuación

$$\cos\alpha\cos\lambda+\cos\beta\cos\mu+\cos\gamma\cos\nu=0 \text{ y } \cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu=1$$

tendremos

$$\cos\alpha\frac{d\cos\lambda}{ds}+\cos\beta\frac{d\cos\mu}{ds}+\cos\gamma\frac{d\cos\nu}{ds}=0, \tag{2}$$

$$\cos\lambda\frac{d\cos\lambda}{ds}+\cos\mu\frac{d\cos\mu}{ds}+\cos\nu\frac{d\cos\nu}{ds}=0. \tag{3}$$

Combinando la (2) y (3), resulta

$$\frac{d\cos\lambda}{ds}:\frac{d\cos\mu}{ds}:\frac{d\cos\nu}{ds}=\cos l:\cos m:\cos n.$$

Por consiguiente

$$\frac{d\cos\lambda}{ds}=\pm\cos l\sqrt{\left(\frac{d\cos\lambda}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\cos\mu}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\cos\nu}{ds}\right)^2}$$

$$\frac{d\cos\mu}{ds}=\pm\cos m\sqrt{\left(\frac{d\cos\lambda}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\cos\mu}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\cos\nu}{ds}\right)^2}$$

$$\frac{d\cos\nu}{ds}=\pm\cos n\sqrt{\left(\frac{d\cos\lambda}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\cos\mu}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\cos\nu}{ds}\right)^2}$$

y, dejando por ahora indeterminado el signo, tendremos

$$\frac{d\cos\lambda}{ds}=\frac{\cos l}{\mathrm{T}},\quad \frac{d\cos\mu}{ds}=\frac{\cos m}{\mathrm{T}},\quad \frac{d\cos\nu}{ds}=\frac{\cos n}{\mathrm{T}} \tag{4}$$

Completaremos las fórmulas (1) y (4) con las relativas á los cosenos de la normal principal, observando que se tiene

$$\cos l = \cos\gamma \cos - \mu \cos\beta \cos\nu.$$

Si derivamos esta ecuación con respecto á s, en virtud de (1) y (4) resultará

$$\frac{d\cos l}{ds} = \frac{1}{\rho}(\cos n \cos\mu - \cos m \cos\nu)$$

$$+ \frac{1}{T}(\cos\gamma \cos m - \cos\beta \cos n) = -\frac{\cos\alpha}{\rho} - \frac{\cos\lambda}{T}.$$

Reunimos las fórmulas en el siguiente cuadro:

$$\frac{d\cos\alpha}{ds} = \frac{\cos l}{\rho} \quad \frac{d\cos\beta}{ds} = \frac{\cos m}{\rho}, \quad \frac{d\cos\gamma}{ds} = \frac{\cos n}{\rho},$$

$$\frac{d\cos l}{ds} = \frac{\cos\alpha}{\rho} - \frac{\cos\lambda}{T}, \quad \frac{d\cos m}{ds} = -\frac{\cos\beta}{\rho} - \frac{\cos\mu}{T}, \ldots\ldots$$

$$\frac{d\cos\lambda}{ds} = \frac{\cos l}{T}, \quad \frac{d\cos\mu}{ds} = \frac{\cos m}{T}, \quad \frac{d\cos\nu}{ds} = \frac{\cos n}{T},$$

que son las fórmulas de Frenet, más conocidas con el nombre de Serret.

69. Empleo de la representación esférica. Estas investigaciones se facilitan empleando la representación esférica de Gauss, como lo hace el Sr. Apell en su obra *Elements d'Analyse.*

Así, para valuar la variación continua de la dirección de la tangente Mt considera la esfera de radio 1 cuyo centro es el origen de coordenadas, trazando por O un radio OA, paralelo á Mt. Al describr el punto M la curva alabeada en el sentido de los arcos de M, la recta describe el cono director de las tangentes y el extremo del radio OA describe en la esfera una curva A_0A_1 cuyo arco σ, tomado en sentido positivo, es la dirección de A_0A_1; y este arco medirá la variación continua de la tangente desde M_0t_0 hasta Mt. A $\Delta\sigma =$ arc MM_1 en la curva alabeada corresponde $\Delta\sigma =$ arc AA_1 en la curva esférica. Y tendremos que la curvatura

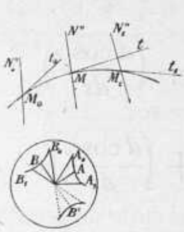


Figura 38

media es $\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}$, la curvatura en M es $\frac{d\sigma}{ds}$ y el radio de curvatura en dicho punto $R = \frac{ds}{d\sigma}$.

Para obtener la torsión y el radio de torsión se repite la construcción con la variante de que los radios de la esfera sean paralelos á la binormal. Correspondiendo á la curva alabeada la curva esférica τ.

70. Propiedades geométricas de las curvas σ y α. Para llegar sencillamente á las fórmulas que dan la curvatura y la torsión, podemos hacer las construcciones geométricas siguientes:

Sea A F la tangente á la curva esférica σ en el sentido de las σ positivas. Esta recta es paralela á la normal principal MN′ (fig. 39).

En efecto, el cono engendrado por las rectas OA es el cono director de las tangentes á la curva. El plano tangente OAF es paralelo al plano osculador en M á la curva. Y por hallarse AF en un plano paralelo al osculador y ser perpendicular á la recta OA, que es paralela á Mt, será paralela á la normal principal MN′. Podemos elegir como sentido positivo en la normal principal el sentido AF.

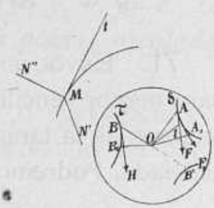


Figura 39

Consideremos ahora el cono engendrado por las paralelas B′OB á las binormales y á las curvas esféricas, lugares de los puntos B y B′ á las que trazaremos las tangentes BH y B′H′ en el sentido en que se ha descrito cada una. Y puesto que el plano tangente OAF al cono σ es paralelo al plano osculador en M, la recta B′OB, paralela á la binormal, será perpendicular al plano OAF. Se obtiene pues, el cono descrito por las rectas B′OB, trazando las perpendiculares en O á los planos tangentes OAF del cono σ.

El cono obtenido ó cono τ, se llama cono suplementario del cono σ, y recíprocamente, pues siendo los planos tangentes próximos OAF y OA_1F_1 del cono σ perpendiculares á las generatrices OB y OB_1, del cono τ, su intersección OI es perpendicular al plano BOB_1. Cuando OA_1 tiende hacia OA, la intersección OI de los dos planos tangentes tiende también hacia OA; el plano BOB_1 tiende hacia el plano tangente OBH al cono τ; y puesto que BOB_1 es perpendicular á OI, el plano tangente OBH es perpendicular al límite de OI, es decir, á OA.

Las tangentes AF y BH de las curvas esféricas σ y τ son paralelas, pues AF es perpendicular al radio OA de la esfera y á la recta OB, perpendicular al plano OAF; luego AF es perpendicular, asi como BH al plano AOB. Dichas rectas son pues, paralelas. Podemos en fin suponer que son de *igual sentido*, habiéndose trazado las tangentes en el mismo sentido de descripción de las curvas. Siendo B y B′ simétricos con relación á O, las dos tangentes BH y B′H′ son *paralelas y de sentidos contrarios*.

§ 8.º Aplicaciones de las fórmulas de Serret

71. Envolvente de los planos osculadores. Designaremos, para mayor sencillez, por a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' los cosenos directores de la tangente, normal principal y binormal de una curva alabeada. Podremos representar el plano osculador por

$$a''(X - x) + b''(Y - y) + c''(Z - z) = 0. \qquad (1)$$

Para obtener su envolvente diferenciaremos, y tendremos

$$\frac{da''}{ds}(X - x) - \frac{dx}{ds}a'' + \ldots\ldots = 0.$$

Sustituyendo $\frac{dx}{ds}$ por $a, \ldots\ldots$, y en virtud de las fórmulas de Serret que dan $\frac{da''}{ds} = \frac{a'}{T}, \ldots\ldots$; y por ser $aa'' + bb'' + cc'' = 0$, tendremos

$$a'(X - x) + b'(Y - y) + c'(Z - c) = 0, \qquad (2)$$

ecuación de un plano perpendicular á la normal principal, que corta al plano osculador según la tangente á la curva, que es la característica de la envolvente.

Diferenciando la ecuación (2), se tendrá la arista de retroceso de la envolvente

$$\frac{da'}{ds}(X - x) - \frac{dx}{ds}a' + \ldots\ldots = 0.$$

Y por ser, $\frac{dx}{ds} = a$, $aa' + bb' + cc' = 0$, si se sustituye $\frac{da'}{ds}$ por su valor $-\left(\frac{a}{R} + \frac{a''}{T}\right)$, deducida de las fórmulas de Serret, tendremos

$$\left(\frac{a}{R} + \frac{a''}{T}\right)(X - x) + \left(\frac{b}{R} + \frac{b''}{T}\right)(Y - y) + \ldots\ldots = 0.$$

que, en virtud de (1), se reduce á la ecuación del plano normal

$$a(X - x) + b(Y - y) + c(Z - z) = 0.$$

Las fórmulas (1), (2) y (3) dan $X = x$, $Y = y$, $Z = z$. *La arista de retroceso de la superficie envolvente de los planos osculadores es esta misma curva.*

72. Envolvente de los planos normales ó superficie polar. Conservando las mismas notaciones, la ecuación del plano normal será

$$a(X - x) + b(Y - y) + c(Z - z) = 0. \tag{1}$$

La característica de su envolvente estará dada por esta ecuación y su diferencial

$$\frac{da}{ds}(X - x) - a\frac{dx}{ds} + \ldots\ldots = 0;$$

y, en virtud de las fórmulas de Serret, $\left(\frac{da}{ds} = \frac{a'}{R}, \ldots\ldots\right)$

$$a'(X - x) + b'(Y - y) + c'(Z - z) = R, \tag{2}$$

ecuación de un plano perpendicular á la normal principal, situada á una distancia R del punto (x, y, z). Las fórmulas (1) y (2) representan el eje del círculo osculador.

Eliminando s entre las ecuaciones (1) y (2), se obtendrá la envolvente de los planos normales, que se llama *superficie polar* cuya arista de retroceso se obtiene diferenciando la ecuación (2) lo que da

$$\frac{da'}{ds}(X - x) - a'\frac{dx}{ds} + \ldots\ldots = \frac{dR}{ds};$$

y por las fórmulas de Serret,

$$\left(\frac{a}{R} + \frac{a''}{T}\right)(X - x) + \ldots\ldots = -\frac{dR}{ds};$$

y en virtud de la (1)

$$a''(X - x) + b''(Y - y) + c''(Z - z) = -T\frac{dR}{ds}.$$

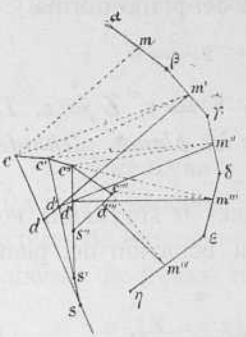


Figura 40

TEOREMA. *Las rectas polares relativas á los diferentes puntos de una curva alabeada son las generatrices de la superficie desarrollable llamada* SUPERFICIE POLAR. *La arista de retroceso de esta superficie es el lugar de los centros de las* ESFERAS OSCULATRICES *de la línea primitiva. Y pasa por cada punto de la superficie polar una evoluta de la línea primitiva, formando la serie de estas evolutas una serie de líneas geodésicas de la superficie polar.*

Considerando una línea alabeada, inscribamos en ésta una línea poligonal $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ de lados iguales, y tracemos por los puntos medios $m, m', \ldots$ de estos lados, planos normales á los mismos. Estos planos se cortarán dos á dos y consecutivamente, según las rectas cs, $c's'$,... respectivamente por perpendiculares á los planos $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\delta, \ldots$ de dos elementos consecutivos de la línea poligonal primitiva y que encuentran á estos planos en los puntos c, c',... centros respectivos de los círculos $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\delta, \ldots$ que pasan por tres vértices consecutivos de dicha línea; y las rectas cs, $c's'$, formarán por sus intersecciones sucesivas una nueva línea poligonal $ss's''\ldots$ cuyos vértices $s, s', \ldots$ representarán los centros de las esferas $\alpha\beta\gamma\delta$, $\beta\gamma\delta\varepsilon, \ldots$ que pasan por cuatro vértices consecutivos de la línea primitiva.

Tomando ahora un punto cualquiera d en la recta cs, unamos dm' que corta á $c's'$ en d'. Unamos enseguida $d'm''$ que corta á $c''s''$ en d'', $d''m''$ que corta á $c'''s'''$ en d''', y así sucesivamente. Y sea $dd'd''$... la línea resultante.

La igualdad hipotética de los lados de la línea poligonal primitiva, la definición de las rectas cs y de los puntos c, conducen á las igualdades $cm = c'm'$, $c'm' = c'm''$,... y á las $d'm' = d'm''$, $d''m'' = d''m'''$,... y en fin á la igualdad de las inclinaciones de $d'm'$ y $d'm''$ respecto á $c'd'$, de $d''m''$ y $d''m'''$ respecto á $c''d''$,... Pero resulta, desde luego de estas últimas, que la línea $dd'd''$... se transforma en una *recta* por el desarrollo en un plano de la superficie poliedral formada por las rectas cs, $c's'$,... sobre la que está construída. Y resulta de lo precedente, que esta misma línea es una verdadera *evoluta* de $mm'm''$..., cuyos vértices son los puntos medios de los elementos de la línea primitiva; porque, si se concibe un hilo arrollado parcialmente sobre la línea $dd'd''$... cuya parte actualmente libre $d'''m'''$ llegaría por su extremo al punto m'''; y si se desarrolla este hilo, de manera que su parte libre esté dirigida sucesivamente según las prolongaciones de los lados $d'd''$, dd',... de la linea $d''d'd$, el extremo de este hilo pasará sucesivamente por todos los vértices m'', m', m de la línea $mm'm''$... *(Paul Serret).*

Si pues se imagina que la longitud común de los lados de la linea poligonal $\alpha\beta\gamma$..., inscrita en la curva, disminuye indefinidamente y se pasa al límite, tendremos demostrado el teorema.

73. Envolvente de los planos rectificantes. Sea la ecuación del plano rectificante

$$(X-x)l+(Y-y)m+(Z-z)n = 0 \text{ ó } (X-x)a'+\ldots = 0 \quad (1)$$

Diferenciando y empleando las fórmulas de Serret $\frac{dl}{ds} = \frac{da'}{ds} = -\left(\frac{a}{r}+\frac{a''}{\rho}\right)$,... tendremos llamando r y ρ á los radios de primera y segunda curvatura

$$(X-x)\left(\frac{a}{r}+\frac{a''}{\rho}\right)+(Y-y)\left(\frac{b}{r}+\frac{b''}{\rho}\right)+(Z-z)\left(\frac{c}{r}+\frac{c''}{\rho}\right) = 0 \quad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2) resultan las siguientes del plano rectificante

$$X = x + \varkappa\left(\frac{a}{\rho} - \frac{a''}{r}\right),\quad Y = y + \varkappa\left(\frac{b}{\rho} - \frac{b''}{\rho}\right), \ldots \tag{3}$$

siendo $\varkappa$ un factor de proporcionalidad.

Obtendremos la arista de retroceso, diferenciando otra vez, y será

$$(X - x)\left(\frac{ar'}{r^2} + \frac{a''\rho'}{\rho^2}\right) + (Y - y)\left(\frac{br'}{r^2} + \frac{b''\rho'}{\rho^2}\right)$$

$$+ (Z - z)\left(\frac{cr'}{r^2} + \frac{c''\rho'}{\rho^2}\right) + \frac{1}{r} = 0. \tag{4}$$

Sustituyendo en (4) los valores de X, Y, Z dados por (3), resulta

$$\varkappa\left(\frac{r'}{\rho r^2} - \frac{\rho'}{r\rho^2}\right) + \frac{1}{r} = 0.$$

Y sustituyendo el valor de $\varkappa$ en (3), tendremos las ecuaciones

$$X = x + \rho\,\frac{ar - a''\rho}{\rho' r - r'\rho},\quad Y = y + \rho\,\frac{br - b''\rho}{\rho' r - r'\rho},$$

ecuaciones de la arista de retroceso de la superficie desarrollable del plano rectificante.

Observación. La envolvente del plano rectificante ó la superficie desarrollable rectificante debe su nombre á que la curva, por el desarrollo de la superficie en un plano, se reduce á una recta de la superficie desarrollable.

Para completar las aplicaciones de las fórmulas de Serret, repetiremos el siguiente

TEOREMA. *El lugar de los centros de las esferas osculatrices es la arista de retroceso de la superficie polar.* Sea la esfera

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = R^2. \tag{1}$$

Diferenciando, tendremos

$$\left.\begin{aligned} (X - x)\,dx + (Y - y)\,dy + (Z - z)\,dz &= 0,\\ (X - x)\,d^2x + (Y - y)\,d^2y + (Z - z)\,dz &= ds^2,\\ (X - x)\,d^3x + (Y - y)\,d^3y + \ldots\ldots &= 3\,ds\,d^2s. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Estas ecuaciones dan los valores de $X - x$, $Y - y$, $Z - z$, que sustituídos en (1) dan el valor de R. Las tres ecuaciones (2) representan la arista de retroceso de la superficie polar. Estas ecuaciones son equivalentes á las tres del párrafo anterior, que multiplicadas, la primera por a, la segunda por a' y la tercera por a'' y sumadas, conducen á (*)

$$X - x = a'\rho - a''T\frac{d\rho}{ds}, \quad Y - y = b'\rho - b''T\frac{d\rho}{ds},$$

$$Z - z = c'\rho - c''T\frac{d\rho}{ds},$$

y sumando los cuadrados, en virtud de (1), será

$$R^2 = \rho^2 + T^2\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2.$$

TEOREMA. *El plano normal á la arista de retroceso de la superficie polar es paralelo al plano osculador de la curva propuesta.*

Este teorema se demuestra considerando las cantidades a_1, b_1, a'_1, ... análogas á a, b, ... T; pero relativas á la arista de retroceso de la superficie polar; y puesto que el plano normal de la curva propuesta es el plano osculador de la arista de retroceso de la superficie polar, será

$$a''_1 = a, \quad b''_1 = b, \quad c''_1 = c. \qquad (1)$$

Diferenciando, y aplicando las fórmulas de Serret, se tendrá

$$\frac{a'_1}{T_1}ds_1 = \frac{a'}{\rho}ds, \quad \frac{b'_1}{T_1}ds_1 = \frac{b'}{\rho}ds, \quad \frac{c'_1}{T}ds_1 = \frac{c'}{\rho}ds; \qquad (2)$$

y elevando al cuadrado y sumando, será $\dfrac{ds_1}{T_1} = \dfrac{ds}{\rho}$.

Multiplicando las dos últimas ecuaciones (2) y las dos últimas ecuaciones (1), tendremos

$$\frac{b'_1c''_1 - c'_1b''_1}{T_1}ds_1 = \frac{b'c - c'b}{\rho}ds, \quad \text{ó} \quad \frac{a_1}{T_1}ds_1 = -\frac{a''}{\rho}ds.$$

Y en virtud de (3), $\quad a_1 = -a'', \quad b_1 = -b'', \quad c_1 = -c''.$

(*) Póngase ρ por R en las fórmulas de la pág. 93.

74. APLICACIONES Á LA HÉLICE CILÍNDRICA. Tenemos que $MP = z$, $AP = au$, siendo $\angle\, AOP = u$ y a el radio, δ el ángulo PMA. Por consiguiente,

$$x = a \cos u, \quad y = a \operatorname{sen} u, \quad z = au \cot \delta \qquad (1)$$

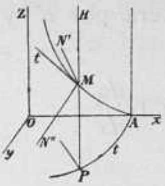


Figura 41

los parámetros u y $u + 2\pi$ corresponden á los mismos valores de x é y, de manera que $h = 2a\pi \cot \delta$, siendo h el paso de la hélice.

Eliminando u, resultará

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad x = a \cos\left(\frac{z \operatorname{tg} \delta}{a}\right), \quad y = a \operatorname{sen}\left(\frac{z \operatorname{tg} \delta}{a}\right).$$

Consideremos las ecuaciones (1), y diferenciando, tendremos

$$dx = -a \operatorname{sen} u\, du, \qquad dy = a \cos u\, du, \qquad dz = a \cot \delta\, du$$

$$d^2x = -a \cos u\, du^2, \quad d^2y = -a \operatorname{sen} u\, du^2, \quad d^2z = 0$$

$$d^3x = a \operatorname{sen} u\, du^3, \qquad d^3y = -a \cos u\, du^3, \quad d^3z = 0$$

y obtendremos $\quad ds = \dfrac{a\,du}{\operatorname{sen} \delta}, \quad s = \dfrac{au}{\operatorname{sen} \delta} \quad$ (cuando $u = 0$, $s = 0$).

Y de $\alpha = \dfrac{dx}{ds}$, $\beta = \dfrac{dy}{ds}$, $\gamma = \dfrac{dz}{ds}$ resulta

$$\alpha = -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} \delta, \qquad \beta = -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} \delta, \qquad \gamma = \cos \delta$$

$$d\alpha = -\cos u \operatorname{sen} \delta\, du, \quad d\beta = -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} \delta\, du, \quad \delta\gamma = 0.$$

Y en virtud de la expresión del ángulo de contingencia

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\operatorname{sen}^2 \delta}{a}, \quad d\rho = 0,$$

y $\qquad l = -\cos u, \qquad m = -\operatorname{sen} u, \qquad n = 0;$

$$\lambda = \cos \delta \operatorname{sen} u, \quad \mu = -\cos u \cos \delta, \quad \nu = \operatorname{sen} \delta$$

y por las fórmulas $\quad \dfrac{d\lambda}{ds} = \dfrac{l}{\rho}, \quad \dfrac{d\mu}{ds} = \dfrac{m}{\rho}, \quad \dfrac{d\nu}{ds} = \dfrac{n}{\rho},$

será $\quad \dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{l}\dfrac{d\lambda}{ds} \quad$ y $\quad \dfrac{1}{\rho} = -\dfrac{\operatorname{sen} \delta \cos \delta}{a}.$

Las ecuaciones del plano normal, del plano rectificante y del plano osculador son

$$X \operatorname{sen} u - Y \cos u - \cot \delta\,(Z - au \cot \delta) = 0,$$

$$X \cos u + Y \operatorname{sen} u = a \quad \text{ó} \quad Xx + Yy = a^2,$$

$$X \operatorname{sen} u - Y \cos u + Z \operatorname{tg} \delta - au = 0.$$

Las ecuaciones de la tangente, normal principal y binormal son

$$X = a \cos u - v \operatorname{sen} u \operatorname{sen} \delta, \quad Y = a \operatorname{sen} u + v \cos u \cos \delta,$$

$$Z = au \cot \delta + v \cos \delta;$$

$$X = (a - v) \cos u, \quad Y = (a - v) \operatorname{sen} u, \quad Z = au \cot \delta;$$

$$X = a \cos u + v \cos \delta \operatorname{sen} u, \quad Y = a \operatorname{sen} u - v \cos \delta \cos u,$$

$$Z = au \cot \delta + v \operatorname{sen} \delta.$$

Las coordenadas del centro de curvatura son

$$X = -a \cos u \cot^2 \delta, \quad Y = -a \operatorname{sen} u \cot^2 \delta, \quad Z = au \cot \delta.$$

Teoremas. 1.° La tangente forma con el eje de las Z un ángulo constante δ y la binormal un ángulo constante $90^0 - \delta$. 2.° La normal principal es la perpendicular trazada desde un punto del cilindro hasta el eje, ó el plano rectificante es tangente al cilindro. 3.° La torsión es constante. 4.° El radio de la esfera osculatriz es igual al radio de curvatura. 5.° El centro de curvatura coincide con el centro de la esfera osculatriz, y el lugar de los centros de curvatura es una hélice.

También podemos partir de las fórmulas

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \operatorname{sen} \varphi, \quad z = \frac{h}{2\pi}\varphi,$$

y tendremos:

Tangente. Las ecuaciones de la tangente son

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}$$

ó

$$\frac{X - x}{-r \operatorname{sen} \varphi} = \frac{Y - y}{r \cos \varphi} = \frac{Z - z}{h} 2\pi.$$

El ángulo θ que forma la tangente con la generatriz del cilindro es constante. En efecto, se tiene

$$\cos\theta = \frac{h:2\pi}{\sqrt{r^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{r}{\sqrt{r^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{2\pi r}{h}, \qquad \cot\theta = \frac{h}{2\pi r}.$$

Plano osculador. Su ecuación es

$$\begin{vmatrix} X - r\cos\varphi & Y - r\operatorname{sen}\varphi & Z - \frac{h}{2\pi}\varphi \\ -r\operatorname{sen}\varphi & r\cos\varphi & \frac{h}{2\pi} \\ -r\cos\varphi & -r\operatorname{sen}\varphi & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

es decir, $\frac{h}{2\pi} r X \operatorname{sen}\varphi - \frac{h}{2\pi} r Y \cos\varphi + \left(Z - \frac{h}{2\pi}\varphi\right) r^2 = 0$

ó también $X\operatorname{sen}\varphi - Y\cos\varphi + \left(Z - \frac{h}{2\pi}\varphi\right)\frac{2\pi r}{2} = 0.$

Si se hace $Z = 0$, la ecuación de la traza con el plano xy será

$$X\operatorname{sen}\varphi - Y\cos\varphi - r\varphi = 0.$$

Su envolvente estará dada combinando esta ecuación con

$$X\cos\varphi + Y\operatorname{sen}\varphi - r = 0,$$ lo que da

$$X^2 + Y^2 = r^2(1+\varphi^2) \quad \text{ó} \quad \varphi = \frac{1}{r}\sqrt{X^2+Y^2-r^2}.$$

Luego la ecuación de la envolvente es

$$X\cos\frac{\sqrt{X^2+Y^2-r^2}}{r} - Y\operatorname{sen}\frac{\sqrt{X^2+Y^2-r^2}}{r} = r.$$

El ángulo que el plano osculador forma con el plano de la base del cilindro es constante, porque el coseno de este ángulo es

$$\frac{2\pi r}{h} : \sqrt{1+\frac{4\pi^2 r^2}{h^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}}$$

Forma, por consiguiente, el ángulo θ con la generatriz del cilindro. *El plano osculador corta al eje del cilindro á la altura del punto en que es osculador*, porque para $X = 0$, $Y = 0$, se tiene $Z = \frac{h}{2\pi}\varphi$.

Radio de curvatura, arco, radio de torsión. Tenemos que

$$dx = -r \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi, \quad dy = r\cos d\varphi, \quad dz = \frac{h}{2\pi} d\varphi$$

$$d^2x = -r\cos\varphi\, d\varphi^2, \quad d^2y = -r\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi^2, \quad d^2z = 0,$$

$$d^3x = r\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi^3, \quad d^3y = -r\cos\varphi\, d\varphi^3, \quad d^3z = 0;$$

luego $$ds^2 = \left(r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\right) d\varphi^2 = \frac{r^2\, d\varphi}{\operatorname{sen}^2\theta}.$$

Además $$ds^6\, \rho^{-2} = \left(\frac{h^2}{4\pi^2} r^2 + r^4\right) d\varphi^6$$

$$\rho^{-2} = r^2 : \left(\frac{h^2}{4\pi^2} + r^2\right)^2 \quad \text{ó} \quad \rho = \frac{1}{r}\left(\frac{h^2}{4\pi^2} + r^2\right) = \frac{r}{\operatorname{sen}^2\theta}.$$

Si se hace

$$\Delta = \begin{vmatrix} -r\operatorname{sen}\varphi & r\cos\varphi & \frac{h}{2\pi} \\ -r\cos\varphi & -r\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ r\operatorname{sen}\varphi & -r\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} d\varphi^6$$

ó $$\Delta = \frac{h}{2\pi} r^2 d\varphi^6,$$

será $$T = \frac{ds^6}{R^2\Delta} = \frac{r^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{2\pi}{h} = \frac{r}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}.$$

El radio R de la esfera osculatriz es igual á ρ, porque

$$\varphi = \rho + T\frac{d\rho}{ds} = \rho.$$

Normal principal. Sus coeficientes son

$$d^2x\, ds - d^2s\, dx, \quad d^2y\, ds - d^2s\, dy, \ldots.$$

ó simplemente d^2x, d^2y, d^2z por ser $d^2s = 0$. Sus ecuaciones son

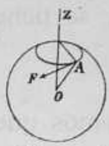


Figura 42

$$\frac{x - r\cos\varphi}{r\,\text{sen}\,\varphi} = \frac{y - r\,\text{sen}\,\varphi}{r\,\text{sen}\,\varphi} = \frac{z - \frac{h}{2\pi}\varphi}{0}$$

ó

$$\frac{x}{\cos\varphi} = \frac{y}{\text{sen}\,\varphi}, \quad z = \frac{h}{2\pi}\varphi.$$

La normal principal es perpendicular al eje del cilindro.

Observaremos, por otra parte, que por formar la hélice un ángulo constante con una directriz fija Oz (fig. 42), el cono director de las tangentes es un cono de revolución alrededor de Oz, y la curva σ intersección de este cono con la esfera de radio 1 es un círculo menor cuyo polo se halla en Oz. La tangente AF á la curva σ es ahora perpendicular al plano AOz y, puesto que es paralela á la normal principal, ésta es perpendicular á Oz, es decir, á las generatrices del cilindro en el que se ha trazado la hélice.

75. Hélice circular osculatriz. Se llama *hélice osculatriz*, en un punto M de una curva alabeada, á la hélice circular que tiene en este punto, las mismas tangente Mt, normal principal MN′, binormal MN″ y los mismos radios de curvatura y de torsión. Un arco muy pequeño de esta hélice, en la proximidad de M, puede sustituirse por un arco muy pequeño de la curva.

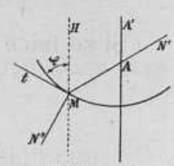


Figura 43

Sean R y T los radios de curvatura y de torsión de la curva en M, a el radio del cilindro de revolución, en el que se halla trazada la hélice osculatriz, h su paso y k la cantidad $\frac{h}{2\pi}$. Tenemos

$$R = \frac{a^2 + k^2}{a}, \quad T = \frac{a^2 + k^2}{k}.$$

Y puesto que R y T son conocidos, despejaremos los valores de a y de k, y tendremos

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2} + \frac{1}{a^2 + k^2}, \quad a^2 + k^2 = \frac{R^2 T^2}{R^2 + T^2}$$

$$a = \frac{RT^2}{R^2 + T^2}, \quad k = \frac{R^2 T}{R^2 + T^2}.$$

Puesto que la normal principal á una hélice circular encuentra normalmente al eje del cilindro, en el que está trazada la hélice, y la generatriz MG del cilindro que pasa por un punto M de la hélice, está situada en el plano $N''Mt$, *exteriormente* al ángulo $N''Mt$ y forma con Mt un ángulo agudo $tMG = \varphi$, cuya tangente trigonométrica es $\frac{a}{k}$, es decir, $\frac{T}{R}$, será necesario, para obtener la dirección de las generatrices del cilindro, trazar por el punto de la curva en el plano $M''Mt$ (fig. 43) una recta MG situada fuera del ángulo $N''Mt$ y que forme con Mt un ángulo agudo $tMG = \varphi$, cuya tangente es $\operatorname{tg}\varphi = \frac{T}{R}$.

Se toma enseguida, en la normal principal MN′, una longitud $MB = a = \frac{RT^2}{R^2 + T^2}$ y se tendrá un punto del eje del cilindro. El eje es la paralela BB′ trazada á MG por B. La hélice osculatriz queda definida así.

76. Helicoide desarrollable. Esta superficie es el lugar de las tangentes á la hélice. Siendo las ecuaciones de la hélice

$$\frac{X - r\cos\varphi}{-r\operatorname{sen}\varphi} = \frac{Y - r\operatorname{sen}\varphi}{r\cos\varphi} = \frac{Z - \frac{h}{2\pi}\varphi}{h : 2\pi}$$

ó

$$\left\{\begin{aligned} X &= r\cos\varphi - \left(Z - \frac{h}{2\pi}\varphi\right)\frac{2\pi}{h} r\operatorname{sen}\varphi, \\ Y &= r\operatorname{sen}\varphi + \left(Z - \frac{h}{2\pi}\varphi\right)\frac{2\pi}{h} r\cos\varphi, \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

de estas ecuaciones resulta

$$\left\{\begin{aligned} & X^2 + Y^2 = \frac{4\pi^2}{h^2} r^2 \left(Z - \frac{h}{2\pi}\varphi\right)^2 + r^2 \\ & X\cos\varphi + Y\operatorname{sen}\varphi = r \\ & X\operatorname{sen}\varphi - Y\cos\varphi = \left(Z - \frac{h}{2\pi}\varphi\right)\frac{2\pi r}{h}. \end{aligned}\right. \qquad (2)$$

La traza del helicoide sobre el plano de las xy *es una evolvente de círculo*, pues haciendo $z = 0$, se tiene

$$X = r\cos\varphi + r\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi, \qquad Y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi - r\varphi\cos\varphi. \tag{3}$$

Observación. Todas las secciones horizontales del helicoide son evolventes de círculo.

Las generatrices del helicoide desarrollable cortan á la evolvente, traza del helicoide con el plano de las xy *según un ángulo recto.* En efecto, los coeficientes directores de la tangente á la hélice son:

$$-r\,\mathrm{sen}\,\varphi + r\varphi\cos\varphi + r\,\mathrm{sen}\,\varphi, \quad r\cos\varphi + r\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi - r\cos\varphi, \quad 0$$

ó $$r\varphi\cos\varphi, \quad + r\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi, \quad 0.$$

Los de la generatriz al helicoide son: $-r\,\mathrm{sen}\,\varphi$, $r\cos\varphi$ y 0. Estas dos direcciones satisfacen á la condición de ortogonalidad.

Las evolventes de la hélice son evolventes de círculo, pues las intersecciones del helicoide por planos perpendiculares al eje son las evolventes de la arista de retroceso.

La superficie polar de una hélice es un helicoide desarrollable, pues la ecuación del plano normal es

$$x\,\mathrm{sen}\,\varphi - y\cos\varphi + \left(z - \frac{h}{2\pi}\varphi\right)\frac{h}{2\pi r} = 0. \tag{4}$$

Las ecuaciones de la recta polar son ésta y su derivada

$$r\cos\varphi + y\,\mathrm{sen}\,\varphi - \frac{h^2}{4\pi^2 r} = 0. \tag{5}$$

Si comparamos las fórmulas (4) y (5) con (2), vemos que las ecuaciones (4) y (5) representan un helicoide cuya arista de retroceso se halla en un cilindro cuyo radio es $\frac{h^2}{4\pi^2 r}$, cuyo paso es h.

77. Evolutas de la hélice. Las ecuaciones de una evoluta son

$$X - x = R(a' - a''\,\mathrm{tg}\,\theta), \quad Y - y = R(b' - b''\,\mathrm{tg}\,\theta), \quad Z - z = R(c' - c''\,\mathrm{tg}\,\theta)$$

donde $\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{T}$. Y por ser T constante, tg θ es una constante arbitraria que llamaremos k. Tendremos pues,

$$a' = \mathrm{R}\,\frac{da}{ds} = \mathrm{R}\,\frac{da}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{ds} = -\,\mathrm{R}r\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{ds},$$

$$b' = -\,\mathrm{R}r\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\frac{d\varphi}{ds},\quad c' = 0$$

$$a'' = bc' - cb' = \mathrm{R}\,\frac{d\varphi}{ds}\,(b\,dc - c\,db),$$

. . . .

Sustituyendo en (1) se obtienen las ecuaciones buscadas.

78. Proyecciones de la hélice. Teorema. *Si se proyecta oblicuamente una hélice sobre un plano, se obtiene una cicloide prolongada ó acortada.*

En efecto, siendo las ecuaciones de una recta paralela al plano de las xz,

$$y = a,\qquad z = mx + n, \tag{1}$$

la condición para que corte á la hélice será

$$r\,\mathrm{sen}\,\varphi = a,\qquad \frac{h}{2\pi}\,\varphi = mr\cos\varphi + n. \tag{2}$$

Eliminando φ, tendremos una relación $\omega\,(a, n) = 0$; eliminando a y n entre esta ecuación y las (1), se tendrá á la ecuación del cilindro paralelo á la recta (1) que pasa por la hélice, ó

$$\omega\,(y,\ z - mx) = 0.$$

El cilindro se obtiene pues, eliminando a, n y φ entre (1) y (2). Eliminando a y n, tendremos

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi,\qquad z = \frac{h}{2\pi}\,\varphi = m\,(x - r\cos\varphi).$$

Para hallar la traza del cilindro sobre el plano de las xy, haremos $z = 0$, lo que dará

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi,\qquad x = r\cos\varphi - \frac{h}{2\pi m}\,\varphi,$$

ecuaciones de una cicloide prolongada ó acortada, pues transportando el origen al punto $\left(o, \frac{h}{2\pi m}\right)$, tendremos

$$y = -\frac{h}{2\pi m} + r \operatorname{sen} \varphi, \quad x = -\frac{h}{2\pi m} \varphi + r \cos \varphi.$$

Cambiando de signo á x é y, resultará

$$x = \frac{h}{2\pi m} \varphi - r \cos \varphi, \quad y = \frac{h}{2\pi m} - r \operatorname{sen} \varphi,$$

ecuaciones de una cicloide prolongada ó acortada.

§ 9.º EVOLUTAS Y EVOLVENTES

79. DIFERENCIAL DE UN SEGMENTO DE RECTA. Sean un segmento de recta AB, x, y, z las coordenadas de A y x_1, y_2, z_2 las de B; y supongamos que estas coordenadas sean funciones de un parámetro u, de manera que los extremos describan dos curvas, cuando varía u. Si este parámetro adquiere un incremento infinitamente pequeño, los puntos A y B varían de posición infinitamente poco; y las proyecciones de sus mutaciones infinitamente pequeñas AA′ y BB′ sobre los ejes son respectivamente dx, dy, dz y dx_1, dy_1, dz_1. La longitud l del segmento se expresará por

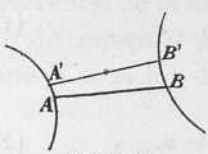


Figura 44

$$l = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2},$$

siendo su diferencial

$$dl = \frac{(x - x_1)(dx - dx_1) + (y - y_1)(dy - dy_1) + \ldots\ldots}{l},$$

la cual puede escribirse bajo la forma

$$dl = -\frac{(x_1 - x)\,dx + (y_1 - y)\,dy + (z_1 - z)\,dz}{l}$$

$$-\frac{(x - x_1)\,dx_1 + (y - y_1)\,dy_1 + (z - z_1)\,dz_1}{l}.$$

Los cosenos de las proyecciones de AA_1 se expresan por $\frac{dx}{AA'}$, $\frac{dy}{AA'}$, $\frac{dz}{AA'}$ y los correspondientes al segmento AB por $\frac{x_1 - x}{l}$, $\frac{y_1 - y}{l}$, $\frac{z_1 - z}{l}$; luego

$$\cos A'AB = \frac{(x_1 - x)\,dx + (y_1 - y)\,dy + (z_1 - z)\,dz}{AA'.\,l}$$

y análogamente

$$\cos B'BA = \frac{(x - x_1)\,dx_1 + (y - y_1)\,dy_1 + (z - z_1)\,dz_1}{BB'.\,l};$$

luego $$dl = -AA' \cos A'AB - BB' \cos B'BA$$

80. Definición. Dada una curva C, podemos trazarle una serie de normales que formen una superficie desarrollable, es decir, que admita una envolvente, y esta envolvente (arista de retroceso de la superficie desarrollable formada por las normales) se llama una *evoluta* de la curva.

Vamos á demostrar que una curva tiene una infinidad de evolutas. En efecto, tomemos arbitrariamente una normal M_0N_0 en el punto M_0. Podemos, en el punto próximo M_1 trazar una normal M_1N_1 que encuentre á M_0N_0 en un punto N_1. Para ello basta unir M_1 al punto N_1 en que se cortan el plano normal en M_1 y la recta M_0N_0. De igual manera en el punto M_2, próximo al M_1, se puede trazar una normal M_2N_2 que encuentre á M_1N_1, etc. Se obtiene de este modo una superficie poliedral cuyas aristas, formadas por las prolongaciones de los lados del polígono $N_0N_1N_2$... son normales á la curva.

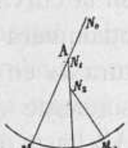


Figura 45

Si suponemos ahora que los puntos M_0, M_1, M_2,... se aproximan indefinidamente, esta superficie poliedral se convierte en la superficie desarrollable, cuyas generatrices son normales á la curva. El polígono $N_0N_1N_2$... se reduce á la arista de retroceso de la superficie desarrollable, es decir, á una evoluta de la curva. Se tiene así una evoluta tangente á la normal M_0N_0 elegida arbitrariamente.

81. PROPIEDAD FUNDAMENTAL. Consideremos una evoluta D_1 de la curva C, y sea MM_1 una normal á C en M, tangente á D_1 en M_1 (fig. 46). Llamemos $l = MM'$ á la longitud de esta normal, y s_1 al arco O_1M_1 de evoluta, contado á partir del origen O_1, de manera que la tangente M_1M se trace en el sentido de los arcos s_1 positivos. Sea $M_1'M'$ una normal á C infinitamente próxima, tangente á D_1 y $l + dl$ la longitud de M'_1M'.

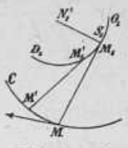


Figura 46

Según la fórmula arriba obtenida, tendremos

$$dl = - MM' \cos M'MM_1 - M_1M'_1 \cos M'M_1M.$$

Pero $\cos M'MM_1 = 0$, porque MM_1 es normal á MM'; $\cos M'_1M_1M = 1$, porque M_1M es tangente á la evoluta D_1 y $M_1M'_1 = ds_1$; luego: $dl = -ds_1$, é integrado, tendremos $l + s_1 = c$.

Luego: *la suma de* M_1M *y del arco* O_1M_1 *es constante*. Si suponemos conocida la evoluta, podremos trazar mecánicamente la curva C, tomando un hilo inextensible de longitud c, fijándolo en O_1 y arrollándolo parcialmente en la evoluta de O_1 á M_1, manteniéndolo tenso desde M_1 hasta M. El extremo M describe la curva C.

Observación. Por un punto A tomado en la curva (fig. 47), tracemos una normal cualquiera que encuentre al eje de curvatura $a\alpha$ en el punto α. Unamos α al punto siguiente A′ de la curva y prolonguemos $A'\alpha$ hasta que encuentre en α' al eje de curvatura $a'\alpha'$ correspondiente al punto A′. Unamos α' al punto siguiente A″ y prolonguemos $A''\alpha'$ hasta encontrar en α'' al eje de curvatura $a''\alpha''$, correspondiente al punto A″. Continuando así, se formará, por las intersecciones sucesivas de las normales un polígono infinitesimal, cuyo límite será la envolvente de las normales, que será la evoluta de AA′A″... Todas estas evolutas se hallan en la superficie polar de la curva propuesta.

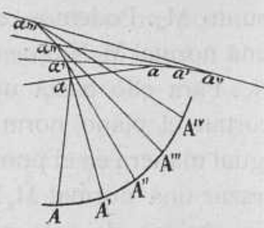


Figura 47

Como en geometría plana, se puede obtener una infinidad de evolventes de una evoluta, que en el caso actual se hallan en la superficie desarrollable, cuya arista de retroceso es la evoluta. De manera que:

Las trayectorias ortogonales de las generatrices de una superficie desarrollable son las evolventes de su arista de retroceso.

82. Lugar de los centros de curvatura. Para las curvas alabeadas, las evolutas son alabeadas, y las de las curvas planas son alabeadas, salvo las situadas en el plano de la curva. El lugar de los centros de curvatura se encuentra en la superficie polar, lugar de los ejes de los círculos osculadores, que contiene los centros de estos círculos. Sean MT, MN, MH y NN', respectivamente, la tangente á la curva propuesta, la normal principal, la binormal y el eje del círculo osculador.

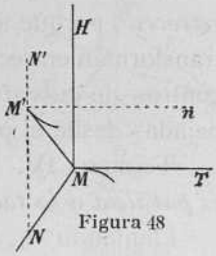


Figura 48

La tangente á la evoluta en el punto M' de esta curva es la normal MM' á la curva propuesta, la paralela M'n á M T es la normal principal de la evoluta. Se tiene pues,

$$\left.\begin{array}{lll} \Sigma a_1 a = 0, & \Sigma a_1 a' = \text{const}, & \Sigma a_1 a'' = \operatorname{sen} i, \\ \Sigma a'_1 a = 0, & \Sigma a'_1 a' = 0, & \Sigma a'_1 a'' = 0, \\ \Sigma a''_1 a = 0, & \Sigma a''_1 a' = \operatorname{sen} i, & \Sigma a''_1 a'' = \cos i \quad a'_1 = a. \end{array}\right\}$$

Además, el plano osculador de la evoluta MM'n es normal á la superficie polar, porque la normal principal M'n es perpendicular á la tangente MM' de la evoluta y á la generatriz M'N de la superficie polar, es decir, á dos tangentes de la superficie polar.

Una curva trazada en una superficie cuya normal principal y por consiguiente su plano osculador es normal á la superficie, se llama *línea geodésica*. Así:

Teorema I. *Las evolutas son geodésicas de la superficie polar.*

Teorema II. *Si se arrolla el plano* M'MN *en la superficie polar, todas las evolutas son curvas según las que se arrollan las normales tales como* MM', y por consiguiente, *todas las evolutas pasan por un punto fijo*, pues el plano M'MN es tangente á la superficie polar, por contener dos tangentes, MM' y la generatriz M'N; y si indicamos con el subíndice o los transformados de los puntos

M′, N′, ... cuando M pasa á M_0 en la curva propuesta, la recta MM′ se arrollará en la superficie polar, y coincidiendo el punto M′ con M'_0, llegará á aplicarse el M_0 en la superficie polar, coincidiendo entonces este punto con el M.

TEOREMA III. *El lugar de los centros de curvatura es, después del desarrollo de la superficie polar, la podar del punto por el que pasan las evolutas, con relación á la transformada de la arista de retroceso*, porque al desarrollarse la superficie polar, las evolutas se transforman en rectas que pasan por un punto fijo; y el lugar de los centros de curvatura es el lugar de los pies de las perpendiculares bajadas desde el punto M á la generatriz de la superficie polar.

TEOREMA IV. *La normal principal á la evoluta en el punto* M_1 *es paralela á la tangente en* M *á la curva.*

Llamando $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ á los cosenos directores de la tangente M_1M á la evoluta $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1$ á los de la normal principal y R_1 al radio de curvatura en M_1, tendremos

$$x = x_1 + l\alpha_1, \quad y = y_1 = m\beta_1, \quad z = z_1 + n\gamma_1,$$

y diferenciando, será

$$dx = dx_1 + \alpha_1\, dl + l d\alpha_1, \ldots.. \tag{1}$$

Además tenemos, en la curva C y su evoluta,

$$dx = \alpha ds, \ dy = \beta ds, \ dz = \gamma ds; \ dx_1 = \alpha_1 ds_1, \ dy_1 = \beta_1 ds_1, \ldots..$$

$$d\alpha_1 = \frac{\alpha'_1}{R_1} ds_1, \quad d\beta_1 = \frac{\beta'_1}{R_1} ds_1, \quad d\gamma_1 = \frac{\gamma'_1}{R_1} ds_1,$$

reduciéndose las fórmulas (1) á

$$\alpha ds = \alpha_1 (ds_1 + dl) + l \frac{\alpha'_1}{R_1} ds_1, \ldots$$

Pero, según la propiedad fundamental de las evolutas,

$$s_1 + l = c, \quad ds_1 + dl = 0;$$

luego

$$\alpha ds = \frac{l}{R_1} \alpha'_1 ds_1, \quad \beta ds = \frac{l}{R_1} \beta'_1 ds, \quad \gamma ds = \frac{l}{R_1} \gamma'_1 ds.$$

Los cosenos directores de la normal principal y de la evoluta en M_1 son proporcionales; luego son paralelas.

Podemos demostrar más brevemente estas propiedades enunciadas en el siguiente

TEOREMA. *Si una línea de doble curvatura* L *se halla cortada ortogonalmente por las tangentes de una línea* L′, *un arco cualquiera de esta última es igual á la diferencia de las tangentes trazadas por sus extremos y terminadas en la línea primitiva de la cual es una evoluta. Además se halla totalmente contenida en la superficie polar relativa á la línea primitiva y sus normales principales son paralelas á las tangentes de esta línea.*

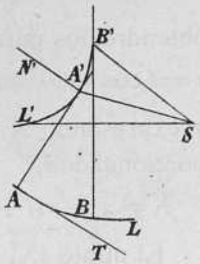


Figura 49

En efecto, si se desarrolla sobre un plano la superficie desarrollable cuya arista de retroceso es L′, la línea L, que es una trayectoria ortogonal de las generatrices rectilíneas de esta superficie y la línea L′ se transforman en una línea plana l y en su evoluta l', lo que demuestra la primera parte del enunciado.

Además, cada punto de la línea L′, pudiéndose considerar como límite de la intersección de dos normales infinitamente próximas de la línea primitiva, pertenece á una de las rectas polares de ésta; y la línea L′ está por tanto situada totalmente en la superficie polar de la línea primitiva. Por último, las tangentes de esta última y las normales principales de la evoluta L′ son paralelas, porque se hallan situadas, dos á dos, en un mismo plano, el plano tangente á la superficie desarrollable, que coincide con el plano osculador de la línea L′; y en este plano son perpendiculares á la misma recta, la generatriz de la superficie, que coincide con la tangente de la línea L′ (P. Serret. *Théor. n. geom. et méc. etc.*, p. 22).

83. DADA LA EVOLVENTE HALLAR LA ECUACIÓN DE LA EVOLUTA. Sean x, y, z las coordenadas de un punto Q de la evolvente, consideradas como funciones de un parámetro u. Tracemos en el plano normal de Q una recta cualquiera, cuyos cosenos directores representaremos por a, b, c y que forma un ángulo σ con la normal principal, cuyos cosenos directores representaremos por l, m, n, y en el punto próximo Q′, otra recta que forme el ángulo $\sigma + d\sigma$ con la normal principal. Para expresar que estas rectas se cortan, consideraremos á σ como función de u, y por consiguiente la superficie desarrollable con su arista de retroceso; y puesto que

$$al + bm + cn = \cos\sigma, \quad a\lambda + b\mu + c\nu = \operatorname{sen}\sigma;$$

obtendremos para a, b, c las expresiones

$$a = l\cos\sigma + \lambda\operatorname{sen}\sigma, \quad b = m\cos\sigma + \mu\operatorname{sen}\sigma, \quad c = n\cos\sigma + \nu\operatorname{sen}\sigma;$$

y expresando X, Y, Z las coordenadas de P y $\varkappa$ un factor de proporcionalidad,

$$X = x + \varkappa(l + \lambda\operatorname{tg}\sigma), \quad Y = y + \varkappa(m + \mu\operatorname{tg}\sigma), \quad Z = z + \ldots.. \qquad (1)$$

El punto (X, Y, Z) es un punto de la arista de retroceso de la superficie desarrollable, ó evoluta que se busca, cuando la normal en Q′, que forma con la normal principal el ángulo $\sigma + d\sigma$, pasa por P. Las ecuaciones (1) quedan también satisfechas cuando se incrementan x, l, ... en dx, dl, ... es decir, cuando se diferencian X, Y, Z, y en virtud de las fórmulas de Serret, resulta

$$0 = \alpha + \frac{d\varkappa}{ds}(l + \lambda\operatorname{tg}\sigma) + \varkappa\left[-\left(\frac{a}{r} + \frac{\lambda}{\rho}\right) + \frac{l}{\rho}\operatorname{tg}\sigma + \frac{\lambda}{\cos^2\sigma}\frac{d\sigma}{ds}\right].$$

Obteniendo las ecuaciones análogas, por permutación cíclica y sumando, después de multiplicar respectivamente por α, β, γ, l, m, n y λ, μ, ν, resultará

$$1 - \frac{\varkappa}{r} = 0, \quad \frac{d\varkappa}{ds} + \frac{\varkappa}{\rho}\operatorname{tg}\sigma = 0, \quad \frac{d\varkappa}{ds}\operatorname{tg}\sigma - \frac{\varkappa}{\rho} + \frac{\varkappa}{\cos^2\sigma}\frac{d\sigma}{ds} = 0.$$

La primera ecuación da $\varkappa = r$; y las otras, por eliminación, $\dfrac{d\varkappa}{ds}$

$$d\sigma = \frac{ds}{\rho} = d\tau \quad \text{y} \quad \sigma = \tau + c \qquad (2)$$

Y de (1) (2), juntamente con $\varkappa = r$, tendremos las ecuaciones de la evoluta

$$X = x + r[l + \lambda\operatorname{tg}(\tau + c)], \quad Y = y + r[m + \mu\operatorname{tg}(\tau + c)],$$
$$Z = z + r[n + \nu\operatorname{tg}(\tau + c)].$$

A cada valor de C corresponde una evoluta de la curva dada.

PROBLEMA. *Hallar las evolutas de una curva plana.* Suponiendo que la curva se halle en el plano de las xy, tendremos $z = 0$, $\frac{1}{\rho} = 0$, $\tau = C$, $n = 0$, $\lambda = \mu = 0$, $\nu = 1$; por consiguiente, las ecuaciones de la evoluta son

$$X = x + lr, \quad Y = y + mr, \quad Z = r \operatorname{tg} C.$$

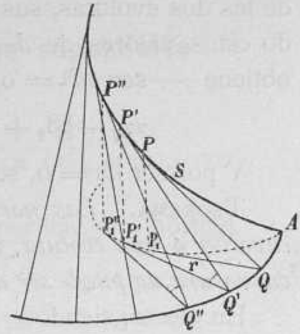


Figura 50

Las dos primeras ecuaciones representan un cilindro perpendicular al plano xy, al que corta según la evoluta plana $P_1\, P'_1\, P''_1 \ldots$ de la evolvente dada. Este cilindro es el lugar de las intersecciones sucesivas de los planos normales á la evolvente, lugar de las evolutas, que son sus líneas geodésicas. Siendo, en virtud de la ecuación última el ángulo C constante, cada evoluta corta á las generatrices del cilindro, según un ángulo constante, y es, por consiguiente, una hélice del mismo.

TEOREMA I. *Si se consideran dos evolutas* D_1 *y* D_2 *de una curva* C, *las tangentes* MM_1 *y* MM_2 *á aquéllas, se cortan según un ángulo constante en* M, *á lo largo de la curva* C.

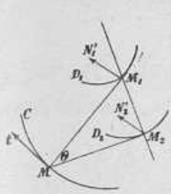


Figura 51

Expresando por $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ y $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ los cosenos directores de las tangentes Mt, MM_1 y MM_2, por s_1, s_2 los arcos y por R_1, R_2 los radios de curvatura de las dos evolutas, el ángulo θ de las dos normales á MM_1 y MM_2, estará dado por

$$\cos\theta = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2.$$

Diferenciando, se tiene:

$$-\operatorname{sen}\theta d\theta = \alpha_2 d\alpha_1 + \beta_2 d\beta_1 + \gamma_2 d\gamma_1 + \alpha_1 d\alpha_2 + \beta_1 d\beta_2 + \gamma_1 d\gamma_2.$$

Pero, según las fórmulas de Serret, aplicadas á las dos evolutas, se tiene

$$d\alpha_1 = \frac{\alpha}{R_1} ds_1, \quad d\beta_1 = \frac{\beta}{R_1} ds, \quad d\gamma_1 = \frac{\gamma}{R_1} ds_1,$$

$$d\alpha_2 = \frac{\alpha}{R_2} ds_2, \quad d\beta_2 = \frac{\beta}{R_2} ds_2, \quad d\gamma_2 = \frac{\gamma}{R_2} ds_2;$$

porque, siendo paralelas á la tangente Mt las normales principales de las dos evolutas, sus cosenos directores son α, β, γ. Sustituyendo estos valores de $d\alpha_1$ $d\alpha_2$,... en la expresión de $-$ sen $\theta d\theta$ se obtiene $-$ sen $\theta d\theta = 0$, puesto que

$$\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \gamma\gamma_2 = 0, \quad \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = 0.$$

Y por ser $d\theta = 0$, será θ constante.

TEOREMA. *Las normales principales de una curva no pueden envolver á una evoluta, y por consiguiente, el lugar de los centros de curvatura no puede ser una evoluta.*

En efecto, siendo

$$\frac{X - x}{a'} = \frac{Y - y}{b'} = \ldots \quad \text{y} \quad \frac{X - x - dx}{a' + da'} = \frac{Y - y - dy}{b' + db'} = \ldots$$

las ecuaciones de las normales infinitamente próximas, la expresión de la distancia de éstas es

$$h = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ a' & b' & c' \\ da' & db' & dc' \end{vmatrix} : \sqrt{(b'dc' - c'db')^2 + \ldots\ldots};$$

Y, en virtud de las fórmulas de Serret

$$h = ds^2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \frac{a''}{T} & \frac{b''}{T} & \frac{c''}{T} \end{vmatrix} : \sqrt{da'^2 + db'^2 + dc'^2}$$

$$= \frac{ds^2}{T} : \sqrt{\frac{ds^2}{T^2} + \frac{ds^2}{\rho^2}} = \frac{\rho\, ds}{\sqrt{T^2 + \rho^2}},$$

cantidad de primer orden infinitesimal.

CAPÍTULO IV

Teoría de las líneas en las superficies

§ 1.º CURVATURA DE UNA LÍNEA EN UNA SUPERFICIE

84. FÓRMULA GENERAL. Sean la superficie y la normal

$$f(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

$$X - x = -p(Z - z), \quad Y - y = -q(Z - z).$$

Expresando por dl la diferencial del arco, y por θ el coseno del ángulo que forman entre sí la normal PM á la superficie y la normal principal MN de la curva, tendremos

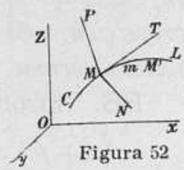


Figura 52

$$\cos\theta = \frac{-p\frac{d^2x}{dl^2} - q\frac{d^2y}{dl^2} + \frac{d^2z}{dl^2}}{\sqrt{1+p^2+q^2}};$$

y por ser $dz = pdx + qdy$, $dp = rdx + sdy$, $dq = sdx + tdy$, tendremos

$$\cos\theta = \mathrm{R}\frac{r\left(\frac{dx}{dl}\right)^2 + 2s\frac{dx}{dl}\frac{dy}{dl} + t\left(\frac{dy}{dl}\right)^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

ó

$$\mathrm{R} = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}\cos\theta}{r\left(\frac{dx}{dl}\right)^2 + 2s\frac{dx}{dl}\frac{dy}{dl} + t\left(\frac{dy}{dl}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}\cos\theta}{r\cos\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta,} \tag{2}$$

siendo α, β, γ los ángulos que la tangente forma con los ejes.

Observación. Debiendo ser R positivo, es necesario que $\cos\theta$

tenga el mismo signo que el denominador. Así θ será agudo ú obtuso, según que el denominador sea positivo ó negativo.

85. TEOREMA DE MEUSNIER. Si suponemos en la fórmula (2) $\cos\theta = \pm 1$, es decir, si el plano osculador pasa por la normal á la superficie, se tendrá para el radio ρ de curvatura de la sección normal

$$\rho = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}; \tag{3}$$

luego

$$R = \rho\cos\theta \tag{4}$$

y podremos enunciar el teorema de Meusnier: *El radio de curvatura en un punto de una curva cualquiera, trazada en la superficie, es igual al producto del radio de curvatura de la sección normal que contiene la tangente á la curva, multiplicado por el coseno del ángulo que forma el plano de la sección normal con el plano osculador de la curva*, ó también: *El radio de curvatura de una sección oblicua es la proyección, sobre el plano de la curva, del radio de curvatura de la sección normal.*

86. Identificando la ecuación inversa de la (3) con la

$$(1+p^2)\cos^2\alpha + 2pq\cos\alpha\cos\beta + (1+q^2)\cos^2\beta = 0$$

que resulta de sustituir en

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ el valor $\cos\gamma = p\cos\alpha + q\cos\beta$,

que resulta de dividir por ds la ecuación $dz = pdx + qdy$, tendremos la ecuación

$$\left(1+p^2 - \frac{r\rho}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta} +$$

$$2\left(pq - \frac{s\rho}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} + 1 + q^2 - \frac{t\rho}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0. \tag{5}$$

Y para que ρ sea un máximo ó un mínimo, es necesario que esta ecuación en $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ tenga raíces iguales, ó que

$$(rt - s^2)\rho^2 - [(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r]$$
$$\times \sqrt{1+p^2+q^2}\,\rho\,(1+p^2+q^2)^2 = 0. \tag{6}$$

Observaremos que $\dfrac{1}{\rho'\rho''} = \dfrac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}$. (7)

Para que la ecuación (5) tenga una raíz infinita es necesario que $rt - s^2 = 0$, que es la ecuación diferencial de las superficies desarrollables.

La ecuación (5), en virtud de la igualdad de las raíces, conduce á

$$\left(1 + p^2 - \frac{r\rho}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right)\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} + pq - \frac{r\rho}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = 0$$

$$(1 + p^2)\cos\alpha + pq\cos\beta = (r\cos\alpha + s\cos\beta)\frac{\rho}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Si en la ecuación (5) se hubiese tomado por incógnita $\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, se habría obtenido análogamente

$$(1 + q^2)\cos\beta + pq\cos\alpha = (t\cos\beta + s\cos\alpha)\frac{\rho}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

de donde

$$\frac{r\cos\alpha + s\cos\beta}{(1 + p^2)\cos\alpha + pq\cos\beta} = \frac{t\cos\beta + s\cos\alpha}{(1 + q^2)\cos\beta + pq\cos\alpha}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{\rho} \qquad \text{ó} \qquad [pqr - (1 + p^2)s]\cos^2\alpha$$

$$+ [(1+q^2)r - (1+p^2)t]\cos\alpha\cos\beta - [pqt - (1+q^2)s]\cos^2\beta = 0$$

que determina los dos pares de valores de $\cos\alpha$ y $\cos\beta$.

También, podemos calcular los radios de curvatura principales en el punto (x, y, z) de la superficie $f(x, y, z) = 0$, partiendo de las ecuaciones

$$(X - x)x' + (Y - y)y' + (Z - z)z' = 0, \qquad (1)$$

$$(X - x)x'' + (Y - y)y'' + (Z - z)z'' = 0, \qquad (2)$$

del plano normal y su derivado, que representan el eje del círculo osculador y de la ecuación de la normal á la superficie,

$$\frac{X - x}{f_1} = \frac{Y - y}{f_2} = \frac{Z - z}{f_2} = \frac{R}{N}, \qquad (3)$$

donde se indica por brevedad, con N la expresión $\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}$, y siendo R el radio de curvatura.

Si eliminamos $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ entre (1) y (3), será

$$f_1 x' + f_2 y' + f_3 z' = 0, \tag{4}$$

expresión de la perpendicularidad de la dirección f_1, f_2, f_3 de la normal á la superficie y la de la tangente x', y', z' á la sección considerada.

De las ecuaciones (2) y (3) resulta

$$X - x = \frac{f_1 R}{N},\ Y - y = \frac{f_2 R}{N}, \ldots\ \frac{R}{N} = \frac{1}{f_1 x'' + f_2 y'' + f_3 z''}$$

Y diferenciando la (4) con relación á s,

$$f_1 x'' + f_2 y'' + f_3 z'' + f_{11} x'^2 + f_{22} y'^2 + f_{33} z'^3 + 2 f_{23} y' z' + \ldots\ldots = 0,$$

mediante la cual reduciremos la última ecuación á la forma

$$\frac{R}{N} = \frac{-1}{f_{11} x'^2 + f_{22} y'^2 + f_{33} z'^3 + 2 f_{23} y' z' + \ldots\ldots} \tag{6}$$

ó abreviando, $$\frac{N}{R} = -\varphi(x', y', z').$$

Para hallar los radios de curvatura principales, basta calcular el máximo y el mínimo de $\frac{N}{R}$, cuya condición se expresa por

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\partial x'} dx' + \frac{\partial\varphi}{\partial y'} dy' + \frac{\partial\varphi}{\partial z'} dz'. \tag{7}$$

De las relaciones (4) y

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 \tag{8}$$

se deduce

$$f_1 dx' + f_2 dy' + f_3 dz' = 0, \quad x' dx' + y' dy' + z' dz' = 0. \tag{9}$$

Y aplicando á las fórmulas (7) y (9) el método de los multiplicadores, se obtienen las tres fórmulas

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x'} + \lambda f_1 + \mu x' = 0, \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial y'} + \lambda f_2 + \mu y' = 0, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z'} + \lambda f_3 + \mu z' = 0. \end{array}\right\} \tag{10}$$

En las que se han de eliminar los parámetros λ y μ. Eliminando λ, μ, x', y', z' entre (5), (4), (8) y (10), se obtendrá la ecuación que da el máximo y mínimo de $\frac{N}{R}$. Para obtener el resultante, eliminaremos primero λ, multiplicando la primera ecuación (10) por x', la segunda por y' y la tercera por z' y sumaremos, teniendo presentes la (5), (7), (4) y (8), resultará $\frac{2N}{R} - \mu = 0$ ó $\mu = \frac{2N}{R}$. Sustituyendo en (10) μ por este valor y los desarrollos de $\frac{\partial\varphi}{\partial x'}, \frac{\partial\varphi}{\partial y'}, \frac{\partial\varphi}{\partial z'}$, se obtendrá

$$\left.\begin{aligned}\left(f_{11}+\frac{N}{R}\right)x' + f_{12}y' + f_{13}z' + \frac{1}{2}\lambda f_1 = 0,\\ f_{12}x' + \left(f_{22}+\frac{N}{R}\right)y' + f_{23}z' + \frac{1}{2}\lambda f_2 = 0,\\ f_{31}x' + f_{32}y' + \left(f_{33}+\frac{N}{R}\right)z' + \frac{1}{2}\lambda f_3 = 0,\\ f_1x' + f_2y' + f_3z' = 0,\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

y eliminando x', y', z', resulta la ecuación de los radios de curvatura principales

$$\begin{vmatrix} f_{11}+\frac{N}{R} & f_{12} & f_{13} & f_1 \\ f_{21} & f_{22}+\frac{N}{R} & f_{23} & f_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33}+\frac{N}{R} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (12)$$

Conocido $\frac{N}{R}$, las ecuaciones (11) darán los valores de las direcciones de las secciones principales x', y', z'.

87. DISCUSIÓN. TEOREMA. *La ecuación* (12) *de los radios de curvatura principales es de segundo grado y tiene reales sus raíces, si la superficie* f = 0 *es real.*

En efecto, si hacemos

$$\Theta = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_3 \\ f_1 & f_3 & f_3 & 0 \end{vmatrix}$$

la ecuación (12) podrá escribirse así:

$$\frac{N^4}{R^2} - \frac{N}{R}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial f_{11}} + \frac{\partial\Theta}{\partial f_{22}} + \frac{\partial\Theta}{\partial f_{33}}\right) - \Theta = 0.$$

La ecuación (12) es pues, de segundo grado. Para probar que tiene reales sus raíces, observaremos que, si fuesen imaginarias, se deducirían, para x', y', z', λ, dos sistemas de valores conjugados x', y', z', λ y x'', y'', z'', λ'; y multiplicando la primera fórmula (11) por x'', la segunda por y'' y la tercera por z'' y sumando, tendríamos

$$f_{11}x'x'' + f_{23}(z'y'' + y'z'') + \ldots\ldots = -\frac{N'}{R'}(x'x'' + y'y'' + z'z'').$$

El coeficiente λ se anula en virtud de $f_1 x'' + \ldots\ldots = 0$. Llamando $\frac{N'}{R'}$ el valor conjugado de $\frac{N}{R}$, se obtiene análogamente

$$f_{11}x'x'' + f_{23}(z'y'' + y'z'') + \ldots\ldots = -\frac{N'}{R'}(x'x'' + \ldots\ldots) = 0,$$

deduciéndose

$$\left(\frac{N}{R} - \frac{N'}{R'}\right)(x'x'' + y'y'' + z'z'') = 0;$$

y por ser $\frac{N}{R}$ distinto de $\frac{N'}{R'}$, puesto que son conjugados,

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0,$$

lo que prueba que las direcciones principales son rectangulares, y enseguida, que no pueden ser imaginarias, porque $x'x'' = (\text{mod}\ x')^2$; y se tendría

$$(\text{mod}\ x')^2 + (\text{mod}\ y')^2 + (\text{mod}\ z')^2 = 0,$$

ó $x' = y' = z' = 0$, lo que está en contradicción con la relación

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Si en la ecuación (12) que da los radios de curvatura principales, se hace $f = \varphi(x, y) - z$, se reduce á

$$\frac{N^4}{R^2} + \frac{N}{R}[(1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2) t] + rt - s^2 = 0,$$

expresando N la cantidad $\sqrt{1 + p^2 + q^2}$. El producto de las curvaturas principales es por tanto $\frac{rt - s^2}{N^4}$. Si pues $rt - s^2 = 0$, una de las curvaturas principales es nula, uno de los radios de curvatura principales es infinito, resultando que en las superficies desarrollables, caracterizadas por la relación $rt - s^2 = 0$, un radio de curvatura, es infinito. Si el plano tangente á la superficie principal lo es á lo largo de una recta, se tiene $rt - s^2 = 0$, y un radio de curvatura es infinito á lo largo de esta recta. Tales rectas se llaman rectas de *puntos parabólicos*, llamándose *puntos parabólicos* como hemos visto, aquéllos en los que $rt - s^2 = 0$.

Ahora bien, el término independiente de R en la ecuación (12) es el determinante Θ; é igualándolo á cero, se obtienen los puntos parabólicos; y si es idénticamente nulo, la superficie es desarrollable.

Vamos ahora á demostrar que la relación $\Theta = 0$ es equivalente á la ecuación

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

obtenida igualando á cero el Hessiano de la función f, hecha homogénea por la introducción de la variable t.

Multipliquemos la primera columna del determinante Θ por x, la segunda por y, la tercera por z, la cuarta por $m - 1$ y restemos la suma de las tres primeras, de la última, cuyos elementos serán tf_{14}, tf_{24}, tf_{34}, tf_{44}. Multiplicando ahora la primera línea por x, la segunda por y, la tercera por z y la cuarta por $m-1$, y restando la suma de las tres primeras de la cuarta se obtiene el Hessiano de f.

La ecuación $\Theta=0$ determina en la superficie $f=0$ una línea de puntos parabólicos, Θ es de grado $4(m-2)$. La línea de los puntos parabólicos es por tanto de grado $4m(m-2)$. No existen pues líneas de puntos parabólicos en las superficies de segundo orden no desarrollables. La línea de los puntos parabólicos separa, en general, la superficie en dos regiones: En la una la superficie es de curvaturas opuestas, en la otra es convexa.

Para que dos radios de curvatura sean infinitos, es necesario que se tenga, no solo $\Theta=0$, sino además

$$\frac{\partial\Theta}{\partial f_{11}}+\frac{\partial\Theta}{\partial f_{22}}+\frac{\partial\Theta}{\partial f_{33}}=0.$$

Esta ecuación es de grado $3m-4$; la ecuación $\Theta=0$ es de grado $4(m-2)$; por consiguiente existen, en toda superficie de orden m, $4m(m-2)(3m-4)$ puntos en los que dos rayos de curvatura son infinitos.

88. Discusión de las ecuaciones de las secciones principales. Estas ecuaciones son las (12), pág. 119).

Llamando R y R_1 á los radios de curvatura principales, x', y', z', x'_1, y'_1, z'_1 á los cosenos directores de las tangentes á las secciones principales, X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1 las coordenadas de los centros de curvatura principales, se tendrá, multiplicando las tres primeras ecuaciones, respectivamente por x'_1, y'_1, z'_1, y sumando,

$$\Omega+\frac{N}{R}(x'x'_1+y'y'_1+\ldots\ldots)+\frac{\lambda}{2}(x'_1f_1+y'_1f_2+\ldots\ldots)=0,$$

y en virtud de $$f_1x'+f_2y'+f_3z'=0, \qquad (a)$$

$$\Omega=-\frac{N}{R}(x'x'_1+y'y'_1+z'z'_1);$$

expresando Ω una función de segundo grado de x', y' z' y x'_1, y'_1, z'_1, se obtendrá análogamente

$$\Omega=-\frac{N}{R_1}(x'_1x'+y'_1y'+z'_1z').$$

Es necesario concluir que, si $R \lesseqgtr R_1$

$$\Omega = 0, \qquad x'_1 x' + y'_1 y' + z'_1 z' = 0.$$

Esto demuestra que dos secciones principales, son siempre rectangulares, en un punto donde los radios de curvatura principales son desiguales. Se tiene pues

$$X = x + \frac{R}{N} f_1, \quad Y = y + \frac{R}{N} f_2, \quad Z = z + \frac{R}{N} f_3,$$

de donde

$$dX = dx + \frac{R}{N} df_1 + f_1 d\frac{R}{N}, \quad dY = dy + \frac{R}{N} df_2 + f_2 d\frac{R}{N},$$

$$dZ = dz + \frac{R}{N} df_3 + f_3 d\frac{R}{N}.$$

y en virtud de (a),

$$x'dX + y'dY + z'dZ = x'dx + y'dy + \ldots + \frac{R}{N}(x'df_1 + \ldots\ldots).$$

Pero, de las tres primeras ecuaciones (12), multiplicadas respectivamente por dx, dy, dz y sumadas, resulta

$$x'df_1 + y'df_2 + z'df_3 + \frac{N}{R}(x'dx + y'dy + z'dz) = 0.$$

Multiplicando por $\frac{R}{N}$ y sumando en cruz con la anterior, tendremos

$$x'dX + y'dY + z'dZ = 0;$$

lo que prueba la perpendicularidad de la mutación dX, dY, dZ, en el lugar de los centros de curvatura principales, con la tangente á la sección principal. Así pues:

El lugar de los centros de curvatura principales es la envolvente de los planos de las secciones principales.

89. Curvatura en las secciones normales. Tomemos el punto M (x, y, z) como origen O de coordenadas rectangulares y por plano de las xy, el plano tangente á la superficie en dicho punto. Si φ representa el ángulo que la tangente OT á la sección normal considerada forma con el eje de las x, se tendrá $\frac{dx}{dl} = \cos\varphi$, $\frac{dy}{dl} = \operatorname{sen}\varphi$; y puesto que será $\cos\theta = \pm 1$, según que el radio de curvatura esté dirigido en el sentido de las z positivas ó en el sentido contrario, tendremos

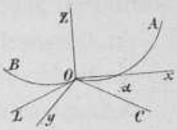


Figura 53

$$\rho = \frac{\pm 1}{r\cos^2\varphi + 2s\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + t\cos^2\varphi};$$

pero se puede suprimir el doble signo, siempre que se convenga en tomar el valor absoluto del radio de curvatura en el eje de las z positivas ó negativas, según que el denominador sea positivo ó negativo.

90. Secciones principales. Si el plano normal gira alrededor del eje de las z, el radio ρ variará al mismo tiempo que el ángulo φ. Vamos á obtener los valores máximo y mínimo del radio. Para ello igualaremos á cero la derivada del denominador, y tendremos

$$(t - r)\, 2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + 2s(\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi) = 0,$$

ó

$$s\operatorname{tg}^2\varphi + (r - t)\operatorname{tg}\varphi - s = 0. \qquad (1)$$

Esta ecuación da, para $\operatorname{tg}\varphi$, valores reales cuyo producto es igual á -1. Y puesto que haciendo variar á φ desde 0 hasta π, se obtienen todos los planos normales que pasan por O, bastará considerar los dos ángulos menores que 180°, correspondientes á las dos raíces de la ecuación (1), expresando el uno por α y el otro por $\frac{\pi}{2} + \alpha$.

Si pues trazamos en el plano de las xy dos rectas OC y OL que formen con Ox dichos ángulos, las secciones normales situadas en los planos zOC y zOL corresponderán á los radios de curvatura máxima y mínima. En efecto, la derivada de segundo orden de $\frac{1}{\rho}$ es

$$2(t - r)(\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi) - 8s\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi;$$

y esta expresión toma valores iguales y de signos contrarios, cuando se sustituye φ por α y por $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

Las rectas OC y OL son perpendiculares entre sí; luego los planos zOC y zOL, que determinan la máxima ó mínima curvatura, son perpendiculares entre sí, y son las *secciones principales*.

91. VARIACIONES DE LA CURVATURA EN LAS SECCIONES NORMALES. Tomemos las secciones principales por planos de las xz y de las yz. Los valores de φ, correspondientes al máximo y al mínimo del radio de curvatura, deberán ser o y $\frac{\pi}{2}$. Pero la ecuación (1) del número anterior sólo dará, para tg φ los valores o é ∞, cuando s sea nula. Por consiguiente, el valor de ρ tomará la forma

$$\rho = \frac{1}{r\cos^2\varphi + t\,\mathrm{sen}^2\varphi}. \tag{1}$$

De esta expresión deduciremos inmediatamente los valores de los radios ρ' y ρ'' de curvatura principales; haciendo en ella $\varphi = 0$ y $\varphi = \frac{\pi}{2}$, lo que dará

$$\rho' = \frac{1}{r}, \quad \rho'' = \frac{1}{t} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{\rho'} = r, \quad \frac{1}{\rho''} = t.$$

Así pues, *las derivadas parciales* r *y* t *representan las dos curvaturas principales* en el punto O.

Podemos introducir los valores de ρ' y ρ'' en la expresión general de la curvatura. Así

$$\frac{1}{\rho} = r\cos^2\varphi + t\,\mathrm{sen}^2\varphi \quad \text{ó} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho'}\cos^2\varphi + \frac{1}{\rho''}\,\mathrm{sen}^2\varphi, \tag{2}$$

fórmula debida á Euler, que da la curvatura de una sección determinada por un plano normal, cuyo ángulo con la sección principal zOx es φ.

COROLARIO 1.º Puesto que la expresión (2) no cambia, cuando se sustituye por φ su suplemento: *Dos secciones normales, igualmente inclinadas respecto á una sección principal, tienen sus radios de curvatura iguales con igual signo.*

COROLARIO 2.° *La suma de las curvaturas de dos secciones normales principales entre sí, es constante*, pues llamando ρ_1 al radio de curvatura de una sección normal perpendicular á la que forma el ángulo φ con el plano principal zOx, se tendrá

$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho'} \operatorname{sen}^2 \varphi + \frac{1}{\rho''} \cos^2 \varphi$, y sumando con (2), $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''}$.

92. DISCUSIÓN DE LA FÓRMULA. Suponiendo ρ' y ρ'' positivos y $\rho' > \rho''$, la fórmula (1) da, para ρ un valor siempre positivo; luego todas las secciones normales están situadas sobre el plano tangentes, y la superficie es convexa alrededor de O. Si ρ' y ρ'' fuesen negativos, la superficie sería convexa, pero debajo del plano tangente.

Escribiendo la ecuación (2) bajo la forma

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho'} + \left(\frac{1}{\rho''} - \frac{1}{\rho'}\right) \operatorname{sen}^2 \varphi,$$

se ve que $\frac{1}{\rho}$ aumenta desde $\frac{1}{\rho'}$ hasta $\frac{1}{\rho''}$, cuando φ crece desde o hasta $\frac{\pi}{2}$, y que disminuye desde $\frac{1}{\rho''}$ hasta $\frac{1}{\rho'}$, cuando φ aumenta desde $\frac{\pi}{2}$ hasta π.

Cuando $\rho' = \rho''$ la fórmula (2) da $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho'}$ ó $\rho = \rho'$ para cualquier valor de φ. Todas las secciones normales en O tienen la misma curvatura. Este punto es un *umbílico*.

Supongamos que ρ' y ρ'' tengan signos contrarios, siendo ρ'' negativo. Si hacemos esplícitos los signos, tendremos

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 \varphi}{\rho'} - \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{\rho''}.$$

Para $\varphi = 0$ se tiene $\rho = \rho'$. Al crecer el ángulo φ desde o hasta el valor β dado por la ecuación $\operatorname{tg}^2 \beta = \frac{\rho''}{\rho'}$, ρ crece desde ρ' hasta el infinito. Más allá de $\varphi = \beta$, se hace ρ negativo decreciendo hasta ρ'', valor que corresponde á $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Los valores de ρ se reproducen en seguida, pero en un orden inverso.

93. Determinación de los umbílicos. Para obtener los umbílicos, es necesario buscar los puntos en que el radio de curvatura de las secciones normales tiene el mismo valor. Con este objeto, sustituyamos en la fórmula (2) del núm. 84, dl^2 por $dx^2+dy^2+dz^2$, y dividiendo por dx^2, tendremos

$$R = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]}{r+2s\,\frac{dy}{dx}+t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Expresando por m el coeficiente $\frac{dy}{dx}$, tendremos

$$dz = pdx + qdy \quad \text{ó} \quad \frac{dz}{dx} = p + qm,$$

y

$$R = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}\,[1+m^2+(p+qm)^2]}{r+2sm+tm^2},$$

$$R = \sqrt{1+p^2+q^2}\,\frac{1+p^2+2pqm+(1+q^2)\,m^2}{r+2sm+tm^2}.$$

Cuando el punto es un umbílico, el radio es independiente de m y tendremos

$$\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t} \text{ ó } pqr-s(1+p^2)=0,\ pqt-s(1+q^2)=0. \quad (1)$$

Ejemplo 1.º Sea el paraboloide elíptico

$$z=\frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2b}, \qquad a>b>0.$$

Tenemos $p=\frac{x}{a}$, $q=\frac{y}{b}$, $r=\frac{1}{a}$, $t=\frac{1}{b}$, $s=0$

y

$$\frac{1+\frac{x^2}{a^2}}{1:a}=\frac{\frac{xy}{ab}}{0}=\frac{1+\frac{y^2}{b^2}}{1:b}.$$

A estas ecuaciones se satisface haciendo $x=0$, $a=b+\frac{y^2}{b}$

de donde $\quad y = \pm\sqrt{b\,(a-b)}, \quad z = \frac{a-b}{2}.$

Existen dos umbílicos en el plano yOz.

2.º Sea el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (a > b > c)$

Sustituyendo los valores de r, s, t en las ecuaciones (1), resulta

$$a^2\,(b^2 - c^2)\,p^2 + b^2\,(a^2 - c^2)\,q^2 - c^2\,(a^2 - b^2) = 0.$$

La hipótesis $p = 0$ debe desecharse, porque la segunda de las ecuaciones (1) da un valor imaginario para q. Haciendo $q = 0$, de donde $y = 0$, tendremos

$$p = \pm\frac{a}{c}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}$$

y $\quad x = \pm\, a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad z = \pm\, c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$

Hay pues, cuatro umbílicos situados en el plano principal, que comprende el mayor y el menor de los ejes, con relación á los que están situados simétricamente.

94. Superficie cuyos puntos son todos umbílicos. Cuando las ecuaciones

$$\frac{1 + p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1 + q^2}{t} \tag{1}$$

que determinan los umbílicos se reducen á una sola, la superficie tiene una infinidad de umbílicos, situados en una línea que se llama *línea de las curvaturas esféricas*. Si las ecuaciones (1) son idénticas, todos los puntos de la superficie son umbílicos. Para obtener una superficie que goce de esta propiedad, observaremos que las ecuaciones (1), escritas bajo la forma

$$\frac{p}{1 + p^2}\,\frac{dp}{dx} = \frac{1}{q}\,\frac{dq}{dx}, \qquad \frac{q}{1 + q^2}\,\frac{dq}{dy} = \frac{1}{p}\,\frac{dp}{dy}$$

pueden integrarse como las ecuaciones ordinarias, y se tendrá

$$1 + p^2 = \mathrm{Y}q^2, \qquad 1 + q^2 = \mathrm{X}p^2,$$

siendo X é Y funciones de x ó y solas, respectivamente. Obtendremos de las ecuaciones (2),

$$p = \sqrt{\frac{1+Y}{XY-1}}, \quad q = \sqrt{\frac{1+X}{XY-1}}. \tag{3}$$

Pero p y q deben satisfacer á la ecuación $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$. Se tendrá pues

$$\frac{1}{(1+X)^{3:2}} \frac{dX}{dx} = \frac{1}{(1+Y)^{3:2}} \frac{dY}{dy}.$$

Siendo el primer miembro función de x sola, y el segundo de y, esta ecuación solo podrá subsistir cuando el segundo miembro sea una constante, sea esta $\frac{2}{R}$. Entonces se tendrá

$$\frac{dX}{(1+X)^{3:2}} = \frac{2\,dx}{R}, \quad \frac{(1+Y)^{3:2}}{dY} = \frac{2\,dy}{R};$$

é integrando,

$$\frac{R}{\sqrt{1+X}} = a - x, \quad \frac{R}{\sqrt{1+Y}} = b - y,$$

siendo a y b constantes arbitrarias. Si sustituímos los valores de X é Y en (3), resultará

$$p = \frac{a-x}{\sqrt{R^2-(a-x)^2-(b-y)^2}} \qquad q = \frac{b-y}{\sqrt{R^2 - \ldots}}$$

$$dz = \frac{(a-x)\,dx + (b-y)\,dy}{\sqrt{R^2-(a-x)^2-(b-y)^2}}$$

é integrando nuevamente,

$$z - c = \sqrt{R^2-(a-x)^2-(b-y)^2}$$

ecuación de una esfera. Así, *la esfera es la única superficie cuyos puntos son todos umbílicos.*

§ 2.º Teoría de la indicatriz

95. Paraboloide de ajuste (*) *(de raccordement)* ú osculador. Sea la superficie

$$\zeta = a_1 \xi + b_1 \eta + a_2 \xi^2 + b_2 \xi\eta + c_2 \eta^2 + a_3 \xi^3 + b_3 \xi^2 \eta + \ldots$$

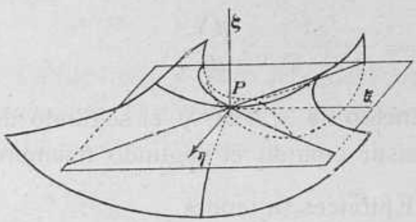


Figura 54

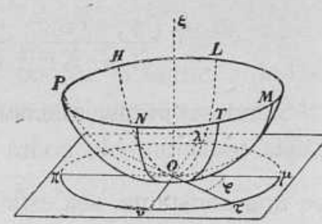


Figura 55

referida á su plano tangente en el origen de coordenadas ξ, η, ζ, en el que

$$a_1 = p_0,\ b_1 = q_0,\ 2a_2 = r_0,\ b_2 = s_0,\ 2c_2 = t_0 \text{ etc.},$$

que por ser $p_0 = a_1 = 0$, $q_0 = a_0 = 0$, se reduce á la forma

$$\zeta = a_2 \xi^2 + b_2 \xi\eta + c_2 \eta^2 + \ldots$$

en la cual aun puede hacerse desaparecer el término en $\zeta\eta$ por un giro conveniente alrededor del eje ζ, pudiéndose escribir bajo la nueva forma

$$2\zeta = \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} + \alpha_3 \xi^3 + \beta_3 \xi^2 \eta + \ldots$$

Si consideramos tan solo hasta los términos los términos de segundo orden, quedará reducida á

$$2\zeta = \frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} \quad \text{ó} \quad 2\zeta = \frac{\xi^2}{R_1} + \frac{\eta^2}{R_2}, \qquad (a)$$

expresando R_1 y R_2 los radios de curvatura principales.

(*) **Proponemos esta traducción de la palabra *raccordement*.**

De la ecuación (α) resulta que los radios de curvatura principales tienen signos iguales en los puntos elípticos, y opuestos en los hiperbólicos, es decir, que en los puntos elípticos los dos centros de curvatura se hallan al mismo lado (fig. 56), en los hiperbólicos al lado opuesto de la superficie. En los puntos parabólicos uno de dichos radios R_1 ó R_2 es infinito, según que lo sea α^2 ó β^2.

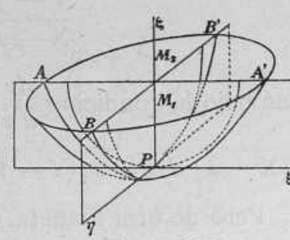


Figura 56

Este paraboloide osculador es la segunda aproximación á la superficie (siendo la primera el plano tangente $\zeta = o$).

Su intersección con el plano tangente $\zeta = o$ es la curva

$$\frac{\xi^2}{\beta^2} + \frac{\eta^2}{\alpha^2} = o,$$

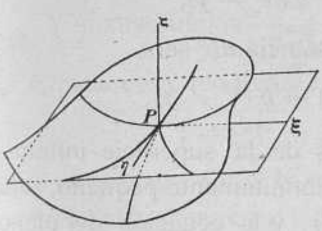


Figura 57

que representa un par de rectas, reales, imaginarias ó coincidentes, según que α^2 y β^2 tengan signos distintos, iguales ó cuando α^2 ó β^2 sean infinitos, que corresponden al paraboloide hiperbólico, al elíptico ó al cilíndrico (figuras 54, 55 ó 57).

Diremos pues, que: *Toda superficie corta al plano tangencial en una curva, que tiene en el punto de contacto* P *un punto doble, aislado ó de retroceso, según que el paraboloide osculador sea hiperbólico, elíptico ó sea un cilindro parabólico.*

96. Indicatriz. Se llama *indicatriz* en un punto P de una superficie á la curva semejante á la sección hecha en esta superficie por un plano paralelo al plano tangente en P, trazado á una distancia infinitamente pequeña de este plano, siendo la relación de semejanza del orden de la raíz cuadrada de esta distancia.

Dupin, en su *Troisième Mémoire* obtiene la ecuación

$$r(X - x)^2 + 2s(X - x)(Y - y) + t(Y - y)^2 = C$$

de la indicatriz por la integración de la ecuación de las tangentes conjugadas

$$\frac{Y-y}{X-x}+\frac{rdx+sdy}{sdx+tdy}=0,$$

que bajo la condición $\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}$ adquiere la forma

$$r(X-x)\,dX+s[(Y-y)\,dX+(X-x)\,dY]+t(Y-y)\,dY=0.$$

Pero de otra manera, considerando la superficie primitiva $z=\varphi(x, y)$, é incrementando x é y en dx y dy, llega á la expresión

$$dz=pdx+qdy+\frac{1}{1.2}(rdx^2+2sdxdy+tdy^2)+\frac{1}{1.2.3}+\ldots$$

Puesto que la ecuación del plano tangente es

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y),$$

la del plano tangente paralelo, á una distancia dh, será

$$Z-z-dh=p(X-x)+q(Y-y).$$

Y puesto que X, Y, Z son puntos de la superficie infinitamente próximos á x, y, z, porque dh es infinitamente pequeño, será $Z-z=dz$, $X-x=dx$, $Y-y=dy$, y la ecuación del plano secante se reducirá á

$$dz-dh=pdx+qdy.$$

Restando del desarrollo, se obtiene

$$dh=\frac{1}{1.2}(rdx^2+2sdxdy+tdy^2)+\frac{1}{1.2.3}(\alpha dx^3+\ldots.)+\ldots..$$

y quedará $$2dh=rdx^2+2sdxdy+tdy^2,$$

como proyección sobre el plano xy, de la sección buscada. Y después de comparar con la ecuación obtenida de la indicatriz, concluye Dupin enunciando el teorema siguiente:

Un plano infinitamente próximo del plano tangente y que le es paralelo, corta á la superficie según una curva de segundo grado, INDICATRIZ *de la curvatura de la superficie á partir del punto que se considera.*

Así pues, siendo la ecuación del plano secante infinitamente próximo al plano tangente

$$Z - z = p\,(X - x) + q\,(Y - z) + h \qquad (1)$$

y la de la superficie, según la fórmula de Taylor,

$$Z - z = p\,(X - x) + q\,(Y - y)$$

$$+ \frac{1}{2}\left[r\,(X - x)^2 + 2s\,(X - x)\,(Y - y) + t\,(Y - y)^2\right] + \ldots..$$

La proyección de su intersección con el plano (1), sobre el plano de las x, y, será una curva representada por la ecuación

$$h = \frac{1}{2}\left[(X - x)^2\,r + 2\,(X - x)\,(Y - y)\,s + (Y - y)^2\,t\right] + \ldots.$$

Y si sustituimos $\dfrac{X - x}{\sqrt{2h}}$ é $\dfrac{Y - y}{\sqrt{2h}}$ por ξ y por η, haciendo tender á h hacia cero, tendremos

$$1 = r\xi^2 + 2s\xi\eta + t\eta^2,$$

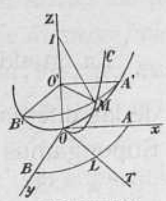


Figura 58

que es la ecuación de la proyección de la indicatriz sobre el plano tangente. Las ecuaciones de esta curva son

$$Z - z = p\,(X - x) + q\,(Y - y),$$

$$1 = r\,(X - x)^2 + 2s\,(X - x)\,(Y - y) + t\,(Y - y)^2.$$

Observación. *La sección de una superficie por su plano tangente presenta un nudo en el punto de contacto, las tangentes al nudo son las asíntotas de la indicatriz.*

En efecto, si se corta la superficie por su plano tangente en x, y, z, la proyección de la intersección se expresa por

$$0 = \frac{1}{2}\left[r\,(X - x)^2 + 2s\,(X - x)\,(Y - y) + t\,(Y - y)^2\right] + \ldots..$$

El punto $(x,\ y)$ de esta curva es un nudo cuyas tangentes se hallan expresadas por el grupo de términos de menor grado

$$r\,(X - x)^2 + 2s\,(X - x)\,(Y - y) + t\,(Y - y)^2 = 0,$$

que es la asíntota de la indicatriz.

Podemos considerar la ecuación del paraboloide osculador

$$\zeta = \frac{1}{2} r\xi^2 + 2s\xi\eta + t\eta^2.$$

En virtud de la ecuación $O'M'^2 = OO'(2\rho - OO')$ existente para el círculo osculador de la sección OM'C (fig. 58), tendremos

$$\rho = \lim \frac{OM'^2}{2OO'} = \lim \frac{OM'^2}{2h} = \lim \frac{O'M'^2}{2h}.$$

Y si hacemos

$$\xi = O'M' \cos\varphi, \quad \eta = O'M' \operatorname{sen}\varphi, \quad (\text{siendo } \angle xON = \varphi),$$

se tendrá $O'M'^2 (r \cos^2\varphi + 2s \operatorname{sen}\varphi + t \operatorname{sen}^2\varphi) = 2h$

de donde $$\rho = \frac{1}{r\cos^2\varphi + 2s \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi + t \operatorname{sen}^2\varphi}.$$

La igualdad $\rho = \dfrac{O'M'^2}{2h}$ manifiesta que los radios de curvatura de las diferentes secciones normales, son proporcionales á $O'M'^2$. Supongamos pues, que en la traza del plano zON sobre el plano de las xy se tome $ON = \dfrac{O'M'}{\sqrt{2h}}$, se tendrá $\rho = ON^2$. Además, la relación $\dfrac{O'M'}{ON}$ será constante para todas las secciones normales. La curva ALB así obtenida, será semejante á A'MB' siendo su centro O, y esta curva es la indicatriz.

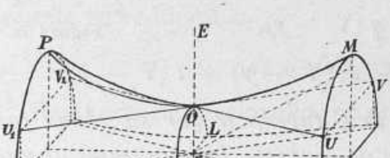


Figura 59

Observación. En el caso de ser la indicatriz hiperbólica, la superficie se halla á los dos lados del plano tangente, cambiando de signo el radio de curvatura (fig. 95).

Cuando el punto τ recorre la hipérbola, el radio vector $O\tau$ varía desde $O\mu$ hasta el infinito, y el radio de curvatura de la sección normal desde ρ_1 hasta el infinito. Cuando la recta $\sigma O\tau$ se halla en el ángulo suplementario de las asíntotas, la cantidad $O\tau^2$ es negativa, y el radio ρ de curvatura se halla dirigido en sentido contrario de los precedentes. La hipérbola cuyos vértices son π y μ, no indica ya variaciones en el radio de curvatura. Pero si trazamos una hipérbola en el ángulo suplementario de las asíntotas, tendremos una indicatriz que corresponderá á un valor negativo del radio. Así:

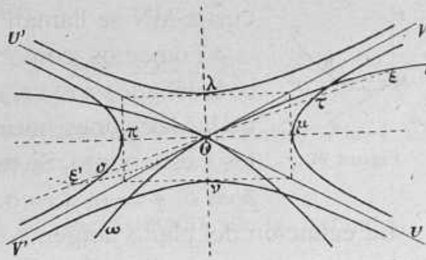


Figura 60

El radio de curvatura de una sección normal es positivo ó negativo, según que la traza del plano tangente está comprendida en uno ú otro de los ángulos de las asíntotas de la indicatriz. Cada una de las secciones normales, cuyo plano contiene una de las asíntotas de la indicatriz, tiene un radio de curvatura infinito, y por consiguiente, las asíntotas de la indicatriz tienen un contacto de segundo orden con la superficie.

Las superficies que tienen por indicatrices en cada uno de sus puntos hipérbolas, se llaman de *curvaturas opuestas*. La indicatriz se compone de dos hipérbolas conjugadas.

97. Definiciones. Se llama *curvatura total* de una superficie en un punto, á la inversa del producto de los radios principales de curvatura, y *curvatura media*, á la suma de las inversas de los mismos. Así escribiremos

$$K = \frac{1}{r_1 r_2}, \qquad H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}.$$

Observación. Los puntos cuya indicatriz es elíptica ó hiperbólica se llaman como se dijo *puntos elípticos* ó *hiperbólicos;* y la línea límite de los puntos de curvatura nula, que son los *puntos parabólicos*.

§ 3.° Tangentes conjugadas

98. Definición. Sea MM′ una curva cualquiera situada en una superficie. Consideremos los planos tangentes en los puntos

M y M'. Si el segundo punto se aproxima indefinidamente al primero, la intersección de los dos planos variará de posición y se convertirá, en el límite, en cierta tangente á la superficie en el punto M. Esta recta límite y la tangente MT á la curva MN se llaman *tangentes conjugadas*.

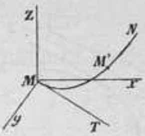


Figura 61

Tomemos como origen el punto M y por planos coordenados xy, xz, yz, el plano tangente y los planos de las secciones normales principales correspondientes á este punto. Se tendrá en M, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $p = 0$, $q = 0$, $s = 0$.

La ecuación del plano tangente en M' (x', y', z'), es

$$Z - z' = p' (X - x') + q' (Y - y'),$$

expresando p' y q' los valores de p y q en el punto M'. Y, en virtud de la fórmula de Mac Laurin, se tendrá

$$z' = px' + qy' + \frac{1}{2} (rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2) + \ldots..$$

Y despreciando infinitamente pequeños de tercer orden,

$$z' = \frac{1}{2} (rx'^2 + ty'^2);$$

y derivando con relación á x' é y', tendremos $p' = rx'$, $q' = ty'$.

Por tanto, las tangentes en M y M' serán $Z = 0$ y

$$rx' (X - x') + ty' (Y - y') + \frac{1}{2} (rx'^2 + ty'^2) - Z = 0.$$

Estas dos ecuaciones representan la intersección de los planos tangentes, que será

$$rx' X + ty' Y - \frac{1}{2} (rx'^2 + ty'^2) = 0.$$

Hagamos $y' = mx'$, siendo m el coeficiente angular de la proyección de la recta MM', que se confunde en el límite con la tangente MT. La ecuación última se transforma en

$$rX + tmY - \frac{1}{2} x' (r + tm^2) = 0,$$

y cuando el punto M′ se confunde con M, se tiene $x' = 0$ y

$$rX + tmY = 0,$$

ecuación de la tangente conjugada arriba definida. Si m' expresa su coeficiente angular, se tendrá

$$m' = -\frac{r}{tm} \quad \text{ó} \quad mm' = -\frac{r}{t}.$$

Teorema. *Dos tangentes conjugadas son paralelas á dos diámetros conjugados de la indicatriz.*

En efecto, si $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es la ecuación de la indicatriz, se tendrá, entre los coeficientes angulares de dos diámetros conjugados, la relación $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$. Pero

$$a^2 = \frac{1}{r}, \quad b^2 = \frac{1}{t}; \quad \text{luego} \quad mm' = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{r}{t},$$

lo que demuestra el teorema. Y siendo los radios de curvatura proporcionales á los cuadrados de los diámetros de la indicatriz, resulta que: *la suma algebráica de los radios de curvatura correspondientes á dos tangentes conjugadas es constante.*

Otro procedimiento. Podemos llegar á la familia conjugada de otra familia de curvas, trazadas en una superficie, observando que para que dos direcciones dx, dy, dz y δx, δy, δz sean conjugadas, basta que sus proyecciones lo sean con relación á la proyección de la indicatriz sobre el plano de las xy. Y puesto que la ecuación de ésta es

$$rX^2 + 2sXY + tY^2 = 1,$$

dichas direcciones serán conjugadas, si se tiene

$$rdx\delta x + s(dx\delta y + dy\delta x) + tdy\delta y = 0. \tag{1}$$

En general, la ecuación de una familia de curvas es reducible á la forma $\psi(x, y, z, \alpha) = 0$. La eliminación de α y z entre esta ecuación, la de la superficie y la

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + p\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)dx + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + q\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)dy = 0$$

da una relación entre x, y, dx, dy. Se obtiene el valor de $\frac{dy}{dx}$; y sustituyendo en (1), obtendremos una ecuación de la forma $M\delta x + N\delta y = 0$, que es la de la familia conjugada. Entre las redes conjugadas, podemos distinguir:

1.º *Las líneas asintóticas*, tangentes en cada uno de sus puntos á las asíntotas de la indicatriz. Sus ecuaciones diferenciales se obtienen, escribiendo que las direcciones dx, dy y δx, δy coinciden. La ecuación (1) se reduce entonces á

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0, \tag{2}$$

que es la ecuación diferencial de las asintóticas, las cuales son reales tan solo en el caso de ser $rt - s^2 < 0$. Si se observa que

$$d^2z = p\,d^2x + q\,d^2y + r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2,$$

la fórmula (2) se escribirá

$$-d^2z + p\,d^2x + q\,d^2y = 0,$$

que expresa que la dirección (d^2x, d^2y, d^2z) de la normal principal es perpendicular á la dirección p, q, -1 de la normal á la superficie. Así: *Las asintóticas están caracterizadas por que su plano osculador es tangente á la superficie.*

2.º Las *líneas de curvatura* son líneas tangentes en cada uno sus puntos á los ejes de la indicatriz; son pues líneas conjugadas ortogonales. Sus ecuaciones se obtendrán escribiendo, que no solamente se verifica la ecuación (1), sino además la siguiente

$$dx\,\delta y + dy\,\delta y + dz\,\delta z = 0$$

ó
$$dx\,\delta x + dy\,\delta y + (p\,\delta x + q\,\delta y)(p\,dx + q\,dy) = 0,$$

es decir,

$$dx\,\delta x\,(1 + p^2) + dy\,\delta y\,(1 + q^2) + pq\,(\delta x\,dy + \delta y\,dx) = 0.$$

Si eliminamos la relación $\frac{\delta y}{\delta x}$ entre esta ecuación y la (1), tendremos la ecuación de las proyecciones de las líneas de curvatura sobre el plano de las xy,

$$- r dx [(1 + q^2) dy + pq dx] + s \{ dx [(1 + p^2) dx + pq] dy$$
$$- dy [(1 + q^2) dy + pq dx] \} + t dy [(1 + p^2) dx + pq dy] = 0,$$

que se reducirá á la expresión que daremos más adelante.

Observación. Las líneas de curvatura son las bisectrices de las líneas asintóticas.

§ 4.º LÍNEAS DE CURVATURA

99. LÍNEAS DE CURVATURA. DEFINICIÓN. *Líneas de curvatura de una superficie son aquéllas cuyas normales sucesivas se encuentran, formando superficies desarrollables.*

Para obtener su ecuación consideremos las dos normales en los puntos M y M'.

$$X - x + p (Z - z) = 0 \qquad (1)$$
$$Y - y + q (Z - z) = 0, \qquad (2).$$
$$X - x' + p' (Z - z') = 0 \qquad (3)$$
$$Y - y' + q' (Z - z') = 0. \qquad (4)$$

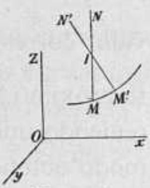


Figura 62

Eliminando X entre (1) y (3) é Y entre (2) y (4), tendremos dos expresiones de Z, que igualadas dan

$$\frac{x' - x + p' z' - pz}{p' - p} = \frac{y' - y + q' z' - qz}{q' - q} \qquad (5)$$

Esta ecuación y la de la superficie $z' = f(x' y')$ representan una curva MM' situada en ésta, que pasa por el punto M y tal, que todas las normales á la superficie trazadas por la curva encuentran á la normal MN.

Si ahora suponemos que M' se halla infinitamente próximo al punto M', en vez de las diferencias escribiremos diferenciales, y tendremos

$$\frac{dx + pdz + zdp}{dp} = \frac{dy + qdz + zdq}{dq}$$

ó

$$\frac{dx + pdz}{dp} = \frac{dy + qdz}{dq} \qquad (6)$$

Sustituyendo por las diferenciales sus valores, se reduce á

$$\frac{1 + p^2 + pq\dfrac{dy}{dx}}{r + s\dfrac{dy}{dx}} = \frac{pq + (1 + q^2)\dfrac{dy}{dx}}{s + t\dfrac{dy}{dx}}$$

ó bien
$$[(1 + q^2)s - pqt]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$+ [(1 + q^2)r - (1 + p^2)t]\frac{dy}{dx} + pqr - (1 + p^2)s = 0 \qquad (7)$$

Esta ecuación da dos valores de $\dfrac{dy}{dx}$ é indica dos direcciones, según las que es necesario pasar del punto M á otro punto infinitamente próximo de la superficie, para que la normal de dicho punto encuentre á la normal en M. Si tomamos uno de ellos y el valor correspondiente de $\dfrac{dz}{dx}$, podremos pasar al punto infinitamente próximo M′ y enseguida de éste al M″, y así sucesivamente, obteniendo una de las dos líneas de curvatura MM′M″...; y de igual modo obtendremos la otra.

Observación. También podríamos haber expresado inmediatamente la intersección de las dos normales

$$\frac{X - x}{f_1} = \frac{Y - y}{f_2} = \frac{Z - z}{f_3}$$

$$\frac{X - x - dx}{f_1 + df_1} = \frac{Y - y - dy}{f_2 + df_2} = \frac{Z - z - dz}{f_3 + df_3},$$

bajo la forma

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ df_1 & df_2 & df_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ f_{11}dx + f_{12} & dy + f_{13}dz \dots & \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} dx & dy & pdx + qdy \\ p & q & -1 \\ rdx + sdy & sdy + tdy & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

100. Propiedades. Tomemos la normal MN por eje de las z; p y q son nulos, y la ecuación (7) se reduce á

$$s\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (r - t)\frac{dy}{dx} - s = 0. \qquad (8)$$

El producto de las raíces de esta ecuación es igual á -1; luego las tangentes trazadas á las líneas de curvatura que se cortan en M son perpendiculares entre sí.

Tomemos por planos principales los de las zy y zx, entonces $s = 0$. La ecuación (8) tiene una raíz nula y otra infinita; luego las líneas de curvatura son tangentes en M al eje de las x y al de las y, es decir, que éstos son tangentes á las secciones principales. Las dos series de líneas de curvatura se cortan según ángulos rectos en la superficie, y la dividen en rectángulos infinitamente pequeños.

Si se tuviese á la vez $s = 0$, $r - t$, los dos valores de $\frac{dy}{dx}$ serían indeterminados. Habría una infinidad de líneas de curvatura que pasasen por el punto M, alrededor del cual todas las curvaturas serían iguales, el cual sería un umbílico. Este carácter puede servir para hallar los umbílicos de una superficie; porque si se expresa que la ecuación (7) da para $\frac{dy}{dx}$ una infinidad de valores, se obtendrán las dos ecuaciones ya conocidas

$$\frac{1 + p^2}{r} = \frac{1 + q^2}{t} = \frac{pq}{s}.$$

Sean O un punto de la superficie, Oz una normal, OA y OB las dos líneas de curvatura, Ox y Oy sus tangentes. Si O′ y O″ son dos puntos infinitamente próximos al O en las líneas OA y OB, puede admitirse que las normales O′K y O″L encuentran á Oz. Sean K y L los puntos de intersección. Vamos á demostrar que OK y OL son los radios de curvatura, en el punto O, de las secciones principales zOx y zOy. En efecto, puesto que Ox es tangente á la curva OA, el punto O′ infinitamente próximo del O en A, puede considerarse como perteneciente al plano zOx; luego la recta O′K, que es normal á la curva, puesto que es normal á la superficie, determinará por su intersección con la normal Oz el centro de curvatura de la sección principal situada en el plano zOx. Y de igual manera se verá que OL es el radio de curvatura de la sección principal en el plano zOy (fig. 53). También puede obtenerse este resultado por el cálculo, pues siendo

$$X - x + p(Z - z) = 0, \quad Y - y + q(Z - z) = 0 \quad (1)$$

$$X - x' + p'(Z - z') = 0, \quad Y - y' + q'(Z - z') = 0 \quad (2)$$

las ecuaciones de las dos normales, si el punto (x, y, z) coincide con el origen y el punto (x', y', z') está muy próximo, las ecuaciones (1) se reducen á $X = 0$, $Y = 0$; y las otras dos dan en el punto común

$$-dx + dp(Z - dz) = -dx - Zrdx = 0,$$

$$-dy + dq(Z - dz) = -dy + Ztdy = 0,$$

ó bien $\qquad dx(Zr - 1) = 0, \quad dy(Zt - 1) = 0.$

Y no pudiendo ser dx y dy nulas al mismo tiempo, se podrá suponer

ó $\qquad dx = 0, \quad Z = \frac{1}{t} \qquad$ ó $\qquad dy = 0, \quad Z = \frac{1}{r}.$

En el primer caso, puesto que $dx = 0$, la tangente coincide con el eje de las y, siendo $Z = \frac{1}{t}$ el radio de curvatura principal; en el segundo caso, la tangente coincide con el eje de las x y el radio de curvatura principal será $Z = \frac{1}{r}$.

Observación. No se debe inferir de lo dicho que los puntos de intersección de las normales son los centros de los círculos osculadores de las líneas de curvatura, porque estas normales se cortan sucesivamente y son tangentes á una misma curva, propiedad que no tienen las normales trazadas por los centros de curvatura de una curva alabeada. Y al mismo tiempo las líneas de curvatura pueden ser planas, sin que sus círculos osculadores se confundan con los de las secciones principales, pues para esto sería necesario que sus planos osculadores fuesen normales y que, por tanto, las líneas de curvatura fuesen líneas de distancia mínima (t. IV, pág. 425). Por ejemplo, en las superficies de revolución, las líneas de curvatura son los meridianos y los paralelos. Los meridianos son secciones principales, porque sus planos osculadores son normales á la superficie. Los paralelos son líneas de curvatura plana, no siendo secciones principales.

101. Distancia mínima de dos normales. *Distancia mínima de dos normales trazadas por dos puntos infinitamente próximos* MM′ *de una superficie.*

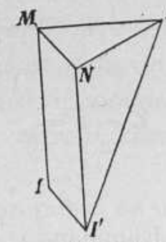


Figura 63

Sean $MM' = d\sigma$, $II' = du$ la distancia mínima de las normales I′N paralela á IM en I′, terminada en el plano tangente en M.

Por ser la recta MN perpendicular al plano NI′M′, el ángulo MNM′ es recto. La recta MN, está contenida en el plano tangente en M y es paralela al plano tangente en M′; por consiguiente es paralela á la intersección de estos dos planos, en otros términos, es la tangente conjugada de MM′.

Si pues ω es el ángulo de estas dos direcciones, se tendrá

$$du = d\sigma \cos \omega. \tag{1}$$

Podemos obtener la expresión analítica de du, considerando las dos normales infinitamente próximas

$$X = -pZ + x + px, \qquad Y = -qZ + y + qz$$

y será $$X = -(p + dp)Z + dx + (p + dp)z + pdz$$

$$Y = -(q + dq)Z + y + dy + (q + dq)z + qdz.$$

Y, en virtud de la fórmula de la mínima distancia de dos rectas

$$du = -\frac{(dx + pdz)\,dq + (dy + qdz)\,dp}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + (pdq - qd)p^2}}$$ será

$$du = -\frac{[(1 + p^2)s - pqr]\,dx^2 + [(1 + q^2)s - pqt]\,dy^2 + \ldots..}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + (pdq - qdp)^2}}$$

Cálculos de los radios de curvatura. El teorema arriba demostrado permite calcular las curvaturas principales en un punto de una superficie, siendo el origen un punto cualquiera. Séale normal en el punto M (x, y, z)

$$X - x + p(Z - z) = 0, \quad Y - y + q(Z - z) = 0.$$

Si M′ es un punto infinitamente próximo tomado en la línea de curvatura, la normal correspondiente encontrará á la primera normal en un punto cuya coordenada Z estará dada por cada una de las dos ecuaciones

$$Z - z = \frac{1 + p^2 + pq\dfrac{dy}{dx}}{r + s\dfrac{dy}{dx}}, \qquad Z - z = \frac{pq + (1 + q^2)\dfrac{dy}{dx}}{s + t\dfrac{dy}{dx}}.$$

Eliminando $\dfrac{dy}{dx}$ entre estas dos ecuaciones, tendremos

$$(rt - s^2)(Z - z)^2 - [(1 + p^2)t + (1 + q^2)r - 1pqs](Z - z) \\ + 1 + p^2 + q^2 = 0. \qquad (1)$$

Esta ecuación da dos valores de $Z - z$, y por consiguiente de Z, que corresponden á los centros de curvatura de las dos secciones principales. Si expresamos por ρ uno de los radios de curvatura, tendremos

$$\rho = \sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2}$$

que en virtud de las ecuaciones ( ) se reducirá

$$\rho = (Z - z)\sqrt{1 + p^2 + q^2} \quad \text{de donde} \quad Z - z = \frac{\rho}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Si se sustituye el valor de $Z - z$ en la ecuación (1), tendremos después de reducir y ordenar

$$(rt - s^2)\rho^2 - [(1 + p^2)t + (1 + q^2)r - 2pqs]\sqrt{1 + p^2 + q^2} \\ - \rho + (1 + p^2 + q^2) = 0,$$

de la que se deducen los dos radios de curvatura principales.

102. Normalías. El Sr. Mannheim llama *normalía* de una superficie al lugar de las normales á esta superficie que pasan por todos los puntos de una línea trazada en ésta.

Una *normalía desarrollable* es el lugar de las normales á la superficie trazadas por los puntos de una línea de curvatura, porque dos normales consecutivas se encuentran. Para obtener su ecuación basta eliminar x, y, z entre la ecuación de la superficie propuesta, las ecuaciones de una normal y la ecuación (7) de la pág. 140, que expresa que el punto (x, y, z) está en una línea de curvatura.

103. Teorema de Olindes Rodrigues. *El lugar de las aristas de retroceso de las normalías desarrollables es también el lugar de los centros de curvatura de la superficie, y dos normales infinitamente próximas de una línea de curvatura se cortan en un centro de curvatura principal.*

Sean x, y, z las coordenadas rectangulares de un punto de una superficie, α, β, γ los cosenos directores de la normal en este punto. Esta normal forma parte de dos normalías desarrollables. Sean X, Y, Z las coordenadas del punto en que dicha normal es tangente á la arista de retroceso de una de estas normalías. Sea λ la distancia de los puntos (x, y, z) y (X, Y, Z). Se tendrá

$$X = x + \alpha\lambda, \quad Y = y + \beta\lambda, \quad Z = z + \gamma\lambda, \tag{1}$$

y el punto (X, Y, Z) se obtendrá expresando que la recta representada por las ecuaciones (1) corta á la recta infinitamente próxima, cuyas ecuaciones pueden sustituirse por las diferenciales de éstas, á saber:

$$dx + \alpha d\lambda + \lambda d\alpha = 0, \quad dy + \beta d\lambda + \lambda d\beta = 0,$$
$$dz + \gamma d\lambda + \lambda d\gamma = 0. \tag{2}$$

La condición que se busca se obtendrá eliminando X, Y, Z, λ y $d\lambda$ entre (1) y (2), ó eliminando λ y $d\lambda$ entre las ecuaciones (2), lo que da

$$dx\,(\beta d\gamma - \gamma d\beta) + dy\,(\gamma d\alpha - \alpha d\gamma) + dz\,(\alpha d\beta - \beta d\alpha) = 0.$$

Suponiendo satisfecha esta ecuación (que es la ecuación de las líneas de curvatura) se deducirá de (2), multiplicando por α, β, γ y sumando, $d\lambda = 0$. Estas fórmulas (2) darán pues

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{dy}{d\beta} = \frac{dz}{d\gamma} = -\lambda.$$

Escribamos estas relaciones debidas á Rodrigues, bajo la forma

$$dx + \lambda d\alpha = 0, \quad dy + \lambda d\beta = 0, \quad dz + \lambda d\gamma = 0 \qquad (3)$$

ó

$$dx + \lambda\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}dx + \frac{\partial\alpha}{\partial y}dy + \frac{\partial\alpha}{\partial z}dz\right) = 0,$$

$$dy + \lambda\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}dx + \frac{\partial\beta}{\partial y}dy + \frac{\partial\beta}{\partial z}dz\right) = 0,$$

$$dz + \lambda\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}dx + \frac{\partial\gamma}{\partial y}dy + \frac{\partial\gamma}{\partial z}dz\right) = 0.$$

Eliminando dx, dy, dz, se tiene

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda} + \frac{\partial\alpha}{\partial x} & \frac{\partial\alpha}{\partial y} & \frac{\partial\alpha}{\partial z} \\ \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{1}{\lambda} + \frac{\partial\beta}{\partial y} & \frac{\partial\beta}{\partial z} \\ \frac{\partial\gamma}{\partial x} & \frac{\partial\gamma}{\partial y} & \frac{1}{\lambda} + \frac{\partial\gamma}{\partial z} \end{vmatrix} = 0, \qquad (4)$$

ecuación de segundo grado, siendo el término independiente de λ, $\frac{\partial(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial(x, y, z)}$ nulo, puesto que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. La ecuación (4) es una nueva forma de la ecuación de los radios de curvatura principales. Calculemos λ. Para ello, escribiremos las ecuaciones (3) así:

$$dx + \lambda d\frac{f_1}{N} = 0, \quad dy + \lambda d\frac{f_2}{N} = 0, \quad dz + \lambda d\frac{f_3}{N} = 0, \qquad (5)$$

expresando f el primer miembro de la ecuación de la superficie, por f_1, ... sus derivadas y por N el radical $\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}$. Estas ecuaciones pueden escribirse bajo la forma

$$dx + \frac{\lambda(Ndf_1 - f_1 dN)}{N^2} = 0, \ldots \quad \text{ó} \quad dx\frac{N}{\lambda} + df_1 - f_1\frac{dN}{N} = 0, \ldots$$

ó, por último

$$\left(\frac{N}{\lambda} + f_{11}\right)dx + f_{12}dy + f_{13}dz - f_1\frac{dN}{N} = 0,$$

$$f_{21}dx + \left(\frac{N}{\lambda} + f_{22}\right)dy + f_{23}dz - f_2\frac{dN}{N} = 0,$$

$$f_{31}dx + f_{32}dy + \left(\frac{N}{\lambda} + f_{33}\right)dz - f_3\frac{dN}{N} = 0,$$

y, por ser $f_1dx + f_2dy + f_3dz = 0$, se deduce eliminando dx, dy, dz y $\frac{dN}{N}$, la ecuación (12) de la pág. 119, en la que R se halla sustituído por λ, lo que demuestra que λ son los radios de curvatura principales de la superficie. La ecuación (4) puede escribirse así

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) + \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(\beta, \gamma)}{\partial(y, z)} + \frac{\partial(\gamma, \alpha)}{\partial(z, x)} = 0.$$

TEOREMA DE GAUSS. Sean ds_1 y ds_2 los arcos elementales á que corresponden los radios R_1 y R_2 de curvatura principal, ds_{01}, ds_{02} sus imágenes esféricas y da_1, db_1, dc_1, da_2, db_2, dc_2 sus proyecciones sobre los ejes. Tendremos en virtud de (3) las ecuaciones

$$R_1da_1 = -dx_1, \quad R_1db_1 = -dy_1, \quad R_1dc_1 = -dz_1, \qquad (1)$$
$$R_2da_2 = -dx_2, \quad R_2db_2 = -dy_2, \quad R_2dc_2 = -dz_2$$

y la relación

$$da_1da_2 + db_1db_2 + dc_1dc_2 = 0. \qquad (2)$$

Elevando al cuadrado y sumando las ecuaciones (1), lo mismo que las (2), resultará

$$R_1^2ds_{01}^2 = ds_1^2, \quad R_2^2ds_{02}^2 = ds_2^2,$$

tendremos $\quad \dfrac{1}{R_1 R_2} = \dfrac{ds_{01}\,ds_{02}}{ds_1\,ds_2} \quad$ ó $\quad \dfrac{1}{R_1 R_2} = \dfrac{ds}{d\sigma}.$

El producto $\dfrac{1}{R_1\,R_2}$ *de las curvaturas principales, en un punto* M *de una superficie, es igual á la relación entre el elemento superficial y su representación esférica.*

Expresando en las ecuaciones de Rodrigues las diferenciales totales da, db, dc por medio de sus diferenciales parciales y eliminando dx, dy, dz, obtendremos

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial a}{\partial x} + \dfrac{1}{R} & \dfrac{\partial a}{\partial y} & \dfrac{\partial a}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial b}{\partial x} & \dfrac{\partial b}{\partial y} + \dfrac{1}{R} & \dfrac{\partial b}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial c}{\partial x} & \dfrac{\partial c}{\partial y} & \dfrac{\partial c}{\partial y} + \dfrac{1}{R} \end{vmatrix} = 0; \tag{3}$$

y ordenando con relación á $\dfrac{1}{R}$, será

$$\frac{1}{R^3} - \frac{h}{R^2} + \frac{k}{R} + l = 0; \tag{4}$$

pero el determinante l es igual á cero; luego

$$\frac{1}{R^2} - \frac{h}{R} + k = 0; \tag{5}$$

h es la curvatura media $\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$ y k la curvatura total $\dfrac{1}{R_1\,R_2}$.

$$h = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) \tag{6}$$

$$k = \frac{1}{R_1\,R_2} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial a}{\partial x} & \dfrac{\partial a}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial b}{\partial x} & \dfrac{\partial b}{\partial y} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial b}{\partial y} & \dfrac{\partial b}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial c}{\partial y} & \dfrac{\partial c}{\partial z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial c}{\partial z} & \dfrac{\partial c}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial a}{\partial z} & \dfrac{\partial a}{\partial x} \end{vmatrix} \tag{7}$$

Podemos escribir también

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial a}{\partial x}+\dfrac{1}{R} & \dfrac{\partial a}{\partial y} & \dfrac{\partial a}{\partial z} & a \\ \dfrac{\partial b}{\partial x} & \dfrac{\partial b}{\partial x}+\dfrac{1}{R} & \dfrac{\partial b}{\partial z} & b \\ \dfrac{\partial c}{\partial x} & \dfrac{\partial c}{\partial y} & \dfrac{\partial c}{\partial z}+\dfrac{1}{R} & c \\ \dfrac{a}{R} & \dfrac{b}{R} & \dfrac{c}{R} & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (8)$$

Multiplicando las tres líneas horizontales respectivamente por a, b, c y restando su suma de la cuarta, obtendremos el primer miembro de (3) con signo negativo, en virtud de

$$a\frac{\partial a}{\partial x}+b\frac{\partial b}{\partial x}+c\frac{\partial c}{\partial x}=0, \ldots.. \quad a^2+b^2+c^2=1.$$

Considerando ahora en vez de a, b, c y sus derivadas parciales las de $F(x, y, z)$, haciendo $V=\dfrac{1}{\sqrt{F_1^2+F_2^2+F_3^2}}$ y en virtud de

$$a:b:c=F_1:F_2:F_3 \qquad a^2+b^2+c^2=1,$$

tendremos

$$\frac{\partial a}{\partial x}=VF_{11}+F_1\frac{\partial V}{\partial x}, \ \frac{\partial V}{\partial x}=-V^3(F_1F_{11}+F_2F_{21}+F_3F_{31}), \text{ etc.}$$

Sustituyendo en (8) resultará

$$\begin{vmatrix} F_{11}+\dfrac{1}{VR} & F_{12} & F_{13} & F_1 \\ F_{21} & F_{22}+\dfrac{1}{VR} & F_{23} & F_2 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33}+\dfrac{1}{VR} & F_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

y se obtienen los valores de h y k:

$$h = V^3 [2 (F_{23} F_2 F_3 + F_{31} F_3 F_1 + F_{12} F_1 F_2)]$$
$$- F_{11} (F_2^2 + F_3^2) - F_{22} (F_3^2 + F_1^2) - F_{33} (F_1^2 + F_2^2)$$

$$k = -V^4 \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_1 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_2 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 & 0 \end{vmatrix}$$

104. ALGUNAS LÍNEAS DE CURVATURA. 1.º Las líneas de curvatura de las superficies desarrollables son las generatrices y sus trayectorias ortogonales, porque siendo el mismo el plano tangente á lo largo de una generatriz $M_1 M$ (fig. 64), el lugar de las normales á lo largo de esta generatriz es un plano. Puede decirse que su envolvente es un punto llevado al infinito en una de las normales. Este es uno de los sistemas de líneas de curvatura; el otro está formado por curvas trazadas en la superficie ortogonalmente á las curvas del primer sistema, es decir, á las generatrices rectilíneas. Uno de los radios de curvatura principales es infinito. La curvatura total $\frac{1}{RR'}$ es pues nula en cada punto.

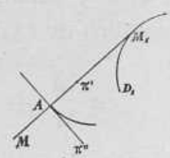


Figura 64

En particular, las líneas de curvatura de un cono son sus generatrices y las curvas de intersección de la superficie con esferas cuyo centro se halla en el vértice del cono. Después de desarrollarse una superficie desarrollable, las líneas de curvatura, distintas de las generatrices, se convierten en las evolventes de la transformada de la arista de retroceso.

2.º En una superficie alabeada, las generatrices no son líneas de curvatura, porque las normales, á lo largo de una generatriz, forman un paraboloide hiperbólico.

3.º Las líneas de curvatura de las superficies de revolución son los meridianos y los paralelos, porque las normales á la superficie á lo largo de estas líneas, forman planos ó conos. Por consiguiente, los radios de curvatura principales en un punto de la superficie, son el radio de curvatura del meridiano y la longitud obtenida (en virtud del teorema de Meusnier) trazando un triángulo cuyo cateto es el radio del paralelo y la hipotenusa una recta dirigida según la normal; de manera, que será la normal terminada en el eje de la superficie, lo que podemos verificar por el Análisis en algunos ejemplos, considerando la ecuación de las líneas de curvatura

$$\frac{dx + pdz}{dp} = \frac{dy + qdz}{dq}. \qquad (1)$$

a) Sea la superficie de revolución $z = \varphi(x^2 + y^2)$.

Se tendrá $\quad p = \varphi' \, 2x, \quad q = \varphi' \, 2y$

$$dp = \varphi'' \, 4x \, (xdx + ydy) + 2\varphi' \, dx,$$

$$dq = \varphi'' \, 4y \, (xdx + ydy) + 2\varphi' \, dy;$$

luego la ecuación (1) se reducirá á

$$\frac{dx + 4x\,\varphi'^2\,(xdx + ydy)}{4x\varphi''(xdx + ydy) + 2\varphi' dx} = \frac{dy + 4y\,\varphi'^2\,(xdx + ydy)}{4y\,\varphi''\,(xdx + ydy + 2\varphi' dy}$$

$$4\varphi''\,(xdx + ydy)\,(ydx - xdy) + 8\,\varphi'^3\,(xdx + ydy)\,(xdy - ydx) = 0,$$

de donde $\quad xdx + ydy = 0 \quad$ ó $\quad x^2 + y^2 = \text{const.}$

que es la ecuación de los paralelos. Se tiene además

$$(ydx - xdy)\,(\varphi'' - 2\varphi'^3) = 0,$$

es decir $\quad ydx - xdy = 0 \quad$ ó $\quad y = x \,.\, \text{const.},$

que es la de los meridianos.

Pero si se tuviese $\varphi'' - 2\varphi'^3 = 0$, no sería preciso concluir $ydx - xdy = 0$, sino $\dfrac{\varphi''}{2\varphi'^3} = 1$

ó $\quad \dfrac{1}{\varphi'^2} = -(x^2 + y^2) + c \quad$ ó $\quad \varphi' = \dfrac{1}{\sqrt{c - (x^2 + y^2)}},$

es decir, $\quad \varphi = -\sqrt{c - (x^2 + y^2)} = z \quad$ ó $\quad x^2 + y^2 + z^2 = c,$

que es la ecuación de la esfera. En la esfera, las líneas de curvatura son indeterminadas, porque todas las normales pasan por un punto fijo, ó son paralelas á una misma recta.

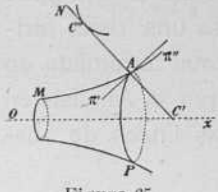


Figura 65

b) Sea la superficie engendrada por la revolución de la catenaria

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

alrededor del eje de las x.

Los centros de curvatura principales se hallan, el uno en C′, el otro en el centro de curvatura C″ de la catenaria. Y puesto que el radio de curvatura de una catenaria es igual á la normal, se tiene que $AC' = AC''$. Los dos radios de curvatura principales son iguales y de signos contrarios $\frac{1}{R'} + \frac{1}{R} = 0$. Y la superficie tiene una *curvatura media nula* en cada uno de sus puntos.

105. Líneas de curvatura del elipsoide. Sea el elipsoide

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1. \tag{1}$$

La ecuación de las líneas de curvatura es

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ ax & by & cz \\ adx & bdy & cdz \end{vmatrix} = 0;$$

y observando que $\Sigma ax\,dx = 0$ y que $\Sigma ax^2 = 1$, resulta

$$\begin{vmatrix} \Sigma xdx & dx & dy \\ 1 & ax & by \\ 0 & adx & bdy \end{vmatrix} = 0.$$

Desarrollando, se tiene

$$ab\Sigma xdx\,(xdy - ydx) - dx\,dy\,(b - a) = 0;$$

sustituyendo zdz por $-\dfrac{ax\,dx + by\,dy}{c}$, se tendrá

$$ab[xdx\,(c - a) + ydy\,(c - b)](xdy - ydx) - c(b - a)\,dx\,dy = 0.$$

Si en la fórmula del elipsoide se sustituye a, b, c por $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$ y se hace

$$A = \frac{a^2(b^2 - c^2)}{b^2(a^2 - c^2)}, \quad B = \frac{a^2(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2},$$

se obtiene para la ecuación de las líneas de curvatura del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

la ecuación siguiente

$$Axyy'^2 + (x^2 - Ay^2 - B)y' - xy = 0, \qquad (2)$$

expresando y' la derivada $\frac{dy}{dx}$.

Esta ecuación se integra diferenciando, y se obtiene

$$2Axyy'y'' + (Ay'^2 - 1)(xy' + y)$$
$$+ y''(x^2 - Ay^2 - B) + y'(2x - 2Ayy') = 0.$$

Eliminando $x^2 - Ay^2 - B^2$, resulta

$$(Ay'^2 + 1)\left(\frac{y''}{y'} + \frac{y'}{y} - \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Suprimiendo el primer factor, é integrando

$$\frac{y'y}{x} = \text{const} = k \quad \text{ó} \quad y' = \frac{kx}{y}.$$

Si se sustituye este valor en (2), se tiene la ecuación de la proyección de las líneas de curvatura en el plano xy, á saber

$$Ak^2x^2 + (x^2 - Ay^2 - B)k - y^2 = 0$$

ó

$$x^2(Ak^2 + k) - y^2(Ak + 1) = Bk.$$

Esta ecuación representa una serie de secciones cónicas.

106. Paraboloide hiperbólico equilátero. Sea $z = \frac{xy}{a}$. La ecuación

$$\frac{dx + pdz}{dp} = \frac{dy + qdz}{dq}$$

se reduce á

$$\frac{dx + \frac{y}{a}\left(\frac{y}{a}dx + \frac{x}{a}dy\right)}{\frac{dy}{a}} = \frac{dy + \frac{x}{a}\left(\frac{y}{a}dx + \frac{x}{a}dy\right)}{\frac{dx}{a}}.$$

Quitando denominador y reduciendo será

$$(a^2 + x^2)\,dy^2 - (a^2 + y^2)\,dx^2 = 0,$$

y resolviendo,

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{a^2 + x^2}{a^2 + y^2}}.$$

Separando las variables, resulta

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} \pm \frac{dy}{\sqrt{a^2 + y^2}} = 0.$$

É integrando,

$$\log(x + \sqrt{a^2 + x^2}) \pm \log(y + \sqrt{a^2 + y^2}) = \log C.$$

Según el signo que se tome será

$$(x + \sqrt{a^2 + x^2})(y + \sqrt{a^2 + y^2}) = C \qquad \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{y + \sqrt{a^2 + y^2}} = C.$$

Haciendo variar á C se tienen las proyecciones horizontales de las dos familias de líneas de curvatura.

107. Caso de las superficies homofocales de segundo grado. Teorema. *La intersección de dos superficies homofocales de segundo grado es una línea de curvatura de las dos superficies* ó bien: *Las superficies de un sistema triplo ortogonal se cortan según líneas de curvatura.* Sean las superficies

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} - 1 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{x^2}{a^2 + \mu} + \frac{y^2}{b^2 + \mu} + \frac{z^2}{c^2 + \mu} - 1 = 0. \qquad (2)$$

La ecuación de las líneas de curvatura de (1) es

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{a^2+\lambda} & \frac{dx}{a^2+\lambda} & dx \\ \frac{y}{b^2+\lambda} & \frac{dy}{b^2+\lambda} & dy \\ \frac{z}{c^2+\lambda} & \frac{dz}{c^2+\lambda} & dz \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

ó $\quad x\,dy\,dz\,(b^2-c^2) + y\,dz\,dx\,(c^2-a^2) + z\,dx\,dy\,(a^2-b^2) = 0$

y puesto que se verifican para (1) y (2) las ecuaciones diferenciales, tendremos que

$$\left.\begin{aligned} \frac{x\,dx}{a^2+\lambda} + \frac{y\,dy}{b^2+\lambda} + \frac{z\,dz}{c^2+\lambda} = 0, \\ \frac{x\,dx}{a^2+\mu} + \frac{y\,dy}{b^2+\mu} + \frac{z\,dz}{c^2+\mu} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

de las que resulta

$$dx : dy : dz = \begin{vmatrix} \frac{y}{b^2+\lambda} & \frac{z}{c^2+\lambda} \\ \frac{y}{b^2+\mu} & \frac{z}{c^2+\mu} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{x}{a^2+\lambda} & \frac{z}{c^2+\lambda} \\ \frac{x}{a^2+\mu} & \frac{z}{c^2+\mu} \end{vmatrix} : \ldots\ldots$$

Sustituyendo en (4) por dx, dy, dz sus valores proporcionales, tendremos

$$\frac{xyz\,(a^2-b^2)\,(b^2-c^2)\,(c^2-a^2)}{(a^2+\lambda)\,(b^2+\lambda)\,(c^2+\lambda)\,(a^2+\mu)\,(b^2+\mu)\,(c^2+\mu)} \times \Sigma\,\frac{x^2}{(a^2+\lambda)\,(a^2+\mu)}$$

expresión que es igual á cero (4) (pág. 54); luego la intersección de las superficies (1) y (2) satisface á la ecuación diferencial de las líneas de curvatura.

Corolario. *La primera serie de líneas de curvatura de un elipsoide se forma por las intersecciones con los hiperboloides homofocales de una hoja y la segunda serie por las de los hiperboloides de dos hojas.*

TEOREMA DE DUPIN. *Si tres familias superficies se cortan ortogonalmente, las intersecciones son líneas de curvatura.*

Sean las tres superficies

$$F(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z) = 0, \quad \Psi(x, y, z) = 0$$

que se cortan ortogonalmente, y sea $P(x, y, z)$ un punto común. La condición de ortogonalidad es

$$\left.\begin{array}{c} F_1 \Phi_1 + F_2 \Phi_2 + F_3 \Phi_3 = 0, \quad \Phi_1 \Psi_1 + \Phi_2 \Psi_2 + \Phi_3 \Psi_3 = 0, \\ \Psi_1 F_1 + \Psi_2 F_2 + \Psi_3 F_3 = 0. \end{array}\right\} \quad (1)$$

En este caso, en cada dos superficies, por ejemplo, $F = 0$ y $\Phi = 0$, las intersecciones son perpendiculares entre sí, y la primera de estas ecuaciones se verifica para el punto $P'(x + dx, y + dy, z + dz)$. La tangente de esta intersección coincide con la normal de la superficie $\Psi = 0$, es decir, que

$$dx : dy : dz = \Psi_1 : \Psi_2 : \Psi_3. \quad (2)$$

Sustituyendo dx, dy, dz por $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ en dicha primera ecuación, tendremos

$$\begin{aligned} &[\Phi_1 (F_{11} \Psi_1 + F_{12} \Psi_2 + F_{13} \Psi_3) + \Phi_2 (F_{21} \Psi_1 + F_{22} \Psi_2 + F_{23} \Psi_3) \\ &+ \Phi_3 (F_{31} \Psi_1 + F_{32} \Psi_2 + F_{33} \Psi_3)] + [F_1 (\Phi_{11} \Phi_1 + \Phi_{12} \Psi_2 + \Phi_{13} \Psi_3) \\ &+ F_2 (\Phi_{21} \Psi_1 + \Phi_{22} \Psi_2 + \Phi_{23} \Psi_3) + F_3 (\Phi_{31} \Psi_1 + \Phi_{32} \Psi_2 + \Phi_{33} \Psi_3)] = 0. \end{aligned}$$

Expresando, para abreviar, por $(\Phi \Psi)$ el primer paréntesis cuadrado, tenemos que $(\Phi \Psi) = (\Psi \Phi)$. Y procediendo con las ecuaciones segunda y tercera como con la primera, resultará

$$(\Phi \Psi) + (F \Psi) = 0, \quad (\Psi F) + (\Phi F) = 0, \quad (F \Phi) + (\Psi \Phi) = 0$$

y además

$$(F \Phi) = (\Phi F), \quad (\Phi \Psi) = (\Psi \Phi), \quad (\Psi F) = (F \Psi); \quad (3)$$

de lo que resulta

$$(F \Phi) = (\Phi \Psi) = (\Psi F) = 0. \quad (4)$$

De las dos primeras ecuaciones y $(\Phi\Psi) = 0$, resulta eliminando, Φ_1, Φ_2, Φ_3,

$$\begin{vmatrix} \Psi_1 & F_1 & (F_{11}\Psi_1 + F_{12}\Psi_2 + F_{13}\Psi_3) \\ \Psi_2 & F_2 & (F_{21}\Psi_1 + F_{22}\Psi_2 + F_{23}\Psi_3) \\ \Psi_3 & F_3 & (F_{31}\Psi_1 + F_{32}\Psi_2 + F_{33}\Psi_3) \end{vmatrix} = 0,$$

y en virtud de (2)

$$\begin{vmatrix} dx & F_1 & dF_1 \\ dy & F_2 & dF_2 \\ dz & F_3 & dF_3 \end{vmatrix} = 0$$

que es la ecuación de las líneas de curvatura de la superficie $F = 0$. Por consiguiente en el punto P, la dirección de la curva de intersección de $F = 0$ y $\Phi = 0$ coincide con una dirección de curvatura principal de la superficie $F = 0$.

Corolario. *Si la intersección de dos superficies* $F = 0$ *y* $\Phi = 0$ *es, en cada una, línea de curvatura, será constante el ángulo de aquéllas á lo largo de ésta y* recíprocamente: *Si se cortan siempre dos superficies según ángulo constante, y su intersección es línea de curvatura de la una, también lo será de la otra.*

Podemos observar que, en el plano y en la esfera, toda línea es línea de curvatura porque forman las normales á lo largo de cada curva una superficie desarrollable, y tendremos como caso especial el

Teorema de Joachimsthal: *Si un plano ó una esfera cortan á una superficie según un ángulo constante, la intersección es una línea de curvatura* y recíprocamente: *Si una línea de curvatura es plana ó esférica, su plano ó su esfera corta á la superficie según* un ángulo constante.

108. Torsión geodésica. Siendo

$$X = x + \alpha\lambda, \quad Y = y + \beta\lambda, \quad Z = z + \gamma\lambda$$

las ecuaciones de la normal á una superficie en el punto M (x, y, z), las ecuaciones de la normal infinitamente próxima son

$$dx + \alpha d\lambda + \lambda d\alpha = 0, \; dy + \beta d\lambda + \lambda d\beta = 0, \; dz + \gamma d\lambda + \lambda d\gamma = 0,$$

Eliminando X, Y, Z, λ y $d\lambda$, se obtiene la ecuación de las líneas de curvatura

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \alpha & \beta & \gamma \\ d\alpha & d\beta & d\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

que podemos escribir de la manera siguiente:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dx}{ds} & \dfrac{dy}{ds} & \dfrac{dz}{ds} \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha + d\alpha & \beta + d\beta & \gamma + d\gamma \end{vmatrix} ds \quad \text{ó} \quad \Sigma(\alpha + d\alpha)\left(\beta \frac{dz}{ds} - \gamma \frac{dy}{ds}\right) ds.$$

Pero $\beta \dfrac{dz}{ds} - \gamma \dfrac{dy}{ds}$, $\gamma \dfrac{dx}{ds} - \alpha \dfrac{dz}{ds}$, $\alpha \dfrac{dy}{ds} - \beta \dfrac{dx}{ds}$

son los cosenos directores de la perpendicular á las direcciones α, β, γ y dx, dy, dz. Son pues los cosenos directores de una tangente á la superficie perpendicular á la tangente dx, dy, dz. El primer miembro de la ecuación es pues, salvo el factor $\dfrac{1}{ds}$, el coseno del ángulo que forma la normal en M' con una tangente á la superficie, perpendicular á la dirección dx, dy, dz. Llamemos $d\psi$ al complemento de este ángulo, el cual será el ángulo que forma el plano normal en M á la curva (dx, dy, dz) con la normal á la superficie en el punto próximo M'.

La relación $\dfrac{d\psi}{ds}$ se llama *torsión geodésica* de la curva. La ecuación de las líneas de curvatura puede por tanto escribirse $\dfrac{d\psi}{ds} = 0$. La *torsión geodésica de las líneas de curvatura es nula.*

La torsión geodésica de una curva, relativamente á una superficie en la que está trazada, es el límite de la relación $\dfrac{d\psi}{ds}$ expresando ds el elemento de arco de esta curva y $d\psi$ el ángulo que forma la normal á la superficie en M con el plano normal á ésta en el punto infinitamente próximo, tangencialmente á la curva.

109. Teorema de Lancret. Sea una curva que pasa por el punto M (x, y, z) de una superficie en la que está trazada; y sean $a, b, c; a', b', c'; a'', b'' c''$ los cosenos directores de la tangente, normal principal y binormal á la curva, $d\varepsilon$ y $d\tau$ los ángulos de contingencia y de torsión, θ el ángulo que el plano osculador de la curva forma con el plano tangente á la superficie, α, β, γ los cosenos directores de la normal á ésta. Tendremos

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0, \quad a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = \operatorname{sen}\theta, \quad a''\alpha + b''\beta + c''\gamma = \cos\theta,$$

ó resolviendo con respecto á α, β, γ,

$$\alpha = a'\operatorname{sen}\theta + a''\cos\theta, \quad \beta = b'\operatorname{sen}\theta + b''\cos\theta, \quad \gamma = c'\operatorname{sen}\theta + c''\cos\theta, \quad (1)$$

ó diferenciando y aplicando las fórmulas de Serret-Frenet,

$$ds = (a'\cos\theta - a''\operatorname{sen}\theta)\, d\theta - (a''\, d\tau + a\, d\varepsilon)\operatorname{sen}\theta + a'\, d\tau\cos\theta,$$

. . . .

que puede escribirse

$$d\alpha = a'\cos\theta\,(d\theta + d\tau) - a''\operatorname{sen}\theta\,(d\theta + d\tau) - a\operatorname{sen}\theta\, d\varepsilon.$$

. . . .

Formemos la cantidad $bd\gamma - cd\beta$, y tendremos

$$bd\gamma - cd\beta = (a''\cos\theta + a'\operatorname{sen}\theta)\,(d\theta + d\tau),$$

es decir, en virtud de (1)

$$bd\gamma - cd\beta = \alpha\,(d\theta + d\tau), \qquad cd\alpha - ad\gamma = \beta\,(d\theta + d\tau),$$
$$ad\beta - bd\alpha = \gamma\,(d\theta + d\tau).$$

Multipliquemos la primera ecuación por α, la segunda por β y la tercera por γ, y sumemos. En el primer miembro tendremos el determinante que hemos llamado $d\psi$, y que dividido por ds, da la torsión geodésica. Así,

$$d\psi = d\theta + d\tau, \qquad \text{ó} \qquad \frac{d\psi}{ds} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\tau}{ds},$$

es decir, que: *Si una curva es línea de curvatura de una superficie, se tiene que* $d\theta + d\tau = 0$, enunciado del teorema de Lancret.

110. Variación de la torsión geodésica. Sea la fórmula conocida

$$d\psi = \frac{1}{ds}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \alpha & \beta & \gamma \\ d\alpha & d\beta & d\gamma \end{vmatrix}.$$

Si se toman por ejes la normal á la superficie y las tangentes á las líneas de curvatura, se tendrá

$$d\psi = \frac{1}{ds}\begin{vmatrix} dx & dy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ d\alpha & d\beta & d\gamma \end{vmatrix} \quad \text{ó} \quad -\frac{d\psi}{ds} = \frac{dx}{ds}\frac{d\beta}{ds} - \frac{d\alpha}{ds}\frac{dy}{ds}. \ (1)$$

Pero, en virtud de ser,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d}{ds}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{dp\,(1+q^2) - pq\,dq}{ds\,(1+p^2+q^2)^{3:2}},$$

y del sistema de ejes adoptados,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{dp}{ds} = r\frac{dx}{ds}, \quad \frac{d\beta}{ds} = t\frac{dy}{ds}.$$

La fórmula (1) se reducirá á

$$\frac{d\psi}{ds} = (r-t)\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}.$$

Sean R y R′ los radios de curvatura principales de la superficie y φ el ángulo que forma el elemento ds con la sección principal de radio R. Tendremos

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)\text{sen } 2\varphi;$$

y si se hace $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) = a$ será $\frac{d\psi}{ds} = a \text{ sen } 2\varphi$.

111. Consecuencias del teorema de Lancret. Teorema. *La diferencial del ángulo, según el cual se cortan dos superficies, es* *igual, prescindiendo del factor* ds, *á la diferencia de las torsiones geodésicas de su intersección.*

En efecto, si S y S′ son las dos superficies y C la curva de su intersección, ds el elemento de C, $\frac{d\tau}{ds}$ su torsión en el punto M, θ el ángulo que forma su plano osculador con el plano tangente á S, θ' el ángulo que forma dicho plano osculador con el plano tangente á S′ en M y $\frac{d\psi}{ds}$, $\frac{d\psi'}{ds}$ las torsiones geodésicas, según que se considera á C como trazada en S ó en S′, el teorema de Lancret conduce á las ecuaciones

$$d\psi = d\theta + d\tau, \quad d\psi' = d\theta' + d\tau, \quad \text{y} \quad d(\psi - \psi') = d(\theta - \theta').$$

Pero $\theta - \theta'$ es el ángulo V, según el que se cortan las superficies en M; por consiguiente

$$d\psi - d\psi' = dV. \tag{1}$$

Corolario I. *Si dos superficies se cortan según una línea de curvatura de cada una de ellas, se cortan según un ángulo constante,* pues en este caso $d\psi$ y $d\psi'$ son nulas; luego $dV = 0$ y V es constante.

Corolario II. *Si dos superficies se cortan según un ángulo constante* V, *y si la intersección es una línea de curvatura de una de ellas, será una línea de curvatura de la otra,* pues si en la fórmula (1) se hace $V = \text{const}$ ó $dV = 0$ y $d\psi = 0$, será $d\psi' = 0$.

Corolario III. *Si tres familias de superficies se cortan siempre ortogonalmente, se cortan según sus líneas de curvatura.*

Sea M el punto de intersección de tres superficies de familias diferentes y a, a' las torsiones geodésicas de la intersección de s y s' respecto á las superficies s y s'; b y b' las torsiones geodésicas de la intersección de s' y s'' relativas á las superficies s' y s''; c'' y c las torsiones geodésicas de la intersección de s'' y s respecto á estas superficies. Se tendrá

$$a - a' = 0, \quad b' - b'' = 0, \quad c'' - c = 0.$$

Pero, siendo ortogonales las intersecciones que consideramos, se tendrá en virtud del teorema anterior sobre la variación de la torsión geodésica,

$$a + c = 0, \quad a' + b' = 0, \quad b'' + c'' = 0;$$

luego $a = a' = b' = b'' = c'' = c = 0$. Así pues, s, s', s'' se cortan según sus líneas de curvatura.

COROLARIO IV. *Si una línea de curvatura de una superficie* S *es plana ó esférica, el plano ó la esfera que la contiene corta á aquélla según un ángulo constante*, porque toda línea trazada en un plano ó una esfera es línea de curvatura en este plano ó en esta esfera.

COROLARIO V. *Si una línea de curvatura* C *de una superficie* S *es plana, la arista de retroceso de la normalía desarrollable relativa á esta línea de curvatura es una hélice.*

En efecto, sean $a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$ los cosenos directores de las direcciones principales de la curva C; $a_1, b_1, c_1; a'_1, b'_1, c'_1; a''_1, b''_1, c''_1$ los cosenos directores de la arista de retroceso D de la normalía desarrollable de que se trata. La línea D es una evoluta de C; de manera que, si se llama ds, $\frac{1}{T_1}$, $\frac{1}{R_2}$ á las cantidades análogas relativas á D, se tendrá (pág. 109)

$$\left.\begin{array}{lll} dR = ds_1, & a = a'_1, & b = b'_1, \ c = c'_1 \\ \Sigma aa' = 0, & \Sigma aa'_1 = 1, & \Sigma a'a''_1 = 0, \\ \Sigma a'_1 a_1 = \cos\theta, & \Sigma a'a'_1 = 0, & \Sigma a'a''_1 = \operatorname{sen}\theta, \\ \Sigma a'' a_1 = \operatorname{sen}\theta, & \Sigma a''a'_1 = 0, & \Sigma a''a'_1 = \cos\theta, \end{array}\right\} \quad (2)$$

siendo θ el ángulo que el plano osculador de C forma con el plano tangente á la superficie. Diferenciando $\Sigma aa''_1 = 0$, tendremos por las fórmulas de Serret

$$\Sigma \frac{a'\,ds}{R} a''_1 + \Sigma \frac{a_1'\,ds_1}{T_1} a = 0,$$

ó en virtud de (2)

$$\frac{\operatorname{sen}\theta\,ds}{R} + \frac{ds_1}{T_1} = 0. \quad (3)$$

Diferenciando $\Sigma\, aa_1 = 0$, se tendrá igualmente

$$\Sigma \frac{a' ds}{R} a_1 + \Sigma a \frac{ds}{R_1} a'_1 = 0$$

ó en virtud de (2) $$\frac{\cos\theta\, ds}{R} + \frac{ds_1}{R_1} = 0. \qquad (4)$$

De (3) y (4) resulta $$\operatorname{tg}\theta = \frac{R_1}{T_1};$$

el ángulo θ es constante para una línea de curvatura. Se ve pues, que la relación de la curvatura á la torsión en cada punto de la curva D es constante. Esta curva es por lo tanto una hélice trazada en un cilindro.

112. Envolventes de esferas. Teorema I. *Las líneas de curvatura de toda envolvente de esferas son sus características y sus trayectorias ortogonales.*

En efecto, la característica de toda envolvente de esferas es una circunferencia, que es línea de curvatura de la esfera envuelta; y puesto que esta esfera envuelta encuentra á la envolvente según un ángulo constante (nulo), la característica es también una línea de curvatura de la superficie. El radio de la esfera envuelta es evidentemente un radio de curvatura principal de la envolvente; porque el radio de curvatura de la característica debe ser, según el teorema de Meusnier, la proyección del radio de curvatura principal sobre el plano de la característica. Este radio de curvatura principal es por tanto, el radio de la esfera envuelta: Recíprocamente:

Teorema II. *Si un sistema de líneas de curvatura de una superficie se compone de circunferencias, esta superficie es la envolvente de una familia de esferas.*

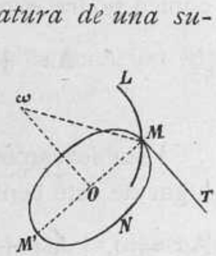


Figura 66

En efecto, sea MNM′ una línea de curvatura circular que pasa por un punto M, y MH otra línea de curvatura que también pasa por M. Sea Mω la normal á la superficie. Si se levanta en O una perpendicular Oω al plano del círculo MNM′, encontrará en ω á la normal á la superficie en M, que será, en virtud del teorema de Meusnier, el centro de curvatura de la sección normal, que pasa según la tangente MT á la línea de curvatura MNM' en M. Si desde ω como centro con el radio ωM, se describe una esfera, contendrá al círculo MNM', que será una línea de curvatura de la esfera; pero ésta será tangente á la superficie según esta línea de curvatura, en M. Y, puesto que debe cortarla según un ángulo constante, debe también ser tangente á ella á lo largo de la circunferencia MNM'. La superficie en cuestión es una envolvente de esferas.

Corolario I. *El lugar de los centros de las esferas envueltas es también el lugar de los centros de una de las curvaturas principales, que se reduce entonces, en este caso particular, á una recta.*

Corolario II. *En las envolventes de esferas, las normales encuentran á una recta fija.*

113. Cíclida de Dupin. Problema. *Obtener el lugar de los vértices de los conos de revolución que pasan por una cónica dada.*

Supongamos dada la cónica $Ax^2 + A'y^2 = 1$ en el plano de las xy.

La ecuación más general de la superficie de segundo grado que pasa por esta cónica será

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2C''z = 1;$$

si es de revolución, será necesario que B' ó B se anulen. Sea $B' = 0$. Entonces será necesario que se tenga $B^2 = (A - A')(A - A'')$; y la ecuación de las superficies de revolución que pasan por la cónica podrá expresarse así

$$\left.\begin{aligned} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2C''z = 1, \\ B^2 = (A - A')(A - A''). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Establezcamos que el centro se halla en la esfera y hallemos el lugar de este centro. Será necesario hacer

$$Ax = 0, \quad A'y + Bz = 0, \quad By + A''z + C'' = 0, \quad C''z - 1 = 0.$$

La primera de éstas manifiesta que el lugar es plano y que se halla contenido en el plano de yz. La eliminación de B, A'', C'' entre la segunda ecuación (1) y las tres últimas, da

$$A'^2y^2 + (A' - A)(Az^2 - A'y^2 + 1) = 0,$$

$$AA'y^2 + A(A' - A)z^2 + (A' - A) = 0.$$

El lugar se compone pues, de una cónica colocada en el plano de las yz, y también de otra cónica colocada en el plano de las xz. Las ecuaciones de la cónica propuesta y las de las que constituyen el lugar pueden escribirse así

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{(A)}, \quad \frac{y^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1, \text{(B)}, \quad \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1; \text{(C)}$$

el foco de cada cónica es el vértice de otra cónica, y el lugar de los vértices de los conos de revolución que pasan por la cónica (B) es la cónica (A). Si una de ellas es una elipse, la otra es una hipérbola. Estas dos cónicas se llaman *focales*, la una respecto de la otra.

Pues si buscamos el lugar de los puntos cuyas distancias á un punto de (A) son funciones racionales de las coordenadas de este punto, será necesario que, llamando α, β, γ las coordenadas de estos puntos ó *focos*, se tenga

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + \gamma^2 = (lx + my + n)^2,$$

expresando l, m, n números por determinar. Y por identificación con (A), tendremos

$$(1 - l^2)\,a^2 = (1 - m^2)\,b^2 = n^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2,$$

$$lm = 0, \quad \alpha + ln = 0, \quad \beta + mn = 0.$$

Limitándonos á las soluciones reales, tenemos la ecuación (B). La ecuación (C) sería otra solución. Y se obtiene también

$$lx + my + n = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}\,x + \sqrt{b^2 + \alpha^2 + \gamma^2}.$$

Se ve que la suma de las distancias de un punto de la hipérbola focal á dos puntos diametralmente opuestos de la elipse, es constante. Los puntos de la focal son pues verdaderos focos en el espacio. Se ve también que la suma de las distancias de un punto de la elipse á dos puntos fijos de la hipérbola es constante.

Es evidente que el cono de revolución cuyo vértice es un punto de (C) y cuya base es la cónica (A), tiene su eje dirigido según la tangente á la hipérbola. En efecto, esta tangente divide en dos partes iguales al ángulo de las generatrices del cono que se hallan en el plano de la hipérbola y terminan en el vértice de la elipse, que es el foco de la hipérbola.

DEFINICIÓN. La *cíclida* estudiada por Dupin es una superficie cuyas líneas de curvatura son todas circulares.

Según lo que se ha dicho, las normales encuentran á dos curvas fijas C y C′. En efecto, la cíclida será de dos maneras una envolvente de esferas, y la normal encontrará á los lugares de los centros de estas esferas. La normal á la cíclida que se apoya en una línea de curvatura circular, pasa por un punto fijo de la curva C y sigue á la curva C′. Esta curva se halla pues en un cono de segundo grado, cuyas bases son líneas de curvatura del mismo sistema. Esta curva C′ es pues una cónica. En efecto, por una curva de cuarto grado, propiamente dicha, no se puede hacer pasar una infinidad de superficies de revolución, y lo mismo sucede á la curva C.

La curva C′ es el lugar de los vértices de los conos de revolución que pasan por C; luego C y C′ son *focales* la una de la otra.

Busquemos la traza de la superficie sobre los planos de las curvas C y C′. Sean T esta traza, M uno de sus puntos. La normal en M á la superficie debe encontrar á C y C′. Luego encuentra á una de las curvas, y pasa por el vértice de la otra, que es un punto fijo; luego T se compone de dos círculos, cuyos centros se hallan á la vez en los puntos que son simultáneamente el foco de una de las curvas C y el vértice de la otra.

Pero debe tenerse presente que la cíclida es una envolvente de esferas. Los planos de las curvas C y C′ deben ser planos de simetría. Puede considerarse á la esfera envolvente como si tuviese su centro en un punto ω de C, su radio es la línea ωM que une ω con un punto de la superficie, que puede suponerse en el plano de la hipérbola y que podrá ser la hipérbola. Es por consiguiente, tangente á dos esferas cuyos círculos máximos son las trazas de la superficie en el plano de la hipérbola. Pero la diferencia de las distancias del punto a á dos puntos diametralmente opuestos de la elipse es constante; luego la esfera envolvente es tangente á una infinidad de esferas fijas. Luego:

La cíclida puede considerarse como la envolvente de una serie de esferas tangentes á tres esferas fijas.

Este teorema de Dupin constituye la definición de la cíclida.

§ 5.° Líneas asintóticas

114. Definición. *Se llaman líneas asintóticas* de una superficie con curvatura opuesta, las que en cada uno de sus puntos son tangentes á una de las asíntotas de la indicatriz. Existen pues, dos series de líneas asintóticas, de las cuales una, en el caso de las superficies alabeadas, es el conjunto de las generatrices rectilíneas, porque para éstas el radio de curvatura es infinito.

Ya al considerar las asintóticas como pertenecientes á familias de curvas conjugadas, hemos establecido una de sus más principales propiedades. Ahora observaremos que por cortar las asíntotas de la indicatriz á la superficie en tres puntos confundidos, tienen con ésta un contacto de segundo orden; luego

Teorema. *Las tangentes á las líneas asintóticas tienen un contacto de segundo orden con la superficie.*

Observaciones: 1.ª Resulta de la definición de las asintóticas que, si se proyectan sobre un plano que pasa por una de sus tangentes normal á la superficie, serán tangentes en proyección, á su tangente en un punto de inflexión.

2.ª La fórmula de Lancret $d\psi = d\theta + d\tau$ se reduce, para una línea asintótica, á $d\psi = d\tau$, porque el ángulo θ del plano osculador y del plano tangente á la superficie es siempre nulo. Así pues:

La torsión geodésica de una línea asintótica es igual á su torsión propiamente dicha.

Ejemplo 1.° Sea la superficie reglada $z = k \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x}$

llamada *helicoide alabeado de plano director*, que se engendra de la manera siguiente:

Consideremos un cilindro de revolución alrededor de Oz y en este cilindro una hélice cuyo paso es $h = 2\pi k$, que parte del punto A de Ox (fig. 67).

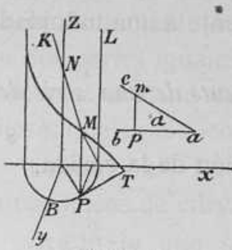


Figura 67

Supongamos una recta móvil NM que se apoya en el eje Oz, sobre la hélice y permaneciendo paralela al plano de las xy. Esta recta describe el helicoide de que tratamos. Y se tendrá

$$p = -\frac{ky}{x^2+y^2}, \quad q = \frac{kx}{x^2+y^2},$$

$$r = \frac{2kxy}{(x^2+y^2)^2}, \quad s = \frac{k(y^2-x^2)}{(x^2-y^2)^2}, \quad t = -\frac{2kxy}{(x^2+y^2)^2}.$$

La ecuación diferencial

$$rdx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0$$

de las líneas asintóticas es, en este caso,

$$xydx^2 + (y^2 - x^2)\,dx\,dy - xydy^2 = 0.$$

Resolviéndola con relación á $\frac{dy}{dx}$, se obtienen los dos valores

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

que dan las proyecciones horizontales de los dos sistemas de líneas asintóticas. El primer valor de $\frac{dy}{dx}$ conduce á una ecuación $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$, ó integrando

$$\log y = \log x + \mathrm{C} \qquad y = \mathrm{C}x.$$

Esta ecuación representa rectas que pasan por el origen. Son las proyecciones del primer sistema de líneas asintóticas, formado por las generatrices rectilíneas de la superficie, NM.

El segundo valor de $\frac{dy}{dx}$ conduce á una ecuación

$$x\,dx + y\,dy = 0 \qquad \text{ó} \qquad x^2 + y^2 = a^2,$$

siendo a una constante arbitraria.

Las líneas asintóticas del segundo sistema se proyectan horizontalmente según circunferencias cuyo centro es O. En la superficie, son hélices, cuyo paso es $h = 2\pi k$, trazadas en cilindros de revolución alrededor de Oz. Una de estas líneas es la hélice directriz. Y se ve que los dos sistemas de líneas asintóticas se cortan ortogonalmente. En cada punto, las direcciones asintóticas son rectangulares. La indicatriz está formada por dos hipérbolas equiláteras conjugadas.

2.° *Hiperboloide de una hoja*. Sea

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 0.$$

Tenemos $\qquad p = -\frac{C^2}{A^2}\frac{x}{z}, \qquad q = -\frac{C^2}{B^2}\frac{y}{z}$

$$r = -\frac{1}{z}\left(\frac{C^2}{A^2} + p^2\right), \quad s = -\frac{pq}{z}, \quad t = -\frac{1}{z}\left(\frac{C^2}{B^2} + q^2\right).$$

Sustituyendo en la ecuación de las líneas asintóticas (pág. 138) resulta

$$(x^2 - A^2)\frac{dy^2}{dx^2} - 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 - B^2 = 0, \tag{1}$$

y diferenciando,

$$\left[(x - A^2)\frac{dy}{dx} - xy\right]\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

La integral general es $\frac{dy}{dx} =$ const.; y sustituyendo en (1) resulta

$$(kx - y)^2 = A^2k^2 + B^2, \tag{2}$$

que representa dos rectas, que son las generatrices rectilíneas de la superficie.

La ecuación (2) admite como integral singular

$$(x^2 - A^2)\frac{dy}{dx} = xy.$$

Si se sustituye el valor de $\frac{dy}{dx}$ en la ecuación (2) resulta

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

que comparada con la del hiperboloide conduce á $z = 0$; luego la solución singular da una curva á la que se proyectan tangencialmente las generatrices rectilíneas sobre el plano xOy.

115. Líneas asintóticas de una superficie de revolución. Suponiendo $z = f(x^2 + y^2) = f(u^2)$, $x = u \cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$. Si en la ecuación diferencial de las líneas asintóticas se sustituyen los valores de dx, dy

$$dx = \cos\theta\, du - u \operatorname{sen}\theta\, d\theta, \quad dy = \operatorname{sen}\theta\, du + u\cos\theta\, du,$$

tendremos

$$(r\cos^2\theta + 2s\operatorname{sen}\theta\cos\theta + t\operatorname{sen}^2\theta)\, du^2$$
$$+ 2\left[(t - r)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + s(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)\right] u\, du\, d\theta$$
$$+ r\operatorname{sen}^2\theta - 2s\operatorname{sen}\theta\cos\theta + t\cos^2\theta)\, u^2\, d\theta^2 = 0.$$

Sustituyendo los valores obtenidos de r, s, t en función u y de θ, resulta para la ecuación de las líneas asintóticas

$$\pm\, d\theta = \sqrt{-\left[1 + 2u^2\frac{f'(u^2)}{f''(u^2)}\right]}\,\frac{du}{u}$$

ó, haciendo $u^2 = v$,

$$\pm\, 2d\theta = \sqrt{-\left[1 + 2v\frac{f''(v)}{f'(v)}\right]}\,\frac{dv}{v}.$$

Aplicaciones: 1.ª *Hiperboloide de revolución de una hoja.*

$$\frac{u^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Se tiene

$$f(u^2) = \frac{b}{a}\sqrt{u^2 - a^2}, \qquad f'(u^2) = \frac{b}{2a\sqrt{u^2 - a^2}}$$

$$f''(u^2) = -\frac{b}{4a(u^2 - a^2)^{3:2}}; \text{ luego } d\theta = \frac{a}{\sqrt{u^2 - a^2}}\frac{du}{u};$$

de donde $\quad u = \dfrac{a}{\cos(\theta - \alpha)}, \quad$ (expresando α una constante)

ecuación de una tangente á la línea de estricción.

2.ª *Superficie engendrada por la tractriz*

$$z = -\sqrt{a^2 - u^2} + a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}.$$

Tenemos haciendo $u^2 = v$,

$$f(v) = -\sqrt{a^2 - v} + a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - v}}{\sqrt{v}}$$

$$f'(v) = -\frac{\sqrt{a^2 - v}}{2v}, \quad f''(v) = \frac{2a^2 - v}{4v^2\sqrt{a^2 - v}}$$

$$\pm 2d\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 - v}}\frac{dv}{v} \quad \text{ó} \quad d\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 - u^2}}\frac{du}{u}.$$

Haciendo $u = a \operatorname{sen} \varphi$, se obtiene $d\theta = \dfrac{d\varphi}{\operatorname{sen} \theta}$,

ó, expresando A una constante,

$$\frac{\operatorname{sen} \varphi}{1 + \cos \varphi} = \mathrm{A}e^{\theta}, \qquad u = \frac{\mathrm{A}a}{\mathrm{A}^2 e^{\theta} + e^{-\theta}}.$$

(Resal. *Exposition de la théorie des susfaces*, pág. 62).

§ 6.º Líneas geodésicas

116. Definiciones. Según se expuso en el tomo IV (pág. 425) se llaman *líneas geodésicas* al más corto camino entre dos puntos de una superficie. Pero también se las suele definir diciendo que *son*

aquéllas cuya normal principal coincide con la normal á la superficie, ó *cuyo plano osculador es normal á la superficie*, y que se demuestra como propiedad principal en la pág. 174.

Podemos demostrar por consideraciones elementales que el arco de una línea geodésica es el mínimo entre dos puntos de la superficie basándonos en esta definición. En efecto, sea C el centro de curvatura de una sección hecha en la superficie por un plano que pasa por la cuerda $ab = k$, $\rho = a\mathrm{C}$, $d\varepsilon = \angle \mathrm{C}b$, arc $ab = d\sigma = \rho d\varepsilon$.

Se tiene $$k = 2\rho \operatorname{sen}\frac{d\varepsilon}{2} = \rho d\varepsilon\left(1 - \frac{d\varepsilon^2}{12}\right),$$

ó, sustituyendo $d\varepsilon^2$ por $\frac{k^2}{\rho^2}$, $$d\sigma = c\left(1 + \frac{k^2}{12\rho^2}\right).$$

Y se ve que $d\sigma$ será mínimo cuando ρ sea un máximo, ó según el teorema de Meusnier, cuando el plano $a\mathrm{C}b$ sea normal á la superficie. Un hilo tendido entre A y B, en una superficie, trazará una línea geodésica.

Esto sentado, las ecuaciones de las líneas geodésicas, tomando el arco por variable, serán

$$\frac{d^2x}{p} = \frac{d^2y}{q} = -\frac{d^2z}{1},$$

ó bien, llamando A, B, C á los coeficientes del plano osculador,

$$\mathrm{A}p + \mathrm{B}q - \mathrm{C} = 0.$$

Supongamos que la ecuación de la superficie sea $f(x, y, z) = 0$, la ecuación de las líneas geodésicas será

$$\mathrm{A}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{B}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathrm{C}\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad \text{ó} \quad \mathrm{A}f_1 + \mathrm{B}f_2 + \mathrm{C}f_3 = 0.$$

Y haciendo $$\mathrm{N} = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2},$$ se tendrá

$$\left(\frac{f_1}{\mathrm{N}}\right)^2 + \left(\frac{f_2}{\mathrm{N}}\right)^2 + \left(\frac{f_3}{\mathrm{N}}\right)^2 = 1,$$

ó, diferenciando,

$$f_1 d\left(\frac{f_1}{N}\right) + f_2 d\left(\frac{f_2}{N}\right) + f_3 d\left(\frac{f_3}{N}\right) = 0.$$

Sustituyamos f_1, f_2, f_3 por las cantidades d^2x, d^2y, d^2z que les son proporcionales, cuando se toma s por variable independiente, ó mejor, por las expresiones $d^2xds - d^2sdx$, ... relativas á una variable cualquiera; y tendremos

$$\Sigma\,(d^2xds - d^2sdx)\, d\left(\frac{f_1}{N}\right) = 0$$

ó $$\Sigma\,(d^2xds - d^2sdx)\,(Ndf_1 - f_1dN) = 0,$$

es decir,

$$Nds\,\Sigma df_1 d^2x - Nd^2s\,\Sigma df_1 dx - dN ds\,\Sigma f_1 d^2x + dNd^2s\,\Sigma f_1 dx = 0;$$

y, en virtud de las fórmulas

$$\Sigma f_1\, dx = 0, \quad \Sigma\,(df_1 dx + f_1 d^2x) = 0,$$

la anterior se reduce á

$$Nds\,\Sigma df_1 d^2x - \Sigma df_1 dx\,(Nd^2s - dN ds) = 0.$$

Esta ecuación puede escribirse de la manera siguiente,

$$\frac{\Sigma\, df_1 d^2x}{\Sigma\, df_1 dx} - \frac{d^2s}{ds} + \frac{dN}{N} = 1,$$

fórmula dada por Joachimstahl para las líneas geodésicas.

Ejemplo. Sea la superficie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

se tiene

$$f_1 = \frac{2x}{a^2}, \quad df_1 d^2x = \frac{2\,dxd^2x}{a^2}, \quad df_1 dx = \frac{2\,dx^2}{a^2};$$

luego $$\Sigma\, df_1 d^2x = \frac{1}{2}\, d\,\Sigma df_1 dx;$$

y la ecuación de las lineas geodésicas será

$$\frac{1}{2}\frac{d\,\Sigma df_1 dx}{\Sigma df_1 dx} - \frac{d^2 s}{ds} + \frac{dN}{N} = 0$$

ó $$\frac{1}{2}\log \Sigma\, df_1 dx - \log ds + \log N = \text{const.},$$

que es una integral primera.

Propiedades. Teorema I. *La normal principal de una geodésica es normal á la superficie en que se halla ésta trazada*; ó también: *En todo punto de una geodésica, el plano osculador correspondiente pasa por la normal á la superficie.*

Sean A, P, B tres puntos consecutivos de una línea geodésica (fig. 68) y AP = BP. De la definición de esta línea resulta que de todos los triángulos isósceles cuya base es AB, y cuyo vértice está en la superficie, el de menor altura es el APB. Estos triángulos tienen sus vértices en una curva CPE de la superficie que es la intersección del plano perpendicular á AB en su punto medio y la superficie. PD es la altura del triángulo isósceles APB, siendo P el punto de la curva CE, cuya distancia á D es un mínimo, es decir, PD es perpendicular á la tangente á CPE y PD pasa por el centro del círculo circunscrito al triángulo, siendo en el límite la normal principal de la geodésica APB en P, y es perpendicular á su tangente en dicho punto. La normal principal PD es pues perpendicular á dos tangentes, y por consiguiente normal á la superficie en P. El plano osculador APB de la geodésica contiene pues á la normal PD.

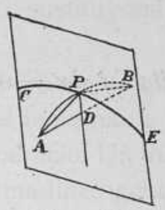


Figura 68

Teorema II. *La proyección de una línea geodésica sobre el plano tangente presenta una inflexión en el punto de contacto*, porque el plano tangente pasa por la tangente perpendicularmente á la normal principal.

Teorema III. *Dada una curva cualquiera* MS (fig. 69) *trazada en una superficie, se trazan líneas geodésicas* MN, M′N′, ... *normales á* MS, *y se toma* MN = M′N′ = ... *El lugar de los puntos* N, N′,..... *será normal á las líneas* MN, M′N′,.....

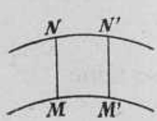


Figura 69

Sean r el arco de geodésica MN, s el arco de curva NN', V el ángulo de NN' con NM. Se tendrá

$$\cos V = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial s}.$$

Supongamos que se haga variar las longitudes tales como MN. Se tendrá:

$$\frac{\partial \cos V}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial^2 x}{\partial r\,\partial s} + \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial r^2} + \dots$$

Pero se tiene que

$$\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial^2 x}{\partial r\,\partial s} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial^2 y}{\partial r\,\partial s} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial s} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial r^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial . 1}{\partial s} = 0$$

luego

$$\frac{\partial \cos V}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}.$$

Sustituyendo $\frac{\partial^2 x}{\partial r^2}, \dots\dots$ por sus valores deducidos de las ecuaciones (R es el radio de curvatura de la geodésica)

$$\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} : p = \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} : q = -\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{1}{R\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

que expresan, que la normal principal á la línea geodésica es la normal á la superficie, se tiene

$$\frac{\partial \cos V}{\partial r} = \left(\frac{\partial x}{\partial s}p + \frac{\partial y}{\partial s}q - \frac{\partial z}{\partial s}\right)\frac{1}{R\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

La dirección p, q, -1 es normal á la dirección

$$\frac{\partial x}{\partial s}, \quad \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial s}; \qquad \text{luego} \qquad \frac{\partial \cos V}{\partial r} = 0.$$

Así el ángulo V no depende de r. Se puede pues, tomar $r = 0$. Entonces $\cos V = 0$; luego $\cos V$ es siempre nulo.

Observación. Si por un punto fijo O se imagina una serie de geodésicas de igual longitud OM, se obtendrá una curva, que se llama *círculo geodésico*, cuyo centro es O y OM el *radio geodésico*.

Los radios geodésicos cortan al círculo según un ángulo recto. Este teorema resulta del anterior

TEOREMA IV. *Si dos geodésicas se cortan según un ángulo infinitamente pequeño* $d\omega$, *y si se trazan, en cada una á partir de su punto de intersección* O, *longitudes iguales* OM, $OM' = dl$ *infinitamente pequeñas, se tendrá* $MM' = dl\,d\omega$.

En efecto, proyectemos la figura OMM′ sobre el plano tangente á la superficie en O. Sean m y m' las proyecciones de M y M′, Om y Om' tienen en O un punto de inflexión.

La diferencia entre mm' y MM′ es de segundo orden con relación á cada una de estas líneas; se puede pues tomar $MM' = mm'$. El ángulo $d\omega$ se proyecta según su verdadera magnitud, porque las tangentes á OM y á OM′ están en el plano tangente. Estas tangentes lo son también á Om y á Om'. Pero, como hay inflexión en O, las distancias de M y m' á sus tangentes son de tercer orden, siendo mm' de segundo. Se pueden sustituir los puntos m y m' por sus proyecciones sobre dichas tangentes, y se tendrá

$$mm' = MM' = d\omega\, dl.$$

TEOREMA V. *La torsión geodésica de una línea geodésica es igual á su torsión propiamente dicha, lo que justifica la denominación torsión geodésica.*

En efecto, siendo $d\psi = d\theta + d\tau$, por ser $\theta = \frac{\pi}{2}$, $d\theta = 0$ y por consiguiente, la torsión geodésica es igual á $\frac{d\tau}{ds}$, que es la torsión propiamente dicha de la curva.

TEOREMA VI. *Las torsiones de las curvas geodésicas que pasan por un mismo punto de una superficie varían como los cuadrados de los radios vectores de una lemniscata de Bernoulli.*

117. CURVATURA GEODÉSICA. Puesto que las líneas geodésicas son en una superficie S como las rectas en un plano, se llega por analogía á la noción de curvatura geodésica.

Sea una línea cualquiera L trazada en una superficie S. Tracemos la línea geodésica Mg (fig. 70) tangente á la línea L en un punto M; y, desde un punto infinitamente próximo M′ tomado en L, tracemos la línea geodésica M′P perpendicular á Mg. Se llama *radio de curvatura geodésica* de la curva en el punto M al límite hacia el que tiende la relación $\frac{\mathrm{MP}^2}{2\mathrm{M'P}}$ cuando M′ tiende hacia M. Llamando R_g al radio de curvatura geodésica de la línea L en M, se tendrá por definición

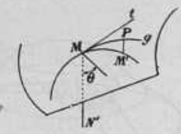


Figura 70

$$\mathrm{R}_g = \lim \frac{\mathrm{MP}^2}{2\mathrm{M'P}}.$$

La curvatura geodésica es $1 : \mathrm{R}_g$. El radio de curvatura geodésica definido así, no cambia cuando se deforma la superficie como una pieza de tela flexible é inextensible; porque conservándose las líneas geodésicas, las longitudes de los arcos MP y M′P permanecen invariables así como el ángulo M′PM.

118. Geodésicas á las superficies de revolución. Siendo la ecuación de las superficies de revolución

$$z - f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = 0,$$

sus ecuaciones diferenciales son

$$\frac{d^2x}{ds^2} : \frac{d^2y}{ds^2} : \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{-xf'}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-yf'}{\sqrt{x^2+y^2}} : 1,$$

de las que resulta

$$\frac{d^2x}{ds^2}y - \frac{d^2y}{ds^2}x = 0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{d}{ds}(x\,dy - y\,dx) = 0$$

que es la ecuación diferencial de la proyección de las líneas geodésicas sobre el plano de las x, y. Escribiendo la última ecuación en coordenadas polares, será

$$\frac{d}{ds}\left(r^2\frac{d\varphi}{ds}\right) = 0 \quad \text{é integrando} \quad r^2\frac{d\varphi}{ds} = \text{const} = r_0. \quad (1)$$

Clairaut dió la representación geométrica en el siguiente

TEOREMA. *En todo punto de una superficie de revolución, el producto del radio del paralelo y del seno del ángulo de la geodésica con el meridiano es constante*, pues siendo en la figura $PQ = rd\varphi$, $PP' = ds$, representando por α el ángulo $PP'Q$ será

Figura 71

$$\frac{rd\varphi}{ds} = \operatorname{sen} \alpha \quad \text{y} \quad r \operatorname{sen} \alpha = r_0. \tag{2}$$

El ángulo $PP'Q = \alpha$ de la geodésica con el meridiano del punto P' forma, con error de un infinitamente pequeño $d\alpha$, un ángulo igual que el formado con el meridiano en el punto P.

Al crecer r, disminuye α y viceversa. Si el radio del paralelo es menor que la constante r_0, no puede cortar á la línea geodésica de este paralelo, puesto que $\operatorname{sen} \alpha < 1$. Consideremos pues una zona limitada por dos círculos paralelos de radio r_0, en la que los demás radios sean mayores que r_0, la ecuación (2) se verificará en todo el intervalo. Supongamos que la integral de (1) sea

$$z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \quad \text{ó} \quad z = f(r), \tag{3}$$

en coordenadas polares. Tenemos

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + f'(r)^2 dr^2$$
$$= r^2 d\varphi^2 + [1 + f'(r)^2]\, dr^2$$

y puesto que $$ds^2 = \frac{r^4 d\varphi^2}{r_0^2},$$

sustituyendo, tendremos

$$\frac{r^2 d\varphi^2}{r_0^2}(r^2 - r_0^2) = [1 + f'(r)^2]\, dr^2,$$

y $$\varphi = \int \frac{r_0}{r} \sqrt{\frac{1 + f'(r)^2}{r^2 - r_0^2}}\, dr + C,$$

que es la ecuación de las líneas geodésicas.

Si sustituímos el valor de $d\varphi$ dado por la ecuación (1) será

$$s = \int r \sqrt{\frac{1 + f'(r)^2}{r^2 - r_0^2}} + C_1.$$

§ 7.° Líneas de nivel y de máxima pendiente

119. Definición. Se llaman líneas de nivel en una superficie á las secciones en ésta por planos horizontales $z =$ const.

Estas líneas se proyectan según su verdadera magnitud sobre el plano de las xy. Si la ecuación de la superficie es $F(x, y, z) = 0$, la ecuación de las proyecciones horizontales de las líneas de nivel es $F(x, y, C) = 0$. Se llaman *líneas de máxima pendiente* á las líneas trazadas en la superficie según ángulo recto, respecto á las líneas de nivel.

Ecuación diferencial. Sabemos que para los incrementos dx y dy se tiene

$$dz = pdx + qdy$$

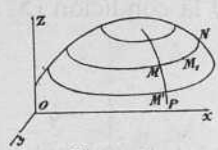


Figura 72

Por un punto de una superficie pasan una línea de nivel y otra de máxima pendiente. Llamemos d_1x, d_1y, d_1z á las proyecciones de la mutación MM_1 infinitamente pequeña, efectuada en la línea de nivel y dx, dy á las de una mutación MM' efectuada en la línea de máxima pendiente. Tendremos

$$d_1z = pd_1x + qd_1y$$

Pero como á lo largo de la línea de nivel es z constante, d_1z es nula y se tiene

$$pd_1x + qd_1y = 0. \tag{1}$$

Además por ser rectangulares las mutaciones MM_1 y MM', se tiene

$$dxd_1x + dyd_1y + dzd_1z = 0,$$

es decir, puesto que d_1z es nula,

$$dxd_1x + dyd_1y = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{d_1x}{d_1y}.$$

Y, según la condición (1), se tiene

$$\frac{d_1 x}{d_1 y} = -\frac{q}{p}; \quad \text{luego} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{q}{p}$$

$$pdy - qdx = 0. \tag{2}$$

Esta es la ecuación diferencial de las proyecciones horizontales de las líneas de máxima pendiente.

Si la ecuación está en forma explícita

$$\mathrm{F}(x, y, z) = 0,$$

tendremos

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} + p\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} + q\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z} = 0,$$

y la condición (2) se reduce á

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}dy - \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}dy = 0.$$

Observación. *Las proyecciones horizontales de las líneas de măxima pendiente cortan según un ángulo recto á las proyecciones horizontales de las líneas de nivel*, pues el ángulo recto $\mathrm{M_1MM'}$ tiene el lado $\mathrm{MM_1}$ paralelo al plano de proyección.

Ejemplo. *Líneas de máxima pendiente del elipsoide.* Sea un elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Las línas de nivel son elipses, obtenidas cortando á la superficie por planos paralelos al plano horizontal Para calcular p y q, diferenciaremos, considerando á z como función de x, y tendremos

$$\frac{x}{a^2} + p\frac{z}{c^2} = 0, \quad \frac{y}{b^2} + q\frac{z}{c^2} = 0.$$

La ecuación diferencial

$$pdy - qdx = 0$$

de la proyección horizontal de las líneas de máxima pendiente es por tanto,

$$\frac{x}{a^2}\,dy - \frac{y}{b^2}\,dx = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{dy}{y} = m\,\frac{dx}{x},$$

habiendo hecho $m = \frac{a^2}{b^2}$, y

$$\log x = m \log x + \log k \quad \text{ó} \quad y = kx^m,$$

ecuación de la proyección horizontal de las líneas de máxima pendiente.

§ 8.º Geometría esférica

120. Coordenadas esféricas. Se puede representar un punto M en la esfera, refiriéndolo á un triángulo trirectángulo x, y, z (fig. 73). Sea O el centro de la esfera, y hagamos pasar arcos de círculo máximo xQ é yP por el punto M. Haremos $\xi = \text{tg}\, z\text{P}$, $\eta = \text{tg}\, z\text{Q}$; y representando por x, y, z las coordenadas cartesianas rectangulares de M, tendremos $\xi = \frac{x}{z}$, $\eta = \frac{y}{z}$. (1)

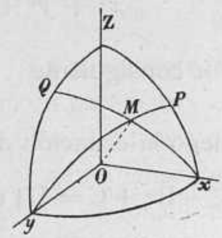


Figura 73

En efecto, se tiene

$$z = \text{OM} \cos \text{MP} \cos z\text{P}, \qquad x = \text{OM} \cos \text{MP} \,\text{sen}\, z\text{P}$$

de donde
$$\frac{x}{z} = \frac{\text{sen}\, z\,\text{P}}{\cos z\,\text{P}} = \text{tg}\, z\text{P} = \xi.$$

Las fórmulas (1) servirán para calcular las *coordenadas esféricas* ξ y η de un punto, por medio de sus coordenadas ordinarias; y se pueden considerar las coordenadas x, y, z como coordenadas *esféricas homogéneas*.

121. Ecuación de un círculo máximo. Una circunferencia máxima de la esfera es la traza sobre ésta de un plano que pasa por el centro; su ecuación es

$$\text{A}x + \text{B}y + \text{C}z = 0. \tag{2}$$

Dividiendo por z, y aplicando las fórmulas (1), la ecuación de la intersección del plano y de la esfera ó la ecuación homogénea de un círculo máximo será

$$A\xi + B\eta + C = 0.$$

Recíprocamente: Toda ecuación de primer grado ξ y η ú homogénea en x, y, z, representa un círculo máximo; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son las coordenadas homogéneas del polo de este círculo, cuando la ecuación tiene la forma $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0$.

Ecuación de un círculo menor. Haciendo $x = \xi z$, $y = \eta z$ en la ecuación de un plano

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{será} \quad (A\xi + B\eta + C)\, z + D = 0.$$

que representará un círculo menor. Pero, suponiendo el radio de la esfera igual á la unidad, se tiene

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{ó} \quad z^2(\xi^2 + \eta^2 + 1) = 1.$$

Por consiguiente $$z = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}};$$

luego la ecuación de un círculo menor será

$$a\xi + B\eta + C = D\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2} \text{ ó } (Ax + By + Cz)^2 = D^2(x^2 + y^2 + z^2),$$

que es la ecuación del cono recto de base circular. Las coordenadas homogéneas del polo del círculo son A, B y C.

122. Distancia de dos puntos. La distancia esférica δ de dos puntos (ξ, η) y (ξ', η') ó (x, y, z) y (x', y', z') se expresa por la fórmula

$$\cos\delta = xx' + yy' + zz' = \frac{\xi\xi' + \eta\eta' + 1}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2 + 1)(\xi'^2 + \eta'^2 + 1)}},$$

que es la ecuación de un círculo menor.

Observación. *El ángulo de dos arcos de círculo máximo es igual á la diferencia de sus polos.*

123. Tangentes. Sea la curva $f(\xi, \eta) = 0$ ó $f(x, y, z) = 0$. La expresión de un arco de círculo máximo tangente á esta curva se obtiene expresando que pasa por los dos puntos infinitamente próximos ξ, η y $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$. Así tendremos que

$$H - \eta = (\Xi - \zeta) \frac{d\eta}{d\xi}.$$

La ecuación del arco del círculo máximo tangente será

$$X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Las coordenadas del polo son $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ ó $d\eta, -d\xi, \eta d\xi - \xi d\eta$.

124. Curva polar. Se llama *curva polar* de una curva dada, el lugar de los polos de arcos de círculo máximo, tangentes á la curva dada. Su ecuación se obtiene eliminando x, y, z, entre

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{y} \quad X = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

125. Envolvente y curvatura geodésica. La envolvente de una curva esférica que contiene en su ecuación un parámetro, es el lugar de las intersecciones sucesivas de esta curva. La teoría de las envolventes en la esfera es la misma que en el plano. Observaremos que la curva polar de una curva es envolvente de los círculos máximos cuyos polos son los puntos de la curva propuesta.

Si se trazan por los extremos de un arco ds de curva esférica arcos de círculos máximos tangentes á éste, el ángulo ε que éstos forman se llama *ángulo de contingencia geodésico*. El límite de $\frac{\varepsilon}{ds}$ se llama *curvatura geodésica*.

126. Indicatriz esférica. Si por el centro de una esfera, cuyo radio suponemos igual á 1 por sencillez, se trazan radios paralelos á las tangentes de una curva dada, se formará una superficie cónica cuya traza sobre la esfera se llama *indicatriz esférica* de la curva propuesta (pág. 90). Esta indicatriz tiene á su vez una indicatriz que se llama *segunda indicatriz* de la curva propuesta.

Teorema I. *Si por el centro de la esfera se trazan planos paralelos á los planos osculadores de una curva, los arcos de círculos* *máximos que determinan en la esfera envuelven á la indicatriz de esta curva.*

En efecto, por ser el plano osculador paralelo á dos tangentes infinitamente próximas, el plano paralelo al plano osculador, trazado por el centro de la esfera, contendrá dos generatrices del cono cuya base es la indicatriz. Será pues tangente á este cono; y las trazas de este plano y del cono en la esfera serán tangentes.

TEOREMA II. *Si por el centro de la esfera se trazan tres ejes paralelos á las tres direcciones principales de una curva, el primero (paralelo á la tangente) describirá la indicatriz, el segundo (paralelo á la normal principal) describirá la segunda indicatriz, el tercero (paralelo á la binormal) describirá la polar de la indicatriz.*

En efecto, la paralela á la normal principal se halla en un plano paralelo al plano osculador. Su traza está pues en el arco de círculo máximo tangente á la indicatriz y á una distancia del punto de contacto igual á $\frac{\pi}{2}$; el punto correspondiente de la segunda indicatriz se halla situado del mismo modo.

127. IMAGEN ESFÉRICA. *Imagen esférica* de una porción de superficie, terminada por una curva cerrada, es la parte de esfera inscrita en lo que llama Gauss *imagen* de la curva, es decir, la curva que se obtiene, cuando se busca en una esfera de radio 1 el lugar de las trazas de los radios paralelos á las normales á la superficie á lo largo de la curva C.

TEOREMA. *La imagen esférica de una línea asintótica es la curva polar de su indicatriz esférica.*

TEOREMA DE GAUSS. *Describamos alrededor de un punto* M *de una superficie un área cerrada* $d\Omega$; *sean* $d\Omega'$ *su imagen esférica,* R *y* R′ *los radios de curvatura principales en* M; *se tendrá* $RR' = \frac{d\Omega}{d\Omega'}$.

Tomemos por elemento del área Ω el triángulo cuyos vértices son el punto $M(x, y, z)$ y dos puntos cuyas coordenadas son

$$x + dx, \quad y + dy, \quad z + dz \quad \text{y} \quad x + \partial x, \quad y + \partial y, \quad z + \partial z$$

y sean X, Y, Z,

$$X + dX, \quad Y + dY, \quad Z + dZ, \quad X + \partial X, \quad Y + \partial Y, \quad Z + \partial Z$$

los vértices del triángulo imagen Ω'. Las proyecciones de las áreas Ω y Ω' sobre el plano de las x, y son

$$dy\,\delta x - dx\,\delta y \quad \text{y} \quad dY\,\delta X - dX\,\delta Y.$$

Y por ser paralelas las áreas Ω y Ω', sus relaciones serán iguales á las de sus proyecciones. Se tiene pues

$$\frac{d\Omega'}{d\Omega} = \frac{dY\,\delta X - dX\,\delta Y}{dy\,\delta x - dx\,\delta y}, \quad \text{ó} \quad \frac{\partial\Omega'}{\partial\Omega} = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)}.$$

Pero haciendo $\qquad p = \dfrac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$

se tiene $\qquad X = \dfrac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \quad Y = \dfrac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}};$

luego
$$\frac{d\Omega'}{d\Omega} = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(p, q)} \frac{\partial(p, q)}{\partial(x, y)}. \tag{1}$$

Pero $\qquad \dfrac{\partial X}{\partial p} = \dfrac{1 + q^2}{(p^2 + q^2 + 1)^{3:2}}, \quad \dfrac{\partial X}{\partial q} = -\dfrac{pq}{(p^2 + q^2 + 1)^{3:2}}, \quad \ldots\ldots$

luego
$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(p, q)} = \frac{(1 + q^2)(1 + p^2) - p^2q^2}{(p^2 + q^2 + 1)^3} = \frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^2};$$

y se tiene además $\qquad \dfrac{\partial(p, q)}{\partial(x, y)} = rt - s^2;$

luego, en vez de (1),

$$\frac{\partial\Omega'}{\partial\Omega} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} = \frac{1}{RR'};$$

lo que demuestra el teorema. Por consiguiente

$$d\Omega' = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}\, d\Omega.$$

Para obtener una porción finita de la imagen, se sustituirá $d\Omega$ por $dx\,dy\sqrt{1 + p^2 + q^2}$, y se integrará para todos los puntos de la parte de área considerada, obteniéndose

$$\Omega' = \iint \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^{3:2}}\, dx\, dy.$$

Y por ser $\quad rt - s^2 = \dfrac{\partial(p,q)}{\partial(x,y)} \quad$ tendremos

$$\Omega' = \iint \frac{dp\,dq}{(1+p^2+q^2)^{3:2}}.$$

La cantidad Ω' es la *curvatura total*, según Gauss, de esta porción de superficie, que puede escribirse bajo la forma

$$\iint \mathrm{RR}'\,d\Omega', \qquad \text{ó} \qquad \iint \mathrm{RR}'\,d\theta \operatorname{sen}\theta\, d\psi,$$

expresando θ la colatitud y ψ la longitud de la imagen del elemento $d\Omega$.

128. Sobre las imágenes de las líneas de curvatura. Sean x, y, z las coordenadas del punto M de una línea de curvatura de la superficie S y ξ, η, ζ los cosenos de los ángulos que forma la normal á la superficie S con los ejes; ξ, η, ζ serán también las coordenadas de la imagen del punto M sobre la esfera de radio uno, descrita desde el origen como centro.

Sean R y R' los radios de curvatura principales en M. Se tiene por el teorema de Rodrigues

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{dy}{d\eta} = \frac{dz}{d\zeta} = \mathrm{R}; \tag{1}$$

y llamando ds y $d\sigma$ á los arcos correspondientes de la línea de curvatura considerada, se deduce de (1)

$$\mathrm{R} = \frac{ds}{d\sigma} \quad \text{y} \quad dx = \mathrm{R}d\xi, \quad dy = \mathrm{R}d\eta, \quad dz = \mathrm{R}d\zeta,$$

de donde

$$d^2x = \mathrm{R}d^2\xi + d\xi d\mathrm{R}, \quad d^2y = \mathrm{R}d^2\eta + d\eta d\mathrm{R}, \quad d^2z = \mathrm{R}d^2\zeta + d\zeta d\mathrm{R};$$

luego $\quad dy\,d^2z - dz\,d^2y = \mathrm{R}^2(d\eta\, d^2\zeta - d\zeta\, d^2\eta); \quad (2) \quad$ luego

Teorema. *Las líneas de curvatura y sus imágenes tienen, en los puntos correspondientes: 1.º tangentes paralelas; 2.º binormales paralelas; 3.º normales principales paralelas.*

Luego, *tienen las mismas indicatrices esféricas, y los planos nor-*

males á la superficie y á la esfera son paralelos según dos arcos correspondientes.

Dos arcos correspondientes ds *y* $d\sigma$ *de la superficie y de la esfera se hallan entre sí en la relación* $d\sigma = \frac{ds}{R}$, *designando* R *el radio de curvatura de la curva trazada en la superficie.*

Las imágenes de las líneas de curvatura forman, como estas curvas, una red ortogonal.

Las ecuaciones (2) elevadas al cuadrado y sumadas dan, llamando ρ al radio de la curva imagen,

$$\frac{ds^6}{R^2} = R^4 \frac{d\sigma^6}{\rho^2} \qquad \text{ó} \qquad \rho = 1.$$

Así: *El radio de curvatura de la imagen es igual al radio de la esfera.*

Observación. Si la superficie S es unicóncava en el punto M, es decir, si las dos secciones principales tienen sus concavidades vueltas en el mismo sentido, entonces los radios de la esfera, trazados en el mismo sentido, á partir del centro, que las normales á S, dirigidas hacia la convexidad de esta superficie, determinarán un triángulo $\mu\mu'\mu''$, cuyo plano será paralelo al del triángulo MM′M″, hallándose recorridos los contornos en el mismo sentido.

Si la superficie tiene indicatriz hiperbólica, se podrán tomar para MM′ y MM″ dos direcciones correspondientes á secciones cuyas concavidades están en sentido contrario. Entonces, si las normales en M y en M′ que determinan el lado $\mu\mu'$ del triángulo esférico, se hallan situadas á un cierto lado de la superficie S, las que determinen el otro lado $\mu\mu''$, deberán ser, la una prolongación de la normal precedente en M, la otra, la normal en M″, situada al mismo lado de S que ésta prolongación; y los dos triángulos MM′M″ y $\mu\mu'\mu''$ tendrán sus vértices dispuestos en sentido inverso.

Por último, si la superficie S es desarrollable, tomando siempre para MM′ y MM″ dos secciones principales, una de estas secciones MM′ será la generatriz rectilínea. Las normales en M y en M′ serán paralelas y, por consiguiente, μ' se confundirá con μ. El triángulo

$\mu\mu'\mu''$ será pues nulo, y por consiguiente, la medida de la curvatura será igual á cero.

Si expresamos ahora, bajo forma de determinantes las áreas de los dos triángulos dS y $d\Sigma$, por medio de las coordenadas de sus vértices, proyectados sobre un mismo plano, las expresiones darán las áreas con el mismo signo ó con signo contrario, según que los dos triángulos tengan dispuestos sus vértices en el mismo sentido ó en sentido opuesto. Resultará pues, que la relación k de estas expresiones será positiva ó negativa, según que la superficie S tenga sus dos curvaturas principales en el mismo sentido ó en sentidos contrarios. La superficie será, según esto, una superficie de *curvatura positiva* ó *negativa*. Una superficie desarrollable será una superficie de *curvatura nula*.

Podemos obtener una expresión geométrica de la medida de la curvatura. Tomando el triángulo MM′M″, en el que dos lados sean las secciones principales, MM′ será igual al radio de curvatura principal correspondiente R, multiplicado por el ángulo de contingencia, que se hallará representado por el lado $\mu\mu'$ del triángulo esférico $d\Sigma$; luego $MM' = R.\,\mu\mu'$ y también $MM'' = R'.\,\mu\mu''$, siendo R′ el otro radio de curvatura principal. Por otra parte, es fácil ver que el triángulo $\mu\mu'\mu''$ es rectángulo, como el MM′M″; luego la relación de las áreas de estos triángulos es

$$K = \frac{\mu\mu'\ \mu\mu''}{MM'.\,MM''} = \frac{1}{RR'}.$$

La medida de la curvatura de la superficie es pues igual al producto de las curvaturas de las secciones principales.

Luego, si se representan por a, b, c los cosenos de los ángulos que la normal á S forma con los ejes, ó las coordenadas del punto μ de la esfera Σ, correspondiente á M, y si hacemos

$$da = a_1 dx + a_2 dy, \quad db = b_1 dx + b_2 dy,$$

tendremos $K = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \dfrac{rt - s^2}{(p^2 + q^2 + 1)^2}$.

LIBRO SEGUNDO

APLICACIONES DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS

CAPÍTULO I

Aplicaciones de las integrales definidas simples

§ 1.º Cuadraturas

129. Parábolas. Vamos á obtener la expresión del área de las parábolas representadas por la ecuación

$$y^n = px^m,$$

en la que m y n son positivos. Tendremos

$$\int y dx = p^{\frac{1}{n}} \int x^{\frac{m}{n}} dx = p^{\frac{1}{n}} \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + \mathrm{C}.$$

Si se toma el área á partir de $x = 0$, se tendrá $\mathrm{C} = 0$, y la expresión del área terminada en la ordenada relativa á un valor cualquiera de x, será

$$\frac{np^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}+1}}{m+n} \quad \text{ó} \quad \frac{nxy}{m+n}.$$

De manera que el arco de la curva divide al rectángulo xy en la razón constante $n : m$.

Hipérbolas. La ecuación general $x^m y^n = p$ representa las hipérbolas, cuyas asíntotas son los ejes de coordenadas. Se tendrá

$$\int y dx = p^{\frac{1}{n}} \int x^{-\frac{m}{n}} dx = \frac{p^{\frac{1}{n}} x^{-\frac{m}{n}+1}}{-\frac{m}{n}+1} + C. \qquad (1)$$

Sea $m < n$, y supongamos que el área principia en el punto cuyas coordenadas son α, β. La expresión del área será

$$\frac{m p^{\frac{1}{n}} \left(x^{-\frac{m}{n}+1} - \alpha^{-\frac{m}{n}+1}\right)}{n-m} \quad \text{ó} \quad \frac{n(xy - \beta\alpha)}{n-m}.$$

Este valor es finito para $\alpha = 0$, aunque se extienda el área indefinidamente en el sentido de las y, puesto que el eje de las y es asíntota de la curva; pero se hace infinita al mismo tiempo que x. Así pues, el área contada, á partir de una ordenada arbitraria y prolongada al infinito hacia una de las asíntotas, es finita ó infinita, según que la coordenada contada sobre esta asíntota tenga en la ecuación el mayor ó el menor exponente.

Buscando $-\int_{\beta}^{y} x dy$, tendríamos el área comprendida entre el arco y las abscisas trazadas por sus extremidades; su expresión es $\frac{mxy}{n-m}$. Estas dos áreas están en la relación de los exponentes n y m.

Si fuese $m > n$, se obtendría la misma conclusión.

Si $m = n$, la ecuación será de la forma $xy = p^2$, y representará una hipérbola equilátera, puesto que los ejes son rectangulares. Se tendrá entonces

$$\int_{\alpha}^{x} y dx = p^2 \int_{\alpha}^{x} \frac{dx}{x} = p^2 \log \frac{x}{\alpha}.$$

En el caso de comenzar el área en el eje de las y, se tendrá $\alpha = 0$; de modo que el área comprendida entre una ordenada cualquiera y el eje de las y es infinita.

Si $\alpha = p$, el área principiará en la ordenada que pasa por el vértice; y si se toma p por unidad, su expresión será $\log x$. En esta propiedad tiene su origen la denominación de *logaritmos hiperbólicos*, que se ha dado á los logaritmos neperianos.

Sea UMV una de las ramas de las hipérbolas de diversos órdenes. Contando los segmentos desde el origen de las abscisas, contiene el espacio infinito en longitud, comprendido entre la parte CV de la curva y su asíntota AY, cuya área es infinita ó finita, según que m es mayor ó menor que n, pues para obtener el espacio BCMP, tomado desde la abscisa $AB = a$ hasta la $AP = b$, es necesario hacer sucesivamente $x = a$, $x = b$ en la expresión $\frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m} x^{\frac{n-m}{n}}$ y restar el primer resultado del segundo, obteniéndose

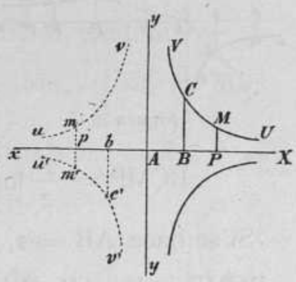


Figura 74

$$BCMP = \frac{np^{\frac{1}{n}}}{n-m}\left(b^{\frac{n-m}{n}} - a^{\frac{n-m}{n}}\right).$$

Si hacemos $a = 0$, el punto B coincidirá con el A, y el espacio BCMP se cambiará en YAPMV; pero la cantidad $a^{(n-m):n}$ será infinitamente ó nula según que sea $m >$ ó $< n$. En el primer caso,

$$YAPMV = \frac{np^{1:n}}{n-m}\left(b^{\frac{n-m}{n}} - 0\right) = \frac{np^{1:n}}{n-m} b^{\frac{n-m}{n}}.$$

Dejando a con un valor finito y haciendo b infinito, se tendrá el área XBCU, que será infinita si m es menor que n, y que será igual á $\frac{np^{1:n}}{m-n} a^{(n-m):n}$ si $m > n$. Resulta pues, que cuando m y n son desiguales, de los dos espacios asintóticos el uno es infinito y el otro finito.

La razón de esta diferencia se encuentra en la mayor ó menor rapidez con la que se acerca la curva á su asíntota; y puesto que

$$y = p^{1:n} : x^{m:n}, \quad x = p^{1:m} : y^{n:m},$$

se ve que, cuando $m > n$, y crece mucho más rápidamente que x

y por consiguiente, la curva se acerca con más rapidez al eje de abscisas que al de ordenadas y *viceversa*.

Ya hemos visto que cuando $m=n$, la expresión del área se presenta bajo una forma infinita y que adquire la forma $p \log x + \text{const.}$

Sea UMV (fig. 75) una de las ramas de la hipérbola equilátera cuyo semi-eje transverso es $AC = a$, siendo $BC \cdot AB = AB^2 = \frac{a^2}{2}$. Tendremos $p = \frac{a^2}{2}$; y si contamos las áreas á partir de la ordenada BC, correspondiente al vértice C, se obtendrá

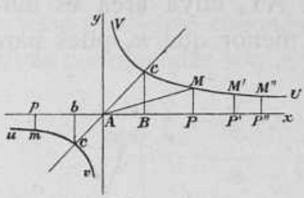


Figura 75

$$BCMP = \frac{a^2}{2} \log AP - \frac{a^2}{2} \log AB = \frac{a^2}{2} \log \frac{AP}{AB}.$$

Si se hace $AB = 1$, será

$$BCMP = \log AP, \ BCM'P' = \log AP', \ BCM''P'' = \log AP'' \ldots$$

Así pues, si las abscisas AP, AP′, AP″... se hallan en progresión por cociente, las áreas correspondientes estarán en progresión por diferencia.

Observación 1.ª Los espacios asintóticos correspondientes á las abscisas negativas no pueden hallarse comprendidos en la misma fórmula, pues la función $\log x$ se hace imaginaria. Esta anomalía depende del paso de la ordenada y por el infinito. Cada una de estas áreas se expresa separadamente.

Observación 2.ª En la logarítmica cuya ecuación es $y = \log x$, se tiene

$$\int y dx = \int dx \log x = x \log x - x + \text{const.}$$

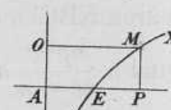


Figura 76

La parte variable de esta expresión se hace nula cuando $x = 0$, porque haciendo $x = 1 : m$ toma la forma $- \log m : m = 1 : m$, bajo la que es nula, cuando m es infinito. Es por tanto inútil añadir una constante, cuando se obtienen los segmentos á partir del punto A (fig. 76.) Haciendo $x = AE = 1$, tendremos la expresión del espacio asintótico cAEx finito é igual á 1.

Si se toman las ordenadas por abscisas, se tendrá

$$\int xdy = \int dx = x$$

para el espacio cOMx apoyado en el eje de ordenadas AC, cuya expresión es algebráica, sin añadirse constante, porque se anula al mismo tiempo que x. El área cAEx, correspondiente á $x = \text{AE} = 1$, tiene por esta fórmula el mismo valor que la anterior, prescindiendo del signo.

Si en vez de ser el módulo igual á 1 fuese M, tendríamos

$$\int dx \log x = x \log x - \int \mathrm{M}dx = xlx - \mathrm{M}x, \quad \int xdy = \mathrm{M}x.$$

Curva $y = \dfrac{a^x}{x}$. Se obtiene la forma indicada en la fig. 77. El eje CC′ de las y es asintota de las ramas HF, R′F′ y AB′, parte negativa del eje de las x, es la rama M′K′. La cuadratura de esta curva depende de la integral $\displaystyle\int \frac{a^x dx}{x}$, cuyo desarrollo en serie parece no conviene al área correspondiente á las abscisas negativas, porque su primer término $\log x$ se hace imaginario; pero si se considera una integral

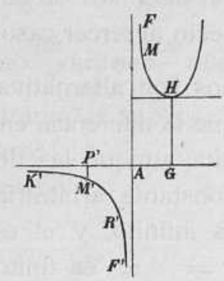


Figura 77

$$\int_a^b \mathrm{X}dx > \alpha(\mathrm{A} + \mathrm{A}_1 + \ldots + \mathrm{A}_{n-1}) \quad \text{y} \quad < \alpha(\mathrm{A}_1 + \ldots + \mathrm{A}_n),$$

aproximándose cada una de estas sumas cuanto se quiera á la integral, llegaremos á la expresión

$$\int_a^b \mathrm{X}dx = \frac{\alpha}{1}\left[\mathrm{A}_1 + \ldots + \mathrm{A}_{n-1} + \frac{1}{2}(\mathrm{A} + \mathrm{A}_n)\right] + \frac{\alpha^2}{2!}\cdot\frac{1}{2}(\mathrm{A}' - \mathrm{A}''_n)$$

$$+ \frac{\alpha^3}{3!}\left[\mathrm{A}'_1 + \mathrm{A}''_2 + \ldots + \mathrm{A}''_{n-1} + \frac{1}{2}(\mathrm{A}'' + \mathrm{A}''_n)\right]$$

$$+ \frac{\alpha^4}{4!}\cdot\frac{1}{2}(\mathrm{A}''' - \mathrm{A}'''_n) + \ldots\ldots$$

(*) Lacroix. *Traité élémentaire de calcul differentiel et integral*, t. I, p. 278.

Aplicando este procedimiento, obtendremos resultados reales. Esta dificultad se salva, cambiando el signo de x antes de integrar, porque

$$\int \frac{a^{-x} . -dx}{-x} = \int \frac{a^{-x}dx}{x} = \log x - \frac{x \log a}{1 . 1} + \frac{x^2 (\log a)^2}{1 . 2 . 2} - \ldots + C.$$

Para obtener los espacios asintóticos de la curva propuesta se deben buscar los valores de la integral de que se trata entre

$$x = 0 \text{ y } x = n, \ x = 0 \text{ y } x = -n, \ x = -n \text{ y } x = -\infty,$$

expresando n una cantidad finita. En el primero y el segundo caso se encuentra un resultado infinito. Pero nada se concluye respecto al tercer caso, porque en el desarrollo de $\int \frac{a^{-x}dx}{x}$, los términos son alternativamente de signos contrarios; y puede suceder que la diferencia entre la parte positiva y negativa permanezca finita, aunque las dos sean infinitas; lo que sucede determinando la constante arbitraria de modo que se anule la integral cuando x es infinito, y el espacio B'P'M'K' comprendido entre $x = -n$, $y = -\infty$ es finito.

130. Elipse. Sea la ecuación de la elipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \quad \text{ó} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2};$$

tendremos
$$\int y\,dx = \frac{b}{a}\int dx\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Integrando por partes, resulta

$$\int dx\sqrt{a^2 - x^2} = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Pero

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{(x^2 - a^2 + a^2)dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\int dx\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a}.$$

Sustituyendo, resulta

$$\int dx\sqrt{a^2-x^2} = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} - \int dx\sqrt{a^2-x^2}$$

y, en fin,

$$\frac{b}{a}\int dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{bx\sqrt{a^2-x^2}}{2a} + \frac{ab}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + \mathrm{C}.$$

Si el área principia en el eje de las y, será $\mathrm{C}=0$; y si se hace enseguida $x=a$, será $\frac{\pi ab}{4}$ el valor de la cuarta parte del área de la elipse. El área de ésta será pues, πab, y πa^2 si $b=a$.

El término $\frac{bx\sqrt{a^2-x^2}}{2a} = \frac{xy}{2}$ expresa el área del triángulo rectángulo, cuyos catetos son x é y; luego el término $\frac{ab}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}$ mide el área del sector formado por el eje de las y, el arco de la elipse y el radio vector correspondiente al extremo del arco.

131. Hipérbola. Sea la ecuación de la hipérbola

$$a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2 \quad \text{ó} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Tendremos $\displaystyle\int y\,dx = \frac{b}{a}\int dx\sqrt{x^2-a^2}.$

Procediendo como para la elipse, tendremos

$$\int y\,dx = \frac{bx\sqrt{x^2-a^2}}{2a} - \frac{ab}{2}\,l\,(x+\sqrt{x^2-a^2}) + \mathrm{C}.$$

Si se hace principiar el área en el vértice, su expresión será nula para $x=a$, y tendremos que $\mathrm{C} = \frac{ab}{2}\log a$; y el valor del área estará expresando por

$$\frac{bx\sqrt{x^2-a^2}}{2a} - \frac{ab}{2}\,l\,\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$

Siendo el primer término igual á $\frac{xy}{2}$, será $\frac{ab}{2}\, l\, \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$ la expresión del sector comprendido entre el eje transverso, el arco de hipérbola y el radio vector que pasa por el extremo de éste.

132. Área de un sector elíptico. La ecuación de la elipse referida al foco, tomado como polo y al eje FA como eje polar, es

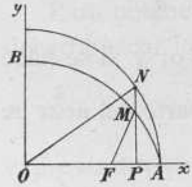


Figura 78

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\omega}. \tag{1}$$

Expresando por u el ángulo NOA, tendremos

$$\rho = a - ex = a(1 - e\cos u),$$

$$\rho\cos\omega = a\cos u - ae;$$

y sustituyendo el valor (1) de ρ, será

$$\cos u - e = \frac{(1 - e^2)\cos\omega}{1 + e\cos\omega}, \quad \cos\omega = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u}$$

$$1 + \cos\omega = \frac{(1 - e)(1 + \cos u)}{1 - e\cos u},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\omega}{1 + \cos\omega}} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\operatorname{tg}\frac{u}{2},$$

$$\frac{d\omega}{\cos^2\frac{\omega}{2}} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\frac{du}{\cos^2\frac{u}{2}}, \quad \frac{d\omega}{1 + \cos\omega} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\frac{du}{1 + \cos u};$$

luego

$$\rho^2 d\omega = a^2(1 - e\cos u)^2\sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\frac{du}{1 + \cos u}\frac{(1 - e)(1 + \cos u)}{1 - e\cos u}$$

$$= a^2\sqrt{1 - e^2}\,(1 - e\cos u)\,du$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\omega}\rho^2 d\omega = \frac{a^2}{2}\sqrt{1 - e^2}\,(u - e\operatorname{sen} u).$$

133. Área de un sector parabólico. Sea $y^2 = 4ax$ la ecuación de la parábola, F el foco. Calculemos el sector MFM′. Tenemos $\mathrm{OMP} = \frac{2}{3}xy$, $\mathrm{OM'P'} = \frac{2}{3}x'y'$; luego

$$\mathrm{A} = \mathrm{MFM'} = \frac{2}{3}x'y' - \frac{2}{3}xy - \mathrm{PMF} - \mathrm{P'M'F'} = \frac{2}{3}(x'y' - xy)$$

$$-\frac{y(a-x)}{2} - \frac{y'(x'-a)}{2} = \frac{1}{6}(x'y' - xy) + \frac{a(y'-y)}{2}.$$

Pero $y' = 2\sqrt{ax'}$, $y = 2\sqrt{ax}$; luego

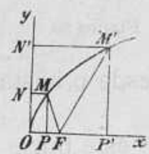


Figura 79

$$\frac{3\mathrm{A}}{\sqrt{a}} = x'\sqrt{x'} - x\sqrt{x} + 3a\left(\sqrt{x'} - \sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x'} - \sqrt{x}\right)$$

$$\times\left(x' + x + \sqrt{xx'} + 2a\right).$$

Si representamos por σ la cuerda MM′, tendremos:

$$\rho = a + x, \quad \rho' = a - x, \quad \rho + \rho' = 2a + x + x' \qquad (2)$$

$$\sigma^2 = (y - y')^2 + (x - x')^2 = (\rho + \rho')^2 - 4\left(a + \sqrt{xx'}\right)^2. \qquad (3)$$

Haciendo $\rho + \rho' + \sigma = 2m$, $\rho + \rho' - \sigma = 2n$, las ecuaciones (2) y (3) se reducen á

$$x + x' = m + n - 2a, \qquad a + \sqrt{xx'} = \sqrt{mn},$$

de las que se deduce

$$\left(\sqrt{x'} - \sqrt{x}\right)^2 = m + n - 2\sqrt{mn} = \left(\sqrt{m} - \sqrt{n}\right)^2;$$

luego

$$\frac{3\mathrm{A}}{\sqrt{a}} = \left(\sqrt{m} - \sqrt{n}\right)\left[\left(\sqrt{m} - \sqrt{n}\right)^2 + 3\sqrt{mn}\right]$$

$$= \left(\sqrt{m} - \sqrt{n}\right)\left(m + n + \sqrt{mn}\right) = m^{3:2} - n^{3:2}.$$

$$\mathrm{A} = \frac{\sqrt{a}}{3}\left[\left(\sqrt{\frac{\rho + \rho' + \sigma}{2}}\right)^3 - \left(\sqrt{\frac{\rho + \rho' - \sigma}{2}}\right)^3\right];$$

fórmula que constituye el teorema de Lambert.

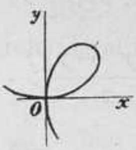
134. Folium de Descartes. La ecuación del folium ú hoja de Descartes en coordenadas polares, es

$$\rho = \frac{3a \operatorname{sen}\omega \cos\omega}{\cos^3\omega + \operatorname{sen}^3\omega}$$

y tenemos que

$$\int \rho^2 d\omega = 9a^2 \int \frac{\operatorname{sen}^2 \omega \cos^2 \omega \, d\omega}{(\cos^3 \omega + \operatorname{sen}^3 \omega)^2} = 9a^2 \int \frac{\operatorname{tg}^2 \omega \dfrac{d\omega}{\cos^2 \omega}}{(1 + \operatorname{tg}^3 \omega)^2};$$

y haciendo $1 + \operatorname{tg}^3 \omega = z$,



$$\frac{1}{2}\int \rho^2 d\omega = \frac{9a^2}{6}\int \frac{dz}{z^2} = -\frac{3a^2}{2z} + C.$$

Figura 80

El bucle del folium se obtendrá haciendo variar ω desde o hasta $\frac{\pi}{2}$ y por consiguiente z desde 1 hasta ∞. El área de este bucle será pues, $\frac{3}{2}a^2$.

Podemos considerar también la ecuación en coordenadas cartesianas y las coordenadas en función de un mismo parámetro,

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0, \quad x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3},$$

habiendo hecho $y = tx$; y haciendo variar á t desde o hasta ∞, será

$$A = \int y dx = \pm 9a^2 \int_0^\infty \frac{(1 - 2t^3)\, t^2 dt}{(1+t^3)^3};$$

y tendremos, sucesivamente:

$$A = \pm 9a^2 \left[\int_0^\infty \frac{3t^2 dt}{(1+t^3)^3}\right] - \int_0^\infty \frac{2t^2 dt}{(1+t^3)^3}$$

$$= \pm 9a^2 \left\{\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+t^3)^2}\right]_0^\infty - \left[-\frac{2}{3}\frac{1}{1+t^3}\right]_0^\infty\right\} = \pm 9a^2\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right);$$

y debiéndose tomar el signo —, resulta $A = \frac{3a^2}{2}$.

135. Cardioide. Siendo la cardioide la podar del círculo, cuando el punto desde el que se bajan las perpendiculares á las tangentes está en la circunferencia, su ecuación en coordenadas polares es $\rho = R + R\cos\omega$, siendo R el radio del círculo y el polo

el punto desde el que se bajan las perpendiculares á las tangentes. Y tendremos

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2 d\omega = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (R^2 + 2R\cos\omega + R^2\cos^2\omega)\, d\omega = \frac{3\pi R^2}{2};$$

por consiguiente, el área buscada es la mitad del área de la cicloide engendrada por un punto del círculo que rueda sobre una de sus tangentes.

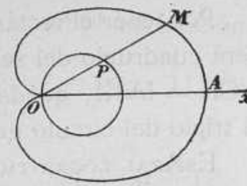


Figura 81

Cicloide. Se tiene que

$$y dx = a^2 (1 - \cos u)^2 du = 4a^2 \operatorname{sen}^4 \frac{u}{2} du$$

$$A = 4a^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^4 \frac{u}{2} du = 8a^2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^4 \frac{u}{2} du = 3\pi a^2.$$

También desarrollando $(1 - \cos u)^2$ y sustituyendo $\cos^2 u$ por $\frac{1 + \cos 2u}{2}$, se tendrá

$$A = a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos u + \frac{\cos 2u}{2} \right) du.$$

La integral indefinida es $\frac{3}{2} u - 2 \operatorname{sen} u + \frac{\operatorname{sen} 2u}{4}$; la diferencia de los valores para $u = 2\pi$, $u = 0$ es 3π.

También, siendo

$$dx = \frac{y dy}{\sqrt{2ay - y^2}} \quad \text{será} \quad \int y dx = \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{2ay - y^2}},$$

expresión que puede integrarse por arcos de círculo; pero podemos formar la diferencial del segmento ACQM (fig. 82), cuya ordenada $QM = AC - PM = 2a - y$. Haciendo pues, $2a - y = z$, se tendrá $d.ACQM = z dx$ y será

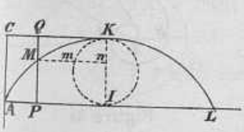


Figura 82

$$z dx = \frac{(2a - y)\, y dy}{\sqrt{2ay - y^2}} = dy \sqrt{2ay - y^2};$$

luego $ACQM = \int dy \sqrt{2ay - y^2} + \text{const.}$

Pero esta integral expresa el área de un segmento de círculo cuyos diámetro y abscisa son $2a$ é y; representa pues el segmento Imn que se anula cuando $y = 0$, así como el segmento ACMQ; luego ACMQ = Imn. En el punto K, donde $y = 2a$, el segmento ACK se transforma en el semicírculo ImKI. Por último,

$$\text{KMQ} = \text{ACK} - \text{ACQM} = \text{K}mn.$$

Por tener el rectángulo AK la altura IK y la base AI = ImK, será cuadruplo del semicírculo ImKI. Restando de este rectángulo ACK = ImKI, quedará AMKI = 3 veces ImKI; luego AKLM es el triplo del círculo generador.

Espiral logarítmica. Sea $r = ae^{m\theta}$. Se tiene

$$\frac{1}{2}\int r^2 d\theta = \frac{a^2}{2}\int e^{2m\theta} d\theta = \frac{a^2}{4m} e^{2m\theta} + \text{C}.$$

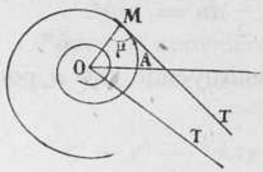


Figura 83

El área del sector está expresada por

$$\text{A} = \frac{r^2}{4m} + \text{C} = \frac{1}{4m}(r^2 - r'^2) \text{ (fig. 83).}$$

También, si consideramos la espiral $u = at^n$, en la que t es el arco ON (figura 83) de un círculo cuyo radio AO = 1 siendo u = AM. La diferencial será $\frac{u^2 dt}{2}$.

Sustituyendo é integrando, tendremos $\frac{a^2 t^{2n+1}}{4n+2}$ + const; y si n es positivo, se debe despreciar la constante, cuando se cuentan las áreas partiendo de la línea AO, en la que $t = 0$. Entonces el área ACM $= \frac{a^2 t^{2n+1}}{4n+2}$. Después de una revolución, se tendrá

$$\text{ACMB} = \frac{a^2 (2\pi)^{2n+1}}{4n+2},$$

siendo π la semicircunferencia del círculo ON.

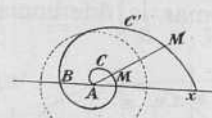


Figura 84

En la espiral de Arquímedes $a = \frac{1}{2\pi}$, $n = 1$ y ACM $= \frac{t^3}{24\pi^2}$, que si hacemos $t = 2\pi$, da ACMB $= \frac{\pi}{3}$, es decir, la tercera parte del círculo ON, puesto que se trata de unidades cuadradas, y el área del círculo es $\pi(1)^2$.

En la segunda revolución, el radio vector ON vuelve á pasar por el área trazada en la primera, y así sucesivamente en cada revolución, de manera que estas áreas se suman las unas á las otras, y que para obtener tan solo la que termina en la m^{sima} revolución, la integral $\int \frac{u^2 dt}{2}$ debe tomarse entre los límites $t = (m - 1)2\pi$ y $t = m \cdot 2\pi$.

Se obtiene así, para la espiral de Arquímedes, $\frac{m^3 - (m-1)^3}{3}\pi$.

Si se calcula el área terminada en la revolución siguiente, es decir, la $(m+1)^{\text{sima}}$, y se resta la precedente, se tendrá para el espacio comprendido entre dos revoluciones

$$\frac{(m+1)^3 - 2m^3 + (m-1)^3}{3}\pi = 2m\pi,$$

lo que se reduce á 2π cuando $m = 1$; y hace ver que el espacio comprendido entre las revoluciones m^{sima} y $(m+1)^{\text{esima}}$ es igual á m veces el comprendido entre la primera y la segunda.

Observación. En la espiral hiperbólica se tiene $n = -1$,

$$\int \frac{u^2 dt}{2} = -\frac{a^2}{2t} + \text{const.}$$

El área comprendida entre los dos radios vectores correspondientes á $t = b$, $t = c$ será $\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$, expresión que se hace infinita, cuando $t = 0$.

Lemniscata. Sea la ecuación $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$. Se tiene

$$\frac{1}{2}\int r^2 d\theta = \frac{a^2}{2}\int \cos 2\theta d\theta = \frac{a^2}{4}\operatorname{sen} 2\theta + C.$$

Si se quiere tener el área de un bucle, se integrará desde $-\frac{\pi}{4}$ hasta $\frac{\pi}{4}$, y será el área $\frac{a^2}{4}2$ ó $\frac{a^2}{2}$.

CONCHOIDES. Sea $r = f(\theta)$ una curva, $r = a + f(\theta)$ su conchoide. Será

$$2A = \int_{\theta_0}^{\theta} [a^2 + 2af(\theta) + f^2(\theta)]\, d\theta$$

$$2A = (\theta - \theta_2)\, a^2 + 2a \int f(\theta)\, d\theta + \int f^2(\theta)\, d\theta.$$

Pero $\frac{1}{2}\int f^2(\theta) d\theta$ es el área del sector de la curva, que representaremos por Σ; y tendremos

$$2A - 2\Sigma = a^2(\theta_1 - \theta_0) + 2a \int_{\theta_0}^{\theta} f(\theta)\, d\theta.$$

Para el círculo se tiene $r = 2R \cos \theta$; luego

$$2A - 2\Sigma = a^2 (\theta - \theta_0) - 4aR\, (\text{sen}\, \theta - \text{sen}\, \theta_0);$$

Para $\theta_0 = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$, resulta

$$2A - 2\Sigma = \frac{\pi}{2}\, a^2 - 4aR.$$

CARACOL DE PASCAL. Sea la ecuación

$$r = a\, (1 - \cos \theta) = 2a\, \text{sen}^2 \frac{1}{2}\, \theta,$$

que expresa un caso particular de la conchoide de círculo $r = -a \cos \theta$. Su área se expresa por

$$\frac{1}{2} \int r^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \int (1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta)\, d\theta.$$

Para obtener el área total, integraremos desde 0 hasta π y desdoblaremos este resultado, obteniendo $\frac{2}{3}\, \pi a^2$.

TEOREMA DE HOLDITCH. *Tracemos en una curva cerrada* C *una cuerda de longitud constante* $MN = c + c$; *el punto que divide á esta cuerda en dos partes* $AP = c$, $PB = c'$ *describe cierta curva* C'. *El área comprendida entre* C *y* C' *es igual á* $\pi cc'$.

Sea [A] el área de la curva dada, [P] y [Q] las engendradas por los puntos P y Q, $AP = r$, $BP = c + c' - r$. Tendremos

$$[A] - [P] = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta,\quad [A] - [P] = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (c + c' - r)^2\, d\theta, \quad (1)$$

expresando $d\theta$ el ángulo de dos cuerdas próximas; y resulta que

$$\int_0^{2\pi} r^2\, d\theta = \int_0^{2\pi} (c + c' - r)^2\, d\theta$$

$$0 = 2\,(c + c')\int_0^{2\pi} r d\theta - (c + c')^2 \int_0^{2\pi} d\theta;$$

luego
$$\int_0^{2\pi} r d\theta = \pi\,(c + c'). \quad (2)$$

Pero
$$[Q] - [P] = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (c - r)^2\, d\theta;$$

luego $[A] - [Q] = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} (2\,cr - c^2)\, d\theta = c \int_0^{2\pi} dr\theta - \pi c^2;$

y en virtud de (2),

$$[A] - [Q] = \pi c\,(c + c') - \pi c^2 = \pi cc'.$$

§ 2.º Rectificaciones

136. Rectificación de la parábola. 1.º Sea la parábola $y^2 = 2px$; tendremos que

$$s = \frac{1}{p}\int_0^y dy \sqrt{y^2 + p^2}.$$

Integrando por partes, resulta

$$\int dy \sqrt{y^2 + p^2} = y\sqrt{y^2 + p^2} - \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^2 + p^2}};$$

pero se tiene que

$$\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{p^2 + y^2}} = \int dy\sqrt{y^2 + p^2} - p^2 \int \frac{dy}{\sqrt{p^2 + y^2}};$$

luego, sustituyendo y transponiendo, será:

$$2\int dy\sqrt{y^2+p^2} = y\sqrt{y^2+p^2} + p^2\int\frac{dy}{\sqrt{y^2+p^2}};$$

y por ser $\displaystyle\int\frac{dy}{\sqrt{y^2+p^2}} = \log\left(y+\sqrt{y^2+p^2}\right) + \mathrm{C},$

será $\displaystyle\frac{1}{p}\int dy\sqrt{y^2+p^2} = \frac{y\sqrt{y^2+p^2}}{2p} + \frac{p}{2}\,l\left(y+\sqrt{y^2+p^2}\right) + \mathrm{C}.$

Debiendo anularse la integral para $y = 0$, tendremos que

$$0 = \frac{p}{2}\log p + \mathrm{C}, \qquad \mathrm{C} = -\frac{p}{2}\log p,$$

$$s = \frac{y\sqrt{y^2+p^2}}{2p} + \frac{p}{2}\,l\left(\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}\right).$$

2.º Podemos obtener $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{p}{2x}}$; y será

$$s = \int_0^x dx\sqrt{1+\frac{p}{2x}}.$$

Hagamos $\sqrt{1+\dfrac{p}{2x}} = t$ de donde $x = \dfrac{p}{2(t^2-1)}$;
y tendremos

$$\int dx\sqrt{1+\frac{p}{2x}} = \int dx\,.\,t = xt - \int x\,dt = xt - \frac{p}{2}\int\frac{dt}{t^2-1}$$

$$= xt - \frac{p}{4}\,l\,\frac{t-1}{t+1} + \mathrm{C} = x\sqrt{1+\frac{p}{2x}} - \frac{p}{4}\,l\,\frac{\sqrt{1+\frac{p}{2x}}-1}{\sqrt{1+\frac{p}{2x}}+1}$$

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{2px+4x^2} + \frac{1}{2}\,p\log\frac{2x+\sqrt{2px+4x^2}}{2px}.$$

3.° También podemos partir de la ecuación $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{y}$,

de la que resulta $y = p \cot \alpha, \qquad x = \frac{p}{2} \cot^2 \alpha,$

$$s = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2}\, d\alpha = \pm\, p \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\operatorname{sen}^3 \alpha}.$$

Diferenciando $\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}$, se obtiene

$$-\frac{2 \cos \alpha\, d\alpha}{\operatorname{sen}^3 \alpha} = d \,.\, \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha};$$

y multiplicando los dos miembros por $\cos \alpha$,

$$-\frac{2}{\operatorname{sen}^3 \alpha}\, d\alpha + \frac{2}{\operatorname{sen} \alpha}\, d\alpha = d\, \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}\, d \cos \alpha$$

En fin, $$-\frac{2}{\operatorname{sen}^3 \alpha}\, d\alpha = d\, \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} - \frac{d\alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

é integrando, se obtiene el arco de parábola

$$s = \frac{p}{2}\left[\frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} - \log \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right].$$

Elipse. Consideremos el arco de elipse contado á partir del vértice del eje menor, que se halla en el primer cuadrante. Tendremos que

$$ds = dx \sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}} = dx \sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^2 (a^2 b^2 - b^2 x^2)}}$$

$$ds = dx \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)\, x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}}.$$

Hagamos $\sqrt{a^2 - b^2} = ae$, siendo e la excentricidad, y resultará:

$$ds = dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}};$$

y puesto que x varía entre o y a, si hacemos $x=a\,\mathrm{sen}\,\varphi$, variando φ desde o hasta $\frac{\pi}{2}$, resultará que

$$ds = a\,d\varphi \cos\varphi \sqrt{\frac{1 - e^2 \,\mathrm{sen}^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}} = a\,d\varphi \sqrt{1 - e^2 \,\mathrm{sen}^2 \varphi}$$

y
$$s = a \int_0^{\varphi} d\varphi \sqrt{1 - e^2 \,\mathrm{sen}^2 \varphi}.$$

La última integral es una función transcendente, cuyo valor solo puede obtenerse por un desarrollo en serie; y puesto que

$$(1 - e^2 \,\mathrm{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} e^2 \,\mathrm{sen}^2 \varphi - \frac{1}{2}\frac{1}{4} e^4 \,\mathrm{sen}^4 \varphi$$

$$- \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \,\mathrm{sen}^6 \varphi - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} e^8 \,\mathrm{sen}\, \varphi^8 + \ldots\ldots$$

será
$$s = a\,(\varphi - \frac{1}{2} e^2 \int d\varphi \,\mathrm{sen}^2 \varphi - \frac{1}{2}\frac{1}{4} e^4 \int d\varphi \,\mathrm{sen}^4 \varphi$$

$$- \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \int d\varphi \,\mathrm{sen}^6 \varphi - \ldots\ldots)$$

Las integrales del segundo miembro se obtienen sustituyendo φ á x en las fórmulas de la pág. 95 (t. IV).

Para la cuarta parte de la elipse será $\varphi = \frac{\pi}{2}$, y tendremos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}^m \varphi\, d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (m-3)(m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots m} \frac{\pi}{2};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \,\mathrm{sen}^2 \varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} e^2 \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{4} e^4 \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{\pi}{2}$$

$$- \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{\pi}{2} - \ldots\ldots;$$

y la expresión del cuadrante será (fig. 78):

$$\mathrm{ABM} = \frac{\pi a}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}e^3\right)^2 - \frac{1}{7}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}e^4\right)^2 - \ldots\ldots\right]$$

serie tanto más convergente, cuanto más pequeña sea e, ó cuanto a difiera menos de b.

137. Hipérbola Se tiene que

$$ds = dx\sqrt{\frac{(a^2+b^2)x^2 - a^4}{a^2(x^2-a^2)}}, \quad ds = dx\sqrt{\frac{e^2x^2 - a^2}{x^2 - a^2}},$$

habiendo hecho $\sqrt{a^2+b^2} = ae$; y puesto que x varía desde a hasta ∞, hagamos $x = \frac{a}{\cos\varphi}$, variando φ desde o hasta $\frac{\pi}{2}$, y tendremos:

$$dx = \frac{a \operatorname{sen}\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi,$$

$$ds = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{a^2e^2 - a^2\cos^2\varphi} = \frac{ae\,d\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{1 - \frac{\cos^2\varphi}{e^2}}$$

$$s = \int_0^\varphi ae\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{1 - \frac{\cos^2\varphi}{e^2}}.$$

Para obtener esta integral, se desarrollará el radical por la fórmula del binomio, y será

$$s = ae\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\cos^2\varphi}{e^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{\cos^4\varphi}{e^4} - \ldots\ldots - \frac{1\cdot 1\cdot 3\ldots\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots\ldots 2n}\frac{\cos^{2n}\varphi}{e^{2n}} - \ldots\ldots\right];$$

$$s = ae\operatorname{tg}\varphi - \frac{1}{2}\frac{a}{e}\varphi - \frac{a}{e}\int_0^\varphi\left(\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{\cos^2\varphi}{e^2} + \frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{\cos^4\varphi}{e^4} + \ldots\right)d\varphi;$$

y basta ahora integrar expresiones de la forma $\cos^m\varphi d\varphi$, siendo m par.

138. Espiral logarítmica. Sea $\rho = ae^{m\omega}$. Tenemos que

$$s = \int \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2} = \int d\omega \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = a \int e^{m\omega} \sqrt{1 + m^2}\, d\omega$$

$$s = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{m} \rho + c.$$

139. Cardioide. Prolonguemos cada radio vector OP del círculo en una longitud constante igual al diámetro PM$=a$ (fig. 81).

Tomando el diámetro OA como eje polar, la ecuación de la curva es $r = a(1 + \cos\theta)$ y será

$$ds = a\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + (1 + \cos\theta)^2}\, d\theta = a\sqrt{2(1 + \cos\theta}\, d\theta = 2a\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta.$$

El arco AM$=s$, que se anula cos θ es por tanto $s = 4a \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$.

La longitud del arco AMO, correspondiente á $\theta = \pi$ será arc AMO $= 4a$.

140. Evoluta de la elipse. Se tiene que

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \qquad a_1 = \frac{a^2 - b^2}{a}, \qquad b_1 = \frac{a^2 - b^2}{b}$$

$$s = \frac{\sqrt{(a_1^2 \operatorname{sen}^2\omega + b_1^2 \cos^2\omega)^3} - b_1^3}{a_1^2 - b_1^3}$$

y el perímetro de la evoluta será

$$= 4\,\frac{a_1^3 - b_1^3}{a_1^2 - b_1^2} = 4\,\frac{a^3 - b^3}{ab}.$$

141. Cicloide. Tenemos que

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = 2a^2(1 - \cos u)\, du^2 = 4a^2 \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}u\, du^2;$$

luego $$s = -4a\cos\frac{1}{2}u + C.$$

Si se hace principiar el arco s en el vértice donde $u = \pi$, cuando u aumenta desde o hasta π, la diferencial ds es negativa. Es preciso por tanto, cambiar el signo del resultado; y como en este caso la constante C es nula, será

$$s = 4a \cos \frac{u}{2}.$$

142. Epicicloide. Siendo a el radio de la circunferencia que rueda sobre otra de radio r y φ el ángulo que ha girado, suponiendo $n = \frac{a}{r}$, la ecuación de la cicloide es

$$\frac{x}{a} = \frac{n+1}{n} \cos n\varphi - \cos (n+1)\varphi,$$

$$\frac{y}{a} = \frac{n+1}{n} \operatorname{sen} n\varphi - \operatorname{sen}(n+1)\varphi;$$

y resulta que:

$$\frac{1}{a^2} ds^2 = (n+1)^2 (1 - \cos \varphi) = 4(n+1)^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2},$$

$$\frac{1}{a} ds = 2(n+1) \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}, \quad \frac{s}{a} = C - 4(n+1) \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Si se cuentan los arcos á partir de un punto de retroceso, ($\varphi = 0$), se obtiene

$$\frac{s}{a} = 4(n+1)\left(1 - \cos \frac{\varphi}{2}\right).$$

Para la hipocicloide se cambiará a en $-a$.

143. Catenaria. Sea la catenaria

$$y = a \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}.$$

Haciendo $x_0 = 0$, es decir, contando el arco desde el punto más bajo, será

$$s = \int_0^x \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2} dx = ay' = \frac{a}{2}\sqrt{\left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} + 2\right) - 4}$$

Se tiene $\quad ay' = \frac{a}{2}\sqrt{\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 - 4} = \sqrt{y^2 - a^2}.$

144. Logarítmica. Sea $y = a \log x$. Se tiene que

$$y' = \frac{a}{x}, \quad x = \frac{a}{y'} = a \cot \omega, \quad dx = -a\frac{d\tau}{\operatorname{sen}^2 \omega}$$

$$s = -a\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\cot \omega \operatorname{sen}^2 \omega}.$$

Pero $\dfrac{1}{\cot \omega \operatorname{sen}^2 \omega} = \dfrac{\cos^2 \omega + \operatorname{sen}^2 \omega}{\cos \omega \operatorname{sen}^2 \omega} = \dfrac{\cos \omega}{\operatorname{sen}^2 \omega} + \dfrac{1}{\cos \omega}$

$$\int \frac{\cos \omega \, d\omega}{\operatorname{sen}^2 \omega} = -\frac{1}{\operatorname{sen} \omega} + C, \quad \int \frac{d\omega}{\cos \omega} = l \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right) + C$$

$$s = a\left[\left(\frac{1}{\operatorname{sen} \omega} - \frac{1}{\operatorname{sen} \omega_0}\right) - l \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right) + l \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega_0}{2}\right)\right].$$

145. Curva de las tangentes iguales. Siendo constante la longitud CP de la tangente, tendremos

$$y\sqrt{1 + \frac{1}{y'^2}} = a.$$

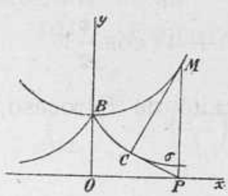


Figura 85

Elevando al cuadrado y sustituyendo, será

$$y^2(dx^2 + dy^2) = a^2 dy^2 \quad \text{y} \quad dx = \frac{dy}{y}\sqrt{a^2 - y^2},$$

$$\text{y} \qquad x - x_0 = \int \frac{dy}{y}\sqrt{a^2 - y^3}. \qquad (1)$$

Para integrar, hagamos

$$y = a \operatorname{sen} \omega, \quad \sqrt{a^2 - y^2} = a \cos \omega, \quad dy = a \cos \omega \, d\omega.$$

Sustituyendo en (1), será

$$dx = a\frac{\cos^2 \omega}{\operatorname{sen} \omega} d\omega \qquad \text{y} \qquad dx = a\left(\frac{1}{\operatorname{sen} \omega} - \operatorname{sen} \omega\right) d\omega.$$

La integración da

$$x - x_0 = a\left(\log \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} + \cos \omega\right).$$

Las coordenadas de un punto de la curva están expresadas por el parámetro ω; y tendremos $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \omega$.

Construyamos la curva correspondiente á $x_0 = 0$,

$$x = a\left(\log \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} + \cos \omega\right), \quad y = a \operatorname{sen} \omega.$$

Para que $\operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$ sea positiva, es necesario que ω varíe desde 0 hasta π. Dos valores suplementarios de ω dan dos puntos de la curva simétricos respecto á Oy. En efecto, sean x_1, y_1 los valores de las coordenadas correspondientes á $\omega_1 = \pi - \omega$. Se tiene

$$x_1 = a\left[\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}\right)\right] + \cos(\pi - \omega), \quad y_1 = a \operatorname{sen}(\pi - \omega).$$

Pero $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}\right) = \cot \frac{\omega}{2} = 1 : \operatorname{tg} \frac{\omega}{2},$$

$$\cos(\pi - \omega) = -\cos \omega, \quad \operatorname{sen}(\pi - \omega) = \operatorname{sen} \omega.$$

Luego $$x_1 = -x, \quad y_1 = y.$$

Hagamos variar ω desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$. Para $\omega = 0$, $x = -\infty$, $y = 0$. La curva es asíntota de Ox. Cuando ω aumenta, x é y aumentan, porque $\frac{dx}{d\omega}$ y $\frac{dy}{d\omega}$ son positivas. Para $\omega = \frac{\pi}{2}$ se tiene $x = 0$ é $y = a$. En el punto B así obtenido, la tangente se confunde con el eje las y. La curva es simétrica respecto á Oy.

Para obtener el arco s, tenemos

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Sustituyendo é integrando, resulta sucesivamente

$$ds = a \frac{\cos \omega}{\operatorname{sen} \omega} d\omega, \quad s = a \log \operatorname{sen} \omega,$$

sin añadir constante, porque, al contarse s desde el punto B, debe anularse para $\omega = \frac{\pi}{2}$, lo que se verifica, puesto que $\log 1 = 0$.

146. Lemniscata. Sea $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\omega$. (1) Tenemos

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 = 2a^2 \frac{d\omega^2}{\cos 2\omega}; \text{ luego } s = a\sqrt{2}\int \frac{d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}}$$

y haciendo $2\omega = \varphi$,

$$\frac{a\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}} = \frac{a}{4}\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{a}{4}\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\pi}}. \tag{2}$$

La rectificación de la lemniscata depende de las funciones elípticas, pero su longitud total depende como hemos visto, de las funciones eulerianas.

Observaremos además que, siendo la lemniscata el lugar de los puntos M tales, que se tenga $MF \,.\, MF' = OF^2 = o$, su ecuación en coordenadas polares se expresará bajo la forma (1).

La longitud del arco AMO, cuarta parte de la longitud total, quedará expresada, como se ha visto, por

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\omega = a\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}}.$$

Hagamos $\rho = 2\omega$. La integral se reducirá al primer miembro de (2) que es la integral euleriana de primera especie $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ dividida por 2. Así la longitud total será

$$s = a\sqrt{2}\,B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = a\sqrt{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}.$$

Pero $\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}} = \pi\sqrt{2}.$

Luego $\quad s = a\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\pi}.$

147. CARDIOIDE. La ecuación de la curva es $r = a(1 + \cos\theta)$, y tenemos que

$$ds = a\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + (1 + \cos\theta)^2}\,d\theta = 2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta.$$

El arco AM $= s$ (fig. 81) se anula con θ; luego

$$s = 4a \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}.$$

La longitud del arco correspondiente á $\theta = \pi$ será igual á $4a$.

§ 3.° Problema inverso

148. Hemos visto que cuando se da una curva por su ecuación, se puede obtener en términos finitos, ó por medio de un desarrollo en serie, la relación que existe entre un arco de la curva y las coordenadas de su extremidad, lo que permite calcular exactamente ó con tanta aproximación como se quiera, la longitud del arco comprendido entre dos puntos dados.

Ahora podemos proponernos el problema inverso, á saber: *Dada la relación que existe entre un arco de una curva y una de las coordenadas de su extremidad, hallar la ecuación de la curva* (*).

Sea $s = \varphi(x)$; tendremos que

$$dy = dx\sqrt{[\varphi'(x)]^2 - 1}, \quad y = \int dx\sqrt{[\varphi'(x)]^2 - 1} + \mathrm{C}.$$

En muchos casos puede sustituirse á x el ángulo $\theta = \frac{\pi}{2} - \tau$ que la tangente á la curva forma con el eje de las y, obteniéndose sucesivamente las relaciones:

$$dy = \operatorname{tg}\tau\, dx = \cot\theta\, dx, \quad dx = ds \operatorname{sen}\theta, \quad dy = ds\cos\theta.$$

Y siendo $\quad dx = \dfrac{ds}{\varphi'(x)}, \quad \varphi'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \operatorname{cosec}\theta,$

resulta $\quad x = \psi(\operatorname{cosec}\theta), \quad dx = -\psi'(\operatorname{cosec}\theta)\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta,$

$$y = -\int \psi'(\operatorname{cosec}\theta)\frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^3\theta}\, d\theta + \mathrm{C}.$$

(*) Abbé Moigno. *Leçons de calcul differtiel et integral*, t. II, p. 115.

Eliminando θ entre esta ecuación y la que da el valor de x, se llegará á la ecuación buscada $F(x, y) = 0$.

El arco s de la curva y su radio de curvatura se obtienen por las ecuaciones

$$s = \varphi(x) = \varphi[\varphi(\operatorname{cosec}\theta)] = f(\operatorname{cosec}\theta)$$

$$\rho = \pm\frac{ds}{d\tau} = \mp\frac{ds}{d\theta} = \pm\frac{\operatorname{cosec}^2\theta\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta - 1}}{\psi(\operatorname{cosec}\theta)},$$

$$\rho = \pm\frac{ds^3}{dx\,d^2y} = \pm\frac{[\varphi'(x)]^3}{\varphi''(x)}\sqrt{[\varphi'(x)]^2 - 1}.$$

Ejemplo 1.º Sea el arco dado por la ecuación

$$s^2 = px, \quad s = \sqrt{px}.$$

Se tendrá

$$\frac{dx}{ds} = \operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{px}}{p}, \quad x = \frac{p\operatorname{sen}^2\theta}{4}, \quad dx = \frac{p\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta}{2},$$

$$s = \frac{p}{2}\operatorname{sen}\theta, \quad dy = \frac{p}{2}\cos^2\theta\,d\theta, \quad y = \frac{p}{2}\int\cos^2\theta\,d\theta + C.$$

Integrando desde $\theta = 0$, $y = 0$; y haciendo $p = 8R$, $2\theta = \omega$, se obtiene

$$y = R(\omega + \operatorname{sen}\omega), \quad x = R(1 - \cos\omega),$$

ecuaciones de una cicloide, cuyo radio generador es R.

2.º Sea la ecuación que liga el arco á la abscisa de una parábola de orden $m + n$,

$$s^{m+n} = p^n x^m.$$

Se tendrá $(m + n)\,s^{m+n-1}ds = mp^n x^{m-1}dx$,

$$\frac{dx}{ds} = \operatorname{sen}\theta = \frac{(m+n)\,s^{m+n-1}}{mp^n x^{m-1}} = \frac{(m+n)\,x}{ms} = \frac{m+n}{m}\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{n}{m+n}};$$

$$\cos\theta = \left[1 - \left(\frac{m+n}{m}\right)^2\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{2n}{m+n}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

y haciendo

$$q = p\left(\frac{m}{m+n}\right)^{m:n}, \quad x = \frac{m}{m+n} q \operatorname{sen}^{\frac{m+n}{m}} \theta, \quad s = q \operatorname{sen}^{\frac{m}{n}} \theta,$$

será
$$dx = \frac{mq}{n} \operatorname{sen}^{\frac{m}{n}} \theta \cos \theta \, d\theta,$$

$$dy = \frac{mq}{n} \operatorname{sen}^{\frac{m}{n}-1} \theta \cos^2 \theta \, d\theta = q \cos \theta \, d \operatorname{sen}^{\frac{m}{n}} \theta.$$

Se obtendrá además para el valor del radio vector, la expresión

$$\rho = \pm \frac{mq}{n} \operatorname{sen}^{\frac{m-n}{n}} \theta \cos \theta.$$

Consideremos el caso particular en que, $n = 1$, siendo la parábola de orden $m+1$ y su ecuación $s^{m+1} = px^m$; q es entonces igual á $p\left(\frac{m}{m+1}\right)^m$; y se tiene

$$s = q \operatorname{sen}^m \theta, \quad ds = mq \operatorname{sen}^{m-1} \theta \cos \theta \, d\theta,$$

$$x = \frac{m}{m+1} q \operatorname{sen}^{m+1} \theta, \quad dx = mq \operatorname{sen}^m \theta \cos \theta \, d\theta,$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{m+1}{m}\left(\frac{s}{p}\right)^{1:m}, \quad \cos \theta = \left[1 - \left(\frac{m+1}{m}\right)^2 \left(\frac{s}{p}\right)^{2:m}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$dy = \frac{\left[1 + \left(\frac{m+1}{m}\right)^2 \left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{2}{m+1}}\right]^{\frac{1}{2}} dx}{\frac{m+1}{m}\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{1}{m+1}}} = q \cos \theta \, d \, . \operatorname{sen}^m \theta$$

$$= mq \operatorname{sen}^{m-1} \theta \cos^2 \theta \, d\theta, \quad \rho = \pm\, mq \operatorname{sen}^{m-1} \theta \cos \theta.$$

Integrando por partes, resulta

$$y = q\left(\operatorname{sen}^m \theta \cos \theta + \int \operatorname{sen}^{m+1} \theta \, d\theta\right) + C.$$

Haciendo $m+1 = \mu$, según que μ sea par ó impar, se aplicarán las fórmulas de la pág. 95 (t. IV), y se obtendrán inmediatamente las relaciones que ligan x, y con el ángulo θ, y por consiguiente la ecuación $F(x, y) = 0$ de la curva que se busca.

Ejemplo. Sea $m = 2$. La parábola es de tercer orden y está dada por la ecuación $s^3 = px^2$. Tendremos en este caso

$$q = \frac{4}{9}p, \quad x = \frac{2q}{3}\operatorname{sen}^3\theta, \quad s = q\operatorname{sen}^2\theta.$$

$$dy = 2q\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta\, d\theta, \quad y = -\frac{2q}{3}\cos^3\theta + C;$$

pero cuando $\theta = 0$, y es también nula; luego

$$C = \frac{2q}{3}, \quad y = \frac{2}{3}q(1 - \cos^2\alpha).$$

Se tendrá en este caso todavía $\rho = 2q\operatorname{sen}\theta\cos\theta = q\operatorname{sen}2\theta$.

Para obtener la ecuación de la curva en coordenadas cartesianas, hagamos

$$\frac{2}{3}q - y = \eta, \quad x = \xi, \quad \frac{2}{3}q = \left(\frac{2}{3}\right)^3 p = A;$$

y obtendremos así:

$$\xi = A\operatorname{sen}^3\theta, \quad \eta = A\cos^3\theta, \quad \left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{1}{3}} = \operatorname{sen}\theta, \quad \left(\frac{\eta}{A}\right)^{\frac{1}{3}} = \cos\theta,$$

$$\left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\eta}{A}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \quad \rho = 2q\left(\frac{\xi\eta}{A^2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

ecuación de la curva cuyos arcos son iguales á las ordenadas de una parábola cúbica.

Análogamente, la ecuación de la curva cuyos arcos se hallan representados por la parábola de quinto grado $s^5 = px^4$, es

$$\left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{2}{5}} + \left(\frac{\eta}{B}\right)^{\frac{2}{5}} = 1.$$

CAPÍTULO II

Aplicaciones de las integrales definidas múltiples

§ 1.º Cubaturas de los sólidos y áreas

149. Definiciones. Sea $f(x, y)$ una función de dos variables independientes x, y, que suponemos conserva valores finitos entre los límites x_0, x_1 é y_0, y_1. Podremos efectuar en cualquier orden las dos integrales, y tendremos, por ejemplo,

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\, dy dx,$$

que expresa la suma de todos los valores infinitamente pequeños de segundo orden que adquiere la función $f(x, y)\, dx\, dy$, cuando x é y varían por intervalos infinitamente pequeños dx y dy.

Es decir, que, si se divide el intervalo $x_1 - x_0$ en m partes iguales Δx y el intervalo $y_1 - y_0$ en n partes iguales Δy, y se toma la suma de todos los valores de la función $f(x, y)\, \Delta x \Delta y$, combinando todos los valores de x con todos los valores de y comprendidos respectivamente en las dos series

$$x_0,\quad x_0 + \Delta x,\quad x_0 + 2\Delta x,\quad \ldots\ldots,\quad x_0 + (m-1)\Delta x;$$
$$y_0,\quad y_0 + \Delta y,\quad y_0 + 2\Delta y,\quad \ldots\ldots,\quad y_0 + (n-1)\Delta y,$$

la suma convergerá hacia un límite, á medida que se tomen, para Δx y Δy, fracciones más pequeñas de los intervalos primitivos.

Si ahora construímos la superficie cuyas coordenadas rectangulares son x, y y $z = f(x, y)$, la función $f(x, y)\, \Delta x \Delta y$ medirá el volumen de un paralelepípedo cuya base es $\Delta x \Delta y$ y cuya altura es z. Las intersecciones de los planos laterales de este paralelepípedo con la superficie, circunscriben un cuadrilátero curvilíneo cuya proyección sobre el plano xy es el rectángulo $\Delta x \Delta y$. El volumen comprendido entre estos planos laterales, la base del paralelepípedo $f(x, y)\Delta x \Delta y$ y la superficie $z = f(x, y)$ no difiere de este paralelepípedo más que en cierto volumen menor que $\Delta x \Delta y \Delta z$, siendo Δz la diferencia de los valores extremos que adquiere z para todos los puntos que se proyectan sobre el plano xy, en el interior del rectángulo $\Delta x \Delta y$. Así pues, la integral considerada es el límite hacia el que tiende la suma de los paralelepípedos elementales, cuando Δx y Δy decrecen indefinidamente. El cociente

$$\frac{\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\, dx\, dy}{\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} dx\, dy} = f(\xi, \eta),$$

(indicando ξ y η valores comprendidos respectivamente entre x_0, x_1 é y_0, y_1), expresa la media entre todos los valores, en número infinito, que adquiere la altura z en el intervalo considerado.

Y por ser la integral doble una función continua de x é y, la podremos expresar por $F(x, y)$; y tendremos:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \int_{y_0}^{y} f(x, y)\, dy, \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx,$$

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y \partial x} = f(x, y). \qquad (a)$$

Toda función de la forma

$$F(x, y) + \varphi(x) + \psi(y), \qquad (b)$$

en la que φ y ψ expresan funciones absolutamente arbitrarias, satisface á la ecuación (a), pues, cuando se toma la derivada parcial de la función (b) con relación á x, desaparece $\psi(y)$; y enseguida desaparece $\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}$ de $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}$, al derivar con relación á y.

En vez de tomar la integral $\int f(x, y)\, dy$ entre límites y_0 é y_1 que no varían con x, se la podrá tomar entre límites variables $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$; y entonces la integral definida $\int_{\varphi_0 x}^{\varphi_1 x} f(x, y)\, dy$ será una función de la sola variable x. É integrando otra vez entre los límites x_0 y x_1, se obtendrá la integral definida doble

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{\varphi_0 x}^{\varphi_1 x} f(x, y)\, dy\, dx = \mathrm{V}.$$

Para formarnos idea clara de este resultado, imaginemos que los valores extremos x_0 y x_1 están representados por las abscisas Op_0 y Op_1, las funciones $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ por las ordenadas de las líneas $m_0n_0m_1$ y $m_0n_1m_1$ (m_0 y m_1, n_0 y n_1 son puntos de las ordenadas y de las abscisas extremas, respectivamente) y la $f(x, y) = z$ por la ordenada de la superficie, levantada perpendicularmente al plano de las xy. En virtud de estas hipótesis, la integral V mide el volumen limitado por el plano xy, por la superficie curva, cuya ordenada es z y por la superficie cilíndrica, cuya sección recta es el perímetro $m_0n_0m_1n_1$.

Tracemos paralelamente al eje de las x, las rectas n_0q_0 y n_1q_1, y representemos por y_0, y_1 las ordenadas Oq_0, Oq_1 y por $\psi_0 y$, $\psi_1 y$ á los valores de la abscisa x en función de y, para las porciones de línea $n_0m_0n_1$ y $n_0m_1n_1$, tendremos

$$\int_{y_0}^{y_1}\int_{\psi_0 y}^{\psi_1 y} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{x_0}^{x_1}\int_{\varphi_0 x}^{\varphi_1 x} f(x, y)\, dy\, dx = \mathrm{V}.$$

Podemos razonar también considerando las superficies curvas en general, refiriéndolas á los tres planos perpendiculares, por medio de las coordenadas $\mathrm{AP} = x$, $\mathrm{PM}' = y$, $\mathrm{M'M} = z$ (fig. 86).

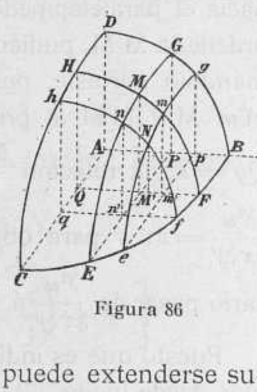


Figura 86

El segmento APGMM'QHD que tiene su base APM'Q en el plano de las xy, hallándose terminado por los dos planos PM'MG y QM'MH, respectivamente paralelos á los de las yz y xz, y por la superficie propuesta, es una función de las dos variables x é y; y puede extenderse sucesivamente en el sentido de cada una ó variar con relación á las dos simultáneamente.

En efecto, si se supone que, permaneciendo y constante, x

se cambie en AP + Pp, este segmento aumentará en la zona PGMM'$m'mgp$ y en la zona QHMM'$n'nhq$, si se hace variar tan solo á y en Qq. Por último si x é y se cambian en AP + Pp, AQ + Qq, el mismo segmento limitado ahora por los planos pN'Ng, qN'Nh, diferirá de su estado primitivo por las dos zonas ya indicadas y por la especie de prima truncado M'm'N'$n'n$MmN, que es el incremento de la primera zona, cuando se hace variar solamente á y, ó el de la segunda, si en ésta se hace variar solo á x.

Si se representa por u á la función de x é y, que expresa el volumen del segmento APGMM'QHD, es evidente que en la expresión del cambio total de esta función, los términos en que varía x solamente, darán la expresión de la primera zona, aquéllos en los que ha variado solo y, la de la segunda y los demás pertenecerán al prisma truncado M'N. Se tendrá pues

$$\mathrm{M'N} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} hk + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} h^2 k + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} hk^2 + \ldots\ldots;$$

dividiendo los dos miembros de esta ecuación por hk, y pasando á los límites relativos á la anulación de h y k, el del segundo miembro será $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$. Pero el prisma truncado M'N tiende incesantemente hacia el paralelepípedo formado sobre la base M'm'N'n' y con la ordenada M'M, pudiéndosele aproximar cuanto se quiera; y si tomándolo por éste, puesto que se trata de los límites, se sustituye M'm'.M'n'.M'M al prisma M'N, y se hace M'm' ó P$p = h$, M'n' ó Q$q = k$, la relación $\dfrac{\mathrm{M'N}}{hk}$ se reduce á M'M$= z$. Resulta pues, que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = z$; y para obtener el segmento APGMM'QHD, es necesario pasar de $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ á la función u.

Puesto que es indiferente el orden de las integraciones, tendremos desde luego

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int z dx, \quad u = \int dy \int z dx \quad \text{ó} \quad u = \iint z\, dx\, dy.$$

Ejemplo. Sea $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$. Tendremos

$$u = \iint \frac{dx\,dy}{x^2 + y^2} = \int dx \int \frac{dy}{x^2 + y^2} = \int dy \int \frac{dx}{x^2 + y^2}.$$

La primera integral dará

$$\int \frac{dy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x}\right) + X',$$

expresando X' una función arbitraria de x. Integrando de nuevo con relación á x, y haciendo $\int X'dx = X$, será

$$\int dx \int \frac{dy}{x^2 + y^2} = \int dx \left[\frac{1}{x} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x}\right) + X'\right]$$

$$= \int \frac{dx}{x} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x}\right) + X.$$

Para integrar $\int \frac{dx}{x}\left(\operatorname{arc\,tg} = \frac{y}{x}\right)$, escribamos el desarrollo

$$\frac{y}{x} - \frac{y^3}{3x^3} + \frac{y^5}{5x^5} - \ldots\ldots;$$

Y puesto que se debe agregar, después de haber integrado, una función arbitraria, Y, de y, será

$$\iint \frac{dx\,dy}{x^2 + y^2} = X + Y - \frac{y}{x} + \frac{y^3}{9x^3} - \frac{y^5}{25x^5} + \frac{y^7}{49x^7} - \ldots\ldots$$

Operando en un orden inverso, según la última integral, se obtendrá

$$\int \frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{y} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} \frac{x}{y}\right) + Y'$$

$$\int dy \int \frac{dx}{x^2 + y^2} = \int dy \left[\frac{1}{y} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{x}{y}\right) + Y'\right]$$

$$= \int \frac{dy}{y} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{x}{y}\right) + Y.$$

Observación. Se ha visto que se llega á la expresión general de la diferencial del área de una superficie curva, considerándola dividida en zonas (fig. 85) tales como EGge, por planos paralelos á uno de los planos coordenados y concibiendo que cada una de estas zonas se divida en porciones cuadrangulares MmNn por planos paralelos á otro plano coordenado.

Por la figura se ve que el área DGMH, que podemos representar por s, aumenta en el cuadrilátero curvilíneo GMmg, cuando x aumenta en Pp, y que este cuadrilátero aumenta en MmNn cuando y aumenta enseguida en Qq. Un razonamiento análogo al ya hecho manifiesta que el límite de la relación $\frac{\text{M}m\text{N}n}{\text{P}p\,.\,\text{Q}q}$ es igual á la derivada $\frac{\partial^2 s}{\partial x\,\partial y}$. Para llegar á este límite, se observa que los cuatro planos m'M y N'n, n'M y N'm paralelos, dos á dos, á los planos xz é yz, y que determinan el cuadrilátero curvo MmNn, determinan también, en el plano tangente en M, un paralelógramo MXZY (figura 87) en el cual, todas las líneas trazadas por M serían las tangentes á las diversas secciones que determinarían en el cuadrilátero curvo, planos trazados por la ordenada M'M, y que tendrían con los arcos de estas secciones una relación cuyo límite es la unidad. Se puede pues, sustituir en el límite, al cuadrilátero curvo MmNn, el paralelógramo MXZY cuya área se halla con la de su proyección en la razón del radio al coseno del ángulo comprendido entre el plano tangente y el de las xy. Pero, por ser la normal MG y la ordenada MM' perpendiculares á cada uno de estos planos, el ángulo que forman es igual al GMM'; luego se tendrá para el coseno, la expresión

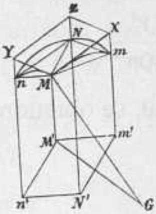


Figura 87

$$\frac{\text{M'M}}{\text{MG}} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

lo que da $$\text{MXZY} = \text{M}'m'\text{N}'n' \,.\, \frac{\text{MG}}{\text{M'M}} = dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2};$$

luego $$s = \iint dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2},$$

expresando $dy\int dy\sqrt{1+p^2+q^2}$ el área de la zona FHhf.

150. Coordenadas polares. Supongamos que la superficie del sólido se halle referida á coordenadas polares. Un punto m estará determinado: 1.° por la longitud r del radio vector Om. 2.° por el ángulo φ de la proyección Om' de este radio vector sobre el plano de las xy con el eje Ox. 3.° por el ángulo ψ que dicho radio vector forma con su proyección.

Supongamos que la superficie esté dada por la ecuación

$$r = f(\varphi, \psi).$$

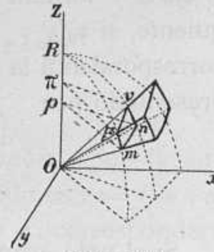


Figura 88

Para obtener el volumen del sólido que se considera, determinaremos el volumen de un cono cuyo vértice es el origen y cuya base sea una parte cualquiera de la superficie del sólido, para lo que se debe determinar el contorno de esta base, lo que se conseguirá observando que á un valor arbitrario del ángulo φ corresponden dos valores ψ_1 y ψ_2 del ángulo ψ, pertenecientes respectivamente á la hoja superior é inferior de la superficie.

Sean φ, ψ, r las coordenadas del punto n. Demos á φ un incremento $d\varphi$ representado por $n'Om'$ en la figura y otro $d\psi$ á ψ representado por el ángulo $nO\nu$. En la pirámide cuyo vértice es O, cuya base es $m\mu.n\nu$ y perpendicular á On, el lado nm es igual á su proyección $n'm'$ sobre el plano de las xy; y por ser $Om' = r \cos \psi$, será $mn = r \cos \psi d\varphi$.

El lado $n\nu$ es igual á $r \,.\, d\psi$; luego el volumen de la pirámide es

$$\frac{1}{3} r \cos \psi d\varphi \,.\, r d\psi \,.\, r \quad \text{ó} \quad \frac{1}{3} d\varphi d\psi \cos \psi r^3,$$

que solo difiere en un infinitamente pequeño de tercer orden del volumen comprendido entre las caras laterales de la pirámide y la superficie del cuerpo. Calculando la integral

$$\frac{1}{3} d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi \,.\, \cos \psi \,.\, r^3$$

tendremos el volumen comprendido entre los dos planos que pasan por el eje z y cuyas trazas son On' y Om'. Y si se calcula la integral

$$\frac{1}{3}\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi \cos\psi r^3,$$

se tendrá el volumen comprendido entre los planos que pasan por el eje z y forman con el plano xz los ángulos φ_0 y φ. Por consiguiente, si φ_0 y φ_ω son el menor y mayor valor del ángulo φ que corresponden á la base del cono, su volumen completo estará representado por

$$\frac{1}{3}\int_{\varphi_0}^{\varphi_\omega} d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi \,.\, \cos\psi \,.\, r^3$$

Si el polo estuviese situado en el interior del cuerpo, y quisiéramos obtener su volumen completo, tomaríamos ψ desde $-\frac{\pi}{2}$ hasta $\frac{\pi}{2}$ y φ desde o hasta 2π; y tendríamos

$$\frac{1}{3}\int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \,.\, \cos\psi \,.\, r^3.$$

151. Loxodromia. Se llama así una curva trazada en una esfera y que corta á todos los meridianos según el mismo ángulo.

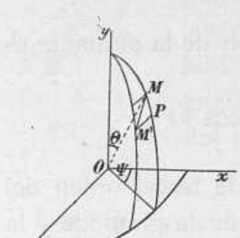


Figura 89

Sea a el radio de la esfera, φ la longitud y θ la colatitud de un punto. La ecuación de la curva en coordenadas polares es

$$\operatorname{sen}\theta\,(e^{n\varphi} + e^{-n\varphi}) = 2, \qquad (1)$$

de la que resulta

$$e^{n\varphi} - e^{-n\varphi} = \pm\, 2\,\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}. \qquad (2)$$

La expresión del arco infinitamente pequeño es

$$\mathrm{MM'}^2 = \mathrm{MP}^2 + \mathrm{PM'}^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2 \qquad (3)$$

$$ds^2 = a\sqrt{d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2} \qquad s = a\int\sqrt{d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2}.$$

Diferenciando (1) resulta

$$\cos\theta\, d\theta\, (e^{n\varphi} + e^{-n\varphi}) + \operatorname{sen}\theta\, (e^{n\varphi} - e^{-n\varphi})\, n d\varphi = 0.$$

Y sustituyendo las exponenciales por sus valores,

$$d\theta = \pm\, n \operatorname{sen}\theta\, d\varphi;$$

luego $$s = \int \frac{\sqrt{1+n^2}}{n}\, d\theta = a\, \frac{\sqrt{1+n^2}}{n}\, (\theta - \theta_0).$$

El arco es proporcional al cambio de latitud.

152. Áreas de las superficies de revolución. Sea la superficie descrita por una curva plana cuya ecuación es $y = f(x)$, al girar alrededor del eje Ox. Al incremento Δx de x, corresponderá el incremento Δu del área descrita por la revolución del elemento Δs, que podrá considerarse como igual al área de un tronco de cono, cuya altura es bg y bf, ge los radios de las bases. Tendremos pues

$$\Delta u = 2\pi\, (y + \Delta y)\, \Delta s;$$

y en el límite

$$du = 2\pi y ds \quad \text{ó} \quad du = 2\pi dx \,.\, y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\,.$$

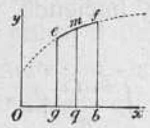


Figura 90

La expresión del área comprendida entre dos planos perpendiculares al eje, cuyas distancias al origen son x y x_0, será

$$u = 2\pi \int_{x_0}^{x} dx \,.\, y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\,.$$

Ejemplo. Sea el elipsoide de revolución

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \qquad (a > b).$$

Tendremos $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b}{a}\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$,

$$u = 2\pi\,\frac{b}{a}\int_0^x dx\,\sqrt{a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\,x^2} = 2\pi\,\frac{b}{a}\int_0^x dx\sqrt{a^2 - e^2x^2}$$

$$u = 2\pi \frac{b}{ae}\left(\frac{1}{2} ex\sqrt{a^2 - e^2x^2} + \frac{1}{2} a^2 \text{ arc sen } \frac{ex}{a}\right)$$

$$= \pi b\left(x\sqrt{1 - \frac{e^2x^2}{a^2}} + \frac{a}{e} \text{ arc sen } \frac{ex}{a}\right).$$

Haciendo $x = a$, se tiene, para la mitad del elipsoide,

$$\pi ab\left(\sqrt{1 - e^2} + \frac{1}{e} \text{ arc sen } e\right) \quad \text{ó} \quad \pi\left(b^2 + \frac{ab}{e} \text{ arc sen } e\right).$$

Supongamos $a < b$, es decir, que la elipse gira alrededor del eje menor. Tendremos $\frac{b^2 - a^2}{b^2} = e^2$ y

$$u = 2\pi \frac{b}{a}\int_0^x dx\sqrt{a^2 + \frac{b^2e^2x^2}{a^2}};$$

y haciendo, por brevedad $\frac{bex}{a} = \text{H}$,

$$\int \frac{bedx}{a}\sqrt{a^2 + \text{H}^2} = \text{C} + \frac{bex}{2a}\sqrt{a^2 + \text{H}^2} + \frac{a^2}{2} l(\text{H} + \sqrt{a^2 + \text{H}^2}).$$

$$\int_0^x \frac{bedx}{a}\sqrt{a^2 + \text{H}^2} = \frac{bex}{2a}\sqrt{a^2 + \text{H}^2} + \frac{a^2}{2} l\, \frac{\text{H}\sqrt{a^2 + \text{H}^2}}{a};$$

$$u = \pi\left[\frac{bx}{a}\sqrt{a^2 + \text{H}^2} + \frac{a^2}{e} l\, \frac{\text{H} + \sqrt{a^2 + \text{H}^2}}{a}\right]$$

$$= \pi b\left[x\sqrt{1 + \frac{\text{H}^2}{a^2}} + \frac{a^2}{be} l\left(\text{H} + \sqrt{1 + \frac{\text{H}^2}{a^2}}\right)\right].$$

Haciendo $x = a$, resulta

$$\pi ab\left[\sqrt{1 + \frac{b^2e^2}{a^2}} + \frac{a}{be} l\left(\frac{be}{a} + \sqrt{1 + \frac{b^2e^2}{a^2}}\right)\right]$$

ó

$$\pi\left[b^2 + \frac{a^2}{2e} l(1 + e)\frac{b}{a}\right],$$

que es la mitad del área del elipsoide.

§ 2.° Integrales de superficies

153. Definición. Sea S una parte de superficie S, limitada por una ó varias curvas, distinguiéndose en aquélla dos lados ó caras, de modo que no pueda pasarse de la una á la otra sin atravesar las curvas límites (t. II, pág. 299). Fijemos sobre la normal en un punto P de la una, una dirección determinada y la dirección opuesta, en el punto correspondiente P′ (que coincide geométricamente con P) de la otra. La dirección de la normal está determinada, sin ambigüedad, en cada uno de los puntos de la una y de la otra cara, si el punto P ó su correspondiente P′ se mueven sobre las caras respectivas, arrastrando consigo la dirección elegida de la normal, que varía de una manera continua.

Por ejemplo, en el caso de que cualquier paralela al eje Oz encuentre solo en un punto á la parte de superficie considerada, se podrán distinguir dos lados en ésta, si se asocia á un punto P del uno, la dirección de la normal que forma un ángulo agudo con Oz, y al punto correspondiente P′ del otro la dirección opuesta, que forma un ángulo obtuso. Estos dos ángulos variarán de una manera continua, permaneciendo el uno agudo y el otro obtuso, cuando los puntos P y P′ se muevan en sus lados respectivos. Bastarán pues, dichos ángulos para distinguirlos.

Sean ahora C (x, y, z) una función de x, y, z y una superficie S, $z = \varphi(x, y)$, limitada por una curva L, que se supone tener tan solo un punto de intersección con una paralela al eje Oz; L se proyecta sobre el plano de las x, y según una curva l.

Formemos la integral doble

$$\iint C(x, y, z)\, dx\, dy, \tag{1}$$

extendida al área l, suponiendo que se sustituya z por su valor en función de x é y. Esta integral tiene un sentido preciso cuando se dan el contorno L y la superficie $z = \varphi(x, y)$, que pasa por dicho contorno.

Introduzcamos los elementos $d\sigma$ de la superficie, para lo cual sustituiremos $dx\,dy$ por $\cos\gamma\, d\sigma$, en virtud del teorema que da la expresión de la proyección de un área.

Y la integral (1) se transformará en

$$\iint C(x, y, z) \cos\gamma\, d\sigma, \qquad (2)$$

cuyo concepto tiene más generalidad que el de la primera.

Para obtener esta generalidad, hemos supuesto que á un valor de x é y corresponde tan solo un punto de la superficie. En esta hipótesis $\cos\gamma$ conservaba un signo invariable; pero suponiendo á $\cos\gamma$ positivo, se ha podido sustituir $dx\,dy$ por $\cos\gamma\, d\sigma$. Se dirá que la integral (1) está *tomada en el área* S, hacia el lado de ésta donde la normal, considerada como semi-recta, forma con el eje Oz un ángulo agudo. Pero, como se puede considerar en S la segunda cara, podemos tener en cuenta ésta, para la que la normal, considerada como semi-recta, forma un ángulo obtuso con Oz. Diremos entonces que la integral (2) representa la integral (1), tomada en la segunda cara ó lado de S.

Cualquiera que sea el área y el lado que se considere en la misma, la integral (2) tendrá un sentido perfectamente determinado, tomando por $\cos\gamma$, el coseno del ángulo formado por Oz y la dirección de la normal correspondiente á este lado. Y se dirá que esta integral (2) tomada así, representa la integral (1) extendida al lado considerado de la superficie. En este caso el elemento $dx\,dy$ no es ya necesariamente positivo. Podremos considerar análogamente integrales como

$$\iint A(x, y, z)\, dy\, dz, \qquad \iint B(x, y, z)\, dz\, dx,$$

extendidas á un lado determinado de una área, cuyos elementos de integración son $dy\,dz$ ó $dz\,dx$, que estarán representadas por

$$\iint A(x, y, z) \cos\alpha\, d\sigma \quad \text{é} \quad \iint B(x, y, z) \cos\beta\, d\sigma,$$

en las que α, β expresan los ángulos formados por la dirección de la normal correspondiente al lado elegido, con los ejes de las x y de las y.

Sumando las tres integrales precedentes, se tiene todavía una *integral de área*

$$\iint A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy, \tag{3}$$

que puede escribirse bajo la forma

$$\iint (A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)\,d\sigma.$$

Es importante el tener la expresión de la integral (3), cuando se expresan x, y, z en función de dos parámetros u y v.

Siendo los cosenos, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ proporcionales á los determinantes funcionales

$$\frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(x, y)}{D(u, v)},$$

salvo el signo, que se tomará según el lado de la superficie que se considere; la expresión (3) será igual á

$$\iint \left[A\frac{D(y, z)}{D(u, v)} + B\frac{D(z, x)}{D(u, v)} + C\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right] du\,dv. \tag{4}$$

154. Independencia de la integral respecto al contorno. Vamos á obtener la condición para que sea independiente del contorno la integral

$$I = \iint A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy.$$

Supongamos que las coordenadas x, y, z estén expresadas en función de dos parámetros u y v, para una superficie S. Entonces tenemos la expresión (4) de dicha integral.

Consideremos ahora una familia de superficies, que tengan el mismo límite y dependan del parámetro α. Cada valor de α determina una parte de superficie correspondiente al área Σ en el plano (u, v); y se pueden elegir estas funciones de manera que la curva, correspondiente al perímetro de Σ, no dependa de α, y sea, por consiguiente, la misma para todas las superficies. Además, admitiremos que los límites entre los cuales varía α sean tales, que, las funciones A, B, C y sus derivadas parciales de primer orden permanezcan continuas, en todo el espacio recorrido por las superficies correspondientes, al elegir convenientemente los límites entre los cuales varía α.

Calculemos la variación de I, es decir, las diferenciales respecto á α. La variación de

$$\iint \mathrm{A}\,dy\,dz \quad \text{ó} \quad \iint \mathrm{A}\,\frac{\mathrm{D}(y, z)}{\mathrm{D}(u, v)}\,du\,dv$$

será igual á $\displaystyle\iint\left[\delta\mathrm{A}\,\frac{\mathrm{D}(y, z)}{\mathrm{D}(u, v)} + \mathrm{A}\,\delta\,\frac{\mathrm{D}(y, z)}{\mathrm{D}(u, v)}\right]du\,dv,$

ó desarrollando, á

$$\left.\begin{aligned}&\iint\left[\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial\mathrm{A}}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial\mathrm{A}}{\partial z}\,\delta z\right]\frac{\mathrm{D}(y, z)}{\mathrm{D}(u, v)}\,du\,dv\\ &+\iint \mathrm{A}\left[\frac{\partial\delta y}{\partial u}\,\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\frac{\partial\delta z}{\partial u} - \frac{\partial\delta y}{\partial v}\,\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial v}\,\frac{\partial\delta z}{\partial u}\right]du\,dv.\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

La segunda integral puede transformarse por medio de integraciones por partes. Así, se tiene

$$\iint \mathrm{A}\,\frac{\partial z}{\partial v}\,\frac{\partial\delta y}{\partial u}\,du\,dv = -\iint \frac{\partial}{\partial u}\left(\mathrm{A}\,\frac{\partial z}{\partial v}\right)\delta y\,du\,dv,$$

teniendo presente que la variación de δy es nula en el borde; y cada una de las integrales que forman el segundo término de (5) puede transformarse de igual manera. Sustituyamos enseguida, desarrollando los cálculos,

$$\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial u} \text{ por } \frac{\partial\mathrm{A}}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial\mathrm{A}}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial\mathrm{A}}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial u},$$

y procedamos análogamente con $\dfrac{\partial\mathrm{A}}{\partial v}$. La expresión (5), se reducirá á

$$\iint \frac{\partial\mathrm{A}}{\partial x}\left[\frac{\mathrm{D}(y, z)}{\mathrm{D}(u, v)}\,\delta x + \frac{\mathrm{D}(z, x)}{\mathrm{D}(u, v)}\,\delta y + \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(u, v)}\,\delta z\right]du\,dv.$$

Y haciendo cálculos análogos en las otras integrales, se obtendrá

$$\delta\mathrm{I} = \iint\left[\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial x} + \frac{\partial\mathrm{B}}{\partial y} + \frac{\partial\mathrm{C}}{\partial z}\right]$$

$$\times\left[\frac{\mathrm{D}(y, z)}{\mathrm{D}(u, v)}\,\delta x + \frac{\mathrm{D}(z, x)}{\mathrm{D}(u, v)}\,\delta y + \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(u, v)}\,\delta z\right]du\,dv.$$

Pero δI debe ser nula; y puesto que los signos de las variaciones δx, δy, δz son arbitrarios, debe resultar idénticamente

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0. \tag{6}$$

Esta condición que es necesaria, es también suficiente, puesto que dadas dos superficies con el mismo contorno, podríamos formar una familia con este mismo contorno, que dependa de un parámetro α, de la que formen parte dichas dos superficies.

Sin que sea necesario insistir, y refiriéndonos á las integrales curvilíneas, podemos enunciar el teorema siguiente:

La relación (6) *expresa la condición necesaria y suficiente para que sea igual á cero la integral* I, *extendida á una superficie cerrada, en el interior de la que* A, B, C *y sus derivadas parciales de primer orden son continuas.*

155. Fórmula de Stokes. Hemos visto que

$$\iint A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy,$$

extendida á una área limitada por un contorno L, no depende más que de este contorno, cuando se verifica la condición

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0, \tag{7}$$

pudiéndose en este caso escribir la integral doble bajo la forma de una integral curvilínea, tomada á lo largo del contorno L.

Vamos á demostrar ahora que, dadas tres funciones que satisfacen á la identidad precedente, pueden obtenerse tres funciones α, β, γ de x, y, z tales, que se verifiquen las relaciones

$$\frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial y} = A, \quad \frac{\partial\gamma}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y} = B, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x} = C. \tag{8}$$

Tomemos, por ejemplo, $\gamma = 0$. Satisfaremos á las dos primeras, haciendo

$$\alpha = -\int_{z_0}^{z} B(x, y, z)\,dz, \quad \beta = \int_{z_0}^{z} A(x, y, z)\,dz + \varphi(x, y),$$

expresando z_0 una constante numérica y φ una función arbitraria de x é y. Sustituyendo estos valores en la tercera ecuación y teniendo en cuenta la identidad (7), resultará

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + C(x, y, z) = 0;$$

y se podrá, mediante una integración, determinar una función $\varphi(x, y)$ que satisfaga á esta ecuación. Es evidente que si α_1, β_1, γ_1 expresan una solución particular de las ecuaciones (8), la solución más general estará dada por

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \beta = \beta_1 + \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \gamma = \gamma_1 + \frac{\partial F}{\partial z},$$

siendo F una función arbitraria de x, y, z.

Vamos á considerar ahora integrales de superficie de la forma

$$\iint \left(\frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial y}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x}\right) dx\,dy. \qquad (9)$$

Estas integrales se encuentran en varias teorías de física matemática.

Se puede expresar la integral (9) *por medio de la integral curvilínea*

$$\int_L \alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz,$$

tomada á lo largo del contorno L.

Ante todo, debemos definir el sentido en el que se toma la integral curvilínea. La integral (9) se aplica á un lado determinado de la superficie S. Á cada punto de S corresponde una dirección de la normal. Tracemos alrededor de P un elemento de superficie limitado por el contorno π. El sentido directo en el contorno π será de izquierda á derecha, para un observador colocado en la normal, con sus pies en P y la cabeza en la dirección de esta normal. Supongamos ahora que el punto P esté próximo al contorno, C y que una parte del perímetro π pertenezca á este contorno. Se habrá fijado en éste un sentido determinado siempre el mismo, cualquiera que sea la parte del contorno á que se aproxime el punto P. Fijado así el sentido en el contorno L, vamos á demostrar que las dos integrales (9) y (10) tienen signo contrario, si el sentido de rotación del triedro $(Oxyz)$ es directo.

Supongamos que el contorno C sea plano, y tomemos un nuevo sistema de coordenadas, tomando el sistema de ejes (ΩXYZ) con igual sentido de rotación que el primero, y tal, que el plano $Z = 0$ sea el plano de la curva C. Supongamos además que se integra en el lado del plano correspondiente á la dirección del eje ΩZ. El sentido directo en la curva C, será entonces el sentido de OX hacia OY, es decir, el sentido positivo tal como se definió en el tomo II (pág. 296). Si a'', b'' y c'' expresan los cosenos directores de ΩZ, la integral doble (9) puede escribirse así

$$\iint\left[\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)a''+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)b''+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)c''\right]d\sigma;$$

además, las fórmulas de transformación de las coordenadas dan

$$x = aX + a'Y + a''Z + p, \quad y = bX + b'Y + b''Z + q,$$
$$z = cX + c'Y + c''Z + r,$$

y se sabe que

$$c'' = ab' - ba', \quad a'' = bc' - cb', \quad b'' = ca' - ac'.$$

Por ser $dZ = 0$, la integral curvilínea se reduce á

$$\int_C (a\alpha + b\beta + c\gamma)\, dX + (a'\alpha + b'\beta + c'\gamma)\, dY,$$

y, según lo expuesto (t. II, pág. 200-204), es igual á

$$-\iint\left[\left(a\,\frac{\partial\alpha}{\partial Y}+b\,\frac{\partial\beta}{\partial Y}+c\,\frac{\partial\gamma}{\partial Y}\right)-\left(a'\,\frac{\partial\alpha}{\partial X}+b'\,\frac{\partial\beta}{\partial X}+c'\,\frac{\partial\gamma}{\partial X}\right)\right]d\sigma,$$

extendiéndose esta integral al área L. Las derivadas parciales, funciones de x, y, z, son

$$\frac{\partial\alpha}{\partial X}=\frac{\partial\alpha}{\partial x}a+\frac{\partial\alpha}{\partial y}b+\frac{\partial\alpha}{\partial z}c, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial Y}=\frac{\partial\alpha}{\partial x}a'+\frac{\partial\alpha}{\partial y}b'+\frac{\partial\alpha}{\partial z}c',$$

y análogamente para β y γ.

Por consiguiente

$$\left(a\frac{\partial\alpha}{\partial y}+b\frac{\partial\beta}{\partial y}+c\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)-\left(a'\frac{\partial\alpha}{\partial X}+b'\frac{\partial\beta}{\partial X}+c'\frac{\partial\gamma}{\partial X}\right)$$
$$=\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)a''+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)b''+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)c''.$$

Por consiguiente, la expresión (9) es igual á

$$\int_L \alpha dx+\beta dy+\gamma dz,$$

cuando la curva es plana.

Es fácil pasar al caso de un contorno cualquiera, pues dicho contorno puede reducirse á un contorno poligonal, puesto que bastaría aumentar indefinidamente el número de lados para tener una curva cualquiera. Se puede hacer pasar enseguida por este contorno poligonal una superficie poliedral cuyas caras sean triángulos. Aplicando la fórmula demostrada para el caso de las áreas planas á cada uno de estos triángulos, y sumando los resultados obtenidos, se llega á la fórmula que se trataba de demostrar, que se llama *fórmula de Stokes*.

Aplicación. Consideremos una curva cerrada L y un punto cualquiera $M(a, b, c)$. Sea una superficie cualquiera S limitada por L y en la que consideramos dos lados. Un elemento $d\sigma$ de esta superficie se ve según un ángulo igual á $\frac{\cos(r, n)}{r^2}d\sigma$.

Llamando r á la distancia del punto M á un punto $P(x, y, z)$ del elemento, y (r, n) al ángulo que forma la dirección PM con la dirección de la normal en P á la superficie, este ángulo será positivo ó negativo según que el ángulo (r, n) es agudo ú obtuso. Y expresando por $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ los cosenos de los ángulos que forma la normal con los ejes, tendremos

$$\cos(r, n)=\frac{a-x}{r}\cos\alpha+\frac{b-y}{r}\cos\beta+\frac{c-z}{r}\cos\gamma.$$

La suma de los ángulos triedros para todos los elementos $d\sigma$

de S será pues

$$\mathrm{I} = \iint \left(\frac{a-x}{r^3} \cos\alpha + \frac{b-y}{r^3} \cos\beta + \frac{c-z}{r^3} \cos\gamma \right) d\sigma. \quad (11)$$

Será pues una integral de superficie extendida á S, independiente de S, porque se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a-x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b-y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{c-z}{r^3}\right) = 0,$$

$$[r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2].$$

Puede decirse que representa el ángulo sólido (contado con un signo) bajo el que se ve el contorno C desde el punto M.

Vamos á obtener, antes de aplicar la fórmula de Stokes el valor de la integral (11). Si el punto (a, b, c) es exterior á la superficie, esta integral es nula, según el teorema fundamental.

Supongamos que (a, b, c) sea interior á la superficie, é integremos en el lado interno de ésta. La integral es independiente de la superficie. Tomemos pues, una esfera de radio R y centro (a, b, c); la integral se reduce á

$$\iint \frac{d\sigma}{\mathrm{R}^2} = 4\pi. \text{ Se tiene pues } \iint \frac{\cos(r, n)\, d\sigma}{r^2} = 4\pi.$$

Tendremos ahora que la integral I, extendida á una superficie S limitada por un contorno C, se puede sustituir, según la fórmula de Stokes, por una integral curvilínea tomada á lo largo de C. Esta transformación sería complicada y no ofrecería gran interés. Por el contrario, es interesante en diversas teorías, particularmente en el electromagnetismo, expresar las derivadas parciales de I, considerada como función de a, b y c, por integrales curvilíneas. Sea, por ejemplo, la derivada parcial de I con relación á a. Tendremos

$$\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a} = \iint \left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{a-x}{r^3}\right) \cos\alpha + \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{b-y}{r^3}\right) \cos\beta + \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{c-z}{r^3}\right) \cos\gamma \right] d\sigma.$$

Debemos buscar funciones α, β, γ de x, y, z tales, que sea

$$\frac{\partial\beta}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{a-x}{r^3}\right),\quad \frac{\partial\gamma}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{b-y}{r^3}\right),$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{c-z}{r^3}\right).$$

Hagamos $\alpha=0$; y tendremos que elegir, si es posible, β y γ de modo que satisfagan á las ecuaciones

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x}=-\frac{3\,(b-y)\,(a-x)}{r^5},\quad \frac{\partial\beta}{\partial x}=+\frac{3\,(c-z)\,(a-x)}{r^5}$$

y $$\frac{\partial\beta}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial y}=\frac{1}{r^3}-\frac{3\,(a-x)^2}{r^5}.$$

Estas ecuaciones quedarán satisfechas, si se toma

$$\gamma=+\frac{y-b}{r^3},\quad \beta=-\frac{z-c}{r^3}.$$

Y, por consiguiente, la integral curvilínea

$$-\int_C \alpha dx+\beta dy+\gamma dz$$

se reducirá á $$\int_C \frac{(z-c)\,dy-(y-b)\,dz}{r^3}.$$

Y tendremos análogamente

$$\frac{\partial I}{\partial b}=\int_C\frac{(x-a)\,dz-(z-c)\,dx}{r^3},\quad \frac{\partial I}{\partial c}=\int_C\frac{(y-c)\,dx-(x-a)\,dy}{r^3}$$

fórmulas importantes en la teoría del magnetismo (*).

(*) E. Picard. *Traité d'Analyse*, t. I, p. 123, (primera edición).

LIBRO TERCERO

ESTUDIO DE LAS SUPERFICIES EN FORMA PARAMÉTRICA

CAPÍTULO I

Coordenadas curvilíneas

§ 1.º FÓRMULAS FUNDAMENTALES

156. DEFINICIONES. En general, la posición de un punto se determina por la intersección de tres superficies. Así, en los sistemas de coordenadas rectilíneas, las tres superficies son tres planos paralelos á los coordenados. En el sistema de coordenadas polares r, θ, ψ las tres superficies son una esfera de radio r, un cono descrito alrededor del eje de las z cuyo semi-ángulo del vértice es θ y un plano que pasa por el eje de las z que forma un ángulo ψ con el plano de las xz.

Sabemos que una curva se puede definir analíticamente, en función de un parámetro u por medio de las ecuaciones

$$x = f(u), \quad y = \varphi(u), \quad z = \psi(u) \tag{1}$$

suponiendo las tres funciones finitas y continuas, así como sus derivadas primera, segunda y tercera, excepto á lo más en algunos puntos especiales. A cada valor u_1 del parámetro u corresponde una posición M_1 del punto generador M.

Si consideramos un nuevo parámetro v, las ecuaciones

$$x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v), \quad z = \psi(u, v) \tag{2}$$

para cada valor v_1 de v determinarán una línea; y si el parámetro v

varía de una manera continua, esta curva se moverá describiendo una superficie, que resulta definida analíticamente por medio de las fórmulas (2). Y si eliminamos u y v entre las ecuaciones (2), obtendremos la ecuación ordinaria de la superficie $f(x, y, z) = 0$.

Esta superficie quedará cubierta por el sistema de líneas anteriormente considerado, de las cuales corresponderá cada una á un valor de v, y se dirá *una línea* $v =$ const., ó una línea v.

Podremos razonar análogamente respecto á u. El valor u_1 de u determinará una línea

$$x = f(u_1, v), \quad y = \varphi(u_1, v), \quad z = \psi(u_1, v),$$

y el conjunto de todos los valores de u la superficie.

Un punto P de la superficie quedará determinado, cuando se conozcan dos valores u_1, v_1 de los parámetros u y v, es decir, que un punto P quedará determinado en la superficie, por la intersección de las dos líneas

$$u = u_1, \quad v = v_1.$$

Los valores u_1 y v_1 de los parámetros se llaman las *coordenadas curvilíneas* del punto P, ó también *coordenadas de Gauss*, y las líneas $u = u_1$, $v = v_1$ *curvas paramétricas*.

Ejemplo 1.º Sea la superficie de revolución

$$x = u \cos v, \quad y = u \operatorname{sen} v, \quad z = f(u) \tag{3}$$

$u =$ const determina un paralelo, y $v =$ const, un meridiano de la superficie. Hagamos $v = 0$, y obtendremos el meridiano situado en el plano xz. Las ecuaciones son

$$x = u, \quad y = 0, \quad z = f(u), \quad \text{ó, eliminando } u, \quad z = f(x), \quad y = 0.$$

Si eliminamos u y v en el sistema (3), obtendremos la ecuación de la superficie de revolución bajo la forma

$$z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

2.º Para la esfera de radio r, las ecuaciones (3) se reducen á

$$x = u \cos v, \quad y = u \operatorname{sen} v, \quad z = \sqrt{r^2 - u^2}.$$

157. Primera fórmula fundamental. Si consideramos dos puntos próximos (x, y, z) y $(x + dx, y + dy, z + dz)$, las diferenciales dx, dy, dz serán, en valores paramétricos,

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

Y sustituyendo en $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, se tendrá

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2 \tag{4}$$

que es la *primera forma cuadrática fundamental*, habiéndose hecho, por brevedad,

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{E} &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ \mathrm{F} &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \\ \mathrm{G} &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Su discriminante es

$$\Delta^2 = \mathrm{EG} - \mathrm{F}^2$$

$$= \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} & \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}^2.$$

Los coeficientes E, F, G son funciones finitas y continuas de u y de v y admiten (por hipótesis) derivadas primera y segunda finitas y continuas. Y además con los símbolos

$$\sqrt{\mathrm{E}},\quad \sqrt{\mathrm{G}},\quad \sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}$$

expresaremos los valores positivos de los radicales. Tenemos además las siguientes fórmulas

$$m=\Sigma\frac{\partial x\partial^2 x}{\partial u\partial u^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u},\qquad n=\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=-\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u},$$

$$m'=\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v},\qquad n'=\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u},$$

$$m''=\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=-\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v},\qquad n''=\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}.$$

Y también definiremos las seis cantitades p, p', p'', q, q', q'' por las fórmulas

$$\Delta^2 p=m\mathrm{G}-n\mathrm{F},\qquad \Delta^2 q=n\mathrm{E}-m\mathrm{F},$$

$$\Delta^2 p'=m'\mathrm{G}-n'\mathrm{F},\qquad \Delta^2 q'=n'\mathrm{E}-m'\mathrm{F},$$

$$\Delta^2 p''=m''\mathrm{G}-n''\mathrm{F},\qquad \Delta^2 q''=n''\mathrm{E}-m''\mathrm{F},$$

que dan $\quad p+q'=\dfrac{\partial \log \Delta}{\partial u},\quad q''+p'=\dfrac{\partial \log \Delta}{\partial v}.$

Si las curvas $u=\text{const}$, $v=\text{const}$ se cortan perpendicularmente, se dice que las coordenadas son ortogonales. Entonces $\mathrm{F}=0$, porque $\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ son los coeficientes directores de las tangentes á las curvas $v=\text{const}$ y $u=\text{const}$. La fórmula (4) se reduce entonces á

$$ds^2=\mathrm{E}du^2+\mathrm{G}dv^2.$$

En cada punto de una línea coordenada $u=\text{const}$ ó $v=\text{const}$ distinguiremos la dirección positiva de la negativa, y convendremos en que la primera corresponde á valores crecientes y la otra á valores decrecientes del parámetro.

Expresaremos por ds_u y ds_v los arcos elementales positivos de las líneas u y v, y se tendrá, siendo

$$u = \text{const}, \quad du = 0 \quad \text{ó} \quad v = \text{const}, \quad dv = 0,$$

$$ds_u = \sqrt{G}\,dv, \qquad ds_v = \sqrt{E}\,du.$$

Y representando $\cos(ux)$, $\cos(uy)$, ..., $\cos vx$, ... los cosenos de las direcciones positivas de las tangentes á las líneas coordenadas u y v, será

$$\cos(ux) = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \cos(uy) = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \cos(uz) = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\cos(vx) = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \cos(vy) = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \cos(vz) = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u}.$$

Y si designamos con ω el ángulo comprendido entre O y π que forman en un punto de la superficie las direcciones positivas de las líneas coordenadas u y v que pasan por él, tendremos

$$\cos\omega = \cos(ux)\cos(vx) + \cos(uy)\cos(vy) + \cos(uz)\cos(vz).$$

$$\text{ó} \qquad \cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad (5) \qquad \text{y} \qquad \text{sen}\,\omega = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}, \qquad (6)$$

De la ecuación (5) resulta que: *La condición necesaria y suficiente para que las coordenadas* u *y* v *sean ortogonales es que* sea $F = 0$.

158. Elemento de área. Consideremos el cuadrilátero infinitesimal comprendido entre las líneas coordenadas u, $u + du$, v, $v + dv$, que despreciando infinitamente pequeños de órdenes superiores, puede considerarse como un paralelógramo; y puesto que $\sqrt{E}\,du$, y $\sqrt{G}\,dv$ son las longitudes de los lados que comprenden el ángulo ω, su área quedará expresada por $\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$. Y, en virtud de (6), resulta que: *El elemento de área* $d\sigma$ *de la superficie se expresa por la fórmula*

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv = \Delta\,du\,dv.$$

159. Ángulo de una línea con las líneas coordenadas. Consideremos una línea cualquiera trazada en la superficie, para la

que se ha fijado la dirección positiva del arco. Para determinar sin ambigüedad los ángulos que forma con las líneas coordenadas u y v, supongamos trazado el plano tangente en cada punto P de la superficie. Indiquemos con θ el ángulo, comprendido entre o y 2π, que debe girar sobre el plano tangente y en sentido positivo, la dirección positiva de la tangente á la línea v, hasta superponerse con la tangente á la curva C.

Si se mueve un punto M á lo largo de C, sus coordenadas curvilíneas u, v y las cartesianas x, y, z se pueden considerar como funciones de s; y tendremos

$$\cos(\mathrm{C}x) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds}, \quad \cos(\mathrm{C}y) = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{ds},$$

$$\cos(\mathrm{C}z) = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{ds}.$$

Y por consiguiente

$$\cos\theta = \cos(\mathrm{C}x)\cos(vx) + \cos(\mathrm{C}y)\cos(vy) + \cos(\mathrm{C}z)\cos(vz);$$

y sustituyendo los valores de los cosenos en el segundo miembro,

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\left(\mathrm{E}\frac{du}{ds} + \mathrm{F}\frac{dv}{ds}\right).$$

Pero, en virtud de (4), tendremos la identidad

$$\frac{1}{\mathrm{E}}\left(\mathrm{E}\frac{du}{ds} + \mathrm{F}\frac{dv}{ds}\right)^2 + \frac{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}{\mathrm{E}}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 1$$

y por consiguiente, $\operatorname{sen}\theta = \pm\dfrac{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}}{\sqrt{\mathrm{E}}}\dfrac{dv}{ds}$.

Y desaparecerá la indeterminación del signo, conviniendo en contar á θ como positivo, si v crece con s.

Tendremos pues, $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}}{\sqrt{\mathrm{E}}}\dfrac{dv}{ds}$.

De estas fórmulas y de las (5) y (6) se deduce

$$\operatorname{sen}(\omega - \theta) = \frac{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{du}{ds} \qquad (8)$$

y además $$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{EG - F^2}\,\frac{dv}{E\,du + F\,dv}, \tag{9}$$

por la cual se ve que el ángulo de inclinación de una curva, trazada en una superficie, depende solamente de la relación de los incrementos du, dv de las coordenadas curvilíneas á lo largo de la curva.

Si las líneas coordenadas son ortogonales, $F = 0$, y las fórmulas anteriores se reducen á

$$\cos\theta = \sqrt{E}\,\frac{du}{ds}, \quad \operatorname{sen}\theta = \sqrt{G}\,\frac{dv}{ds}, \quad \operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{G}{E}}\,\frac{dv}{du}. \tag{10}$$

160. Ortogonalidad de dos líneas. Vamos á establecer la condición de ortogonalidad de dos curvas C y C′ en un punto P, y expresando con δs el elemento del arco de C′ y con δu, δv los incrementos de las coordenadas curvilíneas, tendremos

$$\cos(C'x) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\delta u}{\delta s} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\delta v}{\delta s}, \quad \cos(C'y) = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\delta u}{\delta s} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\delta v}{\delta s},$$

$$\cos(C'z) = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\delta u}{\delta s} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\delta v}{\delta s};$$

y la condición de ortogonalidad

$$\cos(Cx)\cos(C'x) + \cos(Cy)\cos(C'y) + \cos(Cz)\cos(C'z) = 0$$

se reduce á $$E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = 0, \tag{11}$$

la cual expresa la condición para que dos elementos lineales, trazados desde el punto (u, v) de la superficie hasta dos puntos infinitamente próximos $(u + du)$, $(v + dv)$ y $(u + \delta u)$, $(v + \delta v)$, sean perpendiculares entre sí.

161. Segunda fórmula fundamental. Sean a, b, c los cosenos directores de la normal á la superficie y ω el ángulo de las líneas coordenadas. Tendremos

$$a = \frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v} & \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad b = \frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v} & \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$c = \frac{1}{\text{sen}\,\omega}\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v} & \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}, \qquad (1)$$

ó bien,

$$a = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix},$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}.$$

La *segunda fórmula fundamental de la superficie* es

$$\varphi = -(dx\,da + dy\,db + dz\,dc),$$

que en función de u y v puede escribirse así

$$\varphi = -\Sigma dx\,da = D\,du^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2.$$

Vamos á exponer las diversas formas de los coeficientes D, D′ y D″ de φ. Derivando las identidades

$$\Sigma a\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \qquad \Sigma a\frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

se obtiene:
$$\Sigma a\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -\Sigma\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u},$$

$$\Sigma a\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = -\Sigma\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} = -\Sigma\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

$$\Sigma a\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -\Sigma\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},$$

y tendremos
$$D = \Sigma a\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial u},$$

$$D' = \Sigma a \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = -\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial v} = -\Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial a}{\partial u},$$

$$D'' = \Sigma a \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -\Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial a}{\partial v},$$

y en virtud de las (1) se obtienen los valores bajo la forma

$$D = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad D' = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \cdots \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \cdots \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \cdots \end{vmatrix},$$

$$D'' = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

§ 2.° SISTEMAS ISOTERMOS

162. DEFINICIÓN. Consideremos descompuesta la forma cuadrática (4) en dos factores imaginarios conjugados

$$ds^2 = \left\{ \sqrt{E}\,du + (F + i\sqrt{EG - F^2}\,\frac{dv}{\sqrt{E}} \right\} \times \left\{ \sqrt{E}\,du + (F - i\sqrt{EG - F^2}\,\frac{dv}{\sqrt{E}} \right\}.$$

Pero según se ve en el cálculo integral, existen factores que al multiplicar por ellos ciertas diferenciales, las reducen á diferenciales exactas. Sea $\mu + i\nu$ un factor de esta clase, de manera que tengamos

$$(\mu + i\nu)\left[\sqrt{E}\,du + (F + i\sqrt{EG - F^2}\,\frac{dv}{\sqrt{E}}\right] = d\varphi + id\psi,$$

y por consiguiente

$$(\mu - i\nu)\left[\sqrt{\mathrm{E}}\,du + (\mathrm{F} - i\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\,\frac{dv}{\sqrt{\mathrm{E}}}\right] = d\varphi - id\psi;$$

multiplicando estas dos expresiones y haciendo $\lambda = \frac{1}{\mu^2 + \nu^2}$, tendremos

$$ds^2 = \lambda\,(d\varphi^2 + d\psi^2). \tag{1}$$

Estos sistemas ortogonales especiales que dan la forma (12) al elemento lineal de la superficie se llaman *sistemas isotermos*. Su obtención depende de la integración de

$$\sqrt{\mathrm{E}}\,du + (\mathrm{F} + i\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\,\frac{dv}{\sqrt{\mathrm{E}}} = 0.$$

ó
$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2 = 0. \tag{2}$$

Las *líneas imaginarias* de la superficie, que determina esta ecuación se llaman líneas de longitud nula, *rectas mínimas*. Están caracterizadas por que sus tangentes encuentran al círculo imaginario del infinito.

Su ecuación diferencial es

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0 \quad \text{ó} \quad ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2 = 0,$$

por medio de los parámetros u y v, que descompuesta en los dos factores lineales imaginarios da

$$\sqrt{\mathrm{E}}\,du + \frac{\mathrm{F} + i\Delta}{\sqrt{\mathrm{E}}}\,dv = 0, \quad \sqrt{\mathrm{E}}\,du + \frac{\mathrm{F} - i\Delta}{\sqrt{\mathrm{E}}}\,dv = 0, \tag{3}$$

expresando Δ^2 el discriminante $\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2$ que, como sabemos, no se anula. Los dos valores de $du : dv$ son imaginarios conjugados. Y si μ y ν son dos factores de integrabilidad, obtendremos dos diferenciales exactas

$$d\alpha = \mu\,(\sqrt{\mathrm{E}}\,du + \frac{\mathrm{F} + i\Delta}{\sqrt{\mathrm{E}}}\,dv), \tag{4}$$

$$d\beta = \nu\,(\sqrt{\mathrm{E}}\,du + \frac{\mathrm{F} - i\Delta}{\sqrt{\mathrm{E}}}\,dv), \tag{5}$$

ecuaciones, que por integración, conducen á

$$\varphi(u, v) = \alpha, \quad \psi(u, v) = \beta, \tag{6}$$

ecuaciones de las rectas mínimas.

El elemento lineal de la superficie adquiere una forma especial, pues si multiplicamos las ecuaciones (4) y (5), escribiendo por brevedad $\frac{1}{\mu.\nu} = \lambda^2$, será

$$ds^2 = \lambda^2 d\alpha . d\beta \tag{7}$$

en la que podemos introducir los parámetros u y v por medio de las ecuaciones (6). Resulta pues el

TEOREMA. *Si descomponemos el segundo miembro de*

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

en sus dos factores, que igualamos á cero, obtendremos dos ecuaciones diferenciales, cuyas integrales resueltas respecto á las constantes α *y* β *de la integración, adquieren la forma*

$$\varphi(u, v) = \alpha, \quad \psi(u, v) = \beta.$$

Si introducimos, por medio de estas ecuaciones, en vez de α *y* β, u *y* v *como parámetros en las ecuaciones de la superficie, el elemento lineal de ésta adoptará la forma* $ds^2 = \lambda^2 d\alpha d\beta$.

Ejemplo 1.º Sea el plano XY ($z = 0$).

El elemento lineal es

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (dx + idy)(dx - idy).$$

Las ecuaciones (3) dan

$$dx + idy = 0, \quad dx - idy = 0;$$

é integrando $\quad x + iy = 0, \quad x - iy = 0.$

Introduciendo α y β, resulta $ds^2 = d\alpha . d\beta$.

Ejemplo 2.º Sea la esfera de radio $= 1$.

Las ecuaciones de la misma son

$$x = u \cos v, \quad y = u \operatorname{sen} v, \quad z = \sqrt{1 - u^2}, \tag{8}$$

y el elemento lineal $\quad ds^2 = \frac{du^2}{1 - u^2} + u^2 dv^2.$

Las ecuaciones (3) dan

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}+iu\,dv=0,\quad \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}-iu\,dv=0,$$

é integrando, resulta (9)

$$-l\,\frac{1+\sqrt{1-u^2}}{u}+iv=l\alpha,\quad -l\,\frac{1+\sqrt{1-u^2}}{u}-iv=l\beta.$$

Multiplicando estas ecuaciones, tendremos

$$\alpha\beta\,\frac{1+\sqrt{1-u^2}}{u}=1,\quad \left(\frac{u}{\sqrt{\alpha\beta}}-1\right)^2=1-u^2$$

y efectuando operaciones, después de reducir, será

$$u=\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{1+\alpha\beta}. \tag{10}$$

De igual modo, de las ecuaciones (9) resulta

$$iv=l\alpha\,\frac{1+\sqrt{1-u^2}}{u},\quad -iv=l\beta\,\frac{1+\sqrt{1-u^2}}{u}.$$

Sustituyendo el valor de u, obtenemos las ecuaciones

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha\beta}}=\cos v+i\operatorname{sen}v,\quad \frac{\beta}{\alpha\beta}=\cos v-i\operatorname{sen}v,$$

y,

$$\cos v=\frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{\alpha\beta}},\quad \operatorname{sen}v=\frac{\alpha-\beta}{2i\sqrt{\alpha\beta}}. \tag{11}$$

y siendo $\lambda^2=\dfrac{4\alpha\beta}{(1+\alpha\beta)^2}$ será $ds^2=\dfrac{4\,d\alpha\,d\beta}{(1+\alpha\beta)^2}$. (12)

Si sustituímos los valores de u, $\cos v$ y $\operatorname{sen} v$ en (8) resultará

$$x=\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta},\quad y=\frac{i(\beta-\alpha)}{1+\alpha\beta},\quad z=\frac{\alpha\beta-1}{1+\alpha\beta}. \tag{13}$$

En muchos casos es conveniente sustituir el parámetro β por $-\dfrac{1}{\beta}$, siendo por tanto α y $-\dfrac{1}{\beta}$ imaginarios conjugados.

Las ecuaciones (12) y (13) se reducen á

$$ds^2 = \frac{4\,d\alpha\,d\beta}{(\alpha-\beta)^2},$$

$$x = \frac{1-\alpha\beta}{\alpha-\beta}, \quad y = \frac{i(1+\alpha\beta)}{\alpha-\beta}, \quad z = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}.$$

Los sistemas isotermos están caracterizados por una propiedad geométrica. Para enunciarla, observaremos que el cuadrilátero construído entre dos líneas φ y ψ y las dos infinitamente próximas en los sistemas respectivos $\varphi + d\varphi$ y $\psi + d\psi$, pueden considerarse como un rectángulo. Pero si el sistema es isotermo, y se hace crecer á φ y ψ por incrementos $d\varphi$ y $d\psi$ constantes, tomando además $d\varphi = d\psi$, se tiene que: *Los sistemas isotermos dividen á la superficie en cuadrados infinitesimales*, ó en otra forma, siendo

$$ds_u = \lambda\,du, \quad ds_v = \lambda\,dv,$$

construyamos en la superficie las curvas $u = \text{const}$, así como la $v = \text{const}$, tomando respectivamente las series de valores

$u, \; u + du, \; u + 2du, \; \ldots\ldots \; v, \; v + dv, \; v + 2dv, \; \ldots\ldots$

Y si $ds_u = ds_v$, tendremos un sistema de curvas isométrico. Y podremos enunciar el

TEOREMA. *La condición necesaria y suficiente para que el sistema de curvas coordenas sea isométrico es que se verifiquen las ecuaciones*

$$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{G}} = \frac{\psi(\mathrm{u})}{\varphi(\mathrm{v})}, \quad \mathrm{F} = 0,$$

siendo ψ y φ respectivamente funciones de u *y de* v.

Ejemplo. Sea la esfera de radio $= 1$.

Podemos hacer en (12) y (13) $\alpha = u + iv$, $\beta = u - iv$, y obtendremos

$$x = \frac{2u}{u^2+v^2+1}, \quad y = \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \quad z = \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}.$$

$$ds^2 = \frac{4\,(u^2+dv^2)}{(u^2+v^2+1)^2}.$$

Las curvas $u=\text{const}$ y $v=\text{const}$ son circunferencias que pasan por el punto ($x=0$, $y=0$, $z=1$) y cuyos planos son respectivamente paralelos al eje de las X y al eje de las Y.

Observación 1.ª Lamé definió las curvas isotermas, con relación á la teoría del calor, en la que tienen su origen. Y en efecto, se demuestra en la Teoría matemática del calor que, si los puntos de un plano se hallan en equilibrio de temperatura, es decir, si la temperatura V en cada punto es simplemente función de las coordenadas x é y de este punto, y no del tiempo, esta función $V(x, y)$ satisface á la ecuación

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0. \tag{1}$$

Para cierto estado de equilibrio de temperatura, una familia de curvas $\varphi(x, y)=\text{const}$ se llama *isoterma*, si la temperatura es la misma para todos los puntos de cada una de estas curvas. Esta variará de una á otra curva. Para que las curvas $\varphi=C$ sean isotermas, es necesario y suficiente que exista una función de φ que satisfaga á la ecuación (1), puesto que $V(x, y)$ debe ser una función de φ.

Vamos á hallar la condición para que sea así: Supongamos $V=V(\varphi)$. Sustituyendo en (1) resulta

$$\frac{d^2 V}{d\varphi^2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{\partial V}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)=0,$$

ó $$\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}:\frac{\partial V}{\partial\varphi}=-\left[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right):\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right].$$

Puesto que el primer miembro solo depende de φ, también el segundo. Pero φ está dada, por lo que podremos formar el segundo miembro. La condición necesaria para que la familia $\varphi=C$ sea isoterma, es que dicho segundo miembro se reduzca á una función de φ. Esta condición es también suficiente porque, si queda satisfecha, la relación precedente permite hallar la función $V(\varphi)$ por una cuadratura.

2.ª Si φ satisface á la ecuación $\Delta_2\varphi = 0$, ó sea

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) = 0.$$

La expresión

$$-\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}\,du + \frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\,dv$$

es la diferencial exacta de cierta función ψ, y se tiene

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = -\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial v} = \frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}. \qquad (1)$$

Estas ecuaciones, resueltas respecto á φ, dan

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{E\frac{\partial\psi}{\partial v} - F\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = -\frac{G\frac{\partial\psi}{\partial u} - F\frac{\partial\psi}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

La función ψ determinada, salvo una constante arbitraria, por las ecuaciones (1), es á su vez una solución de $\Delta_2\psi = 0$, que llamaremos *solución conjugada* de φ.

Observaremos, respecto á las fórmulas (1), que si el sistema primitivo (u, v) es ya isotermo, se reducen simplemente á

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\partial\psi}{\partial v}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = -\frac{\partial\psi}{\partial u}.$$

Estas ecuaciones expresan que $\varphi + i\psi$ es una función de la variable compleja $u + iv$. Y puesto que cambiando ψ en $-\psi$, la ecuación característica $ds^2 = \lambda\,(d\varphi^2 + d\psi^2)$ no cambia, tendremos que:

Si está dado en la superficie S *un sistema isotermo* (φ, ψ), *cualquier otro sistema isotermo* (φ', ψ') *se obtiene haciendo*

$$\varphi' + i\psi' = F(\varphi \pm i\psi),$$

siendo F *el símbolo de una función arbitraria de variable compleja.*

Supongamos que el elemento lineal $ds^2 = \lambda^2 d\alpha\, d\beta$ se haya escrito de dos maneras distintas bajo la forma

$$ds^2 = \lambda^2 d\alpha d\beta = \lambda'^2 d\alpha' d\beta'. \tag{1}$$

Vamos á ver que esta ecuación solo puede verificarse cuando α' y β' dependen de una sola de las variables α y β.

En efecto, si se suponen α' y β' expresadas en función de las variables α y β, y sustituímos $d\alpha'$ y $d\beta'$ por sus valores

$$\frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha} d\alpha + \frac{\partial\alpha'}{\partial\beta} d\beta, \qquad \frac{\partial\beta'}{\partial\alpha} d\alpha + \frac{\partial\beta'}{\partial\beta} d\beta,$$

la identidad (1) conducirá á las tres ecuaciones

$$\frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha}\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha} = 0, \quad \frac{\partial\alpha'}{\partial\beta}\frac{\partial\beta'}{\partial\beta} = 0, \quad \frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha}\frac{\partial\beta'}{\partial\beta} + \frac{\partial\alpha'}{\partial\beta}\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha} = \frac{\lambda^2}{\lambda'^2}.$$

La primera no puede tener lugar más que en el caso de ser α' y β' dependientes de la sola variable α; y considerando la segunda, tendremos los dos sistemas de soluciones

$$\alpha' = F(\alpha), \quad \beta' = F_1(\beta); \quad \alpha' = F(\beta), \quad \beta' = F_1(\alpha). \tag{2}$$

Luego: *Cuando el elemento lineal tiene la forma* $ds^2 = \lambda^2 d\alpha d\beta$, *solo se podrá conservar esta forma al elemento lineal, cuando se sustituye á las variables* α *y* β *las variables* α' *y* β' *determinadas por uno de los dos sistemas* (2).

163. Red isométrica. Liouville demostró que se puede adoptar, en una superficie, un sistema de coordenadas tales, que se tenga $E = G$, $F = 0$, donde $E = 0$, $G = 0$, razonando de la manera siguiente:

Tenemos $\quad ds^2\, E du^2 + 2F du dv + G dv^2$.

Descomponiendo el segundo miembro en dos factores de la forma $P du + Q dv$, estos factores serán imaginarios conjugados, que tendrán factores de integrabilidad también conjugados $m + ni$, $m - ni$, que los transformarán en las diferenciales exactas $d\alpha + id\beta$, $d\alpha - id\beta$; y podremos escribir

$$ds^2 = \frac{d\alpha + id\beta}{m + in}\,\frac{d\alpha - id\beta}{m - in} \quad \text{ó} \quad ds^2 = \frac{d\alpha^2 + d\beta^2}{m^2 + n^2}.$$

Se puede pues, tomar de una infinidad de maneras $E = G$, $F = 0$. Las líneas coordenadas forman lo que se llama una *red isométrica.*

§ 3.° Representación conforme

164. Definiciones. Cuando se ha establecido entre los puntos de dos superficies S y S′ una correspondencia tal, que á cada punto M′ de la superficie S′ corresponde un punto M (imagen en S); y que moviéndose éste en S con continuidad, el punto M′ se mueva con continuidad en S′, diremos que la superficie S′ está representada en S. Esta representación es perfecta cuando satisface á las dos condiciones siguientes:

1.° Igualdad de ángulos correspondientes. 2.° Proporcionalidad en las áreas correspondientes.

Pero si entre S y S′ no existen relaciones especiales, tendremos que limitarnos á establecer la correspondencia entre las dos superficies, de manera que se cumpla una de estas dos condiciones.

Nos limitaremos á tratar de la primera representación ó *representación conforme* según expresó Gauss que estableció esta teoría.

Sean (u, v) y (u', v') los dos sistemas de coordenadas que se consideran en las dos superficies, cuyos elementos diferenciales serán

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{1}$$

$$ds'^2 = E'du'^2 + 2F'du'dv' + G'dv'^2. \tag{2}$$

Si por la representación, á cada punto (u', v') de la segunda superficie debe corresponder un punto (u, v) de la primera, esto significa analíticamente que (u', v) deberán ser funciones de (u', v') y vice-versa. Supongamos

$$u' = u'(u, v) \qquad v' = v'(u, v), \tag{3}$$

y que estas funciones sean finitas y continuas, así como sus derivadas $\frac{\partial u'}{\partial u}, \frac{\partial u'}{\partial v}, \frac{\partial v'}{\partial u}, \frac{\partial u'}{\partial v}$ en toda la superficie S′, sobre la que se hace la representación.

Si por medio de las (3) operamos en la (2), tendremos

$$ds'^2 = E_1 du^2 + 2F_1 du dv + G_1 dv^2,$$

donde se ha hecho, por brevedad,

$$E_1 = E'\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + 2F'\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial u} + G'\left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2,$$

$$F_1 = E'\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v} + F'\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u}\right) + G'\frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v},$$

$$G_1 = E'\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 + 2F'\frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial v} + G'\left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2.$$

La condición impuesta á la representación exige la semejanza de las partes infinitesimales, ó sea que la relación $\frac{ds'}{ds}$ de dos elementos lineales correspondientes que unen en S y S' los puntos (u, v), $(u + du, v + dv)$, pudiendo depender de la posición del punto en S, sea independiente de las direcciones de dichos elementos, es decir, que se tenga

$$\frac{ds'^2}{ds^2} = \frac{E_1 + 2F_1\frac{dv}{du} + G_1\left(\frac{dv}{du}\right)^2}{E + 2F\frac{dv}{du} + G\left(\frac{dv}{du}\right)^2}$$

independientemente del valor del cociente $\frac{dv}{du}$, lo que da las proporciones

$$\frac{E_1}{E} = \frac{F_1}{F} = \frac{G_1}{G}, \tag{4}$$

que son dos ecuaciones de derivadas parciales de primer orden, cuya integración resuelve el problema propuesto. Pero independientemente de los teoremas generales acerca de la existencia de la integral, se puede resolver de muchas maneras en el caso de estar representadas las dos superficies por sistemas isotermos.

165. Resolución del problema. Teorema. *En toda re-*

presentación conforme, á un sistema ortogonal isotermo en la primera superficie corresponde un sistema ortogonal isotermo de la segunda.

En efecto, se tiene en S un sistema ortogonal isotermo (α, β) que puede suponerse reducido á los parámetros isométricos, de modo que se tenga para el elemento lineal ds

$$ds^2 = \lambda (d\alpha^2 + d\beta).$$

Debiendo conservarse en S′ los ángulos, corresponderá un sistema ortogonal, que conservará los parámetros α y β, y tendremos

$$ds'^2 = E_1 d\alpha^2 + G_1 d\beta^2.$$

Pero, puesto que la representación es conforme, deberán quedar satisfechas las ecuaciones (4), y por consiguiente será $\frac{E_1}{\lambda} = \frac{G_1}{\lambda}$, esto es, $E_1 = G_1$ lo que demuestra que el sistema (α, β) sobre S′ es también isotermo, y α y β son parámetros isométricos.

RECÍPROCAMENTE. *Si en una representación de* S′ *sobre* S *se hace corresponder á un sistema isotermo en* S *un sistema isotermo en* S′, *podrá determinarse la relación entre los parámetros, de manera que la representación sea conforme.*

Se tiene, en efecto, en S el sistema isotermo (α, β) reducido á los parámetros isométricos con $ds^2 = \lambda (d\alpha^2 + d\beta^2)$ y análogamente el sistema isotermo (α', β') en S′ con $ds'^2 = \lambda' (d\alpha'^2 + d\beta'^2)$.

Si queremos que corresponda al sistema (α, β) el (α', β'), será necesario tomar

$$\alpha' = \varphi(\alpha), \qquad \beta' = \psi(\beta)$$

y se tendrá: $$ds'^2 = \lambda' \left[\left(\frac{d\varphi}{d\alpha}\right)^2 d\alpha^2 + \left(\frac{d\psi}{d\beta}\right)^2 d\beta^2 \right].$$

La condición impuesta á la representación exige que se tenga

$$\frac{\lambda' \left(\frac{d\varphi}{d\alpha}\right)^2}{\lambda} = \frac{\lambda \left(\frac{d\psi}{d\beta}\right)^2}{\lambda} \quad \text{ó} \quad \frac{d\varphi}{d\alpha} = \pm \frac{d\psi}{d\beta} = m,$$

donde m es una constante. Integrando, resulta

$$\alpha' = \varphi(\alpha) = m\alpha + n, \qquad \beta' = \psi(\beta) = \pm m\beta + n',$$

siendo m, n, n' constantes arbitrarias reales; es por tanto necesario hacer

$$\alpha' + i\beta' = m\,(\alpha \pm i\beta) + c, \tag{5}$$

con la constante real m. Esto sentado, sean (α, β) y (α_1, β_1) dos sistemas isotérmicos (reducidos á parámetros isométricos) en S y S'. Si suponemos que existe una representación conforme de S' en S, al sistema isotermo (α, β) en S deberá corresponder un sistema isotermo (α', β') en S', que podremos suponer reducido á parámetros isométricos. Entonces se verificarán entre $\alpha' + i\beta'$ y $\alpha \pm i\beta$ las relaciones (5). Por otra parte, siendo (α_1, β_1) otro sistema isotermo en S', se deberá tener

$$\alpha_1 + i\beta_1 = \mathrm{F}\,(\alpha' \pm i\beta');$$

y por consiguiente será

$$\alpha_1 + i\beta_1 = \pi\,(\alpha \pm i\beta). \tag{6}$$

Así pues: *Si en* S *y* S' *se conocen dos sistemas isotermos* (α, β) *y* (α_1, β_1) *reducidos á parámetros isométricos, el modo más general de obtener una representación conforme de la una superficie sobre otra, está dado por la fórmula* (6) *en la que* π *es el símbolo de una función arbitraria.*

166. REPRESENTACIÓN CONFORME DE UN PLANO SOBRE OTRO. Consideremos dos planos referidos á las coordenadas rectangulares (x, y) y (X, Y), y establezcamos la correspondencia

$$\mathrm{X} = \mathrm{P}\,(x, y), \qquad \mathrm{Y} = \mathrm{Q}\,(x, y)$$

entre sus puntos.

Según se ve (pág. 255) la condición necesaria y suficiente para que la transformación conserve los ángulos es que

$$d\mathrm{X}^2 + d\mathrm{Y}^2 = \lambda\,(dx^2 + dy^2),$$

siendo λ independiente de las diferenciales, es decir, dependiente solo de x é y. Esta condición equivale á las dos relaciones

$$\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}\right)^2, \quad \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} = 0.$$

Estas condiciones que deben verificar las funciones P y Q, se pueden simplificar, pues la segunda se reduce á

$$\frac{\partial P}{\partial x} : \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} : -\frac{\partial Q}{\partial y},$$

siendo $\pm \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2} : \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2}$

el valor común de dichas relaciones, que es igual, en virtud de la primera ecuación, á ± 1. Se tiene pues

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{ó} \quad \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = +\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Y, para pasar del segundo sistema al primero, basta cambiar Q en $-$Q.

Sea el primer sistema. Si P y Q satisfacen á las relaciones correspondientes, la transformación $X = P(x, y)$, $Y = Q(x, y)$ conserva los ángulos, y efectúa por tanto la *representación conforme* entre los dos planos.

Ejemplo 1.º Plano con plano. Sean (x, y) y (x_1, y_1) las coordenadas de dos puntos correspondientes. Las fórmulas más generales de la representación conforme son (F y F_1 expresan dos funciones conjugadas)

$$x + iy = F(x_1 + iy_1), \quad x - iy = F_1(x_1 - iy_1) \qquad (1)$$

ó $$x + iy = F(x_1 - iy_1), \quad x - iy = F_1(x_1 + iy_1). \qquad (2)$$

Sea como ejemplo en (1), $F(\mathfrak{z}) = \dfrac{a^2}{\mathfrak{z}}$, expresando a una constante y $\mathfrak{z}$ el argumento complejo de $x \pm iy$, lo que constituye la *representación por radios vectores recíprocos.* Las fórmulas de representación son

$$x + iy = \frac{a^2}{x_1 + iy_1}, \quad x - iy = \frac{a^2}{x_1 - iy_1}.$$

De estas fórmulas resulta

$$x^2 + y^2 = \frac{a^4}{x_1^2 + y_1^2}, \quad \frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1} \quad \text{ó} \quad x = \frac{a^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \; y = \frac{a^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2}$$

Para esta representación geométrica, consideremos superpuestos los planos, de manera que $+X$ y $+Y$ coincidan con $+X_1$ y $+Y_1$. Tendremos así una representación del plano consigo mismo.

Ejemplo 2.º Sea la ecuación que representa el sistema de elipses é hipérbolas homofocales

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1.$$

Si $\lambda^2 > c^2$, se tiene una elipse y si $\lambda^2 < c^2$ una hipérbola. Hagamos $c = 1$, y consideremos las curvas

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - 1} = 1 \quad \text{con} \quad \lambda^2 > 1 \qquad \text{(elipses)}$$

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - 1} = 1 \quad 0 < \mu^2 < 1 \qquad \text{(hipérbolas).}$$

Supongamos x é y positivos. A todo valor de λ^2 y μ^2 corresponde un punto (x, y). Y se tiene resolviendo

$$x^2 = \lambda^2\mu^2, \quad y^2 = (\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2),$$

de lo que resulta

$$dx^2 + dy^2 = 4(\lambda^2 - \mu^2)\left(\frac{d\lambda^2}{\lambda^2 - 1} + \frac{d\mu^2}{1 - \mu^2}\right).$$

Pero, si se hace $\dfrac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} = d\alpha, \quad \dfrac{d\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} = d\beta,$

se tendrá $\quad dx^2 + dy^2 = m(d\alpha^2 + d\beta^2);$

luego la correspondencia entre (x, y) y (α, β) conserva los ángulos.

Se tiene por otra parte

$$\alpha = \log(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}), \qquad \beta = \text{arc sen}\, \mu;$$

y, por consiguiente, sustituyendo λ y μ por sus valores en función de α y β,

$$x = \frac{1}{2}(e^{\alpha} + e^{-\alpha}) \text{ sen}\, \beta, \quad y = \frac{1}{2}(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) \cos\beta. \qquad (2)$$

Esta transformacion entra en el segundo tipo. Cuando el punto (α, β) describe en su plano una paralela á uno de los ejes, el punto (x, y) describe una elipse ó una hipérbola. Estas elipses é hipérbolas son homofocales.

La transformación (2) que conserva los ángulos, transforma estas elipses y estas hipérbolas en dos sistemas de rectas

$$\alpha = \text{const.}, \quad \beta = \text{const.}$$

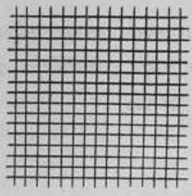


Figura 91

Estos sistemas de rectas forman sistemas isotermos; y podremos enunciar el

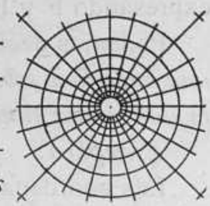


Figura 92

Teorema de Lamé. *Las elipses y las hipérbolas homofocales forman un sistema de curvas ortogonales isotermas.*

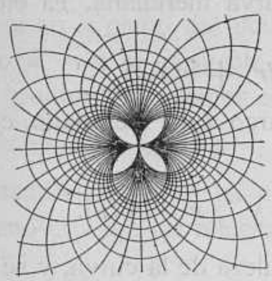


Figura 93

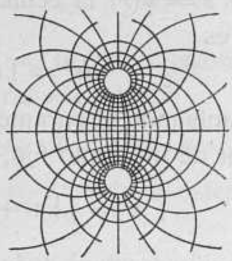


Figura 94

Observación. La transformación por radios vectores recíprocos cambia entre sí sistemas ortogonales, un sistema isotermo en otro. Así:

1.° Un sistema isotermo de dos series de rectas se transforma en el sistema de todas las circunferencias que pasan por un punto, siendo tangentes á una de dos rectas perpendiculares entre sí (figuras 91 y 93).

2.° Un sistema isotermo formado por circunferencias concéntricas y sus radios se cambia en un sistema de circunferencias de las que, una serie está formada por todas las que pasan por dos puntos fijos, mientras que la otra se compone de los círculos ortogonales á los primeros (figuras 92 y 94).

3.º Sistemas isotermos de elipses é hipérbolas confocales en sistemas isotermos de dos series de curvas de 4.º orden (*).

167. Representación de la esfera en el plano. Consideremos las ecuaciones del *ejemplo* tratado en la pág. 249. Tomando x_1, y_1 por coordenadas del plano, será (6) (pág. 256)

$$u + iv = F(x_1 + iy_1), \quad u - iv = F_1(x_1 - iy_1),$$

expresando F y F_1 dos funciones conjugadas.

Podemos decir, que: *La representación conforme más general de una superficie sobre otra se obtiene igualando la variable compleja de la una á una función de la variable compleja de la otra.*

Ejemplo 1.º Superficies de revolución.

Las coordenadas son

$$x = r\cos\omega, \quad y \operatorname{sen}\omega, \quad z = \varphi(r),$$

siendo $z = \varphi(r)$ la ecuación de la curva meridiana. El elemento lineal es

$$ds^2 = [1 + \varphi'^2(r)]\, dr^2 + r^2 d\omega^2.$$

Cambiando el parámetro r por el arco u del meridiano, contado á partir de un punto fijo, tendremos

$$u = \int \sqrt{1 + \varphi'^2(r)}\, dr \quad \text{y} \quad r = \psi(u).$$

La función ψ estará dada por la naturaleza de la curva, y se tendrá

$$ds^2 = du^2 + r^2 d\omega^2.$$

Corolario. *En toda superficie de revolución los meridianos y los paralelos forman un sistema ortogonal isotermo.*

Observación. Por ser

$$ds^2 = r^2\left(\frac{du^2}{r^2} + d\omega^2\right),$$

se ve que los *parámetros isométricos* son ω y $u_1 = \int \frac{du}{r}$.

Ejemplo 2.º Esfera. Sea $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Tenemos $x = \operatorname{sen} u \cos v, \quad y = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \quad z = \cos u,$

(*) Sofus Lie *Geometrie der Berührungstransformationen.* Erst. Band. p. 8

siendo v la longitud y la u la distancia angular del punto al polo $u = 0$, ó sea el complemento de la latitud. Tendremos

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{sen}^2 u\, dv^2 \qquad u_1 = \int \frac{du}{\operatorname{sen} u} = \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} u.$$

Podremos hacer la *representanción estereográfica polar*, tomando como variable compleja en la esfera

$$\tau = e^{-u_1 + iv} \quad ó \quad \tau = \cot \frac{1}{2} u \,.\, e^{+iv}$$

y por variable compleja ζ en el plano del ecuador $\zeta = \rho e^{i\theta}$; y haciendo $\tau = \zeta$, ó sea

$$\rho = \cot \frac{u}{2}, \quad \theta = v,$$

tendremos la representación conforme de la esfera en el plano del ecuador. Desde el polo $u = 0$ se proyecta el punto M (u, v) de la esfera en el plano ecuatorial. Podemos considerar la transformación

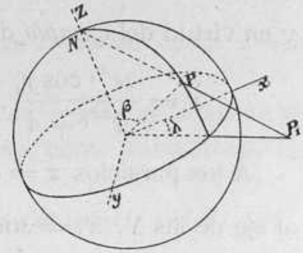


Figura 95

$$u + iv = x_1 + iy_1, \quad u - iv = x_1 - iy_1 \quad ó \quad x_1 = u, \quad y_1 = v.$$

Y tendremos entre las coordenadas (x, y, z) de la esfera y las del plano (x_1, y_1), las relaciones

$$x = \frac{2x_1}{x_1^2 + y_1^2 + 1}, \quad y = \frac{2y_1}{x_1^2 + y_1^2 + 1}, \quad z = \frac{x_1^2 + y_1^2 - 1}{x_1^2 + y_1^2 + 1}.$$

Mediante estas fórmulas se corresponde cada punto (x_1, y_1) del plano con un punto (x, y, z) de la esfera; y de ellas se deducen las siguientes:

$$x_1 (1 - z) = x, \quad y_1 (1 - z) = y.$$

En la figura 95 se establece la correspondencia, de manera que coincidan los ejes de las x y de las y del plano y de la esfera. Rectas trazadas por el origen y círculos concéntricos cuyo centro es el origen, representan á los meridianos y á los paralelos. A un círculo de la esfera cuyo plano es

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

corresponde en el plano la curva

$$2Ax_1 + 2By_1 + C(x^2_1 + y^2_1 - 1) + D(x^2_1 + y^2_1 + 1) = 0,$$

que es una circunferencia.

3.º Proyección de Mercator. Tenemos la representación

$$u + iv = e^{x_1 + iy_1}, \quad u - iv = e^{x_1 - iy_1}$$

que conduce á $u = e^{x_1} \cos y_1, \quad v = e^{y_1} \operatorname{sen} y_1$

y en virtud del *ejemplo* de la pág. 249

$$x = \frac{2e^{x_1} \cos y_1}{e^{2x_1} + 1}, \quad y = \frac{2e^{x_1} \operatorname{sen} y_1}{e^{2x_1} + 1}, \quad z = \frac{e^{2x_1} - 1}{e^{2x_1} + 1}.$$

Á los paralelos $z =$ const. corresponden en el plano paralelas al eje de las Y, $x_1 =$ const., á los meridianos $\frac{y}{x} =$ const. de la esfera las paralelas al eje $X_1 =$ const., $y_1 =$ const., resultando en el plano, dos series de paralelas que se cortan perpendicularmente.

4.º Determinar todos los sistemas ortogonales de círculos ó de rectas sobre el plano. La condición necesaria y suficiente para que dos círculos de la esfera se corten según ángulo recto es que el plano del uno pase por el polo del otro. Y debiendo, por consiguiente, los polos de los planos de los círculos de uno de los sistemas (C), hallarse situados en cada plano de un círculo de (C′), su lugar es la recta r', por la que pasan todos los planos del segundo sistema. Y análogamente todos los planos de los círculos del sistema (C) pasan por una recta r, que es la polar recíproca de r' respecto á la esfera.

De esto concluímos que el modo más general de construir un doble sistema ortogonal de círculos de la esfera, es cortarla por dos haces de planos, cuyos ejes sean rectas polares recíprocas respecto á la esfera.

Supongamos en primer lugar que la recta r no sea tangente á la esfera, ó que su polar recíproca r' corte á la esfera en dos puntos reales distintos, que serán comunes á todos los círculos del sistema respectivo. Proyectando estereográficamente sobre el plano, tendremos:

a) Dos haces ortogonales de círculos, uno con dos puntos de base real, y el otro con puntos de base imaginarios.

En particular, si r es el eje polar de la esfera, el sistema 1.º se cambia en las rectas de un haz y en círculos con el centro en el centro del haz.

Si r es tangente á la esfera, r' será tangente á la esfera en el mismo punto, en dirección ortogonal á r, y por proyección estereográfica se obtiene en el plano:

b) Dos sistemas de círculos tangentes en el mismo punto á dos rectas ortogonales.

En particular, si el punto de contacto de r, r' con la esfera es el polo de proyección, tenemos en el plano, como caso límite, un sistema doble ortogonal de rectas.

168. Representación de la esfera en sí misma. De

$$x = \frac{1 - \alpha\beta}{\alpha - \beta}, \quad y = \frac{i(1 + \alpha\beta)}{\alpha - \beta}, \quad z = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$$

resulta
$$ds^2 = \frac{4\,d\alpha\,d\beta}{(\alpha - \beta)^2}.$$

Á cada par de valores α, β corresponde un punto de la esfera real, cuando α y $-\frac{1}{\beta}$ son imaginarios conjugados. Á otro par α_1, β_1 análogo, corresponde un punto (x_1, y_1, z_1) de la esfera

$$x_1 = \frac{1 - \alpha_1\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1}, \quad y_1 = \frac{i(1 + \alpha_1\beta_1)}{\alpha_1 - \beta_1}, \quad z_1 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{\alpha_1 - \beta_1},$$

siendo el elemento lineal $ds_1^2 = \dfrac{4\,d\alpha_1\,d\beta_1}{(\alpha_1 - \beta_1)^2}$.

Hagamos $\qquad \alpha_1 = \mathrm{F}(\alpha), \quad \beta_1 = \mathrm{F}_1(\beta).$

Á cada punto de la esfera (α, β) corresponde otro (α_1, β_1). La esfera queda representada por sí, y por representación conforme, cuando se corresponden las rectas mínimas.

Si al hacer girar á la esfera alrededor de su centro, expresamos por la variable compleja τ los puntos de la esfera y por τ' el punto á que llega τ, después del movimiento; en virtud de ser iguales dos figuras descritas por puntos correspondientes τ y τ', será τ' una función lineal de τ

$$\tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}, \tag{1}$$

ya que τ' tiene tan solo un valor para un valor de τ é inversamente y además, porque en la esfera como en el plano de representación, á cada circunferencia descrita por τ corresponde una circunferencia descrita por τ'. Y las representaciones conformes del plano en el mismo, que cambian circunferencias en circunferencias, se dan mediante sustituciones lineales.

Igualemos á 1 el determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ de la sustitución lineal, que es distinto de cero. Y vamos á obtener las relaciones particulares que deben existir entre los coeficientes α, β, γ, δ para que la sustitución represente un movimiento de la esfera. Para ello, expresemos el elemento lineal

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{sen}^2 u\, dv^2$$

de la esfera mediante la variable compleja τ y su conjugada τ_0.

Siendo $\tau = \cot \frac{1}{2} u e^{iv}, \quad \tau_0 = \cot \frac{1}{2} u e^{-iv},$

resulta que $$ds^2 = \frac{4\, d\tau\, d\tau_0}{(\tau\tau_0 + 1)^2}.$$

Para que la sustitución (1) represente un movimiento, es necesario y suficiente que sea

$$\frac{d\tau' d\tau'_0}{(\tau'\tau'_0 + 1)^2} = \frac{d\tau d\tau_0}{(\tau\tau_0 + 1)^2};$$

y siendo, en virtud de (1),

$$d\tau' = \frac{d\tau}{(\gamma\tau + \delta)^2}, \quad d\tau = \frac{d\tau_0}{(\gamma_0\tau_0 + \delta_0)^2},$$

$$(\alpha\tau + \beta)(\alpha_0\tau_0 + \beta_0) + (\gamma\tau + \delta)(\gamma_0\tau_0 + \delta_0) = \tau\tau_0 + 1.$$

Puesto que la última relación se verifica para cualquier valor de τ, será

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\alpha_0+\gamma\gamma_0=1\\ \beta\alpha_0+\delta\gamma_0=0\end{array}\right\}\qquad \left.\begin{array}{l}\alpha\beta_0+\gamma\delta_0=0\\ \beta\beta_0+\delta\delta_0=1\end{array}\right\}$$

que por ser $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, se reducen á las condiciones necesarias y suficientes, $\delta=\alpha_0$, $\gamma=-\beta_0$, esto es, que δ es la conjugada de α y γ la conjugada de β, cambiada de signo. Resulta pues, el

TEOREMA. *El movimiento más general de la esfera compleja en sí misma se representa mediante la sustitución lineal*

$$\tau'=\frac{\alpha\tau+\beta}{-\beta_0\tau+\alpha_0},\qquad \alpha\alpha_0+\beta\beta_0=1.$$

169. EJEMPLOS DE REPRESENTACIÓN CONFORME. La teoría de las funciones de una variable compleja ofrece sistemas de funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ que permiten efectuar una representación conforme.

Consideremos una fracción racional de z, $F(z)$, cuyos coeficientes son cantidades reales ó imaginarias. Hagamos $z=x+iy$; y podremos escribir $F(z)$ bajo la forma $P(x, y)+iQ(x, y)$ siendo P y Q funciones racionales de x y de y. Derivando, sucesivamente los dos miembros de la identidad

$$F(z)=P(x,y)+iQ(x,y)$$

con relación á x é y; siendo P y Q funciones racionales reales, tendremos

$$F'(z)=\frac{\partial P}{\partial x}+i\,\frac{\partial Q}{\partial x},\qquad iF'(z)=\frac{\partial P}{\partial y}+i\,\frac{\partial Q}{\partial y},$$

de lo que resulta $i\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+i\,\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial P}{\partial y}+i\,\dfrac{\partial Q}{\partial y}$;

luego $$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y},\qquad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

La transformación $X=P(x, y)$, $Y=Q(x, y)$ conservará los ángulos.

Sea $$F(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (1) \qquad (ad - bc \neq 0).$$

expresando a, b, c, d cuatro constantes reales ó imaginarias.

Tenemos la sustitución lineal $Z = \frac{az+b}{cz+d}$ que establece la correspondencia entre el punto (X, Y) y el (x, y). Esta correspondencia resulta de las transformaciones siguientes:

1.º Consideremos la sustitución $Z = az$.

Haciendo $Z = Re^{i\Omega}$, $z = re^{i\omega}$, $a = ke^{i\alpha}$,

se tendrá $R = kr$, $\Omega = \omega + \alpha$.

Esta transformación consiste en tomar el punto homotético del z, y hacerle girar después en un ángulo α alrededor del origen.

2.º Sea $Z = z + b$. Esta transformación equivale á una traslación igual y paralela á la recta que une el origen con el punto correspondiente á la cantidad imaginaria b.

3.º Sea $Z = \frac{1}{z}$. Se téndrá $R = \frac{1}{r}$, $\Omega = -\omega$.

El punto (X, Y) es el simétrico, respecto á Ox del punto transformado de (x, y) por radios vectores recíprocos.

Caso general. La transformación $Z = \frac{az+b}{cz+d}$, se obtiene combinando las anteriores. En efecto, podemos hacer $Z = p + \frac{1}{cz+d}$, y sucesivamente $z' = cz$, $z'' = z' + d$, $z''' = \frac{1}{z''}$, $Z = p + z'''$.

Teorema. *La transformación* (1) *transforma en general, una circunferencia en otra circunferencia*, pues cada una de las transformaciones parciales en general, efectúa dicha transformación.

170. Transformación del semi-plano. Supongamos $ad - bc = 1$.

La sustitución $$z' = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{ó} \quad \left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right),$$

expresa que se sustituye z por $\frac{az+b}{cz+d}$.

Esta sustitución transforma el semi-plano en sí mismo, es decir, que á un punto del semi-plano corresponde un punto del semi-plano, pues de

$$X + iY = \frac{a(x+iy)+b}{c(x+iy)+d} \quad \text{resulta} \quad Y = \frac{y}{(cx+d)^2 + c^2y^2}.$$

Y tiene el mismo signo que y. Á un punto del eje Ox corresponde un punto del mismo. La sustitución transforma en sí mismo el semi-plano situado en la parte superior de Ox; y transforma una circunferencia cuyo centro se halle en Ox, es decir, ortogonal á esta recta, en otra circunferencia, que deberá ser ortogonal á la transformada de Ox, es decir, á Ox. Por consiguiente, su centro estará en el eje Ox. Y toda recta perpendicular á Ox se transformará en una de dichas circunferencias.

Una serie indefinida de sustituciones de la forma

$$\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right), \quad (1) \qquad (ad - bc = 1)$$

siendo a, b, c, d reales, *forman un grupo (el grupo modular)*. Este grupo es *discontinuo* en el semi-plano, cuando para un punto arbitrario A del mismo, exterior al eje real, no exista en el grupo, ninguna sustitución que transforme A en un punto diferente de A y cuya distancia á éste sea menor que una cantidad tan pequeña como se quiera. Estos grupos discontinuos, cuya teoría ha establecido M. Poincaré, constituyen los *grupos fuschianos.*

Por ser uno de estos grupos G discontinuo, se podrá dividir el plano ó una parte de éste en una infinidad de regiones que gocen de las siguientes propiedades:

Cada una de ellas corresponde á una de las sustituciones del grupo G. La que corresponda á la sustitución $(z, f_i(z))$, se llamará la R_i y la que corresponda á la sustitución $(z, f_0(z))$ ó (z, z) se llamará R_0.

Cuando z esté en el interior de R_0, $f_i(z)$ *deberá ser interior á* R_i, es decir, que R_i será transformada de R_0 por la sustitución $(z, f(z))$.

Decir que R_i es la transformada de R_0 por una sustitución real, es decir, que estas regiones son congruentes, y por tanto, que todas las regiones R son congruentes entre sí. Ó también podemos decir, que la división del plano en una infinidad de regiones es *regular*, cuando al deformar éstas de una manera continua, se pueda hacer coincidir el nuevo modo de división con el anterior de tal manera, que cada región de la nueva división coincida con una región de la antigua, y que una región dada cualquiera del nuevo modo de división coincida con una región *dada igualmente cualquiera* del antiguo modo. Al aplicarse la sustitución $[z, f_i(z)]$ á las diferentes regiones R, cada una de éstas se cambia en otra región R y R_0 se cambiará en R_i.

Esto sentado, M. Poincaré, reduce el problema de la obtención de los grupos Fuschianos á: *Subdividir de una manera regular el plano ó una parte de éste en una infinidad de regiones todas congruentes entre sí* (*).

Limitándonos al grupo formado por las sustituciones (1), observaremos que la relación

$$Z = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{da} \quad Y = \frac{y}{(cx + d)^2 + c^2y^2};$$

de manera que si $|Y - y| < \varepsilon$, el denominador $(cx + d)^2 + c^2y^2$ es menor que $\dfrac{y}{y - \varepsilon}$.

Por consiguiente, los enteros c y d solo pueden tener un número limitado de valores. Además, si

$$\frac{az + b}{cz + d} = z + \eta,$$

siendo $|\eta|$, como ε inferior á un número determinado muy pequeño, a y b tampoco podrán tener más que un número limitado de valores. El número de las sustituciones será finito y el grupo discontinuo.

El razonamiento empleado supone á y diferente de cero, es

(*) *Théorie des groupes Fuchsiens.*

decir, que z no se halla en el eje Ox. Para los puntos de éste el grupo es continuo, lo que se ve considerando la sustitución del grupo

$$Z = \frac{(1 + ac) z - a^2}{c^2 z + 1 - ac},$$

en las que a y c son enteros cualesquiera. Esta sustitución puede escribirse bajo la forma

$$\frac{1}{cZ - a} = \frac{1}{cz - a} + c.$$

Si pues, partiendo de un punto arbitrario z, se repite esta sustitución un número infinito de veces, se obtendrá un número infinito de puntos que tienden hacia el punto $Z = \frac{a}{c}$.

Ahora bien; si z es real, todos los puntos así obtenidos son reales, y se tendrá, por consiguiente en la proximidad de $\frac{a}{c}$, un número infinito de puntos correspondientes, lo que es contrario á la hipótesis de ser el grupo discontinuo en el eje Ox.

El grupo discontinuo considerado conduce á dividir el semiplano en un número infinito de triángulos.

Para llegar á esta subdivisión M. Picard establece la noción debida á Lagrange de *forma cuadrática reducida*, estableciendo que: *En un sistema de formas definidas positivas equivalentes, no existe más que una reducida*

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

excepto cuando $A = C$ ó $2|B| = A$. (*)

Haciendo enseguida $z = x + iy$, la parte real de $\frac{az + b}{cz + d}$ se reduce á

$$\frac{ac(x^2 + y^2) + (ad + bc)x + bd}{c^2(x^2 + y^2) + 2cdx + d^2},$$

(*) *Traité d'Analyse*, t. I, págs. 442-46.

y el cuadrado de su módulo es igual á

$$\frac{a^2(x^2+y^2)+2abx+b^2}{c^2(x^2+y^2)+2cdx+d^2}.$$

Considerando la forma cuadrática

$$X^2+2xXY+(x^2+y^2)Y^2, \qquad (y>0)$$

en la que x, y tienen valores determinados, y efectuando la sustitución

$$(X,\ Y,\ dX+bY,\ cX+aY),$$

resulta

$$[c^2(x^2+y^2)+2cdx+d^2]X^2+2[(x^2+y^2)ac+(ad+bc)x+bd]XY$$
$$+[a^2(x^2+y^2)+2abx+b^2]Y^2.$$

Eligiendo los enteros a, b, c, d $(ad-bc)=1)$ de manera que esta forma sea reducida, se tendrá

$$c^2(x^2+y^2)+2cdx+d^2<a^2(x^2+y^2)+2abx+b^2,$$

$$-\frac{1}{2}<\frac{(x^2+y^2)ac+(ad+bc)x+bd}{c^2(x^2+y^2)+2cdx+d^2}<\frac{1}{2}.$$

Luego, eligiendo convenientemente los enteros a, b, c, d, el módulo de la forma considerada será mayor que la unidad, hallándose comprendida su parte real entre $-\frac{1}{2}$ y $+\frac{1}{2}$. Luego:

Á todo punto z *del semi-plano corresponde, mediante una sustitución conveniente del grupo, un punto en el triángulo formado en el semi-plano de las rectas* $\mathrm{x}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{x}=-\frac{1}{2}$ *y la circunferencia* $\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2=1$.

El tercer vértice de este triángulo curvilíneo está en el infinito, en la dirección de Oy. Este triángulo se llama el *polígono fnndamental* del grupo.

Al punto z *no corresponde, en general, más que un punto en el triángulo precedente*, pues si el punto (x, y) está en el interior del triángulo (y no en el perímetro), la forma cuadrática F es una forma reducida y cualquiera otra forma equivalente no es una reducida.

Los puntos del perímetro del triángulo se corresponden dos á dos, por una sustitución del grupo.

Si se hacen representaciones conformes del triángulo fundamental que precede, empleando todas las sustituciones del grupo, se obtendrá una infinidad de triángulos curvilíneos cuyos lados serán arcos de círculo normales á Ox. Dos cualesquiera de estos triángulos solo podrán tener comunes puntos de sus perímetros.

Observaremos además que un segundo grupo modular es el *grupo modular ampliado*

$$Z = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (ad - bc = 1)$$


Figura 96

que contiene al modular como subgrupo invariante de índice 2.

El *triángulo fundamental* del grupo modular ampliado se halla comprendido entre las dos rectas $x = 0$, $x = -\frac{1}{2}$ y el círculo de reflexión $x^2 + y^2 = 1$. Sus tres vértices son (fig. 96)

$$z = e^{\frac{\pi i}{2}} = i, \quad z = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \varepsilon, \quad z = \infty.$$

La *red modular* que cubre una sola vez el semi-plano positivo (fig. 97) se puede engendrar reflejando el triángulo fundamental sobre sus tres lados, es decir, transformándolo por radios vectores recíprocos respecto á dicho círculo.

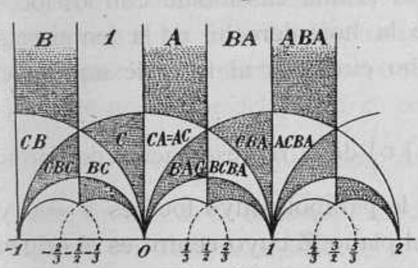


Figura 97

Si A, B, C expresan tres reflexiones sobre los lados

$$x = 0, \quad x = -\frac{1}{2}, \quad x^2 + y^2 = 1$$

del triángulo fundamental T, y expresamos con los mismos símbolos

los tres triángulos adherentes al fundamental I, veremos que si V es una sustitución cualquiera del grupo modular ampliado, aplicándola, por ejemplo, á los dos triángulos adherentes I, A, obtendremos dos triángulos, también adherentes, V y AV. Así pues, al triángulo V serán adherentes los triángulos AV, BV, CV. Y puesto que se puede pasar del triángulo fundamental á uno cualquiera de la red, mediante una serie de triángulos adherentes, deducimos que:

El grupo modular ampliado Γ_0 *se engendra por tres reflexiones elementales* A, B, C.

En cuanto al triángulo fundamental del grupo modular, bastará decir que asociamos dos triángulos adherentes de la red modular, por ejemplo, el fundamental I y su simétrico A, respecto al eje imaginario limitado por las dos paralelas $x = -\frac{1}{2}$, $x = +1$ al exterior del círculo $x^2 + y^2 = 1$, cuyos ángulos son $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, 0. La sustitución $(z, z+1)$ transforma los dos lados y los dos arcos.

Ejemplo 1.º Sea la función

$$Z = z^2 - 1 = (z - 1)(z + 1).$$

Puesto que los módulos de $z - 1$ y $z + 1$ son respectivamente las distancias de z á los puntos $+1$, -1; á la circunferencia cuyo centro es $Z = 0$ y radio 1 corresponderá una lemniscata de Bernoulli con los focos en $z = 1$ y $z = -1$; y más generalmente, á toda circunferencia concéntrica en Z una cassinoide con los focos en dichos puntos. Al interior de la hoja derecha de la lemniscata corresponderá el interior de dicho círculo y al foco de aquélla el centro de éste.

2.º La función $Z = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{z}\right)$ da la representación conforme de la parte del plano z interior á la parábola cuyo foco es $z = 0$ y el vértice $z = 1$ en el círculo del plano Z cuyo centro es el origen y el radio la unidad. En efecto, la ecuación polar de la parábola es

$$\rho = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}.$$

Cuando z recorre el perímetro, se tiene

$$z = 1 + i \operatorname{tg} \frac{\theta}{2},$$

y

$$Z = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{4} \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right) = \left\{\frac{1 + i \operatorname{tg} h\left(\frac{\pi}{4} \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)}{1 - i \operatorname{tg} h\left(\frac{\pi}{4} \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)}\right\}^2.$$

Por consiguiente $|Z| = 1$. Á los puntos interiores á la parábola corresponden los puntos internos al círculo (biunívocamente); al foco de aquélla corresponde el centro de éste. Análogamente la parte externa de la parábola se halla representada en el círculo por la fórmula

$$Z = \frac{2}{\sqrt{z}} - 1,$$

y puesto que el punto $z = 0$ es exterior al área considerada, la función del segundo miembro es en el área monódroma.

171. Transformación de $w = z^m$ (m positivo).

En coordenadas polares tenemos $r = \rho^m$, $\theta = m\omega$. Á cada *arco de círculo* z descrito desde el origen, cuyo ángulo central es $\frac{2\pi}{m}$, corresponde una circunferencia. Cuando ρ varía de una manera continua desde 0 hasta ∞, sucede lo mismo con r. La función propuesta da una representación continua, biunívoca y conforme de un sector del plano z, cuyo ángulo central es $\frac{2\pi}{m}$, en el plano w.

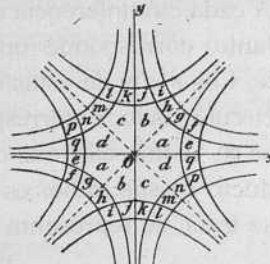


Figura 98

La función w es *automorfa*, porque es uniforme y no altera al sustituir z por αz; α tiene $m - 1$ valores. La función queda invariable por $m - 1$ transformaciones lineales, y la representación es conforme, lo que se verifica obteniendo el valor de $\frac{d\sigma}{ds}$ de los arcos de curva w y z, que es $m\rho^{m-1}$ ($\rho \gtrless 0$ é ∞), y depende tan solo de la distancia de ds al origen y no de su dirección.

Para $m = 2$ la correspondencia se establece haciendo ver que la igualdadd $w = z^2$ da

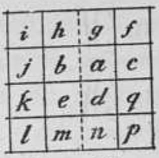


Figura 99

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

Á paralelas respecto á los ejes en el plano w corresponden hipérbolas equiláteras en el plano z. Los puntos $z = 0$, $z = \infty$ son *irregulares*. Y se ve, por último que á dos curvas del plano z que se cortan en el origen según cierto ángulo, corresponden en el plano w dos curvas que se cortan según un ángulo m veces mayor.

172. TRANSFORMACIÓN $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{c^2}{z}\right)$.

Haciendo $z = \rho(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega)$, $w = u + iv$ se obtiene

$$u = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{c^2}{\rho}\right)\cos\omega,$$

$$v = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{c^2}{\rho}\right)\operatorname{sen}\omega.$$

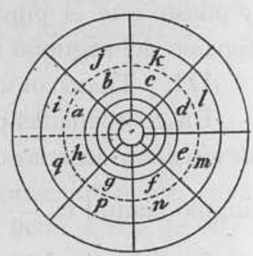


Figura 100

Á cada circunferencia descrita por z (ρ constante) corresponde una elipse descrita por w. Los focos de estas elipses son $\pm c$. Á un círculo dado z corresponde una sola elipse w. Á una elipse w corresponden dos círculos tales, que el producto de sus radios es igual á c^2. Así, por la transformación de que se trata, se representa de una manera biunívoca en el plano w una parte del plano z situada, sea en el interior, sea en el exterior del círculo de radio c (excepto para los puntos de la circunferencia de este círculo). Á la circunferencia $\rho = c$ del plano z corresponde el segmento $(-c, +c)$ del plano w. Cuando ρ aumenta, á partir de c indefinidamente, la elipse w recorre todo el plano. Cuando ρ decrece desde c hasta 0, la elipse w, reducida en

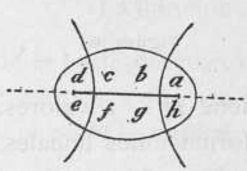


Figura 101

el momento de partida al segmento $(-c, +c)$ recorre de nuevo todo el plano y coincide sucesivamente con cada una de las elipses obtenidas, haciendo crecer á ρ hasta el infinito.

Dividamos el plano z en cuadriláteros por círculos $\rho =$ const. y rectas $\theta =$ const. Á estos círculos y á estas rectas corresponderán, en el plano w, elipses é hipérbolas homofocales (figuras 100 y 101).

Por ser $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{c^2}{z^2}\right)$ la expresión de la derivada de la función propuesta, se ve que deja de ser finita y diferente de cero en los puntos $z = 0$, $z = \pm c$. En los dos puntos $\pm c$, la representación deja de ser conforme. Haciendo $w = \frac{1}{w'}$ se ve que se conservan los ángulos en la proximidad del punto $z = 0$.

173. Función multiforme. $w^m = z$ (m positivo, z no es nula ni infinita). Tendremos

$$r^m (\cos m\theta + i \operatorname{sen} m\theta) = \rho (\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega).$$

$$r = \sqrt[m]{\rho}, \quad \left(\theta = \frac{\omega}{m} + \mu \frac{2\pi}{m}\right) \qquad (\mu = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots\ldots).$$

Cuando z parte del valor $z_0(\rho_0, \omega_0)$ rodeando al origen, se obtiene como se sabe, una multiplicidad de determinaciones.

Al describir z un contorno cerrado, las sustituciones que resultan forman un grupo, permutándose las raíces alrededor del punto de ramificación.

§ 4.° Líneas en una superficie

174. Radio de curvatura de una sección normal. Las ecuaciones del eje del círculo osculador son

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy + (Z - z)\,dz = 0, \qquad (1)$$

$$(X - x)\,d^2x + (Y - y)\,d^2y + (Z - z)\,d^2z = ds^2. \qquad (2)$$

Cortándolo por la normal á la superficie, se obtiene el centro de curvatura de la sección normal trazada por la dirección dx, dy, dz. Sea ρ el radio de curvatura de esta sección. Las ecuaciones de la normal serán

$$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{p'}=\frac{Z-z}{p''}=\frac{\rho}{\sqrt{EG-F^2}} \tag{3}$$

siendo p, p' y p'' los coeficientes de dirección de la normal á la superficie, que satisfacen á las ecuaciones

$$p\frac{\partial x}{\partial u}+p'\frac{\partial y}{\partial u}+p''\frac{\partial z}{\partial u}=0,\quad p\frac{\partial x}{\partial v}+p'\frac{\partial y}{\partial v}+p''\frac{\partial z}{\partial v}=0;$$

y tenemos que

$$p^2+p'^2+p''^2=\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\ldots\ldots$$

$$=\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\ldots\right]\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\ldots\right]-\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\ldots\right)^2=EG-F^2.$$

Eliminando $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ entre las ecuaciones (1), (2) y (3) resultará

$$(p\,d^2x+p'\,d^2y+p''\,d^2z)\frac{\rho}{\sqrt{EG-F^2}}=ds^2. \tag{4}$$

Hagamos

$$\left.\begin{aligned}
p\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+p'\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+p''\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}&=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}=e=\Delta D\\
p\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+p'\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}+p''\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}&=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}=f=\Delta D''
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.p\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+p'\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}+p''\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}=g=\Delta D'\right\}\quad(5)$$

(siendo $\Delta^2 = EG - F^2$) que conducen á los coeficientes D, D′, D″, anteriormente obtenidos (pág. 245).

Tendremos, en vez de (4),

$$e du^2 + 2f du dv + g dv^2$$

$$= \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\rho}(E du^2 + 2F du dv + G dv^2),$$

$$\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\rho} = \frac{e du^2 + 2f du dv + g dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}. \quad (6)$$

Para obtener los radios de curvatura principales, será necesario expresar que la ecuación (6) en $\frac{\partial u}{\partial v}$ tiene sus dos raíces iguales, lo que da

$$\left(f\frac{\rho}{\sqrt{EG - F^2}} - F\right)^2$$

$$= \left(e\frac{\rho}{\sqrt{EG - F^2}} - E\right)\left(g\frac{\rho}{\sqrt{EG - F^2}} - G\right), \quad (7)$$

que es la ecuación de los radios de curvatura principales.

Si en (6) se hace $dv = 0$, dará el radio de curvatura de la línea $v =$ const.; y se tendrá

$$\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\rho u} = \frac{e}{E}, \qquad \frac{\sqrt{EG - E^2}}{\rho v} = \frac{g}{G}$$

ó $$e = \frac{E\sqrt{EG - F^2}}{\rho u}, \quad g = \frac{G\sqrt{EG - F^2}}{\rho v}.$$

Los umbílicos se obtienen expresando que la ecuación (7) tiene raíces iguales, lo que da

$$Ge + (Eg - 2Ff)^2 - 4(f^2 - eg)(F^2 - EG) = 0.$$

Pero se obtienen más fácilmente haciendo en (7)

$$\frac{\rho}{\sqrt{EG - F^2}} = x$$

lo que la transforma en

$$(fx - F)^2 - (ex - E)(gx - G) = 0.$$

Las raíces de esta ecuación se hallan separadas por

$$-\infty, \quad \frac{E}{e}, \quad \frac{F}{f} \quad \text{y} \quad +\infty.$$

Para que sean iguales es necesario que

$$\frac{E}{e} = \frac{G}{g} = \frac{F}{f},$$

que son las ecuaciones de los umbílicos.

175. Teorema de Gauss. En virtud de (5) tenemos

$$DD'' - D'^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \cdots\cdots \\ \frac{\partial x}{\partial u} \cdots\cdots \\ \frac{\partial x}{\partial v} \cdots\cdots \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \cdots\cdots \\ \frac{\partial x}{\partial u} \cdots\cdots \\ \frac{\partial x}{\partial v} \cdots\cdots \end{vmatrix}^2.$$

Efectuando los cálculos por la regla de multiplicación de los determinantes, se obtiene

$$DD'' = \begin{vmatrix} \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x}{\partial u} & \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x}{\partial v} \\ \Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 & \Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \\ \Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} & \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \end{vmatrix}$$

$$D'^2 = \begin{vmatrix} \Sigma\left(\dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)^2 & \Sigma\dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \Sigma\dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \Sigma\dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \Sigma\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 & \Sigma\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \Sigma\dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\dfrac{\partial x}{\partial v} & \Sigma\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} & \Sigma\left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \end{vmatrix}.$$

Diferenciando las fórmulas (4) (pág. 276), se obtiene

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} = \Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial^2 u}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} = \Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\frac{\partial x}{\partial u} \\
&\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} = \Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v} = \Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\frac{\partial x}{\partial v} \\
&\frac{\partial F}{\partial u} = \Sigma\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right), \\
&\frac{\partial F}{\partial v} = \Sigma\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\frac{\partial x}{\partial u}\right),
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

de donde

$$\Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}$$

$$\Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}$$

Diferenciando las dos últimas fórmulas, será

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \Sigma\frac{\partial^3 x}{\partial u^2 \partial v}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial v^2}, \\
&\Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \Sigma\frac{\partial^3 x}{\partial v^2 \partial u}\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2};
\end{aligned}\right\} \quad (8')$$

y además $\quad \Sigma\dfrac{\partial^3 x}{\partial u^2 \partial v}\dfrac{\partial x}{\partial u}\,\Sigma + \left(\dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 G}{\partial v^2},$

$$\Sigma\frac{\partial^3 x}{\partial v^2 \partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \Sigma\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial v^2}.$$

De estas cuatro fórmulas resulta:

$$\Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \Sigma\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)^2 = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}. \qquad (9)$$

La diferencia de los determinantes eg y f^2 puede escribirse así:

$$\begin{vmatrix} \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & E & F \\ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Sigma\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)^2. & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & E & F \\ \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} & F & G \end{vmatrix}$$

(que es igual á D . D″ — D′²), y en virtud de (9),

$$(EG - F^2)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right)$$

$$+\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & E & F \\ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & E & F \\ \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} & F & G \end{vmatrix}$$

$$= eg - f^2. \quad (*) \qquad (10)$$

Esta fórmula demuestra que el producto de los radios de curvatura principal $\frac{(EG - F^2)^{2:3}}{eg - f^2}$ depende tan solo de las cantidades E, G, F y de sus derivadas. La cantidad inversa es lo que se llama, según Gauss, la *curvatura total* ó curvatura esférica de la superficie, así:

La curvatura total de una superficie queda determinada en cada punto, cuando se conocen las cantidades E, G, F *que permiten escri-*

(*) Laurent. *Traité d'Analyse*, t. VII, p. 102.

bir la diferencial de un arco de curva bajo la forma

$$ds = \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

Observación. Con auxilio de las fórmulas de la pág. 241, la ecuación última se reduce á la forma útil

$$k = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q'}{\partial u} + pq' - p'q + qq'' - q'^2\right)$$

$$= \frac{1}{F}\left(\frac{\partial p'}{\partial u} - \frac{\partial p}{\partial v} + p'q' - p''q\right). \qquad (a)$$

Pero en virtud de la identidad $c\dfrac{\partial c}{\partial u} + c'\dfrac{\partial c'}{\partial u} + c''\dfrac{\partial c''}{\partial u} = 0,$

se puede escribir

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial u} &= m\frac{\partial x}{\partial u} + n\frac{\partial x}{\partial v}, \\ \frac{\partial c'}{\partial u} = m\frac{\partial y}{\partial u} + n\frac{\partial y}{\partial v}, &\quad \frac{\partial c''}{\partial u} = m\frac{\partial z}{\partial u} + n\frac{\partial z}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

siendo m y n, coeficientes que han de determinar. Y análogamente será

$$\frac{\partial c}{\partial v} = m'\frac{\partial x}{\partial u} + n'\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial c'}{\partial v} = m'\frac{\partial y}{\partial u} + n'\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \ldots\ldots \qquad (2)$$

Sustituyendo estos valores en

$$\Sigma\frac{\partial c}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{D}{\Delta}, \quad \Sigma\frac{\partial c}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{D''}{\Delta}, \quad \Sigma\frac{\partial c}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{D'}{\Delta},$$

se obtendrán las relaciones

$$\left.\begin{aligned} \frac{D}{\Delta} + mE + nF = 0, &\quad \frac{D'}{\Delta} + mF + nG = 0, \\ \frac{D'}{\Delta} + m'E + n'F = 0, &\quad \frac{D''}{\Delta} + m'F + n'G = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} m = \frac{FD' - GD}{\Delta^3}, &\quad n = \frac{FD - ED'}{\Delta^3} \\ m' = \frac{FD'' - GD'}{\Delta^3}, &\quad n' = \frac{FD' - ED''}{\Delta^3} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$\text{y} \quad m'\mathrm{E} + (n' - m)\,\mathrm{F} - n\mathrm{G} = 0, \quad mn' - nm' = \frac{\mathrm{DD}'' - \mathrm{D}'^2}{\Delta^4}.$$

Para obtener $\mathrm{DD}'' - \mathrm{D}'^2$ en función de las derivadas de E, F, G, basta emplear las dos fórmulas de la pág. 279

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}, \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}.$$

Diferenciando la primera de éstas, con relación á v, y restando del resultado la derivada respecto á u de la 3.ª ec. (8), se obtiene

$$\Sigma \left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)^2\right] = \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{E}}{\partial v^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial u^2}.$$

Basta ahora multiplicar los determinantes D y D″ y calcular D'^2 para obtener la expresión de la pág. 281, con lo que se obtienen los resultados á que llegó Gauss. Á estos debemos agregar los siguientes, debidos á Codazzi.

Diferenciando la primera ecuación (1) con relación á v y la primera (2) con relación á u, é igualando los dos valores de c que se obtienen, resultará

$$\left.\begin{aligned} &(m - n')\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + n\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - m'\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \\ &+ \frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\partial m}{\partial v} - \frac{\partial m'}{\partial u}\right) + \frac{\partial x}{\partial v}\left(\frac{\partial n}{\partial v} - \frac{\partial n'}{\partial u}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Si sustituímos x por y y por z, obtendremos análogas ecuaciones, que multiplicadas respectivamente, primero por $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$ y después por $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$, darán, sumando:

$$\left.\begin{aligned} 0 = &\frac{m - n'}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} + n\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\right) - \frac{m'}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u} \\ &+ \mathrm{E}\left(\frac{\partial m}{\partial v} - \frac{\partial m'}{\partial u}\right) + \mathrm{F}\left(\frac{\partial n}{\partial v} - \frac{\partial n'}{\partial u}\right) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} o = \frac{m - n'}{2}\frac{\partial G}{\partial v} + \frac{n}{2}\frac{\partial G}{\partial v} - m'\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right) \\ + F\left(\frac{\partial m}{\partial v} - \frac{\partial m'}{\partial u}\right) + G\left(\frac{\partial n}{\partial v} - \frac{\partial n'}{\partial u}\right) = o. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Considerando las ecuaciones (8), determinaremos m, n, m', n'; y sustituyendo sus valores en función de D, D′, D″, tendremos

$$\left.\begin{aligned} &\Delta^2\left(\frac{\partial D'}{\partial u} - \frac{\partial D}{\partial v}\right) + D\left(\frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial v} + G\frac{\partial E}{\partial v} - F\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial u}\right) \\ &\quad + D'\left(-F\frac{\partial E}{\partial v} + 2F\frac{\partial F}{\partial u} - G\frac{\partial F}{\partial u}\right) \\ &\qquad + D''\left(\frac{1}{2}E\frac{\partial E}{\partial v} - E\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u}\right) = o, \\ &\Delta^2\left(\frac{\partial D'}{\partial v} - \frac{\partial D''}{\partial u}\right) + D\left(\frac{1}{2}G\frac{\partial G}{\partial u} - G\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial v}\right) \\ &\quad + D'\left(-F\frac{\partial G}{\partial u} + 2F\frac{\partial F}{\partial v} - E\frac{\partial G}{\partial v}\right) \\ &\qquad + D''\left(\frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial u} + E\frac{\partial G}{\partial u} - F\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial v}\right) = o, \end{aligned}\right\} (7)$$

ecuaciones que sirven para calcular D, D′, D″ cuando se conocen E, F, G (*).

176. Fórmula de Liouville. Tenemos

$$(EG - F^2)(DD'' - D'^2) =$$

$$\begin{vmatrix} \Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x}{\partial u} & \Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x}{\partial v} \\ \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 & \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \\ \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} & \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Sigma\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\right)^2 & \Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} & \Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} \\ \Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} & \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial n}\right)^2 & \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \\ \Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} & \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} & \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \end{vmatrix}$$

(*) *Darboux*, obr. cit. t. 3.° p. 248.

Y, en virtud de las primeras fórmulas (8) de la pág. 279,

$$(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)^2\,k=$$

$$\begin{vmatrix} \Sigma\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial u} & \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial u} & \mathrm{E} & \mathrm{F} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial v} & \mathrm{F} & \mathrm{G} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Sigma\left(\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\right)^2 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} & \mathrm{E} & \mathrm{F} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} & \mathrm{F} & \mathrm{G} \end{vmatrix};$$

y, sustituyendo, en virtud de (8′), será

$$(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)^2\,k=$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial u\partial v}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 \mathrm{E}}{\partial v^2} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial u} & \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} & \mathrm{E} & \mathrm{F} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial v} & \mathrm{F} & \mathrm{G} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial u^2} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} & \mathrm{E} & \mathrm{F} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} & \mathrm{F} & \mathrm{G} \end{vmatrix}.$$

Desarrollando, se tiene

$$4\,(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)^2\,k=\mathrm{E}\left\{\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}-2\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}+\left(\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}\right)^2\right\}+$$

$$\mathrm{F}\left\{\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}-\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}-2\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}-2\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}+4\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}\right\}+$$

$$\mathrm{G}\left\{\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}-2\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}+\left(\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\right)^2\right\}$$

$$+\,2\,(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)\left\{2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 \mathrm{E}}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial u^2}\right\}.$$

Á esta fórmula dió Liouville la siguiente forma:

$$k=\frac{1}{2\Delta}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}-\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{E}}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}-2\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}+\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{E}}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}\right)\right]\right\}.$$

Aplicaciones: 1.ª Para $ds^2 = \mathrm{E}du^2 + \mathrm{G}dv^2$, será

$$k = -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\right)\right].$$

2.ª Para $ds^2 = \lambda\,(du^2 + dv^2)$, será

$$k = -\frac{1}{2\lambda}\left[\frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial v^2}\right].$$

3.ª Para $ds^2 = du^2 + \mathrm{G}dv^2$, será

$$k = -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial^2\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u^2}.$$

177. Indicatriz. Dos sistemas de líneas de una superficie forman una red conjugada, según ya vimos, cuando todas las curvas de la primera serie encuentran á las de la segunda, de manera que las tangentes en el punto de intersección sean diámetros conjugados de la indicatriz en este punto, y se reducen á *líneas asintóticas* cuando dichos diámetros conjugados son asíntotas de la indicatriz. Y puesto que el cuadrado R^2 de su radio vector es igual al radio de curvatura ρ, la fórmula (6) de la pág. 277 da

$$\frac{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}{\mathrm{R}^2} = \frac{e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2}{\mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}dv^2},$$

$$\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2} = \mathrm{R}^2\left[e\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2f\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + g\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right]. \tag{11}$$

Y tomando, en el plano tangente, por ejes de coordenadas las tangentes á las líneas $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$, se tiene la fórmula de transformación de coordenadas

$$\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{R}} = \frac{\sqrt{\mathrm{E}}\,du}{ds},\quad \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{R}} = \frac{\sqrt{\mathrm{G}}\,dv}{ds}, \tag{12}$$

siendo la dirección de R la misma que la de ds, y en virtud de (11)

$$\mathrm{R}\frac{du}{ds} = \frac{\mathrm{X}}{\sqrt{\mathrm{E}}},\quad \mathrm{R}\frac{dv}{ds} = \frac{\mathrm{Y}}{\sqrt{\mathrm{G}}},$$

y la ecuación (11) se reduce á

$$\sqrt{EG - F^2} = \frac{e}{E} X^2 + \frac{2fXY}{\sqrt{EG}} + \frac{g}{G} Y^2, \qquad (13)$$

ecuación que adquiere una forma más simétrica, por ser

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{\sqrt{EG}} = \frac{\cos\theta}{F}.$$

Se tiene entonces, sustituyendo $\sqrt{EG - F^2}$ por la unidad, lo que solo altera la dimensión de la indicatriz,

$$1 = \frac{e}{E} X^2 + \frac{g}{G} Y^2 + \frac{2f}{F} XY \cos\theta.$$

178. Direcciones conjugadas y líneas asintóticas. Para que dos direcciones $\frac{Y}{X}$, $\frac{Y'}{Y'}$ sean conjugadas, es necesario que se tenga

$$\frac{e}{E} XX' + \frac{2f}{\sqrt{EG}} (XY' + YX') + \frac{g}{G} YY' = 0,$$

y, en virtud de (12),

$$edu\delta u + 2f(du\delta v + dv\delta v) + gdv\delta v = 0, \qquad (14)$$

siendo δu y δv las diferenciales relativas á la dirección conjugada de du, dv. Y por ser

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv,$$

$$\delta dx = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du\delta u + \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} (du\delta v + dv\delta u) + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} dv\delta v,$$

la fórmula (14) puede escribirse así:

$$\begin{vmatrix} d\delta x & d\delta y & d\delta z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Para que las líneas $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ sean coordenadas conjugadas, es necesario que esta última ecuación y la (14) queden satisfechas por $du = 0$, $dv = 0$ ó que $f = 0$.

Para que las direcciones dx, dy, dz y δx, δy, δz sean conjugadas, es necesario (adoptando notaciones conocidas) que

$$r\delta x dx + 2s(\delta x dy + \delta y dx) + t\delta y dy = 0;$$

y por consiguiente, para que las líneas coordenadas sean conjugadas, es necesario que

$$r\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + s\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) + t\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} = 0. \quad (15)$$

Pero $\quad \dfrac{\partial z}{\partial u} = p\dfrac{\partial x}{\partial u} + q\dfrac{\partial y}{\partial u}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial v} = p\dfrac{\partial x}{\partial v} + q\dfrac{\partial y}{\partial v},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = p\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + q\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \omega,$$

expresando ω el primer miembro de (15). Eliminando p y q, y observando que $\omega = 0$, será

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial y} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u \partial y} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial n \partial z} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ó} \quad r = 0. \ (*)$$

La condición para que las líneas coordenadas $\lambda = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ sean líneas de curvatura se reduce á $r = 0$, $F = 0$.

179. Líneas de curvatura. Si X, Y, Z expresan los cosenos directores de la normal en un punto cualquiera x, y, z de una línea de curvatura L de la superficie S, y r expresa la parte de normal comprendida entre el punto (x, y, z) y el en que la normal encuentra á otra curva L_1 (arista de retroceso), puede verse que *la*

(*) Véase H. Laurent, *Traité de Mécanique* y *Traité d'Analyse*, t. VII, p. 105.

condición necesaria y suficiente para que L *sea una línea de curvatura es*

$$\frac{dx}{dX} = \frac{dy}{dY} = \frac{dz}{dZ} = r, \qquad (1)$$

pues si el punto de contacto M_1 de la normal con la arista de retroceso es x_1, y_1, z_1, tendremos

$$x_1 = x - rX, \quad y_1 = y - rY. \quad z_1 = z - rZ, \qquad (2)$$

siendo $r = MM_1$. Si diferenciamos, tendremos

$$dx_1 = dx - rdX - Xdr, \quad dy_1 = dy - rdY - Zdr,$$
$$dz_1 = dz - rdZ - Zdr.$$

Pero dx_1, dy_1, dz_1 son proporcionales á los cosenos directores de la tangente en M_1 á la curva L_1, que son iguales á X, Y, Z; luego

$$dx = rdX - Xdr = \lambda X, \quad dy - rdY - Ydr = \lambda Y, \quad \ldots\ldots$$

Sumando estas ecuaciones después de multiplicarlas respectivamente por X, Y, Z; y haciendo reducciones, se obtendrá $\lambda = -dr$; resultando la relación (1).

Se ve pues, que esta relación es necesaria para que L sea una línea de curvatura. También es suficiente, porque si se verifica la (1) se deduce que se verifica la curva L′ tiene por tangentes á las normales de la L.

180. Ecuación de las líneas de curvatura. Adjuntando á la ecuación (14) la condición

$$dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z = 0$$

ó $$\left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u} \delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \delta v\right) + \ldots\ldots = 0,$$

es decir, $$E du\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + G du\delta v = 0,$$

y eliminando δu y δy entre esta ecuación y la (14) se obtiene la ecuación de las líneas de curvatura

$$(ldu + rdv)(Fdu + Gdv) - (Edu + Fdv)(rdu + mdv) = 0 \qquad (15)$$

ó $$(lF + Er)du^2 + (lG - mE)dudv + (rG - Fm)dv^2 = 0.$$

181. Otro método. Los cosenos de dirección X, Y, Z de la normal satisfacen á las ecuaciones

$$X\frac{\partial x}{\partial u}+Y\frac{\partial y}{\partial u}+Z\frac{\partial z}{\partial u}=0,\quad X\frac{\partial x}{\partial v}+Y\frac{dy}{\partial v}+Z\frac{\partial z}{\partial v}=0.$$

Tendremos pues

$$X:Y:Z=\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}.$$

Y por ser la suma de los cuadrados de estos tres determinantes igual á $EG - F^2$, será

$$X=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right),\ \text{etc.}\qquad (1)$$

Si derivamos las identidades

$$\Sigma X\frac{\partial x}{\partial u}=0,\quad \Sigma X\frac{\partial x}{\partial v}=0$$

respecto á u y á v, tendremos

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u}=-D,\quad \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}=\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}=-D',$$

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}=-D'',\qquad (2)$$

expresando D, D′, D″ cantidades conocidas (pág. 245). Calcularemos con estas fórmulas la expresión diferencial

$$dxdX+dydY+dzdZ=\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)\left(\frac{\partial X}{\partial u}du+\frac{\partial X}{\partial v}dv\right),$$

obteniendo

$$dxdX+dydY+dzdZ=-(Ddu^2+2D'dudv+D''dv^2).$$

Siendo la expresión del primer miembro independiente del sistema de coordenadas, podremos hacer la transformación

$$u=\varphi(\alpha,\beta),\quad v=\psi(\alpha,\beta),$$

y los nuevos valores de las cantidades se obtendrán, operando dicha transformación en la forma diferencial

$$\mathrm{D}\,du^2 + 2\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2,$$

y calculando los coeficientes de $d\alpha^2$, $d\alpha d\beta$, $d\beta^2$ que se expresarán por medio de los primitivos, como los nuevos valores de E, F, G por los antiguos.

Supongamos que (u, v) y $(u + du, v + dv)$ son dos puntos infinitamente próximos en una línea de curvatura. Por lo expuesto en la pág. 288, tendremos

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv &= r\left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial u}\,du + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial v}\,dv\right), \\ \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv &= r\left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial u}\,du + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial v}\,dv\right), \\ \frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv &= r\left(\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial u}\,du + \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial v}\,dv\right). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Multiplicando estas ecuaciones ordenadamente, primero por $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial z}$, después por $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ y sumando, se obtendrá

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{E}\,du + \mathrm{F}\,dv &= -\,r\,(\mathrm{D}\,du + \mathrm{D}'dv) \\ \mathrm{F}\,du + \mathrm{G}\,dv &= -\,r\,(\mathrm{D}'du + \mathrm{D}''dv) \end{aligned}\right\}, \qquad (4)$$

ecuaciones equivalentes á las (3). Eliminando r tendremos

$$\begin{vmatrix} \mathrm{E}\,du + \mathrm{F}\,dv & \mathrm{D}\,du + \mathrm{D}'dv \\ \mathrm{F}\,du + \mathrm{G}\,dv & \mathrm{D}'du + \mathrm{D}''dv \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

ó bien

$$(\mathrm{FD}'' - \mathrm{GD}')\,dv^2 + (\mathrm{ED}'' - \mathrm{GD})\,du\,dv + (\mathrm{ED}' - \mathrm{FD})\,dv^2 = 0, \qquad (6)$$

ecuación diferencial de primer orden á la que debe satisfacer toda línea de curvatura, y viceversa.

La cantidad r se obtendrá por la ecuación

$$(\mathrm{DD}'' - \mathrm{D}'^2)\,r^2 + (\mathrm{ED}'' + \mathrm{GD} - 2\mathrm{FD}')\,r + \mathrm{EG} - \mathrm{F}^2 = 0,$$

que resulta eliminando $\frac{du}{dv}$ en las (4).

Las dos raíces r_1 y r_2 de esta ecuación son los dos radios de curvatura principal. Las expresiones de la curvatura total y media serán pues

$$k = \frac{1}{r_1 r_2} = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} \tag{6}$$

$$h = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{ED'' - 2FD' + GD}{EG - F^2}. \tag{7}$$

La ecuación de las curvas parabólicas de la superficie es

$$DD'' - D'^2 = 0.$$

La expresión del radio de una sección normal es

$$\frac{1}{r} = \frac{D\,du^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

Y cuando las curvas paramétricas son líneas de curvatura, por ser $F = D' = 0$, se tendrá

$$\frac{1}{r} = \frac{D\,du^2 + D''dv^2}{E\,du^2 + G\,dv^2}.$$

Los radios de curvatura principales se obtendrán haciendo sucesivamente $dv = 0$ y $du = 0$, y resultará

$$\frac{1}{r_1} = \frac{D}{E}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{D''}{G}.$$

182. Líneas bisectrices. Son las que dividen en dos partes iguales los ángulos de las líneas coordenadas. Para obtener sus ecuaciones diferenciales, basta escribir que la proyección hecha, paralelamente á la coordenada u, del arco ds sobre la coordenada v, es igual á la proyección del mismo arco sobre la coordenada u ó igual y de signo contrario. Tendremos pues,

$$du\sqrt{E} \pm du\sqrt{G} = 0.$$

Esta ecuación será la de las líneas de curvatura, cuando las líneas coordenadas sean las líneas asintóticas.

Si en una superficie de revolución se toman por líneas coordenadas los paralelos y los meridianos, se tendrá en coordenadas polares

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta\, d\psi^2.$$

Pero $r = \varphi(\theta)$; luego

$$ds^2 = [\varphi'^2(\theta) + \varphi^2(\theta)]\, d\theta^2 + \varphi^2(\theta) \operatorname{sen}^2 \theta\, d\psi^2.$$

La ecuación de las líneas bisectrices es

$$d\theta \sqrt{\varphi'^2(\theta) + \varphi^2(\theta)} \pm d\psi(\theta) \operatorname{sen} \theta = 0$$

ó
$$\psi + \text{const.} = \pm \int d\theta \frac{\sqrt{\varphi'^2(\theta) + \varphi^2(\theta)}}{\varphi(\theta) \operatorname{sen} \theta}.$$

183. Propiedades de las líneas de curvatura. Teorema. *El sistema doble de las líneas de curvatura es un sistema ortogonal.*

Este teorema que ya se demostró en el libro primero, resulta inmediatamente de la ecuación diferencial de las líneas de curvatura.

Las raíces $\tau_1 = \dfrac{\partial v}{\partial u}$ y $\tau_1 = \dfrac{\partial v}{\partial u}$ de (6) son reales, porque el discriminante

$$\left\{ ED'' - GD - \frac{2F}{E}(ED' - FD) \right\}^2 + 4\, \frac{EG - F^2}{E^2} (ED' - FD)^2.$$

es siempre positivo, por serlo $EG - F^2$ que, como se sabe, es una suma de tres cuadrados.

184. Direcciones conjugadas. Considerando la ecuación del plano tangente envolvente de la desarrollable circunscrita y la del que resulta de diferenciarlo, llegaremos, como se sabe, á la ecuación de las direcciones conjugadas.

Considerando un punto M (u, v) de la superficie y dos infinitamente próximos M' $(u + du,\ v + dv)$, M'' $(u + \delta v,\ v + \delta v)$, resultará *la condición necesaria y suficientemente para que* MM' *y* MM'' *sean direcciones conjugadas*, bajo la forma

$$\Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial v} du + \frac{\partial x}{\partial v} \partial v \right) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \delta v \right)$$

ó
$$D\, du\, dv + D' (du\, \delta v + dv\, \delta u) + D'' du\, \delta v = 0 \qquad (1)$$

á la que debe unirse la condición de ortogonalidad

$$E du \delta u + F(du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v = 0 \qquad (2)$$

las cuales, como se sabe, dan por la eliminación de δu y δv, la ecuación diferencial de las líneas de curvatura.

185. Líneas asintóticas. Puesto que son las conjugadas á sí mismas, tendremos $\delta u = du$, $\delta v = dv$ y

$$D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2 = 0.$$

Podemos obtener, como sabemos, que: *El plano osculador de una línea asintótica es el plano tangente á la superficie,* y recíprocamente, y que *para las líneas asintóticas solamente la curvatura geodésica coincide con la absoluta.*

186. La superficie referida á sus líneas de curvatura. Siendo $F = 0$, la forma del elemento lineal será

$$ds^2 = E du + G dv^2.$$

Y podemos escribir las expresiones de los cosenos directores de la normal:

$$X = \frac{1}{\sqrt{EG}} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad Y = \frac{1}{\sqrt{EG}} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \text{ etc.} \qquad (1)$$

Tendremos pues,

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v} & \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v} & \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial v} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = +1 \qquad (2)$$

y podremos escribir

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= \frac{1}{r_2}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{1}{r_2}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial Z}{\partial u} = \frac{1}{r_2}\frac{dz}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= \frac{1}{r_1}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial Y}{\partial v} = \frac{1}{r_1}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial Z}{\partial u} = \frac{1}{r_1}\frac{\partial z}{\partial u} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

expresando r_1 y r_2 los radios principales de curvatura. Se pueden establecer, para estos cosenos, fórmulas análogas á las de Frenet.

De las ecuaciones (3) resulta

$$D = -\frac{E}{r_2}, \quad D' = o, \quad D'' = -\frac{G}{r_1}. \tag{4}$$

Respecto á las fórmulas análogas á la de Frenet, puede consultarse la obra del Sr. Bianchi.

Observación. Empleando la representación esférica de Gauss, si aplicamos las fórmulas (3) llegamos á la representación del elemento lineal de la esfera

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = E'du^2 + 2F'duv + G'dv^2,$$

siendo
$$E' = \frac{E}{r^2_2}, \quad F' = o, \quad G' = \frac{G}{r^2_1}, \tag{5}$$

es decir, que: *En la representación esférica de Gauss, el sistema ortogonal de las líneas de curvatura tiene por imagen en la esfera un sistema ortogonal.*

187. TORSIÓN ASINTÓTICA. TEOREMA DE ENNEPER. Siendo en virtud de las ecuaciones (4), la ecuación diferencial de las asintóticas,

$$\frac{E}{r_2}du^2 + \frac{G}{r_1}dv^2 = o,$$

su elemento lineal estará dado por

$$ds = E\,du^2 + G\,dv^2 = E\,\frac{r_2 - r_1}{r_2}\,du^2.$$

Y, puesto que para las asintóticas es $\cos\lambda = X$, etc.

$$\frac{1}{T^2} = \frac{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}{ds^2} = \frac{\Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial u}du + \frac{\partial X}{\partial v}dv\right)^2}{ds^2}$$

$$\frac{E'du^2 + G'dv^2}{E\,\frac{r_2 - r_1}{r_2}\,du^2} = \frac{\frac{E}{r^2_2}du^2 + \frac{G}{r^2_1}dv^2}{E\,\frac{r_2 - r_1}{r_2}\,du};$$

pero, á lo largo de las asintóticas se tiene

$$\frac{G}{r_1}\,dv^2 = -\frac{E}{r_2}\,du; \quad \text{luego} \quad \frac{1}{T^2} = -\frac{1}{r_1 r_2}.$$

Y puesto que la ecuación diferencial de las asintóticas es

$$\frac{E}{r_2}\,du^2 + \frac{G}{r_1}\,dv^2 = 0,$$

$$\operatorname{tg}\omega = \sqrt{\frac{G}{E}}\,\frac{dv}{du} = \pm\sqrt{-\frac{r_1}{r_2}}, \quad \text{será} \quad \omega = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{-\frac{r_1}{r_2}},$$

expresando ω el ángulo de inclinación con relación á v.

En particular, las asintóticas forman un sistema ortogonal, cuando se tenga $r_1 + r_2 = 0$. En este caso la indicatriz de Dupin es la hipérbola equilátera.

188. Ecuaciones de derivadas parciales. Diferenciando las ecuaciones (3) de la primera línea (pág. 293) respecto á v y las de la segunda, respecto á u, tendremos

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial v}\,\frac{\partial x}{\partial u} = 0,$$

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial u}\,\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial v}\,\frac{\partial y}{\partial u} = 0,$$

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial u}\,\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial v}\,\frac{\partial z}{\partial u} = 0,$$

Multiplicándolas primero por $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ y después por $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$, y sumando, resulta

$$\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = E, \quad \Sigma\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \quad \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = G$$

$$\Sigma\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial E}{\partial v}, \quad \Sigma\,\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial G}{\partial u},$$

$$\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v}-\frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial v}=0,\quad \left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u}+\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial u}=0.$$

Podemos también, sustituyendo á E y G los coeficientes E′, G′ dados por las fórmulas (5) de la pág. 294, obtener

$$(r_1-r_2)\frac{\partial \log\sqrt{E'}}{\partial v}-\frac{\partial r_2}{\partial v}=0,\quad (r_1-r_2)\frac{\partial \log\sqrt{G'}}{\partial u}+\frac{\partial r_1}{\partial u}=0.$$

189. Recapitulación. Teorema I. *La condición necesaria y suficiente para que las curvas paramétricas sean conjugadas en el punto* P(u, v) *es que se verifique idénticamente* $D'=0$.

En efecto, si consideramos los puntos $P(x, y, z)$, $P_1(x+dx_1, \ldots)$, $P_2(x+dx_2, \ldots)$, los incrementos da_1, db_1, dc_1 de los cosenos directores en P_1, du_1 y dv_1, du_2 y dv_2 los incrementos de los parámetros correspondientes á P_1 y P_2, tendremos

$$da_1\,dx_2+db_1\,dy_2+dc_1\,dz_2=0, \tag{1}$$

$$da_1=\frac{\partial a}{\partial u}du_1+\frac{\partial a}{\partial v}dv_1,\quad dx_2=\frac{\partial x}{\partial u}du_2+\frac{\partial x}{\partial v}dv_2,\quad \text{etc.} \tag{2}$$

Y sustituyendo en (1):

$$D\,du_1\,du_2+D'\,(du_1\,dv_2+dv_1\,du_2)+D''d_1v\,dv_2=0. \tag{3}$$

Esta ecuación comprende la condición necesaria y suficiente para que sean conjugadas las dos direcciones $du_1:dv_1$ y $du_2:dv_2$. La ecuación (3) es la ecuación diferencial de los sistemas conjugados. En este caso deben satisfacer los valores

$$du_1=du,\quad dv_1=0\quad \text{y}\quad du_2=0,\quad dv_2=dv$$

á la ecuación (3); luego la condición buscada es $D'=0$.

Teorema II. *La condición necesaria y suficiente para que las curvas paramétricas sean asintóticas es que* $D=0$ *y* $D''=0$ *queden idénticamente satisfechas para todos los pares de valores de* u *y de* v.

Puesto que las direcciones asintóticas se hallan definidas por la condición

$$da\,dx+db\,dy+dc\,dz=0,$$

de la ecuación

$$\mathrm{D}\,du^2 + 2\mathrm{D}'du\,dv + \mathrm{D}''dv^2 = -\Sigma\,da\,dx$$

resulta $$\mathrm{D}\,du^2 + 2\mathrm{D}'du\,dv + \mathrm{D}''dv^2 = 0,$$

ecuación diferencial de las dos series de líneas asintóticas.

Si las curvas paramétricas son líneas asintóticas, deberá quedar satisfecha así para $du = 0$, como para $dv = 0$. La condición en el primer caso deberá ser $\mathrm{D}'' = 0$ y en el segundo $\mathrm{D} = 0$.

TEOREMA III. *La condición necesaria y suficiente para que las curvas paramétricas sean líneas de curvatura es que se verifiquen idénticamente, para todos los pares de valores de* u *y* v *las ecuaciones* $\mathrm{F} = 0$, $\mathrm{D}' = 0$.

En efecto, las direcciones de las curvaturas principales se definen por

$$\begin{vmatrix} a & da & dx \\ b & db & dy \\ c & dc & dz \end{vmatrix} = 0.$$

Para reducirla á la forma paramétrica, multiplicaremos por el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & \partial a : \partial u & \partial a : \partial v \\ b & \partial b : \partial u & \partial b : \partial v \\ c & \partial c : \partial u & \partial c : \partial v \end{vmatrix} = \mathrm{DD}'' - \mathrm{D}'^2$$

y tendremos $$\begin{vmatrix} \Sigma a^2 & \Sigma a\,da & \Sigma a\,dx \\ \Sigma a\dfrac{\partial x}{\partial u} & \Sigma da\,\dfrac{\partial x}{\partial u} & \Sigma dx\,\dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \Sigma a\dfrac{\partial x}{\partial v} & \Sigma da\,\dfrac{\partial x}{\partial v} & \Sigma dx\,\dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Y puesto que $\Sigma a^2 = 1,\quad \Sigma a\,\dfrac{\partial x}{\partial u} = \Sigma a\,\dfrac{\partial x}{\partial v} = 0,$

tendremos sucesivamente

$$-\Sigma da\,\frac{\partial x}{\partial u} = \mathrm{D}\,du + \mathrm{D}'dv, \quad -\Sigma da\,\frac{\partial x}{\partial v} = \mathrm{D}'du + \mathrm{D}''dv,$$

$$\Sigma dx\,\frac{\partial x}{\partial u} = \mathrm{E}\,du + \mathrm{F}\,dv,\quad \Sigma dx\,\frac{\partial x}{\partial v} = \mathrm{F}\,du + b\,dv,$$

de las que obtendremos (pág. 290) la ecuación diferencial de los dos sistemas de líneas de curvatura. En el caso de ser estas líneas paramétricas debe quedar satisfecha, tanto para $du = 0$ como para $dv = 0$. Por consiguiente las condiciones son

$$\mathrm{ED}' - \mathrm{FD} = 0,\quad \mathrm{FD}'' - \mathrm{GD}' = 0;$$

y puesto que éstas son ecuaciones homogéneas será

$$\mathrm{F} = \mathrm{D}' = 0 \quad \text{ó} \quad \mathrm{F} : \mathrm{D}' = \mathrm{E} : \mathrm{D} = \mathrm{G} : \mathrm{D}''$$

En este último caso quedaría satisfecha la ecuación (a) para todos los valores de u y v, lo que no es posible.

190. Líneas geodésicas. Supongamos que la línea cuya ecuación se pide no sea la línea $v =$ const. Para obtener esta ecuación, bastará expresar que su normal principal es normal á la dirección $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$. Porque, siendo normal á dos direcciones trazadas en la superficie, lo será á ésta. Tendremos pues,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\frac{\partial z}{\partial u} = 0,$$

ó bien $\quad \Sigma x''\frac{\partial x}{\partial u} = 0,\quad \frac{\partial}{\partial s}\Sigma x'\frac{\partial x}{\partial u} - \Sigma x'\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial u} = 0,$

es decir,

$$\frac{d}{ds}\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}u' + \frac{\partial x}{\partial y}v'\right)\frac{\partial x}{\partial u}$$

$$= \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}u' + \frac{\partial x}{\partial v}v'\right)\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}u' + \frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}v'\right).$$

Multiplicando por 2 se tiene

$$2\frac{d}{ds}(\mathrm{E}u' + \mathrm{F}v') = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}u'^2 + 2\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}u'v' + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}v'^2, \tag{1}$$

forma bajo la que se escribe la ecuación de las líneas geodésicas, ó también

$$2\frac{d}{ds}(\mathrm{F}u' + \mathrm{G}v') = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}u'^2 + 2\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}u'v' + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}v'^2.$$

Observación. La condición para que la curva $u = \text{const.}$ sea geodésica, es que, llamando s_u al arco de esta curva, se tenga

$$\Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial s^2_u}\frac{\partial x}{\partial u} = 0.$$

Pero $$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2_u} = \frac{\partial^2 x \partial s_u - \partial^2 s_u \partial x}{\partial s^3_u};$$

luego podremos escribir la ecuación anterior así:

$$\Sigma\left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\frac{\partial s_u}{\partial v} - \frac{\partial^2 s_u}{\partial v^2}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u} = 0$$

ó $$\Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\frac{\partial x}{\partial u}\sqrt{\mathrm{E}} - \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v}\sqrt{\mathrm{G}} = 0,$$

es decir, $$\sqrt{\mathrm{E}}\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}\right) - \mathrm{F}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v} = 0$$

ó $$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u} - \frac{\mathrm{F}}{2\mathrm{E}}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} = 0.$$

191. Otra forma. Sea $u = \varphi(v)$ la ecuación de la geodésica que une en la superficie los dos puntos (u_0, v_0) y (u_1, v_1) y tendremos

$$s = \int_{v_0}^{v_1}\sqrt{\mathrm{E}\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)^2 + 2\mathrm{F}\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right) + \mathrm{G}}\, dv.$$

Debemos determinar la función desconocida $u = \varphi(v)$ de modo que esta integral sea un mínimo, es decir, igualar á cero su variación primera, y tendremos:

$$\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\mathrm{E}\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2\mathrm{F}\left(\frac{du}{dv}\right) + \mathrm{G}}$$
$$- \frac{d}{dv}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2\mathrm{F}\left(\frac{du}{dv}\right) + \mathrm{G}}}{\partial\frac{du}{dv}} = 0$$

$$\frac{\frac{\partial E}{\partial u}\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2\,\frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{du}{dv} + \frac{\partial G}{\partial u}}{2\sqrt{E\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dv}\right) + G}}$$

$$- \frac{d}{dv}\,\frac{E\,\frac{du}{dv} + F}{\sqrt{E\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dv}\right) + G}} = 0. \qquad (1)$$

Á esta ecuación podemos dar otra forma más conveniente, para lo cual, dejando indeterminada la variable independiente, escribiremos desde luego la última ecuación bajo la forma

$$\frac{\partial E}{\partial u}\,du^2 + 2\,\frac{\partial F}{\partial u}\,du\,dv + \frac{\partial G}{\partial u}\,dv^2 = 2\,ds\,.\,d\left(E\,\frac{du}{ds} + F\,\frac{dv}{ds}\right);$$

y en virtud de las expresiones conocidas de $\operatorname{sen}\theta$ y de $\cos\theta$,

$$\frac{\partial E}{\partial u}\,du^2 + 2\,\frac{\partial F}{\partial u}\,du\,dv + \frac{\partial G}{\partial u}\,dv^2 = 2\,ds\,.\,d\left(\sqrt{E}\cos\theta\right)$$

$$= ds\,\frac{dE}{\sqrt{E}}\cos\theta - 2\sqrt{E}\operatorname{sen}\theta\,ds\,.\,d\theta,$$

ó también $\quad \frac{\partial E}{\partial u}\,du^2 + 2\,\frac{\partial F}{\partial u}\,du\,dv + \frac{\partial G}{\partial u}\,dv^2$

$$= \frac{\partial E}{E}\,(E\,du + F\,dv) - 2\sqrt{EG - F^2}\,dv\,d\theta$$

$$= \frac{1}{E}\left(\frac{\partial E}{\partial u}\,du + \frac{\partial E}{\partial v}\,dv\right)(E\,du + F\,dv) - 2\sqrt{EG - F^2}\,dv\,d\theta$$

$$= \frac{\partial E}{\partial u}\,du^2 + \frac{\partial E}{\partial v}\,du\,dv + \frac{F}{E}\,dv\left(\frac{\partial E}{\partial u}\,du + \frac{\partial E}{\partial v}\,dv\right) - 2\sqrt{EG - F^2}\,dv\,d\theta.$$

Reduciendo y dividiendo por $2\,dv$, tendremos

$$\sqrt{EG - F^2}\,d\theta = \frac{1}{2}\,\frac{F}{E}\left[\frac{\partial E}{\partial u}\,du + \frac{\partial E}{\partial v}\,dv\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\,\frac{\partial E}{\partial v}\,du - \frac{\partial F}{\partial u}\,du - \frac{1}{2}\,\frac{\partial G}{\partial u}\,dv, \qquad (2)$$

fórmula dada por Gauss de la ecuación diferencial de segundo orden de las líneas geodésicas.

Si las líneas coordenadas son ortogonales, será $F = 0$ y (2) se reduce á

$$\sqrt{EG} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\,dv - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\,du$$

ó

$$d\theta = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\,du - \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\,dv.$$

192. Propiedades de las geodésicas. Podemos también llegar á la siguiente expresión de las líneas geodésicas

$$\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & m\,du^2 + 2m'\,du\,dv + m''\,dv^2 + E\,d^2u + F\,d^2v \\ F\,du + G\,dv & n\,du^2 + 2n'\,du\,dv + n''\,dv^2 + F\,d^2u + G\,d^2v \end{vmatrix} = 0 \quad (*)$$

que resulta, multiplicando los determinantes

$$\begin{vmatrix} a & \partial x : \partial u & \partial x : \partial v \\ b & \partial y : \partial u & \partial y : \partial v \\ c & \partial z : \partial u & \partial z : \partial v \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a & dx & d^2x \\ b & dy & d^2y \\ c & dz & d^2z \end{vmatrix}$$

para pasar de la ecuación diferencial de las líneas geodésicas en coordenadas cartesianas á la escrita en coordenadas u y v, siendo

$$m = \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}, \qquad n = \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial u},$$

$$m' = \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, \qquad n' = \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u},$$

$$m'' = \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}, \quad n'' = \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}.$$

En el caso de que hayan de ser $v =$ const. líneas geodésicas y $u =$ const. sus trayectorias ortogonales, puesto que la ecuación de las líneas geodésicas queda satisfecha por $dv = 0$ y por la or-

---

(*) Kommerell. *Allgem. Theor. der Raumcurven und Flächen.*

togonalidad es $F = 0$, resulta como condición necesaria y suficiente $En = 0$ ó $\frac{\partial E}{\partial v} = 0$.

Será por tanto E función de u sola, y u el arco de la geodésica $v =$ const. medido á contar desde una trayectoria ortogonal dada. Así pues, $ds_u = du$, debiendo ser $E = 1$, y tomando el elemento líneal la forma

$$ds^2 = du^2 + Gdv^2. \tag{1}$$

Enunciaremos, por consiguiente, el

TEOREMA I. *La condición necesaria y suficiente para que las curvas* (v = const) *de una serie sean geodésicas y las de la otra* (u = const) *sean sus trayectorias ortogonales se reducen á*

$$\frac{\partial F}{\partial v} = 0, \quad F = 0.$$

Y si, en particular, u *es arco de una geodésica, será* $E = 1, F = 0$. En este caso la expresión de la curvatura

$$k = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right\}$$

se reduce á
$$k = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}. \tag{2}$$

Si trazamos dos trayectorias ortogonales u_0 y u, y calculamos el segmento s_u de una geodésica $v = v_0$ comprendida entre aquéllas, puesto que $du_s = du$, será

$$s_u = \int_{u_0}^{u} du = u - u_0, \quad \text{luego:}$$

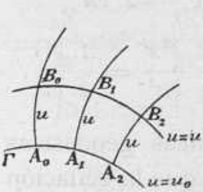


Figura 102

TEOREMA II. *Los arcos de todas las geodésicas* v = const., *comprendidas entre dos de sus trayectorias ortogonales, son de igual longitud.*

Sea una curva Γ (fig. 102) y tracemos por los puntos $A_0, A_1, A_2, \ldots$ geodésicas, según un ángulo recto, y los segmentos iguales $u = A_0B_0 = A_1B_1 = A_2B_2 \ldots$

Los extremos B_0, B_1, B_2, ... forman una trayectoria ortogonal á las líneas geodásicas.

Si la curva $u=u_0$ se reduce á un punto, ó cuando las geodésicas $v=$const. pasan por un punto P del plano (fig. 103) y v es el ángulo que forma una geodésica cualquiera con una geodésica fija $v=0$ (PA), las curvas $u=$const. son las trayectorias ortogonales. El teorema II se aplica á este caso, y tenemos el

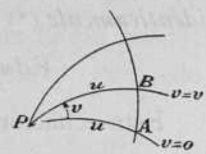


Figura 103

Teorema III. *Los arcos de geodésicas que pasan por un punto* P *hasta una trayectoria ortogonal cualquiera son iguales.*

En un sistema polar, para el arco elemental ds_v de un círculo geodésico $u=$ const. se obtiene $ds_v=\sqrt{G}dv$. Por otra parte, siendo ds_v, en la proximidad del punto P, el arco de un sector circular infinitamente pequeño cuyo radio es u y el ángulo central dv, cuando u es muy pequeño, se tiene $ds_v=udv$.

Así pues, para un valor infinitamente pequeño de u es $\sqrt{G}=u$, ó, el primer término del desarrollo de $\sqrt{G}$ según las potencias de u es u: luego

$$\lim_{u=0}\sqrt{G}=0,\quad \lim_{u=0}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)=1,$$

lo que se ve más detalladamente, considerando los desarrollos de x, y, z, funciones de u, y v,

$$x=u\cos v+\varepsilon_1,\quad y=u\,\text{sen}\,v+\varepsilon_2,\quad z=\frac{u^2}{2\rho}+\varepsilon_3,$$

habiéndose tomado la normal á la superficie por eje de las z y por eje de las x la tangente en O á la geodésica inicial, pues se tendrá $G=u^2+\eta$, expresando η una cantidad infinitesimal de tercer orden. De la fórmula

$$k=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}\quad \text{ó}\quad \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}=-k\sqrt{G},$$

se deduce $$\left(\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}\right)_{u=0}=0,\quad \left(\frac{\partial^3 G}{\partial u^3}\right)^3_{u=0}=-k_0,$$

siendo k_0 la curvatura de la superficie en O.

PROBLEMA. *Sea* $ds = d\theta^2 + \sigma^2 d\theta_1^2.$ (1)

Dado el elemento lineal de una superficie

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \tag{2}$$

determinar las tres funciones θ, σ, θ_1 *de* u *y de* v *tales, que se tenga idénticamente* (*)

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = d\theta^2 + \sigma^2\, d\theta_1^2.$$

Esta ecuación se descompone en las tres

$$\left.\begin{array}{l} E = \left(\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 + \sigma^2\left(\dfrac{\partial\theta_1}{\partial u}\right)^2, \quad F = \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\dfrac{\partial\theta}{\partial v} + \sigma^2\dfrac{\partial\theta_1}{\partial u}\dfrac{\partial\theta_1}{\partial v}, \\ G = \left(\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 + \sigma^2\left(\dfrac{\partial\theta_1}{\partial v}\right)^2 \end{array}\right\} \tag{3}$$

Eliminando $\sigma\dfrac{\partial\theta_1}{\partial u}$ y $\sigma\dfrac{\partial\theta_1}{\partial v}$, resulta

$$G\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + E\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 = EG - F^2. \tag{4}$$

Si se hace, por brevedad,

$$\Delta\theta = \frac{G\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 - 2F\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\dfrac{\partial\theta}{\partial v} + E\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2}{EG - F^2}, \tag{5}$$

la ecuación (3) se reduce á $\Delta\theta = 1$ (6)

es decir, que según veremos, *el parámetro diferencial* $\Delta\theta$ *de primer orden, es igual á* 1.

Fácilmente se demuestra que recíprocamente: *Á toda solución de la ecuación* (6) *corresponde una familia de curvas paralelas*, pues la expresión (6) expresa que $ds^2 - d\theta^2$ es un cuadrado perfecto $(mdu + ndv)^2$, y llegaremos por un cambio de variables á la ecuación (1).

M. Darboux demuestra en su obra citada, que si se ha obtenido

(*) G. Darboux *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, p. 424.

una solución de la ecuación de derivadas parciales (5) que contenga una constante distinta de la que puede reunirse á θ por adición, *constante que debe figurar por consiguiente, en una al menos de las dos derivadas* $\frac{\partial\theta}{\partial u}$, $\frac{\partial\theta}{\partial v}$, se podrá obtener σ y θ_1 mediante derivaciones, y por consiguiente las ecuaciones finitas de las líneas geodésicas, trayectorias ortogonales de las curvas $\theta = \text{const.}$ Para ello considera la ecuación

$$ds^2 = d\theta^2 + \sigma^2\, d\theta^2,$$

entre las cinco variables u, v, du, du y la constante arbitraria a que entra en θ.

Derivando con respecto á a la diferencial

$$d\theta = \frac{\partial\theta}{\partial u}\, du + \frac{\partial\theta}{\partial v}\, dv, \quad \text{resulta} \quad \frac{\partial^2\theta}{\partial a \partial u}\, du + \frac{\partial^2\theta}{\partial a \partial v}\, dv = d\,\frac{\partial\theta}{\partial a},$$

obteniéndose un resultado análogo respecto á θ_1, y puesto que ds es independiente de a:

$$0 = d\theta\, d\left(\frac{\partial\theta}{\partial a}\right) + \sigma d\theta_1 \left[\frac{\partial\sigma}{\partial a}\, d\theta_1 + \sigma d\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial a}\right)\right],$$

$d\theta_1$, función lineal de du, dv debe dividir á $d\theta$ ó á $d\left(\frac{\partial\theta}{\partial a}\right)$. Y no pudiendo dividir á $d\theta$, porque entonces sería θ_1 función de θ, tendrá que dividir á $d\,\frac{\partial\theta}{\partial a}$; θ_1 es función de $\frac{\partial\theta}{\partial a}$, y se podrá escribir $\theta_1 = \frac{\partial\theta}{\partial a}$. Así pues, la ecuación de las líneas geodésicas que cortan según ángulos rectos á las curvas $\theta = \text{const.}$, es

$$\frac{\partial\theta}{\partial a} = \text{const.} = a'. \tag{7}$$

193. Propiedades de la distancia geodésica. Sea un segmento de línea geodésica comprendido entre los puntos M_0 y M_1, la longitud θ del mismo estará dada por la fórmula

$$\theta = \int_{M_0}^{M} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\, dt,$$

expresando u' y v' las derivadas de u y v con respecto á otra variable independiente t.

Si M_0 y M_1 se mueven describiendo curvas cualesquiera, el cálculo de las variaciones da

$$\delta\theta = \left[\frac{(Eu' + Fv')\,\delta u + (Fu' + Gv')\,\delta v}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} \right]_{M_0}^{M}. \tag{1}$$

La función θ es la *distancia geodésica de los dos puntos* M *y* M_0. La fórmula (1) puede escribirse

$$\delta\theta = \frac{(Eu' + Fv')\,\delta u + (Fu' + Gv')\,\delta v}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}}$$

$$- \frac{(E_0 u'_0 + F_0 v'_0)\,\delta u_0 + (F_0 u'_0 + G_0 v'_0)\,\delta v_0}{\sqrt{E_0 u'^2_0 + 2F_0 u'_0 v'_0 + G_0 v'^2_0}},$$

expresando con el subíndice o los elementos correspondiente al punto M_0.

Esta ecuación da las cuatro siguientes:

$$\frac{\partial\theta}{\partial u} = \frac{Eu' + Fv'}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} = E\,\frac{du}{ds} + F\,\frac{dv}{ds},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial v} = \frac{Fu' + Gv'}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} = F\,\frac{du}{ds} = G\,\frac{dv}{ds},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial u_0} = \frac{E_0 u' + Gv'}{\sqrt{E_0 u'^2_0 + \ldots}} = -\,E_0\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_0 - F_0\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_0,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial v_0} = \frac{F_0 u'_0 + G_0 v'_0}{\sqrt{E_0 u'^2_0 + \ldots}} = -\,F_0\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_0 - G_0\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_0.$$

Al teorema II es equivalente el

TEOREMA IV. *Si por los puntos de una línea* L *se trazan las geodésicas* g *ortogonales, y en cada una de éstas, á partir de* L *se toman arcos de igual longitud, el lugar de sus extremos es otra trayectoria ortogonal de las geodésicas* g.

Para demostrarlo, consideraremos el elemento lineal

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

en el que debe ser $E = 1$. La ecuación (2) pág. 300 diferencial de las geodésicas se reduce á

$$\sqrt{G - F^2}\,d\theta = -\frac{\partial F}{\partial u}\,du - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\,dv,$$

á la que deben satisfacer las líneas $v =$ const. para las cuales $dv = 0$, $d\theta = 0$. Por consiguiente, se tiene $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$ á lo largo de las líneas v, en toda la superficie; luego será $F = \varphi(v)$ ó $F =$ const., á lo largo de cualquier geodésica. Pero en el punto de partida $\cos\omega = \cos\frac{\pi}{2} = 0$; luego será siempre $F = 0$, y las líneas u son ortogonales á todas las geodésicas v.

Esta demostración es válida cuando la línea L se reduce á un punto, y tenemos el teorema III.

194. Variación de un segmento de geodésica. Sea MP extremos M y P describen dos curvas dadas (C) y (D).

Empleemos el sistema de coordenadas curvilíneas formado por las posiciones sucesivas MP, M'P', ... del segmento y por sus trayectorias ortogonales. El elemento lineal es de la forma

$$ds^2 = d\theta^2 + G\,dv^2.$$

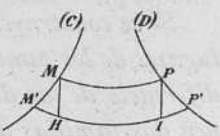


Figura 104

Si u y u_0 son los valores de u en M y P y $u + du$, $u_0 + du_0$ en M' y P', se tendrá

$$\text{arc MP} = u - u_0, \qquad \text{arc M'P'} = u + du - u_0 - du_0$$

dará

$$\text{MP} = du - du_0.$$

Y en virtud de los triángulos infinitesimales MM'H, PP'K,

$$\text{M'H} = du = -\,\text{MM'}\cos \text{M'MP}, \quad \text{KP'} = -du_0 = -\,\text{PP'}\cos \text{P'PM}$$

y

$$d\,\text{arc MP} = -\,\text{MM'}\cos\text{M'MP} - \text{PP'}\cos\text{P'PM}, \tag{1}$$

como en el caso del segmento rectilíneo.

Problema. *Hallar el lugar de los puntos tales, que sea cons-*

tante la suma ó la diferencia de sus distancias geodésicas á dos curvas dadas (C) *y* (C').

Si por un punto M del lugar se bajan las *normales geodésicas* MP y MQ á las dos curvas, se deberá tener

$$MP \pm MQ = \text{const.};$$

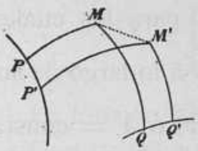


Figura 105

luego, cuando se pase de M al punto infinitamente próximo M' resultará

$$d\,MP \pm d\,MQ = 0.$$

La fórmula (1) pág. 307 da

$$dMP = -MM' \cos M'MP, \quad dMQ = -MM' \cos M'MQ.$$

Sustituyendo en la ecuación precedente, será

$$\cos M'MP \pm \cos M'MQ = 0.$$

En el caso del signo $+1$ ó de la suma constante, la ecuación expresa que la tangente es la bisectriz del ángulo formado por una línea geodésica y la prolongación de la otra, etc. Diremos, pues:

Si se construyen en una superficie cualquiera todas las curvas lugares de los puntos para los que permanece constante la suma ó la diferencia de las distancias geodésicas á dos curvas dadas, se obtienen dos familias de curvas que se cortan según ángulos rectos. (*)

Para obtener la forma del elemento lineal en el sistema de coordenadas curvilíneas de que se trata, consideremos una primera familia de curvas paralelas, que definiremos por sus distancias $u = AP$ á una de ellas (C), contadas en geodésicas normales. Y consideremos otra familia de curvas paralelas definidas por sus distancias $v = BQ$ á una de ellas (C').

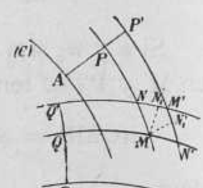


Figura 106

Construyamos las cuatro curvas u, $u + du$, v, $v + dv$ que forman un paralelógramo MN M'N'.

Tendremos $\quad MN' = A\,du, \quad MN = C\,dv,$

(*) Darboux, obra cit., t. II, pág. 418.

siendo A y C las cantidades que figuran en

$$ds^2 = A^2du^2 + C^2dv^2 + 2\,AC \cos \alpha\, du\, dv$$

de elemento lineal y α el ángulo M.

Si se trazan por M las geodésicas MN_1 y MN'_1 normales á los lados opuestos del paralelógramo, las longitudes geodésicas son

$$MN_1 = dv, \quad MN'_1 = du.$$

Y, considerando los triángulos MNN_1, $MN'N'_1$ como rectilíneos,

$$MN_1 = MN \operatorname{sen} \alpha, \quad MN'_1 = MN' \operatorname{sen} \alpha,$$

ó $$du = A du \operatorname{sen} \alpha, \quad dv = C dv \operatorname{sen} \alpha;$$

luego $$A = C = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

y $$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2 + 2\,du\,dv \cos \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha}.$$

Si se toma $u + v = 2\,u'$, $u - v = 2\,v'$,

las curvas cuyos parámetros son u' y v', serán elipses ó hipérbolas geodésicas.

PROBLEMA. *Dado el elemento lineal*

$$ds^2 = E du^2 + 2\,F du\, dv + G dv^2,$$

hallar la condición para que las curvas u = const. *sean geodésicas paralelas, siendo* u *el arco de geodésica.*

La ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales á las curvas $du = 0$ es

$$E du + G dv = 0,$$

para las que $dv = -\frac{F}{G} du$. Y el elemento lineal ds_g será

$$ds^2_g = \frac{EG - F^2}{G} du^2.$$

Y puesto que debe ser $ds_g = du$, resulta la condición

$$\frac{EG - F^2}{G} = 1.$$

PROBLEMA. *Si se trazan en una superficie dos curvas* C_1 *y* C_2 *que no sean geodésicas paralelas, siendo las curvas paramétricas las paralelas geodésicas de estas dos curvas y* u, v *las distancias geodésicas de las curvas* u = const. v = const. *de* C_1 *y* C_2. *Hallar la forma del elemento lineal.*

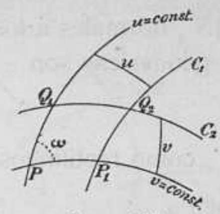


Figura 107

En virtud del problema anterior tenemos

$$\frac{EG - F^2}{G} = 1, \quad \frac{EG - F^2}{E} = 1$$

ó

$$E = G, \quad F = \sqrt{E^2 - E}$$

y en virtud de las fórmulas (6) pág. 241

$$E = G = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \omega}; \quad F = \frac{\cos \omega}{\operatorname{sen}^2 \omega}.$$

El elemento lineal será

$$ds^2 - \frac{du^2 + 2 \cos \omega \, du dv + d^2 v}{\operatorname{sen}^2 \omega}.$$

Y sustituyendo los nuevos parámetros u_1, v_1 que satisfagan á las relaciones

$$u + v = 2u_1, \quad u - v = 2v_1,$$

resultará finalmente $ds^2 = \dfrac{du_1^2}{\operatorname{sen}^2 \frac{\omega}{2}} + \dfrac{dv_1^2}{\cos^2 \frac{\omega}{2}}$. (1)

195. TEOREMA DE WEINGARTEN. *En una superficie las curvas, lugares de los puntos para los cuales la suma ó diferencia de las distancias geodésicas á una curva fija es constante, forman un sistema ortogonal.*

Observación. Si se reducen cada una de las curvas C_1 y C_2 á un punto, resultan en las superficies curvas, que corresponden á las elipses é hipórbolas homofocales del plano. Y las curvas $u_1 =$ const. $v_1 =$ const. se llaman *elipses* é *hipérbolas geodésicas.*

196. Superficies de Liouville. Sea el elemento lineal

$$ds^2 = (\mathrm{U} + \mathrm{V})\,(du^2 + dv^2) \tag{1}$$

en el que U es función de u y V función de v.

En virtud de un teorema (pág. 249) las curvas paramétricas son isométricas. Además son elipses é hipérbolas geodésicas. El elemento lineal toma la forma

$$ds^2 = \frac{(\sqrt{\mathrm{U}}\,du)^2}{(\sqrt{\mathrm{U} : \mathrm{U} + \mathrm{V}})^2} + \frac{(\sqrt{\mathrm{V}}\,dv)^2}{(\sqrt{\mathrm{V} : \mathrm{U} + \mathrm{V}})^2}.$$

Teorema. *En las superficies de Liouville, las ecuaciones diferenciales de las líneas geodésicas son integrables.*

En efecto, por ser el elemento lineal de la forma (1) será $\mathrm{E} = \mathrm{G} = \mathrm{U} + \mathrm{V}$, $\mathrm{F} = 0$, la ecuación de las líneas geodésicas se reduce á

$$(\mathrm{U} + \mathrm{V})\,(du\,d^2v - dv\,d^2u) + \frac{1}{2}\,(du^2 + dv^2)\,(\mathrm{U}'dv - \mathrm{V}'du) = 0$$

que sucesivamente se reduce á

$$\frac{\mathrm{U}'du\,dv^2\,(du^2 + dv^2) + 2\,\mathrm{U}du\,dv\,(du\,d^2v - dv\,d^2u)}{(du^2 + dv^2)^2}$$

$$= \frac{\mathrm{V}'dv\,du^2\,(du^2 + dv^2) + 2\,\mathrm{V}du\,dv\,(dv\,d^2u - du\,d^2v)}{(du^2 + dv^2)^2}$$

ó
$$d\,\frac{\mathrm{U}dv^2}{du^2 + dv^2} - d\,\frac{\mathrm{V}du^2}{du^2 + dv^2} = 0.$$

Por consiguiente la integral primera será

$$\frac{\mathrm{U}dv^2}{du^2 + dv^2} - \frac{\mathrm{V}du^2}{du^2 + dv^2} = a. \tag{2}$$

De esta última ecuación resulta

$$\frac{du^2}{\mathrm{U} - a} - \frac{dv^2}{\mathrm{V} + a} = 0;$$

y la integral de (1) será

$$\int \frac{du}{\sqrt{\mathrm{U} - a}} - \int \frac{dv}{\sqrt{\mathrm{V} + a}} = b.$$

Por último, el arco elemental ds_g de las líneas geodésicas quedará determinado por

$$ds_g = \sqrt{U - a}\,du + \sqrt{V + a}\,dv$$

También si hacemos $\lambda = U + V$, la ecuación diferencial de Gauss de las líneas geodésicas (pág. 300) se reduce á

$$\lambda d\theta = \frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial v}\,dv - \frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial u}\,dv.$$

Multiplicándola por $2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$ y en virtud de (10) pág. 243

$$\cos\theta\,ds = \sqrt{\lambda}\,du, \quad \operatorname{sen}\theta\,ds = \sqrt{\lambda}\,dv, \quad \cos\theta\,dv = \operatorname{sen}\theta\,du, \qquad (1)$$

y $$2\lambda \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{\partial\lambda}{\partial v}\cos^2\theta\,dv - \frac{\partial\lambda}{\partial u}\operatorname{sen}^2\theta\,du,$$

$$\lambda d \operatorname{sen}^2\theta = \frac{\partial\lambda}{\partial v}\cos^2\theta\,dv - \frac{\partial\lambda}{\partial u}\operatorname{sen}^2\theta\,du,$$

fórmula aplicable á cualquier superficie. Pero si establecemos la condición

$$\alpha(u)\,d\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\,\alpha'(u)\,du = \beta(v)\,d\cos^2\theta + \cos^2\theta\,\beta'(v)\,dv,$$

ó $$d(\alpha\operatorname{sen}^2\theta) = d(\beta\cos^2\theta),$$

la ecuación se hace integrable, siendo su integral primera

$$\alpha(u)\operatorname{sen}^2\theta - \beta(v)\cos^2\theta = a \quad \text{ó} \quad \operatorname{tg}\theta = \pm\sqrt{\frac{\beta(v) + a}{\alpha(u) - a}} \qquad (2)$$

y $$\frac{du}{\sqrt{\alpha(u) - a}} \mp \frac{dv}{\sqrt{\beta(v) + a}} = 0, \qquad \left(\operatorname{tg}\theta = \frac{\partial v}{\partial u}\right)$$

obteniéndose la ecuación de las geodésicas en términos finitos, como anteriormente.

Para obtener la expresión del arco de geodésica, multiplicaremos la primera ecuación (1) por $\cos\theta$, la segunda por $\operatorname{sen}\theta$, sumaremos y resultará

$$ds = \sqrt{\lambda}\cos\theta\,du + \sqrt{\lambda}\operatorname{sen}\theta\,dv \qquad (0 < \theta < \pi).$$

De la (2) resulta

$$\operatorname{sen} \theta = \sqrt{\frac{\beta(v) + a}{\lambda}}, \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{\alpha(u) - a}{\lambda}}$$

y tendremos

$$s = \int \sqrt{\beta(v) + a}\, dv \pm \int \sqrt{\alpha(u) - a}\, du + \mathrm{C}.$$

197. Caso de las superficies de rotación. Siendo el elemento lineal de la forma

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2,$$

si hacemos $\int \frac{du}{r} = du_1$ para reducir á parámetros isométricos, tendremos $\quad ds^2 = r^2 (du_1^2 + dv^2),$

y r será función de u_1. Aplicando las fórmulas del párrafo anterior, será

$$\alpha(u_1) = r^2, \quad \beta(v) = 0.$$

La integral primera (2) se reducirá á $r^2 \operatorname{sen}^2 \theta = a$, y si la geodésica es real, podremos hacer $a = k^2$, siendo k real y luego:

$$r \operatorname{sen} = k; \tag{1}$$

Teorema de Clairaut. *Por todo punto de una geodésica, trazada en una superficie de rotación, el seno del ángulo que forma con el meridiano es inversamente proporcional al radio del paralelo.*

Las integrales en términos finitos serán, en el caso actual,

$$v = \pm k \int \frac{du_1}{r^2 - k^2} + b, \quad s = kv \pm \sqrt{r^2 - k^2}\, du_1 + \mathrm{C};$$

y por ser $du_1 = \frac{du}{r}$, será $v = \pm k \int \frac{du}{\sqrt{r^2 - k^2}} + b$,

$$s = kv \pm \sqrt{\frac{r^2 - k^2}{r}}\, du + \mathrm{C} = \frac{r\, du}{\sqrt{r^2 - k^2}} + \mathrm{C}.$$

Observación. Todas las geodésicas correspondientes á un valor fijo de k y á valores distintos de b se obtienen de una de ellas, haciéndola girar alrededor del eje de la superficie.

198. Una clase particular de geodésicas. En toda superficie, existe una clase de geodésicas que se obtienen cuando la expresión de ds^2 es la forma

$$ds^2 = \Lambda\,(du^2 + dv^2).$$

Para obtener estas geodésicas, basta hallar una solución completa de la ecuación de derivadas parciales

$$\frac{1}{\Lambda}\left[\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right)^2\right] = 2h.$$

Si se hace $h = 0$, esta ecuación se integra haciendo $\Theta = au + bv + C$, siempre que sea $a^2 + b^2 = 0$ ó $b = \pm a\sqrt{-1}$.

Así haciendo $\Theta = a\,(u + v\sqrt{-1})$, las ecuaciones de las líneas geodésicas son

$$\frac{\partial\Theta}{\partial a} = \text{const.} \qquad \text{ó} \qquad u \pm v\sqrt{-1} = \text{const.}$$

Su ecuación diferencial es

$$du \pm dv\sqrt{-1} = 0, \qquad \text{ó bien} \qquad du^2 + dv^2 = 0.$$

Para estas líneas se tiene

$$\Lambda\,(du^2 + dv^2) = 0 \qquad \text{ó} \qquad ds^2 = 0,$$

son *líneas de longitud nula.*

§ 6.º Valuación de la curvatura total

199. Coordenadas de Gauss. Las líneas $u =$ const. son geodésicas que parten de un punto O y las líneas $v =$ const. círculos geodésicos, cuyos centros se hallan en O. Tenemos así un sistema ortogonal en el que una de las líneas coordenadas es geodésica.

Sea θ el ángulo que una de las coordenadas geodésicas forma con una geodésica fija que pasa por O y r la longitud de la misma, contada desde el punto O hasta la punto M, cuyas coordenadas se expresarán por r y θ. La expresión ds^2 es de la forma

$$ds = dr^2 + G^2 d\theta^2,$$

porque para $\theta = \text{const.}$ se debe tener $dr = ds$ y en ds^2 no debe entrar el término $dr\,d\theta$. El arco de círculo geodésico elemental, que es el valor de ds, según la línea $r = \text{const.}$ es $Gd\theta$. En este caso la expresión general de la curvatura total k dada por la fórmula (6) pág. 291, se reduce á

$$k = -\frac{1}{G}\frac{\theta^2 G}{\theta r^2} \qquad (a)$$

y la ecuación

$$2\frac{\partial}{\partial s}(Eu' + Fv') = \frac{\partial E}{\partial u}u'^2 + 2\frac{\partial E}{\partial u}v'u' + \frac{\partial G}{\partial v}v'^2$$

de una geodésica á

$$2\frac{d\cos i}{ds} = 2H\frac{\partial H}{\partial r}\theta'^2 \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen} i\frac{di}{ds} = -G\frac{\partial G}{\partial r}\theta'^2. \qquad (b)$$

200. Valoración de la curvatura. Vamos á valuar el área del triángulo geodésico, es decir, el formado por tres líneas geodésicas CA, CB y AB.

Coloquemos el origen en C, y tomemos por línea coordenada inicial el lado CA. La curvatura total hallada, se determinará por la fórmula

$$K = \iint K d\Omega = \iint KH d\theta\, dr,$$

expresando Ω el área elemental; y sustituyendo el valor de K, se transforma en

$$K = -\iint \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} d\theta\, dr.$$

Integremos con relación á r; y observando que, para r infinitamente pequeño, es $\frac{\partial G}{\partial r} = 1$, porque para $r = 0$ se tiene $rd\theta = Gd\theta$

ó $r = G$, $dr = dG$, tendremos:

$$K = \int \left(1 - \frac{\partial G}{\partial r} \right) d\theta,$$

y, puesto que la ecuación (b) da

$$\frac{\partial G}{\partial r} = - \operatorname{sen} i \frac{di}{ds} \frac{1}{G \left(\frac{\partial \theta}{\partial s} \right)^2}$$

$$= - G \frac{d\theta}{ds} \frac{di}{ds} \frac{1}{G \left(\frac{d\theta}{ds} \right)} = - \frac{di}{ds} \frac{ds}{d\theta} = - \frac{di}{d\theta},$$

será $$K = \int \left(1 + \frac{di}{d\theta} \right) d\theta = \int (d\theta + di).$$

Esta expresión debe integrarse desde o hasta C.

Pero la integral de di da la diferencia de los valores de di en A y en B, el uno es A y el otro π — B; luego

$$K = C + A + B - \pi;$$ luego:

Teorema. *La curvatura total de un triángulo geodésico es igual al exceso de la suma de sus ángulos sobre dos rectos.*

Ó bien: *La suma de los ángulos de un triángulo geodésico es igual á su curvatura aumentada en dos rectos.*

Luego: *La suma de los ángulos de un polígono geodésico es igual á su curvatura más tantas veces dos rectos, como lados tiene menos dos.*

En un triángulo infinitesimal la curvatura es un infinitamente pequeño de segundo orden; luego: *La suma de los ángulos de un triángulo geodésico infinitesimal es igual á dos ángulos rectos.*

§ 7.º Curvaturas tangencia y geodésicas

201. Componentes de la curvatura. Sea $\frac{1}{\rho}$ la curvatura de una superficie en un punto M de ésta, y considerémosla representada por una recta dirigida según la normal principal, y hacia el centro de curvatura. Esta curvatura se podrá descomponer en otras dirigidas según rectas dadas. Sus proyecciones sobre los ejes son:

$$\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \frac{d^2z}{ds^2}.$$

Sea una curva trazada en una superficie. Si se descompone su curvatura según la normal y según una tangente, la primera será la *curvatura normal* y la segunda la *curvatura tangencial* ó *geodésica*.

Sea θ el ángulo que forma el plano osculador de la curva con el plano tangente á la superficie. Su curvatura será $\frac{\cos\theta}{\rho}$ y la curvatura normal $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho}$. La primera es nula en las curvas geodésicas y la segunda en las líneas asintóticas.

202. CURVATURA TANGENCIAL Ó GEODÉSICA. LEMA. *Sean* R *y* R′ *los radios de curvatura de dos curvas* AB *y* AB′, *tangentes en* A. *Si se toman en estas dos curvas longitudes* AB *y* AB′ *iguales á* ds, *las tangentes en* B *y en* B′ *á estas curvas formarán un ángulo* dω *dado por la fórmula*

$$d\omega^2 = \frac{ds^2}{R^2} + \frac{ds^2}{R'^2} + 2\,\frac{ds}{R}\,\frac{ds}{R'}\cos(R, R') \qquad (c)$$

En efecto, si por un punto O del espacio, se trazan Oa paralela á la tangente común en A, Ob y Ob' paralelas á las tangentes en B y B′, tomando en estas rectas $Ob = Ob' = Oa = 1$, se tendrá en el triángulo abb',

$$ab = \frac{ds}{R}, \quad ab' = \frac{ds}{R'}, \quad bb' = d\omega, \qquad (d)$$

y la fórmula

$$\overline{bb'}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ab'}^2 - 2\,\overline{ab}\,.\,\overline{ab'}\cos(ab, ab')$$

dará la relación (c), si se sustituyen ab, ab', bb' por sus valores (d) y por ser ab y ab' paralelas á los radios de curvatura R y R′.

Consideremos ahora una curva cualquiera AB trazada en una superficie, y tracemos por los puntos A y B, infinitamente próximos, arcos geodésicos tangentes AKC y BK.

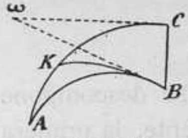


Figura 108

El ángulo CKB será el ángulo de contingencia geodésica. Llamémosle ε, y hagamos AB$=ds$; la relación $\frac{\varepsilon}{ds}$ será la *curvatura geodésica* en el punto A.

En efecto, tomemos AC $=$ AB. El ángulo de las tangentes en B y en C á AB y AC estará dado por la fórmula

$$\omega = ds\left[\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} - \frac{2}{RR'}\cos(R, R')\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Pero, en virtud del teorema de Meusnier, por tener la geodésica su plano osculador normal á la superficie, si se llama θ el ángulo que forma el plano osculador de AB con el plano tangente, se tendrá $R' = \frac{R}{\operatorname{sen}\theta}$, y por consiguiente

$$\omega = \frac{ds\cos\theta}{R}. \qquad (e)$$

En general, las tangentes en B y C no se encuentran. Pero si se supone que la fig. 108 sea una proyección sobre el plano tangente, los ángulos no diferirán de sus proyecciones más que por términos de segundo orden, y salvo estos términos, se tendrá

$$\omega + \omega BC + BC\omega = \pi. \qquad (f)$$

En el triángulo geodésico KCB se tendrá también, salvo los términos de segundo orden

$$K + KBC + BCK = \pi \quad \text{ó} \quad \varepsilon + \omega BC + BC\omega = \pi.$$

De esta fórmula y de (f), resulta $\omega=\varepsilon$; luego, en virtud de (e),

$$\varepsilon = \frac{ds\cos\theta}{R} \quad \text{ó} \quad \frac{\varepsilon}{ds} = \frac{\cos\theta}{R},$$

lo que demuestra el teorema, justificando la denominación de curvatura geodésica, dada por Liouville, á la curvatura tangencial.

También se ha dado á la curvatura tangencial el nombre de *curvatura de desarrollo*, denominación justificada por el siguiente

TEOREMA. *La curvatura tangencial de una curva es igual á la curvatura de la transformada de ésta, cuando se la supone trazada en una desarrollable cuya curva de contacto es con la superficie propuesta, cuando se desarrolla esta superficie desarrollable sobre un plano.*

En efecto, la curvatura geodésica de una curva trazada en una desarrollable es igual á la curvatura propia de su transformada plana, lo que probaremos, haciendo ver que las geodésicas de una desarrollable tienen por transformadas líneas rectas. El ángulo de contingencia geodésica se transforma pues, en el ángulo de contingencia de la transformada plana; y puesto que el arco no cambia de longitud, después de la transformación, esto demuestra lo enunciado. Pero la curvatura geodésica de una curva es la misma con relación á todas las superficies circunscritas, de las cuales es la curva de contacto, y el teorema queda demostrado.

COROLARIO. *La curva* C *trazada en una superficie* S, *cuya curvatura geodésica es constante, puede obtenerse como sigue. Si se circunscribe, según esta curva, una desarrollable á la superficie y se desarrolla esta desarrollable en un plano, la transformada de la curva será una curva de curvatura constante, es decir, una circunferencia.*

Podemos demostrar como sigue el

TEOREMA. *La curvatura geodésica es tan solo una función de las cantidades* E, F, G, *de sus derivadas y de* u′, v′, u″, v″.

En efecto, puesto que los cosenos directores de la normal principal y la normal á la curva situada en el plano tangente son

$$\rho\frac{d^2x}{ds^2},\quad \rho\frac{d^2y}{ds^2},\quad \ldots\ldots \quad \text{y} \quad \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(p'\frac{dz}{ds}-p''\frac{dy}{dz}\right),\quad \ldots\ldots$$

se tiene, llamando Δ á $\sqrt{EG-F^2}$,

$$\cos\frac{\theta}{\rho}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s}\\ p & p' & p''\end{vmatrix}$$

pero $\qquad 1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ p & p' & p'' \end{vmatrix}$; luego multiplicando,

$$\frac{\cos\theta}{\rho} = \frac{1}{\Delta^3}\begin{vmatrix} \Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\frac{\partial x}{\partial u} & \Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\frac{\partial x}{\partial v} & \Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}p \\ \Sigma\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial u} & \Sigma\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial v} & \Sigma\frac{\partial x}{\partial s}p \\ \Sigma p\frac{\partial x}{\partial u} & \Sigma p\frac{\partial x}{\partial v} & \Sigma p^2 \end{vmatrix}.$$

Y, por ser nulos los dos primeros elementos de la última línea del determinante, será

$$\Delta\frac{\cos\theta}{\rho} = \Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\frac{\partial x}{\partial u}\,\Sigma\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial v} - \Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\frac{\partial x}{\partial v}\,\Sigma\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial u}.$$

Desarrollemos $\frac{d^2x}{d^2s}$ y $\frac{dx}{ds}$ según las potencias y los productos de $\frac{du}{ds} = u'$ y $\frac{dv}{ds} = v'$, y resultará

$$\Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u},\quad \Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v},\quad \ldots\ldots$$

y, por último

$$\Delta\frac{\cos\theta}{\rho} = u'^2\left[\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}(u'F + v'G) + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial u}\right)u'E + vF)\right]$$
$$+ u'v'\left[\frac{\partial E}{\partial v}(u'F + v'G) - \frac{\partial G}{\partial u}(u'E + v'F)\right]$$
$$+ v'^2\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}(u'E + v'F) - \left(\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}\right)(u'E + v'F)\right]$$
$$+ (u''v' - v''u')(EG - F^2).$$

De la fórmula precedente se pueden deducir las curvaturas geodésicas de las líneas coordenadas ó paramétricas $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ que expresaremos por $\frac{\cos \theta_u}{\rho_u}$ y $\frac{\cos \theta_v}{\rho_v}$. Tendremos

$$\sqrt{EG - F^2}\,\frac{\cos \theta_u}{\rho_u} = \frac{F}{2E\sqrt{E}}\frac{\partial E}{\partial u} + \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial F}{\partial u},$$

$$\sqrt{EG - F^2}\,\frac{\cos \theta_v}{\rho_v} = \frac{F}{2G\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial v} + \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial F}{\partial v}.$$

TEOREMA. *No se pueden trazar, en general, sobre una superficie dos sistemas de líneas geodésicas ortogonales, si la superficie es desarrollable, pues si*

$$F = 0, \quad \frac{\cos \theta_u}{\rho_u} = 0, \quad \frac{\cos \theta_v}{\rho_v} = 0, \quad \textit{resulta} \quad \frac{\partial E}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial v} = 0.$$

Las funciones E y G solo contendrán u y v respectivamente. Así

$$ds^2 = f(u)\,du^2 + f_1(v)\,dv^2,$$

ó por un cambio de coordenadas,

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

Si se calcula la curvatura total k, se obtendrá $k = 0$; relación que solo se verifica para una superficie desarrollable.

§ 8.° CURVATURAS NORMAL Y PROPIA, TORSIÓN GEODÉSICA

203. CURVATURA NORMAL Y CURVATURA PROPIA. La curvatura se introduce más naturalmente en la teoría de las superficies que la curvatura ordinaria ó propia de las curvas trazadas en estas superficies. Sin embargo, si se trata de calcular la curvatura propia de una curva, es necesario calcular su curvatura tangencial ó geodésica $\frac{\operatorname{sen} \theta}{\rho}$ y su curvatura normal $\frac{\operatorname{sen} \theta}{\rho}$. La raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de estas curvaturas dará la curvatura propia $\frac{1}{\rho}$.

La curvatura normal es la que se presenta desde luego cuando se quiere calcular la curvatura de una curva trazada en una superficie; y, en efecto, si se dan los cosenos directores a, b, c de la tangente á esta curva en el punto (x, y, z), los cosenos directores a', b', c' de su normal principal, siendo ρ el radio de curvatura, θ el ángulo que forma el plano osculador de la curva con el plano tangente á la superficie, y empleando las notaciones conocidas, tendremos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{a'p + b'q + c}{\pm\sqrt{p^2 + q^2 + 1}};$$

y observando que

$$a' = \rho\frac{d^2x}{ds^2}, \quad b' = \rho\frac{d^2y}{ds^2}, \quad c' = \rho\frac{d^2z}{ds^2},$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho} = \frac{p\dfrac{d^2x}{ds^2} + q\dfrac{d^2y}{ds^2} - \dfrac{d^2z}{ds^2}}{\pm\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},$$

y que

$$p\frac{d^2x}{ds^2} + q\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{d^2z}{ds^2} = -\left[r\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2s\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} + t\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right],$$

se tendrá

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho} = \frac{1}{\pm\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}\left[r\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2s\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} + t\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right].$$

Esta es pues, la curvatura que se encuentra cuando se busca $\frac{1}{\rho}$. La curvatura normal estará dada por la fórmula

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho} = \frac{eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2}{\sqrt{EG - F^2}\,(Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2)}.$$

La curvatura de una asintótica es igual á su curvatura geodésica y la de una geodésica á su curvatura normal.

204. Torsión geodésica. Sean $\frac{1}{g}$ la torsión geodésica de una curva, $d\tau = \frac{ds}{T}$ su ángulo de torsión, $d\psi$ el ángulo de la normal á la superficie con el plano tangente á la curva normal á la superficie, trazada por el punto infinitamente próximo, y θ el ángulo que forma el plano osculador á la curva con el plano tangente á la superficie. Hemos visto que $d\psi = d\tau + d\theta$; y si dividimos los dos miembros de esta fórmula por el elemento de arco ds, observando además que $\frac{1}{g}$ es igual, por definición, á la relación $\frac{d\psi}{ds}$, tendremos

$$\frac{1}{g} = \frac{d\tau}{ds} + \frac{d\theta}{ds}.$$

Expresando por α, β, γ los ángulos que forma la normal á la superficie con los ejes, hemos hallado que

$$ds\,d\psi = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \alpha & \beta & \gamma \\ d\alpha & d\beta & d\gamma \end{vmatrix};$$

pero $$\alpha = \frac{p}{\sqrt{\Sigma p^2}} \quad \text{ó} \quad \frac{p}{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}};$$ luego

$$d\alpha = \frac{dp}{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}} + p \,.\, d\,\frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}}.$$

Si se resta de la tercera línea el producto de la segunda por

$$\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}\,d\,\frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}},$$

se obtiene $$ds\,d\psi = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ p & p' & p'' \\ dp & dp' & dp'' \end{vmatrix}.$$

Pero $$\Sigma p^2 = \mathrm{EG} - \mathrm{F}^2 = \begin{vmatrix} p & p' & p'' \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix};$$

y multiplicando miembro á miembro, se tendrá

$$(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)^2\, ds\, d\psi = \begin{vmatrix} 0 & \mathrm{G}du + \mathrm{F}dv & \mathrm{G}du + \mathrm{G}dv \\ \Sigma p^2 & 0 & 0 \\ \Sigma p\,dp & \Sigma \dfrac{\partial x}{\partial u}\, dp & \Sigma \dfrac{\partial x}{\partial v}\, dp \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Y, puesto que $\Sigma p^2 = \mathrm{EG} - \mathrm{F}^2$, será

$$(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)\, ds\, d\psi$$

$$= -(\mathrm{E}du + \mathrm{F}dv)\,\Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\, dp + (\mathrm{F}du + \mathrm{G}dv)\,\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\, dp. \quad (2)$$

Además se tiene $\Sigma \dfrac{\partial x}{\partial v}\, dp = d\Sigma p \dfrac{\partial x}{\partial v} - \Sigma p d \dfrac{\partial x}{\partial v}$

$$\text{ó} \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\, dp = -\Sigma p \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\, du - \Sigma p \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\, dv = -(f du + g dv),$$

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\, dp = -(e\partial u + f du),$$

y la fórmula (2) da

$$(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)\, ds\, d\psi = (\mathrm{E}du + \mathrm{F}dv)(f du + g dv)$$
$$- (\mathrm{F}du + \mathrm{G}dv)(e du + f dv).$$

Llamando $\dfrac{1}{g}$ á la torsión geodésica, se tendrá

$$\frac{1}{g} = \frac{-1}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\,[u'^2(e\mathrm{F} - \mathrm{E}f) + u'v'(e\mathrm{G} - g\mathrm{E}) + v'^2(f\mathrm{G} - g\mathrm{F})];$$

igualando $\dfrac{1}{g}$ á cero, se vuelven á obtener las ecuaciones de las líneas de curvatura.

Tomando las líneas de curvatura por líneas coordenas, se tiene

$$\frac{1}{g} = -u'v'\left(\frac{e}{\mathrm{E}} - \frac{g}{\mathrm{G}}\right);$$

y llamando $\dfrac{1}{\mathrm{R}_1}$ y $\dfrac{1}{\mathrm{R}_2}$ los radios de curvatura principal, se tiene

$$\frac{1}{g} = u'v'\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} - \frac{1}{\mathrm{R}_2}\right)\sqrt{\mathrm{EG}} \quad \text{ó} \quad \frac{ds^2}{g} = ds_u\, ds_v\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} - \frac{1}{\mathrm{R}_2}\right)$$

ó, en fin, $\frac{1}{g} = \operatorname{sen} i \cos i \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$ ó $\frac{1}{g} = a \operatorname{sen} 2i,$ (1)

haciendo $$a = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

La torsión geodésica depende pues, tan solo de la orientación de esta curva con relación á las líneas de curvatura, y varía como el cuadrado del radio vector de una lemniscata de Bernoulli.

Si se observa que $\frac{1}{g} = \frac{1}{T} + \frac{d\theta}{ds}$, en virtud del teorema de Lancret, se ve que, siendo $d\theta = 0$ para una línea geodésica, se tiene

$$\frac{1}{T} = a \operatorname{sen} 2i;$$

luego: *La torsión geodésica depende tan solo de su orientación, y varía como el cuadrado del radio vector de una lemniscata de Bernoulli.*

La torsión de una geodésica tangente á una línea de curvatura es pues nula.

Y puesto que una línea de curvatura no puede ser geodésica más que en el caso de ser nula su torsión, tendremos el siguiente enunciado:

Para que una línea de curvatura sea geodésica, es necesario que sea plana y que su plano sea siempre normal á la superficie.

Por último: *La suma de las torsiones geodésicas en dos direcciones rectangulares es nula.*

205. Expresión de la torsión de una asintótica. La fórmula (1) conduce á la expresión notable

$$\frac{1}{T} = \pm\sqrt{\frac{1}{R_1 R_1}}$$

de la torsión de una línea asintótica.

En efecto, siendo tangente á la superficie el plano osculador de una asintótica, se tiene

$$\theta = 0, \quad d\theta = 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{g} = \frac{1}{T};$$

de manera que, para una asintótica, como para una geodésica se tiene

$$\frac{1}{T} = a \operatorname{sen} 2i = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2i \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right);$$

pero resulta que

$$\operatorname{tg} i = \frac{\sqrt{G}\,dv}{\sqrt{E}\,du}, \quad \operatorname{sen} 2i = 2\sqrt{EG}\,u'v';$$

luego
$$\frac{1}{T} = \sqrt{EG}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) u'v'; \tag{2}$$

pero la ecuación de las asintóticas es

$$eu'^2 + gv'^2 = 0 \quad Eu'^2 + Gv'^2 = 1.$$

Sustituyendo en (2) los valores de u' y v', se obtiene

$$\frac{1}{T} = \pm \frac{\sqrt{EG}\sqrt{-eg}}{Ee - Gg}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Y, por ser $\frac{e}{E} = \frac{1}{R_1}$, $\frac{g}{G} = \frac{1}{R_2}$ resulta la fórmula del enunciado.

§ 9.º Superficies evolutas

206. Generación. Ya hemos visto que sobre la normal de cada punto M de una superficie S existen dos puntos especiales M_1 y M_2 que son los centros de curvatura de la superficie, ó bien los centros de curvatura de las dos secciones normales principales que parten de M. Cuando el punto M se mueve en la superficie, los centros de curvatura M_1 y M_2 describen una superficie, la *evoluta* de S, mientras que esta es la evolvente.

La evoluta consta de dos hojas, la una descrita por el centro M_1, la otra por el centro M_2.

Podemos engendrar las dos hojas de la evoluta, considerando una línea de curvatura C de la superficie S; las normales á lo largo de C envuelven una curva Γ, evoluta de C, que es el lugar de los centros de curvatura de las secciones normales principales, tangentes á C en cada uno de sus puntos. Al moverse la curva C en su sistema, su evoluta Γ se moverá, deformándose, y engendrará una hoja de la evoluta. Análogamente se engendrará la otra.

Teorema. *La arista de retroceso de las desarrollables, lugar de las normales á la superficie á lo largo de cada una de sus líneas de curvatura, son geodésicas de la superficie evoluta.*

En efecto, toda normal á la evolvente es tangente en dos puntos á la evoluta, respectivamente en cada uno de los centros de curvatura, en cada hoja.

Consideremos un elemento MM' de una línea de curvatura del segundo sistema. Las normales en MM' se encuentran en el segundo centro de curvatura M_2 (en menos de cantidades de segundo orden, si MM' es de primero) y son tangentes á la primera hoja en los respectivos centros primeros de curvatura M_1 y M'_1, en estas normales. El plano MM_2M' contiene pues dos direcciones distintas M_1M_2 y $M_1M'_1$ que parten de M_1 y son tangentes á la primera hoja de la evoluta, que es por lo tanto el plano tangente en M_1 á la primera hoja. Así pues:

La normal en M_1 *á la primera hoja es paralela á la tangente en* M *á la primera línea de curvatura, y análogamente sucede para la otra.*

Esto sentado, si consideramos una línea de curvatura C del primer sistema, y la arista de retroceso Γ de la desarrollable engendrada por la normal á S á lo largo de C, la normal principal de Γ en M_1 será paralela á la tangente de C en M, y coincidirá con la normal á la primera hoja; luego Γ es geodésica de esta hoja.

207. Trayectorias ortogonales. Consideremos la hoja primera. Vamos á obtener las trayectorias ortogonales de las geodésicas Γ, Γ', Γ'', ...

Supongamos una trayectoria ortogonal $M_1M'_1M''_1$, ... que encuentre á la hoja en los puntos M_1, M'_1, M''_1, ... , y sean M, M', M'', ... los puntos donde las tangentes á Γ, Γ', Γ'', ... en M_1, M'_1, M''_1, ..., encuentran normalmente á la evolvente S. Las dos curvas $M_1M'_1M''_1$..... y $MM'M''$..... se hallan descritas en la superficie reglada, lugar de las rectas (generatrices) MM_1, $M'M'_1$, $M''M''_1$, ... y son perpendiculares á todas estas generatrices, las cuales son evidentemente geodésicas de la superficie, lugar de las mismas. Pero en virtud de que:

Si en un sistema doble ortogonal, las líneas de uno de los sistemas son geodésicas, las del otro son geodésicas paralelas, los segmentos MM_1, $M'M'_1$, $M''M''_1$, ... son iguales entre sí, y puesto que coinciden con los radios de primera curvatura de la evolvente en los puntos M, M′, M″, ... se concluye que:

Las trayectorias ortogonales de las geodésicas envueltas en una de las hojas de la evoluta por las normales á la evolvente, corresponden á aquellas curvas de la superficie á lo largo de las que es constante el radio correspondiente de curvatura.

208. Fórmulas relativas á la evoluta. Expresando por x, y, z las coordenadas del primer centro de curvatura, tendremos las fórmulas

$$x_1 = x - r_1 X, \quad y_1 = y - r_1 Y, \quad z_1 = z - r_1 Z. \qquad (1)$$

Al variar u y v, estas fórmulas darán las coordenadas generales de un punto de la primera hoja S_1 de la evoluta.

Expresando ahora con

$$E_1, F_1, G_1; \; X_1, Y_1, Z_1; \; D_1, D'_1, D''_1 \text{ y } E, F, G; \; X, Y, Z; \; D, D', D''$$

las cantidades correspondientes en S_1 y en S, derivando las (1), y en virtud de

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{1}{r_1}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{1}{r_1}\frac{\partial y}{\partial u}, \ldots\ldots; \quad \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{1}{r_1}\frac{\partial x}{\partial v}, \ldots\ldots$$

se obtiene

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = \left(1 - \dfrac{r_1}{r_2}\right)\dfrac{\partial x}{\partial u} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u} X, \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial u} = \left(1 - \dfrac{r_1}{r_2}\right)\dfrac{\partial y}{\partial u} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u} Y, \quad \dfrac{\partial z_1}{\partial u} = \left(1 - \dfrac{r_1}{r_2}\right)\dfrac{\partial z}{\partial u} - \dfrac{\partial z_1}{\partial u} Z \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = -\dfrac{\partial r_1}{\partial v} X, \quad \dfrac{\partial y_1}{\partial v} = -\dfrac{\partial r_1}{\partial v} Y, \quad \dfrac{\partial z_1}{\partial v} = -\dfrac{\partial r_1}{\partial v} Z \end{array}\right\} \qquad (2)$$

y sucesivamente:

$$E_1 = E\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_1}{\partial u}\right)^2, \quad F_1 = \frac{\partial r_1}{\partial u}\frac{\partial r_1}{\partial v}, \quad G_1 = \left(\frac{\partial r_1}{\partial v}\right)^2;$$

por lo tanto:

$$ds^2_1 = \left[E\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial r_1}{\partial u}\right)^2\right] du^2 + 2\frac{\partial r_1}{\partial u}\frac{\partial r_1}{\partial v}\,du dv + \left(\frac{\partial r_1}{\partial v}\right)^2 dv^2;$$

y tomando por líneas coordenadas en S las $u =$ const. $r_1 =$ const.

$$ds^2_1 = dr_1 + E\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)^2 du^2. \qquad (3)$$

Esta fórmula demuestra que en S_1 las $u =$ const. son geodésicas y las $r =$ const. sus trayectorias ortogonales.

Las fórmulas de los cosenos directores son:

$$X_1 : Y_1 : Z_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial v} \\ \frac{\partial z_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial v} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial v} \end{vmatrix}$$

y, por las (2),

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad Y_1 = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad Z_1 = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Calculando ahora

$$D_1 = -\Sigma\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial X_1}{\partial u} = -\Sigma\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

$$D'_1 = -\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X_1}{\partial u} = -\Sigma\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

$$D''_1 = -\Sigma\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial X_1}{\partial v} = -\Sigma\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

será

$$D_1 = -\frac{1}{2\sqrt{G}}\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)\frac{\partial E}{\partial v}, \quad D'_1 = 0, \quad D''_1 = -\frac{\sqrt{G}}{r_1}\frac{\partial r_1}{\partial v}, \qquad (4)$$

pues siendo X, Y, Z los cosenos directores de la normal, será

$$X\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + Y\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + Z\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0;$$

combinando esta ecuación con las identidades

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v},$$

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u};$$

y resolviendo estas tres ecuaciones lineales respecto á $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$, etc., resultará

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad (a)$$

con las análogas para y, z. Esta puede escribirse bajo una de las formas

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\right) &= \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}, \\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right) &= \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v} \end{aligned}\right\} \qquad (a')$$

con las análogas para y, z; y en virtud de (4) pág. 294, será

$$\Sigma X\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -\frac{E}{r_2}, \quad \Sigma X\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right) = -\frac{E}{r_2}. \qquad (b)$$

Y, puesto que $\quad \Sigma\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = 1, \quad$ derivando se tendrá

$$\Sigma\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v} = 0. \qquad (c)$$

Considerando la identidad

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}=0,$$

y derivando respecto á u, tendremos

$$\Sigma\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right)=-\Sigma\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

y en virtud de (a')

$$\Sigma\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right)=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}. \qquad (d)$$

Resolviendo las ecuaciones (b), (c) y (d) respecto á

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right),\quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}\right),\quad \text{etc.,} \qquad \text{será}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right)=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\sqrt{E}}{r_2}X,$$

y análogamente para y, z. Combinaremos ésta con

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\right)=-\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\sqrt{G}}{r_1}X,$$

y permutando, u, v; E, G; r_1, r_2 tendremos

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right)=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\sqrt{E}}{r_2}X,\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\right)=-\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\sqrt{G}}{r_1}X,\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\right)=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u},\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right)=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}.
\end{aligned}\right\}\qquad (e)$$

De estas fórmulas y las (3) de la pág. 293, resulta la (4) pág. 320.

Podemos sustituir en D_1, por $\frac{\partial E}{\partial v}$ su valor, y tendremos

$$D_1 = \frac{E_1}{\sqrt{G}} \frac{r_1}{r^2_2} \frac{\partial r_2}{\partial v}, \quad D'_1 = 0, \quad D''_1 = -\frac{\sqrt{G}}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial v}. \tag{5}$$

Indicando con k_1 la curvatura total de S_1, resultará

$$k_1 = \frac{D_1 D''_1}{E_1 G_1 - F^2_1}$$

ó

$$k_1 = -\frac{1}{(r_1 - r_2)^2} \frac{r^2_2}{r^2_1} \frac{\partial r_2 : \partial u}{\partial r_1 : \partial v}. \tag{6}$$

y análogamente $$k_2 = -\frac{1}{r_2 - r_1} \frac{r^2_1}{r^2_2} \frac{\partial r_1 : \partial v}{\partial r_2 : \partial u}$$

y por último $$k_1 k_2 = \frac{1}{(r_2 - r_1)^4}. \tag{7}$$

209. CORRESPONDENCIA ENTRE LOS PUNTOS DE LAS DOS HOJAS. Entre los puntos de la primera hoja S_1 de la evoluta y los de la segunda S_2, existe una relación geométrica, cuando se consideran como correspondientes entre sí los centros de curvatura M_1 y M_2 y con el punto M de la evolvente.

Por la ecuación (7), las curvaturas de las dos hojas en M_1 y en M_2 tienen el mismo signo, y las asintóticas de las dos hojas son reales ó imaginarias á la vez. Busquemos ahora las condiciones para que á las asintóticas de la primera hoja correspondan las asintóticas de la segunda.

La ecuación diferencial de las asintóticas de la primera hoja será

$$D_1 du^2 + 2D'_1 du dv + D''_1 dv^2 = 0,$$

ó sea, por las ecuaciones (5)

$$Er^2_1 \frac{\partial r_2}{\partial r_1} du^2 - Gr^2_2 \frac{\partial r_1}{\partial v} dv^2 = 0,$$

la de la segunda hoja se obtendrá permutando u, E_1, r_1 respectivamente con v, G_1, r_2, y será

$$E r^2_1 \frac{\partial r_2}{\partial u} du^2 - G r^2_2 \frac{\partial r_1}{\partial u} dv^2 = 0.$$

Para que estas asintóticas se correspondan, es necesario que coincidan estas ecuaciones; por consiguiente que sea

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u} & \frac{\partial r_2}{\partial u} \\ \frac{\partial r_1}{\partial v} & \frac{\partial r_2}{\partial v} \end{vmatrix} = 0,$$

resultando el

TEOREMA DE RIBAUCOUR. *La condición necesaria y suficiente, para que se correspondan las asintóticas en las dos hojas de la evoluta, es que los radios principales de curvatura de la evolvente se hallen fijados entre sí por una relación* $\varphi(r_1, r_2) = 0$.

Observación. Se ha visto que en S_1, las líneas $u =$ const. son geodésicas cuyas trayectorias ortogonales son las líneas $r_1 =$ const., y además, las líneas $v =$ const. en S_1 son las líneas tangentes conjugadas de las $u =$ const., lo que resulta de que $D'_1 = 0$, ó del hecho geométrico de que las tangentes á las líneas $u =$ const., á lo largo de una línea $v =$ const., son normales á la evolvente á lo largo de una línea de curvatura v, por lo que engendran una desarrollable, cuya arista de retroceso es la curva correspondiente en la segunda hoja S_2.

TEOREMA. *El centro de curvatura geodésica de una línea* $r_1 =$ const. *en un punto* M_1 *de* S_1 *es el punto correspondiente* M_2 *en la hoja* S_2.

Para demostrarlo, vamos á emplear el procedimiento que Beltrami sigue para obtener el radio de curvatura geodésica. Sea g, g', g'', ... un sistema ∞^1 de geodésicas situadas en una superficie cualquiera, y L una línea, cuyas tangentes son conjugadas con aquéllas, que las cortan en M, M′, M″, ...

Las tangentes á lo largo de L á g, g', g'', ... engendran una desarrollable.

Si suponemos que la tangente en M á la g sea tangente en m á la arista de retroceso Γ, tendremos que:

El punto m *es el centro de curvatura geodésica en* M *de la trayectoria ortogonal de* g, g', g'', ... *que parte de* M.

Tomemos por líneas coordenadas u, v en la superficie, las geodésicas g, g', g'', ... y sus trayectorias ortogonales y por parámetro u el arco de las geodésicas, contado desde una trayectoria ortogonal fija. Tendremos

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2,$$

y para el radio de curvatura geodésica ρ_u, en magnitud y signo,

$$\frac{1}{\rho_u} = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}.$$

Si x, y, z son las coordenadas de M, ξ, η, ζ las de m, y hacemos $\overline{Mm} = r$, con signo positivo ó negativo, según que la dirección $M'm$ sea la del arco creciente ó decreciente, tendremos

$$\xi = x + r\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \eta = y + r\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \zeta = z + r\frac{\partial z}{\partial u}.$$

Si llevamos el punto M á lo largo de la línea L á M', é indicamos con δ los incrementos correspondientes, resultará:

$$\delta\xi = \frac{\partial x}{\partial u}\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\delta v + \delta r\frac{\partial x}{\partial u} + r\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\delta u + \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\delta v\right),$$

$$\delta\eta = \frac{\partial y}{\partial u}\delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\delta v + \delta r\frac{\partial y}{\partial u} + r\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\delta u + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}\delta v\right),$$

$$\delta\zeta = \frac{\partial z}{\partial u}\delta u + \frac{\partial z}{\partial v}\delta v + \delta r\frac{\partial z}{\partial u} + r\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\delta u + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\delta v\right).$$

Pero $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ son proporcionales á los cosenos de dirección de la tangente á la arista de retroceso Γ, esto es, á $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$.

Multiplicando ordenadamente por $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, sumando y considerando las fórmulas

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \quad \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = G, \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u},$$

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -\Sigma \frac{dx}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = -\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} = 0,$$

obtendremos

$$G\delta v + \frac{r}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\delta v = 0, \quad \text{y por tanto} \quad \frac{1}{r} = -\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}.$$

Demostrado el teorema de Beltrami, si consideramos nuevamente la hoja S_1 de la evoluta de una superficie S, en S_1 las trayectorias ortogonales de las $u =$ const. serán las $r_1 =$ const. mientras que las líneas con tangentes conjugadas de las u son las v, concluyéndose que: *El centro de curvatura geodésica de una línea* $r_1 =$ const. *en un punto* M_1 *de* S_1 *es el punto correspondiente* M_2 *en la segunda hoja* S_2.

Por último observaremos que obtenido el radio de curvatura, resulta demostrado el teorema, del cual se deduce que:

El radio de curvatura geodésica de las $r_1 =$const. *en* S_1 *ó de las* $r_2 =$const. *en* S_2 *queda determinado por la diferencia* $r_1 - r_2$ *de los radios de curvatura de la evolvente* (*).

(*) Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*, p. 229

CAPÍTULO II

Superficies

§ 1.º PROPIEDADES ABSOLUTAS

Las superficies pueden considerarse bajo dos aspectos, según que se consideren como límites de sólidos ó como sólidos flexibles é inextensibles, desvaneciéndose una de sus dimensiones.

Cuando se adopta este segundo punto de vista, las propiedades de las superficies se dividen en dos clases. La una comprende las propiedades anejas á la forma especial atribuída á la superficie y que se modifican juntamente con ésta. Las otras pertenecen á alguna propiedad que subsiste independientemente de la determinación de la forma. Estas pueden llamarse *absolutas* y las primeras *relativas*. Así el célebre teorema de Gauss relativo á la *conservación de la curvatura*, expresa una propiedad absoluta. Respecto al segundo aspecto de las superficies, éstas tienen su expresión mediante el elemento lineal y las coordenadas curvilíneas.

Todas las superficies cuyo elemento lineal viene representado por la misma expresión, se consideran como idénticas entre sí, sin que subsista la propiedad recíproca, pues las tres funciones E, F, G pueden hallarse formadas de infinidad de maneras con dos variables independientes, sin que las superficies definidas por las correspondientes expresiones

$$\mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2 \qquad (1)$$

sean por esto diferentes entre sí, pues pueden sustituirse á u y v dos nuevas variables u' y v' de modo que la expresión

$$\mathrm{E}'du'^2 + 2\mathrm{F}\,du'v' + \mathrm{G}\,dv'^2, \qquad (2)$$

pueda definir la superficie primitiva.

Para poder pues concluir si dos expresiones (1) y (2) pertenecen á una misma superficie, es decir, á dos superficies superpuestas es necesario ver si es posible establecer entre u, v y u', v' dos relaciones tales, que en virtud de ellas, una de las dos expresiones se transforma en la otra. Y es evidente que las condiciones de esta posibilidad deben equivaler geométricamente á la igualdad de ciertas propiedades absolutas de las dos superficies, en número suficientes para determinar la identidad.

En la expresión analítica de esta propiedad absoluta deben tan solo entrar u, v, E, F, G y las derivadas de E, F, G respecto á las u y v. Y si dicha expresión es la más general posible, es decir, si $u =$ const. y $v =$ const. son totalmente indeterminadas, debiendo ser aquellas fórmulas independientes de la elección de las coordenadas, deberán conservar la misma forma, cualquiera que sea el significado geométrico atribuído á las variables. Luego toda fórmula que expresa una propiedad absoluta debe ser tal, que sustituyendo á las variables u y v dos funciones *arbitrarias* de dos nuevas variable u' y v', se transforme en otra fórmula que contenga á las u', v', E', F', G' y á las derivadas de estas últimas respecto á las u' y v', del mismo modo que en la primera entraban u, v, E, F, G y las derivadas de éstas respecto á u y á v. Es fácil además probar que tales funciones no pueden contener explícitamente á u y v. En efecto, si $f\left(u, v, E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \frac{\partial E}{\partial v}\right)$ fuese una de dichas funciones, haciendo $u = u' + a$, $v = v' + b$, y observando que $\frac{\partial E'}{\partial u'} = \frac{\partial E}{\partial u}$, ... se obtendría la función transformada

$$f\left(u' + a,\ v' + b,\ E',\ F',\ G',\ \frac{\partial E'}{\partial u'},\ \frac{\partial E'}{\partial v'},\ \ldots..\right)$$

cuya composición no es idéntica con la de la función primitiva, por tener las constantes arbitrarias a, b que no pueden desaparecer mientras no se suponga que faltan las u y v. De esto resulta que toda función representativa de una propiedad absoluta debe hallarse formada tan solo con E, F, G y sus derivadas parciales.

Puede extenderse el concepto de estas funciones absolutas considerándose además de E, F, G otras funciones φ, ψ, ... de u y v; de manera que se formarán nuevas funciones absolutas; y siempre que, considerando una superficie referida á dos sistemas diferentes de coordenadas curvilíneas (u, v) y (u', v') se llegue á una igualdad entre dos expresiones, en una de las que entren solamente E, F, G, φ, ψ, ... y sus derivadas respecto á u y v y en la otra solamente E', F', G', φ', ψ', ... y sus derivadas respecto á u' y v', *independientemente de las relaciones existentes entre los dos sistemas de variables*, estaremos ciertos de que cada una de estas expresiones es *invariable*. Si las coordenadas u y v, así como las u' y v' son arbitrarias, los dos miembros de la igualdad anterior deben ser idénticos en la forma. De la igualdad de las dos expresiones podremos siempre inferir que son funciones invariables equivalentes.

Si además faltan las funciones φ, ψ, ... quedando tan solo E, F, ... y sus derivadas, se deberá concluir que los dos miembros son funciones absolutas, que expresan en el sistema de coordenadas respectivo, una misma propiedad geométrica, que subsiste en todo punto de la superficie, independientemente de cualquier flexión efectuada en ésta (*).

§ 2.º Parámetros diferenciales

210. Definiciones. Podemos considerar como hace Lamé en sus *Leçons sur les coordonnées curvilignes* (pág. 4), las 11 relaciones existentes entre los nueve cosenos de los ángulos que los ejes de un sistema de coordenadas x', y', z' forman con los del antiguo sistema (x, y, z). Así

$$x = mx' + m_1 y' + m_2 z', \qquad x' = mx + ny + pz,$$
$$y = nx' + n_1 y' + n_2 z', \qquad y' = m_1 x + n_1 y + p_1 z$$
$$z = px' + p_1 y' + p_2 z', \qquad z' = m_2 x + n_2 y + p_2 z,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

(*) Beltrami. *Richerche di analisi applicata alla geometria*. Giornale di Mat., v. II, 1864.

$$m^2+n^2+p^2=1,\quad m'^2_1+n'_1+p'_1=1,\quad m^2_2+n^2_2+m^2_2=1;$$

$$np+n_1p_1+n_1p_2=0,\quad pm+p_1m_1+p_2m_2=0,\quad mn+m_1n_1+\ldots$$

$$(m^2_1+n^2_1+p^2_1)(m^2_2+n^2_2+p^2_2)-(m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2)^2$$

$$=(p_1n_2-n_1p_2)^2+(m_1p_2-p_1m_2)^2+(n_1m_2-m_1n_2)^2$$

$$m=p_1n_2-n_1p_2,\quad n=m_1p_2-p_1m_2,\quad p=n_1m_2-m_1n_2,$$

$$\left.\begin{aligned} m_1&=p_2n-n_2p\\ n_1&=m_2p-p_2m\\ p_1&=n_2m-m_2n\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned} m_2&=pn_1-np_1\\ n_2&=mp_1-pm_1\\ p_2&=nm_1-mn_1.\end{aligned}\right\}$$

Si una función F se expresa sucesivamente por medio de los dos sistemas rectilíneos de coordenadas, las reglas ordinarias del cálculo diferencial establecen que las primeras derivadas parciales de F en (x', y', z') se hallan ligadas á las en (x, y, z) como las coordenadas (x', y', z') lo están á las (x, y, z). Se tiene, por ejemplo,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)^2=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2.$$

Más generalmente, si tenemos una expresión formada con los coeficientes de la forma diferencial cuadrática

$$f=\sum_{r,s} a_{rs}dx_rdx_s \qquad (a_{rs}=a_{sr})$$

y suponemos una expresión formada con los coeficientes de f y con sus derivadas primera, segunda, ...

$$\varphi\left(a_{rs},\ \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_t},\ \frac{\partial^2 a_{rs}}{\partial x_t\partial x_u},\ \ldots\ldots\right)$$

de tal naturaleza que cuando se efectúe un cambio cualquiera de las n variables x, se cambie en la expresión formada de igual modo con los coeficientes a'_{rs} de la forma transformada f' y con sus derivadas, diremos que φ *es un invariante diferencial de la forma* f. Si en una expresión φ de la naturaleza indicada, entran además de los coeficientes de la forma fundamental f y sus derivadas, cierto número de funciones arbitrarias U, V, ... juntamente con sus derivadas, de manera que para un cambio cualquiera de las variables se tenga todavía

$$\varphi\left(a_{rs}, \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_t}, \ldots\ldots, \mathrm{U}, \mathrm{V}, \ldots\ldots, \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_h}, \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_i}, \ldots\ldots\right)$$

$$= \varphi\left(a'_{rs} \frac{\partial a'_{rs}}{\partial x'_t}, \ldots\ldots, \mathrm{U}', \mathrm{V}', \ldots\ldots, \frac{\partial \mathrm{U}'}{\partial x'_h} \frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial x'_i}, \ldots\ldots\right),$$

siendo U', V', ... las U, V, en las que se ha cambiado las x por las x', diremos que φ *es un parámetro diferencial.*

Si U es una función arbitraria de $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$, siendo

$$(d\mathrm{U})^2 = \sum_{r,s} \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_r} \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_s} dx_r dx_s,$$

tendremos una forma diferencial cuadrática covariante de la forma dada. Expresando con k una constante arbitraria, será también

$$\varphi = \sum_{r,s} \left(a_{rs} + k \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_r} \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_s}\right) dx_r dx_s,$$

una forma covariante de f. Los coeficientes de las diversas potencias de k en el cociente del discriminante de φ por el discriminante de f serán otros tantos parámetros diferenciales, con la función arbitraria U. En particular, el parámetro diferencial, coeficiente de la primera potencia de k, que indicaremos con $\Delta_1 \mathrm{U}$ tiene el valor

$$\Delta_1 \mathrm{U} = \sum_{r,s} \mathrm{A}_{rs} \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_r} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_s},$$

que, según Beltrami, se llama parámetro *diferencial primero* de la función U.

Si V es otra función arbitraria, el producto de las dos diferenciales

$$d\mathrm{U}\, d\mathrm{V} = \sum_{r,s} \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_r} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_s} dx_r dx_s$$

es una nueva forma covariante de f; y sustituyendo á la forma φ la

$$\varphi = \sum_{r,s} \left(a_{rs} + k \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_r} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_s}\right) dx_r dx_s$$

la expresión $\sum\limits_{r,s} A_{rs} \dfrac{\partial U}{\partial x_r} \dfrac{\partial V}{\partial x_s}$ es un parámetro diferencial con dos funciones arbitrarias U y V, expresado por Beltrami con el símbolo $\nabla(U, V)$ que se llama *parámetro diferencial mixto* de U y V

$$\nabla(U, V) = \sum_{r,s} A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r} \frac{\partial V}{\partial x_s}.$$

Cuando $U = V$ se tiene el parámetro diferencial primero $\Delta_1 U$. Se dice que son *equivalentes* dos formas diferenciales

$$f = \sum_{r,s} a_{rs} dx_r dx_s, \quad f' = \sum_{r,s} a'_{rs} dx'_r dx_s,$$

si es posible dar á $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ valores tales, en función de x'_1, $x'_2, \ldots\ldots x'_n$, que la primera forma se cambie en la segunda. Si las dos formas f y f' están dadas, ó sea si están dadas las a_{rs} en función de las x y las a'_{rs} en función de las x', en la hipótesis de su equivalencia, deberán las funciones desconocidas x de las x' satisfacer á ciertas ecuaciones de derivadas parciales.

Los parámetros diferenciales 1.° y 2.° de una función arbitraria φ y el parámetro mixto de dos funciones arbitrarias φ y ψ se expresarán como sigue:

$$\Delta_1 \varphi = \frac{E\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F \dfrac{\partial F}{\partial u} \dfrac{\partial F}{\partial v} + G\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2}$$

$$\Delta_2 \varphi = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{G \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - F \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{E \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - F \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}} \right] \right\}$$

$$\nabla(\varphi, \psi) = \frac{E \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \dfrac{\partial\psi}{\partial v} - F\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} \dfrac{\partial\psi}{\partial v} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\right) + G \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} \dfrac{\partial\psi}{\partial u}}{EG - F^2}.$$

211. PARÁMETRO DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN. Una función invariante relativa á una sola función $\varphi(u, v)$ se obtiene del modo siguiente:

Imaginemos el sistema de curvas que resulta igualando la función $\varphi(u, v)$ á un parámetro φ

$$\varphi(u, v) = \varphi.$$

Tracemos desde un punto (u, v) de la curva φ, normalmente un arco infinitesimal $d\sigma$. Por un extremo $(u + \delta u, v + \delta v)$ pasará una curva del sistema φ correspondiente al valor $\varphi + \partial\varphi$ del parámetro, siendo $\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}$ el parámetro diferencial de primer orden $\Delta_1\varphi$. De la definición resulta que $\Delta_1\varphi$ es una función invariante.

Para obtener $\Delta_1\varphi$, expresado por los coeficientes del elemento lineal

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,dudv + \mathrm{G}\,dv^2,$$

consideremos tres puntos A, B, C infinitamente próximos, cuyas coordenadas son (u, v), $(u + du, v + dv)$ y $(u + \delta u, v + \delta v)$ en la superficie. La condición para que sean perpendiculares entre sí los elementos AB y AC es

$$\mathrm{E}\,du\delta u + \mathrm{F}\,(du\delta v + dv\delta u) + \mathrm{G}\,dv\delta v = 0;$$

y supongamos que arco AB pertenezca á una de las curvas comprendidas en la ecuación $\varphi(u, v) = \text{const.}$, donde φ es una función cualquiera de u y de v. Tendremos

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,du = 0.$$

Y la dirección del elemento AC perpendicular á la curva $\varphi = \text{const.}$ se obtendrá eliminando $\frac{du}{dv}$ entre las dos ecuaciones precedentes, de modo que resultará

$$\left(\mathrm{E}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \mathrm{F}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\delta u + \left(\mathrm{F}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \mathrm{G}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\delta v = 0.$$

Por el punto C pasa una curva del sistema $\varphi = \text{const.}$ en cuyos puntos el valor de la función recibe el incremento $\delta\varphi$, y se tiene

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,\delta v = \delta\varphi,$$

que combinada con la anterior dará

$$\delta u = \frac{\left(G\,\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\delta\varphi}{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2},$$

$$\delta v = \frac{\left(E\,\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\delta\varphi}{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}$$

y por consiguiente

$$\delta\sigma^2 = E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2 = \frac{(EG - F^2)(\delta\varphi)^2}{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2};$$

y tendremos finalmente

$$\Delta_1\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\sigma} = \frac{\sqrt{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}}{\sqrt{EG - F^2}}, \; (*) \qquad (1)$$

fórmula en la que puede verificarse que $\Delta_1\varphi$ es una función invariante.

Podemos observar que si las curvas $\varphi =$ const. son geodésicamente paralelas, $\delta\sigma$ será constante á lo largo de la línea φ, por lo que se tendrá

$$\Delta_1\varphi = f(\varphi),$$

siendo f función de φ.

Recíprocamente, supongamos que se verifique esta relación. Puesto que se halla satisfecha para cualquier cambio de coordenadas, si tomamos las líneas, $\varphi =$ const. por lineas u y las trayectorias ortogonales por líneas v, puesto que se tiene

$$ds^2 = E\,du + G\,dv^2,$$

(*) *Giornale di Matematiche* V. II, 1864, p. 176. *Richerche di analisi applicata alla geometria.*

deberá ser $\Delta_1 u = \frac{1}{\sqrt{E}} =$ func. de u. Y si cambiamos el parámetro u, haciendo $u_1 = \int \sqrt{E}\, du$, tendremos

$$ds^2 = du_1^2 + G dv^2;$$

y queda demostrado que las $u_1 =$ const ó $\varphi =$ const. son geodésicamente paralelas, luego:

La condición necesaria y suficiente para que las líneas $\varphi =$ const. *sean geodésicamente paralelas está expresada por la relación*

$$\Delta_1 \varphi = f(\varphi).$$

212. Invariación de la curvatura geodésica. Siendo la curvatura geodésica de una línea una cantidad que no se altera deformando la superficie, podemos establecer una fórmula de *Bonnet*, por la cual se expresa la curvatura geodésica $\frac{1}{\rho_\varphi}$ de una línea cualquiera $\varphi(u, v) = 0$ mediante una función invariable formada con φ.

Consideremos, con este objeto, el sistema de curvas $\varphi(u, v) = \varphi$, siendo φ un parámetro variable y el sistema de las trayectorias ortogonales $\psi(u, v) = \psi$. Con este sistema de líneas coordenadas, el elemento lineal será

$$ds^2 = E_1 d\varphi^2 + G_1 d\psi^2$$

y prescindiendo del signo, tendremos

$$\frac{1}{\rho_\varphi} = \frac{1}{\sqrt{E_1 G_1}} \frac{\partial \sqrt{G_1}}{\partial \varphi};$$

y calculando los parámetros diferenciales $\Delta_1 \varphi$, $\Delta_1 \psi$ en coordenadas φ, ψ, tendremos

$$\Delta_1 \varphi = \frac{1}{\sqrt{E_1}}, \quad \Delta_1 \psi = \frac{1}{\sqrt{G_1}}$$

y por consiguiente $\displaystyle \frac{1}{\rho_\varphi} = \Delta_1 \varphi \,.\, \Delta_1 \psi \frac{\partial \frac{1}{\Delta_1 \psi}}{\partial \varphi}.$

Si representamos con el símbolo $d_\varphi \Theta$ la diferencial de $\Theta(u, v)$, cuando se consideran como funciones de φ y ψ, y permaneciendo fija ψ se hace variar φ en $d\varphi$, se tendrá

$$\frac{1}{\rho_\varphi} = \frac{\Delta_1\varphi \,.\, \Delta_1\psi}{d\varphi} \left\{ \frac{\partial \dfrac{1}{\Delta_1\psi}}{\partial u} d_\varphi u + \frac{\partial \dfrac{1}{\Delta_1\psi}}{\partial v} d_\varphi v \right\}. \tag{2}$$

Introduzcamos la condición de ortogonalidad de las curvas φ y ψ expresada por

$$E \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v} - F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u} = 0$$

ó

$$\frac{E\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - F\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial u}} = \frac{F\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - G\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial v}}.$$

Llamando k al valor común de las dos relaciones, tendremos

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = \frac{1}{k}\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right), \quad \frac{\partial\psi}{\partial v} = \frac{1}{k}\left(F\frac{\partial\varphi}{\partial v} - G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) \tag{3}$$

y también

$$E\frac{\partial\psi}{\partial v} - F\frac{\partial\psi}{\partial u} = -\frac{EG - F^2}{k}\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \quad F\frac{\partial\psi}{\partial v} - G\frac{\partial\psi}{\partial u} = -\frac{EG - F^2}{k}\frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

Multiplicando la primera por $\dfrac{\partial\psi}{\partial v}$ y la segunda por $\dfrac{\partial\psi}{\partial u}$ y restando, se obtiene

$$E\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u} + G\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 = \frac{EG - F^2}{k}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u} - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)$$

y de las (3) resulta

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u} - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} = \frac{E\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + G\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{k}, \tag{4}$$

con lo que la anterior se reduce á

$$(\Delta_1\psi)^2 = \frac{EG - F^2}{k^2}(\Delta_1\varphi)^2. \tag{5}$$

Resolvamos ahora las ecuaciones

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv = d\varphi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv = d\psi,$$

respecto á du y dv, y considerando la ecuación (4), será

$$\frac{(EG - F^2)(\Delta_1 \varphi)^2}{k} dv = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \partial \psi - \frac{\partial \psi}{\partial v} d\varphi$$

$$\frac{(EG - F^2)(\Delta_1 \varphi)^2}{k} dv = - \frac{\partial \varphi}{\partial u} d\psi + \frac{\partial \psi}{\partial u} d\varphi,$$

y
$$d_\varphi u = - \frac{k}{(EG - F^2)(\Delta_1 \varphi)^2} \frac{\partial \psi}{\partial v} d\varphi,$$

$$d_\varphi v = \frac{k}{(EG - F^2)(\Delta_1 \varphi)^2} \frac{\partial \psi}{\partial u} d\varphi$$

ó en virtud de las (3)

$$d_\varphi u = - \frac{F \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - G \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}}{(EG - F^2)(\Delta_1 \varphi)^2} d\varphi, \quad d_\varphi v = \frac{E \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - F \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}}{(EG - F^2)(\Delta_1 \varphi^2)} d\varphi.$$

Sustituyendo en la (2) $d_\varphi u$, $d_\varphi v$ por sus valores, y por $\Delta_1 \psi$ su valor $\dfrac{\sqrt{EG - F^2}}{k} \Delta_1 \varphi$ que resulta de la (5), tendremos:

$$\frac{1}{\rho_\varphi} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{G \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} - F \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}}{k} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{k}{\sqrt{EG - F^2 \Delta_1 \varphi}} \right) \right.$$

$$\left. \frac{E \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - F \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}}{k} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{k}{\sqrt{EG - F'^2 \Delta_1 \varphi}} \right) \right\}.$$

Para eliminar k, emplearemos las (3), y resultará

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} - F \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}}{k} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - F \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}}{k} \right) = 0,$$

escribiéndose la anterior así:

$$\frac{1}{\rho_\varphi} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{G \frac{\partial \varphi}{\partial u} - F \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{k} . \frac{k}{\sqrt{EG - F^2 \Delta_1 \varphi}} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{E \frac{\partial \varphi}{\partial v} - G \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{k} \frac{k}{\sqrt{EG\, F^2 \Delta_1 \varphi}} \right] \right\},$$

$$\frac{1}{\rho_\varphi} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{G \frac{\partial \varphi}{\partial u} - F \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\sqrt{E \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + G \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{E \frac{\partial \varphi}{\partial v} - F \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{E \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + G \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}} \right] \right\} \qquad (6)$$

que es la fórmula de Bonnet.

No solo sirve esta fórmula para calcular la curvatura geodésica de un sistema de curvas $\varphi(u, v) = \varphi$ dado en términos finitos, sino cuando se da por medio de una ecuación diferencial de primer orden $M du + N dv = 0$, pues si φ es la integral, se tendrá

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} : \frac{\partial \varphi}{\partial v} = M : N \qquad \text{y}$$

$$\frac{1}{\rho_\varphi} = \frac{1}{\sqrt{EG\, F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{GM - FN}{\sqrt{EN^2 - 2FMN + GM^2}} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{EN - FM}{\sqrt{EN^2 - 2FMN + GM^2}} \right) \right.$$

En particular, será

$$\frac{1}{\rho_u} = \frac{1}{\sqrt{FG - F^2}} \left\{ \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v} \frac{F}{\sqrt{G}} \right\},$$

$$\frac{1}{\rho_v} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \frac{F}{\sqrt{E}} \right\}.$$

213. PARÁMETRO DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN. Las funciones invariantes arriba consideradas se refieren á una sola función $\varphi(u, v)$, ó sea á un solo sistema de curvas trazadas en una superficie. Para dos sistemas de curvas

$$\varphi(u, v) = \varphi, \quad (u, v) = \psi \tag{1}$$

se tiene inmediatamente una función invariable en la expresión del ángulo ω formado en cada punto (u, v) de la superficie por las curvas φ, ψ que pasan por él. Si expresamos por d el incremento á lo largo de la curva $\varphi =$ const. y por δ el correspondiente á la $\psi =$ const., tendremos

$$\cos\omega = \frac{\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\,\delta v\right)}{\sqrt{\mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2}\,\sqrt{\mathrm{E}\,\delta u^2 + 2\mathrm{F}\,\delta u\,\delta v + \mathrm{F}\,\delta v^2}}$$

$$= \frac{\mathrm{E}\,du\,\delta u + \mathrm{F}\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + \mathrm{G}\,dv\,\delta v}{\sqrt{\mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2}\,\sqrt{\mathrm{E}\,\delta u^2 + 2\mathrm{F}\,\delta u\,\delta v + \mathrm{G}\,\delta v^2}};$$

pero $$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial\psi}{\partial v}\,\delta v = 0, \tag{2}$$

$$du : dv = \frac{\partial\varphi}{\partial v} : -\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \quad \delta u : \delta v = \frac{\partial\psi}{\partial v} : -\frac{\partial\psi}{\partial u}, \tag{3}$$

y por consiguiente

$$\cos\omega = \frac{\mathrm{E}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,\frac{\partial\psi}{\partial v} - \mathrm{F}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + \mathrm{G}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}\,\frac{1}{\Delta_1\varphi\,.\,\Delta_1\psi}.$$

La expresión $\Delta_1\varphi\,.\,\Delta\psi\cos\omega$, que es una función invariable, es el *parámetro diferencial mixto* de φ y ψ, y tendremos

$$\nabla(\varphi, \psi) = \frac{\mathrm{E}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,\frac{\partial\psi}{\partial v} - \mathrm{F}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + \mathrm{G}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\mathrm{EF} - \mathrm{F}^2}.$$

Esto sentado, la fórmula (6) que da la curvatura geodésica $\frac{1}{\rho_\varphi}$

conduce á considerar una nueva función. Escribiendo la fórmula (6) bajo la forma

$$\frac{1}{\rho_\varphi} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G \frac{\partial \varphi}{\partial u} - F \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{1}{\Delta_1 \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E \frac{\partial \varphi}{\partial v} - F \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{1}{\Delta_1 \varphi} \right) \right\}$$

$$\frac{1}{\rho_\varphi} = \frac{1}{\Delta_1 \varphi} \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G \frac{\partial \varphi}{\partial u} - F \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG - E^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E \frac{\partial \varphi}{\partial v} - F \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \right\} + \nabla \left(\varphi_1 \frac{1}{\Delta_1 \varphi} \right).$$

Siendo invariables $\frac{1}{\rho_\varphi}$, $\Delta_1 \varphi$, $\nabla \left(\varphi, \frac{1}{\Delta_1 \varphi} \right)$, lo será también la función

$$\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G \frac{\partial \varphi}{\partial u} - F \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E \frac{\partial \varphi}{\partial v} - F \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \right\},$$

que es el parámetro diferencial de segundo orden.

214. APLICACIÓN Á LOS SISTEMAS ISOTERMOS. Supongamos que las líneas $\varphi =$ const. y sus trayectorias ortogonales $\psi = 0$ forman un sistema isotermo, y sea

$$ds^2 = E_1 \, d\varphi^2 + G_1 \, d\psi^2$$

la forma correspondiente del elemento lineal. Para que el sistema ortogonal φ, ψ sea isotermo, es necesario y suficiente que $\frac{G_1}{E_1}$ sea el cociente de dos funciones, la una de φ y la otra de ψ solamente, ó que se tenga $\frac{\partial^2 \log \frac{G_1}{E_1}}{\partial \varphi \partial \psi} = 0$, es decir, que $\frac{\partial \log \frac{G_1}{E_1}}{\partial \varphi}$ sea función de φ

solamente. Pero calculando $\Delta_1\varphi$ y $\Delta_2\varphi$ en coordenadas φ, ψ tenemos

$$\Delta_1\varphi = \frac{1}{\sqrt{E_1}}, \quad \Delta_2\varphi = \frac{1}{\sqrt{E_1 G_1}} \frac{\partial}{\partial\varphi}\sqrt{\frac{G_1}{E_1}} = \frac{1}{2E_1}\frac{\partial \log \dfrac{G_1}{E_1}}{\partial\varphi},$$

de donde
$$\frac{\Delta_2\varphi}{(\Delta_1\varphi)^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log \dfrac{G_1}{E_1}}{\partial\varphi}.$$

Por tanto: *La condición necesaria y suficiente para que las líneas* $\varphi =$ const. *pertenezcan á un sistema isotermo es que se tenga*

$$\frac{\Delta_2\varphi}{(\Delta_1\varphi)^2} = F(\varphi). \qquad (a)$$

Si suponemos además que φ sea parámetro isométrico, será

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\log\frac{G_1}{E_1} = 0, \quad \text{ó} \quad \Delta_2\varphi = 0.$$

TEOREMA. *Si se halla determinado en una superficie un sistema de líneas que forman parte de un sistema isotermo, las trayectorias ortogonales se determinan con cuadraturas.*

En el caso en que se haya concluído mediante la ecuación (a) que un sistema de líneas φ const. es isotermo, podemos demostrar que las trayectorias ortogonales $\psi =$ const. se determinan con cuadraturas, pues en virtud de las fórmulas (2) y (3) de la pág. 348, la ecuación diferencial de estas trayectorias ortogonales se expresa por

$$\frac{E\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - F\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\,du + \frac{F\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - G\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\,dv = 0.$$

Para hallar un factor de integrabilidad de esta ecuación, determinaremos λ de modo que se tenga

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\lambda\,\frac{G\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - F\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right] + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\left[\lambda\,\frac{E\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - F\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right] = 0,$$

ó bien

$$\frac{G\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-F\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial\log\lambda}{du}+\frac{E\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}-F\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}{EG-F^2}\frac{\partial\log\lambda}{dv}+\Delta_2\varphi=0,$$

lo que podrá verificarse tomando para λ una función de φ cuando se suponga satisfecha la ecuación (a). Haciendo, en efecto, $\log\lambda=f(\varphi)$, la precedente se reduce á

$$(\Delta_1\varphi)^2 f'(\varphi)+\Delta_2\varphi=0$$

de donde $\lambda=e^{-\int\frac{\Delta_2\varphi}{(\Delta_1\varphi)^2}d\varphi}$.

§ 3.° Superficies aplicables

215. Superficies flexibles. De igual modo que, en la geometría plana ó esférica, se estudian las propiedades de las figuras trazadas en una ú otra superficie, prescindiendo sus propiedades absolutas en el espacio, así se procede para cualquiera otra superficie. Y las propiedades que conciernen tan solo á las relaciones de magnitud y posición de las figuras trazadas en la superficie por cuanto existen en la misma, constituyen la *geometría de la superficie.*

Desde este punto de vista, dos superficies diferentes en la forma, pueden tener la misma geometría. Los teoremas de la geometría plana no cesan de ser ciertos, si el plano se arrolla en un cilindro ó en cualquiera otra superficie desarrollable. Por ejemplo: En un triángulo formado por tres arcos geodésicos situados en una superficie desarrollable, la suma de los tres ángulos es igual á dos rectos. Los tres arcos geodésicos trazados normalmente desde los vértices á los lados opuestos, se encuentran en un punto, etc.

Para concebir la naturaleza de las propiedades que constituyen la geometría de una superficie, conviene imaginar que la superficie en la que se hallan descritas las figuras, se compongan de una capa infinitamente sutil, perfectamente flexible é inextensible. Las propiedades que no alteran deformando la superficie, pertenecen á su geometría. (*)

Dos superficies S y S', entre cuyos puntos P y P' se puede establecer una correspondencia tal, que sus elementos lineales correspondientes sean iguales, tienen la misma geometría, porque en este caso, también los arcos finitos, los ángulos y las áreas de las figuras en S son iguales á los correspondientes de las figuras en S'. Las superficies S y S' se llaman en este caso, *aplicables*, queriendo significar con esto, que si se suponen flexibles é inextensibles, se puede distender la una sobre la otra (ó una parte de ella) sin ruptura ni duplicatura. Cuando las dos superficies S y S' se dan por las expresiones de sus elementos lineales,

$$ds^2 = E\,du^2 + 2E\,du\,dv + G\,dv^2,$$

$$ds'^2 = E'du'^2 + 2F'du'dv' + G\,dv'^2,$$

para reconocer que son aplicables, convendrá examinar si se puede establecer dicha correspondencia entre los puntos (u, v) de la una y los (u', v') de la otra, de modo que resulte $ds = ds'$.

Para la aplicabilidad es, por tanto, necesario y suficiente que las formas diferenciales

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + F\,dv^2 \quad \text{y} \quad E'du'^2 + 2F'du'dv' + G'dv'^2$$

sean transformables la una en la otra.

De las consideraciones precedentes resulta que la geometría de la superficie está definida por la expresión de su elemento lineal, ó de su primera forma fundamental

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Así pues, las infinitas configuraciones que puede tener una superficie, por flexión, tienen común la primera forma fundamental.

Cuando se estudia la geometría de una superficie como definida por su elemento lineal, conviene prescindir de la forma especial de la superficie

---

(*) Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*, p. 173

La distancia ds entre dos puntos infinitamente próximos (u, v), $(u + du)$, $(v + dv)$ se medirá por medio de la fórmula fundamental (1) y el ángulo θ de los dos elementos lineales ds y δs que unen el punto (u, v) á los dos puntos $(u + du, v + dv)$ y $(u + \delta u, v + \delta v)$ mediante la expresión

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{E}\,du\,\delta u + \mathrm{F}\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + \mathrm{G}\,dv\,\delta v}{ds\,\delta s}.$$

Tendremos una correspondencia biunívoca entre la variedad de dos dimensiones que constituye la superficie y los pares (u_0, v_0) de los valores de las variables.

En el campo de variabilidad las funciones E, F, G son uniformes, finitas y continuas, juntamente con sus derivadas primera y segunda, siendo además E, F, G, $\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2$ positivas. El ángulo ω de las líneas coordenadas, definido por las fórmulas

$$\cos\omega = \frac{\mathrm{F}}{\sqrt{\mathrm{EG}}}, \quad \operatorname{sen}\omega = \frac{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}}{\sqrt{\mathrm{EG}}},$$

en el campo que consideramos, variará continuamente desde o hasta 2π, sin tomar los valores extremos.

La curvatura total de una superficie es un invariante de la forma (1). Su valor, en cualquier punto, depende únicamente de los coeficientes de dicha forma, y permanece el mismo cuando se deforma la superficie. De estas consideraciones resulta el

TEOREMA FUNDAMENTAL DE GAUSS. *La curvatura total de una superficie no cambia por cualquier flexión de ésta* ó bien: *Si dos superficies son aplicables, tienen igual curvatura en dos puntos correspondientes.*

216. TEOREMA. *La curvatura geodésica de una línea trazada en una superficie no cambia, cuando ésta se deforma*, pues la expresión de la curvatura $\frac{1}{\rho_\varphi}$ de las curvas $\varphi =$ const. se expresa de la manera siguiente

$$-\frac{1}{\rho_\varphi} = \frac{\Delta_2\varphi}{\sqrt{\Delta_1\varphi}} + \nabla\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{\Delta_1\varphi}}\right).$$

217. Problema de la aplicabilidad. *Dadas dos superficies* S *y* S', *averiguar si son ó no aplicables y en el caso afirmativo, obtener la fórmula de la aplicabilidad.*

El problema equivale al de la transformabilidad de las dos formas diferenciales

$$\mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2, \qquad \mathrm{E}'du'^2 + 2\mathrm{F}'du'dv' + \mathrm{G}dv'^2.$$

Supongamos dos relaciones independientes entre u, v, u', v'

$$\varphi(u, v) = \varphi'(u', v'), \qquad \psi(u, v) = \psi'(u', v') \tag{1}$$

que establezcan la ley de correspondencia entre los puntos de ambas superficies, en la aplicabilidad supuesta. Por la propiedad de los parámetros diferenciales, se tendrá

$$\Delta_1\varphi = \Delta'_1\varphi', \quad \nabla(\varphi, \psi) = \nabla'(\varphi', \psi'), \quad \Delta_1\psi = \Delta'_1\psi', \tag{2}$$

habiéndose acentuado los parámetros diferenciales construídos para la segunda forma. Para la aplicabilidad, es necesario que las relaciones (2) sean consecuencias de las (1), y además es suficiente, porque de las relaciones obtenidas (pág. 346) se tendrá:

$$\mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2 = \frac{\Delta_1\psi\,d\varphi^2 - 2\nabla(\varphi, \psi)\,d\varphi\,d\psi + \Delta_1\varphi\,d\psi^2}{\Delta_1\varphi\,\Delta_1\psi - \nabla^2(\varphi, \psi)}$$

$$\mathrm{E}'du'^2 + 2\mathrm{F}'du'dv' + \ldots = \frac{\Delta'_1\psi'd\varphi'^2 - 2\nabla'(\varphi', \psi')\,d\varphi'd\psi' + \Delta'_1\varphi'd\psi'^2}{\Delta'_1\varphi'\Delta'_1\psi' - \nabla'^2(\varphi', \psi')}$$

y, en virtud de (1) y (2), los segundos miembros resultarán iguales.

Esto sentado, excluyendo el caso en que la curvatura sea constante, si $k(u, v)$ y $k'(u', v')$ expresan, respectivamente, las curvaturas, el teorema de Gauss, en la hipótesis de la aplicabilidad, da una relación (1) con la fórmula

$$k(u, v) = k'(u', v'). \tag{3}$$

Además, cualquier parámetro diferencial de la función k deberá ser igual al parámetro correspondiente calculado para k'.

Tomemos en primer lugar la relación

$$\Delta_1 k = \Delta'_1 k', \tag{4}$$

que asociada á la (3), da lugar á los tres casos de ser dichas relaciones contradictorias, compatibles y distintas é incluídas la una en la otra. En el primer caso las superficies no son aplicables; en el segundo, para que éstas sean aplicables es necesario y suficiente que la (3) y (4) lleven consigo las relaciones

$$\Delta\,(k,\,\Delta_1 k) = \nabla'\,(k',\,\Delta'_1 k'),\quad \Delta_1\,(\Delta_1 k) = \Delta'_1 k'),$$

lo que podrá decidirse por cálculos algebráicos.

El tercer caso tendrá lugar cuando $\Delta_1 k$ sea una función de k y $\Delta'_1 k'$ la misma función de k'.

En este caso

$$\Delta_1 k = f\,(k),\qquad \Delta'_1 k' = f\,(k'),\tag{a}$$

sustituiremos á la (4) la relación $\Delta_2 k = \Delta'_2 k'$, y reduciremos nuevamente el problema á eliminaciones algebráicas, cuando no se presente el caso ulterior, expresado por las fórmulas

$$\Delta_2\,k = \varphi\,(k),\quad \Delta'_2\,k' = \varphi\,(k')\tag{b}$$

Falta pues considerar el caso en que se presenten simultáneamente las relaciones (*a*) y (*b*).

Siendo ahora $\dfrac{\Delta_2\,k}{\Delta_1\,k} = \dfrac{\varphi\,(k)}{f\,(k)}$,

las líneas $k =$ const. (de igual curvatura), juntamente con las trayectorias ortogonales $\psi =$ const. forman un sistema isotermo.

Obtendremos la función $\psi\,(u,\,v)$ por cuadraturas de las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial u} &= e^{-\int \frac{\varphi\,(k)}{f\,(k)}\,dk}\,\frac{\mathrm{F}\,\dfrac{\partial k}{\partial u} - \mathrm{E}\,\dfrac{\partial k}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}} \\ \frac{\partial\psi}{\partial v} &= e^{-\int \frac{\varphi\,(k)}{f\,(k)}\,dk}\,\frac{\mathrm{G}\,\dfrac{\partial k}{\partial u} - \mathrm{F}\,\dfrac{\partial k}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}} \end{aligned}\right\},$$

de donde $\Delta_1 k = e^{-2\int \frac{\varphi\,(k)}{f\,(k)}\,dk}\,\Delta_1 k,$

y por consiguiente

$$E du_2 + 2F du dv + G dv^2 = \frac{dk^2}{\Delta_1 k} + \frac{e^{2\int \frac{\varphi(k)}{f(k)} dk}}{\Delta_1 k} d\psi^2$$

$$= \frac{dk^2}{f(k)} + \frac{e^{2\int \frac{\varphi(k)}{f(k)} dk}}{f(k)} d\psi^2.$$

Permaneciendo las mismas las funciones para la segunda superficie, conviene á ésta la misma forma del elemento lineal, que pertenece también á las superficies de revolución. Luego:

Si subsisten las relaciones (a) *y* (b), *las dos superficies son aplicables sobre la misma superficie de revolución, y por tanto la una sobre la otra, de una infinidad simple de modos.*

Para obtener las fórmulas efectivas de la aplicabilidad, intervienen dos cuadraturas.

En la resolución del primer problema de la aplicabilidad se excluyó el caso en que una de las superficies fuese de curvatura constante. En este caso, para que las dos superficies sean aplicables, es necesario que la otra superficie tenga la misma curvatura constante. En este caso el criterio dado por el teorema de Gauss es además suficiente para la aplicabilidad, es decir, que:

Dos superficies con la misma curvatura constante son aplicables la una á la otra.

Para el caso de la curvatura nula, sabemos que tal superficie es desarrollable. Podemos dar una demostración que se extiende á superficies de curvatura constante no nula.

218. FORMA DEL ELEMENTO LINEAL. Tracemos en una superficie de curvatura constante K una geodésica L, y tomemos por líneas coordenadas las geodésicas ortogonales á la L y sus trayectorias ortogonales, tomando como parámetro u, el arco de las geodésicas v, contado á partir de la L, que será actualmente la $u = 0$ y el parámetro v el arco de la L, contado desde un punto fijo de la

misma. El elemento lineal tomará la forma

$$ds^2 = du^2 + G dv^2;$$

y por ser nula la curvatura geodésica de la $u = o$, será

$$\left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)_{u=0} = o. \qquad (\alpha)$$

Además, por ser dv el arco elemental de $u = o$, será

$$(\sqrt{G})_{u=0} = 1, \qquad (\beta)$$

y tendremos $$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}. \qquad (\gamma)$$

Por ser K constante, distinguiremos los tres casos

$$K = o, \quad K > o, \quad K < o.$$

Primer caso. Si $K = o$, resulta

$$\sqrt{G} = \varphi(v)\, u + \psi(v),$$

siendo $\varphi(v)$, $\psi(v)$ funciones de v. Pero de (α) y (β) resulta

$$\varphi(v) = o, \quad \psi(v) = 1;$$

de donde $$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

Segundo caso. Si $K > o$, hagamos $R = \frac{1}{R^2}$ (R real) y, en virtud de (γ), tendremos:

$$\sqrt{G} = \varphi(v) \cos\frac{u}{R} + \psi(v) \operatorname{sen}\frac{u}{R};$$

y por las (α) y (β), será $\psi(v) = o$, $\varphi(v) = 1$; luego

$$ds^2 = du^2 + \cos^2\left(\frac{u}{R}\right) dv^2. \qquad (5)$$

Este elemento pertenece á la esfera de radio R, luego: *Todas las superficies de curvatura constante positiva* $\frac{1}{R^2}$ *son aplicables á la esfera de radio* R, *y por consiguiente, las unas á las otras.*

Tercer caso. Si $K < o$, haremos $K = -\frac{1}{R^2}$ y resultará de (γ),

$$\sqrt{G} = \varphi(v) \cos h \frac{u}{R} + \psi(v) \operatorname{sen} h \frac{u}{R},$$

y por las (α) y (β) será $\varphi(v) = 1$, $\psi(v) = o$; luego: *El elemento lineal de toda superficie pseudoesférica de radio* R *es reducible á la forma*

$$ds^2 = du^2 + \cos h^2 \left(\frac{u}{R}\right) dv^2.$$

Por consiguiente, todas estas superficies son aplicables, las unas á las otras.

Los resultados obtenidos pueden aplicarse á dos superficies distintas de igual curvatura y á dos porciones de una misma superficie de curvatura constante, lo que se enuncia en el siguiente

TEOREMA. *Toda porción de una superficie de curvatura constante es aplicable sobre cualquiera otra porción de la misma, de modo que dos puntos cualesquiera* A *y* B *de la primera pueden superponerse á dos puntos cualesquiera* A′ *y* B′ *de la segunda, siempre que la distancia geodésica de* A′ *y* B′ *sea igual á la de* A *y* B.

Este teorema es evidente para las superficies de curvatura constante nula ó positiva, porque el plano y la esfera, sobre los que son aplicables, respectivamente, gozan de esta propiedad.

Para demostrarlo en el caso de la superficie pseudoesférica, tomemos por la geodésica L anteriormente considerada, la AB, y tendremos

$$ds^2 = du^2 + \cos h \frac{u}{R} dv^2, \tag{6}$$

contándose el arco v de AB á partir de A, lo que dará $A \equiv (o, o)$. Operando de igual modo sobre la otra geodésica A′B′, obtendremos

$$ds'^2 = du'^2 + \cos h^2 \frac{u'}{R} dv'^2.$$

Haciendo $u' = u$, $v' = v$, resultará $ds^2 = ds'^2$, y al punto $A \equiv (o, o)$ corresponderá el punto $A' \equiv (o, o)$, al $B \equiv (o, l)$ el $B' \equiv (o, l)$, siendo l la longitud común de los arcos AB y A'B'. Por lo cual la superficie es aplicable sobre sí, de modo que A se superpone con A' y B con B', conforme el enunciado.

Este teorema expresa que toda figura, trazada en una superficie de curvatura constante, puede transportarse por simple flexión, sobre otra porción de la superficie, sin que sufran alteración los ángulos, ni las magnitudes lineales y superficiales.

Para la geometría de las superficies de curvatura constante es válido, como para el plano y la esfera el principio de *superposición de las figuras*, lo que constituye el fundamento de las analogías existentes entre la geometría de las tres especies de superficies.

De lo expuesto resulta que dos superficies S y S' de igual curvatura constante, son aplicables entre sí según una triple infinidad de modos. Dadas las dos superficies, para obtener uno de estos modos de aplicabilidad, basta integrar *la ecuación de las geodésicas.*

Si la curvatura es nula, la cuestión se resuelve por medio de cuadraturas. En los demás casos el problema se reduce *á la integración de una ecuación diferencial de primer orden del tipo de Riccati.*

219. Tipos de la superficie pseudoesférica. Volvamos á la forma (6) del elemento lineal, que conviene á cualquier superficie pseudoesférica de radio R. Juntamente con esta forma del elemento lineal, que se llama *tipo hiperbólico*, se deben considerar otras dos que se llaman *tipo elíptico y parabólico.*

Consideremos un punto (ordinario) P de una superficie pseudoesférica; y tomemos por líneas coordenadas las geodésicas v que parten de P y sus trayectorias ortogonales u, suponiendo como parámetro v el ángulo que forma una geodésica variable del haz con una geodésica fija y el parámetro u el arco de las geodésicas, contado á partir de P. El elemento lineal tomará la forma

$$ds^2 = du^2 + \mathrm{G}dv^2$$

y será $(\sqrt{\mathrm{G}})_{u=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\right)_{u=0} = 1.$

Pero, en virtud de lo ya expuesto,

$$\sqrt{G} = \varphi(v) \cos h \frac{u}{R} + \psi(v) \operatorname{sen} h \frac{u}{R},$$

y las condiciones precedentes dan $\varphi(v) = 0$, $\psi(v) = R$, de donde

$$ds^2 = du^2 + R^2 \operatorname{sen} h^2 \frac{u}{R} dv^2.$$

Esta es una forma del elemento lineal que conviene á toda superficie pseudoesférica de radio R y se dice que es del *tipo elíptico*.

Tomemos finalmente por línea L, en vez de una geodésica, una línea de *curvatura geodésica constante* $\frac{1}{R}$. Cualquiera de estas líneas, en una superficie pseudoesférica de radio R se llama un *oriciclo*.

Tendremos todavía

$$ds^2 = du^2 + G dv^2, \quad \sqrt{G} = \varphi(v) \cos h \frac{u}{R} + \psi(v) \operatorname{sen} h \frac{u}{R};$$

y debiendo ser

$$(\sqrt{G})_{u=0} = 1, \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)_{u=0} = \frac{1}{R} \left[\frac{\varphi(v) \operatorname{sen} h \frac{u}{R} + \psi(v) \cos h \frac{u}{R}}{\varphi(v) \cos h \frac{u}{R} + \psi(v) \operatorname{sen} h \frac{u}{R}}\right]$$

$= 1$, resultará $\quad \varphi(v) = \varphi(v) = 1,$

de donde $\quad ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}} dv^2.$

Esta tercera forma es del *tipo parabólico*.

Resumiendo: El Sr. Bianchi obtiene, para la pseudoesfera, las tres formas típicas del elemento lineal,

A) *Tipo parabólico* $\quad ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}} dv^2$

B) *Tipo elíptico* $\quad ds^2 = du^2 + R^2 \operatorname{sen} h^2 \left(\frac{u}{R}\right) dv^2$

C) *Tipo hiperbólico* $\quad ds^2 = du^2 + \cos h^2 \left(\frac{u}{R}\right) dv^2.$

220. Superficies pseudoesféricas de revolución. El elemento lineal, referido á los meridianos y á los paralelos, tendrá la forma:

$$ds^2 = du^2 + \left(Ce^{\frac{u}{R}} + C'e^{-\frac{u}{R}}\right)^2 dv^2.$$

Distinguiremos tres casos, según que una de las dos constantes C y C′ sea nula ó con signo igual ó contrario. Cambiando el parámetro v en cv_1 (c constante), obtendremos las tres formas de los tipos respectivos A) B) C):

$$\text{I} \quad ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}} dv_1^2$$

$$\text{II} \quad ds^2 = du^2 + \lambda^2 \operatorname{sen} h^2 \frac{u}{R} dv_1^2$$

$$\text{III} \quad ds^2 = du^2 + \lambda^2 \cos h^2 \frac{u}{R} dv_1^2,$$

siendo λ constante, que realizaremos con tres superficies de revolución en las cuales sea u el arco de meridiano y v_1 la longitud.

Si expresamos por r el radio del paralelo y por $z = \varphi(r)$ la ecuación de la curva meridiana, tendremos respectivamente, en los tres casos:

$$\text{I)} \qquad r = e^{\frac{u}{R}}, \quad z = \int \sqrt{1 - \frac{1}{R^2} e^{\frac{2u}{R}}} du$$

$$\text{II)} \quad r = \lambda \operatorname{sen} h \frac{u}{R}, \quad z = \int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{R^2} \cos h^2 \left(\frac{u}{R}\right)} du$$

$$\text{III)} \quad r = \lambda \cos h \frac{u}{R}, \quad z = \int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{R^2} \operatorname{sen} h^2 \left(\frac{u}{R}\right)} du.$$

Discutamos las formas de las tres curvas meridianas.

Caso I. Podemos efectuar la integración, siendo φ el ángulo de la tangente á la curva meridiana. Hagamos

$$e^{\frac{u}{R}} = R \operatorname{sen} \varphi,$$

y las fórmulas

$$r = \mathrm{R} \operatorname{sen} \varphi, \quad z = \mathrm{R} \int \frac{\cos^2 \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} d\varphi = \mathrm{R} \left[\log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \cos \varphi \right], \quad (a)$$

darán las coordenadas de un punto de la curva en función del parámetro φ.

Á la curva de las tangentes iguales, representada por estas ecuaciones, que tiene el eje de las z por asíntota y que tiene la propiedad de que la parte de su tangente comprendida entre el punto de contacto y la asíntota, es constantemente igual á R, se la conoce con el nombre de *tractriz*.

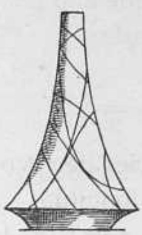


Figura 109

Dicha propiedad puede deducirse directamente de la ecuación de la curva, así como por verificarse que la curvatura geodésica de los paralelos en la superficie correspondiente de revolución es constantemente igual á $\frac{1}{\mathrm{R}}$, superficie que se llama *pseudoesfera*, y es la más sencilla de las superficies pseudoesféricas.

Podemos llegar á la fórmula (a), partiendo de la propiedad evidente $\mathrm{RR}' = -a^2$. Pues siendo Γ la curva meridiana, $\mathrm{PM} = \rho$ uno de los radios principales de curvatura de la superficie de revolución de curvatura constante negativa $-\frac{1}{\mathrm{R}^2}$, y el otro PQ, tendremos $\mathrm{PQ} \,.\, \mathrm{PM} = -\mathrm{R}^2$ (fig. 110); y expresando por τ el ángulo de la tangente al meridiano con el eje de las x, y por tanto $d\tau$ el ángulo de contingencia en P, tendremos $ds = \rho d\tau$, y en el triángulo PSQ, donde $\mathrm{PS} = x$, será $\mathrm{PQ} = \frac{\operatorname{sen} \tau}{x}$ y, en virtud de las expresiones anteriores, $\frac{x ds}{\operatorname{sen} \tau d\tau} = -\mathrm{R}^2$. Por ser además $ds = \frac{dx}{\cos \tau}$, tendremos

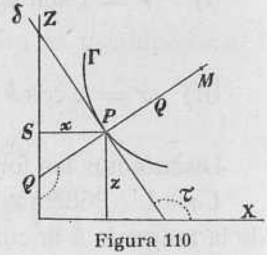


Figura 110

$$x dx = -\frac{\mathrm{R}}{2} \operatorname{sen} 2\tau d\tau. \qquad (1)$$

Integrando, resultará

$$2x^2 + C = R^2 \cos 2^2\tau$$

$$\operatorname{tg}^2 \tau = \frac{1 - \cos 2\tau}{1 + \cos 2\tau} = \frac{R^2 - 2x^2 - C}{R^2 + 2x^2 + C}. \tag{2}$$

Haciendo $R^2 - C = 2b^2$, donde b es una constante arbitraria tal que sea $\operatorname{tg} \tau = \frac{dz}{dx}$, resulta, en virtud de (2),

$$z = \int \sqrt{\frac{b^2 - x^2}{x^2 + r^2 - b^2}}\, dx, \tag{3}$$

que es la ecuación de la curva meridiana Γ. Por ser b^2 arbitraria, se puede obtener una infinidad de curvas meridianas, y por consiguiente de superficies de curvatura constante igual á $-\frac{1}{R^2}$. La integración de (3) conduce á las integrales elípticas. Pero en el caso de ser $b^2 = R^2$, haciendo $x = r \operatorname{sen} \varphi$, de (3) se deduce la fórmula (a) de la página 362 (véase además el resultado en la página 210).

Caso II. *Tipo elíptico*. Para obtener una superficie real, es necesario suponer $\frac{\lambda}{R} < 1$, y haciendo $\lambda = R \operatorname{sen} \alpha$, el valor máximo para $\cos h \frac{u}{R}$, será $\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$, y por tanto, el radio r del paralelo oscila entre $r = 0$ y $r = R \cos \alpha$.

Cuando $r = 0$, es $\frac{dr}{du} = \operatorname{sen} \alpha$, y por consiguiente todos los meridianos encuentran en $u = 0$ al eje de rotación, según el ángulo α. Este es un punto cónico de la superficie.

Las coordenadas de un punto de la curva meridiana se expresan por funciones elípticas de un parámetro τ con el módulo $k = \cos \alpha$. Hagamos, en efecto,

$$\operatorname{sen} h \frac{u}{R} = \frac{k}{k'}\, cn\, (\tau, k),$$

y tendremos

$$r = \mathrm{R}k\, cn\, \tau, \quad z = \mathrm{R}k^2 \int_0^\tau sn^2\, \tau d\tau = \mathrm{R}\left[\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{R}}\tau - \mathrm{Z}(\tau)\right],$$

siendo
$$\mathrm{Z}(\tau) = \frac{\Theta'(\tau)}{\Theta(\tau)}$$

la función de Jacobi y H, K las conocidas constantes de la teoría de las funciones elípticas. El trayecto de la curva entre $\tau = 0$ y $\tau = 2\mathrm{K}$ está representado en la fig. 111. Cuando τ aumenta en $4\mathrm{K}$, la curva se reproduce periódicamente. La superficie de revolución correspondiente consta de infinidad de partes, que pueden superponerse *(congruentes)* por traslación alrededor del eje. Los paralelos máximos de radio $r = \mathrm{R} \cos \alpha$ son de retroceso para la superficie, porque los puntos $\tau = 2m\mathrm{K}$ (m entero) son cúspides del meridiano.

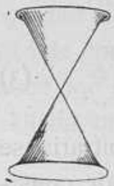


Figura 111

Caso III. *Tipo hiperbólico.* En este caso tenemos

$$r = \lambda \cos h \frac{u}{\mathrm{R}}, \quad \frac{dr}{du} = \frac{\lambda}{\mathrm{R}} \operatorname{sen} h \frac{u}{\mathrm{R}}.$$

El valor máximo que toma u en el trayecto real de la curva corresponde á sen $h \frac{u}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{R}}{\lambda}$ y el radio del paralelo oscila entre el mínimo λ y el máximo $\sqrt{\mathrm{R}^2 + \lambda^2}$. Haciendo

$$\frac{\mathrm{R}}{\sqrt{\mathrm{R}^2 + \lambda^2}} = k, \quad \cos h \frac{u}{\mathrm{R}} = \frac{dn\,(\tau, k)}{k'},$$

expresaremos las coordenadas de un punto móvil en la curva, por funciones elípticas del parámetro τ con las fórmulas

$$r = \frac{\mathrm{R}}{k} dn\, \tau, \quad z = \frac{\mathrm{R}}{k}\left[\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{R}}\tau - \mathrm{Z}(\tau)\right].$$

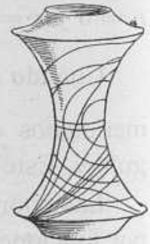


Figura 112

La forma de la curva entre $\tau = 0$ y $\tau = 2\mathrm{K}$ está representada por la fig. 112. Cuando τ aumenta en $2\mathrm{K}$, la curva se reproduce periódicamente. Los paralelos máximos correspondientes á $\tau = 2m\mathrm{K}$ (m entero) son de retroceso para la superficie y los mínimos correspondientes á $\tau = (2m + 1)\,\mathrm{K}$ son geodésicas.

221. Deformación de toda superficie pseudoesférica en una de revolución. Las tres formas de superficies pseudoesféricas de revolución son distintas entre sí, no pudiéndose aplicar una sobre otra de especie distinta, pues basta observar que en el tipo parabólico, los paralelos son de curvatura constante $\frac{1}{\mathrm{R}}$, en el tipo elíptico, la curvatura geodésica de los paralelos es $> \frac{1}{\mathrm{R}}$ y $< \frac{1}{\mathrm{R}}$ en el hiperbólico. Pero en virtud del teorema (pág. 357) toda superficie pseudoesféricas de radio R es aplicable sobre cada una de las superficies I), II), III). Así

1.° Por lo expuesto en la pág. 357, si trazamos en una superficie pseudoesférica S un sistema de geodésicas que partan de un punto en el infinito de la superficie (geodésicas paralelas), podremos distender por simple flexión la S sobre la psudoesfera, de modo que dichas geodésicas se conviertan en meridianos.

2.° En el caso de las superficies II del tipo elíptico, podremos aplicar la superficie S sobre la II, de modo que las geodésicas que parten de un punto P se distiendan sobre los meridianos.

Si referimos la S á las geodésicas que parten de P, y á las trayectorias ortogonales, tendremos

$$ds^2 = du^2 + \left[\varphi(v)\cos h\frac{u}{\mathrm{R}} + \psi(v)\,\mathrm{sen}\,h\frac{u}{\mathrm{R}}\right]^2 dv^2.$$

El arco u se medirá, á partir de P, y el parámetro v será el ángulo que una geodésica variable, trazada desde P, forma con una geodésica fija; y tendremos

$$\left[\varphi(v)\cos h\frac{u}{\mathrm{R}} + \psi(v)\,\mathrm{sen}\,h\frac{u}{\mathrm{R}}\right]_{u=0} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\varphi(v)\cos h\frac{u}{\mathrm{R}} + \psi(v)\,\mathrm{sen}\,h\frac{u}{\mathrm{R}}\right)\right]_{u=0} = 1,$$

de donde $\varphi(v) = 0, \quad \psi(v) = R,$ y por consiguiente

$$ds^2 = du^2 + R^2 \operatorname{sen} h^2 \frac{u}{R} dv^2.$$

Pero tenemos, para la superficie pseudoesférica de revolución II),

$$ds^2 = du^2 + \lambda^2 \operatorname{sen} h^2 \frac{u}{R} dv_1^2,$$

siendo v_1 el ángulo que forma el plano de un meridiano móvil con el plano de un meridiano fijo. Para hacer coincidir los dos elementos lineales, deberemos hacer

$$v = \frac{\lambda}{R} v_1 = \operatorname{sen} \alpha \,.\, v_1.$$

Cuando $v_1 = 2\pi$, será $v = 2\pi \operatorname{sen} \alpha < 2\pi$. Basta pues una parte de S próxima á P, para cubrir enteramente una hoja de la superficie II). Y la parte de S, más allá del círculo geodésico de radio

$$u = R \text{ sector} \cos h \frac{R}{\lambda} = \text{sector} \cos h \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}\right),$$

no tiene correspondiente en la superficie II). La porción de S alrededor de P, á la que puede darse la forma de una hoja de la superficie II) queda pues limitada por un sector geodésico.

3.º En el caso de las superficies III) del tipo hiperbólico, el paralelo mínimo, las geodésicas $v =$ const. son ortogonales á una geodésica, y podremos aplicar una superficie pseudoesférica cualquiera S sobre III) de modo que una geodésica arbitraria g de S se distienda sobre el paralelo mínimo. La parte de S que se aplica efectivamente sobre una hoja de III) se reduce á una faja limitada por dos geodésicas paralelas á la g y equidistantes de la misma, las cuales, después de la deformación se reducen á los paralelos máximos (de retroceso) de la zona. En el sentido de la geodésica g, la zona queda limitada por dos geodésicas ortogonales á g, las cuales se reunen, después de la deformación en un solo meridiano de la zona. La longitud y anchura de la zona dependen solamente del radio que se quiera dar al paralelo mínimo.

En el caso del tipo hiperbólico, puede considerarse que las geodésicas $v = \text{const.}$ parten de un punto común *imaginario* de la superficie, porque para $\frac{u}{R} = i\frac{\pi}{2}$, tenemos

$$r = k \cos i \frac{\pi}{2} = 0.$$

Los paralelos de esta superficie vienen á ser ahora círculos geodésicos de centro ideal. En resumen; *Toda superficie pseudoesférica puede cambiarse, por simple flexión, en una superficie de revolución, de modo que las geodésicas trazadas desde un punto se reduzcan á meridianos. La superficie de revolución obtenida pertenecerá al tipo parabólico, elíptico ó hiperbólico, según que el punto común de las geodésicas es real en el infinito, real distancia finita ó imaginario* (*).

222. SUPERFICIES APLICABLES Á SÍ MISMAS. TEOREMA. *El elemento lineal de toda superficie de curvatura constante admite* ∞^3 *transformaciones en sí misma.* Este es un nuevo enunciado de la propiedad fundamental.

Además conviene establecer que subsiste el

TEOREMA RECÍPROCO. *Toda superficie* S, *que admite una flexión continua en sí misma, es aplicable sobre una superficie de revolución.*

Si la superficie S es de curvatura constante, el teorema queda demostrado por lo expuesto anteriormente. En caso contrario, durante la flexión continua supuesta, las líneas L de igual curvatura $k = \text{const.}$ deberán, por el teorema de Gauss, resbalar sobre sí misma. Y puesto que esta flexión depende de un parámetro variable, con continuidad, todo punto de una línea, L puede transportarse á cualquiera otro de la misma línea, resultando que las líneas L son de curvatura geodésica constante. Además, las líneas geodésicamente paralelas á una línea L, durante la flexión considerada, resbalan también evidentemente sobre sí mismas. De estas consideraciones resulta el teorema enunciado, y subsiste la siguiente propiedad:

Si una superficie S *tiene un sistema de líneas* L *geodésicamente*

(*) Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale.*

paralelas, siendo de curvatura geodésica constante, es aplicable sobre una superficie de revolución cuyos paralelos son las deformadas de la línea L, pues si se toma el sistema coordenado formado por las líneas L ($u =$ const.) y las geodésicas ortogonales $v =$ const., el elemento lineal tomará la forma

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2.$$

pero en virtud de la hipótesis,

$$-\frac{1}{\rho_u} = \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} = \varphi(u), \quad \text{de donde} \quad \sqrt{G} = UV,$$

siendo U función de u y V de v. Si hacemos $\int V\,dv = v_1$, tendremos el elemento lineal

$$ds^2 = du^2 + U^2 dv^2,$$

de una superficie de revolución.

Consideremos ahora unos ejemplos de superficies aplicables.

Del teorema de Gauss resulta desde luego que los paralelos de S se distienden sobre los paralelos de S_1 y, por consiguiente, también los meridianos sobre los meridianos. Naturalmente son exepción las superficies de curvatura constante; pero las consideraciones siguientes son válidas para estas superficies, cuando se agrega la condición de que los paralelos de la una se distiendan sobre los paralelos de la otra, pues si los elementos lineales de S y de S_1 son respectivamente

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv, \quad ds_1^2 = du_1^2 + r_1^2 dv_1^2,$$

podremos hacer $u_1 = u$, contando los arcos meridianos desde dos paralelos correspondientes. Para transformar uno en otro los dos elementos lineales, convendrá hacer $v_1 = v_1(v)$, determinando esta función por la condición

$$r_1(u)\frac{dv_1}{dv} = r(u),$$

resultando $\quad r_1 = kr, \quad v_1 = \frac{v}{k}$ (k const. arbit.).

Si pues $r = \varphi(u)$ es la ecuación del meridiano de S, las coordenadas del meridiano de S, estarán dadas por

$$r = k\,\varphi(u), \quad z = \int \sqrt{1 - k^2\,\varphi'^2(u)}\,du.$$

Por consiguiente: *Toda superficie de revolución puede deformarse de ∞^1 modos, conservándose superficie de revolución.*

Consideremos más detalladamente el modo de aplicarse de S_1 sobre S. Supongamos $k < 1$, y entonces la fórmula $v = kv_1$ demuestra que, cuando la longitud v_1 efectúa un giro sobre S_1, haciéndose igual á 2π, la longitud v se convierte en

$$v < 2k\pi < 2\pi.$$

Luego, aplicando la S_1 sobre la S, ésta no queda enteramente cubierta, faltando una parte (huso), comprendido entre dos meridianos, cuyos planos forman un ángulo $2\pi(1 - k)$. Para distender S_1 sobre S conviene pues, cortar á la superficie S_1 á lo largo de un meridiano y abrirla, deformándola, de modo que los bordes del corte sean sobre S dos meridianos diferentes. Si se observa que la curvatura geodésica de los paralelos y la curvatura total de la superficie no varían en la deformación, se verá inmediatamente que la curvatura del meridiano de S excede, en dos puntos correspondientes, á la del meridiano de S_1.

Al caso de ser $k > 1$ corresponde evidentemente la deformación inversa de S en S_1 por la cual, conviene quitar un huso de S, restableciendo después la continuidad de la superficie, al reunir por deformación en uno solo, dos meridianos del huso suprimido, y observando que á un punto del meridiano de S corresponde un punto real del meridiano de S_1, hasta que sea $k\dfrac{dr}{du} < 1$, lo que sucede siempre, si $k > 1$. Pero cuando $k > 1$, los paralelos á que corresponde el valor $\dfrac{1}{k}$ de $\dfrac{dr}{du}$, limitan sobre S una zona, que es la porción de S aplicable efectivamente sobre S_1. Después de la deformación, los paralelos extremos de esta zona se reducen á los paralelos de retroceso en S_1.

Ejemplo. Consideremos la deformación de las superficies de revolución de curvatura constante.

a) Para la esfera de radio 1 se puede suponer $r = \cos u$, y las coordenadas de los meridianos deformados se hallan dadas por las fórmulas

$$r = k \cos u, \quad z = \int \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 u}\, du.$$

Podemos expresarlas por funciones elípticas de un parámetro τ. Por esto, si $k < 1$, haremos $\cos u = cn(\tau, k)$, y tendremos

$$r = k\, cn\, \tau, \quad z = \left(1 - \frac{H}{K}\right)\tau + Z(\tau);$$

si $k > 1$, cambiaremos k en $\frac{1}{k}$, y haciendo $\cos u = du(\tau, k)$, tendremos

$$r = \frac{dn\, \tau}{k}. \quad z = \left(k - \frac{H}{Kk}\right)\tau + \frac{1}{k} Z(\tau).$$

En el caso de ser $k < 1$, se obtendrá una superficie en forma de huso, cuyos meridianos encuentran al eje en un punto (cónico para la superficie) según un ángulo $\alpha = \text{arc sen } k$. En el caso de ser $k > 1$, se tiene una zona limitada por dos paralelos mínimos de retroceso, según indican las figuras.

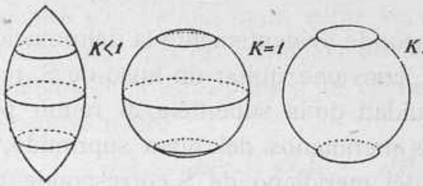


Figura 113

La pseudoesfera goza de la propiedad singular de que todas sus deformadas coinciden con la misma pseudoesfera, como resulta, observando que la curvatura geodésica de los paralelos es constantemente igual á $\frac{1}{R}$. En el caso de estrechamiento de los paralelos ($k < 1$), el paralelo máximo (de retroceso) se reduce á un paralelo menor, y queda así descubierta la zona comprendida entre este paralelo y el máximo. En la deformación inversa, un paralelo menor se convierte en paralelo de retroceso. Pero, cuando se efectúa esta deformación, debe cortarse primero, en la pseudoesfera, la zona comprendida entre este paralelo y el paralelo actual de retroceso.

La deformación de las otras dos clases de superficies pseudoesféricas de revolución conduce á una superficie del mismo tipo, variando en el caso de la superficie del tipo elíptico el ángulo del vértice (punto cónico), y para el tipo hiperbólico el radio del paralelo mínimo.

223. Helicoides. Teorema de Bour. *Todo helicoide es aplicable sobre una superficie de revolución. Las hélices se distienden sobre los paralelos.*

Es evidente que la superficie de revolución queda cubierta infinidad de veces por el helicoide, recorriendo cada hélice infinidad de veces el paralelo correspondiente.

Para demostrar el teorema, observaremos que, trazando un plano por el eje, se obtiene una sección en el helicoide *(perfil meridiano)* y si se da á esta sección el movimiento helicoidal alrededor del eje, que engendra la superficie, la misma sección describirá el helicoide. Un helicoide queda determinado por su perfil meridiano y el parámetro del movimiento helicoidal.

Tomemos el eje de las z por eje del helicoide, é indiquemos con ρ la distancia de un punto del perfil meridiano al eje. Sea $z = \varphi(\rho)$ la ecuación del perfil meridiano, v el ángulo que ha girado, después de un tiempo cualquiera, el plano del perfil meridiano y m la relación de la velocidad de traslación á la de rotación. Las coordenadas x, y, z de un punto móvil del helicoide estarán dadas en función de ρ y v por las fórmulas

$$x = \rho \cos v, \quad y = \rho \operatorname{sen} v, \quad z = \varphi(\rho) + mv,$$

de las que resulta

$$ds^2 [1 + \varphi'^2(\rho)]\, d\rho^2 + 2m\, \varphi'(\rho)\, d\rho\, dv + (\rho^2 + m^2)\, dv^2.$$

Cambiemos las líneas coordenadas v, haciendo

$$V = kv_1 - m \int \frac{\varphi'(\rho)\, d\rho}{\rho^2 + m^2}, \tag{1}$$

siendo k una constante arbitraria, y resultará

$$ds^2 = \left[1 + \frac{\rho^2 \varphi'^2(\rho)}{\rho^2 + m^2}\right] d\rho^2 + k^2(\rho^2 + m^2)\, dv_1^2. \qquad (2)$$

Comparando este elemento lineal con

$$ds_1^2 = [1 + \psi'^2(r)]\, dr^2 + r^2\, dv_1^2 \qquad (3)$$

de una superficie de revolución cuya curva meridiana es $z = \psi(r)$, podemos identificar haciendo

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= k^2(\rho^2 + m^2) \\ [1 + \psi'^2(r)]\left(\frac{dr}{d\rho}\right)^2 &= 1 + \frac{\rho^2 \psi'^2(\rho)}{\rho^2 + m^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Según que se dé un helicoide ó una superficie de revolución, se eliminará en estas fórmulas de transformación ρ ó r, y se obtendrá con una cuadratura $\psi'(r)$ ó $\varphi'(\rho)$.

224. APLICACIONES. 1.º *Helicoide reglado de área mínima.* Si el perfil meridiano es una recta perpendicular al eje, el helicoide se dice *reglado de área mínima*. Tendremos en (4) $\varphi'(\rho) = 0$; y será

$$1 + \psi'^2(r) = \left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2 = \frac{r^2}{k^2(r^2 - m^2 k^2)};$$

y tomando $k = 1$,

$$z = \psi(r) = m \int \frac{dr}{\sqrt{r^2 - m^2}} = m \operatorname{sector} \cos h \frac{r}{m}$$

ó sea

$$r = m \cos h \frac{z}{m}.$$

La curva meridiana es por tanto una catenaria común, cuya directriz es el eje de revolución. La superficie correspondiente de revolución es la *catenoide*. Las hélices del helicoide de área mínima se distienden sobre los paralelos de la catenoide y las generatrices rectilíneas sobre los meridianos. El eje del helicoide $\rho = 0$ se distiende sobre el círculo de garganta $r = m$ de la catenoide.

2.º Supongamos que el perfil meridiano sea una recta inclinada respecto al eje un ángulo α. Su ecuación será $z = \rho \cot \alpha$, y haciendo en (4) $\varphi'(\rho) = \cot \alpha$, resultará

$$1 + \psi'^2(r) = \left[1 + \frac{(r^2 - k^2 m^2)\cot^2 \alpha}{r^2}\right] \frac{r^2}{k^2(r^2 - k^2 m^2)}$$

y haciendo $k = \cot \alpha$, tendremos

$$\psi'(r) = \frac{\operatorname{tg} \alpha\, r}{\sqrt{r^2 - m^2 \cot^2 \alpha}}.$$

La ecuación del meridiano de la superficie es pues,

$$z = \operatorname{tg} \alpha \sqrt{r^2 - m^2 \cot^2 \alpha},$$

ó sea
$$\frac{r^2}{m^2 \cot^2 \alpha} - \frac{z^2}{m^2} = 1.$$

La superficie de revolución es por tanto un hiperboloide de revolución de una hoja. Se ve además que el eje $\rho = 0$ del helicoide se distiende sobre el círculo de garganta del hiperboloide, y las generatrices del helicoide sobre las generatrices del helicoide sobre las generatrices de un sistema del hiperboloide.

225. Helicoide pseudoesférico de Dini. Los helicoides que tienen por perfil meridiano una tractriz y por eje la asíntota, gozan de la notable propiedad de ser de curvatura constante negativa. En efecto, si expresamos por R la longitud constante de la tangente á la tractriz, tendremos

$$\varphi'(\rho) = \sqrt{\frac{R^2}{\rho^2} - 1},$$

y, por la fórmula (2) de la pág. 272

$$ds^2 = \frac{R^2 + m^2}{\rho^2 + m^2} d\rho^2 + k^2(\rho^2 + m^2)\, dv^2,$$

Figura 114

Haciendo ahora

$$u = \sqrt{R^2 + m^2} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 + m^2}} = \sqrt{R^2 + m^2}\ \text{sect. sen}\, h\, \frac{\rho}{m}$$

ó sea, $$\rho = m \operatorname{sen} h \frac{u}{\sqrt{R^2 + m^2}},$$

resultará $$ds^2 = du^2 + k^2 m^2 \cos h^2 \frac{u}{\sqrt{R^2 + m^2}} dv^2_1.$$

Esta forma del elemento lineal pertenece á la superficie pseudoesférica de revolución del tipo hiperbólico, cuyo radio es igual á $\sqrt{R^2 + m^2}$. Sobre esta superficie son pues aplicables los helicoides de Dini, de manera que las hélices se distienden sobre los paralelos. En el límite, para $m = 0$, el helicoide se reduce á la pseudoesfera.

Observación. Las líneas de curvatura de un sistema, en estos helicoides, son los perfiles meridianos (tractrices), pues los planos de los perfiles meridianos cortan al helicoide según el ángulo constante $\alpha = \operatorname{arc} \cos \frac{m}{\sqrt{R^2 + m^2}}$. Las líneas de curvatura del segundo sistema se hallan trazadas sobre esferas, que cortan ortogonalmente al helicoide, y tienen sus centros en el eje.

§ 4.º FÓRMULAS DE MAINARD-CODAZZI

226. TRIEDRO MÓVIL. Sea un punto M de una superficie, y construyamos un triedro trirectángulo T, cuyo vértice se halle en M y tal, que el eje de las z sea la normal en M, de manera que los ejes de las x é y se hallarán en el plano tangente á la superficie. Estos ejes quedarán determinados si se conoce, para cada posición del punto M, el ángulo del eje de las x con una de las líneas coordenadas, por ejemplo, con la tangente á la curva $v =$ const. Y el estudio de las propiedades de la superficie y de las curvas trazadas en ella, se deducen del estudio del movimiento del triedro T, como puede verse en la obra citada de M. Darboux.

Los movimientos dependientes de un parámetro se aplican al estudio de las curvas alabeadas, exigiendo la teoría de las superficies sistemas móviles cuyas diferentes posiciones dependen de dos parámetros distintos.

Los nueve cosenos que determinan la posición de los ejes móviles son funciones de u y v. Adoptaremos, con M. Darboux, la notación (t. I, pág. 47). Sean

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u}=\beta r-\gamma q,\quad \frac{\partial\beta}{\partial u}=\gamma p-\alpha r,\quad \frac{\partial\gamma}{\partial u}=\alpha q-\beta q \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial v}=\beta r_1-\gamma q_1,\quad \frac{\partial\beta}{\partial u}=\gamma p_1-\alpha r_1,\quad \frac{\partial\gamma}{\partial v}=\alpha q_1-\beta p_1 \qquad (2)$$

dos sistemas de rotaciones, según que u ó v varíen solas, expresando p, q, r y p_1, q_1, r_1 las componentes de rotación, $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$, los valores iniciales de los nueve cosenos, $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, sistemas de soluciones de las ecuaciones fundamentales, definiendo el *eje instantáneo de rotación* análogamente á como se definió el centro instantáneo de rotación en el plano.

Si pues, consideramos una mutación del sistema en el que u y v son funciones dadas de t, se tendrá

$$\frac{d\alpha}{dt}=\beta R-\gamma Q,\quad \frac{d\beta}{dt}=\gamma P-\alpha R,\quad \frac{d\gamma}{dt}=\alpha Q-\beta P,$$

siendo

$$P=p\frac{du}{dt}+p_1\frac{dv}{dt},\quad Q=q\frac{du}{dt}+q_1\frac{dv}{dt},\quad R=r\frac{du}{dt}+r_1\frac{dv}{dt},$$

de manera que P, Q, R serán las rotaciones relativas al movimiento considerado. Las ecuaciones de las proyecciones sobre los ejes móviles del camino ó arco infinitamente pequeño descrito, en este movimiento, por un punto cuyas coordenadas relativas á estos ejes son x, y, z, serán (t. I, pág. 48)

$$\left.\begin{array}{l} dx+(qdu+q_1\,dv)\,z-(rdu+r_1\,dv)\,y,\\ dy+(rdu+r_1\,dv)\,x-(pdu+p_1\,dv)\,z,\\ dz+(pdu+p_1dv)\,y-(qdu+q_1\,dv)\,y.\end{array}\right\} \qquad (3)$$

Nos limitaremos á enunciar el siguiente resultado (t. II, p. 348): *A todo sistema de valores de las cantidades* p,... ξ,... *que satis-*

facen á las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial p}{\partial v}-\frac{\partial p_1}{\partial u}=qr_1-rq_1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v}-\frac{\partial \xi_1}{\partial u}=\eta r_1-r\eta_1,\\
&\frac{\partial q}{\partial v}-\frac{\partial q_1}{\partial u}=rp_1-pr_1, \quad \frac{\partial \eta}{\partial v}-\frac{\partial \eta_1}{\partial u}=r\xi_1-\xi r_1,\\
&\frac{\partial r}{\partial v}-\frac{\partial r_1}{\partial u}=pq_1-qp_1, \quad p\eta_1-\eta p_1+\xi q_1-q\xi_1=0,
\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

(p, q, r son los cosenos relativos á la variación de u sola y p_1, q_1, r_1 los relativos á la variación de v, $\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1$ componentes de las velocidades) *corresponde un movimiento perfectamente determido*, y por consiguiente, *una sola superficie.*

Esto supuesto, si la superficie se deforma, arrastrando al triedro T, las traslaciones ξ, η, ξ_1, η_1 permanecen invariables y las rotaciones r, r_1, en virtud de las ecuaciones cuarta y quinta de las fórmulas (A).

Cuando u varia sola, el origen del triedro describe, en el plano tangente, el arco Adu, que forma el ángulo m con el eje de las x. Se tendrá pues (t. II, pág. 362)

$$\xi = \text{A} \cos m, \quad \eta = \text{A} \operatorname{sen} m; \quad \xi_1 = \text{C} \cos n, \quad \eta_1 = \text{C} \operatorname{sen} n,$$

y el sistema (A) se reduce á

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial p}{\partial v}-\frac{\partial p_1}{\partial u}=qr_1-rq_1, \quad \frac{\partial q}{\partial v}-\frac{\partial q_1}{\partial u}=rp_1-pr_1,\\
&\frac{\partial r}{\partial v}-\frac{\partial r}{\partial u}=pq_1-qp_1,\\
&r=-\frac{\partial n}{\partial m}-\frac{1}{\text{C} \operatorname{sen} \alpha}\left(\frac{\partial \text{A}}{\partial v}-\frac{\partial \text{C}}{\partial u}\cos \alpha\right).\\
&r_1=-\frac{\partial m}{\partial v}+\frac{1}{\text{A} \operatorname{sen} \alpha}\left(\frac{\partial \text{C}}{\partial u}-\frac{\partial \text{A}}{\partial v}\cos \alpha\right).\\
&\text{A}\,(p_1 \operatorname{sen} m-q_1 \cos m)=\text{C}\,(p \operatorname{sen} n-q \cos n)
\end{aligned}\right\} \quad (A')$$

En el caso de ser rectangulares las coordenadas curvilíneas, las fórmulas generales se simplifican. Entonces se puede hacer coincidir el eje de las x del triedro T con la tangente al arco Adu, es decir, con la tangente á la curva $v =$ const., lo que dará

$$n = \frac{\pi}{2}, \quad m = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Las fórmulas (A′) se simplifican tomando la forma

$$\left.\begin{aligned} &Aq_1 + Cp = 0, && \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} = qr_1 - rq_1, \\ &r = -\frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v}, && \frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} = rp_1 - pr_1, \\ &r_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u}, && \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = pq_1 - pq_1, \end{aligned}\right\} \quad (A'')$$

expresiones que coinciden, prescindiendo de la notación, con las dadas por Codazzi. (*)

Sin entrar en detalles extraños á esta obra, que pueden verse en la obra de M. Darboux, ni presentar la serie de fórmulas expuestas en el tomo VIII del *Traité d'Analyse* de M. Laurent, daremos las siguientes:

227. NOCIONES GENERALES. Sabemos que si se dan las seis funciones E, F, G, D, D′, D″, la superficie queda determinada por sus coordenadas paramétricas. Las ecuaciones de las líneas de curvatura y de los radios principales de curvatura quedan determinados en función de u y v; y si referimos la superficie á sus líneas de curvatura, el elemento lineal esférico de Gauss quedará determinado y, por consiguiente, la imagen esférica de las líneas de curvatura. Las fórmulas

$$x = \int\left(r_2 \frac{\partial X}{\partial u}du + r_1 \frac{\partial X}{\partial v}dv\right), \quad y = \int\left(r_2 \frac{\partial Y}{\partial u}du + r_1 \frac{\partial Y}{\partial v}dv\right),$$

$$z = \int\left(r_2 \frac{\partial Z}{\partial u}du + r_1 \frac{\partial Z}{\partial v}dv\right),$$

(*) **Darboux.** *Leçons sur la théorie général des surfaces*, t II, p. 369.

determinan la superficie, prescindiendo de los movimientos en el espacio.

Pero las seis funciones E, F, G, D, D′, D″ no son independientes entre sí, hallándose ligadas por tres ecuaciones de condición obtenidas por Mainard en 1856 y también por Codazzi (1859). Una de ellas, que contiene á D, D′ y D″ en términos finitos, está dada por la fórmula de Gauss

$$k = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}.$$

Para obtener las otras dos, que contienen las derivadas primeras de D, D′ D″, diferenciaremos las expresiones de D, D′, D″ y obtendremos

$$\frac{\partial D}{\partial v} = \Sigma a \frac{\partial^3 x}{\partial u^2 \partial v} + \Sigma \frac{\partial a}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial D'}{\partial u} = \Sigma a \frac{\partial^3 x}{\partial u^2 \partial v} + \Sigma \frac{\partial a}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v},$$

$$\frac{\partial D'}{\partial v} = \Sigma a \frac{\partial^3 x}{\partial u \partial v^2} + \Sigma \frac{\partial a}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v},$$

$$\frac{\partial D''}{\partial u} = \Sigma a \frac{\partial^3 x}{\partial u \partial v^2} + \Sigma \frac{\partial a}{\partial u} \frac{\partial^2 v}{\partial v^2}.$$

Restemos enseguida la segunda de la primera y la tercera de la cuarta, y resultará

$$\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} = p'D + (q' - q)D' - qD'', \quad (1)$$

$$\frac{\partial D''}{\partial u} - \frac{\partial D'}{\partial v} = q'D'' + (p' - q'')D' - p''D, \quad (2)$$

siendo p, q, etc., las cantidades definidas en la pág. 240. Estas son las dos fórmulas de Mainard.

La ecuación de Gauss se reduce, en virtud de (a) pág. 281, á

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} &= \frac{1}{F}\left(\frac{\partial p'}{\partial u} - \frac{\partial p}{\partial v} + p'q' - p''q\right)\\
&= \frac{1}{F}\left(\frac{\partial q'}{\partial v} - \frac{\partial q''}{\partial u} + p'q' - p''q\right)\\
&= \frac{1}{E}\left(\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q'}{\partial u} + pq' - p'q + qq'' - q'^2\right)\\
&= \frac{1}{G}\left(\frac{\partial p''}{\partial u} - \frac{\partial p'}{\partial v} + q''p' - q'p'' + p''p - p'^2\right)
\end{aligned}\right\}. \quad (3)
$$

228. TEOREMA DE BONNET. *Una superficie está completamente determinada por su posición en el espacio y su representación en un plano, cuando sus seis elementos fundamentales se hallan determinados de modo que satisfacen á las ecuaciones* (1), (2) *y* (3).

Sean F y F_1 dos superficies con los mismos elementos fundamentales E, F, G, desarrollables la una en la otra, y representadas por consiguiente mediante la representación conforme, ya en el mismo sentido ó en sentido inverso. En el último caso, tenemos la imagen F'_1 en un plano (X, Y) de F_1. Los seis elementos fundamentales serán los mismos para F'_1 que para F, y será aplicable á ésta, de manera que la representación conforme se efectúe en el mismo sentido. F y F'_1 se pueden superponer, pues si P y P'_1 son puntos correspondientes, las secciones normales en dichos puntos tienen igual curvatura, ó coinciden sus paraboloides osculadores. Si trazamos, en las dos superficies, redes de curvas paramétricas, en cada punto concurrirán cuatro paralelógramos infinitamente pequeños. Coloquemos uno de los correspondientes á P en P'_1, entonces los otros tres pares coincidirán respectivamente, por la coincidencia de los dos paraboloides, sin deformarse las superficies. Por consiguiente, uno de los paralelógramos coincide con su correspondiente, sin deformarse la superficie. Las dos superficies F y F'_1 coinciden por consiguiente.

Aplicación. 1.ª Sean las curvas *líneas mínimas*. Tendremos

$$E = G = 0, \qquad ds^2 = 2F\,du\,dv$$

$$h = \frac{2D'}{F}, \quad k = -\frac{DD'' - D'^2}{F^2} = -\frac{1}{F}\frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{D'}\frac{\partial D}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{D'}{F}\right), \quad \frac{1}{D'}\frac{\partial D''}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{D'}{F}\right). \tag{2}$$

2.º Sean las curvas *líneas de curvatura*. Tendremos

$$F = D' = 0, \qquad ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{D}{E}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{D''}{G}, \quad \frac{\partial a}{\partial u} = -\frac{1}{R_1}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial a}{\partial v} = -\frac{1}{R}\frac{\partial x}{\partial v},$$

y análogamente para b y c, y y z.

Las ecuaciones de Mainard conducen á

$$\frac{\partial D}{\partial v} = \frac{1}{2}\left(\frac{D}{E} + \frac{D''}{G}\right)\frac{\partial E}{\partial v}, \quad \frac{\partial D''}{\partial u} = \frac{1}{2}\left(\frac{D}{E} + \frac{D''}{G}\right)\frac{\partial G}{\partial u}.$$

La ecuación de Gauss conduce á

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial v}\right) = -k\sqrt{EG} = -\frac{DD''}{\sqrt{EG}}. \tag{a}$$

3.ª Consideremos el caso de las superficies de *curvatura constante* $-\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} = h =$ const. Tendremos

$$\frac{\partial D}{\partial v} = \frac{h}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, \quad \frac{\partial D''}{\partial u} = \frac{h}{2}\frac{\partial G}{\partial u},$$

é integrando, $$\frac{D}{E} = \frac{h}{2} + \frac{U}{E}, \quad \frac{D''}{G} = \frac{h}{2} + \frac{V}{G}, \tag{3}$$

ecuaciones en las que U y V son funciones solo de u y de v respectivamente. Sumando, tendremos $\frac{U}{E} + \frac{V}{G} = 0$.

Si λ es el factor de proporcionalidad, será

(4) $\quad E = \lambda U, \quad G = -\lambda V \quad$ y $\quad ds^2 = \lambda\,(U\,du^2 - V\,dv^2)$;

y tomando $\int\sqrt{V}\,du$, $\int\sqrt{U}\,dv$, como nuevos parámetros, el elemento lineal tendrá la forma

$$ds^2 = \lambda\,(du^2 + dv^2).$$

229. TEOREMA. *En las superficies de curvatura media constante las líneas de curvatura son isotermas.*

Por la elección del parámetro es $E = G = \lambda$, y en virtud de (4) $U = 1$, $V = -1$; y aplicando (3), será

$$E = \lambda,\quad F = 0,\quad G = \lambda,$$

$$D = \frac{h\lambda}{2} + 1,\quad D' = 0,\quad D'' = \frac{h\lambda}{2} - 1. \tag{5}$$

Sustituyendo en (a), pág. 380, tendremos

$$\frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial v^2} = \frac{2}{\lambda} - \frac{h^2\,\lambda}{2}. \tag{6}$$

Consideremos ahora el caso de las superficies de curvatura constante negativa, tomando las líneas asintóticas por curvas paramétricas y haciendo por sencillez $k = -1$. Tendremos $D = D'' = 0$, $D' = \Delta$. Y de las ecuaciones (1) y (2) resulta

$$\frac{\partial \log \Delta}{\partial u} = p - q',\qquad \frac{\partial \log \Delta}{\partial v} = q'' - p'.$$

De ello, así como de las fórmulas (pág. 240)

$$p + q' = \frac{\partial \log \Delta}{\partial u},\qquad q'' + p' = \frac{\partial \log \Delta}{\partial v},$$

resulta $p' = q' = 0$, y de éstas y de las anteriores (pág. 240) $m' = n' = 0$ y

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial G}{\partial u};$$

y E y G son funciones, de u la primera, de v la segunda.

Elijamos convenientemente el parámetro para que sea $E = G = 1$; expresemos por 2ω el ángulo que forman entre sí las líneas asintóticas, y tendremos $F \cos\omega$, $\Delta = \operatorname{sen} 2\omega$; y por consiguiente

$$E = 1,\ F = \cos 2\omega,\ G = 1,\ \Delta = \operatorname{sen} 2\omega,\ D = 0,\ D' = \operatorname{sen} 2\omega,\ D'' = 0.$$

La ecuación de Gauss da

$$\frac{\partial^2\, 2\omega}{\partial u\, \partial v} \text{ sen } 2\omega.$$

§ 5.º Sistemas triplemente ortogonales

230. Condiciones de ortogonalidad. Podemos expresar analíticamente las coordenadas x, y, z de un punto del espacio como funciones de tres parámetros u, v, w mediante las ecuaciones

$$x = f(u, v, w), \quad y = \varphi(u, v, w), \quad z = \psi(u, v, w). \qquad (1)$$

Si w es constante y u, v variables, las ecuaciones (1) representan una superficie, y análogamente diremos respecto á u y á v. Las ecuaciones (1) representan, por tanto, tres sistemas de superficies. Si por ejemplo damos á u y w los valores u_0 y w_0 las ecuaciones (1) representarán la línea, intersección de las superficies $u = u_0$, $w = w_0$.

Un punto quedará determinado por las tres superficies $u =$ const., $v =$ const., $w =$ const., y tendremos tres líneas que pasan por dicho punto, intersecciones de las superficies, tomadas dos á dos. Y para que estas sean ortogonales es necesario y suficiente que las tres tangentes cuyos coeficientes directores son respectivamente

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial w}, \quad \frac{\partial y}{\partial w}, \quad \frac{\partial z}{\partial w},$$

satisfagan á las relaciones

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = 0, \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w}, \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial x}{\partial u} = 0. \qquad (2)$$

231. Cantidades fundamentales. Designemos con el índice u, v ó w las cantidades correspondientes á cada una de las superficies. Vamos á establecer que las cantidades fundamentales E, F, G, D, D′ D″ se pueden expresar por medio de las tres siguientes y sus derivadas;

$$H_1^2 = \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \quad H_2^2 = \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2, \quad H_3^2 = \Sigma \left(\frac{\partial v}{\partial w}\right)^2. \qquad (3)$$

La expresión del elemento lineal para los dos puntos (u, v, w), $(u + du, v + dv, w + dw)$ es

$$ds^2 = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial w} dw\right)^2.$$

Y por las ecuaciones (2) y (3) resulta:

$$ds^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2 + H_3^2 dw^2. \tag{4}$$

Haciendo $\Delta_u = \sqrt{E_u G_u - F_u^2} = H_2 H_3$, tendremos

$$\left.\begin{array}{llll} E_u = H_2^2, & F_u = 0, & G_u = H_3^2, & \Delta_u = H_2 H_3, \\ E_v = H_3^2, & F_v = 0, & G_v = H_1^2, & \Delta_v = H_3 H_1, \\ E_w = H_1^2, & F_w = 0, & G_w = H_2^2, & \Delta_w = H_1 H_2. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Derivando las ecuaciones (2) resultará

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial w} + \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial w} = 0,$$

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial w \partial u} + \Sigma \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} = 0,$$

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial w \partial v} = 0.$$

La semisuma de estas ecuaciones conduce á

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial w} = 0, \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial w \partial u} = 0, \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = 0. \tag{6}$$

Diferenciando la segunda y tercera (3) respecto u, y en virtud de (2), será

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = -\Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = H_2 \frac{\partial H_2}{\partial u},$$

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial w} = -\Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial w^2} = H_3 \frac{\partial H_3}{\partial u}.$$

Para los cosenos directores a_u, b_u, c_u de las superficies normales á la superficie $u=$ const., se tiene

$$a_u : b_u : c_u = \frac{\partial x}{\partial u} : \frac{\partial y}{\partial u} : \frac{\partial z}{\partial u},$$

y análogamente para $v=$ const., $w=$ const.

De las ecuaciones (3) resulta

$$a_u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad b_u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad c_u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial z}{\partial u};$$

$$a_v = \frac{1}{H_2}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad b_v = \frac{1}{H_2}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad c_v = \frac{1}{H_2}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$a_w = \frac{1}{H_3}\frac{\partial x}{\partial w}, \quad b_w = \frac{1}{H_3}\frac{\partial y}{\partial w}, \quad c_w = \frac{1}{H_3}\frac{\partial z}{\partial w},$$

232. TEOREMA DE DUPIN. *Las superficies de un sistema triplemente ortogonal se cortan según líneas de curvatura.*

Supongamos que para la superficie $u=$ const. sean v y w los parámetros, se obtendrán para las cantidades fundamentales de segundo orden

$$D_u = \Sigma a_u \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{1}{H_1}\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u},$$

$$D'_u = \Sigma a_u \frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial w} = \frac{1}{H_1}\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial w} = 0,$$

$$D''_u = \Sigma a_u \frac{\partial^2 x}{\partial w^2} = \frac{1}{H_1}\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial w^2} = -\frac{H_3}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u}.$$

Por sustitución circular, tendremos:

$$D_u = -\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}, \quad D'_u = 0, \quad D''_u = -\frac{H_3}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u},$$

$$D_v = -\frac{H_3}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v}, \quad D'_v = 0, \quad D''_v = -\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v},$$

$$D_w = -\frac{H_1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}, \quad D'_w = 0, \quad D''_w = -\frac{H_2}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w}.$$

Y puesto que para la superficie $u =$ const., se verifica que $F_u = 0$, $D'_u = 0$, los parámetros v y w serán líneas de curvatura, y lo mismo sucede para $v =$ const. y para $w =$ const., resulta demostrado el teorema.

233. APLICACIÓN DE LAS FÓRMULAS DE MAINARD CODAZZI. Para los radios de curvatura principales de la superficie $u =$ const., que designaremos por R_{uv}, R_{uw}, se obtiene

$$\frac{1}{R_{uv}} = -\frac{1}{H_1 H_3}\frac{\partial H_3}{\partial u}, \quad \frac{1}{R_{uw}} = -\frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u},$$

por lo que R_{uv} es un radio de curvatura de la línea de curvatura $v =$ const. y R_{uw}, para la línea de curvatura $w =$ const. Obteniéndose las cantidades análogas por permutación circular.

Apliquemos las ecuaciones de Mainard á las superficies

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}, \quad w = \text{const.}$$

Las seis ecuaciones se reducen á

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H_1}{\partial v\, \partial w} &= \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial w}\frac{\partial H_1}{\partial v} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial v}\frac{\partial H_1}{\partial w}, \\
\frac{\partial^2 H_2}{\partial w\, \partial u} &= \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial u}\frac{\partial H_2}{\partial w} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{\partial H_2}{\partial u}, \\
\frac{\partial^2 H_3}{\partial u\, \partial v} &= \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial v}\frac{\partial H_3}{\partial u} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{\partial H_3}{\partial v}.
\end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

que son las ecuaciones de Lamé.

Las ecuaciones de Gauss, para las superficies del sistema ortogonal son:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w}\right) + \frac{1}{H^2_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\frac{\partial H_3}{\partial u} &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u}\right) + \frac{1}{H^2_2}\frac{\partial H_3}{\partial v}\frac{\partial H_1}{\partial u} &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\right) + \frac{1}{H^2_3}\frac{\partial H_1}{\partial w}\frac{\partial H_2}{\partial w} &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Para integrar las ecuaciones (1) y (2), considerando las fórmulas de la pág. 297, tendremos

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial a_u}{\partial u} = -\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v} a_v - \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w} a_w,\\
&\frac{\partial a_v}{\partial u} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v} a_u, \quad \frac{\partial a_w}{\partial u} = \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial w} a_u, \quad \frac{\partial a_u}{\partial v} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u} a_v,\\
&\frac{\partial a_v}{\partial v} = -\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w} a_w - \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u} a_u,\\
&\frac{\partial a_w}{\partial v} = \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial w} a_w, \quad \frac{\partial a_u}{\partial w} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u} a_w,\\
&\frac{\partial a_v}{\partial w} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v} a_w, \quad \frac{\partial a_w}{\partial w} = -\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial u} a_u - \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial v} a_v,
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

y análogamente será para b_u, b_v, b_w, c_u, c_v, c_w.

Este sistema es integrable, porque en virtud de (1) y (2), quedan satisfechas las condiciones de integrabilidad.

Si a_u, a_v, a_w son integrales de (3), se tendrá en virtud de las expresiones de a_u, a_v, ... (pág. 384)

$$x = \int (a_u H_1 du + a_v H_2 dv + a_w H_3 dw);$$

y se obtienen análogamente y, z como funciones de u, v y w y, por consiguiente, el sistema triple ortogonal más general.

LIBRO CUARTO

SISTEMAS GEOMÉTRICOS

CAPÍTULO I

Geometría de la recta (*)

§ 1.º PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA GEOMETRÍA REGLADA

234. DEFINICIONES. Se puede, en una figura geométrica, considerar tan solamente los puntos que la componen. Transformándola homográficamente, se obtendrá una figura análoga, definida inmediatamente por medio de sus puntos. Esto se expresa diciendo que *la transformada homográfica de una figura puntual es otra figura puntual.*

Si, por el contrario, adoptásemos el plano como elemento generador de una figura, ésta sería una *figura planaria, y su transformada homográfica sería otra figura planaria.* Se resumen estas dos observaciones diciendo que: *El espacio puntual y el espacio planario se transforman respectivamente en espacios* DEL MISMO NOMBRE, *por toda transformación homográfica.*

Efectuemos ahora una transformación dualítica: por ejemplo, una transformación por polares recíprocas. Entonces, toda figura puntual se cambia en una figura planaria y toda figura planaria en una figura puntual.

(*) **La idea de considerar á la recta como elemento generador se debe á Plücker** *(Systems der Geometrie des Raumes).*

Resumiremos esta doble observación diciendo que: *El espacio puntual y el espacio planario se transforman respectivamente en espacios de* NOMBRE CONTRARIO, *por toda transformación dualítica.*

Para obtener ahora un modo de definición de las figuras, que permanezca invariable por una y otra transformación, consideraremos en una figura, no ya los puntos que la componen ni los planos que la engendran, sino las rectas que entran en su construcción, y llegaremos á un nuevo modo de definición que caracterizaremos diciendo que *la figura es reglada.*

La ventaja de este modo de definición resulta, observando que una recta tiene por transformada una recta, *bien por dualidad, bien por homografía*, lo que podemos expresar mejor diciendo: *que el* ESPACIO REGLADO *se transforma en un espacio de igual nombre,* YA POR HOMOGRAFÍA YA POR DUALIDAD.

La teoría de las figuras regladas expresa la gran evolución inaugurada por Poncelet, Gergonne y Chasles.

Una recta tiene una doble generación: es el lugar de un punto ó el lugar de un plano, que gira alrededor de ella. Plücker llama *rayo* á la recta considerada como lugar de puntos, y *eje* á la recta considerada como lugar de planos.

235. Coordenadas. Consideremos un espacio puntual, referido á coordenadas homogéneas. Sean x_1, x_2, x_3, x_4 las coordenadas de un punto x y

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0 \tag{1}$$

la ecuación de un plano. Las cantidades ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 serán las coordenadas homogéneas de este plano, y la ecuación (1) expresa que el punto x y el plano ξ se hallan *unidos*, es decir, que el punto está en el plano.

Tomemos dos planos ξ, η. Estos planos se cortan según una recta D; y se hace

$$\rho p_{ik} = \xi_i \eta_k - \eta_i \xi_k, \tag{2}$$

siendo ρ un coeficiente de proporcionalidad, las ecuaciones de los planos trazados por la recta D y por los vértices del tetraedro de referencia serán, en coordenadas generales X_i,

$$\left.\begin{array}{llll} & +p_{12}X_2 & +p_{13}X_3 & +p_{14}X_4=0 \\ p_{21}X_1 & & +p_{23}X_3 & +p_{24}X_4=0 \\ p_{31}X_1 & +p_{32}X_2+ & & +p_{34}X_4=0 \\ p_{41}X_1 & +p_{42}X_2 & +p_{43}X_3+ & \qquad =0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

Si se desarrolla el determinante nulo

$$\Delta=\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix}=0,$$

se obtiene

$$\Delta+2(p_{12}p_{34}+p_{13}p_{42}+p_{14}p_{23})=0, \qquad (4)$$

Tomemos, recíprocamente, seis cantidades $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23}$, ligadas por la ecuación (4), y formemos las ecuaciones (3), conviniendo en que $p_{ki}=-p_{ik}$, obtendremos que los cuatro planos (3), *en virtud de* (4), se cortan según una misma recta D. Y se verifica todavía, que si se hacen pasar por esta recta dos planos ξ, η, el binomio $(\xi_i\eta_k-\eta_i\xi_k)$ es proporcional á p_{ik}; luego, las seis cantidades $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23}$, ligadas por la ecuación

$$p_{12}p_{34}+p_{13}p_{42}+p_{14}p_{23}=0, \qquad (5)$$

definen completamente una recta por medio de las ecuaciones (3), sobreentendiéndose que $p_{ik}=-p_{ki}$.

Para establecer el carácter de dualidad, consideraremos la definición correlativa.

Tomemos dos puntos x, y en la recta. Todo punto de esta recta estará representado por las coordenadas

$$z_i=lx_i+my_i,$$

siendo l y m dos parámetros. Para obtener la traza de la recta sobre el plano $z_\alpha=0$, hagamos

$$\sigma q_{ik}=x_iy_k-y_ix_k; \qquad (6)$$

siendo σ un factor de proporcionalidad, y obtendremos que la recta corta al plano $z_\alpha = 0$ en un punto cuyas coordenadas son $q_{\alpha 1}, q_{\alpha 2}, q_{\alpha 3}, q_{\alpha 4}$ (siendo $q_{\alpha\alpha} = 0$); y se tendrán los cuatro puntos

$$(0, q_{12}, q_{13}, q_{14}), (q_{21}, 0, q_{23}, q_{24}), (q_{31}, q_{32}, 0, q_{34}), (q_{41}, q_{42}, q_{43}, 0). \quad (7)$$

Desarrollando el determinante nulo, análogo á Δ

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix},$$

se verifica que es nula la expresión:

$$q_{12}\, q_{34} + q_{13}\, q_{42} + q_{14}\, q_{23} = 0. \quad (8)$$

Recíprocamente: Si tomamos las seis cantidades $q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{34}, q_{42}, q_{23}$, ligadas por la ecuación (8), se puede ver que, en virtud de la condición (8), los cuatro puntos (7) (suponiendo $q_{ki} = -q_{ik}$) están en línea recta.

Los dos sistemas de coordenadas p y q son *idénticos*.

En efecto, si partimos de la recta D, representada por las ecuaciones (3), y expresamos que contiene á los puntos x, y, tendremos

$$p_{12}\, x_1 + p_{13}\, x_3 + p_{14}\, x_4 = 0, \quad p_{12}\, y_2 + p_{13}\, y_3 + p_{14}\, y_4 = 0,$$

de lo que resulta

$$\frac{p_{12}}{x_3\, y_4 - x_4\, y_3} = \frac{p_{13}}{x_4\, y_2 - x_2\, y_4} = \frac{p_{14}}{x_2\, y_3 - x_3\, y_2},$$

es decir,
$$\frac{p_{12}}{q_{34}} = \frac{p_{13}}{q_{42}} = \frac{p_{14}}{q_{23}};$$

y tendremos análogamente

$$p_{21}\, x_1 + p_{23}\, x_3 + p_{24}\, x_4 = 0, \quad p_{21}\, y_1 + p_{23}\, y_3 + p_{24}\, y_4 = 0, \quad (9)$$

de donde

$$\frac{p_{21}}{x_3\, y_4 - y_3\, x_4} = \frac{p_{23}}{x_4\, y_1 - y_4\, x_1} - \frac{p_{24}}{x_1\, y_3 - y_1\, x_3},$$

es decir,
$$\frac{p_{12}}{q_{34}} = \frac{p_{23}}{q_{14}} = \frac{p_{42}}{q_{13}}.$$

De la tercera de las ecuaciones (3) se deduciría igualmente que estas relaciones iguales, son además iguales á $\frac{p_{34}}{q_{12}}$, obteniéndose definitivamente

$$\frac{p_{12}}{q_{34}} = \frac{p_{13}}{q_{42}} = \frac{p_{14}}{q_{23}} = \frac{p_{34}}{p_{12}} = \frac{p_{42}}{p_{13}} = \frac{p_{23}}{q_{14}}. \tag{10}$$

Comparando las fórmulas (2) y (6) y alterando un poco los coeficientes de proporcionalidad, escribiremos

$$\begin{aligned}
r_{12} &= \rho\,(\xi_1\,\eta_2 - \eta_1\,\xi_2) = \sigma\,(x_3\,y_4 - y_3\,x_4)\\
r_{13} &= \rho\,(\xi_1\,\eta_3 - \eta_1\,\xi_3) = \sigma\,(x_4\,y_2 - y_4\,x_2)\\
r_{14} &= \rho\,(\xi_1\,\eta_4 - \eta_1\,\xi_4) = \sigma\,(x_2\,y_3 - y_2\,x_3)\\
r_{34} &= \rho\,(\xi_3\,\eta_4 - \eta_3\,\xi_4) = \sigma\,(x_1\,y_2 - y_1\,x_2)\\
r_{42} &= \rho\,(\xi_4\,\eta_2 - \eta_4\,\xi_2) = \sigma\,(x_1\,y_3 - y_1\,x_3)\\
r_{23} &= \rho\,(\xi_2\,\eta_3 - \eta_2\,\xi_3) = \sigma\,(x_1\,y_4 - y_1\,x_4).
\end{aligned}$$

Expuestos estos desarrollos preliminares, podemos adoptar estas cantidades r_{ik} susceptibles de un doble significado, por coordenadas de la recta, las cuales verifican la relación

$$\omega\,(r) = 2\,(r_{12}\,r_{34} + r_{13}\,r_{42} + r_{14}\,r_{23}) = 0. \ (*)$$

§ 2.º Casos de los sistemas de rectas

236. Definiciones. - Una relación entre las coordenadas de rectas, representa una infinidad triple de rectas en el espacio, que se suele llamar un *complejo de rectas*, dos relaciones representan una infinidad doble ó *una congruencia de rectas*, tres relaciones entre las coordenadas representan una superficie reglada y cuatro de estas relaciones representan, en general, un número finito de rectas en el espacio.

(*) Véase G. Koenigs. *La Géométrie réglée et ses applications.*

Ó bien, sean las ecuaciones

$$\frac{X - a}{b} = \frac{Y - a_1}{b_1} = \frac{Z - a_2}{b_2}. \tag{1}$$

Si los coeficientes a, b dependen de un solo parámetro α, dichas ecuaciones forman una *superficie reglada.*

Si hay dos parámetros α y β, se tendrá una *congruencia de rectas.* Por cada punto (x, y, z) del espacio pasarán una ó varias rectas de la congruencia, correspondientes á los sistemas de valores de α y β, que satisfacen á las ecuaciones

$$\frac{x - a}{b} = \frac{y - a_1}{b_1} = \frac{z - a_2}{b_2}, \tag{2}$$

Si hay tres parámetros α, β, γ se tendrá un *complejo de rectas.* Por cada punto (x, y, z) pasará una infinidad de rectas del complejo, que formará un cono, cuya ecuación se obtendrá eliminando α, β, γ entre las ecuaciones (1) y (2).

Por último, si hubiese más de tres parámetros, el sistema contendría todas las rectas posibles, porque podrían determinarse los parámetros, de modo que pasase la recta por dos puntos arbitrarios (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), lo que solo daría cuatro ecuaciones de condición.

237. DETERMINACIONES. Sean las ecuaciones de la recta D

$$X = a + bt, \quad Y = a_1 + b_1 t, \quad Z = a_2 + b_2 t,$$

y las de la recta infinitamente próxima

$$X = a + da + (b + db)\,t, \quad Y = a_1 + da_1 + b + db_1)\,t,$$
$$Z = a_2 + da_2 + (b + db_2)\,t,$$

limitándonos á aproximaciones de primer orden, y escribiendo por consiguiente, da, db, ... en vez de Δa, Δb, ... La posición relativa de estas dos rectas depende de cuatro elementos:

1.º El ángulo φ que forman, cuya expresión ya dada, es

$$\varphi = \frac{\sqrt{A^2 + A_1^2 + A_2^2}}{b^2 + b_1^2 + b_2^2},$$

habiendo hecho, por abreviar $A = b_1 db_2 - b_2 db_1$, etc.

2.° Su distancia más corta

$$\delta = \frac{L}{\pm\sqrt{A^2 + A_1^2 + A_2^2}} \quad \text{con} \quad L = \begin{vmatrix} da & b & db \\ da_1 & b_1 & db_1 \\ da_2 & b_2 & db_2 \end{vmatrix}.$$

3.° La posición del punto en el que dicha menor distancia encuentra á D. El valor T de la variable t que corresponde á este punto está dada por

$$T = \frac{N}{A^2 + A_1^2 + A_2^2},$$

$$\text{siendo} \quad N = \begin{vmatrix} A & b + db & da \\ A_1 & b_1 + db_1 & da_1 \\ A_2 & b_2 + db_2 & da_2 \end{vmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{vmatrix} A & b & da \\ A_1 & b_1 & da_1 \\ A_2 & b_2 & da_2 \end{vmatrix}.$$

4.° La dirección de esta distancia más corta, que puede obtenerse, ya por el ángulo ψ que forma con un plano cuya posición se conozca, trazado por D, ya de una manera más simétrica, por sus cosenos directores λ, λ_1, λ_2. Y por ser D perpendicular á D_1, se tendrá

$$b\lambda + b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 = 0, \quad (b + db)\lambda + (b_1 + db_1)\lambda_1 + (b_2 + db_2)\lambda_2 = 0,$$

deduciéndose de estas ecuaciones

$$\frac{\lambda}{A} = \frac{\lambda_1}{A_1} = \frac{\lambda_2}{A_2}: \quad \text{y por ser} \quad \lambda^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1,$$

se tendrá
$$\lambda = \frac{A}{\sqrt{A^2 + A_1^2 + A_2^2}},$$

$$\lambda_1 = \frac{A_1}{\sqrt{A^2 + A_1^2 + A_2^2}}, \quad \lambda_2 = \frac{A_2}{\sqrt{A^2 + A_1^2 + A_2^2}}.$$

Se ve que T, λ_1, λ_2 son cantidades finitas; δ y φ son de primer orden, pero su relación

$$p = \frac{\delta}{\varphi} = \frac{L\,(b^2 + b_1^2 + b_2^2)}{A^2 + A_1^2 + A_2^2}$$

es una cantidad finita, el *parámetro de distribución*. Para determinar las relaciones que existen entre los elementos T, λ, λ_1, λ_2 y p, distinguiremos tres casos, según el número de los parámetros variables: Superficies regladas, congruencias y complejos.

§ 3.° COMPLEJOS DE RECTAS

238. DEFINICIÓN. Según lo que hemos visto, dada una recta

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$$

definida por cuatro parámetros, se puede sustituir á estos otros seis parámetros, *coordenadas de la recta*, siempre que se consideren tan solo sus relaciones, y que se hallen ligados entre sí por una relación.

Sean x, y, z y x', y', z' las coordenadas de dos puntos de la recta. Las seis coordenadas son

$$x - x', \quad y - y', \quad z - z', \quad yz' - zy', \quad zx' - xz', \quad xy' - yx',$$

ligadas entre sí por la relación idéntica

$$(x - x')(yz' - zy') + (y - y')(zx' - xz') + \ldots\ldots = 0.$$

Independientemente de estas seis coordenadas, se puede considerar seis coordenadas tangenciales. Sean ξ, η, ζ y ξ', η', ζ' las coordenadas tangenciales de dos planos que pasan por la recta.

$$\xi - \xi', \quad \eta - \eta', \quad \zeta - \zeta'; \quad \eta\zeta' - \zeta\eta', \quad \zeta\xi' - \xi\zeta', \quad \xi\eta' - \eta\xi'$$

serán las coordenadas tangenciales de la recta. Esto sentado, sea

$$\mathrm{F}(x - x', y - y', z - z', yz' - zy', zx' - xz', \ldots) = 0 \quad (1)$$

una ecuación de grado m entre las coordenadas de una recta. Las ecuaciones de esta recta contendrán tres parámetros variables y definirán una infinidad de rectas que forman lo que se llama *un complejo*. (1) es la ecuación cartesiana de un complejo. Un complejo es de orden m, cuando su ecuación es de orden m.

239. Agrupación de las rectas. Para pasar de la ecuación cartesiana á la ecuación tangencial, observaremos que se tiene

$$\left.\begin{array}{ll} x\xi + y\eta + z\zeta = 1, & x'\xi + y'\eta + z'\zeta = 1, \\ x\xi' + y\eta' + z\zeta' = 1, & x'\xi' + y'\eta' + z'\zeta' = 1, \end{array}\right\}; \qquad (a)$$

porque los planos que pasan por la recta que une (x, y, z) con $(x'\ y'\ z')$ contiene á estos puntos.

De estas ecuaciones se deduce

$$(x - x')\,\xi + (y - y')\,\eta + (z - z')\,\zeta = 0,$$

$$(x - x')\,\xi' + (y - y')\,\eta' + (z - z')\,\zeta' = 0;$$

luego $$\frac{x - x'}{\eta\zeta' - \zeta\eta'} = \frac{y - y'}{\zeta\xi' - \xi\eta'} = \frac{z - z'}{\xi\eta' - \eta\xi'}, \qquad (2)$$

é igualmente $$\frac{\xi - \xi'}{yz' - zy'} = \frac{\eta - \eta'}{zx' - zx'} = \frac{\zeta - \zeta'}{xy' - xy'}. \qquad (3)$$

Pero, si entre las fórmulas (A) se eliminan x y x', tendremos

$$y\,(\eta\xi' - \xi\eta') + z\,(\zeta\xi' - \xi\zeta') = \xi' - \xi,$$
$$y'\,(\eta\xi' - \xi\eta') + z'\,(\eta\xi' - \xi\eta') = \xi' - \xi.$$

Obtenemos, eliminando por ejemplo, $\zeta\xi' - \xi\zeta'$,

$$(\eta\xi' - \xi\eta')\,(yz' - zy') = (\xi' - \xi)\,(z' - z)$$

ó $$\frac{\eta\xi' - \xi\eta'}{z - z'} = \frac{\xi - \xi'}{yz' - zy'}.$$

$$\frac{x - x'}{\eta\zeta' - \zeta\eta'} = \frac{y - y'}{\zeta\xi' - \xi\zeta'} = \frac{z - z'}{\xi\eta' - \eta\xi'} = \frac{yz' - zy'}{\xi' - \xi} = \frac{zx' - xz'}{\eta' - \eta} = \ldots$$

La ecuación (1), reducida á coordenadas tangenciales, será pues

$$F\,(\eta\zeta' - \zeta\eta',\ \ \zeta\xi' - \xi\zeta;\ \ \xi\eta' - \eta\xi',\ \ \xi' - \xi, \ldots) = 0, \qquad (1,\text{ bis})$$

permaneciendo invariable su grado.

Si se suponen en (1) $x'\ y'\ z'$ constantes, representará un cono de grado m, cuyo vértice es (x', y', z'), porque es homogénea en

$x - x', y - y', z - z'$, ya que

$$yz' - zy' = (y - y')\,z - (z - z')\,y'.$$

Y si en (1, *bis*) se suponen constantes ξ', η', ζ', esta ecuación representará una envolvente de rectas situadas en un mismo plano, ó mejor una curva de m^{sima} clase.

Así pues, las rectas de un complejo pueden agruparse de dos maneras: 1.º, de modo que den conos de grado m tales, que cada uno de los puntos del espacio sea vértice de uno de estos conos. 2.º, dando rectas, envolventes de curvas planas de m^{sima} clase tales, que cada plano del espacio contenga una de estas curvas.

240. CONGRUENCIAS Ó HACES. Las rectas comunes á dos complejos forman lo que se llama un *haz* ó una *congruencia*. Un haz quedará pues representado por dos ecuaciones tales, que cada de ellas represente un complejo. El grado ó clase de un haz es el producto de los grados de las ecuaciones de los complejos en que se halla contenido, pues si $\Omega_m = 0$ y $\Omega_n = 0$ son las ecuaciones de dos complejos de grados m y n, por el punto (x', y', z') pasan dos conos de grados m y n, que se cortan según $p = mn$ rectas pertenecientes al haz, las cuales son las solas rectas de éste, que pasan por (x', y', z'). Así, las rectas de un haz pueden distribuirse:

1.º En grupos de un número p finito de rectas que pasan por cada punto del espacio.

2.º En grupos de p rectas situadas en cada plano del espacio.

241. COMPLEJOS DE PRIMER GRADO. Las ecuaciones de un complejo de primer grado son

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}(x - x') + \mathrm{B}(y - y') + \mathrm{C}(z - z') \\ &\qquad + \mathrm{D}(yz' - zy') + \mathrm{E}(zx' - xz') + \mathrm{F}(xy' - yx') = 0 \qquad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}(\eta\zeta' - \zeta\eta') + \mathrm{B}(\zeta\xi' - \xi\zeta') + (\xi\eta' - \eta\xi') \\ &\qquad + \mathrm{D}(\zeta' - \xi) + \mathrm{E}(\eta' - \eta) + \mathrm{F}(\zeta' - \zeta) = 0. \qquad (1, \text{bis}) \end{aligned}$$

El cono de las rectas que pasan por cada punto del espacio es un plano, y la curva á la cual son tangentes las rectas que pasan por un mismo plano, se reduce á un punto. En un complejo de primer grado, cada punto del espacio corresponde á cierto plano y *viceversa*. Este punto y plano se llaman *conjugados*.

Si consideramos dos puntos a y b y sus planos correspondientes, estos planos se cortarán según una recta AB. Pero aA y aB son rectas del complejo, así como bA y bB; luego el plano aAb corresponde al punto A y el plano aBb al punto B. Estos planos se cortan según la recta ab. Así pues, á una recta ab corresponde otra AB; las dos se llaman *conjugadas*.

Toda recta que encuentra á dos rectas conjugadas, pertenece al complejo, pues por esta recta y una de las conjugadas A se puede hacer pasar un plano, que será el plano conjugado del punto en que la recta encuentra á la conjugada de A, perteneciendo todas las rectas de este plano al complejo.

242. DIÁMETROS Y EJES DE UN COMPLEJO DE PRIMER GRADO. Se llama *diámetro* de un complejo de primer grado al lugar de los puntos conjugados de una serie de planos paralelos. Si en la ecuación

$$A(x - x') + B(y - y') + \ldots\ldots + D(yz' - zy') + \ldots\ldots = 0$$

del complejo se suponen valores determinados á x', y', z', esta ecuación será la del plano conjugado; sus coeficientes directores son

$$A - Ez' + Fy', \quad B - Fx' + Dz', \quad C - Dy' + Ex';$$

y si se igualan sus relaciones á constantes, se ve que el punto x', y', z', describirá una recta. Así los diámetros son rectas, las conjugadas de los diámetros se hallan en el infinito y en la intersección de los planos conjugados de sus diversos puntos. Vemos pues, que todos los diámetros son paralelos

Las ecuaciones de un diámetro son

$$\frac{A - Ez' + Fy'}{a} = \frac{B - Fx' + Dz'}{b} = \frac{C - Dy' + Ex'}{c}$$

de la que se deduce, suprimiendo los términos constantes,

$$\frac{x'}{D} = \frac{y'}{E} = \frac{z'}{F}.$$

D, E, F, son los coeficientes directores de todos los diámetros.

Para que un plano sea perpendicular á un diámetro conjugado, es necesario que

$$\frac{A - Ez' + Fy'}{D} = \frac{B - Fy' + Dz'}{E} = \frac{C - Dy' + Ex'}{F},$$

que son las ecuaciones del eje.

Tomemos el eje del complejo por eje de las z, las ecuaciones precedentes quedarán satisfechas para $x' = 0$, $y' = 0$; luego $E = 0$, $D = 0$, $A = 0$, $B = 0$; y se puede escribir la ecuación del complejo bajo la forma

$$K(z - z') = (xy' - yx'),$$

que no cambia, cuando se hacen girar los ejes alrededor de las z ó cuando se les hace resbalar á lo largo de este eje. k es el *parámetro* del complejo y el plano xy es una *sección principal.*

243. Complejos de segundo grado. Un complejo de segundo grado se representa por una ecuación homogénea de segundo grado en

$$X = x - x', \quad Y = y - y', \quad Z = z - z'$$
$$l = yz' - zy', \quad m = zx' - xz', \quad n = xy' - yx',$$

que podremos escribir bajo la forma

$$F(l, m, n) + 2Ll + 2Mm + 2Nn + \Theta(X, Y, Z) = 0. \qquad (1)$$

F es una función homogénea de segundo grado de l, m, n, Θ una función homogénea de segundo grado en X, Y, Z, en fin, L, M, N son funciones lineales homogéneas de X, Y, Z.

Si se supone constantes á x', y', z' en la ecuación (1), ésta representará un cono de segundo grado, cuyo vértice está en (x', y', z'), formado por todas las rectas del complejo que pasan por (x', y', z').

Si expresamos que este cono se reduce á un sistema de dos planos, tendremos la *superficie de Kummer*, lugar de los puntos para los que se verifica esta condición.

Se obtendrá la superficie de Kummer, para el complejo (1), expresando que (1) es una suma de dos cuadrados, funciones lineales de X, Y, Z. Para obtenerla, descompongamos en cuadrados el primer miembro de (1); y para ello cambiemos de coordenadas, sin cambiar el origen. Supongamos que los dos sistemas de coordenadas son ortogonales.

Podemos verificar que x, y, z, x', y', z', X, Y, Z y l, m, n, se hallan transformadas por la misma sustitución, de manera que pueden suponerse F (l, m, n) de la forma $A^2 l^2 + B^2 m^2 + C^2 n^2$ y escribir la ecuación (1) así:

$$A^2 l^2 + B^2 m^2 + C^2 n^2 + 2ALl + 2BMm + 2CNn + \Theta(X, Y, Z) = 0,$$

en la que A, B, C expresan constantes y L, M, N funciones lineales de X, Y, Z. Esta ecuación puede también escribirse así:

$$(Al + L)^2 + (Bm + M)^2 + (Cn + N)^2 + \Omega(X, Y, Z) = 0, \qquad (3)$$

expresando Ω una nueva función homogénea de segundo grado en X, Y, Z.

Se trata de expresar que esta función es una suma de dos cuadrados ó escribir que su discriminante es nulo.

La superficie de Kummer será aparentemente del sexto grado; pero se puede ver que son nulos los términos de quinto y de sexto grado, pues los términos son independientes de la forma de la función Ω, que no contiene á x', y', z'. Para valuar los términos en cuestión, se puede pues suponer $\Omega = 0$, y limitarse á considerar la expresión (3) reducida á

$$(Al + L)^2 + (Bm + M)^2 + (Cn + N)^2;$$

y siendo en este caso su discriminante igual á 1, con relación á $Al + L$, $Bm + M$, $Cn + N$, será, con relación á X, Y, Z, igual al cuadrado del determinante de la sustitución

$$x = Al + L, \quad y = Bm + M, \quad z = Cm + n.$$

Si se hace

$$L = \alpha X + \beta Y + \gamma Z, \qquad M = \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z,$$
$$N = \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z,$$

el discriminante buscado será igual al cuadrado de

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta + Az' & \gamma - Ay' \\ \alpha' - Bz' & \beta' & \gamma' + Bx' \\ \alpha'' + Cy' & \beta'' - Cx' & \gamma'' \end{vmatrix} \tag{4}$$

y siendo de tercer grado el determinante

$$\begin{vmatrix} o & Az' & -Ay' \\ -Bz' & o & Bx' \\ Cy' & -Cx' & o \end{vmatrix},$$

que forma el conjunto de los términos de tercer grado, resulta que el determinante (4) es de segundo grado y su cuadrado de cuarto, luego: *La superficie de Kummer es de cuarto grado.*

Busquemos los puntos x', y', z' para los cuales el cono del complejo se reduce á dos planos coincidentes. La expresión (1) deberá ser entonces un cuadrado perfecto, y la ecuación de la superficie de Kummer se podrá escribir bajo la forma

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = o \quad ó \quad \Delta = o.$$

Expresando por

$$AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'XZ + 2B''XY$$

el primer miembro de la ecuación del complejo (1), los elementos A, B, ... son de segundo grado en x', y', z' y los puntos en los que el cono se reduce á un plano doble están dados por las fórmulas

$$\frac{\partial \Delta}{\partial A} = o, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial B} = o, \ldots .$$

que dan 16 soluciones. Es decir, que existen 16 puntos para los cuales el cono del complejo se reduce á un plano doble. Tomando estos puntos por origen, se tendrá

$$\Delta A'' = \frac{\partial\Delta}{\partial A}\frac{\partial\Delta}{\partial A'} - \left(\frac{\partial\Delta}{\partial B''}\right)^2, \text{ (*)}$$

de manera que los términos de menor grado son de segundo respecto á las derivadas $\frac{\partial\Delta}{\partial A}, \ldots$ Así:

La superficie de Kummer tiene 16 puntos singulares, para los que el cono del complejo se reduce á dos planos confundidos.

Transformando por polares recíprocas, tendremos que:

La superficie de Kummer es de la cuarta clase. Tiene 16 planos tangentes singulares y es envolvente de los planos para los que la cónica del complejo se reduce á dos puntos. (**)

§ 4.° Congruencias en general

244. Focos. Sean las ecuaciones

$$X = x + \lambda\alpha, \quad Y = y + \lambda\beta, \quad Z = z + \lambda\gamma, \qquad (1)$$

y supongamos que $x, y, z, \lambda, \alpha, \beta$ sean funciones de dos parámetros variables u, v, expresando X, Y, Z las coordenadas generales, x, y, z las de un punto variable y α, β, γ tres cosenos directores. Estas ecuaciones representarán una recta variable, ó mejor la *congruencia* formada por todas las rectas representadas por (1).

Sea D una recta de la congruencia, δ la distancia mínima entre ésta y otra recta D′ infinitamente próxima á la primera, Δ una recta perpendicular á D y á δ, q la distancia del punto (x, y, z), por el que pasa D, al pie de la perpendicular común á D y D′. Las fórmulas

$$X = x + \lambda\alpha, \qquad Y = y + \lambda\beta, \qquad Z = z + \lambda\gamma$$
$$X = x' + \lambda'\alpha', \quad Y = y' + \lambda'\beta', \quad Z = z, + \lambda'\gamma'$$

darán $$\delta = \frac{1}{\text{sen V}}\begin{vmatrix} x - x & y - y' & z - z' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix},$$

(*) Laurent, *Traite d'Analyse*, t. I., p. 161. (**) T. VII, p. 291.

designando V el ángulo de las dos rectas, y

$$\delta = \frac{dx(\beta d\gamma - \gamma d\beta) + dy(\gamma d\alpha - \alpha d\gamma) + \ldots\ldots}{dV} \qquad (2)$$

$$dV^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 \qquad (3)$$

los cosenos directores de D, δ y Δ son respectivamente

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ \frac{\beta d\gamma - \gamma d\beta}{dV},\ \frac{\gamma d\alpha - \alpha d\gamma}{dV},\ \ldots\ldots\ \frac{d\alpha}{dV},\ \frac{d\beta}{dV},\ \ldots\ldots \qquad (a)$$

La λ del punto en que δ corta á D está dada por por

$$\Lambda = \frac{dx\,d\alpha + dy\,d\beta + dz\,d\gamma}{dV^2}. \qquad (4)$$

Esto sentado, tendremos el

TEOREMA. *Existen dos puntos llamados* FOCOS *en* D, *intersecciones de ésta con una recta* D′ *infinitamente próxima.*

En efecto, haciendo $\delta = 0$, tenemos

$$dx(\beta d\gamma - \gamma d\beta) + dy(\gamma d\alpha - \alpha d\gamma) + dz(\alpha d\beta - \beta d\alpha) = 0. \qquad (5)$$

Esta ecuación es de segundo grado en du y dv ó en $\frac{dv}{du}$. Dará pues dos valores de esta relación, y por consiguiente, dos valores de Λ por medio de la ecuación (4), lo que pone en evidencia la existencia de los focos.

Podemos escribir la ecuación (5) bajo la forma

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ d\alpha & d\beta & d\gamma \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0.$$

Elevando al cuadrado, y en virtud de (4), hallaremos

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \Sigma\alpha dx \\ 0 & dV^2 & \Lambda dV^2 \\ \Sigma\alpha dx & \Lambda dV^2 & dx^2 \end{vmatrix} = 0$$

ó $$\Lambda^2 dV^2 = \Sigma dx^2 - (\Sigma\alpha dx)^2$$

y por último $$\Lambda = \frac{\sqrt{\Sigma(\beta dz - \gamma dy)^2}}{dV}. \tag{6}$$

La ecuación (5) expresa que la recta D encuentra á una recta infinitamente próxima. Es una ecuación diferencial en u y v que determina á v en función de u y de una constante arbitraria c. Si se sustituye este valor en (1), estas ecuaciones solo dependerán de v y de c. Cuando se dé á c un valor determinado, las rectas (1) engendrarán una desarrollable.

Las desarrollables que forman un sistema doble, obtenidas haciendo variar á c se llaman las *desarrollables* del haz. Así:

Las rectas de una congruencia forman dos series de desarrollables, tangentes á las rectas de la congruencia en sus focos.

Definición. El lugar de los focos de las aristas de las desarrollables se llama *superficie focal.*

La superficie focal es tangente en dos puntos á cada recta de la congruencia. Se obtiene su ecuación sustituyendo λ en (1) por el valor (6) de Λ y eliminando λ, u, v entre estas ecuaciones. Las desarrollables no son, en general tangentes á las focales; pero cuando sucede esto, sus aristas de retroceso son asintóticas de las focales, porque sus planos osculadores son tangentes á las focales.

Los *planos focales* de una congruencia son los planos tangentes á las desarrollables del haz. Pasan dos de ellos por cada generatriz y son osculadores á las aristas de retroceso de las desarrollables.

245. Obtención de los planos focales. Para obtener los planos focales que pasan por la recta (1), observaremos que las ecuaciones de los planos que pasan por el punto (x, y, z) son de la forma

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0.$$

Siendo un plano focal, paralelo á las direcciones α, β, γ, $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + \gamma$, se deberá tener

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0, \qquad A d\alpha + B d\beta + C d\gamma = 0;$$

y por consiguiente, la ecuación de un plano focal será

$$(X - x)(\beta d\gamma - \gamma d\beta) + (Y - y)(\gamma d\alpha - \alpha d\gamma) + \ldots = 0. \tag{7}$$

Por otra parte, la recta cuyos coeficientes directores son $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + d$ debe encontrar á la recta (1), para la que se debe tener $\delta = 0$ ó

$$dx\,(\beta d\gamma - \gamma d\beta) + dy\,(\gamma d\alpha - \alpha d\gamma) + dz\,(\alpha d\beta - \beta d\alpha) = 0. \quad (8)$$

Esta ecuación determina $\frac{dv}{du}$, y por consiguiente la ecuación (7). Por tener $\frac{dv}{du}$ dos valores, esta ecuación dará dos planos focales.

Así pues: *Una congruencia se compone de todas las rectas tangentes á dos superficies llamadas focales.* Recíprocamente: *Las tangentes comunes á dos superficies engendran una congruencia, y estas dos superficies pueden elejirse arbitrariamente.*

Las tangentes á un haz de curvas, trazadas en una superficie, engendran también una congruencia, de igual manera que todas las rectas de una congruencia son tangentes á curvas, que son las aristas de retroceso de las desarrollables de la congruencia, situadas en la superficie focal, formando una red en esta superficie.

TEOREMA. *Si se consideran las aristas de retroceso de una serie de desarrollables de una congruencia. Estas curvas son conjugadas, en la focal que las contiene, de las trazas de las desarrollables de la otra serie en la misma focal.*

En efecto, sea $u =$ const. la ecuación de las aristas de retroceso de la primera serie de desarrollables, en la focal que es su lugar y $v =$ const. la ecuación de las trazas de la otra serie de desarrollables en la misma focal. Tomemos u y v por variables y las ecuaciones de la congruencia serán

$$X = x + \lambda \frac{\partial x}{\partial v}, \quad Y = y + \lambda \frac{\partial y}{\partial v}, \quad Z = z + \lambda \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Si escribimos que esta recta encuentra á la recta infinitamente próxima, representada por las ecuaciones

$$X = x + \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} du + \lambda \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} du, \quad \ldots\ldots$$

se tendrá
$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0$$

que expresa que $u =$ const. y $v =$ const. son curvas conjugadas.

246. Puntos principales. Podemos considerar á x, y, z como funciones de α, β, γ, que se hallan ligadas por la relación

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \qquad (1)$$

La cantidad Λ que mide la distancia del punto (x, y, z) á la recta (1) (pág. 401) está dada por la fórmula

$$\Lambda = \frac{d\alpha\, dx + d\beta\, dy + d\gamma\, dz}{dV^2}$$

ó
$$\Lambda = \frac{\Sigma\, d\alpha \left(\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} d\alpha + \dfrac{\partial x}{\partial \beta} d\beta + \dfrac{\partial x}{\partial \gamma}\right) d\gamma}{dV^2}$$

es decir
$$\Lambda = \frac{d\alpha^2 \dfrac{\partial x}{\partial \alpha} + d\beta\, d\gamma \left(\dfrac{\partial y}{\partial \gamma} + \dfrac{\partial z}{\partial \beta}\right) + \ldots}{dV^2}$$

Si hacemos $\dfrac{d\alpha}{dV} = \alpha'$, $\dfrac{d\beta}{dV} = \beta'$, ...

tendremos $\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1, \quad (2) \qquad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0 \quad (3)$

y
$$\Lambda = \alpha'^2 \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \beta' \gamma' \left(\frac{\partial y}{\partial \gamma} + \frac{\partial z}{\partial \beta}\right) + \ldots.. \qquad (4)$$

Busquemos el máximo y el mínimo de Λ, cuando se hace variar á α', β', γ'. Para ello, igualaremos á cero las derivadas de

$$\frac{1}{2} [\Lambda + \rho (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)] + \sigma (\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'),$$

y tendremos (5)

$$\alpha'\left(\rho+\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)+\frac{1}{2}\beta'\left(\frac{\partial x}{\partial\beta}+\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)+\frac{1}{2}\gamma'(\ldots\ldots)+\frac{1}{2}\sigma\alpha=0,$$

$$\frac{1}{2}\alpha'\left(\frac{\partial y}{\partial\alpha}+\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)+\beta'\left(\rho+\frac{\partial y}{\partial\beta}\right)+\frac{1}{2}\gamma'\left(\frac{\partial y}{\partial\gamma}+\ldots\ldots\right)+\frac{1}{2}\sigma\beta=0,$$

$$\frac{1}{2}\alpha'\left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}+\frac{\partial x}{\partial\gamma}\right)+\frac{1}{2}\beta'\left(\frac{\partial y}{\partial\gamma}+\ldots\ldots\right)+\gamma'\left(\rho+\frac{\partial z}{\partial\gamma}\right)+\frac{1}{2}\sigma\gamma=0.$$

Si se multiplica la primera por α', la segunda por β', la tercera por γ' y se suman tendremos, en virtud de las relaciones obtenidas, $\rho=-\Lambda$; y la eliminación de α', β', γ' $\frac{\sigma}{2}$ entre estas ecuaciones y la (3) da

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\alpha}-\Lambda & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial\beta}+\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial\gamma}+\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right) & \alpha \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial\alpha}+\frac{\partial x}{\partial\beta}\right) & \frac{\partial y}{\partial\beta}-\Lambda & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial\gamma}+\frac{\partial z}{\partial\beta}\right) & \beta \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}+\frac{\partial x}{\partial\gamma}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial\beta}+\frac{\partial y}{\partial\gamma}\right) & \frac{\partial z}{\partial\gamma}-\Lambda & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix}=0. \qquad (6)$$

Esta ecuación tiene dos raíces reales en Λ, pero que pueden ser iguales, y puesto que Λ no es generalmente infinito, se concluye que la mínima distancia δ de una generatriz D á las generatrices próximas sólo puede medirse entre dos puntos distintos, en general y situados á distancia finita. Estos dos puntos son los *puntos principales* de la generatriz D. El lugar de estos puntos se compone de dos hojas que forman la *superficie principal* de la congruencia.

Conocidos los puntos principales, las ecuaciones (3) y (5), de primer grado, darán α', β', γ', σ. En virtud de la fórmula (*a*) pág. 402, α', β', γ' son los cosenos directores de las rectas Δ perpendiculares á D y á δ, trazadas por los puntos principales. Estas rectas son las normales á los planos que pasan por D y las distancias mínimas extremas, trazadas por los puntos principales, planos que se llaman *principales*.

Los planos principales son ortogonales, pues si α'_1, β'_1, γ'_1, Λ_1 expresan los valores de α', β', γ', Λ, en uno de los puntos principales, multiplicando las ecuaciones (5) por α'_1, β'_1, γ'_1 y sumándolas, permutando después las letras que llevan índice con las que no lo llevan, y restando los resultados, se obtiene

$$(\alpha'\alpha'_1 + \beta'\beta'_1 + \gamma'\gamma'_1)(\Lambda - \Lambda_1) = 0,$$

lo que manifiesta que, si $\Lambda \lesseqgtr \Lambda'$, es decir, si los puntos principales no coinciden, los planos principales son rectangulares.

247. Punto y superficie medios. Se llama *punto medio* de una generatriz, al medio del intervalo comprendido entre los puntos principales. Se llama *plano medio* de una generatriz, al plano trazado por el punto medio perpendicularmente á esta generatriz. Por último, se llama *superficie media* y *envolvente media* de una congruencia al lugar de los puntos medios y á la envolvente de los planos medios.

Teorema. *Los focos se hallan á igual distancia del punto medio.*

Tomemos por planos coordenados los planos principales y el plano medio de la generatriz D, que se considerará como eje de las z. Tendremos $x = y = z = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$; y por ser $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$, será $\gamma' = 0$, $\alpha'^2 + \beta'^2 = 1$. En las ecuaciones (5) ρ es igual á uno de los valores de Λ con signo cambiado. Si pues $2p$ es la distancia de los puntos principales, se deberá sustituir ρ por $\pm p$, y las dos primeras ecuaciones (5) se reducirán á

$$\alpha'\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \pm p\right) + \frac{1}{2}\beta'\left(\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) = 0,$$

$$\frac{1}{2}\alpha'\left(\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) + \beta'\left(\frac{\partial y}{\partial \beta} \pm p\right) = 0.$$

Pero α', β', γ' son los coeficientes directores de los planos principales. Luego, por ser éstos ahora planos coordenados, dichas fórmulas quedan satisfechas para $\alpha' = 0$, $\beta' = 1$ y para $\alpha' = 1$, $\beta' = 0$, lo que da

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial \alpha} = \pm p, \quad \frac{\partial y}{\partial \beta} = \pm p.$$

La ecuación (6) se reduce á

$$\Lambda^2 - \Lambda\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial y}{\partial \beta}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} = 0.$$

Por ser los dos valores de Λ iguales y de signo contrario, deberá ser $\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial y}{\partial \beta} = 0$; luego podemos hacer

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} = -\frac{\partial y}{\partial \alpha} = q, \quad \frac{\partial x}{\partial \alpha} = -\frac{\partial y}{\partial \beta} = p. \tag{7}$$

Las ecuaciones de los focos se reducen á

$$\Lambda = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\alpha' + \frac{\partial x}{\partial \beta}\beta'\right)\alpha' + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\alpha' + \frac{\partial y}{\partial \beta}\beta'\right)\beta'$$

$$-\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\alpha' + \frac{\partial x}{\partial \beta}\beta'\right)\beta' + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\alpha' + \frac{\partial y}{\partial \beta}\beta'\right)\alpha' = 0,$$

ó en virtud de (7) $\Lambda = p\alpha'^2 - p\beta'^2$,

$$q(\beta'^2 - \alpha'^2) - 2p\alpha'\beta' = 0 \quad \text{ó} \quad q - 2p\alpha'\beta' = 0,$$

resultando $\qquad \Lambda = \pm\sqrt{p^2 - q^2}.$

Si expresamos por $2f$ la distancia de los focos, tendremos

$$f^2 = p^2 - q^2.$$

248. TEOREMA DE STURM. *Las rectas próximas de una congruencia* D, *encuentran á dos rectas fijas.*

Esto se ve desde luego, porque toda congruencia puede considerarse como de primer grado, cuando se hacen variar muy poco los parámetros de que depende; y se sabe que las generatrices de una congruencia de primer grado encuentran á dos rectas fijas, lo que se puede comprobar, pues las ecuaciones de las rectas próximas á D son

$$\frac{X - x - dx}{\alpha + d\alpha} = \frac{Y - y - dy}{\beta + d\beta} = \frac{Z - z - dz}{\gamma + d\gamma};$$

y particularizando los ejes, como anteriormente,

$$\frac{X - (p\alpha' + q\beta')\,dV}{\alpha'} = \frac{Y + (q\alpha' + p\beta')\,dV}{\beta'} = \frac{Z\,dV}{1}.$$

Escribiendo estas ecuaciones bajo la forma

$$X = (p\alpha' + q\beta' + \alpha' Z)\,dV, \quad Y = (-q\alpha' - p\beta' + \beta' Z)\,dV,$$

se ve que la recta representada por estas ecuaciones encuentra á la recta

$$\frac{Y}{X} = \frac{p\alpha' + q\beta' + \alpha' Z_0}{-q\alpha' - p\beta' + \beta' Z_0}, \quad Z = Z_0, \tag{8}$$

que será fija, si se tiene

$$(9)\quad \frac{p + Z_0}{-q} = \frac{q}{Z_0 - p} \quad ó \quad Z_0 = \pm\sqrt{p^2 - q^2} = \pm f. \quad (10)$$

Las rectas de que se trata se encuentran pues, en planos paralelos al plano medio y pasan por los focos. Los coeficientes angulares de las proyecciones de estas rectas sobre el plano medio están dados por la fórmula (9), donde se debe sustituir Z_0 por $-f$ y $+f$. Estas rectas se llaman *rectas focales*.

TEOREMA. *Las rectas focales se hallan contenidas en los planos focales.*

En efecto, la ecuación (7) de la pág. 403, manifiesta que los coeficientes directores de los planos focales son

$$\beta d\gamma - \gamma d\beta, \quad \gamma d\alpha - \alpha d\gamma, \quad \alpha d\beta - \beta d\alpha$$

ó, en el sistema particular de coordenadas adoptado últimamente, $-\beta'$, α', 0, hallándose ligados α' y β' por la relación (8) de la pág. 404, que se reduce á

$$q - 2p\alpha'\beta' = 0;$$

lo que da
$$\alpha' = \frac{1}{2\sqrt{p}}\sqrt{p+q} + \frac{1}{2\sqrt{p}}\sqrt{p-q},$$
$$\beta' = \frac{1}{2\sqrt{p}}\sqrt{p+q} - \frac{1}{2\sqrt{p}}\sqrt{p-q}.$$

Las ecuaciones de los planos focales son pues,
$$\frac{Y}{X} = \frac{-q}{p \mp \sqrt{p^2 - q^2}} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - q^2}}{-q};$$

y, si se observa que los dos miembros de (9) dan para $z_0 = \sqrt{p^2 - q^2}$ los coeficientes angulares de las rectas focales, se verá que estas rectas se hallan contenidas en los planos focales.

Siendo igual á 1 el producto de los dos valores precedentes de $\frac{Y}{X}$, se concluye que:

Los planos focales se hallan igualmente inclinados con relación á los planos principales.

Se llama *superficie elemental* de una congruencia á una superficie alabeada, cuyas generatrices forman parte la congruencia.

Todas las superficies elementales que tienen común una generatriz, tienen comunes dos planos tangentes, que son los planos focales de esta generatriz.

249. Congruencias armónicas. Una congruencia es *armónica* con relación á una superficie, cuando sus desarrollables determinan en ésta secciones que forman una red de líneas conjugadas.

Teorema. *Consideremos en dos superficies* S *y* S', *como correspondientes, los puntos en que los planos tangentes son paralelos. Las rectas que unen dos puntos correspondientes de dos superficies* S *y* S' *forman una congruencia armónica.*

En efecto, sean x, y, z y x', y', z' las coordenadas de dos puntos correspondientes. Se pueden representar las superficies por las ecuaciones
$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v),$$
$$x' = \varphi'(u, v), \quad y' = \chi'(u, v), \quad z' = \psi'(u, v).$$

Sean α, β, γ los coeficientes directores del plano tangente en x, y, z ó en x', y', z'. Se debe tener

$$\alpha \frac{\partial x}{\partial u} + \beta \frac{\partial y}{\partial u} + \gamma \frac{\partial z}{\partial u} = 0, \quad \alpha \frac{\partial x'}{\partial u} + \beta \frac{\partial y'}{\partial u} + \gamma \frac{\partial z'}{\partial u} = 0, \qquad (1)$$

y las otras dos ecuaciones, cambiando u en v.

Expresemos que la recta que une un punto á su correspondiente,

$$X = x + \rho (x' - x), \quad Y = y + \rho (y' - y), \quad Z = z + \rho (z' - z)$$

encuentre á la recta próxima, trazada por los puntos

$$x + \frac{\partial x}{\partial u} du, \quad y + \frac{\partial y}{\partial u} du, \quad z + \frac{\partial z}{\partial u} du,$$

$$x' + \frac{\partial x'}{\partial u} du, \quad y' + \frac{\partial y'}{\partial u} du, \quad z' + \frac{\partial z'}{\partial u} du$$

correspondientes en las líneas coordenadas $v =$ const. Tendremos

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x'}{\partial u} & x - x' \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x'}{\partial u} & x - x' \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y'}{\partial u} & y - y' \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z'}{\partial u} & z - z' \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

De (1) resulta

$$\alpha : \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y'}{\partial u} & \frac{\partial z'}{\partial u} \end{vmatrix} = \beta : \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z'}{\partial u} & \frac{\partial x'}{\partial u} \end{vmatrix} = \gamma : \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x'}{\partial u} & \frac{\partial y'}{\partial u} \end{vmatrix} \cdot \qquad (3)$$

Sustituyendo los valores de α, β, γ en vez de los determinantes que les son proporcionales en (2), tendremos

$$(x - x')\,\alpha + (y - y')\,\beta + (z - z')\,\gamma = 0,$$

ecuación absurda, porque la normal no es en general perpendicular á la recta que une los puntos correspondientes. Esto prueba que las fórmulas (3) no se verifican, ó lo que es igual, que los determinantes contenidos en ellas son nulos. Así pues,

$$\frac{\partial x}{\partial u} : \frac{\partial x'}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial u} : \frac{\partial y'}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial u} : \frac{\partial z'}{\partial u}.$$

Y representando por λ, μ, ... cada una de estas relaciones iguales, se tendrá

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \lambda \frac{\partial x'}{\partial u}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \mu \frac{\partial x'}{\partial v}, \quad \ldots\ldots$$

Diferenciando tendremos

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \lambda \frac{\partial^2 x'}{\partial u \partial v} + \frac{\partial x'}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \mu \frac{\partial^2 x'}{\partial u \partial v} + \frac{\partial x'}{\partial v} \frac{\partial \mu}{\partial u};$$

y restando, $$(u - v) \frac{\partial^2 x'}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial x'}{\partial u} - \frac{\partial \mu}{\partial u} \frac{\partial x'}{\partial v} = 0.$$

Siendo $\lambda \gtrless \mu$, sin lo que x y x', y é y', z y z' solo diferirían por valores constantes, se deduce de esta ecuación y de sus análogas

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x'}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y'}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z'}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x'}{\partial v} & \frac{\partial y'}{\partial v} & \frac{\partial z'}{\partial v} \\ \frac{\partial x'}{\partial u} & \frac{\partial y'}{\partial u} & \frac{\partial z'}{\partial u} \end{vmatrix} = 0,$$

lo que prueba que las desarrollables de la congruencia cortan al lugar de los puntos x', y', z' según curvas conjugadas, lo que demuestra el teorema enunciado.

250. HAZ DE NORMALES DE UNA SUPERFIE. *Un haz no tiene, en general, rectas normales á una misma superficie:* En efecto, sean α, β, γ, los cosenos directores de una recta del haz y x, y, z las coordenadas de un punto de esta recta; si existiera una superficie cuyas normales fuesen las rectas del haz, se podrían expresar por

X, Y, Z las coordenadas del punto en que la recta, que consideramos, corta á la superficie. Si llamamos ρ á la distancia de los puntos (x, y, z) y (X, Y, Z), se tendrá

$$X = x + \rho\alpha, \quad Y = y + \rho\beta, \quad Z = z + \rho\gamma. \tag{1}$$

Se puede suponer que, al encontrarse los puntos (x, y, z) también en una superficie, por la que se ha cortado el haz, la posición del punto (x, y, z) determinará cada recta del haz, de manera que X, Y, Z, $x, y, z, \rho, \alpha, \beta, \gamma$ podrán considerarse como funciones de dos variables que llamaremos u y v, y que podrán ser, ya x é y, ya dos coordenadas curvilíneas cualesquiera, relativas á la superficie, lugar de los puntos x, y, z.

Diferenciemos las ecuaciones (1), y tendremos

$$dX = dx + \rho d\alpha + \alpha d\rho, \quad dY = dy + \rho d\beta + \beta d\rho, \quad dZ = \ldots \tag{2}$$

Para que la superficie normal *exista*, es necesario que se tenga

$$\alpha dX + \beta dY + \gamma dZ = 0;$$

y esta condición es suficiente. Multipliquemos ahora las fórmulas (2) respectivamente por α, β, γ, y sumémoslas. Tendremos, observando que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ es igual á 1,

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz + d\rho = 0, \quad \text{ó} \quad - d\rho = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz.$$

Si hacemos

$$\alpha \frac{\partial x}{\partial u} + \beta \frac{\partial y}{\partial u} + \gamma \frac{\partial z}{\partial u} = G, \quad \alpha \frac{\partial x}{\partial v} + \beta \frac{\partial y}{\partial v} + \gamma \frac{\partial z}{\partial v} = H,$$

la ecuación precedente se reducirá á

$$- d\rho = G du + H dv;$$

y se ve que ρ existirá solamente y, por consiguiente existirán X, Y, Z, cuando la expresión $G du + H dv$ sea una diferencial exacta, lo que se verificará solamente, cuando sea

$$\frac{dG}{du} - \frac{dH}{dv} = 0, \tag{a}$$

ó sea cuando

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \alpha}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \alpha}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial \beta}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial \beta}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial \gamma}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial \gamma}{\partial u} = 0. \quad (3)$$

Recíprocamente: *Si se verifica esta ecuación, se podrá calcular* φ, *salvo una constante, y existirá una infinidad de superficies normales al haz,* PARALELAS *entre sí.*

Tomemos una generatriz del haz por eje de las z, y hagamos $u = \alpha$, $v = \beta$, $z = 0$, la relación (3) tomará la forma

$$-\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{ó} \quad 2q = 0,$$ luego:

1.º *Los puntos principales y los focos se hallan confundidos.*

2.º *Si los planos focales forman un ángulo* φ *con los planos principales, se tendrá* $2\mathrm{R}\,\mathrm{tg}\,\varphi = \infty$ *y por consiguiente, los planos focales y los planos principales coinciden.*

3.º *Los planos focales son rectangulares.*

4.º *Las desarrollables del haz son ortogonales.*

5.º *Las rectas focales son rectangulares y se hallan situadas en los planos focales.*

Recíprocamente, todas estas condiciones suponen que $q = 0$; son pues necesarias y suficientes para que exista la superficie normal.

Por consiguiente las normales á una superficie forman dos sistemas de desarrollables que cortan á la superficie según líneas de curvatura. Estas desarrollables son ortogonales y sus aristas de retroceso forman las superficies focales del haz, que son los lugares de los centros de curvatura principales de la superficie.

CAPÍTULO II

GEOMETRÍA CIRCULAR

§ 1.º COORDENADAS PENTAESFÉRICAS

251. DEFINICIÓN. Un sistema de coordenadas muy útil para la teoría analítica de las líneas de curvatura es el de coordenadas *pentaesféricas*. Sea una esfera cualquiera referida á ejes rectangulares

$$K(x^2+y^2 z^2)+2Ax+2By+2Cz+D=0.$$

Su radio estará dado por la fórmula

$$\rho^2=\frac{A^2+B^2+C^2-DK}{K^2}.$$

Para reducir á una suma de cuadrados al numerador, escribamos la ecuación de la esfera bajo la forma

$$2\alpha x+2\beta y+2\gamma z+\delta\frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{R}$$
$$+\,i\varepsilon\frac{x^2+y^2+z^2+R^2}{R}=0. \qquad (1)$$

Si ρ, x_0, y_0, z_0 expresan el radio y las coordenadas del centro de esta esfera, se obtendrán sus expresiones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} &x_0=\frac{-\alpha R}{\delta+i\varepsilon},\quad y_0=\frac{-\beta R}{\delta+i\varepsilon},\quad z_0=\frac{-\gamma R}{\delta+i\varepsilon},\\ &\rho=\frac{R\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2}}{\delta+i\varepsilon},\ x^2{}_0+y^2{}_0+z^2{}_0-\rho^2=-R^2\frac{\delta-i\varepsilon}{\delta+\varepsilon i}\end{aligned}\right\}(2)$$

Si la esfera no se reduce á un punto, se podrá suponer

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 = 1, \tag{3}$$

y la expresión del radio será $\rho = \dfrac{R}{\delta + i\varepsilon}$.

Si se sustituyen en el primer miembro de (1) las coordenadas de un punto cualquiera, su valor será $\dfrac{S}{\rho}$, expresando S la potencia del punto con relación á la esfera considerada.

Observemos que si la esfera se redujera á un plano, se tendría $\delta + i\varepsilon = 0$, y el primer miembro de (1) se reduciría al doble de la distancia del punto al plano.

Consideremos además de la esfera (1) otra esfera S' expresada por una ecuación análoga

$$2\alpha' x + 2\beta' y + \ldots\ldots = 0.$$

Sean ρ' el radio y x_0, y_0, z_0 las coordenadas del centro. Las fórmulas (2) darán

$$(x_0 - x'_0)^2 + (y_0 - y'_0)^2 + (z_0 - z'_0)^2 - \rho^2 - \rho'^2$$
$$= -\frac{2R^2(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta' + \varepsilon\varepsilon')}{(\delta + i\varepsilon)(\delta + i\varepsilon')};$$

y por consiguiente, la ecuación

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta' + \varepsilon\varepsilon' = 0,$$

expresa la condición necesaria y suficiente para que las dos esferas se corten según ángulo recto. Esta condición subsiste cuando una de las esferas se reduce á un plano. Su forma nos permitirá presentar una teoría sencilla del sistema de cinco esferas ortogonales, dos á dos.

En efecto, sean las cinco esferas (S_1), (S_2). . . . . (S_5) cuyos radios son R_1, R_2, ... R_5; y escribamos sus ecuaciones bajo la forma

$$\left.\begin{array}{l} 2\alpha_n x + 2\beta_n y + 2\gamma_n z + \delta_n \dfrac{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}{R} \\ \qquad + i\varepsilon_n \dfrac{x^2 + y^2 + z^2 + R^2}{R} = 0 \end{array}\right\} (k = 1, 2 \ldots 5). \quad (4)$$

Tendremos, por hipótesis,

$$\alpha^2_n + \beta^2_n + \gamma^2_n + \delta^2_n + \varepsilon^2_n = 1\,; \tag{5}$$

y además, por ser ortogonales las esferas

$$\alpha_n\,\alpha'_n + \beta_n\,\beta'_n + \gamma_n\,\gamma'_n + \delta_n\,\delta'_n + \varepsilon_n\,\varepsilon'_n = 0\,. \tag{6}$$

Estos dos grupos de fórmulas refieren la teoría del sistema de las esferas al de una sustitución lineal ortogonal de cinco variables. Toda sustitución de este género dará un grupo de cinco esferas ortogonales y *viceversa.*

Las relaciones (5) y (6) llevan como consecuencia las siguientes:

$$(7)\quad \alpha^2_1 + \alpha^2_2 + \ldots\ldots + \alpha^2_5 = 1, \quad \alpha_1\beta_1 + \ldots\ldots + \alpha_5\beta_5 = 0 \quad (8)$$

y todas las que se obtendrían sustituyendo, de una manera cualquiera, α y β por α, β, γ, δ, ε.

Si expresamos pues, por S_n la potencia de un punto cualquiera con relación á la esfera (S_n), el primer miembro de la ecuación (4) será $\frac{S_n}{R_n}$. Si se eleva esta ecuación al cuadrado y se suman todas las ecuaciones así obtenidas, resultará, aplicando las fórmulas (7) y (8):

$$\sum_1^5 \left(\frac{S_n}{R_n}\right)^2 = \left(\frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{R}\right)^2$$

$$+\left(\frac{x^2+y^2+z^2+R^2}{Ri}\right)^2 + 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 0.$$

Así pues, existe entre las potencias de un punto cualquiera, con relación á las cinco esferas, la relación homogénea

$$\Sigma\left(\frac{S_n}{R_n}\right)^2 = 0. \tag{9}$$

Y cuando una de las esferas (S_n) se reduce á un plano (P_n), $\frac{S_n}{R_n}$ debe sustituirse por $2P_n$, expresando P_n la distancia del punto

(x, y, z) á este plano. Si se multiplica el primer miembro de (4) por $\delta_n + i\varepsilon_n$, se obtendrá

$$\Sigma(\delta_n + i\varepsilon_n)\frac{S_n}{R_n} = -2R \quad \text{ó} \quad \Sigma \frac{S_n}{R^2_n} = -2, \qquad (10)$$

observando que según la fórmula (1), se tiene

$$\delta_n + i\varepsilon_n = \frac{R}{R_n}.$$

Podemos ahora definir el nuevo sistema de coordenadas. Llamaremos *coordenadas pentaesféricas* de un punto á las cinco cantidades x_n, proporcionales á $\frac{S_n}{R_n}$, y escribiremos $x_n = \lambda \frac{S_n}{R_n}$. (11)

252. RELACIONES FUNDAMENTALES. Resolviendo el sistema

$$\left.\begin{aligned} &2\alpha_n x + 2\beta_n y + 2\gamma_n z + \delta_n \frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{R} \\ &+ i\varepsilon_n \frac{x^2+y^2+z^2+R^2}{R} = \frac{S_n}{R_n} = \frac{x_n}{\lambda}. \end{aligned}\right\} (k=1, 2, \ldots 5) \quad (12)$$

se obtienen las expresiones de x, y, z

$$\left.\begin{aligned} &2\lambda x = \sum_1^5 \alpha_n x_n, \quad \lambda(x^2+y^2+z^2-R^2) = R\sum_1^5 \delta_n x_n \\ &2\lambda y = \sum_1^5 \beta_n x_n, \quad \lambda(x^2+y^2+z^2+R^2) = -iR\sum_1^5 \varepsilon_n x_n, \\ &2\lambda z = \sum_1^5 \gamma_n x_n. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

De las dos últimas resulta

$$2\lambda R = -\Sigma(\delta_n + i\varepsilon_n)x_n.$$

Consideremos además del punto M, otro punto M′, para el que x', y', z' y x'_n se hallan ligadas por las relaciones (12), tendremos

$$\left.\begin{aligned} \overline{MM'}^2 &= (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \\ &= -\frac{\Sigma x_n x'_n}{2\lambda\lambda'} = -\frac{2\Sigma x_n x'_n}{\Sigma \frac{x_n}{R_n} \Sigma \frac{x'_n}{R_n}}, \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

que expresa la distancia $\overline{MM'}$, á la cual se puede dar la forma

$$\overline{MM'}^2 = \frac{\Sigma (x_n - x'_n)^2}{\Sigma \frac{x_n}{R_n} \Sigma \frac{x'_n}{R_n}}. \tag{15}$$

Cuando se hallan infinitamente próximos dos puntos, la expresión del elemento lineal es

$$ds^2 = \frac{\Sigma x_n{}^2}{\left(\Sigma \frac{x_n}{R}\right)^2}. \tag{16}$$

Establezcamos la relación de ortogonalidad en el sistema de coordenadas x_i.

Cuando las coordenadas son funciones de ρ y ρ_1, las curvas (ρ) y (ρ_1) serán perpendiculares, si es nulo el coeficiente de $d\rho\, d\rho_1$, es decir, según (16), en la suma $\Sigma\, dx^2{}_n$. Esta condición se traduce por la relación

$$\Sigma \frac{\partial x_n}{\partial \rho} \frac{\partial x_n}{\partial \rho_1} = 0.$$

Dadas dos superficies por las ecuaciones homogéneas

$$\varphi(x_1, \ldots\ldots, x_5) = 0, \quad \psi(x_1, \ldots\ldots, x_5) = 0,$$

busquemos la condición para que se corten según ángulo recto. Escribiremos las relaciones

$$\left(\frac{\partial S_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_n}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_n}{\partial z}\right)^2 = 4(S_n + R^2{}_n),$$

$$\frac{\partial S_n}{\partial x}\frac{\partial S_{n'}}{\partial x} + \frac{\partial S_n}{\partial y}\frac{\partial S_{n'}}{\partial y} + \frac{\partial S_n}{\partial z}\frac{\partial S_{n'}}{\partial z} = 2(S_n + S_{n'}).$$

Sustituyendo en las ecuaciones homogéneas de las dos superficies las x_i por las cantidades proporcionales $\frac{S_i}{R_i}$, y haciendo, por brevedad,

$$(\varphi, \psi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z},$$

se llega fácilmente (Darboux, obra citada, t. I, pág. 220) á las expresiones

$$(\varphi, \psi) = 4 \Sigma R^2_n \frac{\partial \varphi}{\partial S_n} \frac{\partial \psi}{\partial S_n} = 0, \tag{17}$$

ó introduciendo las cantidades x_i,

$$(\varphi, \psi) = 4 \sum_1^5 \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \frac{\partial \psi}{\partial x_n} = 0. \tag{18}$$

y expresando por V el ángulo según el cual se cortan las dos superficies,

$$\cos V = \frac{\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \frac{\partial \psi}{\partial x_n}}{\sqrt{\Sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right)^2} \sqrt{\Sigma \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_n}\right)^2}}. \tag{19}$$

253. DETERMINACIÓN DE LA ESFERA. La ecuación (14) permite escribir la ecuación de la esfera cuyo radio es ρ y el centro $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$, bajo la forma,

$$2 \Sigma \alpha_n x_n + \rho^2 \Sigma \frac{\alpha_n}{R_n} \Sigma \frac{x_n}{R_n} = 0, \tag{20}$$

ecuación lineal con relación á las coordenadas x_i y, recíprocamente, toda ecuación de la forma

$$\sum_1^5 m_n x_n = 0 \tag{21}$$

representa una esfera ó un plano. Para obtener el centro y el radio, basta identificar las ecuaciones (20) y (21), obteniéndose

$$\mu m_n = 2 \alpha_n + \frac{\rho^2}{R_n} \Sigma \frac{\alpha_n}{R_n} \qquad (k = 1, \ldots., 5)$$

y después de cálculos fáciles, se llega á

$$\alpha_n = m_n - \frac{1}{2R_n} \frac{\Sigma m^2_n}{\Sigma \frac{m_n}{R_n}}, \tag{22}$$

fórmula que da á conocer las coordenadas pentaesféricas.

Una esfera está completamente determinada, cuando se conocen las relaciones de las cinco cantidades m_n, que se llaman *coordenadas homogéneas de la esfera.* Pero si entra en consideración el signo del radio, es necesario introducir otra coordenada, que expresa M. Darboux por

$$im_6 = \sqrt{\sum_1^5 m^2{}_n}, \tag{24}$$

con objeto de que la relación entre las seis coordenadas adopte la forma simétrica

$$\sum_1^6 m^2{}_n = 0; \tag{25}$$ y además se tiene $$\rho = \frac{im_6}{\sum_1^5 \frac{m_n}{R_n}}. \tag{26}$$

Considerando dos esferas (S), (S′), cuyas coordenadas son m_n y m'_n, siendo d la distancia de sus centros, las fórmulas (14) y (22) dan

$$d^2 - \rho^2 - \rho'^2 = \frac{-2\sum_1^5 m_n m'_n}{\sum_1^5 \frac{m_n}{R_n} \sum_1^5 \frac{m'_n}{R_n}}. \tag{27}$$

Definiendo el ángulo V de las dos esferas por la relación

$$d^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos V,$$

se llega, mediante las fórmulas (26) y (27) á

$$\cos V = \frac{\sum_1^5 m_n m'_n}{m_6 m'_6}, \quad 2 \operatorname{sen}^2 \frac{V}{2} = \frac{\sum_1^6 m_n m'_n}{m_6 m'_6}.$$

Sin entrar en más detalles, expuestos en la obra de M. Darboux, consideraremos las ecuaciones de la línea recta

$$qz - ry + p_1 = 0, \quad rx - pr + q_1 = 0, \quad py - qx + r_1 = 0, \tag{28}$$

cuyas seis coordenadas satisfacen á la relación idéntica

$$pp_1 + qq_1 + rr_1 = 0. \tag{29}$$

Referiremos enseguida esta relación cuadrática á la de la esfera, haciendo

$$\left.\begin{aligned} p &= m_1 + im_2, \quad q = m_3 + im_4, \quad r = m_5 + im_6, \\ p_1 &= m_1 - im_2, \quad q_1 = m_3 - im_4, \quad r_1 = m_5 - im_6, \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

ó lo que es igual,

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \frac{p + p_1}{2}, \quad m_3 = \frac{q + q_1}{2}, \quad m_5 = \frac{r + r_1}{2} \\ m_2 &= i\frac{p_1 - p}{2}, \quad m_4 = i\frac{q_1 - q}{2}, \quad m_6 = i\frac{r_1 - r}{2} \end{aligned}\right\}; \qquad (31)$$

y las fórmulas (30) y (31) que conducen á la identidad

$$pp_1 + qq_1 + rr_1 = \sum_1^6 m^2{}_n,$$

hacen corresponder á una recta una esfera. Además, si se consideran dos esferas, cuyas coordenadas son m_n y m'_n y dos rectas correspondientes, cuyas coordenadas son $p, q, \ldots, r; p', q', \ldots, r'$, resulta de la identidad precedente y de la forma lineal de las ecuaciones de correspondencia, la identidad

$$\begin{aligned} (p - p')(p_1 - p'_1) + (q - q')(q_1 - q'_1) \\ + (r - r')(r_1 - r'_1) = \sum_1^6 (m_n - m'_n)^2. \end{aligned}$$

El segundo miembro se anula, cuando las dos esferas son tangentes, y solamente en este caso. El primer miembro se anula, cuando se cortan las dos rectas consideradas. Se ve pues, que la transformación definida por las fórmulas (30) y (31) hace corresponder á dos esferas tangentes dos rectas que se cortan, y *viceversa*.

Por otra parte, vemos que, si se escriben las ecuaciones de la recta bajo la forma

$$x = az + p, \quad y = bz + q, \qquad (32)$$

la condición para que se corten dos rectas, es

$$(a - a')(q - q') - (b - b')(p - p') = 0;$$

y si se hace

$$a = x + yi, \quad b = z + \mathrm{R}, \quad q = x - yi, \quad p = \mathrm{R} - z \quad (33)$$

$$a' = x' + yi, \quad b' = z' + \mathrm{R}', \quad q' = x' - yi, \quad p' = \mathrm{R} - z',$$

resulta $(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 - (\mathrm{R} - \mathrm{R}')^2 = 0,$

fórmulas que hacen corresponder á dos rectas que se cortan dos esferas tangentes, y recíprocamente.

La transformación de Lie hace corresponder al conjunto de las rectas tangentes á una superficie (S) *el conjunto de las esferas tangentes á otra superficie* (S'). *Á todas las rectas tangentes en un punto* M *de* (S) *corresponden todas las esferas tangentes en un punto* M' *de* (S'). *Cuando el punto* M *describe una línea asintótica de* (S), *el punto* M' *describe una línea de curvatura de* (S'). *Por consiguiente, á toda superficie, cuyas líneas asintóticas se sabe determinar, se puede hacer corresponder por la transformación de Lie otra superficie, cuyas líneas de curvatura se conocen y* viceversa.

§ 2.° Líneas de curvatura en coordenadas tangenciales

254. Definición. Sea la ecuación homogénea

$$f(u, v, w, p) = 0 \tag{1}$$

del plano tangente á una superficie. Las coordenadas del punto de contacto son

$$x = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial u}}{\dfrac{\partial f}{\partial p}}, \quad y = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial v}}{\dfrac{\partial f}{\partial p}}, \quad z = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial w}}{\dfrac{\partial f}{\partial p}}, \tag{2}$$

siendo los cosenos directores proporcionales a, u, v, w. La ecuación de las líneas de curvatura

$$du\,(v\,dz - w\,dy) + dv\,(w\,dx - u\,dz) + dw\,(u\,dy - v\,dx) = 0$$

se reduce á
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial p}\, d\,\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u}\, d\,\frac{\partial f}{\partial p} & u & du \\ \frac{\partial f}{\partial p}\, d\,\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\, d\,\frac{\partial f}{\partial p} & v & dv \\ \frac{\partial f}{\partial p}\, d\,\frac{\partial f}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w}\, d\,\frac{\partial f}{\partial p} & w & dw \end{vmatrix} = 0,$$

ó bajo forma más simétrica,
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & d\,\frac{\partial f}{\partial u} & u & du \\ \frac{\partial f}{\partial v} & d\,\frac{\partial f}{\partial v} & v & dv \\ \frac{\partial f}{\partial w} & d\,\frac{\partial f}{\partial w} & w & dw \\ \frac{\partial f}{\partial p} & d\,\frac{\partial f}{\partial p} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Esta ecuación conserva su forma, aunque la ecuación (1) no sea homogénea, siempre que se suponga u, v, w iguales á los cosenos directores de la normal, ligados por la relación $u^2+v^2+w^2=1$, pues si hacemos homogénea esta ecuación, dividiendo u, v, w por $h=\sqrt{u^2+v^2+w^2}$, que es igual á 1, bastará sustituir en (3), por $\partial f : \partial u$, $\partial f : \partial v$, $\partial f : \partial w$ las cantidades

$$\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial h}\frac{u}{h}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial h}\frac{v}{h}, \quad \frac{\partial f}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial h}\frac{w}{h},$$

lo que no cambia el valor del determinante.

255. Caso de dos parámetros. Sean dos parámetros α y β. Las coordenadas del punto contacto del plano tangente satisfacen á las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} &ux+vy+wz+p=0, \\ &x\frac{\partial u}{\partial \alpha} + y\frac{\partial v}{\partial \alpha} + z\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\partial p}{\partial \alpha} = 0, \\ &x\frac{\partial u}{\partial \beta} + y\frac{\partial v}{\partial \beta} + z\frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{\partial p}{\partial \beta} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Las coordenadas de un punto, situado en la normal á la distancia λ de su pie, son

$$X = x + \frac{u\lambda}{h}, \quad Y = y + \frac{v\lambda}{h}, \quad Z = z + \frac{\lambda w}{h},$$

siendo
$$h = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Sustituyamos en las ecuaciones (1), y tendremos

$$\left.\begin{aligned} &uX + vY + wZ + p = h\lambda, \\ &X\frac{\partial u}{\partial \alpha} + Y\frac{\partial v}{\partial \alpha} + Z\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\partial p}{\partial \alpha} = \lambda\frac{\partial h}{\partial \alpha}, \\ &X\frac{\partial u}{\partial \beta} + Y\frac{\partial v}{\partial \beta} + Z\frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{\partial p}{\partial \beta} = \lambda\frac{\partial h}{\partial \beta}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

fórmulas que definen el punto considerado de la normal.

Para hallar la ecuación diferencial de las líneas de curvatura, escribiremos que existe una mutación para la cual el punto, correspondiente á un valor convenientemente elegido de λ, describe una curva tangente á la normal, es decir, para el que se tiene

$$\frac{dX}{u} = \frac{dY}{v} = \frac{dZ}{w} = d\theta, \tag{3}$$

introduciéndose $d\theta$ para la homogeneidad. Diferenciando las ecuaciones (2), la primera dará

$$udX + vdY + wdZ + Xdu + Ydv + Zdw + dp = \lambda dh + hd\lambda,$$

ó teniendo presente las (3) y las dos siguientes,

$$h^2 d\theta = hd\lambda, \quad d\lambda = hd\theta, \tag{4}$$

la diferenciación de las dos últimas (2) conduce á

$$\left.\begin{aligned} &Xd\frac{\partial u}{\partial \alpha} + Yd\frac{\partial v}{\partial \alpha} + Zd\frac{\partial w}{\partial \alpha} + d\frac{\partial p}{\partial \alpha} = \lambda d\frac{\partial h}{\partial \alpha}, \\ &Xd\frac{\partial u}{\partial \beta} + Yd\frac{\partial v}{\partial \beta} + Zd\frac{\partial w}{\partial \beta} + d\frac{\partial p}{\partial \beta} = \lambda d\frac{\partial h}{\partial \beta}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

La eliminación de X, Y, Z entre (2) y (5) conduce á

$$\begin{vmatrix} u & \dfrac{\partial u}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial u}{\partial \beta} & d\,\dfrac{\partial u}{\partial \alpha} & d\,\dfrac{\partial u}{\partial \beta} \\ v & \dfrac{\partial v}{\partial \alpha} & \dots & \dots & \dots \\ w & \dfrac{\partial w}{\partial \alpha} & \dots & \dots & \dots \\ p & \dfrac{\partial p}{\partial \alpha} & \dots & \dots & \dots \\ h & \dfrac{\partial h}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial h}{\partial \beta} & d\,\dfrac{\partial h}{\partial \alpha} & d\,\dfrac{\partial h}{\partial \beta} \end{vmatrix} = 0.$$

256. SISTEMA EMPLEADO POR BONNET. Cuando se estudia la representación esférica, es natural buscar la definición geométrica de las curvas de la superficie que admite por representación esférica las diferentes generatrices rectilíneas de la esfera. Sea g una de estas generatrices, que cortan al círculo del infinito en un punto μ. La curva correspondiente en la superficie será el lugar de los puntos de contacto de los planos tangentes paralelos á g, es decir, será la curva de contacto del cono, cuyo vértice es μ, circunscrito á la superficie. Estas curvas de contacto de los conos circunscritos, cuyos vértices se encuentran en el infinito, tienen una propiedad importante, respecto á las líneas de curvatura. Desde luego pasan dos por cada punto M de la superficie. Porque si A y B son los puntos en que el plano tangente en M corta al círculo del infinito, los conos circunscritos, cuyos vértices son A y B, serán tangentes á la superficie según dos curvas que pasan por M.

Las conjugadas de estas dos curvas de contacto son las generatrices de los dos conos, es decir, las dos rectas de longitud nula del plano tangente MA, MB. Pero estas dos rectas se hallan situadas simétricamente con relación á dos tangentes perpendiculares cualesquiera y, en particular, respecto á las líneas de curvatura; y sucederá lo mismo á sus conjugadas, que son las tangentes á las dos curvas de contacto.

Tendremos pues, el

TEOREMA. *Las curvas de contacto de los conos circunscritos, cuyos vértices se hallan en el círculo del infinito, determinan en la superficie un sistema de coordenadas curvilíneas, que admiten por imagen esférica al sistema de generatrices rectilíneas de la esfera. Las tangentes á las dos curvas coordenadas, que pasan por un punto cualquiera de la superficie, admiten por bisectrices las direcciones de las líneas de curvatura.*

Por consiguiente, la ecuación de las líneas de curvatura podrá reducirse á la forma simple

$$A d\alpha^2 + C d\beta^2 = 0,$$

que no contiene término en $d\alpha\, d\beta$.

Para verificar este resultado, consideremos los cosenos directores de la normal c, c', c'' en el punto M de la superficie, que serán las coordenadas del punto m en la representación esférica. Sus expresiones son

$$c = \frac{1-\alpha\beta}{\alpha-\beta}, \quad c' = i\,\frac{1+\alpha\beta}{\alpha-\beta}, \quad c'' = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}. \tag{1}$$

La ecuación del plano tangente será

$$cx + c'y + c''z + \frac{\xi}{\alpha-\beta} = 0, \tag{2}$$

ó más sencillamente

$$(1-\alpha\beta)\,x + i\,(1+\alpha\beta)\,y + (\alpha-\beta)\,z + \xi = 0,$$

siendo $u = 1-\alpha\beta$, $v = i\,(1+\alpha\beta)$, $w = \alpha+\beta$, $p = \xi$.

La aplicación de las fórmulas (1, pág. 424) da

$$x - iy = \frac{q-p}{\alpha-\beta}, \quad x + iy = \frac{\alpha^2 p - \beta^2 q}{\alpha-\beta} - \xi, \quad z = \frac{\beta q - \alpha p}{\alpha-\beta},$$

siendo p y q las derivadas primeras de ξ; y si expresamos por r, s, t las derivadas segundas, la ecuación de las líneas de curvatura se reducirá á

$$dp\,d\alpha - dq\,d\beta = r\,d\alpha^2 - t\,d\beta^2 = 0; \tag{3}$$

y las fórmulas (2) y (5) de la pág. 425, dan

$$\left.\begin{aligned}
2R &= (S+\sqrt{rt})(\alpha-\beta)+p-q,\\
X-iY &= s+\sqrt{rt},\\
2Z &= (\alpha+\beta)(s+\sqrt{rt})-p-q,\\
X+iY &= -\alpha\beta(s+\sqrt{rt})+\alpha p+\beta q-\xi,
\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

expresando X, Y, Z, R las coordenadas del centro y el radio de curvatura.

En estas fórmulas se ha escrito $\sqrt{\dfrac{r}{t}}$ en vez de $\dfrac{d\beta}{d\alpha}$, de manera que $\sqrt{rt}$ se escribe en vez de $t\dfrac{d\beta}{d\alpha}=r\dfrac{d\alpha}{d\beta}$.

§ 3.° TRANSFORMACIONES

257. INVERSIONES. Si O es el polo de la inversión y p la potencia de la transformación, la esfera Σ de radio $\sqrt{p}$ y centro O es el lugar de los puntos coincidentes con sus transformados.

Para obtener el inverso de un punto M, se trazará el diámetro OM de la esfera Σ, que corta á ésta en dos puntos P y Q; y se tomará en este diámetro un punto M′ tal, que sea

$$OM \,.\, OM' = p = \overline{OP}^2 = \overline{OQ}^2.$$

Es decir, que M′ y M *dividen armónicamente* al diámetro PQ.

258. TRANSFORMACIÓN DE HIRST. Si en vez de una esfera se toma una cuádrica Σ cualquiera, y tomamos por O un punto fijo cualquiera; para construir la transformada de un punto M, se trazará OM, que cortará á Σ en dos puntos P y Q, y se tomará el punto M′ conjugado armónico de M con relación al segmento PQ.

Basta efectuar una homografía en la que la traza de Σ sobre el plano polar de O se reduzca al círculo imaginario del infinito, para pasar á la inversión, pues por esta transformación, Σ se reduce á una esfera Σ', cuyo centro O′ es el homólogo del punto O.

La transformación de Hirst comprende dos transformaciones particulares, diferentes de la inversión. Si en efecto, la cuádrica Σ es un cono ó un par de planos, la reducción á la inversión por homografía no es ya posible, porque Σ no es ya la transformada homográfica de una esfera. Pero en compensación, si Σ es un cono, se puede reducir Σ, por una homografía, á ser un cono isótropo, y un par de planos isótropos, si Σ es un par de planos.

En los dos casos, la transformación de Hirst toma una forma métrica diferente de la inversión, también interesante. Si en la transformación de Hirst, Σ es un cono isótropo cuyo vértice es A, el punto M′ transformado del M se halla sujeto á la doble condición: 1.ª Que M y M′ estén alineados con un punto fijo O. 2.ª Que el cono isótropo divida armónicamente al segmento MM′, es decir, que las rectas AM y AM′ sean conjugadas en este cono isótropo, ó rectangulares.

Podemos pues decir, que el punto M′ transformado del M, se halla definido por esta doble condición: 1.ª Que M y M′ están alineados con el punto O. 2.ª Que el segmento MM′ se ve desde el punto A según un ángulo recto.

En el segundo caso de la degeneración de Σ en dos planos, es necesario sustituir á la segunda condición, la siguiente: que los planos trazados por M y M′ y por la recta, intersección de los dos planos, sean rectangulares.

259. Simetría con relación á un plano. Supongamos que la esfera directriz Σ de una inversión se agranda indefinidamente, hasta convertirse en un plano π.

Para ver á qué se reduce la inversión, en este caso, consideremos el punto M por transformar; el diámetro de la esfera que parte de M se convierte en la perpendicular bajada desde M al plano π. De los dos extremos P y Q de este diámetro, el uno P es el pie de esta perpendicular y el otro Q se halla en el infinito. Pero como el punto M′, transformado del M, es el conjugado armónico de M, respecto al segmento PQ, será necesario, en este caso, por estar Q en el infinito, que P sea el punto medio de MM′, por lo tanto, que M′ sea el simétrico de M con relación al plano π.

TEOREMA. *Si dos figuras* F *y* F' *son simétricas con relación á un plano* π, *una inversión* I *cualquiera las cambia en dos figuras* Φ, Φ', *que son inversas entre sí con relación á la esfera* Σ, *transformada del plano* π *en la inversión* I.

En efecto, sean M y M' un punto de F y su simétrico, que forma parte de F'.

Toda esfera trazada por M y M' tiene su centro en el plano π, siendo por tanto ortogonal á este plano. Llamamos μ y μ' á los inversos de los puntos M y M' en la inversión I. Las esferas trazadas por M y M' tienen por inversas á las esferas trazadas por μ y μ'. Siendo las primeras ortogonales al plano π, las segundas lo serán á la esfera Σ, inversa del plano π. Esto exige que el centro O de la esfera Σ se halle en el eje radical $\mu\mu'$ de todas estas esferas y que además, expresado R el radio de Σ, se tenga

$$O\mu \,.\, O\mu' = R^2.$$

260. SISTEMAS DE ESFERAS. Sea la ecuación de una esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + 2\delta = 0.$$

A las cantidades α, β, γ, δ se las puede llamar *coordenadas de una esfera en el espacio*. Una ecuación entre α, β, γ, δ sujeta á la esfera á una condición.

El ejemplo más sencillo está dado por la ecuación de primer grado

$$A\alpha + B\beta + B\gamma + D\delta + E = 0.$$

Esta ecuación equivale á decir que:

La esfera α, β, γ, δ *es ortogonal á una esfera fija.*

En efecto; tomemos una esfera α_0, β_0, γ_0, δ_0. La condición de ortogonalidad de las dos esferas consideradas, se escribe así:

$$\alpha_0 \alpha + \beta_0 \beta + \gamma_0 \gamma - \delta - \delta_0 = 0.$$

Si pues D no es nulo, se puede identificar esta ecuación con la ecuación lineal precedente, haciendo

$$\alpha_0 = -\frac{A}{D}, \quad \beta_0 = -\frac{B}{D}, \quad \gamma_0 = -\frac{C}{D}, \quad \delta_0 = \frac{E}{D},$$

noción desarrollada por Lie y Daboux.

Si D = o, se tiene solamente

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + E = o,$$

ecuación que expresa que el centro de la esfera α, β, γ, δ está en un plano, y es por consiguiente ortogonal á éste. Así, cuando D = o, la esfera á la que son ortogonales todas las esferas (α, β, γ, δ) se reduce á un plano.

Observemos que si $\alpha^2_0 + \beta^2_0 + \gamma^2_0 - 2\delta_0 = o$, ó lo que es lo mismo, si

$$A^2 + B^2 + C^2 - 2ED = o,$$

la esfera fija se reduce á un punto, y todas las esferas (α, β, γ, δ) pasan por este punto.

La interpretación de las ecuaciones en α, β, γ, δ es más complicada cuando el grado de estas ecuaciones es superior al primero. Diremos que las esferas cuyas coordenadas α, β, γ, δ verifican á una ecuación de grado m, $F(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = o$, forman un sistema de grado m.

§ 4.º Propiedades de las superficies analagmáticas

261. Consideraciones preliminares. Conviene ante todo recordar algunas ideas expuestas por Transon y Laguerre.

Según Poncelet, todas las circunferencias trazadas en un plano pasan por dos puntos fijos imaginarios, situados en la recta del infinito, á los que Laguerre llamó *umbílicos del plano*, I, J.

Recta isótropa es toda recta que pasa por uno de los puntos I, J. El conjunto de estas rectas forma dos sistemas distintos, el uno compuesto de rectas paralelas entre sí, que pasan por I, el otro compuesto de rectas paralelas entre sí, que pasan por J.

Por cada punto de un plano pasan dos reetas isótropas de sistema diferente, cuyo conjunto forma una circunferencia de radio nulo. En un plano real, toda recta isótropa contiene un punto real y solo uno, en el que corta á la recta isótropa, que le es imaginariamente conjugada.

Si por un punto fijo, real ó imaginario, se trazan diversos planos, cada uno de éstos contiene dos rectas isótropas, que pasan por el punto fijo.

Las rectas así obtenidas se hallan situadas en un mismo cono de segundo grado, que puede considerarse como una esfera de radio nulo, cuyo centro es el punto fijo, el *cono isótropo*, formado por todas las rectas isótropas que pasan por dicho punto, y todos los conos isótropos cortan al plano del infinito según una misma cónica, común á todas las esferas trazadas en el espacio, la *umbilical.*

Por una recta se pueden trazar dos planos tangentes á la umbilical, los *planos isótropos*. El par de estos planos isótropos que pasan por una recta dada, se halla cortado por un plano perpendicular á la recta según dos rectas isótropas. Por una recta isótropa solo puede pasar un plano isótropo, porque esta recta corta al plano del infinito en un punto de la umbilical.

Esto sentado, si consideramos un punto imaginario a del espacio y su conjugado a', por cada uno de ellos podremos concebir que pasa un cono isótropo, y estos dos conos se cortarán según una circunferencia real A, cuyo plano será perpendicular á la recta real que une á dichos dos puntos imaginarios conjugados a y a'. El centro de dicha circunferencia será el punto real O, medio del segmento aa'; y si la distancia Oa se representa por Ri, su radio tendrá el valor real R.

Los dos puntos imaginarios a y a' determinan completamente la circunferencia A, y recíprocamente, dado un círculo real A, por éste sólo puede hacerse pasar dos conos isótropos, cuyos vértices son los puntos a y a'. La posición de dicho círculo en el espacio determina pues, los dos puntos a y a'; y diremos que el círculo A determinado así, es el *círculo representativo* del par de puntos imaginarios a y a'. Dichos círculo y par de puntos pueden expresarse por las notaciones (A) y (a, a').

Consideremos en el espacio una curva geométrica cualquiera, real ó por lo menos, definida por ecuaciones reales, es decir, tal, que cuando pasa por un punto imaginario, pasa también por el imaginario conjugado.

Dado un círculo real del espacio, este circulo representa un par de puntos imaginariamente conjugados. Y para que estos puntos pertenezcan á la curva dada, es necesario que este círculo satisfaga á ciertas condiciones determinadas por la naturaleza de la curva.

Laguerre aplica estas consideraciones generales (*) al estudio de las superficies analagmáticas de cuarto orden, que Moutard definió como superficies que tienen la *umbilical* como línea doble, ó como envolventes de esferas cuyos centros recorren una superficie de segundo grado A que cortan ortogonalmente á una esfera fija S, esfera directriz de la superficie, cuyo centro es un polo principal de la analagmática engendrada.

Laguerre modificó esta definición de la manera siguiente: Se traza á la superficie de segundo grado A un plano tangente cualquiera que corta á la esfera directriz S según un círculo; se pueden hacer pasar dos conos *isótropos*, cuyos vértices son evidentemente dos puntos recíprocos con relación á la esfera directriz. Estos dos puntos engendran la superficie analagmática, envolvente de las esferas, cuyos centros se hallan en la superficie A y que cortan ortogonalmente á la esfera directriz, cuando el plano tangente toma todas las posiciones posibles en la superficie A.

Y, habiendo Moutard demostrado, que la superficie así definida, puede engendrarse de cinco maneras diferentes por medio de cinco superficies de segundo orden A, A_1, A_2, A_3, A_4 y de cinco esferas directrices correspondientes á estas superficies, teniendo la superficie analagmática cinco polos principales de transformación, Laguerre da el modo de hallarse relacionadas las superficies de segundo orden que pueden servir para la generación de una alagmática dada y cómo se refieren geométricamente á las focales de esta analagmática (**), de manera que conocido uno de los cinco modos de generación, se determinan inmediatamente los otros cuatro; como sigue: *Circunscríbase una desarrollable á la superficie de segundo orden y á la esfera correspondiente. Las cuatro líneas dobles de esta desarrollable pertenecerán á las cuatro superficies de segun-*

(*) *Mémoire sur l'emploi des imaginaires, etc.* (Nouv. Ann. 1872)
(**) *Sur quelques propiétés des surfaces anallag.* (Soc. phil. 1868)

do orden, homofocales á la primera, que serán las superficies de los otros cuatro modos de generación (*).

Observación. No deja de tener interés para seguir esta teoría resumir las ideas fundamentales expuestas por Moutard en su *Note sur la transformation par rayons vecteurs réciproques* (Nouv. ann. de Math. 1864, pág. 306), y en su trabajo *Sur les surfaces anallagmatiques*, publicado también en la pág. 536-539.

«La transformación de una superficie por radios vectores recíprocos da en general una transformada de grado doble, quedando tan solo exceptuada esta regla cuando la superficie propuesta contiene el *círculo del infinito* ó el polo de transformación. Sea 1.° m el grado de una superficie. 2.° p el grado de multiplicidad del polo, es decir, el número de puntos de intersección de la superficie con una transversal cualquiera, trazada desde este polo, que se hallan confundidos en este punto ($p=0$ para un polo exterior). 3.° q el grado de multiplicidad del círculo del infinito, es decir, el número de hojas de la superficie que lo contienen. 4.° m', p', q' números análogos á los precedentes, relativos á la superficie transformada por radios vectores recíprocos.

Estos seis números se hallan ligados por las tres relaciones

$$m' = 2m - p - 2q, \quad p' = m - 2q, \quad q' = m - p - q$$

y sus equivalentes

$$m = 2m' - p' - 2q', \quad p = m' - 2q', \quad q = m' - p' - q'.$$

Cuando $p + 2q = m$, la transformación no altera ni el grado de la superficie, ni el grado de multiplicidad del polo, ni el grado de multiplicidad del círculo del infinito.»

Propone Moutard enseguida llamar superficies *analagmáticas* á las que gozan de la propiedad de transformarse en sí mismas, por una elección conveniente del polo y del parámetro de transformación, llamando *polo principal* al polo para el que se realiza esta condición, *esfera principal* á la esfera cuyo centro es un polo prin-

(*) *Sur quelques propiétés des surfaces anallagmatiques* (Soc. phil. 1868).

cipal y cuyo radio es la raíz cuadrada del parámetro correspondiente de transformación.

Observando además que toda superficie analagmática puede definirse como el lugar de las intersecciones sucesivas de una esfera, sujeta á cortar ortogonalmente á la esfera principal, cuyo centro describe una superficie directriz fija; y cuando la superficie directriz admite generatrices rectilíneas, la propuesta admite generatrices circulares; cuando aquélla es desarrollable, uno de los sistemas de líneas de curvatura de la propuesta consiste en circunferencias.»

«Además, las superficies de tercer orden, que contienen el círculo del infinito, y las de cuarto orden, que contienen á este círculo como línea doble, son en general analagmáticas con relación á cinco polos diferentes, entre los que son reales tres, por lo menos. Las cinco esferas principales se cortan ortogonalmente, dos á dos, resultando que la recta de unión de dos de los polos es perpendicular al plano de los otros tres, ó que, cada uno de los tetraedros, cuyos vértices son cuatro polos principales, tienen sus alturas concurrentes en un punto, que es el quinto polo principal. Y si se toma por polo de transformación la intersección de las alturas, de una de las caras de estos tetraedros, con un parámetro conveniente de transformación, la transformada es simétrica de la propuesta con relación á la cara del tetraedro. Llamando á dicho punto *polo secundario*, se ve que existen, en general, diez polos secundarios para las analagmáticas de tercero y cuarto orden. En las del tercero, los cinco polos principales y los diez polos secundarios se hallan en la superficie.»

Citaremos entre las conclusiones expuestas en las notas de Moutard que, siendo *una línea focal* de la superficie analagmática, la intersección de cada *superficie directriz* con la *esfera principal* correspondiente, cuando dos superficies analagmáticas tienen una línea focal común, tienen los mismos cinco polos principales y las mismas cinco líneas focales, que son homofocales. Dos superficies analagmáticas de cuarto orden se cortan según ángulo recto; su línea de intersección es una línea de curvatura en cada una de ellas.

Por todo punto del espacio es posible trazar tres superficies analagmáticas de cuarto orden que tengan una línea focal dada. Para obtener sus directrices, basta construir las tres superficies de segundo orden que contienen la línea focal, siendo tangentes al plano, lugar de los puntos de igual potencia respecto á la esfera principal y al punto dado.»

Entre las cinco superficies directrices homofocales de una superficie analagmática dada de cuarto orden, existe un hiperboloide de una hoja, y pueden existir tres.»

También es oportuno recordar el trabajo de M. Darboux, inserto en el mismo tomo de Nouv. ann. (págs. 156-165), *Sur les sections du tore*, donde considera la superficie recíproca de un cono que comprende como casos particulares el toro y la ciclida.

Citaremos solamente los siguientes resultados:

Cuando se transforma el toro por radios vectores recíprocos, tomando el polo de transformación en el interior de la superficie, existen dos esferas inscritas, que pasan por el polo y que se transforman en planos. La ciclida podrá considerarse como la envolvente de las esferas tangentes á dos planos y á una tercera esfera. Pero los dos planos tangentes á las esferas inscritas, que pasan por el polo, cortan al toro según dos curvas que tienen un foco en el polo de transformación. Así pues, las recíprocas de estas curvas serán óvalos de Descartes; luego

Cuando la ciclida pueda considerarse como la envolvente de las esferas tangentes á una esfera y á dos planos, se tendrán dos secciones planas paralelas á estos dos planos que darán los óvalos de Descartes.»

262. Definiciones. Sea una superficie que tiene las propiedades de ser su inversa con relación á una esfera Σ cuyo centro es O y el radio $\sqrt{\rho}$. Si se toma un punto M en la superficie, el radio vector OM debe cortarla en un punto M′ tal, que

$$OM \cdot OM' = \rho.$$

El lugar de M y el de M′ son dos hojas de superficie, inversas entre sí. Los planos tangentes en M y M′ á la superficie deberán formar ángulos iguales con el radio vector OMM′. Pero se puede dar á este teorema un enunciado más preciso y útil.

Tracemos por M la esfera Ω, tangente á la superficie, y que además sea ortogonal á la esfera Σ. Esta esfera Ω va á conservarse en la inversión que admite á Σ como esfera directriz. Pasará pues por el punto M′, y puesto que es tangente en M á una hoja de la superficie A, debe ser tangente en M′ á la hoja inversa. Resulta pues el

TEOREMA. *Si* M *y* M′ *son dos puntos correspondientes de dos hojas inversas de la superficie* A, *existe una misma esfera* Ω, *tangentes á la vez en* M *y en* M′ *á estas hojas. Además* Ω *es ortogonal á la esfera directriz* Σ.

263. CASOS. Distinguiremos dos casos, según que la esfera Ω dependa de dos ó de un parámetro.

En el primer caso, la superficie será la envolvente de una familia de esferas dependientes de dos parámetros y sujetas á permanecer ortogonales á una esfera Σ.

En el segundo caso, la superficie será una envolvente de esferas dependiente de un solo parámetro y ortogonales á la esfera Σ.

Estos dos casos son esencialmente distintos, pues en el segundo, las superficies son tangentes á sus esferas envolventes á lo largo de una circunferencia, lo que atribuye á estas superficies una familia de líneas de curvatura circulares.

Examinemos el primer caso. Las esferas Ω están sujetas á ser ortogonales á una esfera fija Σ y, en segundo lugar, á formar parte de un sistema $F(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0$, puesto que estas esferas dependen tan solo de dos parámetros. Si Σ es una verdadera esfera, no degenerada en un plano, y siendo

$$\alpha_0 \alpha + \beta_0 \beta + \gamma_0 \gamma - \delta - \delta_0 = 0$$

la condición de ortogonalidad, se podrá obtener δ por medio de esta ecuación, y $F = 0$ se reducirá á $\Phi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$.

Se puede pues, en este caso, definir las esferas Ω diciendo, que son esferas sujetas á tener su centro en cierta superficie D y á permanecer ortogonales á una esfera fija Σ. La superficie D se llama *deferente* y la esfera Σ, *esfera directriz*.

Este modo de generación no tiene significado, si la esfera Σ se reduce á un plano. Este plano es entonces el lugar del centro. La condición de ortogonalidad tiene la forma

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + E = 0,$$

y de la ecuación $F(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0$ no puede desaparecer δ. La noción de sistema tiene la ventaja de aplicarse á todos los casos.

TEOREMA RECÍPROCO. *Las esferas de dos parámetros, que permanecen ortogonales á una esfera fija Σ, envuelven á una superficie analagmát ca.*

Sean una esfera Ω y dos esferas próximas Ω' y Ω''. Estas tres esferas se cortan en dos puntos M, M', y como o, centro de Σ, tiene la misma potencia p en estas tres esferas, es necesario que o esté en el eje radical MM'. Además, se tiene

$$OM \cdot OM' = p.$$

Pero M y M' son los dos puntos en que la esfera Ω es tangente á su envolvente A. Se ve, por esta relación, que las dos hojas de esta envolvente son inversas entre sí con respecto á la esfera Σ.

El teorema queda demostrado. Pero se observará que si I es el centro de la esfera Ω é I', I'' los de las esferas próximas Ω' y Ω'', las mutaciones II', II'' se verifican en el plano tangente en I á la superficie deferente, lugar de este centro I. Llamemos π á este plano tangente, que por ser el plano de los centros de las tres esferas Ω, Ω', Ω'', es normal á la cuerda común MM' en su medio P. Así, el plano trazado por el medio P de MM' normalmente á esta recta MM', es tangente en el punto I á la superficie deferente.

Sean $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0)$ las coordenadas de la esfera Σ, cuya ecuación será

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha_0 x - 2\beta_0 y - 2\gamma_0 z + 2\delta_0 = 0;$$

y sean x, y, z las coordenadas del punto M, x', y', z' las del M'. Hagamos, por brevedad,

$$p = R^2_0 = \alpha^2_0 + \beta^2_0 + \gamma^2_0 - 2\delta_0.$$

Se ve que R_0 es el radio de la esfera Σ y p la potencia de inversión.

Puesto que los puntos (x, y, z), (x', y', z'), $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ están en línea recta, tenemos

$$\frac{x'-\alpha_0}{x-\alpha_0}=\frac{y'-\beta_0}{y-\beta_0}=\ldots=\frac{\sqrt{(x'-\alpha_0)^2+(y'-\beta_0)^2+(z'-z_0)^2}}{\sqrt{(x-\alpha_0)^2+(y-\beta_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

$$=\frac{p}{(x-\alpha_0)^2+(y-\beta_0)^2+(z-\gamma_0)^2}. \quad (1)$$

La ecuación del plano trazado por el punto

$$P\left(\frac{x+x'}{2},\ \frac{y+y'}{2},\ \frac{z+z'}{2}\right),$$

normalmente á MM′, es

$$(x-\alpha_0)\left(X-\frac{x+x'}{2}\right)+(y-\beta_0)\left(Y-\frac{y+y'}{2}\right)$$

$$+(z-\gamma_0)\left(Z-\frac{z+z'}{2}\right)=0,$$

ó bien, $\quad (x-\alpha_0)\,X+(y-\beta_0)\,Y+(z-\beta_0)\,Z$

$$-\frac{1}{2}\left[(x+x')(x-\alpha_0)+(y+y')(y-\beta_0)+\ldots\ldots\right]=0$$

El término independiente se reduce á

$$x^2+y^2+z^2-\alpha^2_0-\beta^2_0-\gamma^2_0+(x'-\alpha_0)(x-\alpha_0)+\ldots\ldots$$

Además, de la fórmula (1) resulta

$$(x'-\alpha_0)(x-\alpha_0)+(y'-\beta_0)(y-\beta_0)+(z'-\gamma_0)(z-\gamma_0)=p,$$

lo que conduce á la expresión siguiente del plano normal en P,

$$(x-\alpha_0)\,X+(y-\beta_0)\,Y+(z-\gamma_0)\,Z-\frac{1}{2}(z^2+y^2+z^2-2\delta_0)=0.$$

Y si se da la ecuación tangencial de la superficie deferente $\Phi(\xi, \eta, \zeta, \tau)=0$, que expresa que el plano $\xi x+\eta y+\zeta z+\tau t=0$ es tangente á la superficie; puesto que este plano debe ser tangente en I á la superficie, deberemos tener

$$\Phi\left(x - \alpha_0,\ y - \beta_0,\ z - \gamma_0,\ \delta_0 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}\right) = 0,$$

relación á que deben satisfacer las coordenadas (x, y, z) de todo punto M de la superficie analagmática. Así: *Dada la ecuación tangencial de la superficie deferente, se puede escribir, sin ningún cálculo, la ecuación de la superficie analagmática.*

Otra definición. Sea Ω una de las esferas envueltas, I su centro, π el plano tangente en I á la deferente y OMM′ la perpendicular á este plano tangente, trazada por el centro de la esfera directriz. Los puntos de contacto de la esfera Ω con la analagmática envolvente A son los puntos M y M′ en que esta perpendicular encuentra á Ω. El plano π corta á la esfera Σ según una circunferencia K, cuyos eje y centro son OMM′, y P, medio de MM′. Las dos esferas cuyos centros son M y M′, que pasan por la circunferencia K, tienen igual radio, y este es nulo.

En efecto, siendo λ este radio, puesto que el plano π del círculo K se halla á una distancia OP del centro de la esfera Σ; representando por p el cuadrado del radio de esta esfera y por ρ el radio del círculo K, se tiene

$$p = \rho^2 + \overline{\mathrm{OP}}^2; \quad \text{y se tendrá también} \quad \lambda^2 = \mathrm{PM}^2 + \rho^2,$$

puesto que el círculo K resulta de la sección de la esfera cuyo centro es M, y el radio λ, por un plano trazado á la distancia MP de su centro Resulta pues,

$$p - \lambda^2 = \mathrm{OP}^2 - \mathrm{PM}^2 = (\mathrm{OP} + \mathrm{PM})(\mathrm{OP} - \mathrm{PM}) = \mathrm{OM}.\mathrm{OM}' = p;$$

luego $\lambda^2 = 0$.

Los puntos M, M′ son pues centros de dos esferas de radio nulo, que se pueden trazar por la circunferencia K, traza de la esfera Σ sobre el plano π, tangente á la superficie deferente. Así pues, tendremos el

Teorema. *Si se hace rodar un plano π sobre una superficie* D *y se toma la circunferencia* K, *traza del plano π sobre una esfera* *fija Σ, el lugar de los centros* M, M′ *de las esferas de radio nulo que pasan por el círculo* K *constituye las dos hojas de la superficie analagmática, que admite á* D *por superficie deferente y á* Σ *por esfera directriz.*

264. Generalidades sobre las superficies analagmáticas. Siendo las superficies analagmáticas superficies envolventes de una esfera variable que permanece ortogonal á una esfera fija (S), cuyo centro describe la deferente (B), si M es un punto de la deferente y (P) el plano tangente en este punto, la esfera cuyo centro es M, ortogonal á (S), será tangente á su envolvente en dos puntos *m* y *m′* colocados simétricamente con relación al plano P, y la recta *mm′* pasa por el centro O de (S).

En efecto, todas las esferas doblemente tangentes cuyos centros están próximos al punto M, podrán considerarse como que tienen sus centros en el plano tangente (P), y cortándose en los dos puntos buscados *m* y *m′*. El eje radical *mm′* de todas estas esferas que cortan según ángulo recto á la esfera directriz (S), pasa pues por el punto O.

Por consiguiente: *Los puntos de contacto* m *y* m′ *de cada esfera cuyo centro es* M, *doblemente tangente á la analagmática, se hallan en la perpendicular bajada desde el centro* O *de la esfera directriz al plano tangente á la deferente del punto* M, *siendo*

$$\mathrm{Om} \,.\, \mathrm{Om}' = \mathrm{R}^2,$$

fórmula en la que R *es el radio de la esfera directriz.*

Pudiéndose considerar una analagmática como el lugar de los centros de las esferas de radio nulo, que pasan por la intersección de la esfera directriz y de los planos tangentes á la deferente, los puntos *m* y *m′* serán reales tan solo, cuando el plano (P), tangente en M, encuentre á la esfera directriz; luego si se circunscribe á la deferente B y á la esfera (S) una desarrollable, la curva de contacto de esta desarrollable y de la deferente dividirá á ésta en regiones, para cada una de las cuales el plano tangente cortará siempre ó no cortará nunca á la esfera directriz.

Las regiones de (B), para las que el plano tangente no corta á la esfera (S) dan, ellas tan solo, puntos reales de la analagmática, originando una hoja de igual conexión que la región de que se derive. No obstante, para que esta conclusión sea exacta, es necesario considerar la región de (B), de la que se deriva la hoja de la analagmática, como formada por dos hojas distintas, que se reunen mutuamente en el contorno de esta región.

Sea μ un punto al que se hacen corresponder los dos puntos m y m', centros de las esferas de radio nulo que pasan por la intersección de (S) y del plano polar de μ [con relación á (S)].

Los puntos m y m' serán reales solamente cuando μ sea interior á la esfera (S); m, m' y μ estarán en línea recta con el centro O de (S), y se tendrá

$$Om \,.\, Om' = R^2, \quad Om + Om' = \frac{2R^2}{O\mu}.$$

Si el radio de la esfera (S), que tiene su centro real, es $k\sqrt{-1}$, los puntos m y m' siempre reales, se hallarán á uno y otro lado de O, y se tendrá:

$$Om \,.\, Om' = -R^2, \quad Om + Om' = \frac{-2R^2}{O\mu},$$

En este modo de transformación, á una superficie (B′), lugar del punto μ, corresponde una superficie analagmática (Σ), cuya esfera directriz es (S) y cuya deferente es la polar (B) de B′ con relación á (S).

Para obtener las fórmulas que definen esta transformación, tomemos por origen de coordenadas el centro O de la esfera directriz, cuyo radio es R, y sean x, y, z las coordenadas del punto m; las del punto m' serán

$$\frac{R^2 x}{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{R^2 y}{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{R^2 z}{x^2+y^2+z^2}.$$

El plano polar del punto μ debe ser el lugar de los puntos equidistantes de m y m'.

Expresando esta propiedad, la ecuación de dicho plano será

$$2Xx + 2Yy + 2Zz = R^2 + x^2 + y^2 + z^2.$$

Si pues x, y, z son las coordenadas del punto μ, las fórmulas que definen la transformación serán

$$x' = \frac{2R^2 x}{x^2 + y^2 + z^2 + R^2}, \quad y' = \frac{2R^2 y}{x^2 + y^2 + z^2 + R^2},$$

$$z' = \frac{2R^2 z}{x^2 + y^2 + z^2 + R^2}. \tag{1}$$

§ 5.° Curvas cíclicas

265. Definiciones. Las curvas cíclicas resultan de la intersección de una esfera con una superficie de segundo grado; y puesto que, por la intersección de dos cuádricas pasan generalmente cuatro conos de segundo grado, cuyas generatrices son las cuerdas de la curva, debe concluirse que una cíclica, en general, es analagmática de cuatro maneras diferentes.

Una cíclica A, trazada en una esfera fija Ω de centro I, resultará de la intersección de esta esfera con cuatro conos H_1, H_2, H_3, H_4 de segundo grado, cuyos vértices o_1, o_2, o_3, o_4 forman un tetraedro, conjugado con relación á la esfera Ω. Los planos T_1, T_2, T_3, T_4 polares de o_1, o_2, o_3, o_4, con relación á la esfera, estarán en los planos o_2, o_3, o_4, $o_3\,o_4\,o_1$, $o_4\,o_1\,o_2$, $o_1\,o_2\,o_3$, que cortan á Ω según cuatro círculos Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4, cada uno de los cuales será director relativo á una de las cuatro inversiones, que conservan el círculo A. Existen pues, cuatro familias de círculos en la esfera Ω, bitangentes á la curva A, y los círculos Γ_i de una misma familia serán ortogonales á uno de los círculos Θ_i. (*)

Los centros esféricos N_i, N'_i de los círculos Γ_i, bitangentes á A y ortogonales á Θ_i, describen una curva, que es la traza sobre la esfera Ω del cono H'_i, suplementario del cono H_i.

El estudio de estas curvas se hace en la obra citada de M. Darboux y en la de M. Koenigs, considerando éste sus diferentes tipos.

(*) Koenigs. *Leçons de l'Aqregation classique de Mathématiques*, (pág. 131).

266. GENERACIÓN DE LAS CÍCLICAS. Podemos considerar, según la exposición de M. Darboux (*) los cuatro conos (D), (D_1), (D_2), (D_3) que contienen á la curva, expresando por a_1, a_2, a_3, a_4 sus vértices respectivos.

Si se trazan todos los planos tangentes, al cono (D) por ejemplo, estos planos tangentes cortan á la esfera según círculos, cuya envolvente es la curva que estudiamos. Todos estos círculos cortan según ángulo recto á un círculo fijo de la esfera, *el círculo de contacto* del cono circunscrito á la esfera, cuyo vértice es el punto *a*. Luego la cíclica puede considerarse como la envolvente de los círculos esféricos ortogonales á un círculo fijo. Y para determinar este sistema de círculos, bastará hallar el lugar de sus polos ó centros esféricos. Pero estos polos esféricos están en la intersección de la esfera y de las perpendiculares bajadas desde el centro de la esfera sobre los planos tangentes. Se hallan pues, en la intersección de la esfera y del cono suplementario del cono (D), trazado por el centro O de la esfera. El lugar de los polos de estos círculos es pues una cónica esférica (K). Expresaremos igualmente por (K_1), (K_2), (K_3) las otras tres cónicas correspondientes á los conos (D_1), (D_2), (D_3) y tendremos que:

Una cíclica puede considerarse de cuatro maneras diferentes como envolvente de los círculos ortogonales á un círculo esférico, cuyos polos se hallan en una cónica esférica.»

Las cíclicas tienen la importante propiedad de permanecer invariables, bajo ciertas condiciones. Si, en efecto, se toma por polo de la transformación el vértice de uno de los cuatro conos, *a* por ejemplo, y por módulo de la transformación la tangente trazada desde este punto á la esfera, el cono y la esfera no cambian, y por consiguiente, su curva de intersección permanecerá invariable. *Las cíclicas son, pues, en la esfera, curvas análogas á las llamadas* ANALAGMÁTICAS *por Moutard, que tienen la propiedad de transformarse en sí mismas, cuando se emplea una transformación por radios vectores recíprocos, elegida convenientemente.*»

(*) *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, p. 30.

M. Darboux clasifica las cíclicas, según que el cono sea doble ó simplemente tangente á la esfera y según la naturaleza de los puntos de intersección de la curva ó del cono con el círculo del infinito. En el plano se tiene:

1.° *Las recíprocas* ó *podares de cónicas.*

2.° *Los óvalos de Descartes*, que tienen dos puntos de retroceso en el infinito.

3.° *La cíclida de tercer grado* ó *cúbica circular.*

4.° *La cíclida general.*

Á estas agrega luego otras divisiones y nos bastará añadir que M. Koenigs, hace un detenido estudio de los diferentes tipos.

267. Focos y focales. Un foco de una curva ó superficie en el espacio es un punto, centro de una esfera de radio nulo bitangente á la curva ó á la superficie. Focal es la curva correspondiente á los puntos que satisfacen á esta definición. Si este lugar se descompone en varias curvas, cada una de ellas recibe el nombre de focal.

Consideremos un foco F de una superficie. El cono isótropo (esfera de radio nulo) cuyo centro es F, es tangente en dos puntos M y M′ á la superficie. Sean π y π' los planos tangentes al cono isótropo, á lo largo de las generatrices FM y FM′, y sean I é I′ los puntos del infinito de estas generatrices. Los planos π y π' son tangentes respectivamente en I y en I′ al círculo del infinito.

Supongamos ahora que el punto F describa la focal que lo contiene; los planos π y π' rodarán en el círculo del infinito y en la superficie, engendrando dos hojas de la desarrollable circunscrita á la vez á la superficie y al círculo del infinito. Las rectas IM é I′M se hallan en las generatrices de contacto de estas hojas con los planos π y π'. Puesto que estas rectas se cortan en el punto F, se ve que la focal, lugar de este punto, será una curva de intersección de las dos hojas de la desarrollable considerada. Será pues, una *curva doble de la desarrollable circunscrita* á la vez *al círculo del infinito* (desarrollable isótropa) *y á la superficie.*

Las focales de una curva ó de una superficie son las curvas dobles de la desarrollable isótropa circunscrita á las mismas.

Se llama *focal singular* de una superficie, á la desarrollable circunscrita á la superficie, según el círculo del infinito.

268. FOCOS Y FOCALES DE LAS CÍCLICAS. Consideremos una cíclica esférica. Sea (D_i, Θ_i) un modo de generación y Γ_i los círculos envueltos correspondientes. Una esfera de radio nulo, bitangente á la cíclica, corta á la esfera Ω que la contiene, según un círculo bitangente, cuyo plano es necesariamente tangente á uno de los conos H_1, H_2, H_3, H_4.

Las focales son el lugar de los vértices de las esferas de radio nulo trazadas por todos los círculos Γ_i. Este lugar es una cíclica, intersección del cono H'_i, (concéntrico con Ω y suplementario de H_i) con la esfera Σ_i, concéntrica con H_i, que corta á Ω según ángulo recto, á lo largo de Θ_i. Llamemos Φ_i á esta cíclica. Puesto que hay cuatro conos H'_i y cuatro esferas Σ_i, tendremos cuatro cíclicas Φ_i, focales de la propuesta Φ_0.

Las cinco cíclicas Φ_0, Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 forman una configuración notable; son focales las unas de las otras.

Las cinco esferas que las contienen son ortogonales, dos á dos.

269. TRANSFORMACIÓN POR RADIOS VECTORES EN LAS CÍCLICAS. Indicaremos tan solo, que si se toma el polo en uno de los focos de la cíclica, expresando por r la distancia á este foco y por r', y r'' las distancias á los otros dos focos, situados en el mismo círculo director que el primero, la ecuación cíclica,

$$ar + br' + cr'' = 0,$$

se transformará en una ecuación de la forma $aR + bR' = C$.

De manera que: *Toda cíclica se transforma en los óvalos de Descartes, cuando se coloca el polo de transformación en uno de los focos situados en la esfera que contiene á la cíclica.*

En particular, si el polo de transformación es uno de los puntos de intersección de tres esferas que contienen las focales, la transformada será una cónica esférica. Así:

Toda cíclica puede considerarse como la transformada por radios vectores recíprocos de una cónica esférica.

Añadiremos que: *Las cíclicas homofocales se cortan según ángulo recto.*

270. Puntos asociados en el plano. En coordenadas rectangulares, la distancia de un punto (y, x) á un punto fijo del plano se expresa por la fórmula

$$\delta^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2,$$

ó $$\delta^2 = (x + yi - a - bi)(x - yi - a + bi).$$

Sustituyamos á las cantidades x, y las coordenadas u, v, definidas por las fórmulas $u = x + yi$, $v = x - yi$.

Y si se hace $\alpha = a + bi$, $\beta = a - bi$,

se obtendrá $$\delta^2 = (u - \alpha)(v - \beta).$$

Esto sentado, sean dos puntos P, Q, y tracemos por éstos rectas á los puntos circulares del infinito.

Estas rectas se encuentran en dos nuevos puntos P′, Q′, que se llaman *asociados* de los primeros. A su vez P y Q son asociados de P′ y Q′.

Se puede decir que dos pares de puntos asociados son dos pares de vértices opuestos de un cuadrilátero, cuyos otros dos vértices opuestos son los puntos circulares I, J. Sean

$$u = \alpha, \quad v = \beta; \quad u = \alpha', \quad v = \beta'$$

las coordenadas respectivas de P y Q.

Las de los puntos asociados P′ y Q′ serán por ejemplo:

$$u = \alpha, \quad v = \beta'; \quad u = \alpha', \quad v = \beta.$$

Y con respecto á un punto M del plano, tendremos

$$MP^2 = (u - \alpha)(v - \beta), \quad MQ^2 = (u - \alpha')(v - \beta'),$$
$$MP'^2 = (u - \alpha)(v - \beta'), \quad MQ'^2 = (u - \alpha')(v - \beta),$$

de donde $$MP \,.\, MQ = MP' \,.\, MQ',$$

luego: *El producto de las distancias de un punto cualquiera del plano á dos puntos fijos es igual al producto de las distancias del mismo punto á los dos puntos asociados.*

Sea ahora ω el ángulo que forma PM con el eje de las x; tendremos

$$x - a = \text{MP} \cos \omega, \quad y - b = \text{MP} \operatorname{sen} \omega;$$

luego $$u - \alpha = \text{MP}.\, e^{\omega i}, \quad v - \beta = \text{MP}.\, e^{\omega i},$$

$$\frac{u-\alpha}{v-\beta} = e^{2\omega i}.$$

El ángulo PMQ, según el que se ve el segmento PQ, es igual á la diferencia de los ángulos ω y ω' que forman MP y MQ con el eje de las x, luego:

$$e^{2i(\text{PMQ})} = e^{2i(\omega-\omega')} = \frac{u-\alpha}{v-\beta} : \frac{u-\alpha'}{v-\beta'} = \frac{(u-\alpha)(v-\beta')}{(u-\alpha')(v-\beta)} = \left(\frac{\text{MP}'}{\text{MQ}'}\right)^2$$

y, extrayendo la raíz cuadrada,

$$e^{i(\text{PMQ})} = \frac{\text{MP}'}{\text{MQ}'} \quad \text{y} \quad e^{i(\text{P}'\text{MQ}')} = \frac{\text{MP}}{\text{MQ}};$$

luego: *La relación de las distancias de un punto* M *del plano á dos puntos es igual á* e^{iV}, *expresando* V *el ángulo según el que se ve desde dicho punto el segmento formado por los puntos asociados.*

271. Puntos asociados en la esfera. Las propiedades de los puntos asociados tienen sus análogas en la geometría esférica.

Si transformamos una figura plana por radios vectores recíprocos, al plano corresponde una esfera. Á las rectas del plano que pasan por I, corresponden las generatrices de un mismo sistema de la esfera. Á las rectas que pasan por J corresponden las generatrices del segundo sistema. Se ve pues, que toda generatriz de la esfera tiene un punto real, y que las generatrices de un sistema son imaginarias conjugadas de las del otro. Luego, á un cuadrilátero del plano, cuyos vértices opuestos son los puntos I, J, corresponde en la esfera un cuadrilátero rectilíneo formado por dos generatrices de cada sistema, resultando la construcción de los puntos P′ y Q′ asociados de P y Q.

Por P y Q se trazarán las dos generatrices rectilíneas de la esfera que pasan por estos puntos. Estas dos generatrices se cortan en dos puntos P′ y Q′, que se llamarán los asociados de los primeros. La recta P′ Q′ es la polar de PQ; y por consiguiente, si uno de los pares PQ, P′ Q′ es real, el otro será imaginario.

Siendo igual á la unidad en el plano la relación $\frac{\mathrm{MP}\,.\,\mathrm{MP}}{\mathrm{MP'}\,.\,\mathrm{MQ'}}$ de las distancias de un punto M á los cuatro puntos P, Q, P′, Q′, será constante en la esfera, y se tendrá

$$\frac{\mathrm{MP}\,.\,\mathrm{MQ}}{\mathrm{PQ}^2} = \pm \frac{\mathrm{MP'}\,.\,\mathrm{MQ'}}{\mathrm{P'Q'}^2};$$

luego: *En la esfera, existe una relación constante entre el producto de las distancias de un punto cualquiera* M *á dos puntos fijos* P, Q *y el producto de las distancias de un mismo punto á los puntos asociados* P′ y Q′.

§ 6.° Superficies cíclidas

272. Definición. Las superficies, envolventes de las esferas de un sistema de segundo grado, ortogonales á una esfera fija se han llamado *cíclidas* por M. Darboux. En las cíclidas, la deferente es una curva ó una superficie de segundo grado.

273. Propiedades generales de las cíclidas. Sea la superficie

$$(x^2+y^2+z^2)^2 + 2u_1(x^2+y^2+z^2) + u_2 = 0, \qquad (1)$$

en la que u_1 y u_2 representan polinomios de primero y de segundo grado, respectivamente. Esta ecuación contiene 13 constantes, y representa la cíclida más general de cuarto orden. Se puede escribir bajo la forma

$$(x^2+y^2+z^2+u_1{}^2) = \mathrm{U}_2, \qquad (2)$$

expresando U_2 un polinomio de segundo grado.

Puesto que las cíclidas tienen por línea doble al círculo del infinito, toda esfera las cortará según una curva de cuarto orden, situada en una superficie de segundo, pues si buscamos la intersección de la cíclida con la esfera, cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 + z^2 = v_1,$$

la ecuación de la cíclida puede sustituirse por la siguiente

$$v^2_1 + 2u_1 v_1 + u_2 = 0,$$

que representa una cuádrica, cuya intersección con la esfera será la curva buscada.

Si escribimos la ecuación (2) bajo la forma

$$(x^2 + y^2 + z^2 + u_1 + \lambda)^2 = U_2 + 2\lambda(u_1 + x^2 + y^2 + z^2) + \lambda^2,$$

las superficies (V), representadas por la ecuación

$$U_2 + 2\lambda(u_1 + x^2 + y^2 + z^2) + \lambda^2 = V = 0,$$

en la que λ es arbitraria, serán tangentes á la cíclida en todos los puntos de una curva situada en la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 + u_1 + \lambda = 0.$$

Si consideramos la ecuación (2), observaremos que, haciendo cambiar de dirección los ejes, de manera que los nuevos ejes sean paralelos á los ejes de simetría de la cuádrica U_2, se podrá hacer que desaparezcan los términos rectangulares en U_2; después se podrá, por una traslación paralela, suprimir el polinomio u_1, y reduciremos la cíclida á la forma

$$K = (x^2 + y^2 + z^2)^2 + 4Ax^2 + 4A'y^2 + 4A''z^2$$
$$+ 8Cx + 8C'y + 8C''z + 4D = 0.$$

Cortemos la superficie por la esfera (T), cuyas ecuaciones son

$$T = x^2 + y^2 + z^2 - 2P = 0, \quad P = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta^2.$$

La curva de intersección estará expresada por

$$P^2 + Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2P = 0.$$

Las condiciones para que la esfera corte á la cíclida según dos círculos, se expresa por

$$\frac{C^2}{\lambda - A} + \frac{C'^2}{\lambda - A'} + \frac{C''^2}{\lambda - A''} + D - \lambda^2 = L = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\alpha^2}{\lambda - A} + \frac{\beta^2}{\lambda - A'} + \frac{\gamma^2}{\lambda - A''} = 1 \qquad (3)$$

$$\delta^2 = -\lambda - \frac{C\alpha}{\lambda - A} - \frac{C'\beta}{\lambda - A'} - \frac{C''\gamma}{\lambda - A''} \qquad (4)$$

La primera de estas ecuaciones determina cinco valores para λ. Por lo tanto, las esferas doblemente tangentes á la superficie se dividen en cinco series distintas.

Concluiremos, sin entrar en detalles, que:

Una ciclida de cuarto orden puede, en general, considerarse de cinco maneras distintas como envolvente de una serie de esferas que cortan, según ángulos rectos á una esfera fija, cuyos centros describen una cuádrica fija. (*)

Sin entrar en detalles, que pueden verse en las obras citadas, extractaremos del razonamiento de M. Koenigs que, partiendo de la ecuación tangencial de la deferente, demuestra el

TEOREMA. *Los puntos del círculo del infinito son puntos dobles de la superficie.*

La ecuación de la esfera directriz es

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + 2\delta = 0.$$

La de la superficie cíclida

$$F\left(x - \alpha,\, y - \beta,\, z - \gamma,\, \delta - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}\right) = 0,$$

es decir,

$$D\left(\delta - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}\right)^2 + 2[c\,(x - \alpha) + c'\,(y - \beta) + c''\,(z - \gamma)]$$
$$\times\left(\delta - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}\right) + A\,(x - \alpha)^2 + A'\,(y - \beta)^2 + A''\,(z - \gamma)^2$$
$$+ 2B\,(y - \beta)\,(z - \gamma) + 2B'\,(z - \gamma)\,(x - \alpha) + 2B''(x - \alpha)\,(y - \beta) = 0,$$

(*) Darboux, obra citada, pág. 116.

ecuación que reduce á la forma

$$D(x^2+y^2+z^2)^2-4(Cx+C'y+C''z)(x^2+y^2+z^2)$$
$$+\varphi(x,y,z)=0,$$

expresando φ un polinomio de segundo grado. Si hacemos homogénea esta ecuación, cuyo primer miembro expresaremos mediante la notación $\Phi(x, y, z, t)$, tendremos

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=4D(x^2+y^2+z^2)x-4t\Psi_1,\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}=4D(x^2+\ldots)y-4t\psi_2$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=4D(x^2 y^2 z^2)y-4t\psi_3,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=-4(Cx+C'y+C''z)(x^2+y^2+z^2)+t\psi_4;$$

y se ve que, para todos los puntos del círculo del, infinito se tiene

$$t=0,\quad x^2+y^2+z^2=0,$$

lo que conduce á las relaciones que demuestran el teorema

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0.$$

Si D no es nulo, resulta una superficie de cuarto grado *bicircular*.

Si $D=0$, el plano del infinito es tangente á la deferente (paraboloide ó parábola), reduciéndose la superficie á

$$4(Cx+C'y+C''z)(x^2+y^2+z^2)+t\varphi(x,y,z,t)=0,$$

superficie de tercer orden, á la que corta el plano del infinito según el círculo del infinito

$(x^2+y^2+z^2=0)$ y según la recta $(cx+c'y+c''z=0)$, $t=0$.

Tenemos así una *superficie cúbica circular*.

274. Forma general de las cíclidas. Para tener una idea de las formas de las cíclidas, basta discutir las ecuaciones (2), (3), (4) de la pág. 451, que determinan los diferentes modos de generación de la superficie.

Desde luego se ve que la ecuación (2) tiene por lo menos tres raíces reales con relación á λ. Cada una de éstas se halla en uno de los intervalos A, A′, A″, ∞.

A toda raíz comprendida entre A y A′ corresponde una deferente, que es un hiperboloide de dos hojas. A toda raíz comprendida entre A′ y A″ un hiperboloide de una hoja. A toda raíz superior á A″ un elipsoide real, y, á toda raíz inferior á A un elipsoide imaginario.

Hay pues, entre las superficies deferentes, tres cuádricas reales, por lo menos: un elipsoide real, un hiperboloide de una hoja, un hiperboloide de dos hojas.

Además, á la raíz única, comprendida en cada uno de los intervalos considerados, ó á la menor y á la mayor de las raíces, si hay tres en este intervalo, corresponde siempre una esfera directriz con centro y radio reales.

En efecto, el radio de la esfera directriz es $\sqrt{-L'}$, expresando L′ la derivada de L. Cuando varía λ en uno de los intervalos considerados, la función L es al principio positiva. La derivada L′ será pues negativa para todas las raíces de orden impar, contenidas en este intervalo. Luego hay tres raíces, de las que la menor y la mayor darán un radio real. Por el contrario, el cuadrado del radio es negativo para la raíz media. Se concluye pues, que en todos los casos, tres de los cinco modos de generación de las cíclidas se efectuarán con cuádricas y esferas reales.

Si la ecuación en λ tiene sus cinco raíces reales, los dos últimos modos de generación se hallarán formados por dos superficies, que podrán ser dos elipsoides imaginarios, pero de la misma especie. De las dos esferas correspondientes, cuyos centros son reales, la una será real; para la otra, el cuadrado del radio será negativo.

Si la ecuación en λ tiene dos raíces imaginarias, solamente tres de las esferas que contienen las focales serán reales.

Si la ecuación en λ tiene sus cinco raíces reales, cuatro de las esferas son reales, y existe un modo de generación que caracteriza á la cíclida, el que corresponde á la esfera de centro real y radio imaginario. Distinguiremos, para reconocer la forma de la cíclida, los casos siguientes:

1.º La ecuación λ tiene dos raíces imaginarias. Sea uno de los tres modos de generación formando con el elipsoide real (A) y la esfera real (S). La desarrollable correspondiente es real y se halla constituída por una sola hoja. La curva de contacto de esta desarrollable, con el elipsoide (A), divide á la cuádrica en dos regiones. La una da todos los puntos reales de la ciclida. La ciclida *será una superficie, siempre real, formada por una sola hoja de conexión simple.* Tendrá una serie doble de secciones circulares reales, porque una sola de las tres deferentes es reglada.

2.º La ecuación λ tiene todas sus raíces reales. La superficie deferente (A), correspondiente á la esfera de radio $k\sqrt{-1}$ es un elipsoide imaginario. La cíclida es *imaginaria.*

3.º Si el elipsoide deferente del mismo modo de generación es real, toda recta que pasa por el centro O de (S) corta á la cíclida en cuatro puntos reales, correspondientes á los dos planos tangentes del elipsoide, perpendiculares á esta recta. La *cíclida se compone de dos hojas que envuelven al punto* O, *interior la una á la otra, que son de conexión simple.* Tres de las superficies deferentes son elipsoides reales.

4.º La ecuación tiene sus raíces reales y la deferente de un mismo modo de generación es un hiperboloide de dos hojas. Siendo real el cono doblemente tangente á la cíclida, cuyo vértice es O, la cíclida es interior á este cono; *está formada por dos hojas opuestas, situadas en el interior de cada una de las hojas del cono, de conexión simple.* Tres de las deferentes son hiperboloides de dos hojas. Existe una serie doble de secciones circulares reales.

5.º La deferente del mismo modo de generación es un hiperboloide de una hoja. El cono doblemente tangente á la cíclida es siempre real; pero la superficie es exterior al cono. Se compone *de una sola hoja de triple conexión, semejante á un toro.*

Siendo tres de las deferentes hiperboloides reglados, hay seis series de secciones circulares reales, dispuestas como las del toro, después de haber desdoblado, por una deformación, las secciones meridianas y las secciones paralelas, que representan dos series confundidas.

Existen pues cuatro especies distintas de cíclidas de cuarto orden y las de tercer orden, que se reducen mediante una transformación por radios vectores recíprocos de las anteriores, tienen tres formas distintas.

275. Sistema de cíclidas homofocales. Dada una esfera (S)

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2, \qquad (1)$$

vamos primeramente á obtener la ecuación de las cuádricas inscritas en una desarrollable circunscrita á dicha esfera. Sean

$$P_i = a_i x' + b_i y' + c_i z' + d_i R\sqrt{-1} = 0 \quad (2) \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

las ecuaciones de las cuatro caras del tetraedro conjugado común á todas las cuádricas y á la esfera (S); y supongamos que los coeficientes se hayan elegido de manera que se tenga idénticamente

$$\sum_1^4 P_i^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - R^2. \qquad (3)$$

Se verificarán, entre los coeficientes a_i, b_i, c_i, d_i, las relaciones correspondientes á toda sustitución lineal ortogonal, y en particular,

$$(4) \quad a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + d_i^2 = 1, \quad a_i a_j + b_i b_j + c_i c_j + d_i d_j = 0. \quad (4')$$

La ecuación

$$\frac{a - a_1}{\lambda - a_1} P_1^2 + \frac{a - a_2}{\lambda - a_2} P_2^2 + \frac{a - a_3}{\lambda - a_3} P_3^2 + \frac{a - a_4}{\lambda - a_4} P_4^2 = 0 \quad (5)$$

representará las cuádricas inscritas en una desarrollable Δ, que estará circunscrita á la esfera (S); porque basta, para obtener la ecuación de dicha esfera, hacer $\lambda = a$ en la anterior. Y esta ecuación podrá escribirse bajo la forma

$$\Sigma \frac{a - \lambda}{\lambda - a_i} P_i^2 + \Sigma P_i^2 = 0,$$

ó, en virtud de la identidad (3),

$$\frac{R - x'^2 - y'^2 - z'^2}{\lambda - a} + \frac{P_1^2}{\lambda - a_1} + \frac{P_2^2}{\lambda - a_2} + \ldots + \frac{P_4^2}{\lambda - a_4} = 0, \quad (6)$$

ecuación que tratábamos de obtener. Y para obtener la ecuación general de las cíclidas homofocales, apliquemos la transformación

$$x' = \frac{2R^2x}{x^2+y^2+z^2+R^2},\quad y' = \frac{2R^2y}{x^2+y^2+z^2+R^2}, \ldots\ldots, \qquad (7)$$

por lo que tendremos

$$P_i = \frac{2R^2a_ix + \ldots\ldots + 2R^2c_iz + d_iR\sqrt{-1}\,(x^2+y^2+z^2-R^2)}{x^2+y^2+z^2+R^2}.$$

El plano $P_i = 0$ se transforma en una esfera (S_i), ortogonal á la propuesta; y llamando R_i al radio de esta, tendremos

$$R_i^2 = -\frac{R^2a_i^2}{d_i^2} - \frac{R^2b_i^2}{d_i^2} - \frac{R^2c_i^2}{d_i^2} - R^2,$$

y en virtud de (4),

$$R_i^2 = -\frac{R^2}{d_i^2},\quad R_i = \frac{R}{d_i\sqrt{-1}};$$

luego, si llamamos S_i á la potencia de un punto con relación á la esfera (S_i), será

$$P_i = \frac{R^2S_i}{R_i\,(x^2+y^2+z^2+R^2)}$$

y mediante (7), podremos transformar el primer término de la ecuación (6), y resultará

$$R^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = R^2\left(\frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{x^2+y^2+z^2+R^2}\right) = \frac{R^2\,S^2}{(x^2+\ldots+R^2)^2},$$

expresando S la potencia del punto (x, y, z) con relación á la esfera (S). Reuniendo estos resultados, la ecuación (6) se reduce á

$$\frac{\left(\frac{S}{R}\right)^2}{\gamma - a} + \frac{\left(\frac{S_1}{R_1}\right)^2}{x - a_1} + \frac{\left(\frac{S_2}{R_2}\right)^2}{\lambda - a^2} + \frac{\left(\frac{S_3}{R_3}\right)^2}{\lambda - a_3} + \frac{\left(\frac{S_4}{R_4}\right)^2}{\lambda - a_4} = 0,$$

ecuación de las cíclidas homofocales.

Así pues: *La ecuación*

$$\sum_1^5 \frac{\left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2}{\lambda - a_i} = 0$$

en la que S_i *son las potencias de un punto con relación á cinco esferas ortogonales, representa uno cualquiera de los sistemas de cíclidas homofocales que tienen cinco esferas* (S_i) *por esferas directrices.*

Después de quitar denominadores, llegaremos á

$$\sum_1^5 \left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2 = 0.$$

276. Sistema de cinco esferas ortogonales. Sean
$S_i = x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha_i x + 2\beta_i y + 2\gamma_i z + \delta_i = 0$ (1) $(i = 1, 2, \ldots 5)$
las ecuaciones de cinco esferas ortogonales.

Tendremos la relación

$$\alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j - \delta_i - \delta_j = 0, \qquad (i \gtrless j)$$

que expresan la ortogonalidad de las esferas, cuyos radios están dados por las fórmulas

$$R_i = \alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 - \delta_i, \tag{2}$$

y tendremos las identidades

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial S_i}{\partial x}\frac{\partial S_j}{\partial x} + \frac{\partial S_i}{\partial y}\frac{\partial S_j}{\partial y} + \frac{\partial S_i}{\partial z}\frac{\partial S_j}{\partial z} &= 2\,(S_i + S_j), \\ \left(\frac{\partial S_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_i}{\partial z}\right)^2 &= 4S_i + 4R_i^2. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

La teoría de las esferas ortogonales está comprendida en la identidad ya obtenida, que liga la potencia de un punto respecto á ellas,

$$\Sigma \left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2 = 0,$$

de lo que se deduce

$$\Sigma \frac{1}{R_i^2} = 0, \quad \Sigma \frac{\alpha_i}{R_i^2} = 0, \quad \Sigma \frac{\alpha_i \beta_i}{R_i^2} = 0, \quad \Sigma \frac{\alpha_i \delta_i}{R_i^2} = 0, \quad \Sigma \frac{\delta_i^2}{R_i^2} = 0,$$

y las siguientes

$$\Sigma \frac{\alpha_i^2}{R_i^2} = \Sigma \frac{\beta_i^2}{R_i^2} = \Sigma \frac{\gamma_i^2}{R_i^2} = 1, \quad \Sigma \frac{\delta_i}{R_i^2} = -2.$$

277. Podares ó recíprocas de cuádricas. Cuando la deferente (A) es tangente á la esfera (S), el tetraedro conjugado común tiene dos vértices reunidos en el punto de contacto de las dos superficies. Las dos esferas directrices correspondientes se reducen á un punto. Su centro común es el punto de contacto de (A) y de (S), por tanto: *Una de las esferas directrices se reduce á un punto* O. Sea (A_1) la deferente, asociada á este punto-esfera. La ciclida será la envolvente de las esferas, cuyo centro está en (A_1) y que pasa por el punto O. Será pues el lugar de los simétricos de O con relación á los planos tangentes de (A_1). El lugar así formado es homotético á la podar de (A_1) con relación á los planos tangentes de (A_1), respecto al punto O; luego: *La cíclida es una podar de cuádrica.*

Además, las podares de cuádricas son las transformadas, por radios vectores recíprocos, de otras cuádricas.

M. Darboux, aplicando la regla general para obtener los diferentes modos de generación de las cíclidas observa que las cuatro líneas dobles de la desarrollable (A_1) (S) se reducen á: 1.º la curva de contacto del cono circunscrito á (A_1), cuyo vértice es O. 2.º Á los tres pares de focales de este cono. De manera que los cinco modos de generación se hallan formados:

1.º y 2.º Con (A_1) y el punto esfera O, que se cuenta por dos modos.

3.º, 4.º y 5.º Con cada una de las tres superficies homofocales á (A_1) que pasan por O, siendo tangentes en O las esferas tangentes á la deferente respectivamente asociada, y hallándose su centro en el plano polar de O respecto de (A_1).

Si la cuádrica (A) se reduce á una cónica infinitamente aplanada, situada en el plano (P), las esferas cuyos centros se hallan en esta cónica, pasan por dos puntos fijos, simétricos con relación al plano de la cónica, y serán tangentes á la cíclida en todos los puntos de un círculo. Y si cortan, según un ángulo recto á una esfera (S) cualquiera, cortarán también según un ángulo recto, á todas las esferas que pasan por la intersección de (S) con el plano de los centros. Es decir, que contienen siempre dos puntos reales ó imaginarios.

Transformando la cíclida por radios vectores recíprocos y, colocando el polo en uno de estos puntos, resulta que: *Las cíclidas con dos puntos dobles son las recíprocas de conos de segundo grado.*

Citaremos para terminar, los siguientes teoremas, demostrados en la obra citada de M. Koenigs:

Toda esfera bitangente á una cíclida forma parte de un modo de generación analagmática de la superficie.

Toda superficie bicircular de cuarto y toda cúbica circular de tercer orden son superficies cíclidas.

Las cuádricas deben considerarse también como cíclidas, pues si tenemos

$$z^2 = mx^2 + ny^2 + 2px + 2qy + r,$$

y consideramos las esferas bitangentes, cuyo centro está en el plano principal $z = 0$ de la superficie,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y + 2\delta = 0;$$

si eliminamos z^2, resulta

$$(+1\, m^2)\, x^2 + (1 + n)\, y^2 + 2\,(p - \alpha)\, x + 2\,(q - \beta)\, y + z + 2\delta = 0.$$

La condición del doble contacto se expresa, escribiendo que el discriminante de esta ecuación es nulo, lo que da

$$(1 + m)\,(1 + n)\,(r + 2\delta) - (1 + m)\,(p - \alpha)^2 - (1 + n)\,(q - \beta)^2 = 0.$$

§ 7.° CÍCLIDA DE DUPIN

278. NOCIONES PRELIMINARES. Dupin, en su *Applications de Géometrie et de Méchanique* (págs. 200-210) estudia la familia de curvas cuya propiedad característica consiste en tener tan solo círculos como líneas de máxima y de mínima curvatura, á las que llama, por esta razón, *cíclidas*.

Desde luego la esfera está comprendida entre estas superficies y aun las superficies de revolución, cónicas ó cilíndricas, pues los meridianos pueden considerarse como círculos de radio infinito. Además, ninguna superficie desarrollable, distinta de estas dos, puede tener círculos por líneas de curvatura, porque cada punto de la arista de retroceso de esta desarrollable, debe ser un punto de retroceso para una de las líneas de curvatura, y el círculo no tiene puntos de retroceso.

Al estudiar la generación completa de las superficies cíclidas, observa Dupin que, para que la circunferencia sea una línea de curvatura en una superficie, es necesario que las rectas, trazadas ortogonalmente á la superficie, en cada punto de dicha circunferencia, formen una superficie desarrollable y, además, que la circunferencia sea línea de curvatura de esta superficie, que será un cono recto circular cuya base es la circunferencia. De manera que las superficies cuyas líneas de curvatura son circunferencias, tienen la propropiedad característica de hallarse cortadas normalmente, en la extensión de cada circunferencia, por un cono recto circular.

Tomemos el vértice de cada uno de estos conos por centro de una esfera, en la que se halle esta circunferencia. La esfera tendrá los mismos planos tangentes que la superficie buscada, puesto que tiene las mismas normales. Luego la superficie general, cuyas líneas de curvatura son circunferencias, puede engendrarse de dos maneras distintas por el movimiento de una esfera, cuyo radio varía convenientemente. Cada generación dará las líneas de una de las curvaturas de las superficies cíclidas. Así, por ejemplo, puede engendrarse un cono de revolución, primero, por una esfera cuyo centro se mueve en una recta, mientras que su radio crece ó decrece proporcionalmente al camino recorrido por dicho centro, siendo circunferencias las líneas de curvatura formadas por esta generación. Y este cono puede engendrarse también por una esfera de radio infinito, es decir, por un plano que forme un ángulo constante con el eje del cono. Las líneas de curvatura son entonces las rectas meridianas.

Pasando al caso general, es necesario que cada esfera de la primera generación sea tangente á todas las de la segunda, puesto que cada línea de una curvatura de las ciclidas debe hallarse cortada por todas las de la otra, y á cada línea de esta segunda curvatura pertenece una esfera de la segunda generación. Tres esferas de la primera generación bastan para determinar todas las esferas de la segunda. Es pues necesario que, tomando tres á tres las primeras esferas y, determinando todas las segundas, según este dato, las segundas esferas sean constantemente las mismas. Y en la posibilidad de esta identidad, funda Dupin la existencia de superficies distintas de la esfera, el cono y el cilindro de revolución, que solo tengan circunferencias por líneas de curvatura.

En estas consideraciones funda Dupin la doble generación de las cíclidas que expone en su obra citada. Pero empleando la transformación por radios vectores recíprocos, del sistema triple ortogonal de esferas, planos y conos que determinan un punto, se puede estudiar la cíclida de la manera siguiente.

279. Representación analítica. Consideremos un triple sistema ortogonal de conos, esferas y planos.

Se sabe que, por inversión, un sistema de esferas y de planos se transforma en dos sistemas de esferas. Y para obtener la imagen del sistema de conos, deberemos trazar al cono tres planos tangentes, considerándolo como envolvente de todas las esferas tangentes á dichos planos. Estos planos se transforman por inversión en tres esferas; y las esferas cuya envolvente es el cono, dan esferas tangentes á dichas tres esferas. La envolvente de estas esferas es la imagen del cono, siendo la cíclida de Dupin la superficie envuelta por un sistema de esferas tangentes á tres esferas fijas.

Así pues: *La transformada de un sistema triple ortogonal de esferas, planos y conos, consiste en dos sistemas de esferas y un sistema de cíclidas.*

El sistema de esferas corta á las cíclidas en líneas de curvatura. Estas consisten en circunferencias, que son las imágenes de las líneas de curvatura del cono.

Para representar analíticamente las transformadas del sistema, tomemos una posición especial del sistema de esferas, planos y conos respecto al centro de inversión. Sea el origen de coordenadas el centro de inversión, mientras que el vértice común de los conos se halle á la distancia a de aquél, en el punto A del eje de las X, siendo el eje común de los conos paralelo al eje de las Z. Tendremos el sistema triple ortogonal de esferas, planos y conos

$$x = a + w \cos u \cos v, \quad y = w \cos u \operatorname{sen} v, \quad z = w \operatorname{sen} u;$$

por la inversión el punto (x, y, z) se transforma en el punto (x_1, y_1, z_1), y haciendo $c = 1$, será

$$x_1 = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad y_1 = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad z_1 = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Las ecuaciones del sistema triple ortogonal transformado son

$$x_1 = (a + w \cos u \cos v) : (a^2 + 2aw \cos u \cos v + w^2)$$

$$y_1 = w \cos u \operatorname{sen} v : (a^2 + 2aw \cos u \cos v + w^2)$$

$$z_1 = w \operatorname{sen} u : (a^2 + 2aw \cos u \cos v + w^2).$$

Las cíclidas son las superficies $u =$ const. Para obtener la figura de una cíclida, buscaremos las imágenes de las generatrices del cono, obtenidas, por inversión, de la cíclida. Las imágenes de las generatrices son circunferencias, que pasan por el origen y el punto $x = \frac{1}{a}$ del eje de las X; pues el origen es la imagen de los puntos en el infinito de las generatrices, y el punto $x = \frac{1}{a}$ la del vértice del cono. Estos puntos son pues de retroceso para las cíclidas. Es decir, que las tangentes á la cíclida en estos puntos no forman un plano (plano tangente), sino un cono.

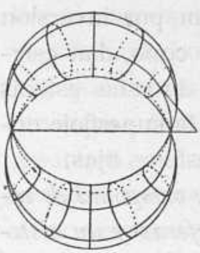


Figura 115

Si resbala el cono paralelo á sí mismo, hasta que se halle el vértice en el punto $x = \frac{1}{a}$, del eje de las X, y determinamos todas las circunferencias que son tangentes á las generatrices del cono en el vértice, y pasan además por el origen, estas circunferencias engendrarán la cíclida. De esto resulta que cada plano que pasa por el eje de las X, corta á la cíclida en dos circunferencias que coinciden, cuando una de ellas gira alrededor del eje de las X en 180°.

Estas circunferencias forman el primer sistema de líneas de curvatura de la cíclida.

La segunda serie de líneas de curvatura está dada por las imágenes de las esferas concéntricas, cuyos centros se hallan en el eje de las X. Y puesto que la segunda serie de esferas es ortogonal con la primera, obtendremos la segunda serie de circunferencias, de la manera siguiente: Tomemos en el eje de las X un punto cualquiera P, exterior al punto de retroceso, y tracemos tangentes á cada circunferencia de la primera serie. El lugar de los puntos de contacto da dos circunferencias de la segunda serie.

Observaremos que, por cada circunferencia de la primera serie pasa una esfera tangente á la cíclida según dicha circunferencia, transformada del plano tangente del cono cuya generatriz de contacto corresponde á dicha circunferencia. Además, por cada circunferencia de la segunda serie pasa una esfera tangente á la cíclida según dicha circunferencia. Estas esferas son las imágenes de las esferas, tangentes al cono, ó á los tres planos tangentes del mismo. Por consiguiente, la cíclida puede considerarse de dos modos distintos como envolvente de esferas.

280. Conclusiones generales. Siguiendo la exposición de M. Darboux, se observa que entre las recíprocas de conos de segundo grado se encuentra el toro y la cíclida de Dupin, que son las recíprocas de los conos de revolución de segundo grado.

Para precisar las condiciones bajo las que se obtiene la cíclida de Dupin, supongamos que se tome una cónica deferente cualquiera (A), siendo (S) la esfera directriz, tangente en dos puntos a y a' á la cónica (A). Por ser los dos puntos-esferas, arriba considerados, doblemente tangentes en a y a' á (A), serán puntos de la focal (A_1) de (A). El cono cuya base es (A) y cuyo vértice es O, será de revolución. Por consiguiente la cíclida será una recíproca del cono de revolución. Luego:

La cíclida de Dupin es la envolvente de las esferas cuyos centros describen una cónica cualquiera (A), *y que pasan por un punto de la focal* (A_1) *de esta cónica, ó más generalmente, que son ortogonales á una esfera cualquiera, doblemente tangente á* (A).

Esta cíclida tiene cuatro puntos dobles O, y O_1, *a* y *a'*, de los que dos por lo menos son imaginarios, pudiendo serlo todos. En este caso O y O', *a* y *a'* serán imaginarios conjugados.

Puede verse en la obra de M. Darboux que, en resumen: *La cíclida de Dupin, ó de cuatro puntos dobles, admite dos series de esferas inscritas, cuyos centros describen dos cónicas focales la una de la otra. Admite cuatro puntos dobles, situados por pares en dichas dos focales* O, O' *y* a, a', *y contiene cuatro rectas de longitud nula que unen* O *y* O_1 *á* a *y* a_1.

El toro y la cíclida de Dupin se encuentran entre las recíprocas de conos de revolución de segundo grado (pág. 436).

Para terminar, indicaremos simplemente que:

La cíclida de Dupin, admite además una serie de esferas doblemente tangentes, cuyos centros describen una cuádrica cualquiera, ortogonales á una esfera fija, que es tangente á la cuádrica en dos de sus umbílicos, y que por consiguiente, la corta según cuatro rectas que forman un cuadrilátero, cuyos vértices son los cuatro puntos dobles de la cíclida.

Mr. Mannheim considera también á la cíclida como la transformada de un toro (*), para llegar á esta conclusión establece el

LEMA. *Se puede siempre transformar un grupo de tres esferas dadas en un grupo de otras tres, cuyos centros se hallan en línea recta. El lugar de los polos de transformación es la circunferencia que corta según ángulo recto á los círculos de las esferas dadas, situados en el plano que pasa por sus centros*, puesto que es evidente que los polos de transformación deben hallarse en el plano de las esferas dadas; y si transformamos los círculos máximos, situados en este plano,

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, (1860, pág. 67).

en otros tres, cuyos centros se hallen en línea recta, la misma transformación originará, respecto á las tres esferas, otras esferas cuyos centros se hallan en línea recta.

Mr. Mannheim reduce pues, el problema al siguiente:

Transformar tres círculos en otros tres, cuyos centros se hallan en línea recta, pues tomando por polo uno de los puntos de la circunferencia, que corta ortogonalmente á las circunferencias dadas, dicha circunferencia ortogonal se transforma en una recta que corta, según ángulo recto, á las transformadas de las circunferencias dadas; y por cortar esta recta, á las transformadas, según ángulo recto, contiene sus centros.

Y puesto que podemos transformar las tres esferas en otras tres, cuyos centros se hallan en línea recta, es decir, transformar la cíclida en toro; cuando los centros están en línea recta, podremos trazar por esta recta un plano cualquiera que corte á la esfera según tres circunferencias, á las que, en general, se pueden trazar ocho circunferencias tangentes, simétricas dos á dos; y haciendo girar la figura alrededor del eje, resultarán cuatro toros, y *la cíclida se compondrá, en general, de cuatro hojas.*

Otras proposiciones establece Mr. Mannheim, que ya se demuestran en otro lugar, y que pueden verse en la citada Memoria.

En cuanto á las rectas de la cíclida, que encuentran al círculo del infinito, bastará decir que:

Se obtienen todas las rectas de la cíclida, hallando en cada una de las cinco series dobles de círculos, cuáles de éstos son los que se descomponen en dos rectas.

Los centros de estos círculos deben pertenecer á la vez á la cíclida y á su focal. Cada cíclida se halla cortada en ocho puntos por una de sus focales, y por estos ocho puntos pasan 16 rectas, pertenecientes á la cíclida. Estas rectas forman ocho círculos de radio nulo.

M. Darboux observa que, si la cíclida se transforma por radios vectores recíprocos, tomando el polo de transformación en la superficie, se transforma en una cíclida de tercer grado, y las rectas que encuentran al círculo del infinito se transforman en nuevas rectas que encuentran al mismo círculo, concluyendo que: *La disposición de las 16 rectas de una ciclida es la misma que las de las rectas de una superficie de tercer grado, que encuentran á una cónica de esta superficie.* (Véase la obra de M. Darboux).

§ 8.º RECAPITULACIÓN

281. HACES DE SUPERFICIES DE SEGUNDO ORDEN. Sean

$$\Omega \equiv \Sigma a_{ik}\, x_{ik} = 0 \qquad \Omega = \Sigma b_{ik}\, x_i\, x_k = 0$$

dos superficies de segundo orden. El haz de superficies

$$\lambda\Omega - \Phi = 0, \quad \text{ó} \quad \Sigma(\lambda a_{ik} - b_{ik})\, x_i\, x_k = 0,$$

contiene todas las superficies de segundo orden que pasan por la intersección de las superficies Ω y Φ.

La condición para que una superficie de segundo orden degenere en un cono es, que se anule su discriminante $|\lambda a_{ik} - b_{ik}| = 0$, ecuación de cuarto grado. Así:

Un haz de superficies de segundo orden contiene, en general, cuatro conos.

Los vértices de estos conos son los vértices de un tetraedro.

282. LAS TRANSFORMACIONES Y LOS GRUPOS. *Una colineación es una transformación que conduce de un punto á otro, de manera que las nuevas coordenadas tetraédricas son funciones proporcionales á funciones enteras lineales de las primitivas, es decir, que*

$$\rho x'_i = \sum_1^4 k\alpha_{ik}\, x_k.$$

El orden de una curva ó superficie no se altera por colineaciones; y puesto que entran 15 coeficientes en cada colineación: *Existen en el espacio ∞^{15} colineaciones.*

Además, una superficie de segundo orden depende de nueve coeficientes, por tanto:

Existen ∞^6 colineaciones, que transforman una superficie de segundo orden en otra dada del mismo orden, ó que transforman en la misma una superficie de segundo orden.

TEOREMA. *Todos los movimientos del espacio forman un grupo.*

En efecto, sean

$$x_1 = a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_0, \quad y_1 = b_1 x + b_2 y + c_2 z + b_0,$$
$$z_1 = c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_0$$

las ecuaciones correspondientes á la posición primitiva del punto (x, y, z) y á su nueva posición (x_1, y_1, z_1), en las que las nueve constantes $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ expresan los coeficientes de una sustitución ortogonal, de manera que se tiene

$$a^2_1 + b^2_1 + c^2_1 = a^2_2 + b^2_2 + c^2_2 = a^2_3 + b^2_3 + c^2_3 = 1$$
$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1 = 0,$$

siendo el determinante $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 = + 1$.

Un nuevo movimiento que conduzca á la posición (a_2, b_2, c_2), tendrá por relaciones correspondientes

$$\bar{a}_1^2 + \bar{b}_1^2 + \bar{c}_1^2 = 1, \ldots, \ \bar{a}_1 \bar{a}_2 + \bar{b}_1 \bar{b}_2 + \bar{c}_1 \bar{c}_2 = 0, \ \Sigma \pm \bar{a}_1 \bar{b}_2 \bar{c}_3 = + 1$$
$$x_2 = \bar{a}_1 x_1 + \bar{a}_2 y_1 + \bar{a}_3 z_1 + \bar{a}_0,$$
$$y_2 = \bar{b}_1 x_1 + \bar{b}_2 + \bar{b}_3 z + \bar{b}_0, \quad z_2 = \bar{c}_1 x_1 + \bar{c}_2 y_1 + \bar{c}_3 z_1 + \bar{c}_0$$

Para establecer la equivalencia de las dos series de movimientos, eliminaremos x_1, y_1, z_1, y obtendremos las expresiones de x_2, y_2, z_2 bajo la forma

$$x_2 = A_1 x + A_2 y + A_3 z + A_0, \ y_2 = B_1 x + \ldots, \ z = C_1 x + \ldots,$$

expresando las A, B, C funciones de a, b, c y $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, que satisfacen á las condiciones

$$A^2_1 + B^2_1 + C^2_1 = 1, \ \ldots\ldots, \quad A_1 A_2 + B_1 B_2 + \ldots = 0,$$
$$\Sigma \pm A_1 B_2 C_3 = + 1.$$

Así pues, las dos series de movimientos son equivalentes. Y existiendo 12 parámetros entre seis relaciones efectivas, resultan ∞^6 movimientos del espacio, que forman un grupo de seis parámetros.

283. Sistemas tetracíclico y penta-esférico. Consideremos un sistema de coordenadas tetraédricas x_1, x_2, x_3, x_4 y la ecuación de una esfera $\Omega = 0$, referida al plano por proyección estereográfica. Por valores convenientes del sistema de coordenadas, podemos reducir Ω á una forma cuaternaria, cuyo discriminante no sea nulo. Esta determinación de coordenadas x_1, x_2, x_3, x_4, las cuales se hallan ligadas por la relación $\Omega = 0$, la podemos llevar al plano. Hallándose las cuatro coordenadas ligadas por tres relaciones, solo existen dos cantidades independientes, como sucede en el plano. Para definirlas, consideremos las cuatro ecuaciones

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0,$$

que representan cuatro planos en el espacio, las cuatro caras del tetraedro, y por consiguiente dan con la esfera $\Omega = 0$, cuatro circunferencias. Las coordenadas x_i, en el plano, se llaman *coordenadas tetracíclicas*, y los círculos $x_i = 0$ *círculos fundamentales* del sistema de coordenadas.

Para determinar las coordenadas, empleemos las coordenadas rectangulares homogéneas ξ, η, ζ, τ. Se llega á este sistema de coordenadas mediante la sustitución lineal:

$$\rho x_i = A_i\xi + B_i\eta + C_i\zeta + D_i\tau$$

y, efectuando la proyección estereográfica, se expresarán las coordenadas tetraédricas por las fórmulas

$$\rho x_i = 2A_i xt + 2B_i yt + C_i(x^2 + y^2 - t^2) + D_i(x^2 + y^2 + t^2),$$

en virtud de las relaciones

$$\rho\xi = 2xt, \quad \rho\eta = 2yt, \quad \rho\zeta = x^2 + y^2 - t^2, \quad \rho\tau = x^2 + y^2 + t^2.$$

Introduciendo ahora las coordenadas cartesianas $X = \frac{x}{t}$, $Y = \frac{y}{t}$, tendremos

$$\frac{\rho}{t^2} x_i = (C_i + D_i)\left[X^2 + Y^2 + \frac{2A_iX + 2B_iY - C_i + D_i}{C_i + D_i}\right],$$

siendo $\frac{\rho}{t^2}$ un factor de proporcionalidad; y puesto que el valor de

$$X^2 + Y_2 + \alpha X + \beta Y + \gamma$$

expresa la potencia de un punto cualquiera X, Y respecto al círculo

$$X^2 + Y^2 + \alpha X + \beta Y + \gamma = 0,$$

podemos decir que: *Las coordenadas tetraédricas de un punto del plano son proporcionales á la potencia de dicho punto respecto á los cuatro círculos fundamentales. Entre dichas cantidades se verifica una ecuación cuadrática* $\Omega = 0$ *con discriminante no nulo.*

Podemos además enunciar los siguientes:

TEOREMA I. *Las ecuaciones homogéneas de primer grado, entre coordenadas tetraédricas, representan un círculo y viceversa.*

TEOREMA II. *Cada transformación circular corresponde á una sustitución lineal homogénea de coordenadas tetıaédricas, que dejan invariable la identidad* Ω, *y viceversa.*

Entre los sistemas especiales de coordenadas tetracíclicas, podemos citar los que corresponden respectivamente á las identidades, ó formas canónicas:

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_2^4 = 0, \qquad \text{(A)}$$

$$Ax_1x_2 + a_3x_3^2 + a_4a_4^2 = 0, \quad \text{(B)} \qquad A_1x_1x_2 + A_3x_3x_4 = 0, \quad \text{(C)}$$

en los casos de ser cuatro los círculos fundamentales (A), ó dos x_3 y x_4 ortogonales, con los puntos circulares x_1 y x_2 (B) ó, en el caso de que x_1 y x_2 se hallen en las intersecciones de x_3 y x_4, de las que pueden considerarse muchos casos, por ejemplo, si (A) es

$$\pm x^2_1 \pm x^2_2 \pm x^2_3 \pm x^2_4 = 0;$$

y á cada punto real corresponden valores reales de dos coordenadas, y á x_3, x_4 valores conjugados imaginarios de las otras dos coordenadas

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p + iq), \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p - iq),$$

y cuando en la identidad tienen x^2_1 y x^2_2 signos contrarios, la identidad (A) toma la forma

$$2ipq \pm x^2_3 \pm x^2_4 = 0. \ (*)$$

(*) M. Böcher, *Ueber die Reihenenwickelungen der Potential tehorie.*

M. Bôcher, generalizando, hace corresponder estereográficamente el espacio de tres dimensiones á una esfera en el espacio de cuatro, para llegar á las coordenadas *pentaesféricas*, como sigue:

Las coordenadas pentaesféricas x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 *de un punto del espacio, son proporcionales á las potencias de dicho punto respecto á cinco esferas fundamentales.* (Estas pueden elegirse arbitrariamente, pero siendo ortogonales á una sexta esfera).

Entre las cinco coordenadas pentaesféricas de un punto se verifica una identidad cuadrática, cuyo discriminante no es nulo.

Toda sustitución lineal homogénea de coordenadas pentaesféricas puede considerarse como una transformación de coordenadas.

Si las cinco esferas fundamentales son ortogonales entre sí, se verificará la identidad

$$\sum_1^5 a_i x_i^2 = 0, \quad \text{etc.}$$

y llegamos á los resultados conocidos:

Las ciclidas son superficies que pueden representarse por ecuaciones homogéneas de segundo grado entre coordenadas pentaesféricas.

Las ciclidas se transforman en ciclidas por transformaciones circulares.

284. Transformaciones lineales de una superficie de segundo orden en ella misma. Tomemos el problema: *Obtener todas las transformaciones posibles que reducen una superficie á ella misma.* Sea la ecuación de una superficie de segundo orden

$$f \equiv \Sigma\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0. \tag{1}$$

Los coeficientes c_{ik} de una transformación lineal

$$\xi_i = c_{i1} x_1 + c_{i2} x_2 + c_{i3} x_3 + c_{i4} x_4 \tag{3}$$

se deben transformar, de modo que se verifique la identidad

$$\Sigma\Sigma a_{ik} x_i x_k = \Sigma\Sigma a_{ik} \xi_i \xi_k. \tag{3}$$

Expresemos t y τ dos polos conjugados, respecto á $f = 0$, en línea recta con x y ξ, de manera que

$$x_i = \varkappa t_i + \lambda \tau_i, \quad \xi_i = \varkappa t_i - \lambda \tau_i. \tag{4}$$

Dados x y t, quedan determinados ξ y τ. Si se verifica una relación lineal entre las t_i y τ_i, se verificará también otra igualdad de la forma (2). Por consiguiente, se nos ofrece el problema de enlazar las coordenadas de los puntos t y τ por una relación lineal, de manera que las expresiones (2) conduzcan á la identidad (3).

Introduzcamos, en vez del punto t, su plano polar

$$t_i = A_{i1}u_1 + A_{i2}u_2 + A_{i3}u_3 + A_{i4}u_4,$$

expresando las A_{ik} los determinantes menores de los a_{ik}. El punto τ debe hallarse en el plano u, y esto se obtiene fácilmente por ecuaciones lineales, cuando se hallan ligados el plano u y el punto τ por transformación de un complejo lineal, mediante las ecuaciones

$$\tau_i = \alpha_{i1}u_1 + \alpha_{i2}u_2 + \alpha_{i3}u_3 + \alpha_{i4}u_4, \quad \alpha_{ik} = -\alpha_{ik} \quad \alpha_{ii} = 0. \quad (6)$$

Y obtenemos una primera clase general de transformaciones de la superficie $f = 0$ *en sí, cuando, por eliminación de las* u_i, *en las ecuaciones*

$$x_i = \varkappa\Sigma A_{ik}u_k + \lambda\alpha_{ik}u_k, \quad \xi_i = \varkappa\Sigma A_{ik}u_k - \lambda\Sigma\alpha_{ik}u_k \quad (7)$$

se llega á ecuaciones lineales entre las x_i *y las* ξ_i.

Si expresamos por $\Delta(\varkappa, \lambda)$ el determinante de las cantidades $\varkappa A_{ik} + \lambda\alpha_{ik}$ y los menores por $\Delta_{ik}(\varkappa, \lambda)$, obtendremos, resolviendo las ecuaciones (7),

$$\Delta(\varkappa, \lambda)\, u_i = \sum_k \Delta_{ik}(\varkappa, \lambda)\, x_k, \quad \Delta(\varkappa, -\lambda)\, u_i = \sum_k \Delta_{ki}(\varkappa, -\lambda)\, \xi_k.$$

Además por adición de las ecuaciones (7), tendremos

$$x_i + \xi_i = 2\varkappa\sum_i A_{ik}\, u_k,$$

y también $\Delta(\varkappa, \lambda)\, \xi_l = 2\varkappa \sum_k \sum_i \Delta_{ki}(\varkappa, \lambda)\, A_{li} x_k - \Delta(\varkappa, \lambda)\, x_l;$

$$\Delta(\varkappa, -\lambda)\, x_l = 2\varkappa \sum_k \sum_i \Delta_{ki}(\varkappa, -\lambda)\, A_{li}\, \xi_k - \Delta(\varkappa, -\lambda)\, \xi_l,$$

obteniéndose los coeficientes de las ecuaciones (2) por la resolución de estas ecuaciones. Por consiguiente: *Si* α_{ik} *expresan canti-*

dades arbitrarias que satisfacen á las condiciones $\alpha_{ik} = -\alpha_{ki}$, *se tendrá*

$$\left.\begin{aligned} c_{lk} &= \frac{2\varkappa\Sigma\Delta_{ki}(\varkappa, \lambda)\,A_{li}}{\Delta(\varkappa, \lambda)} \quad \text{para} \quad k \gtrless l, \\ c_{ll} &= \frac{2\varkappa\Sigma\Delta_{li}(\varkappa, \lambda)\,A_{li} - \Delta(\varkappa, \lambda)}{\Delta(\varkappa, \lambda)}; \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

verificándose también la ecuación (2) *cuando se sustituye* $-\lambda$ *por* λ.

Por la transformación considerada, cada punto de la superficie $f = 0$ llega á coincidir con un punto de la misma.

Dependiendo el segundo miembro de (8) del parámetro $\varkappa : \lambda$ podemos concluir también que: *A todo complejo lineal* $\Sigma\alpha_{ik}\,q_{ik} = 0$, *pertenece un número infinito de transformaciones de una superficie* f = 0 *en sí misma.*

Sin entrar de nuevo en consideraciones acerca de los complejos lineales, y teniendo presente que las transformaciones ó sustituciones son propias ó impropias, según que su determinante es $+1$ ó -1, indicaremos con Clebsch, (*) que: *Toda sustitución impropia cambia mutuamente las dos series de generatrices de una superficie transformable en sí; y toda sustitución propia transforma una generatriz en otra de la misma serie*, y que: *Toda sustitución propia puede formarse por dos transformaciones, de las que la una deja invariables las generatrices de un sistema y la otra la del otro.*

Todas las transformaciones propias forman un grupo, que contiene, respectivamente, los subgrupos formados por las transformaciones propias, que no cambian las generatrices de un sistema, y que no cambian las del otro sistema.

Todo movimiento (considerado como una operación extendida á todos los puntos del espacio) debe representarse analíticamente por una sustitución lineal, del mismo carácter que el sistema de transformaciones de coordenadas rectangulares, correspondiéndose mutuamente el movimiento con la variación de un sistema de coordenadas.

Al transformarse una superficie de segundo orden en sí, supo-

(*) *Vorlesungen über Geometrie*, **Zweiten Bande, pág. 371.**

nemos que el determinante de la sustitución no es nulo. En caso contrario, debemos considerar una superficie de segunda clase, es decir, una cónica en el espacio, y sustituirla por el círculo imaginario. En este caso, la construcción considerada, mediante los dos puntos auxiliares t y τ, pierde su significado, y debe sustituirse por dos planos auxiliares.

En la obra citada de Clebsch puede estudiarse una muy interesante exposición de los diferentes casos del complejo lineal.

285. LAS TRANSFORMACIONES DE UN COMPLEJO LINEAL EN SÍ. Existe íntima analogía entre las propiedades de un complejo lineal y una superficie de segundo orden. Por colineación, correspóndense cuatro puntos con cuatro planos.

En general: *Permanecen fijas cuatro rectas de un complejo transformable en sí, que forman un cuadrilátero alabeado.*

Las colineaciones pueden expresarse bajo la forma

$$Y_1 = \alpha_1 X_1, \quad Y_2 = \alpha_2 X_2, \quad Y_3 = \alpha_3 X_3, \quad Y_4 = \alpha_4 X_4,$$

y el complejo por

$$aP_{14} + bP_{23} = 0,$$

representando P_{ik} ejes principales del complejo.

La transformación lineal de un completo lineal $\Sigma\alpha_{ik}\, p_{ik} = 0$ *en sí está dada por las fórmulas* (7) *y* (8) *de las págs.* 471 *y* 472, *que se aplican á la transformación propia de una superficie* $\Sigma\Sigma\alpha_{ik}\, x_i\, x_k = 0$. *Las* α_{ik} *son cantidades dadas y las* a_{ik} *parámetros indeterminados.*

Si, en particular, el eje del complejo es una arista del tetraedro, toda transformación que deja invariable al eje, conduce á la coincidencia del complejo consigo mismo.

Respecto al sistema de rectas: *En general, la superficie focal consiste en dos superficies de segundo orden, que se cortan en las cuatro rectas fijas del complejo lineal y que se transforman en sí.*

286. GEOMETRÍA CIRCULAR *a*). *Espacio cuyo elemento generador es círculo (espace cerclé)* M. Cosserat en su tésis del doctorado *Sur le cercle consideré comme élément généırateur de l'espace* llega á establecer una semejanza completa entre esta geometría y la del espacio reglado.

Observa, ante todo, que Enneper (*) distingue varias clases de superficies engendradas por la circunferencia. Las de la primera son aquéllas para las que dos circunferencias infinitamente próximas no tienen, en general, ningún punto común. Las de la segunda son aquéllas en que cada generatriz tiene un punto único con la generatriz infinitamente próxima.

Enneper da la generación siguiente:

En una superficie alabeada, consideremos dos curvas Γ, Γ_1, de las que la segunda sea una trayectoria ortogonal de las generatrices, y sean π y π_1 dos puntos de Γ y Γ_1, situados en la misma generatriz. Describamos, en el plano trazado por el punto π y por la tangente á la curva Γ_1 en π_1 un círculo, cuyos centro y radio sean π y $\pi\pi_1$. La superficie engendrada por esta circunferencia es la más general de la segunda clase. Y puede decirse que el lugar del punto común á dos generatrices infinitamente próximas forma, en la superficie, una curva á la que es siempre tangente la circunferencia móvil.

Las superficies de tercera clase son aquéllas en las que dos generatrices infinitamente próximas tienen constantemente dos puntos comunes. La superficie es la envolvente de una esfera cuyo centro describe una curva.

Si los dos puntos comunes á las generatrices infinitamente próximas se hallan constantemente confundidos, obtiénense dos nuevas clases de superficies:

Ó bien el círculo móvil permanece constantemente osculador á una línea de doble curvatura, ó bien el círculo móvil permanece tangente á una curva, y su plano pasa por la tangente á la curva descrita por su centro.»

Laguerre da la generación siguiente:

Partiendo de la idea de que, dado un círculo en el espacio, se puede hacer pasar por éste dos esferas de radio nulo, á cuyos centros ha llamado M. Darboux *focos*, un círculo podrá considerarse determinado por sus focos (véase pág. 334). Sea (f, f') el círculo cuyos focos son f y f', y consideremos una curva alabeada

(*) *Die cyklischsn Flächen (Zeitschrift für Matematik und Physik*, p. 393. 1869.)

cualquiera C y una superficie reglada V tal, que cada una de sus generatrices encuentre á esta curva en dos puntos f_i y f_i'. Sean $f_1, f_1', f_2, f_2', \ldots$ las generatrices de esta superficie. Las circunferencias $(f_1, f_1'), (f_2, f_2'), \ldots$ engendrarán otra superficie, que se llamará derivada de la curva C. De una misma curva dada, se puede obtener una infinidad de superficies circuladas. Cada una de las superficies derivadas depende de un modo de agrupación de los puntos de la curva C, definido por la superficie V.»

M. Cosserat observa que, en virtud de hallarse determinado un círculo por sus dos focos, la geometría del círculo en el espacio se reduce á la geometría del conjunto de dos puntos; y el desarrollo de su trabajo estriba en considerar como elemento del espacio al sistema de dos puntos á que denomina *doble punto*.

Par es el sistema formado por el conjunto de un doble punto y de una esfera trazada por éste que se designa mediante la notación (a, α).

Dados cuatro puntos dobles a, b, c, d, su relación anarmónica (a, b, c, d) será la de las cuatro rectas de estos puntos dobles.

Si cuatro pares (a, α), (b, β), (c, γ), (d, δ) se hallan en una misma circunferencia, se dirá que estos pares están en *relación anarmónica*, cuando las relaciones anarmónicas (a, b, c, d) y $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de los cuatro puntos dobles y de las cuatro esferas $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, sean iguales.

Consideremos un círculo, y supongamos dado el punto P, que determina la descripción del círculo por el movimiento de un punto doble. Para definir un par en este círculo, se deben considerar dos coordenadas z y u, que definen respectivamente el punto doble y la esfera, dependiendo un par, en una circunferencia dada, de dos condiciones. Una ecuación entre z y u sujeta el par á una condición. Los pares correspondientes á un punto P, y que satisfacen á una misma condición, forman una *correlación*. Si se observa que un par de una correlación se define por una nueva condición, se puede decir que una correlación es una correspondencia entre los puntos dobles de un círculo C, relativos á un punto P, y las esferas que pasan por su circunferencia.

Cuatro pares de una misma correlación de primer orden y de la primera clase se hallan en relación anarmónica.

Bastará citar además los teoremas siguientes:

Cada punto tomado en el eje del círculo C *es el centro de una esfera tangente á la superficie circulada en dos puntos de* C. *Todas las cuerdas de contacto son concurrentes* (*).

Existen en cada generatriz dos puntos, en los que es tangente á una línea asintótica de la superficie.

La curva lugar de los focos de los círculos, que engendran la superficie, es una focal de ésta (Demartres).

También puede estudiarse esta teoría en la obra citada de M. Darboux (t. II, págs. 314-45), que dedica un extenso capítulo á *las congruencias de círculos y sistemas cíclicos.*

Sea
$$\sum_{i=1}^{i=n} A_i \varphi_i (x, y, z) = 0 \tag{1}$$

la ecuación que representa las superficies (Σ). Si haciendo $i = 4$, tomamos 1, x, z por las funciones φ_i, se tendrá la ecuación más general de un plano. Si haciendo $i = 5$, se añade á las funciones precedentes $x^2 + y^2 + z^2$, se tendrá la ecuación de una esfera, y así sucesivamente. Además, si elegimos convenientemente el número i y las funciones φ_i, se podrá obtener la ecuación más general de las superficies que pasan por un número determinado de puntos fijos, ó que contienen ciertas curvas fijas.

Dos superficies (Σ) se cortan según una curva fija C definida por dos ecuaciones la forma

$$\Sigma A_i \varphi_i (x, y, z) = 0, \quad \Sigma B_i \varphi_i (x, y, z) = 0 . \tag{2}$$

Si suponemos que los coeficientes A_i, B_i sean funciones cualquiera de dos parámetros variables a y b, se obtiene una congruencia de curvas. Si sustituímos á éstos las dos funciones ρ y ρ_1 de las variables a, b, que permanecen constantes, cuando se asocian las curvas de la congruencia que se cortan sucesivamente, y unimos á

(*) Demartres. *Sur les surfaces à generatrice circulaire.* (*Ann. de l'Ecole Normal.* Tercera serie, t II, pág. 123).

las ecuaciones (2) sus derivadas con relación á ρ,

$$\Sigma \frac{\partial A_i}{\partial \rho} \varphi_i (x, y, z) = 0, \quad \Sigma \frac{\partial B_i}{\partial \rho} \varphi_i (x, y, z) = 0, \tag{3}$$

y expresamos que los primeros miembros de estas ecuaciones se hallan ligados por una relación lineal, llegaremos á una serie de relaciones de la forma

$$M \frac{\partial A_i}{\partial \rho} + N \frac{\partial B_i}{\partial \rho} = PA_i + QB_i, \tag{4}$$

en las que M, N, P, Q son funciones determinadas de ρ y ρ_1, y lo mismo sucederá si derivamos respecto á ρ_1, obteniendo

$$M_1 \frac{\partial A_i}{\partial \rho_1} + N_1 \frac{\partial B_i}{\partial \rho_1} = P_1 A_i + Q_1 B_i, \tag{5}$$

que deben verificarse para todos los valores del índice i.

Para resolver el sistema de las ecuaciones (4) y (5), sustituyamos á la función A_i la combinación lineal $MA_i + NB_i$, lo que no cambia las ecuaciones de la curva (C).

La ecuación (4) tomará la forma

$$\frac{\partial A_i}{\partial \rho} = PA_i + QB_i,$$

que determinará B_i; y sustituyendo su valor en la segunda ecuación (2) y en la (5), tendremos el resultado siguiente:

Las ecuaciones que determinan las curvas (C) *deben ser de la forma*

$$\Sigma A_i \varphi_i (x, y, z) = 0, \quad \Sigma \frac{\partial A_i}{\partial \rho} \varphi_i (x, y, z) = 0, \tag{6}$$

siendo las funciones A_i *las soluciones particulares de una misma ecuación lineal*

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho \, \partial \rho_1} + a \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + b \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} + c\theta = 0, \tag{7}$$

en la que a, b, c *expresan funciones cualesquiera de* ρ *y de* ρ_1.

Para obtener las congruencias, elijamos cinco funciones cualesquiera θ_i de dos parámetros α, β y escribamos la ecuación lineal

$$M \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2} + N \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} + P \frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2} + M_1 \frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + N_1 \frac{\partial\theta}{\partial\beta} + P_1\theta = 0, \tag{8}$$

cuyos coeficientes se determinan por la condición de que la ecuación admita las cinco soluciones particulares θ_i. Los círculos de la congruencia quedan determinados por las ecuaciones

$$\Sigma\theta_i x_i = 0, \quad \Sigma\left(m \frac{\partial\theta_i}{\partial\alpha} + n \frac{\partial\theta_i}{\partial\beta}\right) x_i = 0,$$

en las que x_i son cinco funciones lineales de $x^2 + y^2 + z^2, x_1 y_1 z_1 1$, por ejemplo, las coordenadas pentaesféricas de un punto, en las que la relación $\frac{m}{n}$ se halla definida por la condición de que la ecuación diferencial $nd\alpha - md\beta = 0$ sea la de una de las características de la ecuación (8), pues si se reduce la ecuación (8) á la forma normal, integrando las ecuaciones diferenciales de las características, las ecuaciones (9) toman la forma (6).

Observaremos que, dada una solución cualquiera θ de la ecuación (7), es posible obtener una función σ tal, que se tenga

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\rho} = m\theta + n \frac{\partial\theta}{\partial\rho}, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial\rho_1} = p\theta, \tag{10}$$

satisfaciendo σ á una ecuación de la forma

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial\rho\,\partial\rho_1} + \alpha \frac{\partial\sigma}{\partial\rho} + \beta \frac{\partial\sigma}{\partial\rho_1} = 0. \tag{11}$$

A cada una de las soluciones A_i corresponderá de esta manera una solución a_i de la ecuación en σ, y las ecuaciones (6) tomarán la forma

$$\Sigma \frac{\partial a_i}{\partial\rho} \varphi_i(x, y, z) = 0, \quad \Sigma \frac{\partial a_i}{\partial\rho_1} \varphi_i(x, y, z) = 0 \tag{12}$$

en las que ρ y ρ_1 entran de igual modo y las a_i son soluciones particulares de la ecuación (11).

M. Darboux deduce de estas consideraciones algunas consecuencias importantes. Llamando *superficies singulares* de la congruencia á las superficies engendradas por curvas de la misma, que se cortan sucesivamente, observa que hay generalmente tantas series de superficies singulares como puntos focales en cada curva de la congruencia.

Pero en el caso de que se trata, por el contrario, hay solamente dos series de superficies singulares, que contienen respectivamente todas las curvas de la congruencia para las que ρ ó ρ_1 conservan valores constantes. Y se obtendrán unas y otras, eliminando ya ρ, ya ρ_1 entre las dos ecuaciones (12).

Para demostrar que cada una de estas ecuaciones (12), considerada sola, representa una superficie tangente, en todos los puntos de la curva de la congruencia, á una de las superficies singulares, que contienen dicha curva, escribamos

$$P = \Sigma a_i \varphi_i (x, y, z).$$

P, considerada como función ρ y de ρ_1, satisfará á la ecuación

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \rho \partial_1} + \alpha \frac{\partial P}{\partial \rho} + \beta \frac{\partial P}{\partial \rho_1} = 0 \tag{14}$$

y las ecuaciones (12) se simplificarán, tomando la forma

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \rho_1} = 0. \tag{15}$$

Si diferenciamos totalmente estas ecuaciones, obtendremos, teniendo en cuenta la ecuación (14),

$$d\frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} d\rho = 0, \quad d\frac{\partial P}{\partial \rho_1} + \frac{\partial^2 P}{\partial \rho_1{}^2} d\rho_1 = 0,$$

refiriéndose la diferencial d á x, y, z tan sólo.

La ecuación del plano tangente á la superficie $\rho =$ const., será pues $d\frac{\partial P}{\partial \rho} = 0$.

Si se trata de una congruencia rectilínea, las dos ecuaciones (15) representan los planos focales de la recta, y si la congruencia está formada por círculos, representan dos esferas que pueden llamarse también esferas focales, y que contienen á una de las circunferencias infinitamente próximas á la propuesta, que la cortan en dos puntos.

Entre las consecuencias á que llega M. Darboux, citaremos el siguiente

TEOREMA. *En toda envolvente de esferas con dos parámetros hay, en general, dos series de líneas, que llamaremos* LÍNEAS PRINCIPALES *de la envolvente, definidas por la propiedad de que, cuando se recorre una de ellas, los cuatro puntos de contacto de las dos esferas infinitamente próximas con la envolvente, están en una misma circunferencia que llamaremos* CIRCUNFERENCIA PRINCIPAL. *Las líneas principales, son las características de la ecuación de derivadas parciales que admiten por soluciones particulares las cinco coordenadas homogéneas de las esferas variables.*

286. GEOMETRÍAS ESFÉRICAS *b).* Un sistema geométrico importante es el de las geometrías esféricas de Lie (véase pág. 430) elemental y superior *(Kugel geometrie).* Escribamos la ecuación de la esfera bajo la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2Bx - 2Cy - 2Dz + E = 0, \qquad (1)$$

considerando á B, C, D, E como coordenadas de la esfera; entonces el espacio se ofrece como una variedad de cuatro dimensiones.

Para el radio de la esfera, tendremos la expresión

$$R^2 = B^2 + C^2 + D^2 - E,$$

como relación que une la quinta cantidad R con las cuatro coordenadas A, B, C, D.

Hagamos, para introducir coordenadas homogéneas,

$$B = \frac{b}{a}, \quad C = \frac{c}{a}, \quad D = \frac{d}{a}, \quad E = \frac{e}{a}, \quad R = \frac{r}{a};$$

entonces $a : b : c : d : e$ serán las cinco coordenadas de la esfera y la sexta cantidad r se refiere á ellas por medio de la ecuación homogénea de segundo grado

$$r^2 = b^2 + c^2 + d^2 - ae. \qquad (2)$$

En la geometría *esférica elemental* se emplean tan solo las cinco coordenadas $a : b : c : d : e$, mientras que se introduce, en la *superior*, la cantidad r. En este sistema, la esfera tiene seis coordenadas homogéneas, a, b, c, d, e, r, unidas por la ecuación (2).

Cada una de estas geometrías está caracterizada por el grupo que le corresponde.

En la elemental, el grupo está formado por todas las sustituciones lineales de las cinco cantidades a, b, c, d, e que dejan invariable la ecuación homogénea de segundo grado

$$b^2 + c^2 + d^2 - ae = 0, \tag{3}$$

que da $\infty^{20-15} = \infty^{10}$ sustituciones. El significado geométrico de la ecuación (3) consiste en que el radio es cero. Cada esfera de radio cero, es decir, cada punto, se transforma en un punto. Y puesto que la polar

$$2bb' + 2cc' + 2dd' - ae' - a'e = 0 \tag{4}$$

permanece invariable en la transformación, resulta que las esferas ortogonales se transforman en esferas ortogonales. Así, el grupo de la geometría elemental esférica es el *grupo conforme*.

Una ecuación de segundo grado

$$F(a, b, c, d, e) = 0,$$

tomada con la relación (3) representa la superficie puntual, llamada *cíclida* por M. Darboux, cuyo estudio ha hecho en su obra citada; y Mr. Bôcher ha relacionado este estudio con la teoría del potencial (*).

En la geometría esférica superior, las seis coordenadas homogéneas $a : b : c : d : e : r$ se hallan ligadas por la ecuación de segundo grado

$$b^2 + c^2 + d^2 - r^2 - ac = 0. \tag{5}$$

El grupo correspondiente es el de la sustitución lineal, que transforma en sí á esta ecuación, ó el de $\infty^{36-21} = \infty^{15}$ sustituciones.

(*) M. Bôcher, *Ueber die Reihenenwickelungen der Potential theorie.*

Haciendo $B' = B$, $C' = C$, $D' = D$, $E' = E$, $R' = R +$ const. la transformación consiste en una dilatación de cada esfera, hasta llegar á una esfera de radio dado. Y, permaneciendo invariable la ecuación polar

$$2bb' + 2cc' + 2dd' - 2rr' - ae' - a'e = 0$$

por toda transformación del grupo, las esferas en contacto seguirán en contacto, perteneciendo el grupo á la clase de *transformaciones de contacto*, tratada en sus obras, por Sophus Lie.

Una ecuación $F(a, b, c, d, e, r) = 0$ representa un complejo de primero, segundo, ... grado, según el grado de la ecuación, de ∞^3 esferas. Dos ecuaciones $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ representan una congruencia de ∞^2 esferas, tres, una serie de esferas.

En la geometría ordinaria, una superficie se concibe como un lugar de puntos, en la de Lie, como la totalidad de todas las esferas tangentes á una superficie.

Nuevos detalles pueden verse en las obras de Herr Klein, *Lectures on Mathematics* y *Höhere Geometrie*, t. I, págs. 208-232 y en la obra citada de M. Darboux, t. I, lib. IV, cap. XV.

287. Sistemas de cíclidas homofocales. Para demostrar que el sistema de cíclidas homofocales es triplemente ortogonal, vamos á expresar que, dadas dos ecuaciones homogéneas respecto á las cinco cantidades S, representan dos superficies ortogonales. Empleando la notación ya empleada en la página 419, tendremos

$$(\varphi, \psi) = \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial S_i} \frac{\partial \psi}{\partial S_j} (S_i, S_j). \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$$

Pero según las ecuaciones (16_1 y 16_2) de la pág. 419, esta ecuación puede escribirse así,

$$(\varphi, \psi) = 2\left(\Sigma S_i \frac{\partial \varphi}{\partial S_i}\right)\left(\Sigma \frac{\partial \psi}{\partial S_i}\right)$$
$$+ 2\left(\Sigma S_i \frac{\partial \psi}{\partial S_i}\right)\left(\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial S_i}\right) + 4\,\Sigma R_i^2 \frac{\partial \varphi}{\partial S_i} \frac{\partial \psi}{\partial S_i}; \qquad (1)$$

y por ser nulos los dos primeros términos del segundo miembro, en virtud de la ecuación homogénea de las dos superficies, la relación de ortogonalidad toma la forma simple

$$\Sigma R_i^2 \frac{\partial\varphi}{\partial S_i}\frac{\partial\psi}{\partial S_i} = 0 \quad \text{ó} \quad \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial\left(\frac{S_i}{R_i}\right)\partial\left(\frac{S_i}{R_i}\right)} = 0. \qquad (2)$$

Esta ecuación se verificará para dos cíclidas pertenecientes al sistema definido por la ecuación

$$\sum_1^5 \frac{\left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2}{\lambda - a_i} = 0. \qquad (3)$$

Luego: *Dos cíclidas homofocales se cortan según ángulo recto, en todos los puntos de su intersección.*

Para demostrar que pasan tres cíclidas reales por un punto cualquiera del espacio, supongamos que de las cinco esferas una p. e. (S_5) tenga un radio imaginario $+ k\sqrt{-1}$. La ecuación del sistema será

$$\frac{\left(\frac{S_1}{R_1}\right)^2}{\lambda - a_1} + \frac{\left(\frac{S^2}{R_2}\right)^2}{\lambda - a_2} + \frac{\left(\frac{S_3}{R_3}\right)^2}{\lambda - a_3} + \frac{\left(\frac{S_4}{R_4}\right)^2}{\lambda - a_4} - \frac{\left(\frac{S_5}{R_5}\right)^2}{\lambda - a_5} = 0.$$

Cuando λ es la incógnita, da tres raíces reales, una entre a_1 y a_2 y las otras dos entre a_2 y a_3, entre a_3 y a_4. Las cíclidas correspondientes son reales.

Cuando se hace en la ecuación (3), $\lambda = a_i$, la superficie se reduce á una esfera doble ó, mejor, á la parte de esta esfera, limitada por la focal. Cuando λ se aproxima á a_1, por ejemplo, la intersección de la cíclida y de la esfera (S_i) se aproxima á la curva límite

$$S_1 = 0, \qquad \frac{\left(\frac{S_2}{R_2}\right)^2}{a_1 - a_2} + \frac{\left(\frac{S_3}{R_3}\right)^2}{a_1 - a_3} + \frac{\left(\frac{S_4}{R_4}\right)^2}{a_1 - a_4} \frac{\left(\frac{S_5}{R_5}\right)^2}{a_1 - a_5} = 0.$$

Y lo mismo sucede para las otras focales.

288. Nuevo sistema de coordenadas aplicable á las cíclidas. Las cinco cantidades S_i definidas en la pág. 457, que son las potencias de un punto con relación á cinco esferas ortogonales, pueden considerarse como un sistema especial de coordenadas, que ya se trató en las coordenadas pentaesféricas.

El sistema de cíclidas homofocales origina un sistema de coordenadas curvilíneas, análogo al de las coordenadas elípticas de Lamé, Jacobi y Liouville.

Llamando ρ, ρ_1, ρ_2 á los parámetros de las tres cíclidas homofocales que pasan por un punto del espacio, estos parámetros son raíces de la ecuación

$$\Sigma \frac{(S_i : R_i)^2}{\lambda - a_i} = 0.$$

Quitemos denominadores, y expresemos por M el coeficiente de λ^3, tendremos

$$\Sigma \frac{(S_i : R_i)^2}{\lambda - a_i} = \frac{M(\lambda - \rho)(\lambda - \rho_1)(\lambda - \rho_2)}{(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)\ldots\ldots(\lambda - a_5)}.$$

Haciendo por brevedad $f(\lambda) = (\lambda - a_1)\ldots\ldots(\lambda - a_5)$, si descomponemos el segundo miembro en fracciones racionales, é identificamos, será

$$\left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2 = \frac{M(a_i - \rho)(a_i - \rho_1)(a_i - \rho_2)}{f'(a_i)}.$$

ó abreviadamente, $$\frac{S_i}{R_i} = \sqrt{M} \, . \, H_i.$$

Estas ecuaciones dan las cantidades S_i; y podremos obtener inmediatamente x, y, z en función de ρ, ρ_1, ρ_2.

Ya vimos que se puede determinar un punto, no sólo por las cinco coordenadas S_i, sino por sus relaciones, y que la fórmula $\sum_1^5 x_i^2 = 0$ puede escribirse bajo la forma

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = \frac{\Sigma (x_i - x_i)^2}{\Sigma \frac{x_i}{R_i} \; \Sigma \frac{x'_i}{R_i}},$$

ó cuando la distancia de $(x\,y\,z)$ y (x', y', z') es infinitamente pequeña, bajo la forma

$$ds^2 = \sum_1^5 dx_i^2 : \left(\sum_1^5 \frac{x_i}{R_i}\right)^2.$$

Una de las propiedades más importantes del sistema de coordenadas de que se trata, es su independencia de una transformación por radios vectores recíprocos.

De manera, que si se le somete á una inversión las cinco esferas (S_i) se cambian en otras cinco nuevas esferas (S'_i) y toda esfera, punto ó plano (U), se cambia en una esfera (U'), que tiene respecto á las (S'_i) las mismas coordenadas que (U) respecto á las (S_i), *estudiándose en este sistema de coordenadas y en la misma ecuación, al mismo tiempo que una figura, todas sus transformadas por radios vectores recíprocos.*

Las nuevas coordenadas son proporcionales á las cantidades $\frac{S_i}{R_i}$ ó $2d_i$, si la esfera de base S_i se cambia en un plano, y todo punto quedará determinado por las cinco coordenadas homogéneas $x_i = \lambda \frac{S_i}{R_i}$, ligadas por la ecuación $\Sigma m_i^2 = 0$.

289. SUPERFICIE DE LOS CENTROS DE CURVATURA. La condición para que una esfera $\Sigma m_i x_i = 0$ sea tangente á la ciclida $\Sigma \frac{x_i^2}{\alpha - a_i} = 0$ es que la ecuación en μ

$$\Sigma \frac{m_i^2}{\frac{1}{a_i - \alpha} - \mu} = 0,$$

tenga una raíz doble. Haciendo $\mu = 1 : (\lambda - \alpha)$, tendremos:

$$-\frac{\Sigma m_i^2}{\lambda + \alpha} + \Sigma \frac{m_i^2}{\lambda - a_i} = 0. \qquad (1)$$

La esfera será tangente á la ciclida, cuando sean iguales dos raíces, por ejemplo, $\rho_2 = \rho_3 = u$.

Dada una esfera (m_i), la ecuación (1) tendrá, en general, cuatro raíces distintas $\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3$; y se verificará la identidad

$$-\frac{\Sigma m_i^2}{\lambda - \alpha} + \Sigma \frac{m_i^2}{\lambda - a_i} = \frac{M(\lambda - \rho)(\lambda - \rho_1)\ldots\ldots(\lambda - \rho_3)}{(\lambda - \alpha)\,\omega(\lambda)}$$

haciendo $\omega(\lambda) = (\lambda - a_1)\ldots\ldots(\lambda - a_6)$.

Y si repetimos el razonamiento hecho en la página 484, obtendremos para las coordenadas de un punto de la ciclida, la fórmula

$$x_i = \sqrt{\frac{M(a_i - \alpha)(a_i - \rho)(a_i - \rho_1)}{\omega'(a_i)}}.$$

Si en vez de dar á u un valor constante se le da el valor ρ ó ρ_1, tres raíces de la ecuación (1) se hacen iguales; la esfera y la ciclida son osculatrices. Las ecuaciones

$$m_i^2 = \frac{M(a_i - \rho)^3 (a_i - \rho_1)^2}{\omega'(a_i)\, a_i - \alpha}, \quad \Sigma m_i^2 = \frac{M(\alpha - \rho)^3(\alpha - \rho_1)}{-\omega(\alpha)}$$

determinan todas las esferas osculatrices, cuando se dan á ρ y ρ_1 todos los valores posibles. Los centros de estas esferas describen la evoluta de la ciclida. (*)

Completando algunos resultados anteriores, diremos que:

Existe entre las potencias, respecto á cinco esferas no ortogonales á una misma esfera, una relación cuadrática homogénea, que contiene, en general, los rectángulos de las variables.

La ecuación $\sum_1^5 \frac{a_i x_i^2}{\lambda - ei} = 0$ *entre coordenadas pentaesféricas con la identidad* $\sum_1^5 a_i x_i^2 = 0$ *representa un sistema triple ortogonal de ciclidas homofocales.*

290. Aplicación de la teoría de los factores primarios. Es importante el hacer algunas indicaciones acerca de la aplicación de la teoría de los factores primarios de Weierstrass á la

(*) Darboux. *Sur una classe remarquable de courbes*, p. 304.

teoría de las cíclidas homofocales, expuestas en la obra citada de Mr. Bôcher.

Aunque ya en el tomo II (pág. 158) se han hecho algunas indicaciones respecto á los factores primarios, podemos ahora insistir nuevamente, para dar á conocer algunos resultados, debidos á MM. Picard y Borel, que se relacionan con el concepto de *género de las funciones.*

Se llama *función entera* á una función analítica, que no admite ninguna singularidad á distancia finita. Siguiendo á M. Borel en sus *Leçons sur les fonctions entières*, dada una función entera

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots\ldots + a_m z^m + \ldots\ldots, \qquad (1)$$

podemos proponernos estudiar su modo de variar, cuando z se mueve en su plano.

La primera proposición que se presenta es el teorema de Cauchy: F (z) *no puede permanecer finita, sin reducirse á una constante*, ó más generalmente:

Si existe un número m tal, que (excepto en la proximidad de $z = 0$) el cociente $\frac{F(z)}{z^m}$ sea inferior á un número fijo M, *se puede afirmar que* F (z) *se reduce á un polinomio del grado* m *á lo más.*

En efecto, dividiendo los dos miembros de (1) por z^{m+q+1}, é integrando á lo largo de una circunferencia C cuyo centro sea el origen, se tiene

$$\int \frac{F(z)\,dz}{z^{m+q+1}}\ 2\pi i a_{m+q},$$

porque la integral de los demás términos del segundo miembro es nula á lo largo de un cortorno cerrado.

Ahora bien, la longitud del contorno de integración es $2\pi R$, siendo R el radio del círculo C; y puesto que el módulo de F (z) es inferior á MR^m, el módulo del primer miembro es menor que $\frac{2\pi M}{R^q}$ y, por consiguiente, para cualquier valor de R, será $|a_{m+q}| < \frac{M}{R^q}$. Así pues, $a_{m+q} = 0$ para cualquier valor positivo de q.

Otro resultado importante debido á M. Hadamard es el siguiente: Hagamos

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta), \quad a_m = \alpha_m + i\beta_m,$$
$$F(z) = P(r, \theta) + iQ(r, \theta).$$

Tendremos, separando lo real y lo imaginario,

$$P(r, \theta) = \alpha_0 + (\alpha_1 \cos\theta - \beta_1\,\text{sen}\,\theta)\,r + \ldots\ldots$$
$$+ (\alpha_m \cos m\theta - \beta_m\,\text{sen}\,m\theta)\,r^m + \ldots\ldots$$

y resultará
$$2\pi\alpha = \int_0^{2\pi} P(r, \theta)\,d\theta, \tag{2}$$
$$r^m\alpha_m = \int_0^{2\pi} P(r, \theta)\cos m\theta\,d\theta, \qquad m \neq 0$$
$$\pi r^m\beta_m = -\int_0^{2\pi} P(r, \theta)\,\text{sen}\,m\theta\,d\theta, \qquad m \neq 0$$
y
$$\pi r^m a_m = \int_0^{2\pi} P(r, \theta)\,e^{-im\theta}\,d\theta,$$
después de observar que
$$\alpha_m + i\beta_m = a_m, \qquad \cos m\theta - i\,\text{sen}\,m\theta = e^{-im\theta};$$
y, puesto que el módulo de $e^{\,im\theta}$ es igual á la unidad,
$$\pi r^m |a_m| \leqq \int_0^{2\pi} |P(r, \theta)|\,d\theta. \tag{3}$$

Las relaciones (2) y (3) dan, por adición y sustracción,

$$\pi r^m |a_m| + 2\pi\alpha_0 \leqq \int_0^{2\pi} [|P(r, \theta)| + P(r, \theta)]\,d\theta,$$
$$\pi r^m |a_m| - 2\pi\alpha_0 \leqq \int_0^{2\pi} [|P(r, \theta)| - P(r, \theta)]\,d\theta.$$

Consideremos la primera de estas dos desigualdades. La cantidad por integrar es nula, cuando P es negativo, é igual á 2P cuando es positivo. Si pues, expresamos por $A(r)$ el máximo de los valores *positivos* de $P(r, \theta)$, cuando r es constante y θ varía desde 0 hasta 2π, tendremos

$$\pi r^m |a_m| + 2\pi\alpha_0 \leqq 4\pi A(r). \tag{4}$$

Igualmente, si expresamos por $B(r)$ el máximo de los valores positivos de $-P(r, \theta)$, para r constante y θ variable, la segunda de las desigualdades dará

$$\pi r^m |a_m| - 2\pi\alpha_0 \leqq 4\pi B(r). \qquad (5)$$

Observaremos ahora, que el segundo miembro de (4), por ejemplo, solo depende de valores *positivos* de la parte *real* de $F(z)$.

Si pues, se supone que la parte real de z es siempre *algebraicamente* inferior á Mr^q, expresando r el módulo de z, M y q números fijos positivos, resultará que a_m es nulo para $m > q$, es decir, que $F(z)$ se reduce á un polinomio. De manera que, cuando $F(z)$ no sea un polinomio, se podrá afirmar, no solamente que su módulo excede á todo número asignable, sino además que su parte real $P(r, \theta)$ [y también $Q(r, \theta)$] toma valores ya positivos, ya negativos, superiores en valor absoluto á cualquier número dado y aun á Mr^q, cualesquiera que sean los números fijos M y q.

Para llegar á nuestro objeto, recordaremos con M. Borel el teorema de Weiestrass, cuya demostración expuesta por M. Picard en su *Traité d'Analyse* (t. II) expusimos en el tomo II (pág. 242):

En la proximidad de un punto singular esencial, una función uniforme puede aproximarse cuanto se quiera á cualquier valor dado.

Consideremos, por otra parte, una función entera $F(z)$ tal, que la ecuación $F(z) = 0$ no tenga raíces, y hagamos $G(z) = \log F(z)$.

La función $G(z)$ es regular en cualquier punto del plano, pues $F(z)$ no es nunca nula ni infinita, es por tanto, una función entera que no tiene ceros.

Consideremos ahora una función $F(z)$ tal, que no tengan raíces las ecuaciones $F(z) = 0$, $F(z) = 1$; y designemos por $\omega(z)$ la función modular, es decir, la función que expresa por medio del módulo, la relación de los períodos de una función elíptica. Se sabe que la función $\omega(x)$ admite solamente los puntos singulares 0, 1, ∞, y además, que el coeficiente de i en $\omega(x)$ es siempre del mismo signo, por ejemplo, positivo. Sea la función $\omega[F(z)]$. Será una función regular en cualquier punto á distancia finita, por consiguiente una función entera, que según se ha observado, deberá reducirse á una constante, porque su parte imaginaria es constantemente positiva. El máximo de los valores negativos de $-Q(r, \theta)$ es cero, quedando demostrado el teorema de M. Picard:

Una función entera F (z) *tal, que las ecuaciones*

$$F(z) = a, \quad F(z) = b \qquad (a \neq b)$$

no tenga raíces, se reduce necesariamente á una constante.

Observación. Hemos visto que las funciones enteras son de la forma $F(z) = e^{G(z)}$, siendo $G(z)$ una función entera (ó un polinomio). Si $G(z)$ no es polinomio, la parte real de $G(z)$ se hace superior algebraicamente á Mr^q, cualesquiera que sean M y q (r es el módulo de z); luego el módulo de $F(z)$ se hace superior á e^{Mr^q}. La función $F(z)$ toma pues, valores mayores que en el caso de ser $G(z)$ un polinomio de grado cualquiera, pero determinado.

La forma de un polinomio $P(z)$ de grado m es

$$P(z) = A(z - a_1)(z - a_2) \ldots\ldots (z - a_m).$$

Siendo los ceros de una función entera, $F(z)$ en número limitado dentro de un área finita, los podemos colocar según el orden de magnitud de sus módulos. Así, tendremos $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_m, \ldots\ldots$ y haciendo $|a_m| = r_m$, será

$$r_1 \leqq r_2 \leqq r_3 \leqq \ldots\ldots \leqq r_m \leqq \ldots\ldots$$

Supongamos que *la serie de términos positivos*

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{r_m} + \ldots\ldots \qquad (6)$$

sea convergente. En este caso, *el producto infinito*

$$\Pi(z) = \left(1 - \frac{z}{a_1}\right)\left(1 - \frac{z}{a_2}\right) \ldots\ldots \left(1 - \frac{z}{a_m}\right) \ldots\ldots$$

es absolutamente convergente, para todo valor de z, *y uniformemente convergente en todo dominio limitado.*

Supongamos $|z| \leqq r$. La convergencia absoluta y uniforme de

$\Pi(z)$ depende de la convergencia del producto infinito

$$\left(1+\frac{r}{r_1}\right)\left(1+\frac{r}{r_2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{r}{r_m}\right)\cdots\cdots,$$

que depende á su vez de la convergencia de la serie (6).

El producto $\Pi(z)$ representa pues, una función entera, que admite los mismos ceros que $F(z)$. El cociente $\frac{F(z)}{\Pi(z)}$ es por tanto una función entera, porque éste no podrá admitir por puntos singulares á distancia finita, más que los ceros de $\Pi(z)$, el cual es regular en estos puntos, y además no podrá ser nulo. Es pues una función entera sin ceros; luego se tiene $\frac{F(z)}{\Pi(z)}=e^{G(z)}$, siendo $G(z)$ una función entera. Luego, se tendrá que $F(z)=e^{G(z)}\,\Pi(z)$, es decir,

$$F(z)=e^{G(z)}\left(1-\frac{z}{a_1}\right)\left(1-\frac{z}{a_2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{z}{a_m}\right)\cdots\cdots;$$

y puesto que r_n aumenta indefinidamente, *podemos hallar una serie de números enteros positivos* $\rho_1, \rho_2, \ldots\ldots \rho_n, \ldots\ldots$ *tales que sea convergente, para cualquier valor de* r, *la serie de términos positivos*

$$\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\rho_1}+\left(\frac{r}{r_2}\right)^{\rho_2}+\cdots\cdots+\left(\frac{r}{r_n}\right)^{\rho_n}+\cdots\cdots; \qquad (7)$$

lo que se verifica siempre, si se toma $\rho_n = n$, pues el término general de la serie (7) es $\frac{r}{r_n}$; luego tiende hacia cero para n infinito. Para este fin, basta que hagamos $\rho_n = E\,(\log n)$ expresando $E\,(x)$ la parte entera de x, pues

$$\left(\frac{r}{r_n}\right)^{\log n} = e^{(\log r - \log r_n)\log n} = n^{\log r - \log r_n};$$

y puesto que r_n aumenta indefinidamente con n, los términos de la serie (7) son, á partir de cierto lugar, inferiores á los de la serie Σn^{-q} para cualquier número fijo q. Luego la serie (7) es convergente. Esto sentado, llamaremos *factor primario de género k* á la expresión

$$P_k(u) = (1 - u)\, e^{\frac{u}{1} + \frac{u^2}{1} + \frac{u^3}{3} + \cdots + \frac{u^k}{k}},$$

en la que el exponente de e se halla formado por los k primeros términos del desarrollo en serie de $\log \dfrac{1}{1-u}$. Tenemos además

$$\log P_k(u) = \log(1 - u) + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{2} + \cdots + \frac{u^k}{k}$$

$$= -\frac{u^{k+1}}{k+1} - \frac{u^{k+2}}{k+2} - \frac{u^{k+3}}{k+3} - \cdots - \cdots$$

Luego: $P_k u = e^{-\frac{u^{k+1}}{k+1} - \frac{u^{k+2}}{k+2} - \cdots} = 1 + \beta_1 u^{k+1} + \cdots$

En sus *Leçons sur les fonctions entières*, M. Borel demuestra la convergencia uniforme y absoluta para $|z| < r$, del producto infinito

$$\Pi(z) = P_{\rho_1}\left(\frac{z}{a_1}\right) P_{\rho_2}\left(\frac{z}{a_0}\right) \cdots P_{\rho_n}\left(\frac{z}{a_n}\right) \cdots$$

en el que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números cuyos módulos se expresan por $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ para llegar al notable teorema de Weierstrass:

Dada una serie infinita cualquiera de números cuyos módulos crecen indefinidamente, es posible formar un producto de factores primarios, de los que cada uno se anula por uno de estos números, siendo dicho producto absoluta y uniformemente convergente en todo dominio finito, por lo que representa una función entera.

Mr. Bôcher aplica la teoría de Weierstrass al estudio de las series de cíclidas homofocales.

Siendo $\Phi = 0$ una cíclida, λ el parámetro de la serie y $\Omega = 0$ la identidad subsistente entre las coordenadas x_i, tendremos una serie de cíclidas $\lambda\Omega - \Phi = 0$, y nos proponemos transformarla en otra $\lambda\Omega' - \Phi' = 0$ por una sustitución lineal. Sean

$$\Omega = \sum_1^5 \sum_1^5 a_{jk}\, x_j\, x_k, \quad \Phi = \sum_1^5 \sum_1^5 b_{jk}\, x_j\, x_k$$

y el discriminante de $\lambda\Omega - \Phi$ la expresión $|\lambda a_{jk} - b_{jk}|$. Expresemos además la transformada de una cantidad c mediante $\overline{c}$, y tendremos

$$|\lambda a_{jk} - b_{jk}| \equiv \frac{1}{r^2} |\lambda \overline{a}_{jk} - \overline{b}_{jk}|,$$

siendo r el determinante de la transformación.

Para establecer la dependencia entre las raíces λ_i y λ_i', observaremos que las raíces de $|\overline{a}_{jk} - \overline{b}_{jk}| = 0$ son iguales á las λ_i; haciendo

$$\Omega' = \alpha\overline{\Omega} - \gamma\overline{\Phi}, \quad \Phi' = \beta\overline{\Omega} - \delta\overline{\Phi},$$

la serie $\lambda'\Omega' - \Phi' = 0$ es idéntica con la serie $\lambda\overline{\Omega} - \overline{\Phi} = 0$. Tendremos que

$$\frac{\alpha\lambda' - \beta}{\gamma\lambda' - \delta}\overline{\Omega} - \overline{\Phi} = 0;$$

y expresando el coeficiente de $\overline{\Omega}$ por λ, será

$$\lambda_i = \frac{\alpha\lambda'_i - \beta}{\gamma\lambda'_i - \delta}.$$

Así pues: *La condición necesaria y suficiente para que dos series de formas $\lambda\Omega - \Phi$ y $\lambda'\Omega' - \Phi'$ sean equivalentes, es que las raíces λ_i' del discriminante se hallen en relación proyectiva con las raíces λ_i' de la otra serie.*

Sea λ_i una raiz, cuyo grado de multiplicidad es ν^i en el determinante de quinto orden, es decir, que se anula ν_i veces para $\lambda = \lambda_i$, y análogamente ν_1^i veces para el primer determinante menor, y así sucesivamente, de modo que se verifique la serie de desigualdades

$$\nu^i \geqslant \nu_1^i \geqslant \nu_2^i \geqslant \ldots\ldots$$

Las diferencias

$$e_1^i = \nu^i - \nu_1^i, \quad e_2^i = \nu_1^i - \nu_2^i, \quad e_3^i = \nu_2^i - \nu_3^i; \ldots\ldots$$

son positivas, y tendremos la descomposición en el producto

$$|\lambda a_{jk} - b_{jk}| = \prod_i (\lambda - \lambda_i)^{\nu^i} = \Pi \mid (\lambda - \lambda_i)^{e_1^i} (\lambda - \lambda_i)^{e_2^i} \ldots\ldots;$$

$(\lambda - \lambda)^{e_n^i}$ son los factores primarios.

Un divisor primario es la suma de los factores que desaparecen *cuando se pasa del determinante* $|\lambda a_{jk} - b_{jk}|$ *al determinante primero menor, y del primero al segundo*, etc,; y puesto que la proyectividad de las λ_i es la condición necesaria y suficiente para que las dos series de formas sean equivalentes, se reduce ahora á *la coincidencia de las multiplicidades* $e_n{}^i$ *de sus factores primarios*. En estas consideraciones funda Mr. Bôcher su interesante clasificación de las cíclidas, que puede estudiarse en la obra citada.

291. LAS GEOMETRÍAS PROYECTIVA Y MÉTRICA. Podemos proponernos la cuestión de, *si la geometría proyectiva puede establecerse, de manera que sea independiente del concepto de carácter métrico de la distancia y el ángulo, con sus teoremas de la geometría elemental acerca de la superposición (congruencia), semejanza*, etc.

Desde luego la geometría proyectiva es independiente del postulado de Euclides, mientras que los teoremas de la métrica no pueden prescindir de éste ó de otros axiomas equivalentes.

Partiendo de la determinación de la recta por dos puntos y del plano por tres, la figura más sencilla de la geometría proyectiva es el cuadrilátero completo; y es suficiente para nuestro objeto, el hacer breves indicaciones del método de Staudt, que por construcciones sucesivas de dicho cuadrilátero, determina una serie de puntos en una recta: *el cuarto punto armónico*.

Así, cada cuatro puntos;

$$P_\infty P_{\frac{1}{2}} P_0 P_1, \quad P_\infty P_{\frac{1}{4}} P_0 P_{\frac{1}{2}}, \quad \ldots\ldots \quad P_\infty P_{2^{-\alpha-1}} P_0 P_{2^{-\alpha}}$$

se hallan en relación armónica. Por cada entero $\mu = 2^\alpha$, se obtiene el punto correspondiente á cada denominador, al establecerse que

$$P_\infty P_{\frac{\nu}{\mu}} P_{\frac{\nu-1}{\mu}} P_{\frac{\nu+1}{\mu}}$$

se hallan en relación armónica:

1.º Si dos números α β son iguales, los puntos correspondientes coinciden.

2.º Los puntos siguen en la misma serie que sus números correspondientes.

Cada número (racional ó irracional) arbitrario σ, que no se expresa por una potencia de 2 en el denominador, se puede determinar cuando se puede obtener, para una potencia 2^μ un entero tal, que se tenga

$$\frac{\alpha}{2^\mu} < \sigma < \frac{\alpha + 1}{2^\mu}.$$

Sea $\alpha_0 = \beta_0, \quad \frac{\alpha_1}{2} = \beta_0 + \frac{\beta_1}{2}, \quad \frac{\alpha_2}{2^2} = \beta_0 + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{2^2} + \ldots.$

donde $\qquad \beta_1 < 2, \quad \beta_2 < 2, \quad \ldots.$

El número σ se determina por una serie convergente

$$\beta_0 + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{2^2} + \frac{\beta_3}{2^3} + \ldots;$$

y el tránsito á los números irracionales es sencillo; pero no insistimos en este particular.

La construcción de puntos, mediante el empleo del cuadrilátero complejo conduce á Clebsh al siguiente enunciado, útil para la consideración de los sistemas geométricos:

Existen dos números positivos m' *y* m'' *tales que* m'' $>$ m', *de modo que á los números desde* o *hasta* — m' *y á los comprendidos entre* — m'' *y* — ∞ *correspondan en la recta* AC, *respectivamente, puntos á la izquierda de* A *ó á la derecha de* C, *mientras que los números negativos* — n, *que satisfacen á la condición* m' $<$ n $<$ m'' *no tienen puntos que les correspondan.*

Sin entrar en más desarrollos, enunciaremos el conocido

TEOREMA. *Si dos figuras fundamentales son proyectivas, podemos relacionar arbitrariamente tres eleméntos de una con tres elementos de la otra, de manera que á cada elemento de la una corresponda un elemento de la otra.*

292. LA GEOMETRÍA ANALÍTICA. Bastará decir respecto á esta geometría, que su moderno desarrollo estriba en el concepto de la relación anarmónica de cuatro puntos. Se trata de que sean equivalentes las ecuaciones $P_3 = 0$ y $P_4 = 0$ con las

$$P_1 + \lambda_1 P_2 = 0, \quad P_1 + \lambda_2 P_2 = 0.$$

Los valores de x_3 y x_4 están dados por

$$x_3 = \frac{x_1 + \lambda_1 x_2}{1 + \lambda_1}, \quad x_4 = \frac{x_1 + \lambda_2 x_2}{1 + \lambda_2},$$

y la relación anarmónica de los cuatro puntos x_1, x_2, x_3, x_4 se expresa por

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \cdot \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} = (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

En esta relación se funda la nueva geometría analítica á la que Chasles primero y después Ovidio, Fiedler, Clebsch y Salmon han conseguido á darle su forma definitiva actual, de la que escribieron, en italiano el Sr. Lazzeri y en español el Sr. Vegas, dos tratados, dispuestos para la enseñanza, en su período medio.

293. Introducción de los conceptos métricos en la geometría proyectiva. Cayley consiguió reducir la geometría proyectiva á ser un caso particular de la geometría métrica, introduciendo un nuevo concepto de la distancia y del ángulo, dependientes de la relación anarmónica (véase t. III, *Introducción*, p. XIV).

Dada una figura en el espacio, tomemos por *superficie absoluta* la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

Entonces, la distancia de dos puntos (x, y, z) y (x', y', z') estará dada por la fórmula

$$\cos^2 \delta = \frac{(xx' + yy' + zz' - R^2)^2}{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2 - R^2)}$$

y se tendrá también,

$$\operatorname{sen}^2 \delta = \frac{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)(x'^2 + \ldots\ldots) - (xx' + \ldots\ldots)^2}{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)(x'^2 + y'^2 - z'^2 - R^2)};$$

si el punto (x', y', z') está próximo al (x, y, z), podremos escribir

$$d\sigma^2 = \frac{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (x\,dx + \ldots)^2}{(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)^2}.$$

Cayley sustituyó al círculo del infinito una cuádrica, y considerando dos planos (P), (P') y otros dos planos tangentes á ésta, trazados por la intersección de los dos primeros, definió el ángulo mediante la función V, dada por la ecuación, que modificada por Klein, se reduce á

$$e^{2iV} = R, \quad V = \frac{1}{2i} \log R,$$

en la que R expresa, la relación anarmónica de los cuatro planos, y análogamente respecto á la distancia, según se indicó en el t. III (*Introducción*, p. XII), puesto que en vez de la relación $D_1 + D_2 = D_3$ existente entre las distancias sucesivas $12 + 23 = 13$ de los tres puntos 1, 2, 3, para las relaciones anarmónicas

$$R(xx')_1 = \frac{(x\xi)(x'\xi')}{(x\xi')(x'\xi)}, \quad R(x'x'')_2 = \frac{(x'\xi)(x''\xi')}{(x'\xi')(x''\xi)},$$

$$R(xx'')_3 = \frac{(x\xi)(x'\xi')}{(x\xi')(x''\xi)}$$

rige la relación $R_1 . R_2 = R_3$, de manera que la función que se busca para la determinación métrica debe ser tal, que se tenga

$$F(R_1) + F(R_2) = F(R_3),$$

correspondiente al logaritmo.

294. Los sistemas geométricos. Considerando la figura fundamental ó absoluta $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$ ó $\Sigma_{xx} = 0$, siendo $\Sigma xx'$ la forma polar, podremos distinguir tres casos, según que las raíces de esta ecuación sean reales y distintas, imaginarias conjugadas ó reales é iguales, correspondientes á las determinaciones métricas, hiperbólica, elíptica y parabólica, ó las geometrías fundadas en la existencia de dos puntos reales, ninguno ó uno solo en el infinito, en cada recta. Así pues, la geometría parabólica (Euclídea) se presenta como un caso límite de las otras dos, el en que los dos puntos del infinito coinciden, correspondiente á la validez del axioma de la única paralela.

Dos casos podemos considerar, desde el punto de vista de la posición que los puntos correspondientes x y x' tienen respecto á los puntos fundamentales ξ y ξ'.

$$a)\quad \overline{\;|\xi \quad |x \quad |x' \quad |\xi'\;} \qquad b)\quad \overline{\;|\xi \quad |x \quad |\xi' \quad |x'\;}$$

1.º Cuando los puntos x y x_1, cuya distancia se trata de obtener, no se hallan separados por los ξ y ξ (fig. *a*), ó se hallan en el interior de $\xi\xi'$ la relación $\frac{(x\xi)\,(x'\xi')}{(x\xi')\,(x'\xi)}$ es siempre positiva.

2.º Cuando x y x' se hallan separados por ξ y ξ', dicha relación es negativa (fig. *b*). En el primer caso, el logaritmo de la relación anarmónica es real, en el segundo imaginario.

El Sr. Klein aplica estas consideraciones al mismo tiempo que á las series de puntos, ó á los haces de rectas, para lo cual emplea la palabra *Maassunterschied*, extensiva al segmento y al ángulo, que traduciremos *diferencia de medida.*

Sin entrar en detalles, que pueden estudiarse en su *Nicht-Eukidische Geometrie*, bastará, para esta ligera reseña, añadir que en la expresión de la diferencia métrica

$$\mathrm{M}\,(xx') = k \log \frac{\Sigma xx' + \sqrt{\Sigma^2{}_{xx'} - \Sigma_{xx}\,\Sigma_{x'x'}}}{\Sigma xx' - \sqrt{\Sigma^2{}_{xx'} - \Sigma_{xx}\,\Sigma_{x'x'}}}$$

la constante k es $\frac{i}{2}$, en la determinación elíptica, y que la longitud total de la recta es finita é igual á $2k\pi$; y puesto que el período de una función infinitiforme es $2ki\pi$, *la distancia de dos puntos de una recta en el caso elíptico, es una función finita con el período* $2\mathrm{k}\pi$.

En la determinación métrica, k *es igual á* $\frac{\mathrm{i}}{2}$, *y la figura considerada como absoluta ó fundamental de segundo grado, se reduce á los rayos del haz que pasan por los puntos circulares.*

Pasando á la determinación métrica hiperbólica, veremos que tenemos

$$\mathrm{R} = \frac{(x\xi)\,(x'\xi')}{(x\xi')\,(x'\xi)} = \infty \quad \text{ó} \quad \mathrm{R} = \frac{(x\xi)\,(x'\xi')}{(x\xi')\,(x'\xi)} = 0,$$

cuando x' tiende hacia ξ ó cuando x' tiende hacia ξ'. El logaritmo de la relación anarmónica es $+\infty$ en el primer caso, $-\infty$ en el segundo.

La recta tiene dos puntos en el infinito. Los puntos ξ y ξ' (figura *a*, pág. 498) son límites á que no se puede llegar por el movimiento de un punto, de igual modo que sucede respecto á un haz de rayos, que gira en uno ú otro sentido.

Respecto á la determinación métrica parabólica bastará decir, que, existiendo en la ecuación $\Sigma_{xx}=0$ dos raíces iguales, existirá en la figura fundamental un elemento doble; y puesto que los puntos ξ y ξ' coinciden, será $R=\frac{(x\xi)(x'\xi')}{(x\xi')(x\xi)}=1$.

La diferencia métrica (Maassunterschied), en la geometría parabólica, es la diferencia entre dos relaciones anarmónicas, de las que la una contiene los puntos x, 0, 1, ∞ *y la otra los puntos* x', 0, 1, ∞ (*).

295. El movimiento, los elementos invariantes y los grupos. En la Geometría elemental, el concepto de movimiento es fundamental. Dos segmentos son iguales, cuando pueden superponerse por una mutación ó cambio de lugar en el plano, y lo mismo diremos respecto á dos ángulos iguales.

Todo movimiento produce una correspondencia de los puntos de dos figuras.

Las coordenadas de los puntos de una figura se consideran como funciones de las coordenadas de los puntos de otra figura. Y estas funciones están relacionadas con el concepto de movimiento.

Ya hemos visto que se pueden referir los puntos x de una recta á los puntos $x=0$, $x=1$, $x=\infty$ y que existen dos números λ_1 y λ_2, que son negativos, cuando los puntos $x=0$, $x=1$ no están separados por los puntos $x=\infty$, y positivos en el caso contrario, caracterizados por la propiedad de que, en el primer caso, solo corresponden puntos reales de la recta á los valores positivos y negativos de x que no se hallen entre los límites λ_1 y λ_2; mientras que estos valores exceptuados, deben corresponder á los puntos en el infinito de la recta.

(*) F. Klein, *Nicht-Euklidische Geometrie*, I, p. 82.

Por un movimiento de la recta en sí, es decir, al resbalar, cada punto pasa á otro punto de la misma. Á cada valor real de x, que no se halla entre λ_1 y λ_2, corresponde otro valor de x, que no pertenece á estos valores excepcionales; pero un valor de x, al que no corresponde ningún punto de la recta, debe transformarse en tal valor. De esto se sigue, que los valores límites λ_1 y λ_2 deben relacionarse entre sí, es decir, que *los puntos del infinito deben permanecer fijos por un resbalamiento de la recta.* Podemos expresar la transformación bajo la forma $\xi = \varphi(x, a)$, dependiente de un parámetro a; á los valores $x = \lambda_1, \lambda_2$, corresponden respectivamente $\xi = \lambda_1, \lambda_2$ que, introduciendo las nuevas variables Ξ y X, se pueden relacionar mediante las fórmulas

$$\Xi = \frac{\xi - \lambda_1}{\xi - \lambda_2}, \quad X = \frac{x - \lambda_1}{x - \lambda_2}.$$

De esta manera hemos llevado los dos puntos fundamentales o é ∞ de la recta á los dos puntos del infinito. Y dicho cambio puede expresarse por ecuaciones lineales, como una transformación de coordenadas. Podemos ahora admitir que el movimiento se halla expresado por una ecuación de la forma

$$\Xi = X \,.\, \psi(X, \lambda), \tag{1}$$

en la que λ es la cantidad que expresa el parámetro del movimiento, de modo que para $\lambda = 0$, sea la función ψ igual á la unidad. Un movimiento no depende en modo alguno de la elección de las coordenadas. Permaneciendo fijos los puntos o é ∞, podemos efectuar un cambio de coordenadas solo para el cambio del punto unidad, multiplicando las variables X y Ξ por un mismo número ρ; y la ecuación (1) se transformará en

$$\Xi = X \,.\, \psi(\rho X, \lambda). \tag{2}$$

Y puesto que la ecuación (2) no debe depender de ρ, será ψ independiente de X; y podremos introducir en vez de $\psi(\lambda)$ un nuevo parámetro μ. Volviendo á las variables primitivas, quedará *representado un movimiento por la transformación*

$$\frac{\xi - \lambda_1}{\xi - \lambda_2} \,.\, \frac{x - \lambda_1}{x - \lambda_2} = \mu, \tag{3}$$

siendo λ_1 y λ_2 las coordenadas de los dos puntos del infinito y μ el parámetro que mide la magnitud del movimiento.

Además, conforme á lo arriba expuesto, si el punto ξ se transforma en el punto ξ' por un segundo movimiento, y las distancias $x-\xi$, $\xi-\xi'$ se miden respectivamente por μ y μ', siendo

$$\frac{\xi'-\lambda_1}{\xi'-\lambda} \cdot \frac{\xi-\lambda_2}{\xi-\lambda_1} = \mu', \quad \text{será} \quad \frac{\xi'-\lambda_1}{\xi'-\lambda_2} \cdot \frac{x-\lambda_2}{x-\lambda_1} = \mu \cdot \mu'$$

la medida de la distancia $x-\xi'$.

Haremos $\mu = e^r$, $r = \log \mu$; y si elegimos otro número, en vez de e, $r = k \log \mu$, la distancia r de dos puntos x y ξ se expresará por

$$r = k \log \frac{\xi-\lambda_1}{\xi-\lambda_2} \cdot \frac{x-\lambda_1}{x-\lambda_2}; \tag{4}$$

y si r, r', ρ, ρ' expresan respectivamente las distancias de x y ξ, x y η, de y, ξ, de y, η resultará de (4)

$$e^{\frac{r}{k}} - 1 = \frac{(\lambda_2-\lambda_1)(x-\xi)}{(x-\lambda_1)(\xi-\lambda_2)},$$

con análogas fórmulas para las otras distancias, y

$$\frac{x-\xi}{x-\eta}\,\frac{y-\eta}{y-\xi} = \frac{e^{\frac{r}{k}}-1}{e^{\frac{r'}{k}}-1} \cdot \frac{e^{\frac{\rho'}{k}}-1}{e^{\frac{\rho}{k}}-1} = \frac{e^{\frac{r}{2k}} - e^{-\frac{r}{2k}}}{e^{\frac{r'}{2k}} - e^{-\frac{r'}{2k}}}\,\frac{e^{\frac{\rho}{2k}} - e^{-\frac{\rho'}{2k}}}{e^{\frac{\rho}{2k}} - e^{-\frac{\rho'}{2k}}}\,\frac{e^{\frac{r-r'}{2k}}}{e^{\frac{\rho-\rho'}{2k}}}$$

expresión que se reduce á

$$\frac{x-\xi}{x-\eta} \cdot \frac{y-\eta}{y-\xi} = \frac{\operatorname{sen}\frac{ir}{2k}\,\operatorname{sen}\frac{i\rho'}{2k}}{\operatorname{sen}\frac{ir'}{2k}\,\operatorname{sen}\frac{i\rho}{2k}} \tag{5}$$

donde $i = \sqrt{-1}$. Análogamente se puede razonar respecto á los haces de rayos. Sin entrar en esta particularidad, bastará concluir que por pasar cada punto del infinito de una recta, que se mueve continuamente, á otro punto del infinito, éstos permanecen fijos, y con continuidad, es decir, *entre sus coordenadas* x, *existe una ecuación*, *que representa la curva*, *en el infinito*, *del plano*.

Hemos visto que al resbalar la recta en sí, permanecen fijos dos puntos á los cuales no corresponde ningún punto de la recta, los cuales son fijos, permutándose mutuamente.

Clebsch, fundándose en la propiedad de los *sistemas cerrados*, dice: *Cada curva integral de un conexo* (1, 1) *tiene la propiedad de transformarse en sí misma un número* ∞^1 *de veces, por sustituciones lineales permutables y por la sustitución* $\rho Y_i = \varkappa_i \lambda X_i$, *cuando el conexo es de la forma* $\Sigma U_i X_i \log \varkappa_i = 0$, (*), y llega á la conclusión de que: *La curva del infinito del plano es de segundo grado.* (**)

Sean las coordenadas $\xi = x_1 : x_2$, $\eta = x_2 : x_3$, y

$$\Omega_{xx} \equiv \Sigma a_{ik}\, x_i\, x_k = 0 \tag{6}$$

la ecuación de la curva del infinito.

Definida la distancia de dos puntos x, y, según (4) por $k \log \alpha$, expresando α la relación anarmónica de los puntos x, y, y las intersecciones con (6), de la recta que los une, tendremos

$$r = k \log \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega^2_{xy} - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega^2_{xy} - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}}, \text{ donde } \Omega_{xy} = \frac{1}{2}\,\Sigma\,\frac{\partial \Omega_{xx}}{\partial x_i}\,y_i.$$

De esto resulta la *ecuación de un círculo, cuyo radio es* r *y el centro* y, bajo la forma

$$\left(e^{\frac{r}{k}} + 1\right)^2 \Omega_{xx}\,\Omega_{yy} - 4\,e^{\frac{r}{k}}\,\Omega^2_{xy} = 0,$$

ó bien
$$\Omega_{xx}\,\Omega_{yy} - \left(\cos\frac{r}{2ki}\right)^2 \Omega^2_{xy} = 0,$$

donde $i = \sqrt{-1}$. Además se obtiene

$$\cos\frac{r}{2ki} = \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}},\quad \operatorname{sen}\frac{r}{2ki} = \sqrt{\frac{\Omega_{xx}\Omega_{yy} - \Omega^2_{xy}}{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}},$$

que conducen á $\dfrac{ds^2}{4k^2} = \dfrac{\Omega^2_{x\,dx} - \Omega_{xx}\,\Omega_{dx\,dx}}{\Omega^2_{xx}}$. (***)

(*) *Vorlesungen über Geometrie* Ersten Bd. p. 995 y 96.

(**) y (***) Clebsch, *Vorlesungen über Geometrie*, Bd. II, p. 470.

Análoga exposición de la geometría elíptica puede verse en las *Lecciones de Geometría de Clebsch.*

Tan solo indicaremos que entre los movimientos de una recta en sí, el elíptico debe tratarse en correspondencia con el hiperbólico.

Puesto que la línea recta no puede extenderse al infinito, y vuelve á la posición primitiva, por un movimiento en el mismo sentido, un segundo movimiento consiste en una repetición del primero. Un punto P pasa á P′ y P′ á P. La transformación lineal es la involución. Y puesto que no queda fijo ningún punto por el movimiento de la recta, de esto resulta que: *Cada recta se halla definida por una involución con elementos dobles imaginarios.*

Todo resbalamiento de la recta en sí, es equivalente á una sustitución lineal, por la que se transforma en sí una involución con elementos dobles imaginarios, en una recta.

Por cada movimiento de la recta en sí permanecen fijos dos puntos imaginarios conjugados.

Sean λ_1 y λ_2 dos cantidades imaginarias conjugadas y μ un número complejo. Hagamos

$$\lambda_1 = \lambda' + i\lambda'', \quad \lambda_2 = \lambda' - i\lambda'', \quad \mu = \mu' + i\mu'';$$

obtendremos, separando lo real y lo imaginario en la ecuación (3) de la página 500

$$[(\xi - \lambda')(x - \lambda') + \lambda''^2](1 - \mu') - \lambda''(\xi - x)\mu'' = 0,$$

$$[(\xi - \lambda')(x - \lambda') + \lambda''^2]\mu'' - \lambda''(\xi - x)(1 + \mu') = 0.$$

Estas ecuaciones son compatibles, cuando $\mu'^2 + \mu''^2 = 1$. Análogamente á lo expuesto en la pág. 501, tendremos para la distancia r de dos puntos x y ξ,

$$r = ik \log \frac{\xi - \lambda' - i\lambda''}{\xi - \lambda' + i\lambda''} \cdot \frac{x - \lambda' + i\lambda''}{x - \lambda' - i\lambda''}.$$

Y, podremos aplicar á la geometría elíptica todas las conclusiones obtenidas en la hiperbólica, cuando sustituyamos dos puntos imaginarios conjugados á los dos puntos del infinito de una recta, es decir, escribiendo ik *en vez de* k.

Tendremos análogamente las fórmulas

$$r = ik \log \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega^2{}_{xy} - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega^2{}_{xy} - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}$$

$$\Omega_{xx}\Omega_{yy} - \left(\cos\frac{r}{2k}\right)^2 \Omega^2{}_{xy} = 0, \quad \frac{ds^2}{4k^2} = \frac{\Omega_{xx}\Omega_{dx\,dx} - \Omega^2{}_{xdx}}{\Omega^2{}_{xx}}.$$

En conexión con lo expuesto, se hallan las conclusiones siguientes, que pueden estudiarse en la obra del profesor W. Killing, *Die Nicht-Euklidischen Raumformen:*

Reducir la forma cuadrática $\varphi(x_0, \ldots. x_n)$ *á una suma de* $n + 1$ *cuadrados.*

Y tendremos en el espacio de tres dimensiones, las cuatro especies de superficies de segundo orden:

Superficie general		$k^2x_0^2 + a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = 0,$
»	de rotación	$k^2x_0^2 + a_1x_1^2 + a_2(x_2^2 + x_3^2) = 0,$
»	esférica	$k^2x_0^2 + a_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0,$
»	cilíndrica	$(k^2x_0^2 + x_1^2) + a(x_2^2 + x_3^2) = 0,$

como expone Herr Killing al tratar del espacio Riemanno.

Únicamente podremos añadir en este resumen, que el complemento de estos conceptos acerca de las especies de geometrías de los espacios se halla en las conclusiones dadas por Lie en su *Theorie der transformations Gruppen* (t. III) de que se trató en la *Introducción* del tercer tomo de esta obra.

Por último, es oportuno el citar la nueva evolución señalada por M. Meray en la exposición de su Geometría elemental, cuya edición primera data del año 1874.

M. Meray, separándose del dogmatismo predominante en la exposición de los *Elementos de Geometría*, llega á una exposisión sistemática, subordinada al hoy fundamental concepto de *grupo*, en el que se tiende á establecer grandes agrupaciones de verdades ó de relaciones geométricas.

Parte del concepto de *resbalamiento* de la recta y del plano en sí. Estableciendo en un corto número de proposiciones los fundamentos de la determinación geométrica; y con auxilio de los conceptos de traslación y de rotación, imprime desde su primera fase, un nuevo carácter á los estudios geométricos.

Y á pesar de que mis varios trabajos, publicados desde 1881, con el título de *Complemento de Geometría elemental ó crítica geométrica*, al que siguieron la *Geometría elemental y general* y los *Estudios críticos de la generación de los conceptos matemáticos*, desarrollan aunque no dogmáticamente ó bajo un plan de carácter doctrinal análogos conceptos, creo oportuno presentar algunas de las conclusiones establecidas indistintamente en cada una de las obras citadas. El problema de la sistematización de la Geometría elemental se reduce: 1.° A establecer las equivalencias de las entidades geométricas. 2.° A determinar las figuras adjuntas ó virtualmente contenidas en una figura dada.

Este objeto queda esbozado en el *Complemento de Geometría*, estableciéndose varios ejemplos de *sustituciones y equivalencias en las determinaciones triangular y circular*, así como las *transformaciones ó correspondencias de unas especies de relaciones en otras.*

Así, respecto á la línea recta, el axioma, *dos puntos determinan una recta*, es el punto de partida, que conduce á multitud de proposiciones, que le son equivalentes ó que aparecen como sus transformadas, como lo es la proposición: *Por un punto exterior á una recta no se le puede trazar más que una perpendicular*, pues el existir dos perpendiculares á una recta, equivaldría á que existiesen dos rectas distintas entre dos puntos.

El teorema: *Toda perpendicular á una recta lo es á sus paralelas* está incluído en el teorema: *Dos perpendiculares á una recta son paralelas*, y el teorema: *Los ángulos adyacentes, sumados, valen dos rectos*, está incluído en el que determina la relación de ser iguales ó suplementarios los ángulos formados por una secante con dos paralelas, según la orientación de los mismos *(Geometría elemental)*.

Pero la noción de traslación ó giro conduce á una sistematización importante.

Definida la recta como *un sistema de puntos, inseparablemente unidos tales, que de cualquier manera que se mueva*, TENIENDO SIEM-

PRE DOS PUNTOS FIJOS en el espacio, *el sistema ocupe el mismo lugar en éste*, y análogamente el plano, respecto de tres puntos, la exposición se hace extremadamente fácil.

La determinación del triángulo se efectúa de una manera sistemática, partiendo de la existencia de la bisectriz AM del ángulo CAB′ (correspondiente á la única posición en la que uno de los dos ángulos B′AM y CAM ha pasado de ser menor á ser mayor).

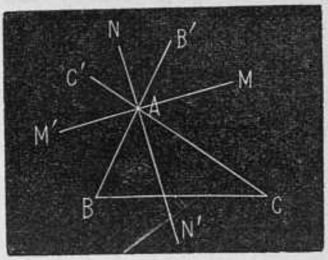


Figura 116

Si hacemos girar el plano alrededor de AM, la superposición de AB′ con AC y de AC′ con AB, lleva consigo que ∠ C′AB′ = ∠ CAB (fig. 116); es decir, *que los ángulos opuestos por el vértice son iguales, etc.* (*)

Si ahora gira la recta AB, en el plano, hasta ocupar la posición EE′, de modo que sea ∠ EAB = ∠ ABL′ (fig. 117), se demuestra, haciendo girar la figura EE′ABLL′ alrededor del punto medio O, que EE′ *no puede* encontrar á LL′, ó que le es paralela; porque *dos rectas que tienen dos puntos comunes, coinciden* (siendo esta proposición el caso de la anterior en que el punto A estuviese en la recta LL′). (**) La proposición recíproca, á saber, que: *Si* EE *y* LL′ *son dos rectas que no se encuentran, ó paralelas, los ángulos* EAB *y* ABL′ *son iguales*, se admite como evidente. (***)

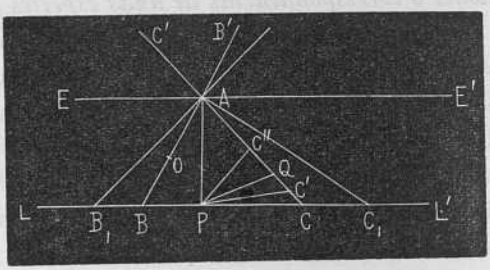


Figura 117

(*) *Geometría general* (parte 2.ª) 1895 y *Geometría elemental*, 1882 y 1888.

(**) El caso en que dos rectas no tienen ningún punto común queda asimilado al en que los tienen todos

(***) Este es uno de los modos de enunciar el postulado de Euclides, ó una proposición equivalente al mismo postulado, que establece la correspondencia unívoca, *sin excepción*, de cada punto LL′ con cada recta de A, correspondiendo la *paralela* al *punto impropio* (PROGRESO MATEMÁTICO, t. V, pág. 39).

Si hacemos girar la recta AC, por ejemplo, de manera que pase por todos los puntos de la recta LL′, existirá una correspondencia *unívoca* entre cada recta de A y cada punto de LL′. Pero se observa que los ángulos van decreciendo de izquierda á derecha, de modo que, siendo ... $\angle EAB < \angle EAC < \angle EAC_1 < ... < \angle EAC_n ...$ resulta ... $\angle ABL' < \angle ACL' < \angle AC_1L' ... < \angle AC_nL' ...$, tendiendo el último ángulo de la serie á cero. Y análogamente

$$... \angle E'AB_n > \angle E'AB > \angle E'AC > \angle E'AC_1 ... > \angle E'AC_n ...$$

ó $$\angle AB_nL > ... > \angle ABL > \angle AC_1L > ... \angle AC_nL,$$

tendiendo el último ángulo de la izquierda á un *ángulo llano* ó á dos rectos. De modo que la recta móvil tiende á confundirse en sus dos posiciones extremas con las semirectas AE′ y AE.

En virtud de la simetría, respecto á la perpendicular AP, á cada oblicua situada á un lado, corresponde una oblicua igual al otro lado; y á cada ángulo otro igual, pero en distinto sentido respecto á la perpendicular, es decir, *simétrico*. De manera, que *oblicuas iguales equidistan de la perpendicular*, y recíprocamente.

De esta correspondencia entre la recta móvil, el ángulo que forma con LL′ y el punto en que la corta, se deducen todas las proposiciones acerca de la igualdad y desigualdad de triángulos. Así, supongamos $\angle APC > \angle ACP$. Se tendrá

$$\angle C'AP > \angle APC < \angle ACP.$$

Y si desde P se trazan las rectas correspondientes á los puntos de CA, resultará que los ángulos en C′, C″, ... irán aumentando desde $\angle PCA$ hasta $\angle PAC'$; y existirá un punto Q para el cual, $\angle AQP = \angle APQ$. Y, en virtud de la relación unívoca (á ambos lados de la perpendicular AP), por ser $AQ = AP$, resulta $AC > AP$.

Recíprocamente: Si $AC > AP$, se hará $AP = AQ$, y resultará que $\angle APC > \angle ACP$, de manera que: *En un triángulo, á mayor lado se opone mayor ángulo. Las oblicuas crecen conforme se alejan de la perpendicular*, etc. Y, basándonos en la correspondencia unívoca, resultarán demostrados los teoremas relativos á la determinación del triángulo, etc.

Respecto á la *semejanza*, *simetría* y *relaciones métricas*, la exposición sistemática aquí reproducida, según se publicó en las obras citadas, se reduce á observar que la generalización necesariamente introducida por el empleo del número como medida de las magnitudes geométricas, depende de la correspondencia existente entre los ángulos que las rectas AC y AC_1 forman con LL' y la longitud de éstas (fig. 117). Á cada recta corresponderá una razón distinta. Pero se tiene

$$AP = \frac{AP}{AB} AB, \quad AP = \frac{AP}{AC} AC;$$

$$\frac{AP}{AB} AB = \frac{AP}{AC} AC \quad \text{y} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{AP}{AC} : \frac{AP}{AB}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\varphi\,(C)}{\varphi\,(B)}, \quad AB = \frac{\varphi\,(C)}{\varphi\,(B)} AC,$$

siendo $\varphi\,(C)$ el símbolo de las funciones trigonométricas, según se expone en su lugar.

La relación que permite pasar de AB á AC ó que transforma AB en AC, es

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\text{sen B}}{\text{sen C}} \quad \text{ó} \quad AC = \frac{\text{sen B}}{\text{sen C}} AB.$$

En el caso de ser una de las rectas AB la AP, será

$$AC = \left(1 : \frac{AP}{AC}\right) AP = \frac{1}{\text{sen C}} AP = m \,.\, AP,$$

indicando m el coeficiente que transforma AP en cualquiera de las rectas que consideramos.

Pero esta transformación se aplica ahora á la faja comprendida entre LL' y la paralela trazada á ésta por A (fig. 118). La consideración de la semejanza permite una nueva generalización.

Si se toman partes iguales á AB y BC, se obtienen puntos A_1, A_2, ..., C_1, C_2, ..., y las rectas A_1C_1, A_2C_2, ..., A_nC_n son paralelas á la AC, pues en las diferentes fajas se obtienen los triángulos AA_1C', A_1A_2C'', ... iguales al ABC, siendo A_1C', A_2C'', ... paralelas á AC y recíprocamente: Si A_nC_n es paralela á AC, será $\frac{BA_n}{BC_n} = \frac{BA}{BC}$; pues si se tuviese $BA_n = n \,.\, BA$ y $BC_n = n' \,.\, BC$, se tendría $BA_n = n \,.\, BA$ y $BC_n = n \,.\, Bc$, siendo c distinto de C y el $\angle c$ distinto del C; y según la proposición directa, tomando n segmentos, á partir de A y c, se obtendrían los puntos A_n y C_n, sin ser A_nC_n paralela á AC, puesto que lo sería á la Ac; y se tendría que $\angle C_n = \angle c$; y por consiguiente $\angle C_n \neq \angle C$, contra lo supuesto.

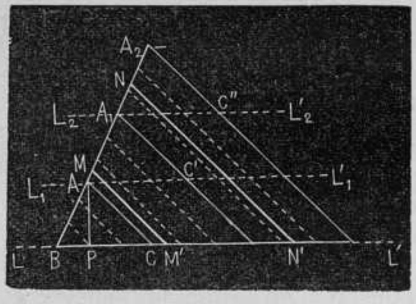


Figura 118

No hay necesidad de insistir en este desarrollo sistemático de la geometría elemental, fundada tan solo en la correspondencia unívoca de dos elementos homólogos.

La correspondencia unívoca entre la variación de los lados y ángulos de un triángulo conduce á las funciones llamadas *circulares*, á saber: seno, coseno, tangente y cotangente, partiendo de todos los tipos de triángulos rectángulos que pueden reducirse á los posibles, en el primer cuadrante de la circunferencia de referencia, obteniéndose la ley de la transformación de unos triángulos en otros, de modo que:

Por la alteración ó deformación de uno de ellos, pueda pasarse á todos los triángulos posibles en el plano, refiriendo todas las líneas trigonométricas á un radio común, ó sea á la circunferencia cuyo radio es aquél, según el que están calculadas las tablas.

Este tránsito se efectúa: 1.° Por la formación de todos los triángulos homotéticos á un tipo de triángulos. 2.° Por el tránsito de cada tipo á todos los demás, al recorrerse los diferentes puntos del cuadrante, que originan cada triángulo, cuyos lados son el radio, el seno y el coseno correspondientes. De esta manera la Trigonometría es un capítulo de la Geometría, y las demás Geometrías, ya la cartesiana, ya la vectorial en sus diversos modos, son distintos puntos de vista de considerarse las figuras geométricas.

Examinada la Geometría desde el punto de vista de la variación continua, queda subordinada á la teoría general de los grupos, cuyo más amplio estudio se ha hecho en las obras de Lie.

Citaremos como los más sencillos ejemplos, los grupos de: las translaciones, las rotaciones, las transformaciones afines, los movimientos del espacio. *(Todos los movimientos del espacio euclídeo forman un grupo).* El estudio de los grupos se complica según el número de parámetros que se considera, y entra de lleno en el estudio de las ecuaciones diferenciales.

Sean $x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n), \quad x_i'' = \mathrm{F}_i(x_1' \ldots x_n') \qquad (i = 1 \ldots n)$
una transformación y su inversa; la transformación idéntica será

$$x_i'' = x_i \qquad (i = 1 \ldots n).$$

Efectuemos sucesivamente las transformaciones

$$x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n), \quad x_i'' = (x_1' \ldots x_n'), \qquad (i = 1 \ldots u)$$

y obtendremos la transformación

$$x_i'' = g_i(f_1(x) \ldots f_n(x)) \qquad (i = 1 \ldots n).$$

Dada una serie de transformaciones, éstas *forman un grupo, cuando efectuadas sucesivamente dos cualesquiera de ellas, se obtiene una de la serie dada.* Un *grupo finito continuo de transformaciones* se representa en general por n ecuaciones,

$$x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n, a_1 \ldots a_r) \qquad (i = 1 \ldots n)$$

que contienen r parámetros arbitrarios.

La superior generalización á que se ha llegado en la teoría de los grupos, aplicada á la Geometría, es la obtenida por Lie, expuesta en la *Introducción* al tomo III, que constituye sus dos soluciones al problema de Riemann-Helmholtz, relativo al espacio.

En particular la *Geometria sintetiche delle sfere* de Reye trata de una variedad *lineal* de cuatro dimensiones.

CAPÍTULO III

Superficies cuyos radios de curvatura son funciones el uno del otro.

§ 1.º SUPERFICIES MÍNIMAS Ó ELASOIDES

296. CONDICIÓN PRIMERA. Sean una superficie ó parte de superficie continua Σ, limitada por un contorno, x, y, z las coordenadas de un punto de Σ, c, c', c'' los cosenos directores de la normal en este punto; y tomemos como coordenadas curvilíneas u y v los parámetros de las líneas de curvatura de la superficie.

Si R y R$'$ son dos radios de curvatura en el punto considerado, las fórmulas de Olinde Rodrigues darán

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{R}\dfrac{\partial c}{\partial u} = 0, \quad \dfrac{\partial y}{\partial u} + \mathrm{R}\dfrac{\partial c'}{\partial u} = 0, \quad \dfrac{\partial z}{\partial u} + \mathrm{R}\dfrac{\partial c''}{\partial u} = 0, \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{R}'\dfrac{\partial c}{\partial v} = 0, \quad \dfrac{\partial y}{\partial v} + \mathrm{R}'\dfrac{\partial c'}{\partial v} = 0, \quad \dfrac{\partial z}{\partial v} + \mathrm{R}'\dfrac{\partial c''}{\partial v} = 0. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Pero se tiene

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial c}{\partial u}\dfrac{\partial c}{\partial v} + \dfrac{\partial c'}{\partial u}\dfrac{\partial c'}{\partial v} + \dfrac{\partial c''}{\partial u}\dfrac{\partial c''}{\partial v} = 0, \\ \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v} = 0. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Y, haciendo, por brevedad

$$e^2 = \left(\frac{\partial c}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial c'}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial c''}{\partial u}\right)^2, \quad g^2 = \left(\frac{\partial c}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial c'}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial c''}{\partial v}\right)^2$$

$$\mathrm{E}^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad \mathrm{G}^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

se tendrá $$E^2 = e^2 R^2, \quad G^2 = R'^2 g^2,$$

y la expresión del elemento lineal de Σ será

$$ds^2 = R^2 e^2 du^2 + R'^2 g^2 dv^2 = E^2 du + G^2 dv^2. \tag{3}$$

Consideremos ahora la superficie Σ' infinitamente próxima de Σ. La normal de un punto M de Σ encuentra á Σ' en un punto M'.

Sea λ la distancia MM'. La superficie Σ' quedará definida, si se da λ en función de u y v; y las coordenadas X, Y, Z de un punto de Σ' quedarán determinadas por las fórmulas

$$X = x + c\lambda, \quad Y = y + c'\lambda, \quad Z = z + c''\lambda$$

que dan

$$\left.\begin{aligned} dX &= (\lambda - R)\frac{\partial c}{\partial u} du + (\lambda - R')\frac{\partial c}{\partial v} dv + c\,d\lambda, \\ dY &= (\lambda - R)\frac{\partial c'}{\partial u} du + (\lambda - R')\frac{\partial c'}{\partial v} dv + c'd\lambda, \\ dZ &= (\lambda - R)\frac{\partial c''}{\partial u} du + (\lambda - R')\frac{\partial c''}{\partial v} dv + c''d\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

El elemento lineal de Σ' será

$$ds'^2 = (\lambda - R)^2 e^2 du^2 + (\lambda - R)^2 g^2 dv^2 + d\lambda^2 \tag{5}$$

y el elemento superficial

$$dS = EG\left(1 - \frac{\lambda}{R}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{R'}\right)\sqrt{1 + \frac{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)^2}{e^2(\lambda - R)^2} + \frac{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)^2}{g^2(\lambda - R')^2}} \tag{6}$$

Comparemos ahora una porción de Σ, limitada por el contorno C, con el área de una superficie infinitamente próxima Σ', que pasa también por C. Entonces, λ deberá ser una función infinitamente pequeña, que se anula en todos los puntos de C. Y el área de Σ' estará representada por la integral doble

$$S = \iint EG\left(1 - \frac{\lambda}{R}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{R'}\right)\sqrt{1 + \frac{(d\lambda : du)^2}{e^2(\lambda - R)^2} + \frac{(d\lambda : dv)^2}{g^2(\lambda - R)^2}}\, du dv$$

extendida á todos los valores de u y v, correspondientes á los puntos de Σ, situados en el interior de C. Esta área, desarrollada según las potencias de la cantidad infinitamente pequeña, que entra como factor en λ, podrá escribirse así

$$\left.\begin{aligned} S = \iint EG\, du dv - \iint EG\lambda \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) du dv \\ + \iint EG \left[\frac{\lambda^2}{RR'} + \frac{(\partial\lambda : \partial u)^2}{2e^2 R^2} + \frac{(\partial\lambda : dv)^2}{2g^2 R'^2}\right] du\, dv, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

despreciándose los términos de tercer orden.

Si se hace $\lambda = 0$, se obtiene el área Σ. El incremento del área, cuando se pasa de Σ á Σ', quedará determinado por la fórmula

$$\left.\begin{aligned} \Delta S = - \iint EG\lambda \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) du\, dv \\ + \iint EG \left[\frac{\lambda^2}{RR'} + \frac{(\partial\lambda : \partial u)^2}{2e^2 R^2} + \frac{(\partial\lambda : \partial v)^2}{2g^2 R'^2}\right] du dv, \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

con el mismo grado de aproximación que anteriormente.

Así pues, para que la superficie sea mínima, es necesario que la suma de los radios de curvatura principales sea nula en cada punto; porque si esto no se verifica, podremos tomar para λ una expresión de la forma

$$\lambda = m \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \varphi^2,$$

siendo φ una función de u y de v, que deberá anularse para todos los puntos del contorno C y m una constante infinitamente pequeña. La expresión (8) tomará la forma

$$\Delta S = - m \iint EG\varphi^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) du dv,$$

despreciándose los términos de orden m^2. La integral no es nula, porque todos sus elementos tienen el mismo signo. Se puede pues tomar m suficientemente pequeño para que los términos despreciados, que son del orden de m^2, sean menores que el precedente y, por tanto, para que cada elemento de ΔS tenga el mismo signo que $-m$. Dando á m el signo positivo, ΔS tendrá un valor negativo. Tendremos pues, para ΔS, una superficie cuya área es menor que Σ.

Así pues, la primera condición para que el área de Σ sea la menor posible, es que la suma de los radios de curvatura principales sea nula para cada punto de la superficie, ó lo que es igual, que la indicatriz sea en todos los puntos una hipérbola equilátera; pero esta condición no es suficiente; por que, si hacemos $R' = -R$ en (8), la expresión de ΔS será

$$\Delta S = \iint eg \left[-\lambda^2 + \frac{(\partial\lambda : \partial u)^2}{2e^2} + \frac{(\partial\lambda : \partial v)^2}{2g^2} \right] du\, dv.$$

Los términos despreciados son de tercer orden con relación á λ; y será necesario que la integral que figura en el segundo miembro sea positiva, cuando se sustituya en ella una función sujeta á la sola condición de anularse en todos los puntos del contorno de Σ.

Podemos pues, definir las superficies mínimas por la propiedad de ser la indicatriz una hipérbola equilátera ó de cortarse las líneas asintóticas según ángulos rectos; y será ventajoso enunciar la propiedad característica de las superficies mínimas bajo la forma siguiente:

Las dos familias de líneas de longitud nula trazadas en una superficie deben formar una red conjugada. En efecto, la hipérbola equilátera es la sola cónica que admite por diámetros conjugados las dos rectas cuyos coeficientes angulares son $+i$, $-i$.

297. Modo de generación. Tomemos como variables independientes los parámetros α y β de los dos sistemas de líneas de longitud nula. Puesto que forman una red conjugada, las coordenadas rectangulares x, y, z serán tres soluciones particulares de una ecuación de la forma

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} - A\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} - B\frac{\partial\theta}{\partial\beta} = 0.$$

Se tendrá pues, $\dfrac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\beta} - A\dfrac{\partial x}{\partial\alpha} - B\dfrac{\partial x}{\partial\beta} = 0,$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\partial\beta} - A\frac{\partial y}{\partial\alpha} - B\frac{\partial y}{\partial\beta} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\partial\beta} - A\frac{\partial z}{\partial\alpha} - B\frac{\partial z}{\partial\beta} = 0 \qquad (1)$$

y además, por la elección de α y β,

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right)^2 = 0, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)^2 = 0. \qquad (2)$$

Diferenciando la primera de las ecuaciones (2) con relación á β, la segunda con relación á α, y sustituyendo los valores de las derivadas segundas dados por las ecuaciones (1), se tendrá

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta} + \frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta} + \frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta}\right) A = 0,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta} + \frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta} + \frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta}\right) B = 0.$$

Y, puesto que no puede ser nulo el trinomio, entre paréntesis, sin que el arco de toda curva trazada en la superficie sea nulo, tendremos $A = 0$, $B = 0$. Las ecuaciones (1) se reducen á

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\partial\beta} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\partial\beta} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\partial\beta} = 0, \qquad (3)$$

cuya integración es inmediata, y se tiene

$$x = f_1(\alpha) + \varphi_1(\beta), \quad y = f_2(\alpha) + \varphi_2(\beta), \quad z = f_3(\alpha) + \varphi_3(\beta). \qquad (4)$$

Y para que las ecuaciones (2) queden satisfechas, se necesita que se tenga

$$f_1'^2(\alpha) + f_2'^2(\alpha) + f_3'^2(\alpha) = 0, \quad \varphi_1'^2(\beta) + \varphi_2'^2(\beta) + \varphi_3'^2 = 0. \qquad (5)$$

Las ecuaciones (4) manifiestan que las superficies mínimas pertenecen á la clase de las superficies que pueden engendrarse de dos maneras distintas por la traslación de una curva.

298. Fórmulas de Monge. Podemos, sin cambiar el sistema de coordenadas, sustituir α y β por funciones cualesquiera de estas variables, es decir, hacer

$$f_1(\alpha) = \alpha, \quad \varphi_1(\beta) = \beta.$$

De las fórmulas (5) deduciremos

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha + \beta \\ y &= f(\alpha) + \varphi(\beta) \\ z &= i\int\sqrt{1 + f'^2(\alpha)}\,d\alpha + i\int\sqrt{1 + \varphi'^2(\beta)}\,d\beta. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

299. FÓRMULAS DE WEIERSTRASS. Sea

$$\frac{f_1'(\alpha) + if_2'(\alpha)}{-f_3'(\alpha)} = u,$$

la primera ecuación (5) dará

$$f_1'(\alpha) - if_2'(\alpha) = \frac{f_3'(\alpha)}{2u}.$$

Por consiguiente, las relaciones de las tres derivadas serán

$$\frac{f_1'(\alpha)}{1 - u^2} = \frac{f_2'(\alpha)}{i(1 + u^2)} = \frac{f_3'(\alpha)}{2u},$$

siendo u función de α. Podremos representar á u, prescindiendo del caso en que sea constante, por

$$\frac{1}{2}\mathfrak{F}(u)\frac{du}{d\alpha};$$

y tendremos

$$\left.\begin{aligned} f_1(\alpha) &= \frac{1}{2}\int(1 - u^2)\,\mathfrak{F}(u)\,du \\ f_2(\alpha) &= \frac{i}{2}\int(1 + u^2)\,\mathfrak{F}(u)\,du \\ f_3(\alpha) &= \int u\,\mathfrak{F}(u)\,du. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Análogamente se obtendrá, haciendo

$$\frac{\varphi_1'(\beta) - i\varphi_2'(\beta)}{-\varphi_3'(\beta)} = u_1, \quad (8)$$

y siguiendo un método análogo respecto á β,

$$\varphi_1(\beta) = \frac{1}{2}\int (1\ u_1^2)\,\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1, \ldots .$$

Las fórmulas que definen la superficie serán

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\int (1 - u^2)\,\mathfrak{F}(u)\,du + \frac{1}{2}\int (1 - u_1^2)\,\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1,\\ y &= \frac{i}{2}\int (1 + u^2)\,\mathfrak{F}(u)\,du - \frac{i}{2}\int (1 + u_1^2)\,\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1,\\ z &= \int u\,\mathfrak{F}(u)\,du + \int u_1\,\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Sustituyendo $\mathfrak{F}(u)$ por la derivada tercera de una función $f(u)$ de u y $\mathfrak{F}_1(u_1)$ por la derivada tercera de otra función $f_1(u_1)$, resultarán las fórmulas de Weierstrass

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1-u^2}{2} f''(u) + uf'(u) - f(u)\\ &\qquad + \frac{1-u_1^2}{2} f_1''(u_1) + u_1 f_1'(u_1) - f_1(u_1),\\ y &= i\,\frac{1+u^2}{2} f''(u) - iuf'(u) + if(u)\\ &\qquad - i\,\frac{1+u_1^2}{2} f_1''(u_1) + iu_1 f_1'(u_1) - if_1(u_1),\\ z &= uf''(u) - f'(u) + u_1 f_1''(u_1) - f_1'(u_1). \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

En el caso de ser u constante, se tendrá

$$\frac{f_1'(\alpha)}{1-u^2} = \frac{f_2'(\alpha)}{i(1+u^2)} = \frac{f_3'(\alpha)}{2u};$$

y si se expresa por $\frac{1}{2}\,\theta'(\alpha)$ el valor común de estas relaciones, se tendrá

$$x = \frac{1-u^2}{2}\,\theta(\alpha) + \frac{1}{2}\int (1 - u_1^2)\,\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1,$$

$$y = i\frac{1+u^2}{2}\theta(\alpha) - \frac{1}{2}\int(1+u_1^2)\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1,$$

$$z = u\,\theta(\alpha) + \int u_1\,\mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1.$$

Las curvas $u_1 = 0$ serán rectas paralelas que encuentran al círculo del infinito. La superficie correspondiente será un cilindro imaginario. (*)

De las ecuaciones (9), resulta para los elementos fundamentales de primer orden

$$E = 0, \quad F = \frac{1}{2}(1+uu_1)^2\,\mathfrak{F}(u)\,\mathfrak{F}(u_1) = 0, \quad G = 0$$

y el elemento lineal de la superficie será

$$ds^2 = (1+uu_1)^2\,\mathfrak{F}(u)\,\mathfrak{F}(u_1)\,du\,du_1. \tag{11}$$

En virtud de las expresiones de a, b, c (pág. 244) y de las fórmulas (9), obtendremos, para los cosenos directores a, b, c de la normal á la superficie ó las coordenadas de la imagen esférica de la superficie,

$$a = \frac{u+u_1}{1+uu_1}, \quad b = \frac{i(u_1-u)}{1+uu_1}, \quad c = \frac{uu_1-1}{1+uu_1} \tag{12}$$

y para el elemento lineal de esta imagen esférica,

$$ds_0^2 = da^2 + db^2 + dc^2 = \frac{4\,du\,du_1}{(1+uu_1)^2}. \tag{13}$$

Los elementos fundamentales de segundo orden serán

$$D = -\mathfrak{F}(u), \quad D' = 0, \quad D'' = -\mathfrak{F}_1(u_1).$$

De la condición (pág. 293) para la existencia de las líneas asintóticas, resulta

$$\mathfrak{F}(u)\,du^2 + \mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1^2 = 0$$

y por ecuación (5) de las líneas de curvatura (pág. 290),

$$\mathfrak{F}(u)\,du^2 - \mathfrak{F}_1(u_1)\,du_1^2 = 0,$$

(*) **Darboux**, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, **t. I, pág. 230.**

y las ecuaciones (6) y (7) de la pág. (291).

$$h = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 0, \quad k = -\frac{4}{(1+uu_1)^4\,\mathfrak{F}(u)\,\mathfrak{F}_1(u)_1)}$$

$$r_1 = -r_2 = \frac{(1+uu_1)^2}{2}\sqrt{\mathfrak{F}(u)\,\mathfrak{F}_1(u_1)}.$$

300. EJEMPLOS: 1.º DADA UNA CURVA, OBTENER LA SUPERFICIE MÍNIMA QUE PASA POR ELLA. (Lagrange, Miscellanea, Taurinensia).

Dejando indeterminados los límites entre los que se halla la curva, podemos reducir el problema á:

Hacer mínima la integral $\iint\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy.$

Escribamos $z+\varepsilon\delta z$ en vez de z, para determinar una superficie muy próxima á la primera; p se reduce á

$$p+\varepsilon\frac{\partial\delta z}{\partial x} \quad \text{y } q \text{ á } \quad q+\varepsilon\frac{\partial\delta z}{\partial y}.$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2} \quad \text{á} \quad \sqrt{1+p^2+q^2+2\varepsilon\left(p.\frac{\partial\delta z}{\partial x}+q\frac{\partial\delta z}{\partial y}\right)+\ldots}$$

ó
$$\sqrt{1+p^2+q^2}+\varepsilon\frac{p\dfrac{\partial\delta z}{\partial x}+q\dfrac{\partial\delta z}{\partial y}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+\ldots.$$

Hagamos $\sqrt{1+p^2+q^2}=\mathrm{W}$, y deberá verificarse que

$$\iint\left(\frac{p\dfrac{\partial\delta z}{\partial x}}{\mathrm{W}}+\frac{q\dfrac{\partial\delta z}{\partial y}}{\mathrm{W}}\right)dx\,dy=0,$$

entre los límites para los que $\iint \mathrm{W}\,dx\,dy$ es un mínimo. Pero

$$\int\frac{p\dfrac{\partial\delta z}{\partial x}}{\mathrm{W}}dx=\frac{p}{\mathrm{W}}\delta z-\int\delta z\,\frac{\partial\left(\dfrac{p}{w}\right)}{\partial x}dx,$$

siempre entre los mismos límites. Y tenemos la ecuación

$$-\iint \partial z \frac{\partial \frac{p}{W}}{\partial x} dx\, dy - \iint \partial z \frac{\partial \frac{q}{W}}{\partial y} dx\, dy$$

ó $$-\iint \partial z \left(\frac{\partial \frac{p}{W}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{q}{W}}{\partial y} \right) dx\, dy = 0.$$

y puesto que ∂z es arbitraria, excepto en los límites, deberá verificarse que

$$\partial \frac{p}{W} : \partial x + \partial \frac{q}{W} : \partial y = 0.$$

Las superficies que satisfacen á esta ecuación, resuelven el problema. Diferenciando se obtiene

$$\frac{\partial \frac{p}{W}}{\partial x} = \frac{Wr - p \frac{pr + qs}{W}}{W^2}$$

$$= \frac{r + p^2 r + q^2 r - p^2 r - pqs}{W^3} = \frac{r(1 + q^2) - pqs}{W^3}$$

y multiplicando por W^3, tendremos

$$r(1 + q^2) - 2pqs + t(1 + p^2) = 0,$$

que corresponde á las superficies para las cuales la suma de los radios principales de curvatura es nula ó son iguales y de signo contrario.

2.º *Dados dos círculos paralelos entre sí* (fig. 119) *tales, que sus centros se hallen en una misma normal, hallar la superficie mínima que pase por ellos.*

Desde luego la superficie buscada es de revolución. Por consiguiente si trazamos en cada círculo dos radios paralelos á los del otro, y en otro lugar de la superficie otros dos pares de radios que formen ángulos iguales respectivamente á los primeros, las dos fajas superficiales serán iguales entre sí, pues de lo contrario no sería la superficie mínima. Podemos escribir

$$z = f(\xi),\ \xi^2 = x^2 + y^2,\ \frac{f'}{\xi w} = \mathrm{L};\ p = f'\frac{x}{\xi},\ q = f'\frac{y}{\xi}\ \text{y}\ \mathrm{W} = \sqrt{1 + f'^2}$$

hagamos $\dfrac{f'}{\xi . \mathrm{W}} = \mathrm{L}$ y tendremos la ecuación diferencial

$$\frac{\partial(x\mathrm{L})}{\partial x} + \frac{\partial(y\mathrm{L})}{\partial y} = 0 \quad \text{ó} \quad 2\mathrm{L} + \left(x\frac{\partial\xi}{\partial x} + y\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial\xi} = 0,$$

$$\text{ó} \quad 2\mathrm{L} + \xi\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial\xi} = 0, \quad 2\frac{\partial\xi}{\xi} + \frac{\partial\mathrm{L}}{\mathrm{L}} = 0.$$

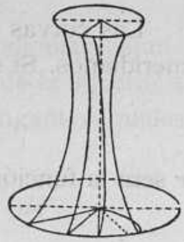


Figura 119

Integrando, tendremos

$$2\log\xi + \log\mathrm{L} + \text{const.} = 0$$

$$\text{ó} \qquad \xi^2\mathrm{L} = a, \quad \frac{\xi f'}{\sqrt{1 + f'^2}} = a,$$

$$\xi^2 f'^2 = a^2 + a^2 f'^2$$

$$\xi^2\left(\frac{dx}{\partial\xi}\right)^2 = a^2 + a^2\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 \quad \text{ó} \quad \frac{dz}{d\xi} = \frac{a}{\sqrt{\xi^2 - a^2}};$$

é integrando

$$z = a\int\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - a^2}} = a\log\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - a^2}}{b};$$

donde la constante arbitraria es $-a\log b$, y escribiendo $a \,.\, e^\alpha$ en vez de b, tendremos

$$z = a\log\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - a^2}}{a \,.\, e^\alpha}, \quad a \,.\, e^{\frac{z}{a} + \alpha} = \xi + \sqrt{\xi^2 - a^2}$$

de la cual resulta

$$a \,.\, \frac{1}{e^{\frac{z}{a} + \alpha}} = \frac{a^2}{\xi + \sqrt{\xi^2 = a^2}} = \frac{a^2(\xi - \sqrt{\xi^2 - a^2})}{\xi^2 - \xi + a^2} = \xi - \sqrt{\xi^2 - a^2}.$$

Por consiguiente $\quad \xi = \dfrac{a}{2}\left\{e^{\frac{z}{a} + \alpha} + e^{-\frac{z}{a} - \alpha}\right\},$

ecuación de la catenaria. La superficie mínima es la superficie de revolución formada por la catenaria.

3.º Consideremos ahora las superficies en coordenadas curvilíneas. Sea una superficie de revolución cuyo eje es el de las z, y r la distancia de un punto del meridiano al eje. La ecuación de la superficie será $z = f(r)$.

Sea ω el ángulo que forma con el plano de las xz el meridiano que pasa por el punto dado. Tendremos

$$x = r\cos v, \quad y = r\operatorname{sen} v \quad \text{y} \quad ds^2 = dr^2(1 + f'^2) + r^2dv^2. \quad (1)$$

Las curvas $r =$ const. son los paralelos y las $v =$ const. los meridianos. Si se hace

$$dr\sqrt{1 + f'^2} = du,$$

r será la función de u, y la ecuación (1) tomará la forma

$$ds^2 = du^2 + \varphi(u)\,dv^2. \quad (2)$$

4.º Sea la superficie de revolución engendrada por la revolución de una catenaria alrededor de su base. Se tendrá

$$r = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right),$$

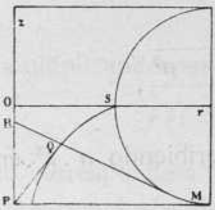


Figura 120

y resultará sin dificultad $u = \sqrt{r^2 - a^2}$. La fórmula (2) dará

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\,dv^2.$$

Esta superficie es el *aliseide* ó *catenoide*. Como la catenaria es la única curva cuyo radio de curvatura es igual y de signo contrario á la normal, la *catenoide* es la sola superficie de revolución, para la que los radios de curvatura en cada punto son iguales y de signo contrario. Se llaman *superficies mínimas* á todas aquéllas cuyos radios de curvatura se hallan en esta relación. La aliseide es por tanto la sola superficie mínima de revolución.

Se sabe que si se considera una catenaria cuya base es Oz y desde el pie P de la ordenada del punto M se baja una perpendicular PQ á la tangente en M, el arco de catenaria, contado á partir del vértice S, es igual al segmento de recta MQ. Por consiguiente, el punto Q describirá una de las evolventes de la catenaria.

Puesto que PQ es constantemente igual al parámetro a de la catenaria, el lugar de punto Q será la *curva de las tangentes iguales ó tractriz*. Expresando por φ el ángulo PMQ, el valor del arco descrito por el punto Q, cuando φ aumenta en $d\varphi$, estará expresado por

$$d\sigma = \mathrm{MQ}\, d\varphi = a \cot \varphi d\varphi.$$

Además, puesto que la expresión de la perpendicular bajada desde Q sobre Oz es $r = a$ sen φ, el elemento lineal de la superficie engendrada por la revolución de la curva de las tangentes iguales alrededor de Oz estará dado por la fórmula

$$ds^2 = d\sigma^2 + r^2\, dv^2 = a^2 (\cot^2 \varphi d\varphi^2 + \operatorname{sen}^2 \varphi dv^2).$$

Hagamos $\cot \varphi d\varphi = du$ lo que da $\operatorname{sen} \varphi = e^u$,

y tendremos $ds^2 = a^2 (du^2 + e^{2u}\, dv^2)$,

Observemos que en el triángulo rectángulo RPM, se tiene

$$\mathrm{MQ}\,.\,\mathrm{QR} = a^2.$$

Los centros de curvatura principales de la superficie son evidentemente los puntos M y R; luego los radios de curvatura principales satisfacen á la relación $RR' = -a^2$. Pero esta propiedad no caracteriza á la superficie.

301. Representación conforme. Las fórmulas (9) de la página 517 dan la expresión siguiente del elemento lineal,

$$ds^2 = (1 + uu_1)^2\, \mathfrak{F}(u)\, \mathfrak{F}_1(u_1)\, du\, du_1,$$

á la que se puede añadir la que determina el elemento lineal de la representación esférica

$$ds_0^2 = da^2 + db^2 + dc^2 = \frac{4\, du\, du_1}{(1 + uu_1)^2}.$$

Y la comparación de estas fórmulas conduce al teorema de Bonnet: *La representación esférica de la superficie mínima realiza una representación conforme, un trazado geográfico de la superficie en la esfera.*

Además: *Toda superficie distinta de la esfera, para la que el ángulo de dos curvas es igual al de sus representaciones esféricas es necesariamente una superficie mínima*, pues si consideramos una curva que pasa por un punto M de la superficie y la tangente MT, la representación esférica será una curva que pasa por el punto *m*, imagen del M, que admitirá una tangente perpendicular á la tangente conjugada de MT. Por consiguiente, si dos curvas que parten de M, admiten dos tangentes MT, MT', y el ángulo de sus representaciones esféricas en *m* será igual al de las tangentes MU y MU', conjugadas de MT y MT'. La indicatriz de la superficie buscada debe por consiguiente ser una curva tal, que el ángulo de dos cualesquiera de sus diámetros sea igual al de los diámetros conjugados, propiedad que solo pertenece á la circunferencia y á la hipérbola equilátera. La superficie que se busca será ó una esfera ó una superficie mínima.

En general, si existe en una superficie un sistema ortogonal, cuya representación esférica es un sistema ortogonal, que no se confunde con el formado por las lineas de curvatura, se llegará á igual conclusión, pues la hipérbola equilátera es la única cónica para la que dos diámetros rectangulares, que no se confunden con los ejes, pueden admitir como conjugados dos diámetros rectangulares.

Supongamos, según esto, que dado un sistema ortogonal (S) cualquiera, trazado en la esfera de radio 1, nos propongamos obtener todas las superficies (Σ) tales, que si se efectúa su representación esférica en dicha esfera, las curvas de la superficie correspondan á las del sistema esférico ortogonal. El problema admitirá una doble solución, ó el sistema (S') está formado por líneas de curvatura de la superficie, y entonces la cuestión se reduce á: *obtener las superficies, cuyas líneas de curvatura admiten por imagen esférica las curvas de un sistema ortogonal dado;* ó bien el sistema (S) no estará formado por líneas de curvatura y, en este caso, la superficie será una superficie mínima cualquiera.

Minding, al estudiar todas las superficies cuyos meridianos y paralelos forman un sistema ortogonal, obtuvo las superficies molduras y las superficies mínimas. Estos son resultados inmediatos de las consideraciones precedentes y M. Darboux añade (*) que en toda superficie mínima, la red formada por los paralelos y meridianos será siempre isoterma, porque corresponde á un sistema isotermo de la esfera, pues empleando las fórmulas (12) de la página 518, se ve que los paralelos se hallan definidos por $c =$ const. ó $uu_1 =$ const. y los meridianos por $\frac{a}{b} =$ const, ó $\frac{u}{u_1} =$ const.

Si pues se hace $u = \rho e^{i\omega}$, $u_1 = \rho e^{-i\omega}$, la expresión del elemento lineal será

$$ds^2 = (1 + \rho^2)\, \mathfrak{F}(\rho e^{i\omega})\, \mathfrak{F}_1(\rho e^{-i\omega})\, (d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2).$$

Las curvas $\rho =$ const. son paralelos y las $\omega =$ const. meridianos, lo que muestra que las dos familias constituyen un sistema isotermo.

En particular, si $\mathfrak{F}(u) = \mathrm{A}u^m$, $\mathfrak{F}_1(u_1) = \mathrm{A}_1 u_1{}^m$, el elemento lineal será

$$ds^2 = \mathrm{AA}_1 (1 + \rho^2)\, \rho^{2m} [d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2].$$

La superficie será aplicable sobre otra de revolución, correspondiéndose respectivamente en las dos superficies los paralelos y los meridianos.

Haciendo corresponder al punto (u, u_1) de la superficie el punto de un plano, cuyas coordenadas rectangulares x_1, y_1 se determinan por las fórmulas

$$x_1 + iy_1 = \int \sqrt{2\mathfrak{F}(u)}\, du, \quad x_1 - iy_1 = \int \sqrt{2\mathfrak{F}_1 u_1}\, du_1, \qquad (1)$$

el elemento lineal tomará la forma

$$ds^2 = \frac{1}{2}(1 + uu_1)^2 \sqrt{\mathfrak{F}(u)\, \mathfrak{F}_1(u_1)}\, (dx_1{}^2 + dy_1{}^2) = \mathrm{R}\, (dx_1{}^2 + dy_1{}^2)$$

(*) *Leçons sur la théorie général des surfaces*, t. I, p. 311.

siendo R el radio de curvatura principal, y el elemento de la representación esférica

$$ds_0^2 = \frac{1}{R}(dx_1^2 + dy_1^2); \tag{1}$$

lo que conduce á la proposición: *Las líneas de curvatura que forman en la superficie un sistema isotermo, admiten por representación esférica un sistema también isotermo.* (Darboux, obra cit., t. I, pág. 313).

Introduciendo en las fórmulas las dos funciones

$$\alpha = x_1 + iy_1, \quad \beta = x_1 - iy_1, \tag{3}$$

se tendrá

$$u = f(\alpha) = A, \; u_1 = \varphi(\beta) = B, \; \mathfrak{F}(u) = \frac{1}{2A'^2}, \; \mathfrak{F}_1(u_1) = \frac{1}{2B'^2} \tag{4}$$

siendo A′ y B′ las derivadas de A y B. Los elementos lineales serán:

$$ds^2 = \frac{(1 + AB)^2\, d\alpha\, d\beta}{4A'B'}, \quad ds_0^2 = \frac{4A'B'\, d\alpha\, d\beta}{(1 + AB)^2}, \tag{5}$$

resultando el

Teorema de Bour. *Si se ha puesto, de una manera cualquiera, el elemento lineal de la esfera bajo la forma* $ds_0^2 = \lambda\, d\alpha\, d\beta$, *el elemento* $ds^2 = \frac{1}{\lambda}\, d\alpha\, d\beta$ *será el de una superficie mínima, para la que* $\alpha + \alpha_1$, $\alpha - \beta$ *serán los parámetros de las líneas de curvatura.*

Introduciendo en las fórmulas de Weierstrass las notaciones de las fórmulas (3) y (4), tendremos las fórmulas dadas por Enneper

$$x = \int \frac{1 - A^2}{4A'}\, d\alpha + \int \frac{1 - B^2}{4B'}\, d\beta,$$

$$y = i\int \frac{1 + A^2}{4A'}\, d\alpha - i\int \frac{1 + B^2}{4B'}\, d\beta,$$

$$z = \int \frac{A}{2A'}\, d\alpha + \int \frac{B}{2B'}\, d\beta.$$

En fin, para estudiar la superficie mínima de Enneper, M. Darboux considera la proposición siguiente: *Para obtener todas las superficies, cuyas líneas de curvatura son planas, se construirán dos familias diferentes de esferas, cuyos centros se hallan sujetos á describir respectivamente dos curvas de segundo grado, focales entre sí, cuyos radios varíen según una ley cualquiera, para cada una de las dos familias. El plano radical de las dos esferas* (S) *y* (Σ), *perteneciente á las dos familias diferentes, envolverá á la superficie buscada. Si se asocian á* (Σ) *y á* (S) *las esferas infinitamente próximas* (Σ') *y* (S'), *el centro radical de estas cuatro esferas describirá la superficie. Los planos radicales de* (S) *y de* (S'), *de* (Σ) *y de* (Σ') *serán los planos de las líneas de curvatura de los dos sistemas*, según se establece en la pág. 132 (t. I) de la obra citada. Considera el caso en que en las fórmulas de Weierstrass se sustituyen $\mathfrak{F}(u)$ y $\mathfrak{F}(u_1)$ por una misma constante, por ejemplo igual á 3, obteniendo

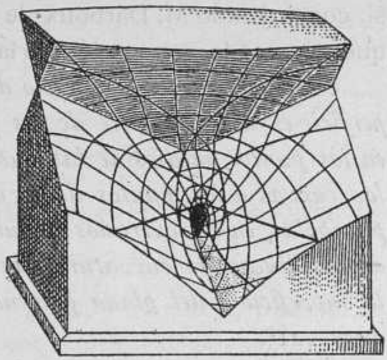


Figura 121

$$x = \mathrm{R}(3u - u^3),$$
$$y = \mathrm{R}i(3u + u^3), \quad z = \mathrm{R}\, 3u^2.$$

Siendo $\mathrm{A} = \alpha$, $\mathrm{B} = \beta$, si se hace $u = \alpha - i\beta$, α y β serán los parámetros de la curva, y se tendrá

$$x = 3\alpha + 3\alpha\beta^2 - \alpha^3, \quad y = 3\beta + 3\alpha^2\beta - \beta^3, \quad z = 3\alpha^2 - 3\beta^2.$$

Las ecuaciones de los planos de las líneas de curvatura son

$$x + \alpha z - 3\alpha - 2\alpha^3 = 0, \quad y - \beta z - 3\beta - 2\beta^3 = 0.$$

Las líneas de curvatura son unicursales de tercer orden y rectificables, pues el elemento lineal se expresa por

$$ds = 9\,[1 + \alpha^2 + \beta^2]^2\,(d\alpha^2 + d\beta^2).$$

Para $\beta =$ const. se tiene $ds = 3\,(1 + \alpha^2 + \beta^2)\,d\alpha$, é integrando,

$$s = 3\,(1 + \beta^2)\,\alpha + \alpha^3.$$

La ecuación del plano tangente en el punto α, β es

$$2\alpha x - 2\beta y + (\alpha^2 + \beta^2 - 1)\, z + 3\beta^2 - 3\alpha^2 + \beta^4 - \alpha^4 = 0,$$

$$(x - 4\alpha)^2 + y^2 + (z - 2\alpha^2 + 1)^2 - (y - 4\beta)^2 - x^2 - (z + 2\beta - 1)^2 = 0,$$

que es el plano radical de las dos esferas de radio nulo

$$(x - 4\alpha)^2 + y^2 + (z - 2\alpha^2 + 1)^2 = 0,$$

$$x^2 + (y - 4\beta)^2 + (z + 2\beta^2 - 1)^2 = 0,$$

cuyos centros describen dos parábolas respectivamente focales entre sí, concluyendo M. Darboux de la proposición anterior, la siguiente, que expresa la generación de la superficie de Enneper:

Consideremos en el espacio dos parábolas focales entre sí. La superficie es la envolvente de los planos trazados perpendicularmente en los puntos medios de las cuerdas que unen los puntos de una de las curvas á los puntos de la otra. Los planos normales á las dos parábolas, en los extremos de una de estas cuerdas, son los planos de las líneas de curvatura que pasan por el punto de contacto de la superficie y del plano perpendicular en el medio de la cuerda (figura 121).

302. SUPERFICIE ADJUNTA DE BONNET. Este geómetra, en su *Note sur la théorie générale des surfaces*, estudió la cuestión de las superficies mínimas que permanecen tales, después de una deforción continua.

Consideremos una superficie mínima A, cuyo elemento lineal es

$$ds^2 = (1 + uu_1)^2\, \mathfrak{F}(u)\, \mathfrak{F}(v)\, du dv. \tag{1}$$

Para obtener todas las superficies mínimas cuyo elemento lineal es (1), consideremos una de éstas A, y sea A′ una de las superficies mínimas á que pertenece el mismo elemento lineal. Tendremos por elementos lineales de la representación esférica, respectivamente

$$ds_0^2 = -k ds^2, \qquad ds'^2_0 = k' ds'^2.$$

Puesto que se tiene para puntos correspondientes, $ds^2 = ds'^2$ y $k = k'$, será $ds_0^2 = ds'^2_0$.

Es decir, que si efectuamos sobre la esfera la representación de dos partes A y A′ correspondientes de la superficie, las imágenes son iguales ó simétricas.

En el primer caso, podemos orientar A y A′, de modo que se superpongan las imágenes respectivas. Así pues:

TEOREMA I. *Si dos superficies mínimas son desarrollables, la una en la otra, podremos orientarlas en el espacio, de modo que las superficies normales sean paralelas en los puntos correspondientes.*

En las fórmulas de Weierstrass, las funciones $f(u)$ y su conjugada $\varphi(v)$ en A, deben ser las que engendran la superficie A, y el elemento lineal de ésta será

$$ds'^2 = (1 + uv)^2 f(u)\, \varphi(u)\, du dv;$$

y puesto que $ds = ds'$, resulta

$$\mathfrak{F}(u)\, \mathfrak{F}_1(v) = f(u)\, \varphi(v).$$

Podemos establecer, mediante la cantidad auxiliar α, las relaciones

$$f(u) = e^{i\alpha}\, \mathfrak{F}(u), \qquad \varphi(v) = e^{-i\alpha}\, \mathfrak{F}_1(x),$$

de manera que, por la primera, es α función de u sola, y por la segunda lo es de v; es por tanto una constante real, puesto que φ y f son funciones conjugadas, y por consiguiente $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F}_1$; luego

TEOREMA II. *La superficie mínima más general que puede reducirse á otra dada por deformación continua, se obtiene sustituyendo, respectivamente* $\mathfrak{F}(\mathrm{u})$ *y* $\mathfrak{F}_1(\mathrm{u})$ *por* $\mathrm{e}^{i\alpha}\mathfrak{F}(\mathrm{u})$ *y por* $\mathrm{e}^{-i\alpha}\mathfrak{F}_1(\mathrm{v})$ *en las fórmulas de Weierstrass, siendo* α *una constante real.*

Si α varía de una manera continua, se obtendrán pues, ∞^1 superficies mínimas por medio de una dada.

Las superficies elicoidales para las que $\mathfrak{F}(u) = A\, u^{-2}$, son superficies mínimas asociadas.

Las superficies que corresponden á $\alpha = 0$ y $\alpha = \frac{\pi}{2}$ se llaman superficies adjuntas, como son, por ejemplo, la catenoide y las superficies elicoidales.

Sean x, y, z las coordenadas de un punto de la superficie A, x_α, y_α, z_α las del punto correspondiente de la superficie asociada á la A.

Tendremos, para el ángulo θ de los dos elementos lineales ds y ds_α, la expresión

$$\cos\theta = \frac{dx\,dx_\alpha + dy\,dy_\alpha + dz\,dz_\alpha}{ds\,ds_\alpha} = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} = \cos\alpha.$$

Así pues; *La constante* α *representa el ángulo comprendido entre dos elementos lineales correspondientes de* A y A′. *En el caso de dos superficies, adjuntas los elementos lineales son ortogonales.*

En resumen: Si consideramos las superficies mínimas, definidas por las fórmulas de Monge

$$x = \mathrm{A}(t) + \mathrm{A}_1(\tau), \quad y = \mathrm{B}(t) + \mathrm{B}_1(\tau), \quad z = \mathrm{C}(t) + \mathrm{C}_1(\tau) \quad (1)$$

en las que A, B, C, A_1, B_1, C_1 satisfacen á las relaciones

$$d\mathrm{A}^2 + d\mathrm{B}^2 + d\mathrm{C}^2 = 0, \quad d\mathrm{A}_1{}^2 + d\mathrm{B}_1{}^2 + d\mathrm{C}_1{}^2 = 0,$$

el elemento lineal será

$$ds^2 = 2\,(d\mathrm{A}\,d\mathrm{A}_1 + d\mathrm{B}\,d\mathrm{B}_1 + d\mathrm{C}\,d\mathrm{C}_1);$$

y todas las superficies definidas por las fórmulas

$$x = e^{i\alpha}\,\mathrm{A}(t) + e^{-i\alpha}\mathrm{A}_1(\tau), \quad y = e^{i\alpha}\,\mathrm{B}(t) + e^{-i\alpha}\mathrm{B}_1(\tau), \quad z = \ldots, \quad (2)$$

en las que α es una constante, son aplicables entre sí, definiendo una familia de superficies *asociadas*.

Para $\alpha = 0$ se tiene la superficie definida por (1), para $\alpha = \pi$, la simétrica; para $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la superficie adjunta (3)

$$x_0 = i\,[\mathrm{A}(t) - \mathrm{A}_1(\tau)], \quad y_0 = i\,[\mathrm{B}(t) - \mathrm{B}_1(\tau)], \quad z_0 = i\,[\mathrm{C}(t) - \mathrm{C}_1(\tau)].$$

Para cualquier sistema de valores que se emplee en la determinación de x, y, z, x_0, y_0, z_0, las coordenadas X, Y, Z de un punto cualquiera de la superficie asociada, correspondiente á cualquier valor de α, se expresan de la manera siguiente:

$$\mathrm{X} = x\cos\alpha + x_0\operatorname{sen}\alpha, \quad \mathrm{Y} = y\cos\alpha + y_0\operatorname{sen}\alpha, \quad \mathrm{Z} = z\cos\alpha + z_0\operatorname{sen}\alpha.$$

Expresando que el elemento lineal de dicha superficie,

$$d\mathrm{X}^2 + d\mathrm{Y}^2 + d\mathrm{Z}^2$$

es independiente de α, se obtienen las relaciones

$$\left.\begin{aligned} dx^2+dy^2+dz^2 &= dx_0^2+dy_0^2+dz_0^2, \\ dx\,dx_0+dy\,dy_0+dz\,dz_0 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Por tanto, no solamente una superficie mínima y su adjunta son aplicables mutuamente, sino que sus planos tangentes en los puntos correspondientes son paralelos, y las tangentes á dos curvas correspondientes son perpendiculares.

También puede establecerse que:

Si dos superficies son aplicables entre sí, de manera que los elementos correspondientes formen entre sí un ángulo constante, son necesariamente dos superficies mínimas asociadas, y los planos tangentes son paralelos en los puntos correspondientes.

Si dos superficies son aplicables entre sí, con ortogonalidad de los elementos correspondientes, no pueden ser más que superficies adjuntas entre sí, lo que puede verse en la obra citada de M. Darboux, tomo I, lib. III, cap. V.

Ejemplo. en el caso de ser

$$\mathfrak{F}(u) = -\frac{1}{2u^2}, \quad \mathfrak{F}_1(u_1) = -\frac{1}{2u_1^2},$$

las fórmulas de la familia de las superficies asociadas son

$$X = \frac{e^{i\alpha}}{4}\left(u+\frac{1}{u}\right) + \frac{e^{-i\alpha}}{4}\left(u_1+\frac{1}{u_1}\right),$$

$$Y = \frac{ie^{i\alpha}}{4}\left(\frac{1}{u}-u\right) - \frac{ie^{-i\alpha}}{4}\left(\frac{1}{u_1}-u_1\right),$$

$$Z = -\frac{e^{i\alpha}}{2}\log u - \frac{e^{-i\alpha}}{2}\log u_1 + C,$$

siendo C una constante cualquiera.

Hagamos $\quad u_1 = e^{-\mu - i\nu}, \quad u = e^{-\mu + i\nu}, \quad$ y obtendremos

$$X = \frac{1}{2}e^{-\mu}\cos(\nu+\alpha) + \frac{1}{2}e^{\mu}\cos(\nu-\alpha).$$

$$Y = \frac{1}{2}e^{-\mu}\operatorname{sen}(\nu+\alpha) + \frac{1}{2}e^{\mu}\operatorname{sen}(\nu-\alpha), \quad Z = \mu\cos + \nu\operatorname{sen}\alpha.$$

303. Método de Schwarz. Las fórmulas (4) de la pág. 531 sirvieron á Schwarz para obtener la superficie adjunta por medio de un método sencillo y elegante. Sean X, Y, Z los cosenos directores de la normal

$$X = \frac{u + u_1}{1 + uu_1}, \quad Y = \frac{i(u_1 - u)}{1 + uu_1}, \quad Z = \frac{uu_1 - 1}{1 + uu_1}, \qquad (5)$$

expresando x, y, z, x_0, y_0, z_0 las coordenadas de los puntos correspondientes de la superficie mínima dada y de la superficie adjunta. Se tendrá

$$X dx + Y dy + Z dz = 0, \quad X dx_0 + Y dy_0 + Z dz_0 = 0. \qquad (6)$$

Con la última de estas ecuaciones y la segunda de las (4) se determinarán las relaciones de dx_0, dy_0, dz_0, lo que dará

$$\frac{dx_0}{Z dy - Y dz} = \frac{dy_0}{X dz - Z dx} = \frac{dz_0}{Y dx - X dy},$$

La suma de los cuadrados de los numeradores es igual á la suma de los cuadrados de los denominadores, en virtud de las fórmulas (3) y (5). El valor común de estas relaciones es por tanto igual á ± 1. Pero si se sustituye en uno cualquiera de ellos X, Y, Z, $dx, \ldots, dx_0, \ldots$ por sus valores deducidos de las fórmulas de Weierstrass (9), de la pág. 517, las de la superficie adjunta y las (4), se obtendrá -1 por valor de las tres relaciones. Se tiene pues,

$$dx_0 = Y dz - Z dy, \quad dy_0 = Z dx - X dz, \quad dz_0 = X dy - Y dx, \qquad (7)$$

y x_0, y_0, z_0 quedarán determinadas por la integración de estas tres diferenciales con dos variables independientes, que pueden formarse, cuando se conoce la ecuación de la superficie.

Con este precedente, puede exponerse el método de Schwarz, que se funda en las dos proposiciones:

Una superficie mínima queda completamente determinada, cuando se dan una curva analítica, trazada en dicha superficie y la curva correspondiente, trazada en la superficie adjunta.

Si se conoce una curva L *en una superficie mínima y los planos* *tangentes en cada punto de esta curva, la curva correspondiente de la superficie adjunta puede obtenerse por simples cuadraturas.*

En efecto, si x, y, z son las coordenadas de un punto de una superficie mínima y X, Y, Z los cosenos directores de la normal en el mismo, las coordenadas x_0, y_0, z_0 del punto correspondiente de la superficie adjunta estarán determinadas por las fórmulas

$$dx_0 = Y dz - Z dy, \quad dy_0 = Z dx - X dz, \quad dz_0 = X dy - Y dx, \qquad (1)$$

en las que los segundos miembros son diferenciales exactas; y en virtud de las expresiones (1) y (3) de la pág. 530, se tendrá

$$\left.\begin{aligned} x - ix_0 &= x + i\int (Z dy - Y dz) = 2A(t), \\ y - iy_0 &= y + i\int (X dz - Z dx) = 2B(t), \\ z - iz_0 &= z + i\int (Y dx - X dy) = 2C(t), \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

y también

$$x + ix_0 = x - i\int (X dy - Y dz) = 2A_1(\tau), \text{ etc.} \qquad (3)$$

Sea L el contorno dado. Cuando se mueve un punto en éste, x, y, z, X, Y, Z se reducen á funciones de cierta variable λ, y las fórmulas precedentes, en las que las integrales de diferenciales totales se sustituyen por integrales de una sola diferencial $d\lambda$, darán las funciones de una sola variable, A, B, C, A_1, B_1, C_1, expresadas por medio de λ. Sean $\mathfrak{A}(\lambda)$, $\mathfrak{B}(\lambda)$, $\mathfrak{C}(\lambda)$, $\mathfrak{A}_1(\lambda)$, $\mathfrak{B}_1(\lambda)$, $\mathfrak{C}_1(\lambda)$ las expresiones obtenidas.

Si el contorno L es real, y si los valores de x, y, z, X, Y, Z se dan por relaciones numéricas ó leyes físicas, que no permiten determinar estas variables por valores imaginarios de λ, las funciones $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ serán conocidas de un modo incompleto; y las fórmulas relativas á la superficie

$$x' = \mathfrak{A}(\lambda) + \mathfrak{A}_1(\lambda), \quad y' = \mathfrak{B}(\lambda) + \mathfrak{B}_1(\lambda), \quad z' = \mathfrak{C}(\lambda) + \mathfrak{C}_1(\lambda) \quad (4)$$

permitirán determinar tan solo puntos que corresponden á valores reales de λ y λ_1. Pero si el contorno (L) es una curva analítica, real ó imaginaria, y si las funciones X, Y, Z que deben satisfacer á las ecuaciones

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \quad X dx + Y dy + Z dz = 0, \qquad (5)$$

son también funciones analíticas de λ, es decir, si x, y, z, X, Y, Z tienen una significación determinada, lo mismo para los valores imaginarios que para los reales de λ, lo mismo sucederá para las funciones $\mathfrak{A}, \ldots$ que deberán considerarse como completamente conocidas, y determinarán completamente las dos curvas mínimas, cuya traslación engendra la superficie. Sustituyendo estas funciones por sus valores en las fórmulas precedentes, se tendrá para las coordenadas $x', y'\ z'$ de un punto cualquiera de las superficies,

$$x' = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{i}{2}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (\mathrm{Y}dz - \mathrm{Z}dy), \tag{6}$$

y análogamente para y' y z', expresando x_1, y_1, z_1 los valores de x, y, z para $\lambda = \lambda_1$ y x_2, y_2, z_2 los valores de las mismas variables para $\lambda = \lambda_2$. Se podrá dar á λ_1 y λ_2 valores imaginarios cualesquiera, de modo que los puntos obtenidos dependerán de cuatro parámetros reales, como debía ser.

Si el contorno (L) es real, y se expresa por λ_0 el valor de λ correspondiente á un punto real determinado del contorno, se podrá hacer

$$\mathfrak{A}(\lambda) = \frac{x}{2} + \frac{i}{2}\int_{\lambda_0}^{\lambda} (\mathrm{Z}dy - \mathrm{Y}dz),\ \mathfrak{B}(\lambda) = \frac{y}{2} + \ldots,\ \mathfrak{C}(\lambda) = \ldots, \tag{7}$$

y la parte real de la superficie quedará definida por

$$\left.\begin{aligned} x' &= \mathfrak{R}(2\mathfrak{A}) = \mathfrak{R}\left[x + i\int_{\lambda_0}^{\lambda} (\mathrm{Z}dy - \mathrm{Y}dz)\right] \\ y' &= \mathfrak{R}(2\mathfrak{B}) = \mathfrak{R}\left[y + i\int_{\lambda_0}^{\lambda} (\mathrm{X}dz - \mathrm{Z}dx)\right] \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

debiéndose dar á λ un valor imaginario cualquiera.

Por consiguiente, la superficie definida por las ecuaciones (6) y (8) es la única que puede satisfacer á todas las condiciones impuestas; y solo falta probar que las satisface. Pero, según la definición, las funciones $\mathfrak{A}(\lambda), \ldots\ \mathfrak{A}_1(\lambda), \ldots$ satisfacen á las ecuaciones

$$d\mathfrak{A}^2 + d\mathfrak{B}^2 + d\mathfrak{C}^2 = 0,\quad \mathrm{X}d\mathfrak{A} + \mathrm{Y}d\mathfrak{B} + \mathrm{Z}d\mathfrak{C} = 0,$$

$$d\mathfrak{A}_1{}^2 + d\mathfrak{B}_1{}^2 + d\mathfrak{C}_1{}^2 = 0,\quad \mathrm{X}d\mathfrak{A}_1 + \mathrm{Y}d\mathfrak{B}_1 + \mathrm{Z}d\mathfrak{C}_1 = 0;$$

luego: 1.° La superficie obtenida es una superficie mínima. 2.° Pasa por el contorno (L) y admite, en cada punto, el plano tangente dado. Lo que resuelve el problema propuesto.

304. Aplicación. *Obtener las superficies mínimas que contienen una recta real dada y admiten, en los diferentes puntos de esta recta, planos tangentes dados.*

Las fórmulas (6) se reducen á

$$x' = \frac{i}{2}\int_0^{z_2} \mathrm{Y}dz - \frac{i}{2}\int_0^{z_1} \mathrm{Y}dz,$$

$$y' = -\frac{i}{2}\int_0^{z_2} \mathrm{X}dz + \frac{i}{2}\int_0^{z_1} \mathrm{X}dz, \quad z' = \frac{z_1 + z_2}{2},$$

satisfaciendo X, Y á la relación $\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 = 1$:

Se ve que, si se cambia z_1 en z_2, z' no cambia, x', y' cambian de signo, sin cambiar de valor; luego

Toda recta real, trazada en una superficie mínima, es necesariamente un eje de simetría de esta superficie.

Observación. M. Darboux demuestra el teorema de Catalan: *La única superficie mínima real reglada es el tornillo de filete cuadrado*, fundándose en esta simetría, pues si (d_1) y (d_2) son dos posiciones de la recta, la recta d_3, simétrica de (d_1) con relación á (d_2), pertenecerá también á la misma. Tomando la simétrica de (d_2) con relación á (d_3), y repitiendo indefinidamente esta operación, se obtendrá una serie indefinida de rectas, situadas en la superficie, etc. Llegaremos así á obtener un número ilimitado de rectas equidistantes de la superficie mínima. Si las rectas (d_1) y (d_2) se aproximan á la superficie, las rectas comunes al helicoide y á la superficie se aproximarán indefinidamente. La superficie coincidirá con la posición límite del helicoide.

§ 2.° Caso en que la relación es general

305. Definiciones. Hemos visto que en todo punto M de una superficie S existen dos puntos especiales M_1 y M_2 que son

los centros principales de curvatura de las dos secciones normales principales que pasan por S. Cuando el punto M se mueve en la superficie S, los centros de curvatura M_1 y M_2 describen una superficie, que se llama *evoluta* de la superficie S, mientras que ésta se llama la *evolvente*. La evoluta se compone de dos hojas S_1 y S_2, descritas respectivamente por los centros M_1 y M_2 de curvatura principales.

Las superficies, cuyos radios de curvatura r_1 y r_2 se hallan ligados entre sí por una relación $\varphi(r_1, r_2) = 0$ se llaman *superficies* W.

306. TEOREMA DE WEINGARTEN. (Primera parte). *Cada hoja de la evoluta de una superficie, cuyos radios de curvatura principales* r_1 *y* r_2 *se hallan ligados entre sí por una relación* $\varphi(r_1, r_2) = 0$, *es aplicable sobre una superficie de revolución.*

En efecto, en la primera hoja S_1 de la evoluta de S las líneas $r_1 =$ const. son geodésicamente paralelas entre sí, y su curvatura geodésica es

$$\frac{1}{\rho r_1} = \frac{1}{r_1 - r_2}.$$

Si suponemos ahora ligados r_1 y r_2 entre sí por una relación, será $\dfrac{1}{\rho r_1}$ constante á lo largo de las líneas $r_1 =$ const. y por tanto, la S_1 será aplicable sobre una superficie de revolución.

Analíticamente veremos que

$$ds_1^2 = dr_1^2 + \mathrm{E}\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)^2 du^2.$$

Si calculamos $$-\frac{1}{\rho r_1} = \frac{\partial \log\left[\sqrt{\mathrm{E}}\left(1 - \dfrac{r_1}{r_2}\right)\right]}{\partial r_1},$$

obtendremos

$$\frac{\partial \log\left[\sqrt{\mathrm{E}}\left(1 - \dfrac{r_1}{r_2}\right)\right]}{\partial r_1} = \frac{\partial \log \sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v} \frac{1}{\dfrac{\partial r_1}{\partial v}} + \frac{1 - \dfrac{r_1}{r_2}\dfrac{dr_2}{dr_1}}{r_1 - r_2}$$

y en virtud de la primera fórmula de la pág. 296, tendremos

$$\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{r_1}{r_2(r_1 - r_2)} \frac{\partial r_2}{dv};$$

luego

$$\frac{\partial \left\{ \log \sqrt{E} \left(1 - \frac{r_1}{r_2} \right) \right\}}{\partial r_1} = \frac{1}{r_1 - r_2},$$

é integrando,

$$\sqrt{E} \left(1 - \frac{r_1}{r_2} \right) = e^{\int \frac{dr_1}{r_1 - r_1} + \varphi(u)} du_1^2,$$

fórmula que demuestra el teorema. Además vemos que:

La forma de la superficie de revolución sobre la que es aplicable S_1 *depende tan solo de la naturaleza de la relación* $\varphi(r_1, r_2)$ *que liga á los radios de curvatura de la evolvente.*

La segunda hoja S_2 será aplicable sobre una superficie de revolución, cuyo elemento lineal estará expresado por

$$ds_2^2 = dr_2^2 + e^{2\int \frac{dr_1}{r_2 - r_1}} dv_1^2.$$

En general, las dos hojas S_1 y S_2 de la evoluta no son aplicables la una á la otra; pero esto sucederá en casos particulares, por ejemplo, cuando $\varphi(r_1, r_2) = 0$ es simétrica respecto á los radios r_1 y r_2.

307. Sistema de ∞^2 rectas. Para demostrar la segunda parte del teorema de Weingarten, es necesario recordar algunas nociones acerca de las congruencias de rectas, es decir, de los sistemas de rectas distribuídas en el espacio de modo que por cada punto de éste pase una sola recta (ó un número finito) del sistema.

Si cortamos el sistema por una superficie arbitraria S, consideraremos como punto de partida de cada recta (rayo) del sistema, al punto (ó uno de los puntos) en el que corta á S. Supondremos un sistema de coordenadas curvilíneas en la superficie S, y representaremos por x, y, z las coordenadas cartesianas, ortogonales de un punto (u, v) de S y por X_1, Y_1, Z_1 los cosenos directores del rayo del sistema en el punto (u, v). Así x, y, z, X_1, Y_1, Z_1 serán funciones de

u y v, que supondremos finitas y continuas, juntamente con sus derivadas parciales; y si expresamos con t la longitud del rayo, desde el punto inicial (x, y, z) hasta un punto arbitrario (ξ, η, ζ), tendremos

$$\xi = x + tX_1, \quad \eta = y + tY_1, \quad \zeta = z + tZ_1. \tag{1}$$

Vamos á obtener la condición para que el sistema de los ∞^2 rayos, definidos por estas fórmulas, sea el de las normales á una superficie Σ. Si existe dicha superficie, todo rayo del sistema la encontrará normalmente en un punto, donde la longitud t será una función determinada de u y v. Para determinar esta superficie, hay que suponer para t en las (1), una función de u y de v tal, que los cosenos directores de aquélla sean X_1, Y_1, Z_1.

Hecha en (1) esta sustitución, si se dan á u y v incrementos infinitamente pequeños arbitrarios du y dv, los incrementos correspondientes $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ de ξ, η, ζ deberán satisfacer á la condición

$$X_1 d\xi + Y d\eta + Z d\zeta = 0.$$

Pero se tiene

$$d\xi = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + t dX_1 + X_1 dt,$$

$$d\eta = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + t dY_1 + Y_1 dt,$$

$$d\zeta = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv + t dZ_1 + Z_1 dt,$$

Supongamos $\quad U = \Sigma X_1 \dfrac{\partial x}{\partial u}, \quad V = \Sigma X_1 \dfrac{\partial x}{\partial v}.$

La condición buscada será

$$dt = -(U du + V dv). \tag{2}$$

Para que exista la superficie Σ, es necesario y suficiente que $U du + V dv$ sea una diferencial exacta, ó que sea

$$\frac{\partial U}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial u}. \tag{3}$$

Supuesta satisfecha esta condición, la (2) integrada, dará

$$t = C - \int (U du + V dv). \tag{4}$$

Y sustituyendo este valor de t en (1), tendremos un sistema ∞^1 de superficies (paralelas) normales al sistema dado de rayos.

308. Teorema de Beltrami. *Si un sistema ∞^2 de rectas, que parten de los puntos de una superficie* S, *admite una serie de superficies ortogonales, imaginando cada recta terminada en una de las superficies Σ ortogonales, en toda deformación, por flexión de la superficie* S, *que lleva consigo las rectas unidas invariablemente á la superficie, el lugar de los mismos extremos no dejará de ser una superficie ortogonal al sistema de rectas.*

En efecto, la condición (3) puede escribirse bajo otra forma, introduciendo los coeficientes E, F, G, del elemento lineal de S y los cosenos de los ángulos α, β que forma el rayo del sistema, que parte del punto (u, v) de S, con las direcciones positivas de las líneas $v =$ const. $u =$ const., respectivamente. Se tiene, pues

$$\cos\alpha = \Sigma X_1 \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{U}{\sqrt{E}}, \quad \cos\beta = \Sigma X_1 \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{V}{\sqrt{G}},$$

y la (3) puede escribirse así:

$$\frac{\partial(\sqrt{E}\cos\alpha)}{\partial v} = \frac{\partial(\sqrt{G}\cos\beta)}{\partial u}. \tag{5}$$

Supongamos satisfecha esta condición, é imaginemos que se deforma la superficie S por flexión, transportando consigo al sistema de rectas, de modo que los ángulos α, β no varíen, esto es, de modo que cada recta se halle ligada invariablemente al plano tangente de la S en el punto de partida. Puesto que no varían E, F, G durante la deformación, la (5) quedará satisfecha siempre, esto es, después de la deformación, el sistema ∞^2 de rectas será siempre el sistema de las normales á una serie de superficies paralelas. La longitud t dada por la (4)

$$t = G - \int (\sqrt{E}\cos\alpha\, du + \sqrt{G}\cos\beta\, dv),$$

relativa á una superficie determinada de la serie ortogonal, permanece también sin variar por la deformación, y el teorema queda demostrado.

309. TEOREMA. *La condición necesaria y suficiente para que un sistema* ∞^2 *de rectas, tangentes á una superficie* S, *sea el sistema de las normales de una superficie* Σ, *es que las líneas envueltas en* S *por estas rectas, constituyan un sistema* ∞^1 *de líneas geodésicas*, pues al suponer que las rectas del sistema sean tangentes á la superficie S, existe en S un sistema ∞^1 de líneas, cuyas tangentes forman el sistema ∞^2 de rayos considerados. Tomando estas líneas por líneas coordenadas v y las trayectorias ortogonales por líneas u, tendremos $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = 0$, y por consiguiente la (5) se reducirá á $\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0$, es decir, que las líneas $v =$ const. son geodésicas.

En este caso, la superficie S es una de las hojas de la evoluta de Σ, y la longitud t será uno de los radios de curvatura de la evolvente Σ. Si se toma por parámetro u el arco de las geodésicas, contado á partir de una trayectoria ortogonal fija, se tendrá $E = 1$, y por consiguiente $t = C - u$.

Podremos pues, considerar engendrada lasuperficie evolvente Σ, tendiendo un hilo que termine en una de las trayectorias ortogonales. Desarrollando en cada geodésica el hilo, su extremidad describirá la curva evolvente, y el lugar de todas estas curvas será la superficie evolvente Σ.

La segunda hoja de la evoluta de Σ, según el Sr. Bianchi, se llama la *superficie complementaria* de S, respecto al sistema de las geodésicas. Podrá pues, definirse como el lugar de los centros de curvatura geodésica de las trayectorias ortogonales de las geodésicas trazadas en S.

310. TEOREMA RECÍPROCO DE WEINGARTEN. *Si excluímos las superficies regladas aplicables sobre la catenoide, cualquiera otra superficie aplicable sobre una superficie de revolución, puede considerarse como una hoja de la evoluta de una superficie, cuyos radios de curvatura principales son funciones el uno del otro.*

Supongamos que la superficie S sea aplicable sobre una superficie de revolución, y consideremos el sistema ∞^1 de líneas geodésicas, deformadas de los meridianos. Excluyendo por ahora el caso de que estas geodésicas sean líneas rectas, sus tangentes constituyen un sistema ∞^2 de rayos, que admitirá una serie de superficies (paralelas) ortogonales. Fijemos una de ellas Σ, y demostremos que sus radios de curvatura principales r_1, r_2 se hallan ligados entre sí por una relación depediente tan solo de la forma de la superficie de revolución, sobre la que es aplicable S.

La superficie S es una de las hojas de la evoluta de Σ, que supondremos la relativa al radio r_1. Entonces r_1 es igual al arco de las geodésicas deformadas de los meridianos, á contar de una trayectoria ortogonal fija. Por otra parte, $r_1 - r_2$ es igual al radio de curvatura geodésica de estas trayectorias ortogonales (deformadas de los paralelos); luego $r_1 - r_2$ es una función de r_1, dependiente tan solo de la forma de la superficie de revolución sobre la que es aplicable S.

Las superficies regladas (lugares de rectas), aplicables sobre las superficies de revolución, se presentan como caso de excepción, puesto que las generatrices se distienden sobre los meridianos, ofreciendo un ejemplo de superficies de esta especie el helicoide reglado de área mínima, aplicable sobre la catenoide. Esta es la única excepción, como es fácil demostrar, según se puede ver en las obras citadas de los Sres. Darboux y Bianchi.

311. Evoluta media. Si tomamos el punto medio M_0 del segmento $M_1 M_2$, ya considerado (pág. 326), y se traza por M_0 un plano paralelo al plano tangente en M á la evolvente S, tendremos el *plano medio;* y la superficie Σ envolvente de los planos medios, se llama *evoluta media*, según Ribacour, á quien se debe el estudio de la misma.

Las coordenadas del punto M_0 son

$$x_0 = x - \frac{r_1 + r_2}{2} X, \quad y_0 = y - \frac{r_1 + r_2}{2} Y, \quad z_0 = z - \frac{r_1 + r_2}{2} Z;$$

y expresando por ω la distancia (algebraica) del plano medio al origen, se tiene

$$\omega = \Sigma X x_0 = \Sigma X x - \frac{r_1 + r_2}{2}.$$

Pero la suma $\Sigma X x$ representa la distancia del origen al plano tangente de la evolvente S, que se expresa por la letra, W y resulta

$$\omega = W - \frac{r_1 + r_2}{2},$$

fórmula que resuelve el problema: *Dada la evolvente hallar la evoluta media* y el inverso: *Dada una superficie Σ, hallar la superficie S de la que Σ es la evoluta media*, según puede verse en la obra citada del Sr. Bianchi (pág. 230).

312. Los teoremas de Weingarten. Sea el elemento lineal

$$ds^2 = A^2\, du^2 + C^2\, dv^2, \tag{1}$$

y supongamos además que los ejes de las x é y del triedro T coincidan con las tangentes á las líneas coordenadas, y que $p = q = 0$. Las fórmulas fundamentales (A″) de la pág. 377 se reducen á

$$\left.\begin{aligned} r = -\frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v} = \frac{1}{p_1}\frac{\partial q}{\partial v}, \quad r_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u} = -\frac{1}{q}\frac{\partial p_1}{\partial u} \\ \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = -q p_1 \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Pero si R y R′ expresan los radios de curvatura principales correspondientes á los arcos Adu y Cdv, se tiene

$$R = -\frac{A}{q}, \quad R' = \frac{C}{p_1}. \tag{3}$$

Mediante estas relaciones las fórmulas (2) se reducen á

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial v} = \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial v}(R' - R), \quad \frac{\partial R_1}{\partial u} = -\frac{1}{p_1}\frac{\partial p_1}{\partial u}(R' - R), \\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{p_1}\frac{\partial q}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{q}\frac{\partial p_1}{\partial u}\right) + q p_1 = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Y puesto que el elemento lineal, en la representación esférica, adquiere la forma

$$d\sigma^2 = q^2\, du^2 + p_1^2\, dv^2, \tag{5}$$

el sistema (4) contiene todas las relaciones existentes entre esta representación esférica y los radios de curvatura.

Supongamos que sea R′ una función de R. De las dos primeras ecuaciones (4) resulta

$$q = \mathrm{U}\, e^{\int \frac{dR}{R'-R}}, \quad p_1 = \mathrm{V} e^{-\int \frac{dR'}{R'-R}}, \tag{6}$$

expresando U una función de u y V una función de v. Pero si consideramos la fórmula (5) que define la representación esférica, se ve que, eligiendo convenientemente los parámetros de las líneas de curvatura, se podrá sustituir la unidad á U y V; y tendremos

$$q = e^{\int \frac{dR}{R'-R}}, \quad p_1 = e^{-\int \frac{dR'}{R'-R}}. \tag{7}$$

Por sencillez en las aplicaciones, podremos hacer desaparecer las cuadraturas, escribiendo

$$\mathrm{R} = \varphi(k), \quad \mathrm{R}' = \varphi(k) - k\varphi'(k), \tag{8}$$

por medio de la variable auxiliar k. Y tendremos

$$\varphi = \frac{1}{k}, \quad p_1 = \frac{1}{\varphi'(k)}. \tag{9}$$

Las fórmulas (3) darán los valores de A y C,

$$\mathrm{A} = -\frac{\varphi(k)}{k}, \quad \mathrm{C} = \frac{\varphi(k) - k\,\varphi'(k)}{\varphi'(k)}. \tag{10}$$

Cuando se da *a priori* la relación entre R y R′, las variables k y $\varphi(k)$ se determinan por las fórmulas

$$k = e^{\int \frac{dR}{R-R'}}, \quad \varphi(k) = \mathrm{R}. \tag{11}$$

Para verificar la última de las relaciones (4), sustituiremos los valores de q y p_1 en ella, y tendremos la ecuación de derivadas parciales,

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{k\varphi''}{\varphi'^2}\frac{\partial k}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\varphi'}{k^2}\frac{\partial k}{\partial v}\right)-\frac{1}{k\varphi'}=0, \tag{12}$$

cuya integración dará á conocer k en función de u y de v. Pero como esta ecuación expresa que el elemento lineal u se halla definido por la fórmula (5), es decir, por

$$d\sigma^2=\frac{1}{k^2}\,du^2+\frac{1}{\varphi'(k)}\,dv^2, \tag{13}$$

podemos enunciar el

TEOREMA DE WEINGARTEN. *La obtención de las superficies para las que los radios de curvatura principales son funciones, el uno del otro, ó sea las superficies* W, *se reduce á la de los sistemas esféricos ortogonales, para los que el elemento lineal toma la forma*

$$\mathrm{d}\sigma^2=\frac{1}{\mathrm{k}^2}\,\mathrm{du}^2+\frac{1}{\varphi'(\mathrm{k})}\,\mathrm{dv}^2$$

ó lo que es igual, $\quad \mathrm{d}\sigma^2=\alpha\,\mathrm{du}^2+\varphi(\alpha)\,\mathrm{dv}^2.$

RECÍPROCAMENTE. *Siempre que el elemento lineal de la esfera se reduce á la forma* (13), $\varphi(\mathrm{k})$ *quedará determinada, prescindiendo de una constante, y por consiguiente las fórmulas* (8) (10) *darán á conocer una familia de superficies paralelas, cuya representación esférica se hallará definida por la fórmula* (13), *las cuales serán todas superficies* W.

Si el sistema ortogonal es completamente conocido, es decir, si se dan las expresiones de los cosenos directores c, c', c'' de la normal á la superficie, en función de u y v, las fórmulas de O. Rodrigues, dan las coordenadas del punto correspondiente de la superficie, mediante las cuadraturas

$$x=-\int\left(\mathrm{R}\frac{\partial c}{\partial u}\,du+\mathrm{R}'\frac{\partial c}{\partial v}\,dv\right),\quad y=-\int\left(\mathrm{R}\frac{\partial c'}{\partial u}\,du+\mathrm{R}'\frac{\partial c'}{\partial v}\,dv\right)$$

$$z=-\int\left(\mathrm{R}\frac{\partial c''}{\partial u}\,du+\mathrm{R}'\frac{\partial c''}{\partial v}\,dv\right).$$

Pero si tan solo se conocen las expresiones de p_1 y q, la determinación exigirá la integración de una ecuación de Riccati.

Si se trata de obtener la *superficie de los centros de curvatura* de las superficies W, ó evoluta, observaremos que:

Para la primera hoja de la evoluta, que contiene los centros de curvatura de las curvas cuyo parámetro es v, siendo x_1, y_1, z_1 las coordenadas del centro de curvatura, tenemos

$$x_1 = x + c\mathrm{R}, \quad y_1 = y + c'\mathrm{R}, \quad z_1 = z + c''\mathrm{R},$$

expresando x, y, z las coordenadas del pie de la normal y c, c', c'' los cosenos directores.

En virtud de las fórmulas de O. Rodrigues, se tiene

$$\frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{R}\frac{\partial c}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{R}\frac{\partial c}{\partial v} = 0$$

y análogamente para y, z. Tendremos pues,

$$dx_1 = (\mathrm{R} - \mathrm{R}')\frac{\partial c}{\partial v}dv + c\,d\mathrm{R}, \quad dy_1 = (\mathrm{R} - \mathrm{R}')\frac{\partial c'}{\partial v}dv + c'd\mathrm{R},$$

$$dz_1 = (\mathrm{R} - \mathrm{R}')\frac{\partial c''}{\partial v}dv + c''d\mathrm{R}.$$

Los elementos lineales para cada una de las hojas serán

$$ds_1^2 = p_1^2(\mathrm{R} - \mathrm{R}')^2 dv^2 + d\mathrm{R}^2, \quad ds_2^2 = q^2(\mathrm{R} - \mathrm{R}')^2 du^2 + d\mathrm{R}'^2.$$

Si sustituímos por p_1, q, R, R′ sus valores, será

$$ds_1^2 = k^2 dv^2 + \varphi'^2(k)\,dk^2, \quad ds_2^2 = \varphi'^2(k)\,du^2 + k^2\varphi''^2(k)\,dk^2.$$

Luego: *Si se consideran todas las superficies* W, *que corresponden á una misma relación entre los radios de curvatura, la primera y la segunda hoja de todas estas superficies son aplicables á las superficies de revolución, cuyos elementos lineales dependen únicamente de la relación entre los radios de curvatura, y por consiguiente, permanecen los mismos para todas estas superficies.*

Aplicación. 1.ª Sea el elemento lineal de la esfera correspondiente á las superficies isotermas

$$ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2).$$

Tendremos $\lambda^2 = \frac{1}{k^2} = \frac{1}{\varphi'^2(k)}$, de donde $\varphi'(k) = k$.

Prescindiendo de una constante, cuya introducción daría lugar á superficies paralelas, se podrá hacer $\varphi k = \frac{k^2}{2}$; y entonces será

$$R = \frac{k}{2},\quad q = \frac{1}{k},\quad A = -\frac{k}{2};\quad R' = -\frac{k^2}{2},\quad p_1 = \frac{1}{k},\quad C = -\frac{k}{2}.$$

La relación $R + R' = 0$ entre los radios de curvatura caracteriza las superficies mínimas.

Observación. Si tenemos

$$ds^2 = \frac{du'^2 + dv'^2 + 2\cos\omega\, du'dv'}{\operatorname{sen}^2\omega},$$

y hacemos $$u = \frac{u' + v'}{2},\quad v = \frac{u' - v'}{2},$$

se tendrá $$ds^2 = \frac{du^2}{\operatorname{sen}^2\frac{\omega}{2}} + \frac{dv^2}{\cos^2\frac{\omega}{2}} \qquad (a)$$

y recíprocamente, pues $\Delta u' = \Delta v' = 1$, luego: *Si se sabe determinar las líneas geodésicas de una superficie, se sabrá también reducir su elemento lineal á una de las fórmulas precedentes.*

Podemos demostrar el recíproco del teorema último, considerando la superficie S_1 referida á una familia de geodésicas y á sus trayectorias ortogonales. Su elemento lineal es

$$ds_1^2 = du^2 + C^2dv^2. \qquad (1)$$

Sea el triedro T, formado por la normal y las tangentes á las curvas coordenadas. Las tangentes á las geodésicas $v =$ const. son normales á una familia de superficies (232), y podemos determinar una cualquiera de estas superficies paralelas á las que son normales dichas rectas, pues, en cada punto, la tangente á la geodésica es el eje de las x del triedro T. Un punto, de este eje, á la distancia λ del vértice, se halla definido por las fórmulas

$$x_0 = x_1 + a\lambda,\quad y_0 = y_1 + a'\lambda,\quad z_0 = z_1 + a''\lambda. \qquad (2)$$

Diferenciando, por ejemplo la primera, y sustituyendo dx_1 y da por sus valores, resulta

$$dx = adu + bCdv,$$

$$da = b(rdu + r_1 dv) - c(qdu + q_1 dv) = b\frac{\partial C}{\partial u}dc - c(qdu + q_1 dv),$$

y obtendremos

$$dx_0 = ad\,(u + \lambda) + b\left(C + \lambda\frac{\partial C}{\partial u}\right)dv - c\lambda\,(qdu + q_1 dv), \quad (3)$$

y análogas fórmulas para dy_0 y dz_0.

Para que la superficie descrita por el punto (x_0, y_0, z_0) sea normal al eje de las x, bastará que sea nulo el coeficiente de c en la ecuación anterior, es decir, $\lambda + \mu =$ const.

Limitándonos á una de las superficies normales, tendremos $\lambda = -u$, y sustituyendo en (2), será

$$x = x_1 - au, \quad y = y_1 - a'u, \quad z = z_1 - a''u,$$

ecuaciones que definen una superficie Σ normal á todas las tangentes de las geodésicas.

Por otra parte, si se quiere que la superficie descrita por el punto (x_0, y_0, z_0) sea tangente á las mismas rectas, y que constituya, por consiguiente, con (S_1) la segunda hoja (S_2) de la evoluta (Σ), es necesario tomar $\lambda = -C : \frac{\partial C}{\partial u}$, valor que anula al coeficiente b de (3). Las coordenadas x_2, y_2, z_2 del punto de S_2 serán pues,

$$x_2 = x - a\left(C : \frac{\partial C}{\partial u}\right), \quad y_2 = y - a'\left(C : \frac{\partial C}{\partial u}\right),$$

$$z_2 = z - a''\left(C : \frac{\partial C}{\partial u}\right),$$

obteniéndose para los dos radios de curvatura de Σ

$$R = u, \quad R' = u - C : \frac{\partial C}{\partial u}.$$

En el caso de ser C una función de la variable u, lo que caracteriza á las superficies de revolución, R y R' dependerán, de la única variable u y además, la relación que liga á estas funciones será la misma para cualquier superficie S_1; luego

Si una superficie S *es aplicable á una superficie de revolución, las tangentes á aquéllas geodésicas á las que corresponden los meridianos de la superficie de revolución, son normales á una familia de superficies paralelas* W. *La relación entre los dos radios de curvatura principales de cada superficie* W *permanece la misma, cuando se deforma* S_1 *de todas las maneras posibles.*

Además si se sustituye λ en (3) por el valor que corresponde á la superficie S_2, se obtiene

$$dx_2 = ad\left(u - \frac{C}{\partial C : \partial u}\right) + C : \frac{\partial C}{\partial u}(q du + q_1 dv)\,c,$$

con análogas fórmulas para dy_2 y dz_2.

El elemento lineal de la hoja S_2 será

$$ds_2^2 = \left[d\left(u - \frac{C}{\dfrac{\partial C}{\partial u}}\right)\right]^2 + \frac{C^2}{\left(\dfrac{\partial C}{\partial u}\right)^2}(q du + q_1 dv)^2.$$

En este caso C depende solamente de u, y la expresión

$$C\,(q du + q_1 dv)$$

es una diferencial exacta, reduciéndose el elemento lineal á

$$ds_2^2 = \left[C\,\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} : \left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)^2\right] du^2 + dw^2 : \left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)^2.$$

313. APLICACIÓN Á LAS SUPERFICIES PSEUDOESFÉRICAS. Tomando el radio igual á 1, tendremos

$$r_1 r_2 = -1, \quad r_1 dr_2 = -r_2 dr_1,$$

$$\sqrt{E} = \frac{r_1}{\sqrt{r_2^2 + 1}}, \quad \sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{r_2^2 + 1}},$$

(r_2 positivo r_1 negativo); y expresando por ω un ángulo real comprendido entre o y $\frac{\pi}{2}$, podemos hacer

$$\sqrt{E} = \cos\omega, \quad \sqrt{G} = \operatorname{sen}\omega, \quad r_2 = \cot\omega, \quad r_1 = -\operatorname{tg}\omega;$$

ω es el ángulo que las asintóticas de un sistema forman con las líneas de curvatura $v = \text{const}$. La condición $k = -1$ se traduce para ω, en la ecuación

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\omega\cos\omega; \tag{1}$$

luego: *El elemento lineal de toda superficie pseudoesférica de radio* 1, *referido á las líneas de curvatura, puede escribirse bajo la forma*

$$ds^2 = \cos^2\omega\, du^2 + \operatorname{sen}^2\omega\, dv^2, \tag{2}$$

siendo ω una función de u y v que satisface á la ecuación (1). Los radios de curvatura se dan por

$$r_1 = -\operatorname{tg}\omega, \quad r_2 = \cot\omega.$$

314. APLICACIONES Á LAS SUPERFICIES DE CURVATURA CONSTANTE POSITIVA. Suponiendo $r_1 r_2 = +1$, será

$$\sqrt{E} = \frac{r_2}{\sqrt{1 - r_2^2}}, \quad \sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{1 - r_2^2}}.$$

Podemos hacer $r_2 = \operatorname{tg} h\omega$, y será

$$\sqrt{E} = \operatorname{sen} h\omega, \quad \sqrt{G} = \cos h\omega, \quad r_2 = \operatorname{tg} h\omega, \quad r_1 = \cot h\omega.$$

La condición $k = +1$ da, para ω, la ecuación de derivadas parciales

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} = -\operatorname{sen} h\omega\cos h\omega. \tag{1}$$

El elemento lineal de toda superficie de curvatura constante k = + 1, *referido á las líneas de curvatura, puede reducirse á la forma*

$$ds^2 = \operatorname{sen} h^2\omega\, du^2 + \cos h^2\omega\, dv^2,$$

satisfaciendo $\omega(u, v)$ á la condición (1), y siendo

$$r_1 = \cot h\omega, \quad r_2 = \operatorname{tg} h\omega.$$

315. Aplicaciones á las superficies de Weingarten. Comparando las expresiones (1) de la pág. 546 y (13) de la 544, resulta

$$k = \operatorname{sen}\frac{\omega}{2}, \quad \varphi'(k) = \cos\frac{\omega}{2}$$

y
$$\varphi'(k)\,dk = \frac{1}{2}\cos^2\frac{\omega}{2}\,d\omega, \quad \varphi(k) = \frac{\omega + \operatorname{sen}\omega}{4}.$$

Tendremos, para las dos hojas de la evoluta,

$$ds_1^2 = k^2\,dv^2 + (1 - k^2)\,dk^2, \quad ds_2^2 = (1 - k^2)\,du^2 + \frac{k^4\,dk^2}{1 - k^2}.$$

Estas dos expresiones se reducen la una á la otra, cambiando k en $\sqrt{1 - k^2}$. *Las dos hojas de la evoluta son pues aplicables, la una á la otra.*

§ 3.º Superficies de curvatura constante

316. Resultados del Sr. Bianchi. (*) Son de gran importancia las investigaciones del Sr. Bianchi como aplicación de los teoremas del Sr. Weingarten á la teoría de la pseudoesfera (*), de que trata M. Darboux, en su obra citada varias veces, y el Dr. G. Bolke en su *Inaugural-Disertation, Die Complementärflächen der Pseudosphærischen rotations Flächen.*

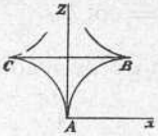


Figura 122

Consideremos la pseudoesfera engendrada por la revolución de la tractriz, cuyas tangentes son iguales á a. El elemento lineal tiene la forma

$$ds^2 = a^2\,(du^2 + e^{2u}\,dv^2). \qquad (1)$$

Enseguida deberemos considerar la superficie cuyos meridianos

(*) *Richerche sulle superficie a curvatura constante e sulle elicoidi (Annali della* R. *Scuola normale superiore di Pisa*, t. II, pág. 285.) *Ueber die Flächen mit constanter negativer Krümmung (Math. Annales*, t. XVI) cortan al eje de revolución en un punto, siendo

$$ds^2 = a^2 \left[du^2 + \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2} \right)^2 dv^2 \right]; \tag{2}$$

y por último aquélla en que los meridianos no cortan al eje,

$$ds^2 = a^2 \left[du^2 + \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2} \right)^2 dv^2 \right]. \tag{3}$$

Puesto que estas diferentes formas son aplicables entre sí, de infinidad de maneras, diremos que: *El elemento lineal de toda superficie, cuya curvatura total* $-\frac{1}{a^2}$ *puede reducirse, de infinidad de maneras, á cada una de las formas* (1), (2), (3); *y estas formas son las únicas para las que las geodésicas, cuyo parámetro es* v, *puedan reducirse, después de una deformación, á los meridianos de una superficie de revolución.*

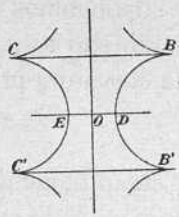


Figura 123

En el caso de la fórmula (1), *las trayectorias ortogonales de las geodésicas tienen un radio constante, igual á* a. La propiedad característica puede enunciarse como sigue:

Si existe en una superficie una familia de curvas paralelas, formada por círculos geodésicos, cuyo radio de curvatura geodésica tiene el mismo valor a, *la curvatura total de aquélla es constante é igual á* $-\frac{1}{a^2}$.

En efecto, siendo $ds^2 = du^2 + C^2 dv^2$

la expresión del elemento lineal, referido á curvas paralelas y á las geodésicas ortogonales, la propiedad enunciada se expresa por

$$\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial u} = \pm \frac{1}{a} \quad \text{que da} \quad C = Ve^{\pm \frac{u}{a}},$$

siendo V función de v, y deduciéndose de esto que

$$\frac{1}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = -\frac{1}{a^2}.$$

Para la fórmula (2): *Los radios de los círculos geodésicos son menores que* a, *decreciendo hasta cero, de manera que las geodésicas pasan por un punto fijo* (u = o).

Para la fórmula (3): *Los radios de dichos círculos son todos superiores á* a *y aumentan indefinidamente, de manera que uno de ellos* (u = o) *se convierte en una geodésica á la que son normales todos los demás.*

Escribamos una de las tres expresiones del elemento lineal, así:

$$ds^2 = a^2 (du^2 + C^2 dv^2),$$

y supongamos que se trazan las tangentes á las geodésicas, cuyo parámetro es v. Serán normales á una superficie W, cuyos radios de curvatura principales se determinan por las ecuaciones

$$R : a = u, \quad R' : a = u - C : C',$$

y serán tangentes á una segunda superficie Σ' que formará con la primera Σ, la evoluta completa de la superficie W, por lo que el Sr. Bianchi la denominó *superficie complementaria* de Σ, siendo el elemento lineal de Σ'

$$ds^2 = a^2 \left[\left(\frac{CC''}{C'^2}\right)^2 du^2 + \frac{1}{C'^2} dw^2\right].$$

Si se hace $C = e^u$, tendremos

$$R = au, \quad R' = au - a, \quad C = C' = C''.$$

La relación entre los radios de curvatura de la superficie correspondiente es $R - R' = a$, y el elemento lineal de la superficie complementaria Σ' se reduce á

$$ds^2 = a^2 (du^2 + e^{-2u} dw^2).$$

La curvatura de esta segunda hoja, $-\frac{1}{a^2}$, *es por consiguiente constante.*

Y análogamente obtiene

$$z = a\left(\cos\varphi + \log \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right), \quad r = \frac{am}{\sqrt{m^2 - \varepsilon}} \operatorname{sen}\varphi,$$

siendo r la distancia al eje de revolución; m es una constante y ε tomará uno de los valores 0, 1, -1, según que se trate de la fórmula (1), (2) ó (3) págs. 550 y 551, para $\varepsilon = 0$ se tiene la *tractriz*. En los otros dos casos las *tractrices alargadas* ó *acortadas*, según la denominación del Sr. Bianchi.

317. SUPERFICIE PSEUDOESFÉRICA. Puesto que todas las superficies de curvatura constante $-\frac{1}{a^2}$, como se ha visto, son aplicables las unas á las otras, consideremos aquéllas cuyo elemento lineal es

$$ds^2 = a^2\,(du^2 + e^{2u}dv^2),$$

engendrada por la revolución de la tractriz (pág. 550)

$$r = a \operatorname{sen} \varphi, \qquad z = a\left(\log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \cos \varphi\right),$$

alrededor de su base. Si hacemos $v = x$, $e^{-u} = y$, el elemento lineal se reducirá á

$$ds^2 = a^2\,\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}. \tag{1}$$

Transformemos, empleando las coordenadas simétricas,

$$\alpha = x + iy, \qquad \beta = x - iy.$$

El elemento lineal adquirirá la forma

$$ds^2 = -\,4a^2\,\frac{d\alpha\, d\beta}{(\alpha - \beta)^2}. \tag{2}$$

Las transformaciones de α y β, que conservan el elemento lineal, se obtendrán resolviendo la ecuación

$$\frac{d\alpha\, d\beta}{(\alpha - \beta)^2} = \frac{d\alpha_1\, d\beta_1}{(\alpha_1 - \beta_1)^2}, \tag{3}$$

que admite dos especies de soluciones

$$\alpha = \frac{m\alpha_1 + n}{p\alpha_1 + q}, \qquad \beta = \frac{m\beta_1 + n}{p\beta_1 + q}; \tag{4}$$

$$\alpha = \frac{m\beta_1 + n}{p\beta_1 + q}, \quad \beta = \frac{m\alpha_1 + n}{p\alpha_1 + q}, \tag{5}$$

siendo m, n, p, q constantes cualesquiera.

Las primeras, aplicadas al plano, constituyen lo que llama M. Darboux una *transformación circular*. Si $mq - np > 0$, la transformación hace corresponder á cada punto de la parte superior del plano, un punto comprendido en la misma región.

Las (5), que se reducen á las primeras por el cambio de α_1 y β_1, conservando el elemento lineal (2), no hacen corresponder la parte superior del plano á la parte superior más que cuando $mq - np < 0$.

Observación. Si se considera α y β como coordenadas simétricas en la fórmula (5), tenemos una transformación en la que se conservan los ángulos. Pero si se consideran α y β como coordenadas simétricas de un punto de la *pseudoesfera*, la transformación conserva los ángulos y las áreas. La transformacción efectúa una aplicación de la superficie sobre sí misma.

Y en efecto, para resolver la ecuación

$$\frac{d\alpha\, d\beta}{(\alpha - \beta)^2} = \frac{d\alpha_1 d\beta_1}{(\alpha_1 - \beta_1)^2},$$

observaremos que, solo puede admitir soluciones para las que α_1 y β_1 dependan solamente de una de las variables α ó β. Sea $\alpha_1 = f(\alpha)$, $\beta_1 = f_1(\beta)$. Demos á β un valor particular b; β_1 y $\frac{d\beta_1}{d\beta}$ tomarán valores b_1, b_1', y se tendrá

$$\frac{d\alpha}{(\alpha - b)^2} = \frac{b_1'\, d\alpha_1}{(\alpha_1 - b_1)^2},$$

é integrando
$$\frac{1}{\alpha - b} = \frac{b_1'}{\alpha_1 - b_1} + c;$$

α es pues una función lineal de α_1 y β de β_1.

La sustitución de estas dos funciones lineales en la ecuación por resolver, muestra que deben ser idénticas.

Según la forma del elemento lineal (1), en el plano, las paralelas al eje de las y representan geodésicas de la superficie: *Las dife-*

rentes geodésicas de la superficie tienen por imágenes, circunferencias cuyos centros se hallan en el eje de las x.

En efecto, si hacemos una inversión, tomando por polo uno de los puntos en que una de las circunferencias BMM_1C corta al eje de las x, ésta se transformará en una recta bmm_1, paralela al eje de las y. Y como esta recta es la imagen de una geodésica, y la inversión no ha cambiado el elemento lineal, la semicircunferencia BMM_1C representa una geodésica. Además, se puede construir siempre dicha circunferencia, definiéndola por la condición de pasar por un punto y ser tangente á una recta dada. Por consiguiente, representa la geodésica *más general*, trazada en la superficie. La ecuación de esta geodésica será pues

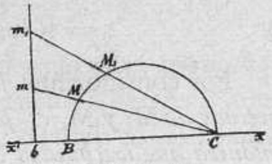


Figura 124

$$x^2 + y^2 + 2bx + c = 0,$$

expresando b y c constantes arbitrarias.

El Sr. Bianchi llega á la expresión de la distancia geodésica, en conformidad con la definición de distancia de dos puntos dada por el Sr. Klein, fundándose en la expresión del arco

$$s = \int \frac{e^{\frac{u}{R}} du}{\sqrt{e^{2u:R} - k^2}} = R \log \left\{ e^{\frac{u}{R}} + \sqrt{e^{2u:R} - k^2} \right\}$$

$$= R \log \left\{ \frac{R}{y} + \sqrt{\frac{R^2}{y^2} - k^2} \right\},$$

pues si M_1 y M_2 son los dos puntos imágenes en el círculo

$$(x - b)^2 + y^2 = \frac{R^2}{k^2},$$

é y_1, y_2 sus ordenadas, su distancia geodésica δ será

$$\delta = R \log \frac{\frac{R}{y_1} + \sqrt{\frac{R^2}{y_1^2} - k^2}}{\frac{R}{y_2} + \sqrt{\frac{R^2}{y_2^2} - k^2}}.$$

Si A y B son sus intersecciones con el eje de las x, a la tangente en A, b, m_1, m_2 las rectas AB, AM_1, AM_2, se tendrá

$$y_1 = \frac{R}{k} \operatorname{sen}(2 \angle bm_1), \quad \frac{R}{y_1} + \sqrt{\frac{R^2}{y_1^2} - k^2} = k \frac{\operatorname{sen} \angle am_1}{\operatorname{sen} \angle bm_1}$$

$$\frac{R}{y_2} + \sqrt{\frac{R^2}{y_2^2} - k^2} = k \frac{\operatorname{sen} \angle am_2}{\operatorname{sen} \angle bm_2}$$

y

$$\delta = R \log [ab m_1 m_2] = R \log [ABM_1M_2].$$

Por consiguiente: *La distancia geodésica de los dos puntos objetivos de* M_1 *y* M_2 *es proporcional al logaritmo de la relación anarmónica que los puntos* M_1 *y* M_2 *forman en el círculo imaginario con los dos puntos* A *y* B *en que la circunferencia corta al eje de las* x.

En el caso de reducirse el círculo á una recta paralela al eje de las y, se obtiene

$$\delta = R \log \frac{y_1}{y_2}.$$

De estas representaciones resulta que: *Por dos puntos reales* M *y* M_1 *de una superficie, solo puede pasar una geodésica.*

Vemos (fig. 124) que

$$\operatorname{arc} mm_1 = a \log \frac{bm_1}{bm} = a \log \frac{\operatorname{tg} M_1CB}{\operatorname{tg} MCB},$$

que expresa la distancia geodésica de los puntos M y M_1. Esta distancia se hace infinita, cuando uno de los puntos se aproxima al eje de las x. Así: *Los puntos de este eje representan los puntos del infinito de la superficie.*

318. Representación de Beltrami. Este matemático dió una interpretación de la geometría no euclídea en la pseudoesfera (*).

La fórmula

$$ds^2 = R \frac{(a^2 - v^2)\, du^2 + 2uv\, du\, dv + (a^2 - u^2)\, dv^2}{(a^2 - u^2 - v^2)^2} \tag{1}$$

(*) *Saggio di interpretazione della Geometria non-Euclidea.* Giornale di Matematiche, V. VI., 1868.

representa el cuadrado del elemento lineal de una superficie de curvatura constante $-\frac{1}{R^2}$. Los dos sistemas coordenados $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ están formados por geodésicas. Llamando θ al ángulo que forman en el punto (u, v), se tiene

$$\cos\theta = \frac{uv}{\sqrt{(a^2 - u^2)(a^2 - v^2)}}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{a\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}}{\sqrt{(a^2 - u^2)(a^2 - v^2)}}, \tag{2}$$

siendo para $u = 0$ ó $v = 0$, $\theta = 90°$. Luego las geodésicas $u = \text{const.}$, son ortogonales á las $v = 0$ del otro sistema, y las $v = \text{const.}$ á las $u = 0$ del otro sistema. Las fórmulas (2) conducen á la relación, entre u y v

$$u^2 + v^2 \leqq a^2.$$

Entre estos límites E, F, G son reales, monódromas, finitas y continuas, las E, G, $EG - F^2$, positivas y diferentes de cero. La porción de superficie terminada en el contorno de la ecuación

$$u^2 + v^2 = a^2 \tag{3}$$

es simplemente conexa. Dos geodésicas del mismo sistema no tienen ningún punto común, y dos geodésicas de sistemas distintos no pueden ser tangentes.

Si expresamos por x é y las coordenadas rectangulares de un plano auxiliar, las ecuaciones $x = u$, $y = v$ establecen una representación de la región considerada. Á cada punto de ésta corresponde un solo punto del plano, y recíprocamente. Toda la región se halla comprendida en un círculo cuyo radio es a y cuyo centro es el origen de las coordenadas.

Una geodésica que parte del punto $(u = 0,\ v = 0)$ puede representarse por las ecuaciones

$$u = r\cos\mu, \qquad v = r\operatorname{sen}\mu, \tag{4}$$

siendo r y μ las coordenadas polares del punto correspondiente al punto (u, v) en la recta que se representa, en el plano auxiliar, á la geodésica considerada. Suponiendo μ constante, la ecuación (1) da, para dichos valores,

$$d\rho = \mathrm{R}\frac{adr}{a^2 - r^2}, \quad \rho = \frac{\mathrm{R}}{2}\log\frac{a+r}{a-r};$$

ρ es el arco de la geodésica, contado desde el punto ($u = v = 0$); y puede escribirse también

$$\rho = \frac{\mathrm{R}}{2}\log\frac{a+\sqrt{u^2+v^2}}{a-\sqrt{u^2+v^2}}. \tag{5}$$

Este valor, nulo para $r = 0$, crece indefinidamente cuando crece r ó $\sqrt{u^2+v^2}$ desde 0 hasta a, y se hace infinito para $r = a$, ó para todos los valores de u y v que satisfacen á la ecuación (3), é imaginario para $r > a$. El contorno expresado por la ecuación (3) del circulo límite, en el plano auxiliar, es el lugar de los puntos del infinito en la superficie, lugar que puede considerarse como un círculo geodésico, descrito desde el punto ($u = v = 0$) con un radio infinitamente grande. De manera que el círculo límite representa toda la región real de la superficie. Si en las ecuaciones (4) se considera á r como constante y á μ como variable, la fórmula (1) da

$$\sigma = \frac{\mathrm{R}r\mu}{\sqrt{a^2-r^2}}, \tag{5}$$

donde σ es el arco de círculo geodésico, representado en el plano auxiliar por un arco de círculo de radio r y ángulo en el centro μ. Las geodésicas forman entre sí, en su origen común, ángulos iguales á los radios que les corresponden en el plano auxiliar. De la ecuación (5), resulta

$$r = \sqrt{u^2+v^2} = a\,\mathrm{tg}\,h\frac{\rho}{\mathrm{R}}, \quad \cos h\frac{\rho}{\mathrm{R}} = \frac{a}{w}, \tag{6}$$

donde w indica el radical $\sqrt{a^2-u^2-v^2}$, y en virtud del valor de r, puede escribirse $\sigma = \mu\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,h\frac{\rho}{\mathrm{R}}$. Así, el semiperímetro de la circunferencia geodésica, cuyo radio es ρ, estará expresado por

$$\pi\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,h\frac{\rho}{\mathrm{R}} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{2}\pi\mathrm{R}\left(e^{\frac{\rho}{\mathrm{R}}} - e^{-\frac{\rho}{\mathrm{R}}}\right).$$

Resulta pues, que las geodésicas se hallan representadas en su total desarrollo, por cuerdas del círculo límite, no teniendo representación real sus prolongaciones. Además, dos puntos reales de la superficie están representados por dos puntos, también reales, en el interior del círculo límite, los cuales determinan una sola cuerda del mismo círculo. Así pues, dos puntos reales de la superficie, *elegidos arbitrariamente*, determinan *una sola geodésica*, representada en el plano auxiliar por la cuerda que pasa por los puntos correspondientes.

Sea (u, v) un punto de la superficie, (U, V) un punto cualquiera de una de las geodésicas que pasan por él. Las ecuaciones de dos de estas geodésicas son

$$V - v = m\,(U - u), \qquad V - v = n\,(U - u).$$

Expresando por α el ángulo de las geodésicas en el punto (u, v), se tendrá

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(n - m)\sqrt{EG - F^2}}{E + (n + m)\,F + mnG},$$

ó para los valores actuales de E, F, G

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a\,(n - m)\,W}{(1 + mn)\,a^2 - (v - mu)\,(v - nu)}.$$

Expresando α' el ángulo de las dos cuerdas y μ, ν los ángulos que estas forman con el eje de las x, tendremos $m = \operatorname{tg} \mu$, $n = \operatorname{tg} \nu$, $\alpha' = \nu - \mu$; por consiguiente

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{aw \operatorname{sen} \alpha'}{a^2 \cos \alpha' - (v \cos \mu - u \operatorname{sen} \mu)\,(v \cos \nu - u \operatorname{sen} \nu)}.$$

Consecuencias. 1.ª Á dos cuerdas que se cortan en el interior del círculo límite corresponden dos geodésicas que se cortan en un punto á distancia finita según un ángulo comprendido entre 0° y 180°.

2.ª Á dos cuerdas distintas que se cortan en la circunferencia del círculo límite corresponden dos geodésicas que concurren hacia un mismo punto á distancia infinita, que forman en éste un ángulo nulo.

3.ª Á dos cuerdas que se cortan en un punto exterior al círculo límite ó que son paralelas, corresponden dos geodésicas que no tienen ningún punto real común en toda la superficie.

319. GEODÉSICAS PARALELAS. ÁNGULO DE PARALELISMO. Atendiendo á la representación hecha por Beltrami de la superficie en el plano, tenemos que la geodésica g se halla representada por una circunferencia G (figs. 125 y 126) ortogonal á la Γ, y el haz de geodésicas que parten de o por el haz de rectas que parten de O.

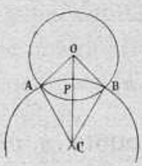


Figura 125

Sean A y B los puntos en que G encuentra á Γ. Las rectas que se hallan en el interior del ángulo AOB encuentran á G en puntos reales. En la superficie geodésica objetiva de OA y OB se hallan las dos geodésicas oa y ob que se llaman *paralelas* á la g (fig. 126), hallándose sus puntos de intersección con g en el infinito.

Si trazamos por o la geodésica op normal á g, tendrá por imagen la distancia mínima OP de O á la circunferencia G. Puesto que los ángulos AOP y BOP son iguales, será también $\angle\, aop = \angle\, bop$. El ángulo $\alpha = aop$ se llama *ángulo de paralelismo* del punto o respecto á la geodésica g, que depende tan solo de la distancia geodésica $\delta = op$ del punto o á la geodésica g. Para obtener la relación entre α y δ, observaremos que, expresando con C el centro de G, en el triángulo rectángulo CAO se tiene

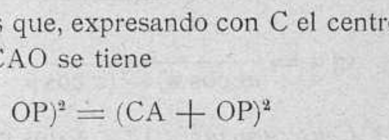


Figura 126

$$CA^2 + OA^2 = (CP + OP)^2 = (CA + OP)^2$$

de donde
$$CA = \frac{OA^2 - OP^2}{2 \, . \, OP}.$$

Si $OA = 1$, $CA = \operatorname{tg} \alpha$. Además, por las fórmulas $\rho = \operatorname{tg} h \dfrac{u}{R}$, de la representación que consideramos, sustituyendo en la precedente, resulta $$\cot \alpha = \operatorname{sen} h \frac{\delta}{R}, \tag{1}$$

que puede escribirse también así: $$\cot \frac{1}{2} \alpha = e^{\frac{\delta}{R}}. \tag{2}$$

Luego: *Por todo punto* o *de una superficie pseudoesférica pasan dos geodésicas paralelas á una geodésica* g. *El ángulo* α *de paralelismo y la distancia geodésica* δ *del punto* o *á la* g *se hallan ligados por las dos fórmulas obtenidas* (1) y (2).

Observación. De las varias aplicaciones expuestas en la obra de M. Darboux, citaremos únicamente la que sigue: Empleando la transformación arriba expuesta, se puede admitir que *g* se halle representada por el eje de las *y* (fig. 127). Entonces *habrá dos geodésicas que pasan por* M *y encuentran á* g *en el infinito*. La una estará representada por la paralela MP al eje de las *y*; la otra por la circunferencia OMK tangente en el origen á dicho eje. Así: *Una geodésica real puede considerarse con* 0, 1 *ó* 2 *puntos reales en el infinito, según que pertenezca á las superficies de curvatura positiva, nula ó negativa.*

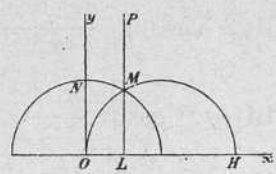


Figura 127

320. Aplicaciones del teorema de Weingarten. Para terminar esta exposición, resumiremos las investigaciones debidas al Sr. Bianchi, respecto á las *superficies complementarias de las pseudoesféricas*. Consideremos una superficie pseudoesférica de radio R. Cualquier sistema de geodésicas que parten de un punto de la superficie, sea este punto real en el infinito, real á distancia finita ó ideal, puede considerarse como el sistema de las deformadas de los meridianos de una superficie pseudoesférica de revolución. Al elemento lineal, referido á estas geodésicas y á sus trayectorias ortogonales, se podrá dar, según los casos, la forma

$$(\mathrm{I})\ ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}}\, dv^2, \quad (\mathrm{II})\ ds^2 = du^2 + \lambda \operatorname{sen} h^2 \frac{u}{R}\, dv^2,$$

$$(\mathrm{III})\ ds^2 = du^2 + \lambda^2 \cos h^2 \frac{u}{R}\, dv^2.$$

Y tendremos, en correspondencia, tres clases de superficies evolventes Σ, para las cuales debemos obtener las relaciones correspondientes entre r_1 y r_2. Con este objeto, considerando la S como la evoluta de Σ, respecto al radio r_1, bastará comparar las (I), (II) y (III) con la fórmula

$$ds^2 = dr_1^2 + e^{2\int \frac{dr_1}{r_1 - r_2}} dv_1^2,$$

dada por el teorema de Weingarten (pág. 356). Haciendo pues, $u = r_1 + C$ (C const. arbitr.[a]), tendremos

(I) (1.er caso) $$e^{\int \frac{dr}{r_1 - r_2}} = e^{\frac{r_1 + C}{R}}; \quad \text{luego (I')} \ r_1 - r_2 = R.$$

(II) 2.º caso) $$\int \frac{dr_1}{r_1 - r_2} = \log \operatorname{sen} h \frac{r_1 + C}{R}, \quad \text{(II')} \ r_1 - r_2 = R \operatorname{tg} h \frac{r_1 + C}{R}$$

(III) (3.er caso) $$\int \frac{dr_1}{r_1 - r_2} = \log \cot h \frac{r_1 + C}{R},$$

(III') $$r_1 - r_2 = R \cot h \frac{r_1 + C}{R}.$$

El valor de C depende de la superficie Σ de la serie paralela que se considera, pero en el caso (I) la relación (I') es independiente.

Observación. Para las evolventes de las superficies de curvatura constante positiva $k = +\frac{1}{R_2}$, se obtendrá la única relación

$$r_1 - r_2 = \operatorname{tg} \frac{r_1 + C}{R},$$

321. Superficies complementarias de las pseudoesféricas. Hallemos ahora sobre qué superficies de revolución son aplicables las superficies complementarias de la pseudoesférica S, en los casos (I), (II) y (III).

El elemento lineal ds^2 de la segunda hoja de la evoluta es

$$ds_2^2 = dr_1^2 + e^{2\int \frac{dr_1}{r_2 - r_1}} dv^2,$$

y tendremos en el caso (I) $ds_2^2 = dr_1^2 + e^{\frac{2u}{R}} dv^2$, y haciendo $r_2 = -u$,

$$ds_2^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}} dv^2,$$

que es el elemento lineal de la pseudoesfera. Podemos pues enunciar el

TEOREMA. *Si en una superficie pseudoesférica de radio* R *se traza un sistema de geodésicas paralelas, y en cada una de las tangentes á estas geodésicas se toma, á partir del punto de contacto y en el sentido según el que las tangentes concurren en el punto común del infinito, un segmento* = R, *la superficie* S', *lugar de los extremos será una nueva superficie pseudoesférica de radio* R.

En el segundo caso, se obtiene para el elemento lineal de la segunda hoja,

$$ds^2 = \operatorname{tg} h^4 \frac{r_1 + C}{R} dr_1^2 + \frac{dv^2}{\cos h^2 \frac{r_1 + C}{R}},$$

que pertenece á la superficie de revolución, engendrada por la curva

$$r = \frac{R}{\sqrt{R^2 k^2 + 1}} \operatorname{sen} \varphi, \quad r = R \left[\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi + \cos \varphi\right].$$

Esta curva es la proyección de la tractriz ordinaria sobre el plano que pasa por la asíntota, que es una *tractriz acortada.*

En el tercer caso tendremos para la curva meridiana

$$r = \frac{R}{\sqrt{1 - R^2 k^2}} \operatorname{sen} \varphi, \quad z = R \left[\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi + \cos \varphi\right],$$

que es la *tractriz alargada.*

322. TRANSFORMACIÓN COMPLEMENTARIA. El teorema último puede enunciarse del modo siguiente: *El lugar de los centros de curvatura de un sistema de oriciclos* (*) *paralelos de una superficie*

(*) Siendo L una línea de curvatura constante en una superficie pseudoesférica, podemos considerarla como un círculo geodésico, distinguiéndose tres especies de círculos, con centro real á distancia finita, con centro en el infinito y con centro ideal. Los segundos se llaman *oriciclos* en la geometría de Lobatschewsky.

pseudoesférica es una superficie pseudoesférica del mismo radio, lo que da el modo de construir una nueva superficie pseudoesférica S′, cuando se conoce una sola S, y en ésta una serie de oriciclos paralelos.

Pero en este caso, las geodésicas ortogonales se determinan por cuadraturas, puesto que, según las fórmulas del núm. 317, se conocen los ∞^1 sistemas de oriciclos paralelos y de las geodésicas ortogonales, y pueden construirse las ∞^1 superficies complementarias pseudoesféricas de S. En cada sistema de éstas, por ejemplo S′, conocemos un sistema de oriciclos paralelos, es decir, las líneas que corresponden á estos oriciclos paralelos de S de que hemos partido, y después de efectuar una cuadratura, nos hallaremos en S′, según las mismas condiciones, que respecto á S. Y podemos repetir sobre S′ las mismas construcciones, y así sucesivamente.

La construcción efectuada, para transformar la superficie S en la S′, se llama *transformación complementaria*.

Consideremos en S un sistema de geodésicas paralelas, y sea $\varphi(u, v)$ el ángulo que forma la geodésica que parte del punto (u, v) de la superficie con la línea $v =$ const. En virtud de la ecuación (2) de la pág. 549, la ecuación diferencial de estas geodésicas es $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \theta \dfrac{dv}{du}$, ó sea

$$\operatorname{sen} \varphi \cos \theta \, du - \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \, du = 0. \tag{1}$$

Pero debe verificarse á lo largo de cada una, la ecuación de las geodésicas (pág. 301, núm. 191), que se reduce á

$$d\varphi = -\left(\frac{\partial \theta}{\partial u} dv + \frac{\partial \theta}{\partial v} du\right) \text{ ó } \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v}\right) du + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u}\right) dv = 0$$

la cual, comparada con la (1) demuestra que la función $\varphi(u, v)$ debe satisfacer á la ecuación

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v}\right) \operatorname{sen} \theta \cos \varphi + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial u}\right) \cos \theta \operatorname{sen} \varphi = 0. \tag{2}$$

Además, puesto que las trayectorias ortogonales de estas geodésicas deben ser, por hipótesis, oriciclos, su curvatura geodésica deberá ser igual á la unidad en valor absoluto; pero, en virtud de (1) la ecuación de estos oriciclos es

$$\cos\theta \cos\varphi \, du + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \, dv = 0,$$

y, por consiguiente,

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial u}(\operatorname{sen}\theta\cos\varphi) + \frac{\partial}{\partial v}(\cos\theta\operatorname{sen}\varphi)\right\} = \pm 1,$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial v}\right)\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u}\right)\cos\varphi\cos\theta = \mp\operatorname{sen}\theta\cos\theta,$$

que combinada con la (2), da

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial v} = \mp\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u} = \pm\operatorname{sen}\theta\cos\varphi,$$

debiéndose fijar la dirección positiva de las geodésicas, para tomar el signo conveniente.

Consideremos un caso particular, por ejemplo, el de la pseudoesfera, en la que se puede hacer

$$\cos\theta \operatorname{tg} hu, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\cos hu},$$

mientras que la ecuación $\varphi = 0$ define los meridianos en su dirección positiva, y concluiremos que:

Si φ (u, v) *es el ángulo que forman las geodésicas de un sistema paralelo, según su dirección positiva, con la dirección positiva de las líneas* v = const., *quedarán satisfechas las ecuaciones*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial v}\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u} = -\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \tag{3}$$

y recíprocamente: *Toda función* φ (u, v) *que satisface á estas ecuaciones de derivadas parciales, define, en la superficie pseudoesférica* S, *un sistema de geodésicas paralelas (determinables por cuadraturas).*

323. PROPIEDAD DE LA TRANSFORMACIÓN. Hagamos la construcción indicada en la transformación complementaria, á saber:

Tracemos por cada punto $P \equiv (x, y, z)$ de la superficie, y en el plano tangente en P el segmento $PP_1 = 1$, inclinado respecto á la línea de curvatura $v =$ const. en el ángulo φ. El lugar de los puntos P_1 será la superficie complementaria S_1.

Expresemos por x_1, y_1, z_1 las coordenadas de P_1; por la construcción, tendremos:

$$x_1 = x + \cos\varphi \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial x}{\partial u} + \operatorname{sen}\varphi \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x}{\partial v} \tag{1}$$

y análogamente para y_1, z_1. Derivando esta ecuación respecto á u y v, y teniendo en cuenta las fórmulas (e) de la pág. 331, y las (3) de la pág. 565 que se hallan satisfechas por φ, será: (2)

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \cos^2\varphi \cos\theta \frac{\partial x}{\partial u} + \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x}{\partial v} - \cos\varphi \operatorname{sen}\theta X,$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \operatorname{sen}\theta \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial x}{\partial u} + \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}\theta \frac{\partial x}{\partial v} + \operatorname{sen}\varphi \cos\theta X.$$

Expresando por ds_1 el elemento lineal de la superficie S_1, tendremos:

$$ds_1^2 = \cos^2\varphi\, du^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\, dv^2; \tag{3}$$

y para la curvatura k_1 de S_1 de la (3), $k_1 = -1$, lo que prueba que la S_1 es una superficie pseudoesférica de radio $= 1$. Además, si expresamos por X_1, Y_1, Z_1 los cosenos directores de la normal á S_1, tendremos por las (2)

$$X_1 = \operatorname{sen}\varphi \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial x}{\partial u} - \cos\varphi \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x}{\partial v},$$

y análogamente para las Y_1, Z_1. Derivando, y teniendo presentes las fórmulas anteriores, obtendremos

$$\frac{\partial X_1}{\partial u} = \operatorname{tg}\varphi \frac{\partial x_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial Y_1}{\partial u} = \operatorname{tg}\varphi \frac{\partial y_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial Z_1}{\partial u} = \operatorname{tg}\varphi \frac{\partial z_1}{\partial u},$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial v} = -\cot\varphi \frac{\partial x_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial Y_1}{\partial u} = -\cot\varphi \frac{\partial y_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial Z_1}{\partial v} = -\cot\varphi \frac{\partial z_1}{\partial v},$$

lo que demuestra que también en S_1 las líneas $u=$ const., $v=$ const. son las líneas de curvatura y, por tanto, las líneas

$$u - v = 2\alpha = \text{const.} \quad u + v = 2\beta = \text{const.}$$

las asintóticas y $d\alpha$, $d\beta$ sus arcos; luego: *La transformación complementaria conserva las líneas de curvatura, las asintóticas y los arcos asintóticos.*

Podemos ver ahora si las funciones de θ y φ, que se hallan en las ecuaciones (3) de Darboux son las más generales que satisfacen á la vez á la ecuación de derivadas parciales

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\Phi \cos\Phi.$$

Para generalizar estas consideraciones, supongamos que se tenga

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial v} = F(\theta, \varphi), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u} = F_1(\theta, \varphi), \tag{4}$$

y vamos á obtener F y F_1, de manera que resulte

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = F(\theta, \varphi), \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi.$$

Para ello deduciremos de las (4),

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \frac{\partial F_1}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

y sustituyendo los valores de $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$ de las (4), tendremos:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial\theta} + \frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial\theta}{\partial u} - \left(\frac{\partial F_1}{\partial\varphi} + \frac{\partial F}{\partial\theta}\right)\ldots\ldots - F\frac{\partial F_1}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial\theta} + \frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \left(\frac{\partial F_1}{\partial\varphi}\ldots\ldots\right)\ldots\ldots - F\frac{\partial F_1}{\partial\theta}.$$

Bastará pues, que se tenga (6) y (6′)

$$\frac{\partial F_1}{\partial\theta} + \frac{\partial F}{\partial\varphi} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial\varphi} + \frac{\partial F}{\partial\theta} = 0, \quad F\frac{\partial F_1}{\partial\varphi} - F_1\frac{\partial F}{\partial\varphi} = \operatorname{sen}\theta\cos\theta, \text{ etc.}$$

Las dos primeras expresan que $F + F_1$ debe ser una función de $\theta - \varphi$ y $F_1 - F$ una función de $\theta + \varphi$. Sea

$$F + F_1 = U(\theta - \varphi), \quad F_1 - F = V(\theta + \varphi),$$

y tendremos $\quad F_1 = \frac{1}{2}(U + V), \quad F = \frac{1}{2}(U - V).$

Las (6) quedarán satisfechas, y las (6') se reducirán á

$$UV' + VU' = \operatorname{sen} 2\theta, \quad -UV' + VU' = \operatorname{sen} 2\varphi$$

$$UV' = \operatorname{sen}(\theta - \varphi)\cos(\theta + \varphi), \quad U'V = \operatorname{sen}(\theta + \varphi)\cos(\theta - \varphi) \quad (7)$$

de las que se deduce

$$U = k \operatorname{sen}(\theta - \varphi), \quad V' = \frac{1}{k}\cos\theta + \varphi), \quad U = k \operatorname{sen}(\theta - \varphi), \quad \text{etc.}$$

siendo k arbitraria. Hagamos

$$\frac{1 - k^2}{1 + k^2} = \operatorname{sen}\sigma, \quad -\frac{2k}{1 + k^2} = \cos\sigma, \qquad (0 < \sigma < 2\pi)$$

y será $\quad k = -\frac{1 - \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}, \quad \frac{1}{k} = -\frac{1 + \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}$

$$F = \frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\theta + \operatorname{sen}\sigma\cos\varphi\operatorname{sen}\theta}{\cos\sigma}$$

$$F_1 = -\frac{\cos\varphi\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\cos\theta}{\cos\sigma}$$

y las fórmulas de Bäcklund serán

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial v} &= \frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\theta + \operatorname{sen}\sigma\cos\varphi\operatorname{sen}\theta}{\cos\sigma} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u} &= -\frac{\cos\varphi\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\cos\theta}{\cos\sigma}, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Interpretación geométrica. A la solución inicial θ de la ecuación (A) corresponde una superficie pseudoesférica S de radio $= 1$ y análogamente, á cada nueva solución φ deducida, integrando las (8), una nueva superficie pseudoesférica S_1. Y llegaremos al resultado siguiente: *Por cada punto* P *de* S *y, en el plano tangente en* P, *trácese* *una recta inclinada respecto á la línea de curvatura* v = const. *el ángulo* φ, *y tómese en ella, á partir de* P, *un segmento constante* $PP_1 = \cos\sigma$; *el lugar de los extremos* P_1 *será la superficie* S_1.

324. Transformación de Backlund. Cuando $\sigma = 0$, se obtiene la transformación complementaria. Para establecer dicho resultado, observaremos que, conservando las notaciones empleadas, tendremos:

$$x_1 = x + \cos\sigma\left(\cos\varphi\,\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial x}{\partial u} + \operatorname{sen}\varphi\,\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x}{\partial v}\right). \qquad (9)$$

De las (8) y (9) deduciremos:

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}(\cos^2\varphi\cos\theta - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\operatorname{sen}\theta)\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x}{\partial u} \qquad (10)$$

$$+ (\operatorname{sen}\sigma\cos^2\varphi\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\cos\theta)\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x}{\partial u} - \cos\sigma\cos\varphi\operatorname{sen}\theta X$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = (\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}^2\varphi\cos\theta + \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\operatorname{sen}\theta)\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial x}{\partial u} \qquad (11)$$

$$+ (\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\cos\theta)\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x}{\partial u} + \cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\cos\theta X$$

$$ds_1^{\,2} = \cos^2\varphi\,du^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\,dv^2; \qquad (12)$$

así pues, la superficie, lugar de los puntos P_1 es ciertamente la superficie buscada S_1.

La construcción anterior, que transforma la superficie pseudoesférica S en la S_1, es la *transformación de Bäcklund.*

Expresándola con el símbolo B_σ, para poner en evidencia la constante arbitraria contenida en la misma, tendremos que la B_σ coincidirá con la transformación complementaria. Con la transformación B_σ se obtienen ∞^1 nuevas superficies pseudoesféricas, de S. Pero basta conocer una sola de éstas, S_1, para poder obtener las demás por cuadraturas. La aplicación sucesiva de la misma transformación B_σ á las superficies sucesivas, se hará con simples cuadraturas, pudiéndose decir que también:

La transformación general de Bäcklund B_σ *conserva las líneas de curvatura, las asintóticas y los arcos de las asintóticas.*

En efecto, los cosenos directores X_1, Y_1, Z_1 de la normal en P_1 á S_1 se expresan por las fórmulas (10) y (11), y de éstas resulta

$$X_1 = \cos\sigma \operatorname{sen}\varphi \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial x}{\partial u} - \cos\sigma\cos\varphi \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x}{\partial v} - \operatorname{sen}\sigma . X,$$

de la que se obtiene

$$\frac{\partial X_1}{\partial u} = \operatorname{tg}\varphi \frac{\partial x_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial Y_1}{\partial u} = \operatorname{tg}\varphi \frac{\partial y_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial Z_1}{\partial u} = \operatorname{tg}\varphi \frac{\partial z_1}{\partial u},$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial v} = -\cot\varphi \frac{\partial x_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial Y_1}{\partial v} = -\cot\varphi \frac{\partial y_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial Z_1}{\partial v} = -\cot\varphi \frac{\partial z_1}{\partial v},$$

lo que demuestra, en virtud de la (3) de la pág. 568, el teorema. Además, el ángulo Ω comprendido entre las normales en P y P_1, en virtud de $-\Sigma XX_1 = \operatorname{sen}\sigma$, está dado por la fórmula $\Omega = \frac{\pi}{2} - \sigma$.

325. Transformación de Lie. Esta transformación cambia también una superficie pseudoesférica en otra pseudoesférica; y se halla fundada en que, si $\Omega(\alpha, \beta)$ es la integral de la ecuación $\frac{\partial^2\Omega}{\partial\alpha\partial\beta} = \operatorname{sen}\Omega$, también la función $\Omega\left(k\alpha, \frac{\beta}{k}\right)$ es una nueva integral, que contiene la constante arbitraria k. Observaremos que si $\vartheta(u, v)$ es una integral de

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\vartheta}{\partial v^2} = \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta, \tag{a}$$

es también una integral con la constante arbitraria σ, la función

$$\vartheta\left(\frac{u + v\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}, \frac{u\operatorname{sen}\sigma + v}{\cos\sigma}\right) = \Theta_\sigma(u, v). \tag{b}$$

Á la primera función $\vartheta(u, v)$ corresponderá una superficie inicial pseudoesférica de radio $= 1$, y á la función (b) una nueva superficie pseudoesférica S_1 completamente determinada, de forma. Para obtener las coordenadas de un punto móvil en S_1 reduciremos ante todo el elemento lineal esférico

$$ds'^2 = \operatorname{sen}^2\Theta\, du^2 + \cos^2\Theta\, dv^2 \quad \text{á} \quad ds'^2 = d\omega^2 + \cos^2\omega\, d\psi^2,$$

lo que exige la integración de una ecuación de Riccati, después de lo que se obtienen las coordenadas de los puntos de S_1 con cuadraturas.

Indicando con L_σ la transformación de Lie, cuya constante es σ, que hace pasar de los argumentos u, v á los $\frac{u+v\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}$, $\frac{u\operatorname{sen}\sigma+v}{\cos\sigma}$, la inversa, que hace pasar de (u, v) á

$$\left(\frac{u-v\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}, \frac{-u\operatorname{sen}\sigma+v}{\cos\sigma}\right) \text{ se indicará con } L_\sigma^{-1}.$$

La transformación de Bäcklund B_σ se puede obtener, como observó Lie, combinando la transformación complementaria con la de Lie, de modo que $B_\sigma = L_\sigma B_\sigma L_\sigma^{-1}$. Es decir, que si se aplica á una superficie pseudoesférica la transformación de Lie L_σ, á la superficie S_1 obtenida, la complementaria, que la cambia en S_2 y á esta la inversa L_σ^{-1} de L_σ, se llega á S', deducida de S por la transformación de Bäcklund B_σ.

Por la repetición de los métodos de transformaciones de las superficies pseudoesféricas, resulta el *teorema de permutabilidad:*

Si S_1 *y* S_2 *son dos superficies pseudoesféricas ligadas á la misma superficie pseudoesférica* S *por dos transformaciones de Bäcklund* B_{σ_1}, B_{σ_2} *con constantes distintas* σ_1 *y* σ_2, *existe una cuarta superficie pseudoesférica* S_3, *ligada respectivamente á las* S_1 *y* S_2 *por las transformaciones de Bäcklund* B'_{σ_2}, B'_{σ_1} *con las constantes invertidas* σ_2, σ_1. *En símbolos:* $B'_{\sigma_2} B_{\sigma_1} = B'_{\sigma_1} B'_{\sigma_2}$.

326. Sistemas triplemente ortogonales de Weingarten. Se llaman sistemas de Weingarten los sistemas triples de superficies ortogonales que contienen una serie de superficies de igual curvatura positiva ó negativa. Nos limitaremos á enunciar la propiedad:

En una superficie de curvatura constante de un sistema dado de Weingarten, las geodésicas se determinan con cuadraturas.

Respecto á *la transformación complementaria de los sistemas de Weingarten*, diremos que se halla caracterizada por obtener, mediante la transformación complementaria y la de Bäcklund de un sistema de Weingarten, una infinidad de los mismos.

327. Aplicaciones. De las fórmulas obtenidas en la página 295 resulta inmediatamente que siendo $\frac{dv}{du} = \pm 1$, la ecuación diferencial de las asintóticas y $u + v = \text{const.}$, $u - v = \text{const.}$ la ecuación de éstas, refiriendo la superficie á las mismas, con lo que bastará hacer $u + v = 2\alpha$, $u - v = 2\beta$, la expresión del elemento lineal será

$$ds^2 = d\alpha^2 - 2 \cos \vartheta \, d\alpha \, d\beta + d\beta^2,$$

y la ecuación (1) de la pág. 549, se reducirá á

$$\frac{\partial^2 2\vartheta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \operatorname{sen} 2\vartheta, \tag{α}$$

siendo 2ϑ el ángulo de las asintóticas entre $\alpha = \text{const.}$ y $\beta = \text{const.}$

Esto sentado, si partimos de la solución $\vartheta = 0$ evidente de la ecuación (α), y aplicamos la transformación general de Bäcklund B_σ para pasar á una nueva solución φ, ésta quedará definida por las ecuaciones simultáneas

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{1 + \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} \operatorname{sen}\varphi, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{1 = \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} \operatorname{sen}\varphi,$$

que integradas dan $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = Ce^{\frac{u+v+\operatorname{sen}\sigma(u-v)}{\cos\sigma}}$

cuya constante puede hacerse $= 1$.

Introduciendo los parámetros $u + v = U$, $u - v = V$, el profesor Bianchi llega á las expresiones

$$x_1 = -\cos\sigma\frac{\operatorname{sen} V}{\cos h\alpha}, \quad y_1 = \cos\sigma\frac{\cos V}{\cos h\alpha}, \quad \alpha = \frac{U + V \operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma},$$

$$z_1 = U - \cos\sigma \operatorname{tg} h\alpha = \cos\sigma(\alpha - \operatorname{tg} h\alpha) - \operatorname{sen}\sigma V,$$

por las que las superficies de que se trata son helicoidales, cuyo perfil meridiano $V = 0$, definido por

$$y_1 = \frac{\cos\sigma}{\cos h\alpha}, \quad z_1 = \cos\sigma(\alpha - \operatorname{tg} h\alpha),$$

es una tractriz que tiene el eje por asíntota, $\cos\sigma$ por longitud constante de la tangente y sen σ por parámetro del movimiento helicoidal.

Para el elicoide de Dini, correspondiente á

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta_1}{2} = e^{\alpha_1}, \quad \alpha_1 = \frac{u + v + \operatorname{sen} \sigma_1 (u - v)}{\cos \sigma_1}$$

tendremos la transformada de Bäcklund con la constante σ,

$$\operatorname{tg} \frac{\Omega}{2} = \frac{\cos\left(\frac{\sigma_1 + \sigma}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma}{2}\right)} \frac{e^{\alpha_1} - e^{\alpha}}{1 + e^{\alpha_1 + \alpha}},$$

siendo $\alpha = \frac{u + v + \operatorname{sen} \sigma (u - v)}{\cos \sigma}$, cuando $\sigma = \sigma_1$,

$$\operatorname{tg} \frac{\Omega}{2} = \frac{u - v + \operatorname{sen} \sigma_1 (u + v) + C'}{\cos \sigma_1 \cos h\alpha_1}.$$

Para la superficie complementaria de la pseudoesfera que corresponde á hacer $\sigma_1 = 0$ en la última fórmula, el valor de C′ no influye en la forma de la superficie, y podremos hacer $C' = 0$; luego

$$\operatorname{tg} \frac{\Omega}{2} = \frac{u - v}{\cos h (u + v)} = \frac{V}{\cos hU}$$

$$\operatorname{sen} \Omega = \frac{2V \cos hU}{\cos h^2 U + V^2}, \quad \cos \Omega = \frac{\cos h^2 U - V^2}{\cos h^2 U + V^2}.$$

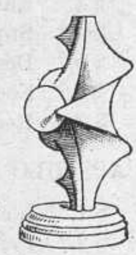


Figura 128

Y geométricamente, se verá que el sistema de geodésicas de la pseudoesfera, respecto á las que se halla construída la superficie complementaria, es el de las geodésicas paralelas á un meridiano en el sentido en que se aleja de la asíntota.

328. Superficies complementarias de la pseudoesfera. Teorema. *La aplicación del proceso ilimitado de las transformaciones de Bäcklund á los elicoides pseudoesféricos de Dini, en particular, á la pseudoesfera* ($\sigma = 0$) *requiere tan solamente cálculos algebraicos y derivaciones.*

FIN DEL TOMO QUINTO

ÍNDICE

LIBRO PRIMERO

LÍNEAS Y SUPERFICIES

LIBRO SEGUNDO

APLICACIONES DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS

LIBRO TERCERO

ESTUDIO DE LAS SUPERFICIES EN FORMA PARAMÉTRICA

LIBRO CUARTO

SISTEMAS GEOMÉTRICOS

Z. G. de Galdeano

TRATADO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO