LECCIONES

DE

MECÁNICA RACIONAL

POR

D. TOMÁS ARIÑO Y SANCHO

Doctor en Ciencias,
Abogado y Catedrático de Mecánica racional de la Universidad de Madrid

Obra que contiene todos los conocimientos
de Mecánica racional exigidos en todas las carreras especiales
Civiles, Militares y de la Armada

TOMO I

MADRID
TIPOGRAFÍA DE GREGORIO ESTRADA
Doctor Fourquet, 7
1880

PRÓLOGO.

Estas Lecciones escritas en un principio para uso exclusivo de la Cátedra, sin más aspiracion que la de organizar el curso señalando el órden y la extension de las materias que debe comprender segun el estado actual de la ciencia, no estaban destinadas á ver la luz pública; pero las exigencias de la enseñanza, las instancias de los alumnos, y el justo y legítimo deseo de facilitarles el estudio de la asignatura, han impulsado al Autor á emprender la difícil y costosa tarea de darlas á la estampa.

Con el propósito de que la obra sea completa y no carezca de ninguna de las teorías que debe contener, para que pueda ser útil á todos los que estudian la *Mecánica racional*, ha sido completada incluyendo en los lugares correspondientes, con los respectivos programas á la vista, todas las cuestiones de esta ciencia que se exigen en las carreras especiales, Civiles, Militares y de la Armada. De esta suerte, los que se preparan para ingresar en las Escuelas especiales, y los que estudian la Mecánica racional en estos importantes centros de enseñanza, encontrarán en las páginas de este libro todos los conocimientos que de esta ciencia necesitan.

El órden seguido en estas Lecciones está fundado en consideraciones nacidas de la manera de ser de la Mecánica, y es al propio tiempo el más conveniente para facilitar su estudio.

La Mecánica, ciencia de las fuerzas y de las leyes de equilibrio y movimiento de los cuerpos, consta de dos partes principales, Estática y Dinámica. La primera se ocupa de las leyes del equilibrio, la segunda de las leyes del movimiento de los cuerpos.

Hay otra parte de la Mecánica, llamada Cinemática, que trata del estudio del movimiento de los cuerpos prescindiendo de las causas que lo producen, y considera sólo los espacios recorridos y los tiempos empleados en recorrerlos.

La Estática y la Dinámica conservan sus nombres cuando tratan de las leyes de equilibrio y movimiento de los cuerpos sólidos, llamándose Hidrostática é Hidrodinámica, cuando se ocupan del estudio de las leyes de equilibrio y movimiento de los cuerpos flúidos.

Algunos autores empiezan la exposicion de la Mecánica por la Cinemática, fundándose en que no entrando en esta parte la idea de fuerza, debe ser más sencilla que todas las demas; pero estas Lecciones, siguiendo la opinion de otros autores no ménos respetables, principian por la Estática, tenindo en cuenta que siempre es mucho más fácil de entender una cuestion de equilibrio que una cuestion de movimiento. Podemos citar, entre los que así piensan, á M. Sturm y á M. L'Abbé Moigno, que fundan su opinion en las razones siguientes.

Dice M. Sturm: Advertencia de su *Curso de Mecánica*, publicado por M. Prouhet: «Hasta nuestros »dias se ha dividido la Mecánica en dos partes distintas, »la Estática y la Dinámica. La primera toma de la »experiencia la nocion de punto material y la de fuer»za, y con estos dos solos principios se constituye

»como una ciencia puramente geométrica. La Diná»mica se distingue de la Estática por la introduccion »de muchas nociones nuevas, tales como el movi»miento, la masa, el tiempo. En el órden natural, en »el que se pasa de lo simple á lo compuesto, debe, por »consiguiente, empezarse por la Estática. Pero nos»otros hemos cambiado todo esto, ó mejor, se ha cam»biado todo esto. Las condiciones de equilibrio son »independientes de las ideas de tiempo y de movimien»to. No hay que decir, que el teorema de las veloci»dades virtuales es el principio de la Estática, porque »él no es más que su resúmen. El verdadero prin»cipio es el teorema de la composicion de las fuerzas.»

No son ménos concluyentes las razones aducidas por M. L'Abbé Moigno en el prólogo de sus *Lecciones de Mecánica Analítica.*

«Haber comenzado por la Estática, dice, es en las »ideas modernas reinantes, en presencia de los progra»mas de enseñanza profundamente trastornados, con »gran detrimento de la prosperidad y de los progresos »en Francia de las ciencias matemáticas, una falta y »casi un delito, de que yo debo ante todo justificarme. »Cuando Cauchy enseñaba, nadie hubiera tenido la »idea de empezar el estudio de la Mecánica analítica »por la Cinemática, que áun no existia, ó por la Diná»mica. Se seguia entónces la marcha natural y más fá»cil de lo simple á lo compuesto. Porque la idea de repo»so es más elemental que la idea de movimiento, en el »sentido de que no exige ninguna causa; porque la »Estática no considera más que la tendencia al movi»miento y su posibilidad, miéntras la Cinemática y la »Dinámica ponen en juego el movimiento y el tiem»po, el movimiento real en el espacio y en el tiempo, »por consiguiente se empezaba por la Estática. Y, en

»efecto, si la idea de punto material y de fuerza es co»mun á la Estática, á la Cinemática y á la Dinámica, »la Cinemática y la Dinámica, que consideran ademas »las nociones de velocidad y de aceleracion, deben ve»nir necesariamente despues. Si se objeta que no es con»veniente, en una ciencia basada en los hechos, tomar »de la metafísica la idea de las fuerzas ó causas efi»cientes del movimiento, que no son las más veces »sino séres ideales, diremos, que en todo caso la idea »de fuerza es una idea primera, claramente definida, »que no podremos desechar de nuestro espíritu sino »por un esfuerzo contra la naturaleza. Y añadiré, que »muy dispuesto á no ver en el mundo material más »que materia y movimiento, á no dar ninguna exis»tencia real á las fuerzas puramente explicativas, »como la atraccion universal ó molecular, no puedo, »sin embargo, resolverme á admitir que las palabras »*fuerza de traccion, de impulsion, de extension, de pre»sion*, no son realidades positivas, que es permitido »referir primero, á una idea abstracta, para represen»tarlas luégo por líneas, y por números, y someterlas á »todas las operaciones de la Geometría y del análisis. »Ahora, la Estática no hace otra cosa.»

Ademas, la Cinemática es como una introduccion á la Dinámica, porque el estudio de las aceleraciones, que aquella comprende, no es más que el estudio de las fuerzas referidas á la unidad de masa, asunto que toca ya en los límites de ésta. Es pues natural, lógico y conveniente, que la Cinemática preceda inmediatamente á la Dinámica.

Considerar la Estática como caso particular de la Dinámica, en razon á que el equilibrio es el caso particular del movimiento en que éste es cero, y estudiar estas dos partes simultáneamente, podrá ser más ó ménos útil bajo el punto de vista filosófico, pero bajo el punto de vista didáctico, es incuestionable la conveniencia de estudiar por separado la Estática, formando con ella la primera parte de la Mecánica, porque cuando se estudia juntamente con la Dinámica, pierde casi toda su importancia y se adquiere de ella una idea muy incompleta.

Para facilitar más el estudio, se divide en estas Lecciones la Estática en dos partes. La primera trata del equilibrio de los sólidos ó sistemas materiales invariables enteramente libres, y la segunda trata del equilibrio de los sólidos ó sistemas materiales, cualesquiera que sean las condiciones á que estén sujetos.

Tambien se divide la Dinámica en dos partes; Dinámica del punto material, y Dinámica de los cuerpos ó sistemas materiales cualesquiera. En la primera se exponen las leyes del movimiento del punto material, ó de un cuerpo que pueda considerarse como un punto material, prescindiendo de sus dimensiones; y en la segunda, se exponen las leyes del movimiento de los cuerpos en general. En una y otra, se consideran los espacios recorridos, los tiempos empleados en recorrelos y las fuerzas ó causas que producen el movimiento.

Como el principio de las velocidades virtuales, que encierra toda la Estática, se entiende mucho mejor despues de conocer las leyes del movimiento del punto material, se ha dejado la segunda parte de la Estática, para despues de la primera parte de la Dinámica, con lo cual se comprende con mucha facilidad dicho principio, y toda la segunda parte de la Estática. Hubiera podido exponerse toda la Estática seguida, pero es preferible este método, porque sin faltar al rigor científico, facilita mucho el estudio de esta parte de la ciencia.

Teniendo en cuenta todas estas consideraciones, el órden en que se tratan las diferentes partes de la *Mecánica racional* en esta obra, es el siguiente:

ESTÁTICA, primera parte.
CINEMÁTICA.
DINÁMICA, primera parte.
ESTÁTICA, segunda parte.
DINÁMICA, segunda parte.
HIDROSTÁTICA.
HIDRODINÁMICA.

Si así expuestas estas Lecciones, promueven y facilitan el estudio de la Mecánica racional en España, serán satisfechos los deseos y aspiraciones del Autor.

Madrid, Enero de 1880.

INDICE DEL TOMO I.

LECCION PRIMERA.

Págs.

PRÓLOGO. III

Preliminares.—Mecánica y sus partes.—Estática: Primera parte.—Composicion y descomposicion de fuerzas.—Composicion de fuerzas que actúan en la direccion de una recta.—Composicion de fuerzas concurrentes—Paralelógramo de las fuerzas.—Paralelepípedo de las fuerzas.—Descomposicion de una fuerza en otras concurrentes. . . 1

LECCION SEGUNDA.

Composicion y descomposicion de fuerzas paralelas.—Resultante de dos fuerzas paralelas que actúan en el mismo sentido.—Resultante de dos fuerzas paralelas que actúan en sentido contrario.—Par de fuerzas.—Resultante de un número cualquiera de fuerzas paralelas.—Centro de fuerzas paralelas.—Descomposicion de una fuerza en dos ó más paralelas.—Aplicaciones de la teoría de las fuerzas paralelas. 26

LECCION TERCERA.

Teoría de los pares.—Traslacion de los pares.—Trasformacion de los pares. Su medida.—Composicion de los pares situados en un mismo plano ó en planos paralelos.—Composicion de los pares situados en planos concurrentes. Paralelógramo de los pares.—Descomposicion de un par en dos situados en planos dados. 37

LECCION CUARTA.

Representacion de los pares por sus ejes.—Composicion de los pares bajo este nuevo aspecto.—Paralelógramo de los pares.—Relaciones entre sus elementos.—Composicion de un número cualquiera de pares.—Paralelepípedo de los pares y relaciones entre sus elementos.—Aplicacion de la teoría de los pares á la composicion de las fuerzas.—Reduccion de todas las fuerzas, aplicadas á un sólido invariable, á una fuerza y un par.—Cómo se logra que el plano del par sea perpendicular á la direccion de la fuerza.—Eje central.—Determinacion gráfica del eje central.—Condiciones para que todas las fuerzas del sistema tengan resultante única.—Reduccion de todas las fuerzas del sistema á dos no situadas en un plano, y que una de ellas pase por un punto dado.—Dos fuerzas no situadas en un plano, no pueden tener resultante única. 47

LECCION QUINTA.

Págs.

Leyes de equilibrio de un sistema libre.—Condiciones de equilibrio de un sistema de fuerzas paralelas situadas en un plano. Su resultante cuando no se equilibran.—Momentos de las fuerzas. Teorema de los momentos.—Equilibrio de fuerzas paralelas en el espacio.—Su resultante cuando no se equilibran.—Centro de fuerzas paralelas y cómo se determina. 59

LECCION SEXTA.

Equilibrio de fuerzas cualesquiera situadas en un plano. Su resultante cuando no se equilibran.—Representacion de las condiciones de equilibrio en funcion de las componentes de las fuerzas y de las coordenadas de sus puntos de aplicacion.—Convenio sobre los signos.—Caso en que los ejes sean rectangulares.—Condiciones de equilibrio de un sistema cualquiera de fuerzas dirigidas como se quiera en el espacio. —Caso en que los ejes sean rectangulares.—Introduccion de las mínimas distancias en las ecuaciones del equilibrio. 70

LECCION SÉTIMA.

Condicion analítica para que un sistema cualquiera de fuerzas tenga resultante única.—Resultante de un sistema cualquiera de fuerzas que no se equilibran y pueden reducirse á una sola.—Equivalencia de dos sistemas de fuerzas.—Aplicaciones de las teorías que acabamos de exponer.—Teoremas de Chasles y de Möbius. 82

LECCION OCTAVA.

Centros de gravedad.—Determinacion del centro de gravedad de varios cuerpos unidos de un modo invariable.—Distancia del centro de gravedad á un punto dado.—Determinacion del centro de gravedad de un cuerpo.—Reglas que simplifican la determinacion del centro de gravedad. 94

LECCION NOVENA.

Centro de gravedad de las líneas.—Línea recta. Quebrada. Contorno de un triángulo.—Arco de círculo.—Hélice.—Cicloide.—Parábola. . . . 104

LECCION DÉCIMA.

Centro de gravedad de las superficies.—Caso en que sean planas.—Triángulo.—Polígono.—Trapecio.—Cuadrilátero.— Sector y secmento de círculo.—Parábola.—Cicloide. 115

LECCION XI.

Centro de gravedad de las superficies de revolucion.—Zona esférica.— Zona cycloidal.—Zona parabólica.—Teoremas de Pappus ó de Guldin. —Volúmen de un cilindro. 127

LECCION XII ([a]).

CENTRO DE GRAVEDAD DE LOS VOLÚMENES.

Págs.

Volúmen y centro de gravedad de un cuerpo cualquiera.—Paralelepípedo.—Prisma.—Cilindro.—Pirámide.—Cono.—Sector y secmento esféricos.—Centro de gravedad de los sólidos de revolucion.—Cuerpos cuyo centro de gravedad se obtiene por una sola integracion.—Secmento de paraboloide elíptico.—Secmento de elipsoide. 136

LECCION XIII.

Volúmen y centro de gravedad en coordenadas polares.—Coordenadas polares y sus relaciones con las rectilíneas.—Volúmen y peso de los cuerpos referidos á coordenadas polares.—Coordenadas polares del centro de gravedad.—Límites de las integrales que contienen.—Aplicacion. 150

LECCION XIV.

ATRACCION DE LOS CUERPOS.

Atraccion universal, proporcional á las masas y en razon inversa de los cuadrados de las distancias.—Atraccion de una capa esférica homogénea, sobre un punto exterior ó interior.—Caso en que el cuerpo atrayente se compone de capas esféricas homogéneas, y caso en que es una esfera.—Atraccion de dos esferas.—Atraccion de un cuerpo cualquiera sobre un punto material.—Potencial.—Reduccion de las integrales generales de la atraccion á una sola, por medio de esta funcion.—Propiedades de la funcion potencial. 156

LECCION XV.

Atraccion de un elipsoide homogéneo sobre un punto interior.—Fórmulas que la determinan.—Consecuencias de estas fórmulas.—Cómo se integran.—Fórmulas de Jacobi.—Caso en que el elipsoide difiere poco de una esfera.—Caso en que el elipsoide es de revolucion.—Teorema de Newton.—Atraccion de un elipsoide homogéneo sobre un punto exterior. Teorema d'Ibori. 169

CINEMÁTICA.

LECCION XVI.

Movimiento de un punto material. Trayectoria.—Ecuacion del movimiento sobre la trayectoria.—Ley del movimiento y su representacion gráfica.—Movimiento uniforme, velocidad.—Movimiento va-

(a) En el texto dice XI, debe decir XII.

Págs.

riado, velocidad. Su determinacion analítica y gráfica.—Movimiento uniformemente variado.—Curva de los espacios, curva de las velocidades. Comparacion de estas dos curvas.—Definicion general de la velocidad: Velocidad angular, de circulacion, de deslizamiento, aereolar.—Proyeccion del movimiento sobre un plano fijo y sobre una recta fija. 183

LECCION XVII.

Movimiento de un sólido ó sistema invariable.—Movimiento de traslacion.—Movimiento de rotacion.—Velocidad angular, sea uniforme ó variado.—Movimiento elemental de una figura plana en su plano; centro instantáneo de rotacion.—Movimiento elemental de un sólido cuyos puntos se mueven parelamente á un plano.—Movimiento de una figura esférica sobre su esfera y de un sólido que tiene un punto fijo.—Teorema de d'Alambert. 201

LECCION XVIII.

Movimiento elemental de un sólido, que se mueve de un modo cualquiera en el espacio.—Movimiento helizoidal.—Eje instantáneo de rotacion y traslacion, y cómo se determina.—Movimiento contínuo de una figura plana en su plano.—Movimiento epicicloidal.—Sistemas articulados de cuerpos rígidos.—Propiedades de las epicicloides.—Línea recta y elipse consideradas como hipocicloides.—Movimiento contínuo de un sólido que tiene un punto fijo.—Teorema de Poinsot.—Movimiento contínuo de un sólido en el caso general.. 211

LECCION XIX.

Movimiento absoluto y relativo de un punto material.—Movimientos simultáneos de un punto. Movimientos componentes y resultante.—Composicion de las velocidades; paralelógramo, polígono y paralelepípedo de las velocidades.—Descomposicion de una velocidad en dos ó más.—Movimiento de un punto referido á coordenadas rectilíneas.—Movimiento de un punto referido á coordenadas polares. 231

LECCION XX.

Método de Roverval para trazar tangentes á las curvas planas.—Tangentes á la elipse y á la hipérbola referidas á sus focos.—Tangente á una seccion cónica. —Tangente á la concoide.—Extension dada al método de Roverval por Mannheim.—Centros de curvatura de la elipse y de la epicicloide; construccion de Savary.—Radio de curvatura de una curva epicicloidal plana. — Centro instantáneo de segundo órden. . . 242

LECCION XXI.

Movimientos simultáneos de un sólido.—Composicion de los movimientos simultáneos de un sólido. — Composicion de dos ó más traslaciones.—Composicion de una traslacion y una rotacion.—Composicion de dos rotaciones cuyos ejes son paralelos. — Par de rotaciones. — Composicion de rotaciones cuyos ejes son consecuentes.—Paralelógramo de las

Págs.

rotaciones.—Composicion de dos rotaciones cuyos ejes no están en un plano.—Composicion de movimientos cualesquiera.—Descomposicion de un movimiento en tres traslaciones y tres rotaciones.—Valores de las componentes.—Determinacion analítica del eje instantáneo de rotacion y traslacion. 254

LECCION XXII.

Teoría de los movimientos relativos.—Movimiento relativo de un punto material referido á un sistema de ejes animado de un movimiento de traslacion en el espacio.—Movimiento relativo de un punto cuando el movimiento de los ejes es de rotacion. — Movimiento relativo cuando los ejes se mueven de un modo cualquiera en el espacio —Movimiento relativo de dos sólidos, que se mueven de un modo cualquiera en el espacio.—Teoría de la rodadura y resbalamiento de los sólidos, los unos sobre los otros. Ejemplos. 275

LECCION XXIII.

Aceleracion en el movimiento de un punto.—Aceleracion en el movimiento rectilíneo uniformemente variado. —Aceleracion en el movimiento variado general; ley de la variacion de la velocidad en este movimiento.—Aceleracion en el movimiento curvilíneo; aceleracion tangencial, aceleracion centrípeta.—Curva de las aceleraciones.—Comparacion de las curvas de los espacios, de las velocidades y de las aceleraciones.—Aceleracion en el movimiento proyectado sobre un plano fijo y sobre una recta fija.—Aceleracion en el movimiento de un punto referido á un sistema de coordenadas rectilíneas.—Determinacion del radio de curvatura de ciertas curvas. 295

LECCION XXIV (a).

Determinacion de la aceleracion de un punto por el camino que recorre en el espacio.—Aceleracion en el movimiento compuesto.—Caso en que uno de los movimientos componentes es de traslacion.—Caso en que el movimiento de arrastre es un movimiento cualquiera.—Teorema de Coriolis. —Componentes de la aceleracion complementaria. —Aplicaciones del teorema de Coriolis. 310

DINÁMICA.

PRIMERA PARTE.

LECCION XXV (b).

Division de la Dinámica.—Primeros principios en que se funda la Dinámica.—Principio de igualdad de la accion y de la reaccion.—Indepen-

(a) En el texto dice XXIII, debe decir XXIV.

(b) En el texto dice XXIV en algunos ejemplares, debe decir XXV.

Págs.

dencia del efecto de una fuerza y del movimiento anterior adquirido por el punto material.—Efecto de una fuerza de magnitud y direccion constantes sobre un punto material.—Independencia de los efectos de las fuerzas que actúan simultáneamente sobre un mismo punto material.—Relacion entre las fuerzas, las aceleraciones y las masas.—Relacion entre fuerzas, masas y velocidades; cantidad de movimiento.—Relacion entre el peso y la masa.—Unidades empleadas en Mecánica. 327

LECCION XXVI.

Movimiento rectilíneo de un punto material libre.—Ecuacion diferencial de este movimiento. Cómo se integra.—Movimiento vertical de los cuerpos pesados en el vacío, teniendo en cuenta la variacion de la gravedad.—Caso particular en que el móvil está á una pequeña distancia de la superficie de la Tierra.—Caida de un cuerpo en un medio que resiste como el cuadrado de la velocidad. — Caso en que la resistencia llega á ser nula. 344

LECCION XXVII.

Movimiento de un cuerpo pesado lanzado de abajo arriba.—Movimiento de un cuerpo en un medio que resiste como la velocidad.—Movimiento de un cuerpo no pesado en un medio que resiste como la raíz cuadrada de la velocidad.—Movimiento rectilíneo de dos puntos materiales que se atraen en razon inversa del cuadrado de su distancia —Movimiento de un punto material atraido por un centro fijo en razon directa de la distancia.—Movimiento de un punto material repelido por un centro fijo en razon directa de la distancia. 357

LECCION XXVIII.

Movimiento curvilíneo de un punto material libre.—Fuerza tangencial, fuerza centrípeta.—Proyeccion del movimiento sobre un plano fijo.—Proyeccion del movimiento sobre una recta fija.—Ecuaciones diferenciales del movimiento de un punto material —Indicaciones generales sobre su integracion.—Consecuencias de las fórmulas del movimiento de un punto.—Teoremas de las cantidades de movimiento.—Teorema de las áreas; su recíproco. 369

LECCION XXIX.

Consecuencias de las fórmulas del movimiento de un punto.—Diferencial de la fuerza viva.—Diversas formas del polinomio $Xdx+Ydy+Zdz$. —Definicion del trabajo.—Teorema de las fuerzas vivas.—Consecuencias del teorema de las fuerzas vivas.—Superficies de nivel y sus propiedades.—Caso en que la fuerza es de intensidad y direccion constantes.—Caso en que el móvil está solicitado por fuerzas dirigidas á centros fijos.—Caso en que existe rozamiento ó la resistencia de un medio. —Teorema de la menor accion para un punto material libre.—Locuciones usadas antiguamente en la Mecánica. 384

LECCION XXX.

Págs.

Movimiento de los proyectiles en el vacío. — Trayectoria. Condiciones para que la altura y la amplitud sean máximas.—Direccion de la velocidad inicial para que el móvil pase por un punto dado. — Lugar geométrico de los puntos de interseccion de las parábolas que resultan variando el ángulo de proyeccion y siendo constante la velocidad inicial.—Movimiento de los proyectiles en el aire. Método de Coriolis.—Trayectoria en funcion de las coordenadas de sus puntos.—Asíntota de la rama descendente de esta curva.—Caso en que el ángulo de proyeccion es muy pequeño. — Movimiento de los proyectiles cuando la resistencia del aire se representa por una funcion cualquiera de la velocidad. 402

LECCION XXXI.

Movimiento de un punto material no libre.—Movimiento de un punto sobre una curva dada ó sobre una superficie dada. Fuerza centrífuga. —Movimiento de un punto material pesado sobre una recta inclinada.—Problema de Saladini.—Movimiento de un punto material pesado sobre una curva. 419

LECCION XXXII.

Péndulo simple. Ecuacion de su movimiento.—Caso en que esta ecuacion puede integrarse.—Caso en que las oscilaciones son pequeñas.— Teoría general del péndulo simple. — Desarrollo en serie de la duracion de una oscilacion.—Determinacion de la tension del hilo. 434

LECCION XXXIII.

Péndulo cicloidal ó péndulo de Huyghens. Su movimiento, y porqué se da á la cicloide el nombre de tautocrona.—Tautocrona en el vacío.— Brachistochrona.—Péndulo circular en un medio resistente. 446

LECCION XXXIV.

Movimiento de un punto material sobre una superficie dada.—Péndulo cónico.—Ecuaciones de su movimiento.—Cómo se reducen á tres.— Indicaciones sobre su integracion.—Raíces reales de la ecuacion de tercer grado que resulta.—Condiciones para que el móvil describa un círculo horizontal.—Caso en que el hilo forma un ángulo muy pequeño con la vertical.—Fuerza de reaccion. 462

LECCION XXXV.

Equilibrio y movimiento relativos de un punto material.—Teoría de las fuerzas aparentes en el movimiento relativo.—Aplicacion de esta teoría al equilibrio y movimiento relativos de un punto material.—Equilibrio y movimiento de los cuerpos en la superficie de la Tierra.—Efectos de la rotacion de ésta.—Fuerza centrífuga en los diferentes lugares de la Tierra.—Peso de los cuerpos, vertical. 478

LECCION XXXVI.

Págs.

Movimiento de los cuerpos en la superficie de la Tierra. Determinacion de las componentes de la fuerza centrífuga compuesta en un lugar cualquiera de la Tierra.—Caida de los cuerpos de una gran altura.—Tendencia lateral de los cuerpos en movimiento en un plano horizontal.—Movimiento del péndulo cónico, teniendo en cuenta el movimiento diurno de la Tierra.—Rotacion aparente del plano de oscilacion del péndulo.—Experimento de M. Foucault.—Influencia del movimiento anual de la Tierra en el equilibrio y movimiento de los cuerpos situados en su superficie.—Mareas. 491

LECCION XXXVII.

Fuerzas centrales y movimiento de los planetas. Aplicacion del teorema de las áreas.—Expresion de la velocidad en coordenadas polares.—Fuerza aceleratriz y sus componentes.—Leyes de Keplero.—Consecuencias de las leyes de Keplero. 514

LECCION XXXVIII.

Movimiento de un punto atraido por una fuerza dirigida á un centro fijo y que varía en razon inversa del cuadrado de la distancia del móvil al centro fijo.— Ecuacion de la trayectoria.—Caso en que esta curva es una elipse.—Caso de una órbita circular ó casi circular. Orbita parabólica. 523

LECCION XXXIX.

Atraccion universal y masa de los planetas.—Leyes de la atraccion universal.—Verificacion de la ley de la atraccion.—Movimiento absoluto y relativo de dos cuerpos que se atraen.—Masa de los planetas acompañados de satélites.—Masa de la Tierra.—Masa de los planetas que no tienen satélites. 534

MECÁNICA
RACIONAL

LECCION PRIMERA

Preliminares.— Mecánica y sus partes.—Estática: Primera parte.—Composicion y descomposicion de fuerzas.—Composicion de fuerzas que actúan en la direccion de una recta.—Composicion de fuerzas concurrentes.—Paralelógramo de las fuerzas.— Polígono de las fuerzas.—Paralelepípedo de las fuerzas.—Descomposicion de una fuerza en otras concurrentes.

PRELIMINARES.

1. Se llama *materia* todo lo que puede afectar de cualquier modo á nuestros sentidos. *Cuerpo* es una porcion limitada de materia.

Los cuerpos en la naturaleza están sometidos á la accion de esfuerzos propios ó extraños, que tienden á hacerlos cambiar de lugar en el espacio.

Se dice que *un cuerpo está en movimiento*, cuando él ó sus diferentes partes ocupan sucesivamente diferente lugar del espacio; y se dice *que está en equilibrio*, cuando él y sus diferentes partes ocupan sucesivamente el mismo lugar del espacio. Estos dos estados de los cuerpos se considera que provienen de un estado anterior ideal llamado reposo, en el cual, libres los cuerpos de toda accion, permanecen en el mismo lugar del espacio y están dispuestos á recibir la accion de cualquier causa que tienda á sacarlos del lugar que ocupan. La idea que tenemos de los cuerpos no exige que estén en movimiento para concebir su existencia, así que podemos suponerles en el estado ideal que llamamos reposo.

2. Los fundamentos de todas las ciencias son los primeros principios; de los cuales, por una serie de razonamientos rigurosos se deducen lógicamente todas las verdades que las constituyen. Los primeros principios de las ciencias no se demuestran.

La Mecánica, como todas ellas, se funda en tres principios, que aunque no son evidentes en sí mismos, como los axiomas, se han deducido por observaciones directas y repetidas de los fenómenos que se verifican en la Tierra y en el Universo. La verdad de estos principios resulta de un modo incontestable, de las consecuencias, que partiendo de ellos, se deducen lógicamente por una serie de razonamientos rigurosos. La principal prueba de su exactitud se encuentra en la conformidad de los movimientos de los cuerpos celestes, con las leyes teóricas deducidas de dichos principios.

3. El primero de estos principios es el *principio de la inercia de la materia*, que se enuncia como sigue: *un punto material no puede, por sí mismo, pasar del estado de reposo al de movimiento, si está en reposo, ni modificar el movimiento de que vaya animado en el espacio.*

La inercia de la materia en estado de reposo es una propiedad general, que parece evidente, y fué conocida por los antiguos, que llamaban inerte á toda materia inanimada, para expresar que no contiene en sí misma ninguna causa de movimiento espontáneo. La inercia de la materia en estado de movimiento es más difícil de comprender, y no fué reconocida hasta que Keplero la formuló en el siglo XVII.

La inercia de un cuerpo ó punto material consiste, segun este principio, en la *incapacidad* que tiene este cuerpo ó punto material de darse movimiento á sí mismo, si está en reposo, y de modificar el movimiento préviamente adquirido si está en movimiento. Esto no quiere decir que un cuerpo ó punto material no ejerza cierta accion sobre otro punto ó cuerpo exterior á él, como sucede siempre en la naturaleza, cuando una porcion de materia está en presencia de otra porcion de materia, segun acredita la experiencia.

De los otros dos principios nos ocuparemos más adelante, bastándonos éste para definir la fuerza.

4. Segun el principio de inercia, para que un cuerpo pase del estado de equilibrio al de movimiento, ó para que se modifique el movimiento de que esté aminado, es necesario que una causa exterior á él le obligue á ello. Esta causa es lo que se llama fuerza. De modo que *fuerza es toda causa que cambia ó tiende á cambiar el estado de equilibrio ó movimiento de los cuerpos*. Siendo desconocida la esencia de las fuerzas, las estudiaremos en cuanto á los efectos que producen sobre los cuerpos á que están aplicadas.

Para determinar completamente una fuerza es necesario considerar tres circunstancias; que son, *su punto de aplicacion*, *su direccion y su intensidad*.

El *punto de aplicacion* de una fuerza es el punto del cuerpo sobre que ejerce su accion. Esta accion consiste en tender á poner en movimiento su punto de aplicacion en una determinada direccion; y *se llama direccion de una fuerza*, la del elemento rectilíneo que tiende á describir su punto de aplicacion.

Una fuerza puede tirar de su punto de aplicacion ó empujarlo. Nosotros supondremos siempre que tira de su punto de aplicacion hácia la parte de la recta, segun la cual tiende á moverlo; y como este punto puede moverse sobre la direccion de la fuerza, en un sentido ó en el opuesto, el sentido de la fuerza es el de la porcion de recta, que tirando del punto de aplicacion tiende á describir sobre ésta. De manera, que si el punto de aplicacion de una fuerza es el A (fig. 1.ª), y su direccion la recta AP, *convendremos siempre* en que la fuerza tira de A hácia P, y con este convenio, del cual no nos separaremos en toda la Mecánica, queda completamente determinado el sentido de una fuerza. Tambien convendremos en que la direccion comprenda el sentido de la fuerza, tal cual lo acabamos de definir.

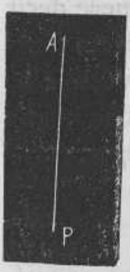


Fig. 1.ª

Para distinguir entre sí dos fuerzas iguales, de la misma direccion ó direcciones paralelas y de sentidos contrarios, convendremos en atribuir á una de ellas el signo +, que se puede sobreentender; y á la otra el signo —; la fuerza P, considerada como positiva, representa una fuerza igual y contraria á la fuerza—P; el signo—indica solamente que las fuerzas P y —P actúan la una en sentido contrario de la otra.

5. La *energía ó intensidad* de una fuerza se mide, como todas las cantidades matemáticas, tomando la de una determinada fuerza por unidad.

Es evidente que dos fuerzas de la misma direccion y sentidos contrarios, que se equilibran sobre un punto material, son iguales. Si reunimos dos fuerzas iguales, tendremos una fuerza doble; si á ésta agregamos una de las primeras, tendremos una triple; y en general, reuniendo várias, tendremos una fuerza múltiple de la primera.

Así pues, si convenimos en tomar por unidad una fuerza dada, los números, las letras y las líneas representarán á una fuerza que contenga un cierto número de veces á la unidad. Generalmente se conviene en representar las fuerzas por líneas rectas tomadas sobre su direccion y en su sentido, cuyas longitudes son proporcionales á su energía ó intensidad.

6. Una fuerza, pues, queda determinada, por su punto de aplicacion, su direccion y su intensidad. El primero se determina por sus tres coordenadas; la direccion por los ángulos que la recta que la representa forma con los ejes coordenados; y la intensidad por la longitud de la recta que representa la fuerza.

Mecánica y sus partes.

7. MECÁNICA es la ciencia que trata del estudio de las fuerzas y de las leyes del equilibrio y movimiento de los cuerpos.

La Mecánica se divide en Mecánica *racional* y Mecánica *aplicada*.

La Mecánica *racional*, objeto de estas lecciones y que pudiéramos llamar con más propiedad Mecánica *teórica*, es el conjunto de verdades de la ciencia de las fuerzas y del movimiento, que se deducen lógicamente de los primeros principios de esta ciencia. La Mecánica *aplicada* tiene por objeto las aplicaciones de esta ciencia, partiendo de los teoremas de la Mecánica racional, de ciertos datos experimentales y á veces de algunas hipótesis. El número de hipótesis disminuye á medida que la ciencia adelanta.

La Mecánica racional se divide en dos partes: ESTÁTICA y DINÁMICA. La ESTÁTICA es la parte de la Mecánica que trata de las leyes del equilibrio de los cuerpos; y la DINÁMICA es la parte de la Mecánica que trata de las leyes del movimiento de los cuerpos. Estas dos partes de la Mecánica toman diferentes nombres, segun los estados de los cuerpos de que tratan.

Los cuerpos en la naturaleza se presentan en tres estados: *sólido*, *líquido* y *gaseoso*. Para explicar estos tres estados de los cuerpos, se admite que sus moléculas están solicitadas por dos fuerzas; la cohesion ó atraccion molecular que tiende á aproximar las moléculas unas á otras; y la fuerza repulsiva debida al calórico, que tiende á alejarlas. Si predomina en los cuerpos la cohesion, se presentan éstos en estado sólido. Si la fuerza repulsiva es poco inferior á la atraccion molecular ó cohesion, los cuerpos se presentan en estado líquido. Y si predomina la fuerza repulsiva, los cuerpos se presentan en estado gaseoso. Estos estados de los cuerpos dependen de las circunstancias en que se encuentran; así un mismo cuerpo puede afectar los tres estados con sólo variar su temperatura; por ejemplo, el agua, á la presion ordinaria, se presenta en estado sólido á temperaturas inferiores á 0°; de 0° á 100°, afecta el estado líquido; y á temperaturas superiores á 100°, se presenta al estado gaseoso. A los cuerpos líquidos y á los gaseos, se les llama colectivamente *flúidos;* así que, para la Mecánica, los cuerpos son sólidos ó flúidos.

Las partes de la Mecánica de sólidos se llaman, como hemos dicho ántes, Estática y Dinámica.

Las partes de la Mecánica de flúidos se llaman HIDROSTÁTICA é HIDRODINÁMICA. La HIDROSTÁTICA trata de las leyes del equilibrio de los flúidos, y la HIDRODINÁMICA trata de las leyes del movimiento de los flúidos.

En todos los casos, el problema general de la Mecánica puede enunciarse en los siguientes términos: Dado un cuerpo ó un sistema de cuerpos, ¿qué movimiento tomará por la accion de un sistema dado de fuerzas? O ¿qué fuerzas deberán aplicarse á este cuerpo ó sistema de cuerpos para que tome un movimiento dado? El problema del equilibrio es el caso particular del problema general en que el movimiento es nulo.

8. Puede estudiarse el movimiento de los cuerpos

independientemente de las causas que lo producen, y entónces resulta otra parte de la Mecánica á que Ampère ha dado el nombre de Cinemática. Suele considerarse este estudio como intermedio entre la Geometría y la Mecánica; observando, que la Geometría considera el movimiento sin relacion al tiempo, la Cinemática lo tiene ya en cuenta; y por fin, la Mecánica estudia el equilibrio y movimiento de los cuerpos, teniendo en cuenta el tiempo y las causas que producen estos dos estados de los cuerpos.

Algunos autores principian el estudio de la Mecánica por la Cinemática, fundados en esta consideracion; mas nosotros estudiaremos la Estática primero, ateniéndonos á la definicion y division que hemos dado de la Mecánica.

Para mayor sencillez en el estudio de la Estática, la dividiremos en dos partes; en la primera trataremos del equilibrio de los sólidos ó sistemas invariables enteramente libres, y en la segunda del equilibrio de los sistemas materiales sujetos á un número cualquiera de condiciones.

Concluida la primera parte de la Estática, estudiaremos la Cinemática, que servirá como de introduccion á la Dinámica. De esta manera daremos á la Estática la importancia que merece y conseguiremos hacer nuestro estudio con mayor facilidad, procediendo siempre de lo más sencillo á lo más complicado, siguiendo las reglas del verdadero método didáctico.

ESTÁTICA.

PRIMERA PARTE.

9. El objeto de la Estática es hallar las leyes del equilibrio de un sólido ó sistema material sometido á la accion de un sistema cualquiera de fuerzas; veamos cómo podemos conseguirlo.

Llamamos *sólido ó sistema invariable* al sólido ó sistema cuyos puntos permanecen siempre á distancias constantes unos de otros. Aunque en la naturaleza todos los cuerpos se contraen y dilatan por la accion del calórico y otras causas, aproximándose ó alejándose por consiguiente sus moléculas, nosotros prescindiremos en la Estática de estos cambios, y supondremos que los sólidos ó sistemas materiales que consideramos son invariables.

10. Supongamos un sólido invariable sometido á la accion de un sistema de fuerzas, P, Q, R, S, aplicadas á los puntos *a*, *b*, *c*, *d* del sólido; es evidente que bastará encontrar las leyes de equilibrio para el sistema invariable formado por los puntos de aplicacion, porque si este sistema está en equilibrio por la accion de las fuerzas, el equilibrio subsistirá cuando en vez del sistema rígido formado por los puntos de aplicacion, sustituyamos el sólido invariable de que estos puntos forman parte. Por lo tanto, en las cuestiones de equilibrio prescindiremos del volúmen y forma de los cuerpos y consideraremos el sistema material invariable, formado por sus puntos de aplicacion.

11. En su consecuencia, y puesto que en las fuerzas sólo debemos considerar sus intensidades, sus direcciones y sus puntos de aplicacion, las condiciones de equilibrio serán las relaciones que deben existir entre las cantidades que determinan estos tres accidentes. Estas relaciones serán ecuaciones, en las cuales entrarán las intensidades de las fuerzas por las longitudes proporcionales que las representan, sus direcciones por los ángulos que forman con tres ejes de coordenadas y los puntos de aplicacion por las coordenadas que fijan sus posiciones en el espacio.

Debemos observar que en todo lo expuesto suponemos que el cuerpo ó cuerpos del sistema está libre en el espacio. Si estuviera sujeto á determinadas condiciones, como á permanecer fijo alguno de sus puntos, ó á apoyarse sobre una línea ó superficie dadas, ya veremos más adelante, en la segunda parte de la Estática, que estas condiciones pueden representarse por fuerzas convenientes, y considerar despues de introducir éstas, el sólido ó sistema como libre; y en todo caso qué modificaciones introducen estas condiciones en las ecuaciones del equilibrio.

Composicion y descomposicion de fuerzas.

12. Supongamos que las fuerzas P, Q, R, S..... se equilibran sobre un sólido invariable, es claro que una de ellas, la P, por ejemplo, se opone sola á la accion de todas las demas; luego el efecto de las fuerzas Q, R, S..... es solicitar el cuerpo absolutamente del mismo modo que una sola fuerza igual y contraria á la P.

Esta fuerza—P, capaz de producir ella sola el mismo efecto que las Q, R, S...., se llama *su resultante*, y las fuerzas Q, R, S....., que reemplaza, se llaman sus *componentes*.

El procedimiento que se emplea para hallar la resultante, dadas las componentes, se llama composicion de fuerzas. La operacion inversa, en virtud de la cual se reemplaza una fuerza por várias, se llama descomposicion de fuerzas.

De lo que acabamos de decir, se deduce este principio: *Que en todo sistema de fuerzas en equilibrio sobre un cuerpo, cada una de ellas es igual y directamente opuesta á la resultante de las demas.*

Representadas las fuerzas por rectas, llamaremos *fuerzas paralelas*, *fuerzas concurrentes*, etc., á aquellas cuyas direcciones son paralelas, concurrentes, etc.

13. Es evidente que dos fuerzas iguales y contrarias aplicadas á un punto material se equilibran.

Dos fuerzas iguales y contrarias aplicadas á las extremidades de una varilla rígida, invariable de longitud y actuando en la direccion de la varilla, se equilibran; porque si suponemos que el sistema se mueve en un sentido, la misma razon habrá para que se mueva en el opuesto; y no pudiendo existir estos dos movimientos á la vez, no existirá ninguno, y el sistema estará en equilibrio.

14. Una fuerza puede suponerse aplicada á cualquiera de los puntos de su direccion, con tal que el nuevo punto de aplicacion esté invariablemente unido con el cuerpo á que se aplica la fuerza.

Sea la fuerza P aplicada al punto A (fig. 2), de un sólido invariable, digo que podemos suponerla aplicada á cualquiera de los puntos de su direccion, por ejemplo, al B, con tal que éste esté invariablemente unido con el primero.

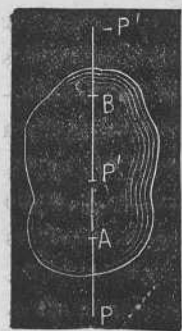


Fig. 2.

En efecto, apliquemos en B dos fuerzas P' y—P' iguales entre sí, y á la P, y actuando en la direccion AB; el punto A estará solicitado de la misma manera, porque el efecto de las fuerzas P' y—P', es nulo. Si consideramos la fuerza P y su igual y contraria—P′, su efecto es nulo y queda la fuerza P′, igual á la P, y aplicada al punto B de su direccion, de manera que el efecto sobre el sólido será el mismo que al principio.

No debe olvidarse que para esta traslacion de la fuerza el nuevo punto de aplicacion debe suponerse invariablemente unido con el primero.

Composicion de fuerzas que actúan sobre un punto material en la direccion de una recta.

15. La resultante de dos fuerzas P y Q que actúan sobre un punto material en un mismo sentido y en la direccion de una recta es igual á su suma P+Q. Esto es evidente, en virtud de las consideraciones expuestas para formarnos idea de una fuerza considerada como magnitud. De otro modo sería imposible formarnos idea de una fuerza doble, triple, etc. de otra.

Si las fuerzas P y Q actúan en sentidos contrarios y en la misma direccion, la resultante es igual á su direrencia P—Q, suponiendo que P es mayor que Q.

La resultante de cualquier número de fuerzas que actúan sobre un punto material en la direccion de una recta, es igual al exceso de la suma de las que actúan en un sentido, sobre la suma de las que actúan en el opuesto; y actúa en sentido de la mayor de las dos sumas. Más sencillamente, la resultante es igual á la suma algébrica de las componentes; considerando como positivas las que actúan en un sentido y como negativas las que actúan en el opuesto.

Composicion de fuerzas concurrentes.

16. La resultante de dos fuerzas aplicadas á un punto A (fig. 3), formando un ángulo cualquiera, está situada en el plano de éstas y dentro del ángulo que forman.

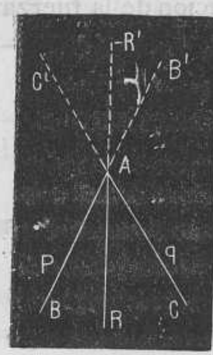


Fig. 3.

En efecto, las fuerzas P y Q tienden á dar al punto A un cierto movimiento único y perfectamente determinado; y una fuerza conveniente R podrá reemplazarlas y producir el mismo movimiento, y ésta sería la resultante; luego si tomamos una fuerza—R igual y contraria á esta resultante, las tres fuerzas P, Q,—R, se equilibran, y por lo tanto una de ellas es igual y directamente opuesta á la resultante de las otras dos; luego las P y Q tienen una resultante, que está en el plano de las componentes, porque si la suponemos elevada sobre el plano, podrá dársele una situacion simétrica respecto al plano; lo cual es imposible, porque no puede tener á la vez dos posiciones. Está dentro del ángulo BAC, porque la fuerza P tiende á alejar el punto de aplicacion del ángulo CAB'; la fuerza Q tiende á alejarlo del ángulo BAC', y las dos del ángulo C'AB': luego el punto de aplicacion permanecerá dentro del ángulo BAC, y la resultante estará dentro de este ángulo.

17. En el caso de que las dos fuerzas sean iguales, la resultante coincidirá con la bisectriz del ángulo que forman, porque no puede suponerse que se acerque más á una que á otra.

Paralelógramo de las fuerzas.

18. La resultante de dos fuerzas concurrentes está

representada en direccion y magnitud por la diagonal del paralelógramo construido sobre las intensidades de las fuerzas.

Fundaremos la demostracion de este teorema en el siguiente lema:

Si en los vértices opuestos B y D de un rombo invariable y en la direccion de los lados BA y BC, DA y DC (fig. 4), aplicamos cuatro fuerzas iguales, estas cuatro fuerzas se equilibran. En efecto, la resultante de las fuerzas que concurren en B estará (17) dirigida segun la bisectriz de este ángulo; la de las fuerzas que concurren en D, estará dirigida segun la misma bisectriz, y será igual y contraria á la anterior.

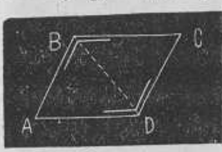


Fig. 4.

El sistema se reduce pues, á dos fuerzas iguales y contrarias aplicadas á los extremos de la recta rígida BD, luego estará en equilibrio

19. Esto supuesto, vamos á demostrar que la direccion de la resultante de las fuerzas P y Q (fig. 5), coincide con la diagonal AC del paralelógramo ABCD, construido sobre sus intensidades.

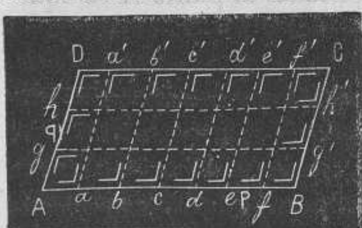


Fig. 5.

Supongamos que P y Q son comensurables y contienen á la medida comun 7 y 3 veces respectivamente. Dividamos AB en 7 partes iguales á la medida comun, y AD en 3; tiremos *aa'*, *bb'*, *cc'*, *dd'*, *ee'*, *ff'*, *gg'*, *hh'*.

En cada uno de los rombos que resultan *ag*, *bh*, *c*D, *dd'*, *eb'*, *fc'*, B*d'*, *g'e'*, *h'f'*, apliquemos cuatro fuerzas iguales á la medida comun y el estado del sistema no se alterará en virtud del lema anterior. Las fuerzas iguales y contrarias aplicadas en los extremos de las rectas *aa'*, *bb'*, *cc'*, *dd'*, *ee'*, *ff'*, *gg'* y *hh'* se destruyen. Las tres fuerzas que van de D á A destruyen á la Q, y las siete que van de B á A destruyen á la P. El sistema queda reducido á siete fuerzas iguales á la medida comun de D á C que forma una fuerza P aplicada en C, y á tres fuerzas de B á C, que forma la Q tambien aplicada en C: luego la resultante del sistema pasará por C; y como ya sabemos que pasa por A, seguirá la direccion de la diagonal AC.

Si las fuerzas P y Q son incomensurables, se demostrará la proposicion por el conocido teorema de los límites tan usado en la Geometría.

20. Nos falta probar ahora que la magnitud de la resultante esta representada por la diagonal AD (fig. 6). Para ello supongamos aplicada en el punto A en la direccion de la diagonal, una fuerza —R igual y opuesta á la resultante desconocida. Las fuerzas P, Q y —R, aplicadas al punto A se equilibran; luego una de ellas, tal como la P, es igual y directamente opuesta á la resultante de Q y —R, que es AB; de modo, que si por el punto B extremo de —P, tiramos una paralela á la AQ hasta que encuentre á la AE, tendremos, que siendo AQ la medida de la magnitud de Q, AE será la de la resultante R, y como AE=BQ=AD la diagonal AD representa en direccion y magnitud la resultante de las fuerzas P y Q.

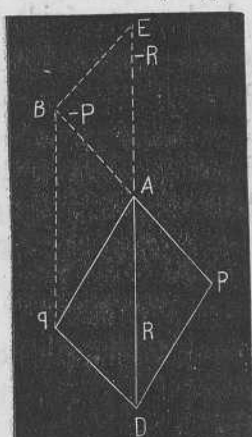


Fig. 6

Este teorema se conoce en la ciencia con el nombre *regla del paralelógramo de las fuerzas*. La gran importancia que tiene este teorema nos mueve á dar de él otra demostracion más general.

21. Fundaremos esta demostracion en los tres lemas siguientes:

Lema 1.° Si designamos por R la resultante de dos fuerzas P y Q, que obran sobre el punto A (fig. 7), la resultante de las fuerzas PK y QK obtenidas multiplicando las primeras por un número cualquiera K y dirigidas segun los mismas rectas, estará representada por el producto RK y dirigida segun la misma recta que la resultante R.

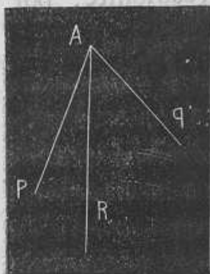


Fig. 7.

En la demostracion de este lema pueden ocurrir tres casos, que K sea un número entero *m*, que sea un número fraccionario $\frac{m}{n}$ y que sea un número inconmensurable.

Primer caso, $K=m$. Entónces las dos fuerzas $PK=Pm$ y $QK=Qm$ equivalen á *m* fuerzas iguales á P y á Q: cada dos fuerzas P, Q, tiene por el supuesto una resultante R; luego los *m* pares de fuerzas P y Q tienen *m* resultantes R, dirigidas todas segun la misma recta R, que darán todas una resultante única mR ó RK, igual á su suma.

Segundo caso, $K=\frac{m}{n}$, siendo *m* y *n* números enteros. Supongamos primero que $m=1$ ó que $K=\frac{1}{n}$. Llamemos R' á la resultante de las fuerzas

$$PK=\frac{P}{n}=P',\ QK=\frac{Q}{n}=Q',$$

será $P=nP'$, $Q=nQ'$, la resultante de las fuerzas P y Q coincidirá (primer caso) en direccion con R', y tendremos

$$nR'=R,\ R'=\frac{R}{n}=RK,$$

es decir, que la resultante de las dos fuerzas PK, QK coincidirá en direccion con la resultante R de P y Q y es igual á RK.

Sea ya K un número fraccionario cualquiera. Las fuerzas $PK=\frac{m}{n}P=m\frac{P}{n}=mP'$, $QK=\frac{m}{n}Q=m\frac{Q}{n}=mQ'$, equivalen á m fuerzas P′, Q′; y si llamamos R′ á la resultante de $P'=\frac{P}{n}$, $Q'=\frac{Q}{n}$, esta resultante, por lo que acabamos de decir, tendrá la direccion de la resultante R de las dos fuerzas P, Q, y será igual á $\frac{R}{n}$: tambien sabemos que la resultante de las fuerzas $PK=mP'$, $QK=mQ$, tendrá la direccion de R′ y será igual á $mR'=\frac{m}{n}R=RK$: luego la resultante de PK y QK coincide en direccion con R y es igual á RK.

Tercer caso, K es incomensurable. Se podrá tomar un número fraccionario $\frac{m}{n}$ que tenga K por límite. En todos los estados de magnitud de este número fraccionario se verificara la proposicion, luego en el límite tambien se verificará, y la resultante tendrá la direccion de R, y el límite de su valor será RK.

De este lema se deduce, que si las fuerzas P, Q, R están representadas por las rectas AB, AC, AD (fig. 8), que forman los ángulos PAQ, PAR, QAR, y por el punto A, tiramos las rectas AE y AF que formen los ángulos CAE=PAR, BAF=QAR, aplicando segun AD y AF dos fuerzas PK y QK, las cuales tendrán por resultante una fuerza RK dirigida segun AB, y como nada se opone á hacer RK=P, $K=\frac{P}{R}$ lo que da $PK=\frac{P^2}{R}$, $QK=\frac{PQ}{R}$; resulta que la fuerza P puede reem-

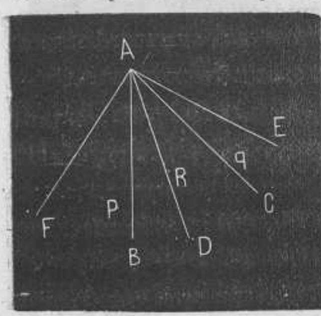


Fig. 8.

plazarse por dos fuerzas, una $\frac{P^2}{R}$ dirigida segun AD y otra $\frac{PQ}{R}$ dirigida segun AF. Del mismo modo se probaria que la fuerza Q puede reemplazarse por dos, una $\frac{Q^2}{R}$ dirigida segun AD y otra $\frac{PQ}{R}$ dirigida segun AE. Las dos fuerzas P, Q pueden reemplazarse por dos $\frac{P^2}{R}$, $\frac{Q^2}{R}$ que tienen la direccion de la resultante R, y por dos fuerzas iguales $\frac{PQ}{R}$, $\frac{PQ}{R}$ dirigidas segun las líneas AF y AE.

22. *Lema* 2.°—La resultante R de dos fuerzas P, Q (fig. 9), que forman ángulo recto, está representada en magnitud por la diagonal del rectángulo construido sobre sus dos componentes, de suerte que se tiene

$$R^2 = P^2 + Q^2.$$

Para demostrarlo, reemplacemos la fuerza P por las dos componentes $\frac{P^2}{R}$ y $\frac{PQ}{R}$ que forman con ella los ángulos PAR y PAF, y estarán dirigidas segun AD, AF; la fuerza Q por dos componentes $\frac{Q^2}{R}$ y $\frac{PQ}{R}$ que forman con ella los ángulos QAR y QAE y dirigidas segun AD, AE. Las dos componentes $\frac{PQ}{R}$ forman entre sí dos ángulos rectos, es decir, que son opuestas, y como ademas son iguales, se destruyen; y las fuerzas $\frac{P^2}{R}$, $\frac{Q^2}{R}$ dirigidas segun AD darán una suma R, y tendremos

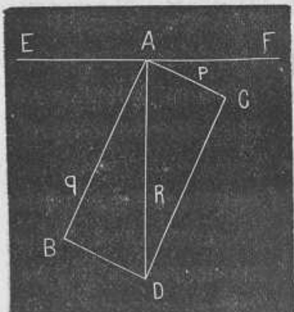


Fig. 9.

$$R = \frac{P^2}{R} + \frac{Q^2}{R}, \text{ ó } R^2 = P^2 + Q^2.$$

23. *Lema* 3.°—La resultante R de dos fuerzas rec-

tangulares P, Q está representada, no solamente en magnitud, como acabamos de probar, sino tambien en direccion, por la diagonal del rectángulo construido sobre las dos componentes

Esta proposicion es evidente cuando las fuerzas P y Q son iguales, porque entónces la resultante, siendo la bisectriz de ángulo PAQ, coincide con la diagonal del cuadrado construido sobre ellas, y por el lema segundo tendremos

$$R^2=2\,P^2,\ R=P\sqrt{2}.$$

Tambien se verifica la proposicion en el caso de $Q^2=2\,P^2$ ó $Q=P\sqrt{2}$, porque considerando tres fuerzas iguales á P dirigidas perpendicularmente, estas tres fuerzas forman las tres aristas de un cubo que concurren en uno de sus vértices: la resultante de dos de estas fuerzas es igual á $P\sqrt{2}$ y está dirigida segun la diagonal de una de las caras del cubo; la resultante R de las tres fuerzas, estará comprendida en un plano que contenga una de las fuerzas P y la diagonal construida sobre las otras dos. Existen tres planos de esta especie que se cortan segun la diagonal del cubo; luego la resultante de las tres fuerzas P, ó lo que es lo mismo, la resultante de las fuerzas P y $P\sqrt{2}$, que se cortan á ángulo recto, estará dirigida segun la diagonal del cubo, que es al mismo tiempo la diagonal del rectángulo construido sobre las fuerzas P y $P\sqrt{2}$.

Se probaria absolutamente del mismo modo, que si designamos por m un número entero y suponemos el lema tercero demostrado en el caso de $Q=P\sqrt{m}$, la resultante de tres fuerzas,

$$P,\ P,\ P\sqrt{m},$$

representadas por las tres aristas de un paralelepípedo rectángulo, estará dirigida segun la diagonal de este paralelepípedo.

En esta hipótesis, el lema tercero será cierto si designamos por Q la resultante de las fuerzas P y $P\sqrt{m}$, es decir, si hacemos $Q=P\sqrt{m+1}$. Ahora el lema tercero es cierto para $P=Q$, ó lo que es lo mismo, cuando $m=1$. Luego este lema subsistirá cuando $Q=P\sqrt{1+1}=P\sqrt{2}$, $Q=P\sqrt{2+1}=P\sqrt{3}$.......... en general $Q=P\sqrt{m}$, siendo m un número entero cualquiera.

24. Sean ahora m y n dos números enteros; construyamos un paralelepípedo rectángulo, cuyas aristas sean las tres fuerzas

$$P,\ P\sqrt{m},\ P\sqrt{n}.$$

La resultante de estas tres fuerzas estará evidentemente comprendida: 1.°, en el plano que contiene la fuerza $P\sqrt{n}$ y la diagonal $P\sqrt{m+1}$ del rectángulo construido sobre las fuerzas P, $P\sqrt{m}$; 2.°, en el plano que contiene la fuerza $P\sqrt{m}$ y la diagonal $P\sqrt{n+1}$ del rectángulo construido sobre las fuerzas P, $P\sqrt{n}$. Luego ésta estará dirigida segun la diagonal del paralelepípedo, y el plano que determinan esta resultante y la fuerza P cortará al plano de las otras dos fuerzas $P\sqrt{m}$, $P\sqrt{n}$, segun la diagonal del rectángulo construido sobre estas dos fuerzas; de manera que la resultante de las fuerzas $P\sqrt{m}$, $P\sqrt{n}$, que debe estar evidentemente comprendida en el plano de que se trata, estará dirigida segun esta última diagonal. Luego el lema tercero subsistirá, si reemplazamos las fuerzas P y Q por dos fuerzas iguales á $P\sqrt{m}$, $P\sqrt{n}$, ès decir, por dos fuerzas cuyos cuadrados están en la relacion de m á n; y el lema tercero se verificará, si suponemos,

$$\frac{Q^2}{P^2}=\frac{m}{n} \quad \text{ó} \quad Q=P\sqrt{\frac{m}{n}}.$$

Sea ahora $Q=PK$, designando por K un número cualquiera; se podrá hacer variar á los números enteros m

y n, de manera que la relacion $\frac{m}{n}$ converja hácia un límite K^2, y es claro que en este caso la resultante de las fuerzas P, $P\sqrt{\frac{m}{n}}$ dirigidas segun dos rectas perpendiculares una á otra, tenderá más y más á confundirse en magnitud y direccion, de una parte con la resultante de las fuerzas P, PK, y de otra con la diagonal del rectángulo construido sobre estas dos fuerzas: luego la resultante de las fuerzas P, PK, estará representada por la diagonal de que se trata.

25. De aquí se deduce, que si la fuerza R está representada por la longitud AB (fig. 10), y por el punto A trazamos dos ejes perpendiculares, se podrá reemplazar la fuerza R ó AB, por las proyecciones AC, AD de la recta AB sobre los dos ejes.

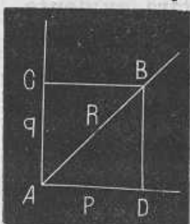


Fig. 10.

Tambien se deduce, que dos fuerzas P, Q aplicadas al punto A y representadas por dos rectas AB, AC (fig. 11), que forme entre sí un ángulo cualquiera, y si trazamos en el plano de las dos fuerzas, dos ejes, uno de los cuales coincida con la diagonal del paralelógramo construido sobre ellas, y el otro sea perpendicular á esta diagonal; podremos reemplazar las dos fuerzas P, Q por las cuatro fuerzas representadas en magnitud y direccion por las proyecciones AB′, AB″, AC′, AC″ de las rectas sobre los dos ejes. Dos de estas cuatro fuerzas son iguales y opuestas y se destruyen; las otras dos diri-

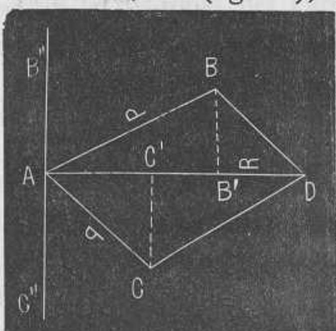


Fig. 11.

gidas segun la diagonal del paralelógramo, se componen en una igual á su suma, que es la misma diagonal y coincide con ella en direccion. Podremos, pues, enunciar la regla del paralelógramo de las fuerzas en los siguientes términos:

La resultante R de dos fuerzas P, Q simultáneamente aplicadas á un punto material A y dirigidas de un modo cualquiera, está representada en magnitud y direccion por la diagonal del paralelógramo construido sobre estas dos fuerzas.

Recíprocamente, una fuerza cualquiera R puede reemplazarse por otras dos, P, Q, que estén representadas en magnitud y direccion por los lados de un paralelógramo que tenga R por diagonal.

Del mismo modo que R equivale en magnitud y direccion á las dos fuerzas P y Q, las dos fuerzas P y Q equivalen á la fuerza única R.

26. En virtud de esta regla, las fuerzas P, Q y R son entre sí como AB, AD y AC, ó como los tres lados del triángulo ABC, (fig. 12). Estos lados son entre sí como los senos de los ángulos opuestos; tendremos, observando que ACB=CAD y que senABC=senBAD,

$$\frac{P}{\mathrm{sen}\,CAD}=\frac{Q}{\mathrm{sen}\,CAB}=\frac{R}{\mathrm{sen}\,DAB},$$

de donde resulta que cada una de las fuerzas P, Q, R, es proporcional al seno del ángulo formado por las direcciones de las otras dos.

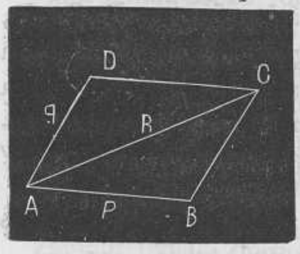


Fig. 12.

Representadas las componentes y la resultante por los tres lados de un triángulo, podríamos establecer entre ellas todas las relaciones que entre dichos lados establece la Trigonometría.

Entre estas relaciones es importante la siguiente:

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2\,P\,Q \cos PAQ;$$

que da la resultante en funcion de las componentes y del ángulo que forman. Si las fuerzas son rectangulares, la relacion anterior se convierte en la

$$R^2 = P^2 + Q^2,$$

que da R en funcion de las componentes P y Q.

27. De la regla del paralelógramo de las fuerzas se deduce, que la resultante de dos fuerzas concurrentes no puede ser cero, sin que cada una de ellas sea separadamente igual cero. Porque si ninguna de las dos fuera cero, la diagonal del paralelógramo construido sobre ellas sería la resultante, lo cual es contra el supuesto. Si una de ellas sólo fuera cero, la otra sería la resultante, tambien contra el supuesto. Luego si la resultante es cero lo serán por separado cada una de las componentes.

En el caso de que el ángulo que formen las fuerzas es gual á dos rectos, éstas son opuestas, y la resultante, que es igual á su diferencia, será cero cuando sean iguales; ademas del caso en que separadamente sean cero cada una.

Polígono de las fuerzas.

28. Sabiendo hallar la resultante de dos fuerzas se puede hallar fácilmente la de várias fuerzas P, Q, R, S..... aplicadas al punto A (fig. 13), dirigidas de un modo cualquiera en el espacio. Para ello se determina la resultante X de P y Q; la resultante X′ de X y R, la resultante X″ de X′ y S y la resultante X‴ de X″ y T; X‴ será la resultante del sistema.

Esta construccion se reduce á tirar por el extremo de P una recta igual y paralela á Q; por el extremo de la línea quebrada que resulta, una recta igual y paralela á R; por el extremo de ésta otra igual y paralela á S, por el extremo de ésta otra igual y paralela á T.....: la recta que une el extremo de la línea quebrada con el punto A, es la resultante.

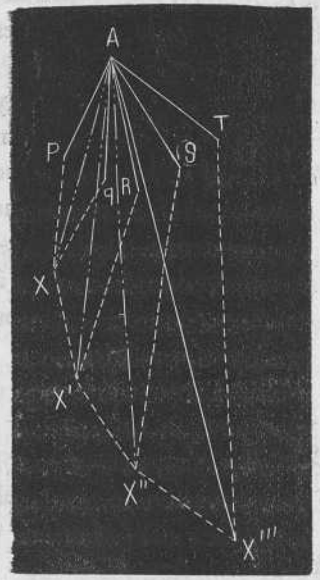


Fig 13.

Esta manera de determinar la resultante se llama *regla del polígono de las fuerzas.*

Si el polígono construido resultase cerrado por sí mismo, la resultante sería cero, y el sistema estaria en equilibrio.

Si todas las rectas que representan las fuerzas están en un plano, el polígono de las fuerzas será plano.

La regla del polígono de las fuerzas subsiste, cualesquiera que sean las direcciones de las fuerzas, y por consiguiente en el caso en que estén dirigidas segun una misma recta, unas en un sentido y otras en el opuesto. Aplicando la regla á este caso vemos, que la resultante es igual á el exceso de la suma de las que actúan en un sentido, sobre la suma de los que actúan en el opuesto, ó lo que es lo mismo, la resultante es igual á la suma algébrica de las componentes; que es la misma regla que obtuvimos directamente en el núm. 15.

Paralelepípedo de las fuerzas.

29. Si las fuerzas son tres X, Y, Z (fig. 14), no situadas en un plano, la resultante de X é Y será AD,

y la de AD y AC será AF, que es la diagonal del paralelepípedo construido sobre las intensidades de estas fuerzas.

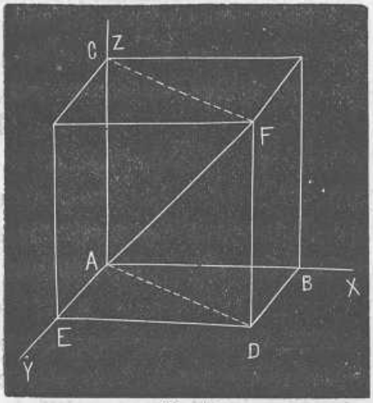


Fig. 14.

Entre la resultante y las componentes existen las mismas relaciones que entre la diagonal y las tres aristas del paralelepípedo. Llamando R á la diagonal, tendremos la fórmula

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + 2\,XY\cos EAB$$
$$+ 2\,XZ\cos BAC + 2\,YZ\cos EAC.$$

Si las direcciones de las fuerzas son rectangulares, el paralelepípedo será rectángulo, y se tendrá

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

30. Si la resultante es nula, lo son por separado las tres componentes. Porque si ninguna es cero, la diagonal del paralelepípedo será la resultante, lo cual es contra el supuesto. Si una sólo es cero, la resultante será la de las otras dos, tambien contra el supuesto. Si sólo dos son cero, la tercera será la resultante, lo cual es contra el supuesto como ántes; luego es necesario que las tres componentes sean separadamente cero, si la resultante lo es.

Descomposicion de una fuerza en otras concurrentes.

31. Tratemos de descomponer la fuerza R en dos que pasen por su punto de aplicacion A (fig. 12). El problema es indeterminado si no se conocen las direcciones de las componentes, porque la cuestion equivaldria á encontrar todos los paralelógramos que tienen R ó AC por diagonal, que ya sabemos que son muchos. Pero si

las direcciones de las componentes son conocidas, como sucede ordinariamente, entónces tirando por el extremo C de R paralelas á estas direcciones, quedan determinadas AB=P y AD=Q. Estas componentes podrán calcularse por las proporciones

$$P:R::\text{sen}DAC:\text{sen}DAB;$$
$$Q:R::\text{sen}CAB:\text{sen}DAB.$$

Si las direcciones de las fuerzas son rectangulares, tendremos

$$\text{sen}DAC=\cos CAB,\ \text{sen}DAB=1,$$
$$\text{sen}CAB=\cos DAC,\ \text{y será}$$
$$P:R::\cos CAB:1,\qquad Q:R::\cos DAC:1,$$
$$\text{y } P=R\cos CAB,\qquad Q=R\cos DAC.$$

Por lo que vemos, que P y Q son las proyecciones de R sobre las direcciones de éstas. Tambien se dice que P representa la fuerza R estimada en la direccion de P, y Q la fuerza R estimada en la direccion de Q.

32. Si queremos descomponer la fuerza R en tres X Y, Z, no situadas en un mismo plano (fig. 14), el problema es indeterminado si no se dan las direcciones de las componentes. Conociéndose éstas, se tiran por el punto F extremo de R, tres planos paralelos á los que determinan las direcciones dadas que pasan por A, y resultará un paralelepípedo, cuyas aristas serán las componentes buscadas. Si las direcciones dadas son rectangulares el paralelepípedo será rectángulo y llamando α, β, γ, á los ángulos que la diagonal forma con las tres aristas, tendremos

$$X=R\cos\alpha,\quad Y=R\cos\beta,\qquad Z=R\cos\gamma.$$

Podria descomponerse la fuerza en más de tres componentes siguiendo el mismo procedimiento.

LECCION SEGUNDA

Composicion y descomposicion de fuerzas paralelas. — Resultante de dos fuerzas paralelas que actúan en el mismo sentido. — Resultante de dos fuerzas paralelas que actúan en sentido contrario. — Par de fuerzas. — Resultante de un número cualquiera de fuerzas paralelas. — Centro de fuerzas paralelas. — Descomposicion de una fuerza en dos ó más paralelas. — Aplicaciones de la teoría de las fuerzas paralelas.

Composicion y descomposicion de fuerzas paralelas. — Resultante de dos fuerzas paralelas que actúan en el mismo sentido.

33. Si dos fuerzas P y Q (fig. 15) paralelas y del mismo sentido actúan en los extremos A y B de una recta AB rígida; vamos á demostrar: 1.° Que tendrán una resultante, que pasa por entre los puntos de aplicacion de las componentes. 2.° Que esta resultante es paralela á las componentes é igual á su suma. Y 3.° Que el punto C de aplicacion de la resultante divide á la recta AB, que une los de aplicacion de las componentes, en partes inversamente proporcionales á las magnitudes de las fuerzas P y Q.

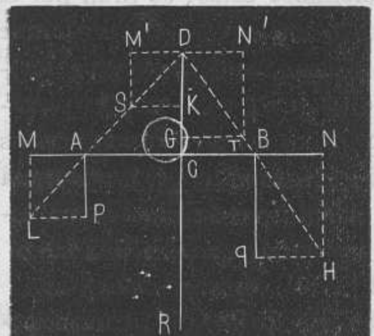


Fig. 15.

1.° y 2.° Apliquemos en la direccion de la recta AB y en los puntos de aplicacion de P y Q, dos fuerzas iguales y contrarias, tales como M y N, las cuales no alteran el sistema. Reemplacemos á P y M por su resultante AL, y á Q y N por la resultante BH.

Las direcciones de estas dos se cortan en el punto D, al cual las supondremos trasladadas y tendrán las posiciones respectivas DS y DT. Si por este punto D tiramos paralelas á AB y á las fuerzas P y Q, se podrá descomponer cada una de las DS y DT del modo que lo estaban en A y en B, y tendremos los paralelógramos DM'SK y DN'TG respectivamente iguales á los AMLP y BNHQ. Las fuerzas DM' y DN', se destruyen por ser iguales y opuestas, y no quedan más que las DK=P y DG=Q; cuya resultante es igual á su suma P+Q, y es ademas paralela á las componentes y que podemos aplicar en el punto C en que encuentra á AB, el cual está situado entre los puntos A y B.

3.° Para determinar la posicion del punto de aplicacion C, los triángulos semejantes DAC y DSK, DBC y DGT, dan las proporciones

$$\frac{AC}{SK}=\frac{DC}{DK},$$

$$\frac{GT}{CB}=\frac{DG}{DC}.$$

Multiplicando ordenadamente estas proporciones, observando que SK=GT y simplificando, resulta

$$\frac{P}{Q}=\frac{CB}{CA}.$$

Proporcion que nos dice que las fuerzas P y Q están en razon inversa de los secmentos correspondientes. Tambien $P\times AC=Q\times BC$,
es decir, que son iguales los productos de las fuerzas por los secmentos adyacentes.

De la proporcion anterior se deduce:

$$\frac{P+Q}{Q}=\frac{CA+CB}{CA} \text{ ó } \frac{R}{Q}=\frac{AB}{AC};$$

de esta proporcion y de la anterior resulta la série de razones iguales

$$\frac{P}{BC}=\frac{Q}{AC}=\frac{R}{AB},$$

que da tres ecuaciones entre las tres fuerzas y las rectas correspondientes, en las cuales dadas tres de estas cantidades, se podrán encontrar las otras tres.

Si las fuerzas P y Q se representan por los secmentos CB y CA, la resultante R, que es igual á su suma, estará representada por la recta AB.

34. El punto C de aplicacion de la resultante permanece el mismo, aunque se varíe la direccion de las fuerzas, con tal que éstas conserven su paralelismo y sus puntos de aplicacion, y la misma magnitud, ó magnitudes proporcionales.

Resultante de dos fuerzas paralelas que actúan en sentido contrario. Par de fuerzas.

35. Sean las fuerzas P y Q (fig. 16), paralelas y dirigidas en sentidos contrarios, siendo $P>Q$.

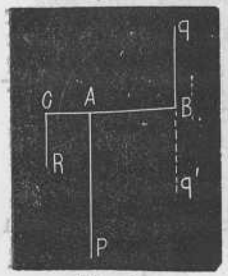


Fig. 16.

Descompongamos la fuerza P en otras dos paralelas á ella y del mismo sentido, una de las cuales sea igual y contraria á Q, tal como Q′, que se destruirá con Q, y la otra componente $R=P-Q$ será la resultante; el punto de aplicacion C de la resultante R estará fuera del intervalo AB y del lado de la fuerza mayor P, como es facil ver observando que el punto A de aplicacion de la resultante P de R y Q′, está situado en la recta CB y entre los puntos de aplicacion C y B de éstas.

Su posicion se determinará por la proporcion

$$\frac{Q}{CA}=\frac{R}{AB} \text{ ó } CA=\frac{AB.Q}{R}=\frac{AB.Q}{P-Q} \quad (1)$$

De donde se deduce que la resultante de dos fuerzas paralelas dirigidas en sentido contrario, es igual á la diferencia de éstas, paralela á ellas y actúa en sentido de la mayor. Su punto de aplicacion está en la prolongacion de la AB, hácia la parte donde está la fuerza mayor, y se determina por la igualdad (1).

36. A medida que las fuerzas P y Q tienden á ser iguales, la resultante $R=P-Q$ tiende hácia 0, y su punto de aplicacion se aleja indefinidamente. Cuando $P=Q$ la resultante es cero y la distancia $AC=\infty$.

Esta resultante cero, situada á una distancia infinita del punto A, denota una imposibilidad en la cuestion; y en efecto, es imposible que una sola fuerza reemplace á un sistema de dos fuerzas iguales, paralelas y contrarias, que actúan en puntos distintos de la recta que une sus puntos de aplicacion.

37. Un sistema de esta clase es lo que se llama par de fuerzas. Vamos á demostrar directamente que el par (P,—P) (fig. 17), no puede reemplazarse por una sola fuerza. Si una fuerza cualquiera pudiera reemplazar al par, una fuerza igual y contraria lo reduciria al equilibrio.

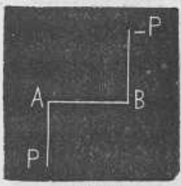


Fig. 17.

Supongamos que una fuerza R reduzca el equilibrio al par (P,—P); es claro, que una fuerza igual y contraria —R tambien lo reducirá al equilibrio, porque el sistema es simétrico respectó de AB. Introduzcamos esta fuerza —R, y destruyámosla en seguida por otra igual y contraria R′ en su mismo punto de aplicacion: el sistema seguirá en equilibrio bajo la accion de las cinco fuerzas R, P, —P, —R, R′. Por lo que acabamos de ver P, —P y —R se equilibran, luego R y R′ tambien deben equilibrarse, lo cual es imposible, porque son dos fuerzas que actúan en el mismo sentido; de modo que es imposible que una sola fuerza reemplace á un par, ó sea á un sistema de dos fuerzas paralelas iguales y contrarias.

Resultante de un número cualquiera de fuerzas paralelas.

38. Sabiendo hallar la resultante de dos fuerzas paralelas facilmente se encuentra la de cualquier número de fuerzas paralelas. Para ello se determina la resultante R de P y P′ (fig. 18), se une el punto de aplicacion *c* de ésta con el C de la P″, se halla la resultante R′ de R y P″, y del mismo modo se halla la resultante R″ de R′ y P‴, que será la resultante del sistema.

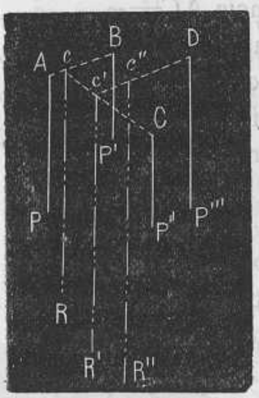


Fig. 18.

El mismo procedimiento seguiríamos, cualquiera que fuera el número de fuerzas paralelas.

Si en el sistema de fuerzas paralelas unas actúan en un sentido y otras en el opuesto, se halla la resultante de las que actúan en un sentido, y la de las que actúan en el opuesto, y luégo se determina la resultante de estas dos por el procedimiento expuesto en el número 35.

Centro de fuerzas paralelas.

39. Hemos visto (34) que el punto de aplicacion de la resultante de dos fuerzas paralelas no cambia, aunque se hagan girar éstas de cualquier modo, con tal que con-

serven su paralelismo, sus puntos de aplicacion y magnitudes iguales ó proporcionales. Lo mismo sucede cuando las fuerzas son más de dos, como se deduce inmediatamente del método que acabamos de exponer para encontrar la resultante. De aquí se deduce este notable teorema:

Si consideramos un sistema cualquiera de fuerzas paralelas aplicadas á un sistema de puntos A, B, C, D,..... y damos al sistema entero diferentes posiciones, de modo que las fuerzas conserven sus magnitudes, sus puntos de aplicacion y su paralelismo, el punto de aplicacion de la resultante será el mismo, ó lo que es lo mismo, todas las resultantes que en cada una de las posiciones determinemos, pasarán por este punto. Este punto se llama centro de fuerzas paralelas. Más adelante veremos la manera general de determinar este centro, cuando tratemos del centro de gravedad, que no es otra cosa que el centro de un sistema de fuerzas paralelas.

Descomposicion de una fuerza en dos ó más paralelas.

40. Puede tambien descomponerse una fuerza dada en dos ó más fuerzas paralelas. Si no se conocen los puntos de aplicacion de las componentes, el problema es indeterminado. Si la fuerza es R (fig. 19), y los puntos A y B, los de aplicacion de las componentes, encontraremos Q por la proporcion $\frac{R}{AB}=\frac{Q}{AC}$. Hallada Q, la relacion $P=R-Q$, nos dará P.

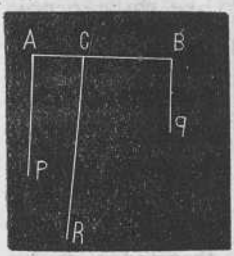


Fig. 19.

Si el punto C de aplicacion de la fuerza R que se quiere descomponer, no está entre los puntos A y B, (fig. 20), la R es la diferencia entre P y Q y calcularemos

Q por la proporcion $\frac{R}{AB}=\frac{Q}{AC}$; y P=R+Q nos dará P.

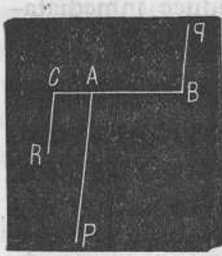


Fig. 20.

Si quisiéramos descomponer una fuerza en más de dos, la descompondríamos primero en dos, luégo descompondríamos una de éstas ó las dos y así sucesivamente. El problema sería indeterminado, y como la resultante es igual á la suma de las componentes, pueden darse arbitrariamente todas las componentes ménos una; y es claro que ésta ha de ser tal, que sumada con todas las demas, dé la resultante, ó sea la fuerza que se quiere descomponer.

Aplicaciones de la teoría de las fuerzas paralelas.

41. Por medio de la teoría de las fuerzas paralelas se pueden demostrar algunos teoremas de Geometría, lo cual nos indica el enlace que existe entre ésta y la Mecánica, y los auxilios que estas ciencias pueden prestarse una á otra.

Como ejemplo, vamos á demostrar por medio de la teoría de las fuerzas paralelas, la proposicion fundamental de la teoría de las trasversales, conocida en Geometría con el nombre de teorema de Ptolomeo, cuyo enunciado es el siguiente:

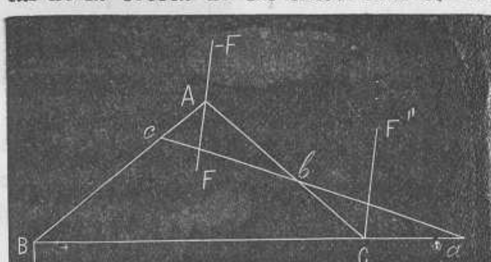


Fig. 21.

Una trasversal *abc* (fig. 21), encuentra á los tres lados de un triángulo en tres puntos *a*, *b*, *c*, y determina seis secmentos; *a*B, *a*C en la

BC; bC, bA en la AC; cA, cB en la AB; en los cuales se verifica que el producto de tres secmentos no consecutivos es igual al producto de los otros tres; es decir, que

$$aC \times bA \times cB = aB \times bC \times cA.$$

Para demostrarlo, en los extremos B y C del lado que la trasversal encuentra en su prolongacion apliquemos dos fuerzas paralelas y de sentido contrario, cuya relacion vamos á encontrar. La resultante de estas dos fuerzas estará aplicada en un punto de la prolongacion de BC. En el punto A apliquemos dos fuerzas iguales y contrarias F y—F, que se destruyen, las cuales en nada modificarán la resultante de las fuerzas F′ y F″; para encontrar esta resultante, hallaremos la de F′ y F, luégo la de F″ y —F, y compondremos estas dos resultantes.

La fuerza F es arbitraria, y podrá satisfacer á la relacion

$$\frac{F}{F'} = \frac{cB}{cA},$$

con lo cual la resultante de F y F′ pasará por c.

Tomemos la fuerza F″ de modo que la resultante de F″ y—F pase por el punto b, lo cual exige que

$$\frac{F''}{F} = \frac{bA}{bC}.$$

La resultante de F y F′ pasa por el punto c, la de—F y F″ pasa por el punto b; la resultante de estas dos resultantes, ó sea la de las fuerzas F′ y F″, tendrá su punto de aplicacion en un punto de la recta cb; hemos visto que tambien está aplicada en un punto de la BC, luego estará aplicada en el punto a, interseccion de estas dos rectas; y tendremos

$$\frac{F'}{F''} = \frac{aC}{aB};$$

multiplicado estas tres relaciones, tendremos

$$\frac{F}{F'} \times \frac{F''}{F} \times \frac{F'}{F''} = 1 = \frac{cB}{cA} \times \frac{bA}{bC} \times \frac{aC}{aB}$$

ó

$$aB \times bC \times cA = aC \times cB \times bA;$$

lo que nos proponíamos demostrar.

42. Tambien podemos demostrar por la teoría de las fuerzas paralelas la siguiente proposicion, muy importante en la teoría de las superficies regladas.

Sobre los lados opuestos AB, CD (fig. 22), de un cuadrilátero alabeado, tomemos arbitrariamente dos puntos a, c, y unámoslos por la recta ac; tomemos sobre los otros dos lados AD, BC, dos puntos tales, que se tenga entre los ocho secmentos así determinados, la relacion

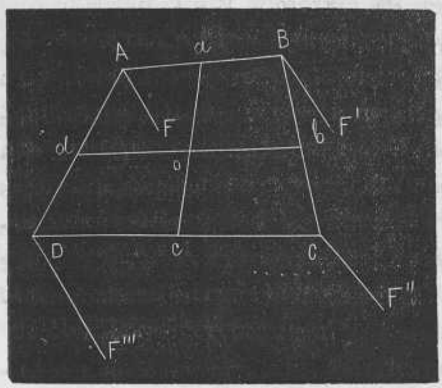


Fig. 22.

$$\frac{\frac{aA}{aB}}{\frac{Dc}{cC}} = \frac{\frac{Cb}{Bb}}{\frac{Dd}{dA}}, \text{ ó } \frac{Aa}{aB} \times \frac{Bb}{bC} \times \frac{Cc}{cD} \times \frac{Dd}{dA} = 1;$$

y tiremos la bd. Queremos demostrar que las dos rectas ac, bd están en un plano, ó que se cortan en un punto o.

Esto se demostrará haciendo ver que este punto o es el centro de cuatro fuerzas paralelas, aplicadas respectivamente en los vértices A, B, C, D, del cuadrilátero. Tomemos arbitrariamente la primera fuerza F y determinemos la segunda F′, de modo que su resultante pase por el punto a, lo cual exige que

$$\frac{Aa}{aB} = \frac{F'}{F}.$$

Determinemos la tercera fuerza F″, de modo que la resultante de F″ y F′ pase por el punto b, condicion que nos dará:

$$\frac{Bb}{bC} = \frac{F''}{F'}.$$

La fuerza F‴ quedará determinada por la condicion de que la resultante de F″ y F‴, pase por el punto *c*, lo cual nos dará

$$\frac{Cc}{cD}=\frac{F'''}{F''}.$$

Para encontrar la resultante de las cuatro fuerzas F, F′, F″, F‴, hallaremos la resultante de F y F′, que estará aplicada en el punto *a*; la de F″ y F‴, que estará aplicada en el punto *c*. La resultante de estas dos resultantes, estará aplicada en algun punto de la *ac*.

Podemos tambien componer F′ y F″, que dará una resultante aplicada en *b*; despues F‴ y F, cuya resultante estará aplicada al punto *d*, porque en virtud de la ecuacion de condicion correspondiente, tendremos

$$\frac{Dd}{dA}=\frac{\frac{Cb}{bB}\times\frac{Dc}{cC}}{\frac{Aa}{aB}}=\frac{\frac{F'}{F''}\times\frac{F''}{F'''}}{\frac{F'}{F}}=\frac{F}{F'''};$$

luego el punto de aplicacion de la resultante general está situado en un punto de la recta *bd*. Este punto está á la vez sobre las dos rectas *ac*, *bd*; luego estará en su interseccion *o*, y los cuatro puntos *a*, *b*, *c*, *d* están situados en el plano de estas dos rectas.

43. La superficie engendrada por una recta móvil *ac*, que se mueve apoyándose á la vez sobre los dos lados opuestos de un cuadrilátero alabeado ABCD, y dividiendo estos lados en secmentos que satisfagan á la condicion

$$\frac{\frac{aA}{aB}}{\frac{Dc}{cC}}=K$$

siendo K un número constante, puede tambien engendrarse por una recta *bd* que se mueva, apoyándose en los otros dos lados del cuadrilátero, y los divida en segmentos que cumplan con la condicion

$$\frac{\frac{Cb}{bB}}{\frac{Dd}{dA}}=K.$$

Esta superficie es una superficie reglada de segundo grado. Puede considerarse como engendrada por una recta móvil que se apoye á la vez sobre tres rectas AD, *ac*, BC, no situadas en un plano, ó por una recta móvil que se apoye sobre las tres rectas AB, *bd*, DC, no situadas en un plano, y es, en su consecuencia, un *hiperboloide de una hoja*. Si la relacion K es igual á la unidad, la recta móvil *ac* es constantemente paralela á un plano trazado paralelamente á los lados BC, DA; tambien *bd* es constantemente paralela al plano trazado paralelamente á los lados AB, CD. La superficie tiene entónces dos planos directores, y es un *paraboloide hiperbólico*.

LECCION TERCERA.

Teoría de los pares.—Traslacion de los pares.—Trasformacion de los pares. Su medida.—Composicion de los pares situados en un mismo plano ó en planos paralelos.—Composicion de los pares situados en planos concurrentes. Paralelógramo de los pares.—Descomposicion de un par en dos situados en planos dados.

Teoría de los pares.

44. Hemos visto que se llama par de fuerzas un sistema de dos fuerzas paralelas iguales y contrarías, aplicadas en dos puntos A y B, invariablemente unidos entre sí, tal como el (P, —P) (fig. 23). Brazo de palanca de un par, es la perpendicular comun AB á las direcciones de las fuerzas. Se llama momento de un par el producto $P \times AB$, de una de las fuerzas por su brazo de palanca.

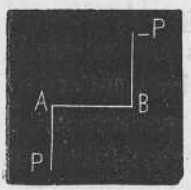


Fig. 23.

El momento de un par $P \times AB$, puede representarse por el área de un paralelógramo que tenga P por base y AB por altura, es decir, por el área del paralelógramo que tenga por lados opuestos las fuerzas P, y—P.

Sabemos que la accion de un par no puede ser contrabalanceada por una sola fuerza, y que por lo tanto no puede compararse de ningun modo un par con una simple fuerza. M. Poinsot ha designado esta nueva causa de movimiento con el nombre de par, y ha hecho de la teoría de los pares, una de las partes más importantes de sus célebres elementos de Estática; cuyas doctrinas seguiremos nosotros en la exposicion de esta parte de la ciencia.

En la teoría de los pares debemos considerar la traslacion, la trasformacion y la composicion de los pares. Lo que vamos á decir de los pares, es independiente del efecto que producen sobre los cuerpos; pero si queremos formarnos idea de los sentidos respectivos de diferentes pares situados en el mismo plano, podemos suponer los puntos medios de sus brazos de palanca fijos, y su efecto será hacer girar su brazo de palanca al rededor de su punto medio; así distinguiremos fácilmente los que tienden á hacerle girar en un sentido, de los que tienden á hacerle girar en el opuesto. Esto, sin perder de vista que no hay ningun punto fijo realmente, y que la idea de la rotacion no es esencial al concepto del par, y sólo la emplearemos cuando haya que distinguir los sentidos de los pares.

Convendremos en llamar pares positivos á los que tienden á hacer girar á los brazos de palanca de izquierda á derecha, y afectaremos su momento del signo +; y pares negativos, cuyos momentos supondremos afectados del signo —, serán los que tienden á hacer girar á su brazo de palanca de derecha á izquierda.

Traslacion de los pares.

45. Hemos visto que una fuerza puede trasladarse á cualquiera de los puntos de su direccion, con tal que este nuevo punto esté invariablemente unido con el primero. Una propiedad análoga tienen los pares como vamos á demostrar.

Un par puede trasladarse á cualquiera parte de su plano ó á otro plano paralelo, y hacerle girar como se quiera en este plano, sin que su efecto sobre el cuerpo á que está aplicado cambie, con tal que el nuevo brazo de palanca esté invariablemente unido con el primero.

Este teorema, de un uso muy frecuente en la teoría de los pares, lo descompondremos en dos partes para su demostracion.

Sea primero el par (P,—P) y AB (fig. 24), su brazo de palanca. En el plano N paralelo al M tracemos CD igual y paralela á AB, tiremos las rectas AD y BC; i, será el punto medio de cada una de ellas.

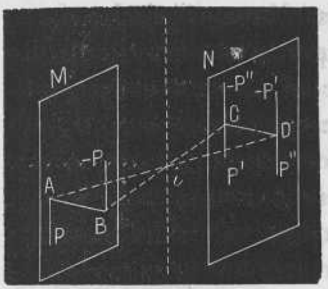


Fig. 24.

Apliquemos sobre CD dos pares (P′,—P′) y (P″,—P″) contrarios é íguales entre sí y al propuesto (P,—P); el estado del sistema no habrá variado, porque (P′,—P′) y (P″—P″) se destruyen ellos mismos. Las fuerzas P y P″ dan una resultante igual á P+P″ aplicada en i;—P y—P″ dan una resultante igual á—(P+P″), aplicada tambien en i, que es igual y opuesta á la anterior; luego los pares (P,—P) y (P″—P″) se destruyen, y queda el par (P,—P′), que no es más que el par propuesto (P,—P) trasladado de modo que su brazo de palanca AB venga á coincidir con CD, paralelo é igual á él.

En segundo lugar, sea (P,—P) un par aplicado perpendicularmente sobre AB, (fig. 25). Por el punto medio i de AB tracemos una recta CD=AB que forme con ésta un ángulo cualquiera, y supongamos estas rectas invariablemente unidas. Apliquemos sobre CD como ántes dos pares (P′,—P′) y (P″,—P″) opuestos, iguales entre sí é iguales al dado (P,—P). La resultante de las fuerzas iguales P y—P″ seguirá la direccion de la bisec-

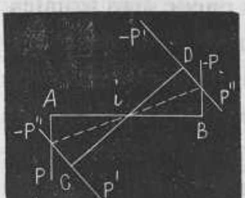


Fig. 25.

triz del ángulo que forman y pasará por el punto i, donde la podremos suponer aplicada; la de las fuerzas P″ y—P tambien sigue la direccion de la bisectriz del ángulo que forman, pasa por el punto i, donde la supondremos aplicada, y como es igual y opuesta á la resultante anterior, se destruye con ella; luégo se pueden suprimir los pares (P,—P) y (P″,—P″,) y queda el par (P′,—P′) igual al propuesto y aplicado sobre CD, que no es más que el par primitivo al cual se ha hecho girar en su plano, de modo, que su brazo de palanca AB venga á colocarse en la posicion CD.

De estas dos proposiciones reunidas resulta el teorema enunciado, en virtud del cual, un par cualquiera, sin que su efecto cambie, puede trasportarse en su plano ó llevarse á qualquier otro plano paralelo, en la posicion que se quiera: porque se puede primero trasladarle paralelamente á sí mismo, hasta que el punto medio de su brazo de palanca se coloque en la posicion que se quiera, y luégo hacerle girar sobre este punto hasta que tome la posicion deseada.

Trasformacion de los pares: su medida.

46. Un par (P,—P), cuyo brazo de palanca es AB (fig. 26), puede trasformarse en otro (Q,—Q), cuyo brazo de palanca sea BC; siempre que se tenga

$$P \times AB = Q \times BC, \text{ ó } P : Q :: BC : AB;$$

es decir, que los momentos de los dos pares sean iguales, ó que las fuerzas P y Q estén en razon inversa de los brazos de palanca de los pares respectivos.

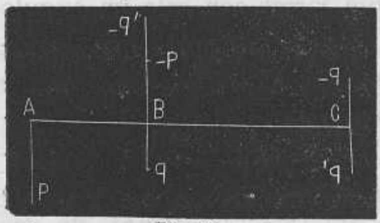


Fig. 26.

Tomemos BC en la prolongacion de AB y apliquemos sobre BC dos pares iguales y contrarios (Q,—Q) y (Q′,—Q′); su efecto será nulo y no se habrá cambiado el efecto del par propuesto. Pero si tomamos la fuerza Q, de modo que P y Q esté en razon inversa de los brazos de palanca respectivos, las fuerzas P y Q′ darán una resultante (P+Q′) aplicada en B, que se destruye con la—(P+Q′), que pasa por el mismo punto; suprimiéndolas, queda el par (Q,—Q), cuyo brazo de palanca es BC, y que reemplaza al par propuesto (P,—P).

47. Las intensidades de dos pares (P,—P) y (Q,—Q) que obran sobre brazos de palanca iguales, son como las fuerzas P y Q (fig. 27). Supongamos que las fuerzas P y Q son comensurables, y que contienen, la primera 4 veces la comun medida y la segunda 3 veces; tendremos, P : Q : : 4 : 3. Ahora el par (P,—P) es equivalente á la suma de 4 pares iguales, á la medida comun, aplicados uno sobre otro; y el par (Q,—Q) equivale del mismo modo á 3 pares sobrepuestos: los esfuerzos de estos pares serán como 4 : 3, ó como P : Q. Si las fuerzas son incomensurables, haremos el razonamiento conocido para aplicar el teorema de los límites y tendremos el principio demostrado en general.

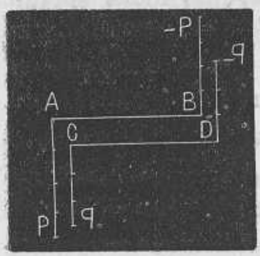


Fig. 27.

48. De estos dos principios se deduce facilmente que los esfuerzos de los pares son proporcionales á sus momentos.

Sean los pares (P,—P) y (Q,—Q), y p y q sus brazos de palanca: el par (Q,—Q) que actúa sobre q, equivale al par $\left(\frac{q}{p}Q, -\frac{q}{p}Q\right)$ que actúa sobre el brazo de palanca p, porque $Qq = \frac{q}{p}Q \times p$. De modo, que en vez de los pares propuestos tenemos los (P,—P) y $\left(\frac{q}{p}Q, -\frac{q}{p}Q\right)$

que obran sobre el mismo brazo de palanca p. Sus esfuerzos, que llamaremos M y N, son entre sí como las fuerzas, y tendremos

$$\frac{M}{N}=\frac{P}{\frac{q}{p}Q}, \text{ ó } \frac{M}{N}=\frac{Pp}{Qq}.$$

49. De la última proporcion se deduce, que la medida de la energía ó esfuerzo de un par es su momento.

Porque si tomamos por unidad para medir la energía de los pares, la de uno que tiene su fuerza igual á la unidad de fuerza y un brazo de palanca igual á la unidad de longitud, en la proporcion de arriba, si es N el escogido por unidad, tendremos; $N=1$, $Q=1$, $q=1$, y será $\frac{M}{1}=\frac{Pp}{1\times1}$, ó $M=Pp$; es decir, que el esfuerzo del par $(P,-P)$ contendrá tantas veces á la unidad escogida para los esfuerzos de los pares, como su momento Pp contiene á la unidad de momentos 1×1.

Conviene tener presente, que en este modo de medir los pares, el brazo de palanca, es perpendicular á la direccion de la fuerza. Algunas veces se toman brazos de palanca oblícuos, pero para ser comparables es preciso que los ángulos que forman con las fuerzas sean iguales; y entónces estos brazos oblícuos serán proporcionales á los rectangulares, y podrán reemplazarlos.

Composicion de los pares situados en el mismo plano ó en planos paralelos.

50. Dos pares situados como se quiera en un mismo plano ó en planos paralelos, se componen siempre en uno sólo, que es igual á su suma, si son del mismo sentido; ó igual á su diferencia si son de sentidos contrarios.

En efecto, siempre podremos llevar los dos pares á un mismo plano y colocarlos de modo que sus fuerzas sean paralelas; y cambiarlos en otros equivalentes que tengan un mismo brazo de palanca, y entónces aplicarlos el uno sobre el otro.

Sean P y Q las fuerzas componentes de los pares, p y q sus brazos de palanca respectivos; sea D el brazo de palanca comun á los dos pares trasformados. En vez del par $(P, -P)$ con el momento Pp, tendremos el par equivalente $(P', -P')$ con el momento $P'D=Pp$. Del mismo modo, en vez de $(Q, -Q)$ con el momento Qq, tendremos el par $(Q', -Q')$ con el momento $Q'D=Qq$: estos pares trasformados, aplicados el uno sobre el otro con el mismo brazo de palanca D, darán el par único $[(P'+Q'), -(P'+Q')]$, cuyo momento será:

$$(P'+Q')\,D=P'D+Q'D=Pp+Qq.$$

Así, el momento del par resultante es igual á la suma de los momentos de los pares componentes; ó á su diferencia, si las fuerzas P' y Q' actúan en sentido contrario.

51. Combinando de este modo los pares dos á dos, tendremos, que tantos pares como se quieran situados en un mismo plano, ó en planos paralelos, se reducen siempre á uno sólo, igual á la suma de los que tienden á hacer girar su brazo de palanca en un sentido, ménos la suma de los que tiendan á hacerle girar en el opuesto.

52. Siguiendo una marcha inversa podremos descomponer un par dado en otros, situados en un mismo plano ó en planos paralelos. Pueden tomarse á voluntad todos los pares componentes ménos uno, para lo cual, basta que la suma de los que actúan en un sentido, ménos la suma de los que actúan en el opuesto, sea igual al par dado.

Composicion de los pares situados en planos concurrentes.

53. Dos pares situados como se quiera en dos planos que se cortan, se componen siempre en uno sólo. Y si

representamos los momentos de estos pares por las longitudes respectivas de dos rectas que formen un ángulo igual al de los dos planos, y sobre ellas construimos un paralelógramo, el momento del par resultante estará representado por la diagonal de este paralelógramo; y el plano del par resultante formará, con los planos de los pares componentes, dos ángulos, que tendrán por medida los ángulos que la diagonal del paralelógramo forma con los lados de éste.

Supongamos los pares propuestos situados en los planos MAG y NAG, cuya interseccion es AG (fig. 28). Supongamos trasformados los dos pares en otros equivalentes que tengan el mismo brazo de palanca. Llevemos el par (P,—P) situado en el plano

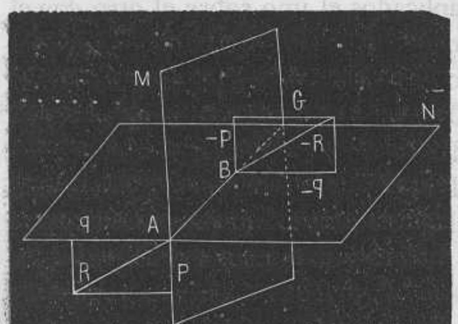


Fig. 28.

MAG, á ángulo recto sobre la interseccion AG; de manera, que su brazo de palanca tome la posicion AB. El par (Q,—Q) situado en el plano NAG, llevémosle del mismo modo sobre la interseccion, y como su brazo de palanca es ya igual al del otro, coincidirá con AB. Las dos fuerzas P y Q, aplicadas en el punto A, se componen en una sola R, que pasa por el mismo punto, y es igual á la diagonal del paralelógramo AR construido sobre P y Q; del mismo modo — P y — Q se componen en una sola—R, que pasa por B, y está representada por la diagonal del paralelógramo construido sobre ellas; y que es igual, paralela y contraria á la primera; tendremos pues, el par (R,—R) que reemplaza á los dados (P,—P) y (Q,—Q), y que tiene el mismo brazo de palanca AB; y por lo tanto, sus momentos respectivos son como las fuerzas P, Q, R.

Luego si representamos los momentos de los pares componentes por las líneas AP y AQ, que les son proporcionales, el momento del par resultante estará representado por la diagonal AR del paralelógramo APQR, construido sobre estas líneas. Las líneas AP, AQ, AR, forman ángulos rectilíneos que miden los ángulos diedros que forman los tres planos, de modo que el plano del par resultante divide el ángulo de los otros dos planos, como la diagonal AR divide el ángulo PAQ de los lados adyacentes.

54. Ahora es ya facil reducir á uno sólo tantos pares como se quiera, aplicados á un cuerpo de un modo cualquiera en el espacio; porque componiéndoles sucesivamente de dos en dos, se llegará necesariamente á un par único, de magnitud y plano conocidos, y que será equivalente á todos los propuestos.

Descomposicion de un par en dos situados en planos dados.

55. Propongámonos ahora descomponer un par dado en dos. En general, el problema es indeterminado si no se dan las direcciones de los planos en que han de estar los pares en que se quiere descomponer el dado. Si estos planos son dados y se cortan con el del par propuesto en una misma recta, ó rectas paralelas, se podrá hacer esta descomposicion siguiendo en un órden inverso las operaciones que hemos ejecutado para la composicion de dos pares. Tambien puede emplearse el siguiente método, que es muy sencillo y es el que generalmente se usa.

Sea AZ (fig. 29), la interseccion comun de los tres planos; cortémoslos por el plano XAY, y sean las intersecciones las rectas AX, AV, AY; y ZV el plano del par propuesto.

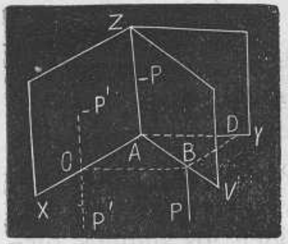


Fig. 29.

Cualquiera que sea la posicion de éste en el plano, se puede llevar de manera que la fuerza —P coincida con la interseccion; la direccion de la otra fuerza P, encontrará á AV, en B, por ejemplo, y tendremos el par (P,—P) aplicado de un modo cualquiera sobre AB; tomando esta línea como diagonal, construyamos el paralelógramo CABD; apliquemos en C dos fuerzas contrarias é iguales entre sí, y á la P; el efecto del par no se habrá alterado; y tendremos en vez del par dado (P,—P), los pares (P',—P) aplicado sobre AC y (P,—P') aplicado sobre CB, que puede trasportarse paralelamente á sí mismo hasta el plano ZAY, y sobre AD=CB, y tendremos, en vez del par (P,—P), aplicado sobre la diagonal AB, dos pares (P',—P) y (P,—P'), compuestos de fuerzas iguales, aplicadas en los planos dados sobre las rectas AC y AD.

Si el plano XAY se hubiera tirado perpendicularmente á AZ, las fuerzas de los tres pares serian perpendiculares á las líneas AX, AV y AY; y como las fuerzas son iguales, los momentos de los pares serian como los brazos de palanca AX, AV, AY; y resultará una nueva demostracion del teorema de la composicion de los pares situados en planos concurrentes.

LECCION CUARTA.

Representacion de los pares por sus ejes.—Composicion de los pares bajo este nuevo aspecto. — Paralelógramo de los pares. — Relaciones entre sus elementos.—Composicion de un número cualquiera de pares. —Paralelepípedo de los pares y relaciones entre sus elementos.—Aplicacion de la teoría de los pares á la composicion de las fuerzas.—Reduccion de todas las fuerzas aplicadas á un sólido invariable, á una fuerza y un par.—Cómo se logra que el plano del par sea perpendicular á la direccion de la fuerza.—Eje central.—Determinacion gráfica del eje central. — Condiciones para que todas las fuerzas del sistema tengan resultante única.—Reduccion de todas las fuerzas del sistema á dos no situadas en un plano, y que una de ellas pase por un punto dado.—Dos fuerzas no situadas en un plano, no pueden tener resultante única.

Representacion de los pares por sus ejes

56. En un par debemos considerar la direccion de su plano, su energía, que está medida, como hemos demostrado por su momento, y el sentido en que tienda á hacer girar su brazo de palanca, ó al cuerpo sobre el que ejerce su accion. Vamos á ver cómo estos tres elementos, necesarios por determinar un par, pueden expresarse por su eje.

Si tiramos una perpendicular cualquiera al plano de un par, esta perpendicular, que se llama *eje del par*, determinará la posicion de éste, porque puede suponerse situado en cualquiera de los planos paralelos que resultan, tirando planos perpendiculares á la recta. Es claro, segun esto, que se conocerá la posicion de un par cuando se conozca la direccion de su eje, porque cualquier plano perpendicular al eje podrá tomarse por el del par.

La posicion de diferentes pares cuyos planos son paralelos, estará dada por una sola recta que sea perpendicular á todos ellos y que será su eje comun.

Si los planos de los pares tienen direcciones cualesquiera, supondremos para mayor claridad, que por un punto A del espacio, se tiran planos paralelos á los planos de los pares, y que en este punto, que consideraremos como el centro de todos los pares, levantamos perpendiculares á cada uno de estos planos, y tendremos, que todos los ejes partirán del punto A, que será el orígen de todos ellos. Estos ejes formarán entre sí ángulos iguales á los que miden los diedros de los planos de los pares.

Ademas, si á partir del punto A (fig. 30), se toman sobre estas rectas, longitudes AL, AM, AN proporcionales á los momentos respectivos de estos pares, cada una de estas líneas, tal como la AL, bastará para determinar la magnitud ó energía del par y la direccion de su plano.

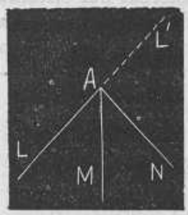


Fig. 30.

Esta línea AL puede tambien indicar el sentido del par, para lo cual nos bastará un convenio semejante al que hicimos para las fuerzas. En estas supusimos, que tiraban de su punto de aplicacion en el sentido de la recta que indica su direccion; aquí para un par L supondremos que colocando el observador los piés sobre el plano del par y el ojo en el punto L, mirando de L á A, ve girar el plano de izquierda á derecha en el sentido en que giran generalmente todos los instrumentos de rotacion, como llaves, tornillos etc., y en el que un observador que tuviera el ojo en el polo y los piés háca el ecuador, veria girar los astros por el movimiento diurno, es decir, de oriente á occidente. Pudiéramos adoptar el convenio contrario, pero una vez establecido éste, le seguiremos invariablemente en estas lecciones.

Si alguno de los pares tomado sobre un eje A L tuviera sentido contrario al que acabamos de convenir, bastaria tomarlo en la prolongacion del eje A L' para que quedara en el sentido convenido. De modo, que siempre los pares tenderán á hacer girar de izquierda á derecha.

Vemos, pues, que el eje de un par nos da la direccion, la energía y el sentido de este par, con lo cual queda completamente determinado.

Composicion de los pares bajo este nuevo aspecto.—Paralelógramo de los pares. Relaciones entre sus elementos.

57. La representacion de los pares por sus ejes reduce la composicion de los pares á la composicion de simples fuerzas. Es claro, que si los planos de los pares son paralelos, tendrán todos un eje comun, y el eje del par resultante será igual á la suma algébrica de los ejes de los pares componentes y estará contada sobre el mismo eje comun. Como todos los teoremas de la composicion de los pares cuyos planos no sean paralelos, se reduce á la composicion de dos pares concurrentes, vamos á demostrar el siguiente, que se llama teorema del paralelógramo de los pares, del cual deduciremos todos los demas.

58. Si dos pares S y M (fig. 31), están representados por sus ejes AS y AM, estos dos pares se componen en uno G, representado en magnitud, direccion y sentido por su eje AG, que es la diagonal del paralelógramo ASMG.

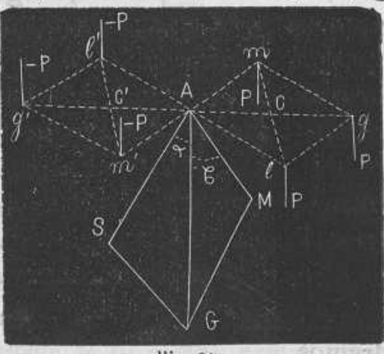


Fig. 31.

En efecto, tracemos las líneas mm', ll' perpendiculares á AM y SM, proporcionales á éstas y que tenga su punto medio en A; y construyamos los paralelógramos Ag y Ag'; estos paralelógramos serán iguales entre sí y semejantes al AG, y por consiguiente, gg' será perpendicular y proporcional á la diagonal AG y tendrá su punto medio en A.

Sobre ll' y mm' como brazos de palanca y en planos perpendiculares al de la figura, apliquemos dos pares compuestos de fuerzas iguales y que tiendan á hacer girar á sus brazos de palanca de izquierda á derecha, como hemos convenido. Estos pares son los que representan los ejes AS y AM, porque sus planos son perpendiculares á estos lados y sus momentos proporcionales á los mismos, teniendo ademas los sentidos convenidos.

Las fuerzas paralelas y del mismo sentido P y P, que obran sobre lm, se componen en una 2P, aplicada en su punto medio C, y las —P y —P, que obran sobre $l'm'$, se componen en otra —2P, igual y paralela á 2P, aplicada en C'; tendremos, pues, el par (2P, —2P), aplicado sobre la línea CC', ó simplemente el par (P, —P), que obra sobre gg'. Este par es evidentemente perpendicular y proporcional á la diagonal Ag y ademas tiende á hacer girar de izquierda á derecha á su brazo de palanca; luego Ag es el eje del par resultante.

59. Del mismo modo que en el paralelógramo de las fuerzas, el par resultante no puede ser cero, sin que lo sean por separado los pares componentes.

60. Las relaciones que existen entre los pares componentes y el par resultante, son las que existen entre los lados y la diagonal del paralelógramo SAMG, que representan sus ejes. Si el ángulo que forman los pares componentes es recto, AS y AM serán perpendiculares y en el rectángulo SAMG tendremos

$$AG^2 = AS^2 + AM^2:$$

y llamando α y β los ángulos que forma la diagonal con los lados adyacentes, serán:

$$AS=AG\cos\alpha, \qquad AM=AG\cos\beta.$$

Si para simplificar designamos los momentos respectivos por las letras S, M, y G, será:

$$G^2=S^2+M^2, \quad ó \quad G=\sqrt{S^2+M^2},$$

$$S=G\cos\alpha, \; M=G\cos\beta; \; ó \; \cos\alpha=\frac{S}{G}, \; \cos\beta=\frac{M}{G}.$$

Si el ángulo de los ejes de los pares componentes no es recto y le llamamos φ, tendremos

$$G^2=S^2+M^2+2SM\cos\varphi,$$

que nos dará el eje del par resultante G, conocidos que sean los ejes de los pares componentes y el ángulo φ que forman.

Si $\varphi=0$, $\cos\varphi=1$; $G^2=S^2+M^2+2SM$; ó $G=S+M$. Conforme con lo que sabíamos, porque los dos pares están en el mismo plano y son del mismo sentido, y se componen en uno igual á su suma.

Si $\varphi=\pi$, $\cos\pi=-1$; $G^2=S^2+M^2-2SM$, ó $G=S-M$; los pares componentes están en el mismo plano, son de sentido contrario, y se componen en uno igual á su diferencia; resultado conforme tambien con lo que sabíamos.

Composicion de un número cualquiera de pares. Paralelepípedo de los pares y relaciones entre sus elementos.

61. La composicion de un número cualquiera de pares se hará hallando el par resultante de dos de ellos, luégo el par resultante de éste y el tercero, luégo el de éste y el cuarto y así sucesivamente. Tambien podremos hallar el par resultante por la regla del polígono de los pares. En el caso que los pares componentes sean tres, podemos emplear la siguiente regla, llamada del paralelepípedo de los pares.

Tres pares, representados en cuanto á sus ejes y magnitudes, por las aristas contiguas de un paralelepípedo, se componen siempre en uno sólo representado, en cuanto á su eje y magnitud, por la diagonal de este paralelepípedo.

Sean AB, AE, y AC (fig. 32), los ejes de los pares componentes; construyamos sobre ellos el paralelepípedo AF. Los pares AB y AE se componen en uno AD, y éste y el AC, en el AF, que es el eje del par resultante del sistema; y está representado por la diagonal del paralelepípedo AF.

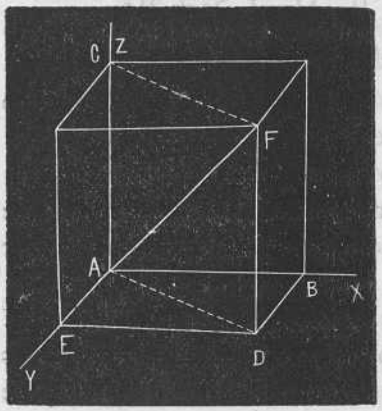


Fig. 32.

62. Tambien aquí como en el paralelepípedo de las fuerzas, para que el eje del par resultante sea cero, es preciso que lo sean por separado cada uno de los ejes de los pares componentes.

63. Las relaciones entre el eje del par resultante y los ejes de los pares componentes, son las que existen entre la diagonal y las tres aristas del paralelepípedo.

Si éste fuera rectángulo, llamando L, M, N los momentos de los pares componentes, y G el momento del par resultante, tendremos

$$G^2 = L^2 + M^2 + N^2.$$

Llamando λ, μ y ν, á los ángulos del eje del par resultante con los ejes de los pares componentes, tendremos

$$L = G\cos\lambda,\ M = G\cos\mu,\ N = G\cos\nu;$$

de donde

$$\cos\lambda = \frac{L}{G},\ \cos = \mu\frac{M}{G},\ \cos\nu = \frac{N}{G}.$$

Tenemos cuatro ecuaciones entre las siete cantidades L, M, N, G, λ, μ, ν. Dadas tres se podrá por ellas encontrar las cuatro restantes. En el caso de que los datos sean los tres ángulos, las ecuaciones sólo darán las relaciones entre las cantidades L, M, N y G.

Aplicacion de la teoría de los pares á la composicion de las fuerzas. Reduccion de todas las fuerzas aplicadas á un sólido invariable á una fuerza y un par.

64. Todas las fuerzas aplicadas á un sólido ó sistema invariable, pueden reducirse á una sola fuerza, que pasa por un punto dado, y á un par.

Sean P, $P_{,}$, $P_{,,}$, $P_{,,,}$... las fuerzas aplicadas de un modo cualquiera á un sólido ó sistema invariable. Consideremos primero la P aplicada en B (fig. 33); tomemos arbitrariamente un punto A y apliquemos en él dos fuerzas contrarias P y —P iguales y paralelas á la P. Es claro que el sistema no habrá cambiado, y en vez de la fuerza P aplicada en B tenemos la fuerza P aplicada en A, y el par (P,—P) actuando sobre la recta AB; traslademos el par á cualquiera parte de su plano, ó á un plano paralelo al suyo, y nos quedará en el punto A la fuerza P, igual y paralela á la P, y que podremos considerar como la misma P trasladada paralelamente á sí misma del punto B al punto A.

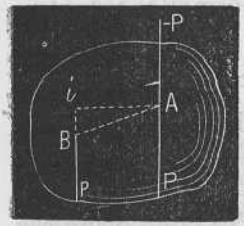


Fig. 33.

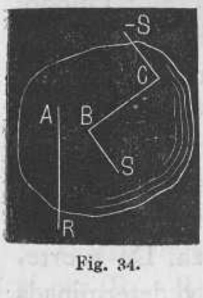


Fig. 34.

Repitiendo con las fuerzas $P_{,}$ $P_{,,}$... las mismas trasformaciones, todas se trasladarán paralelamente á sí mismas al punto A, y ademas como cada traslacion produce un par, tendremos tantos de éstos como fuerzas. Todas las fuerzas aplicadas al punto A se componen en una sola R, y todos los pares en uno sólo (S,—S), cuyo brazo de palanca es BC (fig. 34).

Cómo se logra que el plano del par sea perpendicular á la direccion de la fuerza. Eje central.

65. Cualquiera que sea el punto escogido A, la resultante R de todas las fuerzas P, $P_{,}$, $P_{,,}$..... del sistema, será la misma; porque variando la posicion de este punto, la resultante se trasladará paralelamente á ella misma en las diferentes posiciones; pero el par (S,—S) será distinto para cada posicion del punto A, por ser diferentes los brazos de palanca de los pares componentes, y formar entre sí diferentes ángulos. Veamos si entre todas estas posiciones del punto A, hay alguna en la cual el plano del par resultante es perpendicular á la direccion de la resultante. Para conseguirlo, despues de reducidas todas las fuerzas del sistema á una sola fuerza R, y á un sólo par (S,—S) con relacion al punto A, descompongamos el par (S,—S) en dos, uno (T,—T) cuyo plano sea perpendicular á la direccion de la resultante, y otro (V,—V) situado en un plano que pase por la direccion AR de ésta. Si en el plano en que se encuentran el par (V,—V) y la fuerza R, trasladamos ésta de A á O, de tal modo, que el par (R,—R) que nazca de esta traslacion, sea igual y contrario al (V,—V), estos dos pares se destruirán y quedará sólo la fuerza R aplicada en O, y el par (T,—T), que seguirá siendo perpendicular á ella. Por consiguiente, todas las fuerzas del sistema son siempre reducibles á una sola fuerza y á un sólo par, cuyo plano es perpendicular á la direccion de la fuerza. De suerte, que hay siempre en el espacio una cierta y determinada recta OR que puede representar á la vez la direccion de

la resultante y el eje del par resultante. Esta recta recibe el nombre de *eje central*.

Esta reduccion al eje central de todas las fuerzas del sistema, es única; es decir, que no hay ningun otro lugar en el espacio para el cual el par resultante sea perpendicular á la resultante; porque en cualquier sentido que se quiera trasportar la fuerza R fuera de su actual posicion OR, producirá un par (R,—R) perpendicular al (T,—T), y estos dos pares se componen en uno sólo, inclinado respecto del par (T,—T) y mayor que él, porque los dos pares componentes son rectangulares. Así que, no solamente el par (T,—T) es el único que puede ser perpendicular á la direccion de la resultante, sino que es tambien el más pequeño de todos los que pueden resultar con respecto á todos los puntos del espacio.

Determinacion gráfica del eje central.

66. Para encontrar gráficamente la posicion del eje central, sea OR la resultante de traslacion aplicada en el punto O, y OC el eje del par correspondiente que se puede hacer que pase tambien por el punto O. Descompongamos el par OC, como hemos dicho ántes, en dos pares OA y OB, el primero perpendicular á la resultante y el segundo dirigido segun la resultante; por el punto O tracemos una recta OX perpendicular al plano BOA, y sobre esta recta tomemos en sentido conveniente un punto O′, tal que se tenga $R \times OO' = OA$.

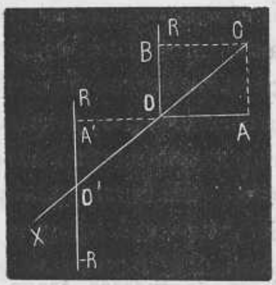


Fig. 35.

Traslademos la resultante R al punto O′; y tendremos el par (R,—R), cuyo momento es $R \times OO'$, y ésta resultante. Tomaremos la distancia OO′ de modo, que el eje

OA′ del par (R,—R) sea de sentido contrario á OA, y como son iguales, el sistema queda reducido á la fuerza O′R y al par OB, cuyo eje es paralelo á la resultante. La recta O′R es, por consiguiente, el eje central de las fuerzas dadas.

Determinado el eje central O′R, si se trasportan todas las fuerzas á un punto cualquiera O, distante de este eje de una cantidad $OO'=h$; la resultante de traslacion correspondiente OR, es la misma en magnitud y direccion, pero el eje del par resultante toma la direccion OC en un plano perpendicular á OO′; sea $H=OB$ el valor del par resultante mínimo, el valor G, del nuevo par OC se obtendrá observando, que el par componente BC, es igual $R\times OO'=Rh$; luego

$$G^2=H^2+R^2h^2$$

y llamando φ al ángulo BOC, la direccion de OC estará determinada por la relacion

$$tg\ \varphi=\frac{BC}{OB}=\frac{Rh}{H}.$$

Siendo el ángulo φ constante para una misma distancia OO′, tomada en una direccion cualquiera, contada desde el punto O′ en el plano perpendicular á O′R, el lugar de las rectas OC, para una misma distancia OO′, es el *hiperboloide de revolucion* que se obtiene haciendo girar la recta inclinada OC alrededor de O′R.

Condicion geométrica para que un sistema de fuerzas tenga resultante única, cuando éstas no se equilibran.

67. Estando reducidas todas las fuerzas del sistema á una fuerza R y un par (S,—S), supongamos que una fuerza R′ reduzca el equilibrio al par (S,—S) y á la fuerza R. Puesto que hay equilibrio entre las dos fuerzas R y R′ y el par (S,—S), vamos á probar que las dos fuerzas R y R′ deben formar un par contrario y equivalente al (S,—S)

y situado en el mismo plano de éste ó en un plano paralelo á él. En efecto, sólo pueden ocurrir tres casos: ó las fuerzas R y R′ son susceptibles de reducirse á una sola, y entónces esta fuerza no puede equilibrar al par (S, —S); ó se reducen á una sola y un par, y éste y el propuesto (S, —S) se reducirá á uno sólo, que no puede equilibrarse con la fuerza; ó ellas se reducen á un sólo par, que es lo único que puede suceder.

Es pues necesario que las fuerzas R y R′ formen un par; y para que se equilibre con el (S, —S) es preciso que esté situado en el mismo plano ó en un plano paralelo, porque en otro caso serian concurrentes y se compondrian en uno, sólo que no podria ser cero, sin que lo fueran los dos por separado (59), y no sería posible el equilibrio; luego la direccion de la resultante R debe ser paralela al plano del par resultante. Por lo tanto, para que el sistema de fuerzas propuesto tenga resultante única, es necesario que reducidas éstas á un par y una fuerza, ésta sea paralela al plano del par. Esta condicion es necesaria y en general suficiente, porque no siendo nula la resultante haremos, moviendo el par, qué una de sus fuerzas coincida con la resultante y compuesta con ella darán una fuerza igual á R + S, que compuesta con su paralela—S, dará al fin una resultante que será la misma R.

En el caso de ser R = 0, no hay resultante única, porque todas las fuerzas del sistema se reducen á un par, que no puede reducirse jamás á una sola fuerza.

Reduccion de todas las fuerzas de un sistema á dos no situadas en un mismo plano.

68. Un sistema cualquiera de fuerzas puede reducirse á dos no situadas en el mismo plano, una de las cuales pase por un punto dado. En efecto, llevemos el

par (S, —S) (fig. 36), paralelamente á sí mismo, hasta que el extremo B de su brazo de palanca, coincida con el punto A; las dos fuerzas R y S aplicadas en A, se componen en una T, no situada en el plano del par (S,—S); luego todas las fuerzas del sistema se reducen á las fuerzas T y—S, no situadas en el mismo plano. Esta reduccion de las fuerzas á dos no situadas en un mismo plano, puede hacerse de varios modos, y entre ellos hay uno, en que las direcciones de las fuerzas son perpendiculares; porque si imaginamos R descompuesta en dos, una V perpendicular al plano del par (S,—S) y otra U paralela á él; ésta y el par se reducen á una sola igual y paralela U; y todas las fuerzas del sistema se reducen á las V y—U, cuyas direcciones son rectangulares.

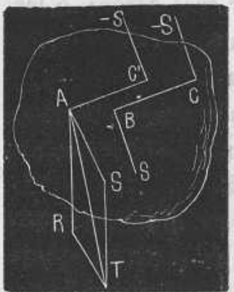


Fig. 36.

Dos fuerzas situadas en un mismo plano no pueden tener resultante única.

69. Para demostrarlo sean las fuerzas P y Q (figura 37), no situadas en un plano, y AB la perpendicular comun. Apliquemos en B dos fuerzas P y—P iguales y paralelas á la P; y en vez de esta, consideremos la P aplicada en B y el par (P,—P). Las P y Q se componen en la T que forma con el plano del par, el ángulo TBP, ángulo que no puede ser cero sin que Q lo sea; luego el sistema se reduce á la fuerza T y el par (P,—P), cuyo plano no puede nunca contener á ésta, ni ser paralela á ella; y por lo tanto, no tienen resultante única.

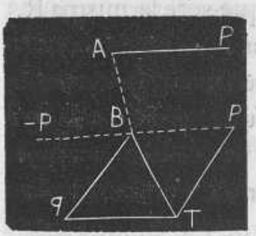


Fig. 37.

LECCION QUINTA

Leyes de equilibrio de un sistema libre.—Condiciones de equilibrio de un sistema de fuerzas paralelas situadas en un plano. Su resultante cuando no se equilibran.—Momentos de las fuerzas. Teorema de los momentos.—Equilibrio de fuerzas paralelas en el espacio.—Su resultante cuando no se equilibran.—Centro de fuerzas paralelas y cómo se determina.

Leyes de equilibrio de un sistema libre.

70. Dijimos en la primera leccion, que el objeto de la primera parte de la Estática es hallar las condiciones de equilibrio de un sólido ó sistema material invariable, libre, sobre el cual obran un número cualquiera de fuerzas; y los principios que hemos establecido, nos proporcionan todo lo necesario para encontrar inmediatamente estas condiciones que, como sabemos, serán ecuaciones que contendrán todos los elementos que determinan las fuerzas que obran sobre el sistema; es decir, las intensidades de las fuerzas, las coordenadas de sus puntos de aplicacion y los ángulos que sus direcciones forman con los ejes coordenados.

La teoría de los pares nos da medios de establecer con suma facilidad las leyes del equilibrio de un sólido ó sistema invariable libre.

Un par no puede jamás equilibrarse con una simple fuerza, cualquiera que sea su direccion en el espacio; y como todas las fuerzas del sistema, se reducen á una fuerza R y un par (S, —S), para que haya equilibrio, es necesario, que la resultante R sea nula por sí misma, y que el momento del par resultante sea tambien cero por sí mismo, ó lo que es lo mismo, que el par resultante sea nulo. De modo, que todas las fuerzas aplicadas al sistema, trasladadas paralelamente á ellas mismas á un punto cualquiera del espacio, deben equilibrarse entre sí, y todos los pares que producen al trasladarse á este punto, deben tambien equilibrarse entre sí.

Estas son las dos condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un sistema libre de forma invariable. El desarrollo de estas condiciones se reducirá á establecer las relaciones necesarias entre las fuerzas del sistema, para que la resultante y el par resultante sean iguales á cero.

Para desarrollar estas dos condiciones, deberíamos remontarnos al valor de la resultante R, y al valor del par resultante (S, —S); conservando las leyes que ligan la resultante á las componentes, y el par resultante á los pares componentes, y expresar luégo, que la fuerza R y el par (S, — S) son iguales á cero, y ver qué relaciones resultan de estas dos condiciones entre las fuerzas primitivas aplicadas al sistema. Se obtendrán de esta manera las condiciones del equilibrio, expresadas por medio de las fuerzas que entran en la cuestion, y ésta será la solucion del problema que nos proponíamos.

Podíamos desarrollar estas condiciones tratando primero el caso general, y deducir de él todos los casos particulares; pero es preferible empezar por los casos particulares, y venir á parar al caso general, porque esta marcha nos permitirá establecer várias proposiciones sobre los momentos, que son de un uso muy frecuente en la Estática.

Condiciones de equilibrio de un sistema de fuerzas paralelas situadas en un plano. Su resultante cuando no se equilibran.

71. Acabamos de ver que para que un sistema de fuerzas esté en equilibrio, es necesario que la resultante sea cero y el par resultante sea tambien cero. Apliquemos este principio á los diferentes casos que pueden ocurrir. Estos casos son cuatro; porque, ó las fuerzas son paralelas ó no lo son; siendo paralelas pueden estar todas en un plano ó no; y cuando no son paralelas pueden estar todas situadas en un plano ó tener direcciones cualesquiera en el espacio.

Principiemos por el caso de fuerzas paralelas situadas en un plano.

Sean P, P′, P″,.... las diferentes fuerzas paralelas (fig. 38), por un punto A, tiremos una perpendicular á todas ellas, que encuentre á sus direcciones en los puntos B, C, D.... y supongamos las aplicadas en estos puntos. Traslademos la fuerza P al punto A, para lo cual apliquemos en este punto dos fuerzas opuestas, iguales y paralelas á la P; podremos reemplazar esta fuerza por la P aplicada en A, y el par (P,—P), cuyo brazo de palanca es $BA=p$. Alejemos del punto A este par, y repitamos la misma operacion con las fuerzas P′, P″, P‴....; todas las fuerzas se trasladarán paralelamente á sí mismas al punto A, y alejando de él todos los pares resultantes, se verificará, que todas las fuerzas aplicadas en A, se compondrán en una sola igual á su

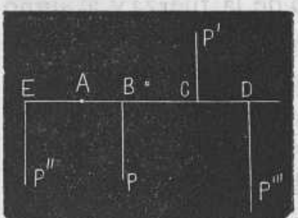


Fig. 38.

suma, que deberá ser cero para el equilibrio, y tendremos

$$P+P'+P''+P'''+...=0$$

por primera ecuacion del equilibrio.

Como los pares que provienen de la traslacion de las fuerzas están todos en un plano, darán un par resultante igual á la suma; y si llamamos p, p', p'' á los respectivos brazos de palanca, como este par resultante ha de ser cero, la suma de los momentos de los pares componentes ha de ser cero; y la segunda ecuacion del equilibrio será:

$$Pp+P'p'+P''p''+P'''p'''+.....=0.$$

72. Conviene tener presente, que las sumas que expresan estas ecuaciones son sumas algébricas. En las fuerzas, consideraremos como positivas las fuerzas que tiran hácia arriba de la recta AD, y como negativas las que tiran hácia abajo.

Para los signos de los momentos Pp, $P'p'$...., como son productos de dos factores, debemos atender al signo de cada uno de ellos, ó sea al signo de la fuerza y al signo del brazo de palanca. Es claro que si la fuerza P cambia de signo, conservando el mismo brazo de palanca, el par cambia de sentido, y el momento de signo. Si conservando su signo la fuerza, actúa á la izquierda del punto A, el par cambia de sentido; de modo, que considerando como positivos los brazos de palanca que se cuentan á la derecha del punto A, y como negativos los que se cuentan á la izquierda, cada vez que el brazo de palanca cambia de signo, el par cambia de sentido y el momento Pp cambia de signo. Si cambian á la vez de signo la fuerza y el brazo de palanca el par conserva su signo y su sentido.

73. Si las fuerzas no se equilibran, tendrán una resultante única R (67), y una fuerza igual y contraria —R, equilibrará al sistema; y si llamamos r á la distan-

cia de esta resultante al punto A, las dos ecuaciones del equilibrio serán

$$P+P'+P''+P'''+\ldots-R=0,$$

ó $$R=P+P'+P''+P'''+\ldots$$

$$Pp+P'p'+P''p''+P'''p'''+\ldots-Rr=0,$$

ó $$Rr=Pp+P'p'+P''p''+P'''p'''+\ldots$$

la primera nos dice que la resultante es igual á la suma algébrica de las componentes.

Despejando r en la segunda, tendremos la distancia de la resultante al punto A,

$$r=\frac{Pp+P'p'+P''p''+P'''p'''}{P+P'+P''+P'''}.$$

Momentos de las fuerzas. Teorema de los momentos.

74. Se llama *momento de una fuerza* P *con relacion á un punto* O (fig. 39), el producto de la fuerza P por la distancia OR de la fuerza al punto O, que se denomina centro de los momentos.

Fig. 39.

Se llama *momento de una fuerza* P *con respecto á una recta* QN (fig. 40), el producto de la proyeccion P', de la fuerza sobre un plano SS' perpendicular á la recta QN, por la distancia NR del punto en que la recta QN corta al plano, á la proyeccion P'; es decir, el momento de una fuerza con respecto á un eje QN, es el momento de la proyeccion de la fuerza sobre un plano perpendicular al eje, con respecto al punto en que el eje encuentra al plano de proyeccion. La distancia NR del pié del eje á la proyeccion de la fuerza, es igual á la perpendicular comun HK, á QN y á la direccion de la fuerza P.

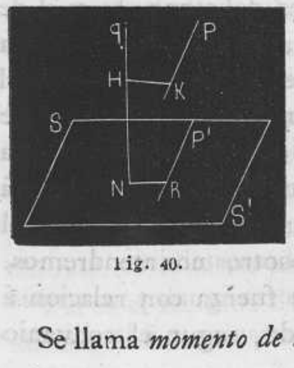


Fig. 40.

Se llama *momento de una fuerza con respecto á un plano* *paralelo á su direccion*, el momento de la fuerza con respecto á un eje cualquiera, trazado en este plano, perpendicularmente á la direccion de la fuerza, ó sea el producto de la fuerza por su distancia al plano.

Para expresar los momentos de la fuerza P con respecto al punto O, ó con respecto al eje QN, se suelen emplear las notaciones

$$M_O(P),\ M_{QN}(P).$$

De estas definiciones resulta que el momento de una fuerza con respecto á un punto, es nulo cuando el punto está situado en la direccion de la fuerza.

El momento de una fuerza, con respecto á un eje, es nulo en dos casos: 1.°, cuando la fuerza encuentra al eje; y 2.°, cuando la fuerza es paralela al eje. En ambos casos, el eje y la fuerza están en un plano; luego el momento de una fuerza con respecto á un eje es nulo cuando la fuerza y el eje están en un plano.

75. En el cálculo se da á los momentos los signos + ó —, segun el siguiente convenio. Cuando várias fuerzas actúan en un plano, tienden á hacerlo girar alrededor de un punto de este plano, escogido por centro de los momentos. Convendremos en que el momento de una fuerza que tiende á hacer girar el plano de izquierda á derecha, es positivo, y se la afecta del signo +; y el de una fuerza que tiende á hacer girar al plano de derecha á izquierda, es negativo, y se le pone el signo —. Del mismo modo pudiéramos convenir en que el momento de la fuerza que hace girar el plano de derecha á izquierda es positivo, y el de la que lo hace girar de izquierda á derecha, es negativo; pero ordinariamente se sigue el primer convenio, que es al que nosotros nos atendremos.

El signo del momento de una fuerza con relacion á un eje, será el que le corresponda, segun el convenio anterior, á la proyeccion de la fuerza sobre un plano perpendicular al eje, con respecto al pié del eje.

El momento de una fuerza representa en valor absoluto el área del rectángulo determinado por sus dos factores. En esta clase de productos uno de los factores representa una longitud y el otro una fuerza; y la unidad de fuerza y la unidad de longitud son independientes una de otra. La Mecánica ofrece muchos ejemplos de productos de factores que representan cantidades de naturaleza diferente, que hay que mirar con cuidado, para averiguar los que deben considerarse como abstractos en las aplicaciones, si no queremos exponernos á cometer graves errores.

76. Los términos $Pp, P'p'$... que expresa cada uno el producto de una fuerza por su distancia á un punto fijo, son los momentos de la fuerza con respecto á este punto fijo; la idea de momento sólo expresa en este concepto el producto de dos números, uno que representa la fuerza y otro su distancia á un punto fijo. Teniendo en cuenta la teoría de los pares, el momento es la medida del esfuerzo del par, que proviene de trasladar una fuerza paralelamente á sí misma, al punto que se considera. De modo que la diferencia de considerar los momentos bajo uno ú otro concepto, sólo se refiere á la idea que representan, porque la cantidad es la misma, ya sea una ú otra la manera de considerarlos.

La ecuacion

$$Rr = Pp + P'p' + P'p'' + \ldots$$

nos dice, *que el momento de la resultante de un sistema de fuerzas paralelas con respecto á un punto cualquiera de su plano, es igual á la suma de los momentos de las componentes con respecto al mismo punto.*

Tal es el teorema de los momentos de las fuerzas paralelas, situadas en un plano.

Equilibrio de las fuerzas paralelas en el espacio.

77. Sean P, P′, P″... (fig 41), las fuerzas paralelas. Tiremos dos planos paralelos á ellas y que ademas sean perpendiculares entre sí; su interseccion AZ, será paralela á las fuerzas. Consideremos la fuerza P aplicada en B, tiremos de este punto la perpendicular BH á la AZ y apliquemos en H dos fuerzas iguales á la P, paralelas y contrarias; en vez de la fuerza P aplicada en B, tendremos la fuerza igual y paralela P aplicada en H y el par (P, —P), que obra sobre el brazo de palanca BH. Haciendo lo mismo con las fuerzas P′, P″, P‴... tendremos todas las fuerzas trasladadas á la interseccion AZ, y alejando en sus diferentes planos los pares de esta recta, nos quedarán en ella las fuerzas dadas P, P′, P″..., iguales, paralelas y del mismo sentido, que las fuerzas primitivas. La primera condicion del equilibrio exige que la resultante de todas estas fuerzas, que está representada por su suma algébrica, sea igual cero; por lo tanto tendremos

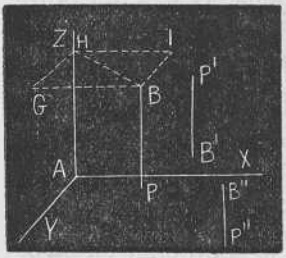


Fig. 41.

$$P + P' + P'' + \ldots = 0.$$

La segunda condicion del equilibrio es que el momento resultante de todos los momentos de los pares del sistema sea nulo; mas como los planos de éstos no son paralelos, descompondremos cada uno de ellos en dos situados en los planos ZX y ZY. Sea, por ejemplo, el que ha provenido de trasladar la fuerza P, que es (P, —P), con el brazo de palanca BH; tiremos desde B las perpendiculares BG y BI á los dos planos, y construyamos el paralelógramo BGHI: el par (P, —P) cuyo brazo de palanca es BH, podemos considerarle descompuesto en dos pares, de fuerzas iguales, situados en los planos ZY y ZX, y cuyos brazos de palanca son HG y HI (55), que son iguales á las coordenadas y, x del punto B, respecto de los ejes X, Y, Z; los momentos son Py y Px: del mismo modo el par relativo á la fuerza P' se descompondrá en dos $P'y'$, $P'x'$; el relativo á P'', en $P''y''$, $P''x''$ y así sucesivamente. Todos los pares situados en el plano ZY se componen en uno cuyo momento es igual á la suma $Py+P'y'+P''y''+...=M$; y todos los situados en el plano ZX se componen en otro, cuyo momento es $Px+P'x'+P''x''+...=L$. Los momentos resultantes L y M se componen en uno sólo G, que debe ser igual cero; y para que lo sea es necesario que $L=0$ y $M=0$, es decir

$$Px+P'x'+P''x''+.....=0$$
$$Py+Py'+P''y''+.....=0.$$

De modo que el equilibrio de un sistema de fuerzas paralelas exige estas tres condiciones: 1.ª, que la suma de todas las fuerzas sea nula; 2.ª y 3.ª, que la suma de sus momentos, con relacion á dos planos que se cortan segun una paralela á las fuerzas, sea nula por sí misma en cada uno de los dos planos.

En las ecuaciones que expresan estas tres condiciones, consideraremos como positivas las fuerzas que tiran en un sentido, y como negativas, las que tiran en el opuesto. Los brazos de palanca situados á un lado de cada plano, los consideraremos como positivos, y los situados al otro, como negativos.

78. Si las fuerzas P, P', P''..., no se equilibran y tiene una resultante única R, una fuerza —R, se equilibrará con ellas, y las tres ecuaciones del equilibrio, lla-

mando p y q á las distancias de la resultante á los planos ZY y ZX, serán:

$$P+P'+P''+\ldots-R=0,$$
$$Px+P'x'+P''x''+\ldots-Rp=0,$$
$$Py+P'y'+P''y''+\ldots-Rq=0,$$

$$\text{ó}\quad \left\{\begin{array}{l} R=P+P'+P''+\ldots, \\ Rp=Px+P'x'+P''x''+\ldots, \\ Rq=Py+P'y'+P''y''+\ldots. \end{array}\right.$$

Estas ecuaciones nos dicen: la primera, que la resultante es igual á la suma de las componentes; y las segunda y tercera, que el momento de la resultante con respecto á un plano, paralelo á las fuerzas, es igual á la suma de los momentos de las fuerzas con respecto al mismo plano. Este teorema de los momentos de las fuerzas paralelas, es el fundamento de toda la teoría de los centros de gravedad, de que luégo nos ocuparemos.

Despejando p y q en las últimas, tendremos, poniendo por R su valor;

$$p=\frac{Px+Px+Px+\ldots}{P+P'+P''+\ldots},\quad q=\frac{Pq+Pq+Pq+\ldots}{P+P'+P''+\ldots},$$

que expresan, que la distancia de la resultante á un plano paralelo á las fuerzas, se obtiene dividiendo la suma de los momentos de las fuerzas con respecto al mismo plano, por la suma de las fuerzas.

Centro de fuerzas paralelas.

79. El centro de las fuerzas paralelas está situado sobre la resultante; y por lo tanto, la distancia de este centro á un plano cualquiera paralelo á las fuerzas, se encontrará como la distancia de la resultante á este plano, dividiendo la suma de los momentos de las fuerzas con respecto al plano, por la suma de las fuerzas.

Para encontrar la distancia de este punto á cualquier plano, haremos que las fuerzas, sin cambiar de magnitud, conservando su paralelismo y sus puntos de aplicacion, se coloquen paralelamente al nuevo plano, y se tendrá para expresion de esta distancia, la suma de los nuevos momentos dividida por la de todas las fuerzas.

De este modo se encontrará la distancia del centro de las fuerzas paralelas á tres planos que se cortan, y tirando á estas distancias otros tres planos paralelos á los primeros, su interseccion determinará el centro de las fuerzas paralelas.

LECCION SEXTA.

Equilibrio de fuerzas cualesquiera situadas en un plano. Su resultante cuando no se equilibran.—Representacion de las condiciones de equilibrio en funcion de las componentes de las fuerzas y de las coordenadas de sus puntos de aplicacion.—Convenio sobre los signos.—Caso en que los ejes sean rectangulares.—Condiciones de equilibrio de un sistema cualquiera de fuerzas dirigidas como se quiera en el espacio.—Caso en que los ejes sean rectangulares.—Introduccion de las mínimas distancias en las ecuaciones del equilibrio.— Resultante de todas las fuerzas del sistema, cuando no se equilibran y pueden reducirse á una sola.—Reduccion general de las fuerzas.

Equilibrio de fuerzas cualesquiera situadas en un plano. Su resultante cuando no se equilibran.

80. Sean P′, P″, P‴,... (fig. 42), las fuerzas situadas de cualquier modo en un plano. Por un punto A del plano tiremos á las direcciones de las fuerzas las perpendiculares Ab', Ab'', Ab'''... que representaremos por p', p'', p'''... La P′, por ejemplo, se descompondrá en otra igual paralela y del mismo sentido, aplicada en A, y un par cuyo momento es $P'p'$; la P″ en otra igual paralela y del mismo sentido, y un par cuyo momento es $P''p''$, y así todas las demas.

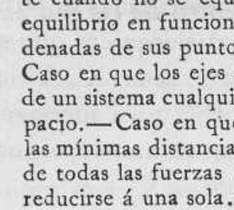


Fig. 42.

Ahora, para que el sistema esté en equilibrio, es necesario que la resultante de todas las fuerzas aplicadas en A, sea igual cero; y que el momento resultante de todos los momentos $P'p'$, $P''p''$, $P'''p'''$..., sea tambien nulo por sí mismo.

Como todos estos pares están en un plano, el momento del par resultante será igual á la suma de los momentos de los pares componentes, y la primera ecuacion del equilibrio será

$$P'p'+P''p''+P'''p'''+...=0.$$

Para expresar la otra condicion, descompongamos cada una de las fuerzas P', P'', P'''... trasladadas al punto A, en otras dos, segun dos rectas cualesquiera que se corten en A, en el plano de las fuerzas: sean X', Y' las componentes de P'; X'' y Y'' las de P'', y así sucesivamente. Las X', X'', X'''..., se componen en una sola igual á su suma, que llamándola X, será, $X=X'+X''+X'''+...$; las Y', Y'', Y'''... en otra, $Y=Y'+Y''+Y'''+...$; estas resultantes X é Y se componen en una R, que será la resultante de todas y deberá ser cero para el equilibrio; mas la condicion $R=0$, exige que $X=0$ é $Y=0$; y tendremos las otras dos ecuaciones del equilibrio,

$$X'+X''+X'''+...=0,\quad Y'+Y''+Y'''+...=0.$$

Estas componentes de P', P'', P'''... son las mismas que hubiéramos obtenido si hubiéramos descompuesto á cada una de éstas, en los primitivos puntos de aplicacion, y las condiciones del equilibrio podrán enunciarse diciendo: 1.°, que la suma de las fuerzas descompuestas paralelamente á dos ejes que se corten en su plano, sea nula respecto á cada uno de los ejes; 2.°, que la suma de los momentos de las fuerzas con respecto á un punto cualquiera de su plano, sea nula por sí misma.

81. Si las fuerzas dadas no se equilibran, son susceptibles de reducirse á una sola R; y una fuerza $-R$, reducirá el sistema al equilibrio: las dos últimas ecuaciones subsistirán introduciendo en ellas las componentes de $-R$. Tambien tendrá lugar la ecuacion de los momen-

tos, y designando por r la distancia de la resultante al punto A, tendremos

$$P'p'+P''p''+P'''p'''+\ldots-Rr=0,$$

ó $$Rr=P'p'+P''p''+P'''p'''+\ldots,$$

que expresa, que el momento de la resultante, con respecto á un punto cualquiera del plano de las fuerzas, es igual á la suma de los momentos de las componentes con respecto al mismo punto. Este es el teorema de los momentos en este caso, y el punto A, con respecto al cual se toman los momentos, se llama centro de los momentos.

Si la resultante pasa por este punto A, $r=0$; y la ecuacion será

$$0=P'p'+P''p''+P'''p'''+\ldots;$$

que nos dice, que la suma de los momentos es cero para cualquiera de los puntos de la resultante.

Representacion de las condiciones de equilibrio en funcion de las componentes de las fuerzas y de las coordenadas de sus puntos de aplicacion.

82. Estas condiciones pueden representarse bajo otra forma.

Sean x', y', las coordenadas del punto de aplicacion B′ (fig. 43); x'', y'', las de B″, etc.; y consideremos en vez de P′, P″, P‴, ... sus componentes X′, X″, X‴..., é Y′, Y″, Y‴...; las X′ X″, X‴... trasladadas paralelamente á sí mismas al punto A, dan una resultante igual á su suma; y las Y′, Y″, Y‴ tambien se componen despues de trasladadas al mismo punto, en otra igual á su suma; y como

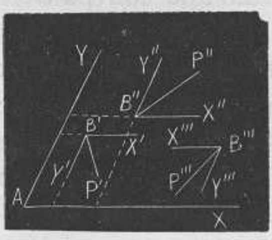


Fig. 43.

ántes, estas sumas serán cero; de modo que tendremos,

$$X'+X''+X'''+...=0, \quad Y'+Y''+Y'''+...=0.$$

Para expresar que la suma de los momentos es igual cero, observaremos que los ángulos que forma AX con las Y', Y'', Y'''... son iguales á los que forma AY con X', X'', X'''..., y podremos tomar por medida de los momentos los productos $Y'x', Y''x'', Y'''x'''$...y$X'y', X''y'', X'''y'''$,...; porque las coordenadas son proporcionales á los brazos de palanca, ó lo que es lo mismo, podremos tomar estos brazos de palanca con tal que formen ángulos iguales con los ejes, como ya dijimos. Tendremos

$$X'y'+X''y''+...+Y'x'+Y''x''+...=0,$$

para ecuacion de los momentos, y en la que, en vez de los perpendiculares p', p'', p'''... entran las coordenadas $x', y'; x'', y''$...

Convenio sobre los signos.

83. Escrita la ecuacion bajo esta forma, cada término debe tomar el signo conveniente al sentido del par que represente. Para lo cual daremos á las coordenadas los mismos signos que en Geometría analítica. Convendremos en que las fuerzas que tienden á aumentar las coordenadas sean positivas, y las que tienden á disminuirlas negativas; y no nos separaremos de este convenio en toda la Mecánica.

Examinemos los pares que producen dos fuerzas de signo contrario, segun este convenio, tales como Y' y X''; y vemos que son del mismo sentido, miéntras que dos fuerzas del mismo signo, como X' é Y'', dan pares de sentidos contrarios; luego para conservar el convenio sobre los signos de las fuerzas y que los momentos del mismo sentido tengan el mismo signo, es preciso que cambiemos el signo á uno de los grupos de momentos, tal como el que tiene las fuerzas Y′, Y″... y la ecuacion anterior será:

$$X'y'+X''y''+\ldots-Y'x'-Y''x''-\ldots=0.$$

Escrita de esta manera, expresa cada término el sentido del par correspondiente, sin faltar el convenio sobre los signos de las fuerzas.

Caso en que los ejes sean rectangulares.

84. Si el ángulo de los ejes AX y AY es recto, tendremos,

$$X'=P'\cos\alpha',\ X''=P''\cos\alpha'',X'''=P'''\cos\alpha''',\ldots$$
$$Y'=P'\operatorname{sen}\alpha',\ Y''=P''\operatorname{sen}\alpha,''\ldots;$$

llamando $\alpha', \alpha''\ldots$, á los ángulos que las fuerzas P′, P″... forman con el eje AX. Las tres ecuaciones del equilibrio podrán escribirse del siguiente modo:

$$P'\cos\alpha'+P''\cos\alpha''+P'''\cos\alpha'''+\ldots=0,$$
$$P'\operatorname{sen}\alpha'+P''\operatorname{sen}\alpha''+P'''\operatorname{sen}\alpha'''\ldots=0,$$
$$P'(y'\cos\alpha'-x'\operatorname{sen}\alpha')+P''(y''\cos\alpha''-x''\operatorname{sen}\alpha'')$$
$$+P'''(y'''\cos\alpha'''-x'''\operatorname{sen}\alpha''')+\ldots=0.$$

Esta es la forma que suele darse á las ecuaciones del equilibrio en el caso que consideramos; en las cuales, entran las fuerzas consideradas como positivas y cada término toma el signo conveniente, por el que toma el seno ó coseno que contiene. Vemos tambien que el caso de ejes rectangulares, está comprendido en el caso general que hemos examinado; y que no es necesario acudir á estos ejes para establecer las ecuaciones que expresan el equilibrio.

85. Supongamos que las fuerzas no se equilibran; entónces pueden reducirse á una resultante única R. Otra fuerza —R reducirá al equilibrio al sistema, y llamando α al ángulo que forma con el eje X, $xe'y$ á las

coordenadas de su punto de aplicacion, y haciendo para abreviar,

$$P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + P'''\cos\alpha''' + \ldots = X,$$
$$P'\operatorname{sen}\alpha' + P''\operatorname{sen}\alpha'' + P'''\operatorname{sen}\alpha''' + \ldots = Y,$$
$$P'(y'\cos\alpha' - x\operatorname{sen}\alpha'') + P''(y''\cos\alpha'' - x''\operatorname{sen}\alpha'') + \ldots = G,$$

tendremos

$$X - R\cos\alpha = 0, \qquad Y - R\operatorname{sen}\alpha = 0,$$
$$G - R(y\cos\alpha - x\operatorname{sen}\alpha) = 0;$$

de las dos primeras, deduciremos

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

que nos darán la resultante y el ángulo que su direccion forma con el eje de abscisas.

Para encontrar su punto de aplicacion, la tercera poniendo $X = R\cos\alpha$, é $Y = R\operatorname{sen}\alpha$, se convertirá en

$$G - Xy + Yx = 0;$$

ecuacion con x é y, que no determina ninguna de ellas y que representa la recta cuya direccion sigue la resultante; y como el punto de aplicacion de ésta puede ser cualquiera de los de su direccion, la ecuacion debia ser, como lo es en efecto, indeterminada.

Conocida la ecuacion de la resultante, podremos construirla por cualquiera de los medios que enseña la Geometría analítica.

86. En los tres casos examinados, las fuerzas tienen resultante única, porque esta resultante R, es en todos ellos paralela al plano del par resultante (S, —S).

Exceptúese el caso en que la resultante R sea cero, porque entónces todas las fuerzas se reducen á un par, que nunca puede reemplazarse por una sola fuerza.

Condiciones de equilibrio de un sistema cualquiera de fuerzas dirigidas como se quiera en el espacio.

87. Sean P′, P″, P‴ (fig. 44) las fuerzas del sistema. Tracemos por un punto A tres ejes no situados en un plano y descompongamos cada fuerza en tres paralelas á los ejes. Sea X′, Y′, Z, las componentes de P′, X″, Y″, Z″, las componentes de P″, etc.; en vez de las fuerzas dadas, tendremos tres grupos de fuerzas,

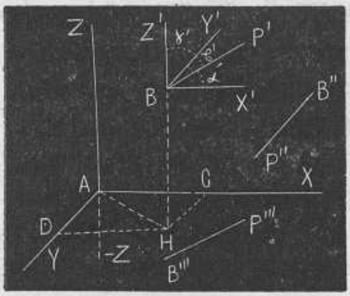


Fig. 44.

el primero formado por las fuerzas X′, X″, X‴... paralelas á AX; el segundo de las Y′, Y″, Y‴... paralelas á AY; y el tercero de las Z′, Z″Z‴..., paralelas á AZ. Traslademos estas fuerzas paralelamente á sí mismas al punto A; las del primer grupo se compondrán en una sola X igual á su suma, las del segundo en otra Y igual á su suma, y las del tercero en otra Z igual á su suma. Estas tres X, Y, Z, se compondrán en una sola R, por la regla del paralelepípedo de las fuerzas, y esta R debe ser nula para el equilibrio; lo cual exige que $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, ó lo que es lo mismo;

$$X'+X''+X'''+\ldots=0, \quad ó \quad \Sigma X=0,$$
$$Y'+Y''+Y'''\ldots=0, \quad ó \quad \Sigma Y=0,$$
$$Z'+Z''+Z'''+\ldots=0, \quad ó \quad \Sigma Z=0.$$

Lo que nos dice, que para el equilibrio de un sistema cualquiera de fuerzas, es necesario, que la suma de las fuerzas descompuestas paralelamente á tres ejes cualesquiera, sea nula con respecto á cada uno de estos ejes.

Veamos ahora cómo se expresa la segunda condicion del equilibrio, que es, que el par resultante de todos los pares, que nacen de trasladar las fuerzas al punto A, sea nulo por sí mismo.

Para ello, determinemos las coordenadas x', y', z', que son AC, CH y HB', del punto de aplicacion B' de P', y de sus componentes X', Y', Z'; sean x'', y'', z'', las del punto B'', y así sucesivamente. Consideremos el grupo de las fuerzas Z', Z'', Z'''...; la traslacion de Z' al punto A, produce un par aplicado sobre AB', ó suponiendo la Z' aplicada en el punto H, donde su direccion encuentra al plano XY, produce un par aplicado sobre la diagonal del paralelógramo ACHD, cuyos lados son las coordenadas x' é y'; éste par puede descomponerse en otros dos de fuerzas iguales y paralelas á las primeras, aplicadas sobre los lados AC y AD, ó x' é y', en los planos ZX y ZY. Haciendo lo mismo con los pares que provienen de las fuerzas Z'', Z''',... y descomposiciones análogas con las de los grupos X', X'', X''',... é Y', Y'', Y''',... en los planos análogos, todos los pares del sistema se habrán reducido á otros situados en los tres planos coordenados.

En cada plano los pares se reducirán á uno sólo, igual á su suma; estos tres pares resultantes se componen en uno sólo, que será el par resultante general, y que debe ser cero para el equilibrio; y como están situados en tres planos que se cortan y no pueden dar un par resultante cero, sin que lo sean los tres por separado, tendremos que en cada uno de los tres planos la suma de los momentos de los pares debe ser igual cero. En el plano YZ tenemos los pares

$$(Z', -Z'), (Z'', -Z''), (Z''', -Z''')...,$$

aplicados sobre las rectas

$$y', y'', y'''...$$

y los pares

$$(Y', -Y'), (Y'', -Y''), (Y''', -Y''')...,$$

aplicados sobre las rectas $z', z'', z'''...$

Estos dos grupos de pares están en el plano YZ, y la suma de sus momentos es (82)

$Y'z' + Y''z'' + Y'''z''' + \ldots - Z'y' - Z''y'' - Z'''y''' \ldots = 0,$

ó $\qquad \Sigma\,(Yz - Zy) = 0.$

Del mismo modo tendremos en los otros dos planos:

$Z'x' + Z''x'' + Z'''x''' \ldots - X'z' - X''z'' - X'''z''' - \ldots = 0,$

ó $\qquad \Sigma\,(Zx - Xz) = 0.$

$X'y' + X''y'' + X'''y''' + \ldots - Y'x' - Y''x'' - Y'''x''' - \ldots = 0,$

ó $\qquad \Sigma\,(Xy - Yx) = 0.$

Estas tres ecuaciones expresan que la suma de los productos de las componentes paralelas al plano de dos ejes, por las coordenadas contadas sobre estos mismos ejes, debe ser nula para cada uno de los tres planos.

Resultan, pues, para el equilibrio, las seis ecuaciones siguientes:

$$\Sigma\,X = 0, \qquad \Sigma\,Y = 0, \qquad \Sigma\,Z = 0,$$
$$\Sigma\,(Yz - Zy) = 0, \qquad \Sigma\,(Zx - Xz) = 0, \qquad \Sigma\,(Xy - Yx) = 0.$$

Cada dos de estas ecuaciones se refieren á un eje y al plano que no contiene á este eje. Respecto á los signos debe recordarse lo establecido en el núm. 83.

Caso en que los ejes sean rectangulares.

88. Si los ejes X, Y, Z, son rectangulares, las coordenadas serán los brazos de palanca de los pares y los productos $Z'y'$, $Y'x'$, $X'z'$... serán las medidas absolutas de sus momentos. Llamando α', β', γ', los ángulos de P′ con los tres ejes; α'', β'', γ'', los de P″, etc., tendremos

$$X' = P' \cos \alpha', \; Y' = P' \cos \beta', \; Z' = P' \cos \gamma';$$
$$X'' = P'' \cos \alpha'', \; Y'' = P'' \cos \beta'', \; Z'' = P'' \cos \gamma'';$$

y podremos dar á las seis ecuaciones del equilibrio la forma:

$$P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + P''' \cos \alpha''' + \ldots = 0,$$
$$P' \cos \beta' + P'' \cos \beta'' + P''' \cos \beta''' + \ldots = 0,$$
$$P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + P''' \cos \gamma''' + \ldots = 0,$$

ó
$$\begin{cases} \Sigma\,(P \cos \alpha) = 0, \\ \Sigma\,(P \cos \beta) = 0, \\ \Sigma\,(P \cos \gamma) = 0. \end{cases}$$

$$P'(z' \cos \beta' - y' \cos \gamma') + P''(z'' \cos \beta'' - y'' \cos \gamma'') + \ldots = 0,$$
$$P'(x' \cos \gamma' - z' \cos \alpha') + P''(x'' \cos \gamma'' - z'' \cos \alpha'') + \ldots = 0,$$
$$P'(y' \cos \alpha' - x' \cos \beta') + P''(y'' \cos \alpha'' - x'' \cos \beta'') + \ldots = 0,$$

ó
$$\begin{cases} \Sigma\,[P\,(z \cos \beta - y \cos \gamma)] = 0, \\ \Sigma\,[P\,(x \cos \gamma - z \cos \alpha)] = 0, \\ \Sigma\,[P\,(y \cos \alpha - x \cos \beta)] = 0. \end{cases}$$

Bajo esta forma se presentan ordinariamente las seis ecuaciones del equilibrio, las cuales contienen las magnitudes de las fuerzas, las coordenadas de sus puntos de aplicacion, y sus direcciones por medio de los cosenos de los ángulos que forman con los ejes.

Tambien aquí vemos que las ecuaciones del equilibrio, con respecto á ejes rectangulares, son un caso particular de las establecidas con respecto á ejes oblícuos cualesquiera.

Introduccion de las mínimas distancias en las ecuaciones del equilibrio.

89. Las tres últimas ecuaciones del equilibrio pueden presentarse bajo otra forma, introduciendo en vez de las coordenadas de los puntos de aplicacion, las mínimas distancias de las fuerzas á los tres ejes rectangulares.

En la primera ecuacion, el término $P'(z' \cos \beta' - y' \cos \gamma')$, expresa la suma de los momentos de las fuerzas $P' \cos \beta'$, $P' \cos \gamma'$ con respecto al punto en que su plano prolongado corta al eje de las x, y podemos poner en su lugar otro, que sea el momento de su resultante con respecto al mismo punto.

Siendo las fuerzas $P' \cos \beta'$ y $P' \cos \gamma'$ rectangulares, el cuadrado de la resultante es:

$$P'^2 (\cos^2 \beta' + \cos^2 \gamma') = P'^2 (1 - \cos^2 \alpha') = P'^2 \operatorname{sen}^2 \alpha';$$

porque de

$$\cos^2 \alpha' + \cos^2 \beta' + \cos^2 \gamma' = 1;$$

sale

$$\cos^2 \beta' + \cos^2 \gamma' = 1 - \cos^2 \alpha.$$

La resultante es $P' \operatorname{sen} \alpha'$; y llamando p' á la distancia de esta resultante al eje de las x, su momento

$$P'p' \operatorname{sen} \alpha' = P' (z' \cos \beta' - y' \cos \gamma').$$

Del mismo modo tendremos $P''p'' \operatorname{sen} \alpha''$ para el segundo término, y así para los demas; y la ecuacion tomará la forma

$$P'p' \operatorname{sen} \alpha' + P''p'' \operatorname{sen} \alpha'' + P'''p''' \operatorname{sen} \alpha''' + \ldots = 0.$$

Las cantidades p', p'', p'''... son las mínimas distancias de las fuerzas P', P'', P'''... al eje de las x; porque la fuerza $P' \operatorname{sen} \alpha'$, situada en un plano perpendicular á este eje, compuesta con la $P' \cos \alpha'$, perpendicular al mismo plano, debe dar la resultante P', que está en el espacio; luego $P' \operatorname{sen} \alpha'$ es la proyeccion de la fuerza P' sobre un plano perpendicular al eje de las x, y la menor distancia de esta proyeccion al eje X, es la mínima distancia de la fuerza P' á dicho eje.

Llamando q', q'', q'''..., y r', r'', r''', á las mínimas distancias de las fuerzas á los ejes de las y y de las z, tendremos las otras dos ecuaciones

$$P'q' \operatorname{sen} \beta' + P''q'' \operatorname{sen} \beta'' + P'''q''' \operatorname{sen} \beta''' + \ldots = 0,$$

$$P'r' \operatorname{sen} \gamma' + P''r'' \operatorname{sen} \gamma'' + P'''r''' \operatorname{sen} \gamma''' + \ldots = 0.$$

Recordando la definicion de momento de una fuerza con respecto á un eje, las tres últimas ecuaciones del equilibrio, puestas bajo esta forma, nos dicen:

Que en todo sistema de fuerzas en equilibrio la suma de los momentos de las fuerzas, con respecto á cada uno de los tres ejes rectangulares, debe ser nula.

90. De las seis ecuaciones del equilibrio en el caso general, se deducen las obtenidas en todos los casos particulares, sin más que introducir en ellas las circunstancias particulares de cada caso; cosa muy sencilla y en que no nos detendremos.

En el caso en que todas las fuerzas P', P'', P'''... concurren en un punto, escogiéndole por orígen de coordenadas, los pares con respecto á este punto serán cero y las ecuaciones de los momentos se verificarán por sí mismas; y sólo exigirá el equilibrio que se verifiquen las otras tres.

LECCION SÉTIMA.

Condicion analítica para que un sistema cualquiera de fuerzas tenga resultante única.—Resultante de un sistema cualquiera de fuerzas que no se equilibran y pueden reducirse á una sola.—Equivalencia de dos sistemas de fuerzas.—Aplicaciones de las teorías que acabamos de exponer.—Teoremas de Chasles y de Möbius.

Condicion analítica para que un sistema cualquiera de fuerzas tenga resultante única.

91. Hemos visto (67) que la condicion geométrica para que un sistema cualquiera tenga resultante única es, que reducidas todas las fuerzas del sistema á una fuerza y un par, el plano de éste sea paralelo á la resultante. En todos los casos se pueden reducir todas las fuerzas del sistema á una sola R, que pase por un punto dado, que escogeremos por orígen de las coordenadas, y á un par, cuya magnitud y plano es fácil determinar. Vamos á deducir de estas proposiciones la condicion analítica que debe verificarse para que un sistema de fuerzas tenga resultante única.

Suponiendo que los ejes son rectangulares, y que X, Y, Z, representan las sumas de las componentes de las fuerzas paralelas á los ejes, la resultante R de estas fuerzas, trasportadas al orígen, será

$$R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2};$$

los ángulos α, β, γ, que su direccion forma con los tres ejes, estarán dados por las ecuaciones

$$\cos\alpha = \frac{X}{R}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{R}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{R}.$$

Llamando L, M, N, á los momentos de los tres pares resultantes, situados en los tres planos perpendiculares á los ejes de las x, y, z, si designamos por G el momento del par resultante, tendremos

$$G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2};$$

representando por λ, μ, ν, los ángulos que el eje del par resultante forma con los ejes de las x, y, z; tambien tendremos

$$\cos\lambda = \frac{L}{G}, \quad \cos\mu = \frac{M}{G}, \quad \cos\nu = \frac{N}{G}.$$

Ahora, el plano del par resultante ha de ser paralelo á la resultante, para que el sistema tenga resultante única, es decir, que el eje del par resultante ha de ser perpendicular á la resultante; para lo cual, el coseno del ángulo que forma ha de ser cero; de modo que tendremos

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0.$$

Poniendo por estos cosenos sus valores y multiplicando por RG, resultará la ecuacion

$$LX + MY + NZ = 0,$$

que expresa la condicion para que todas las fuerzas del sistema tengan resultante única. A esta condicion debe añadirse, que R no sea cero; porque si lo fuera, X, Y, Z, serian cero; se verificaria la condicion y las fuerzas del sistema se reducirian á un par, que no puede reemplazarse nunca por una sola fuerza.

Si se verifican las tres ecuaciones $L=0, M=0, N=0$; será $G=0$, y las fuerzas se reducen á una sola que pasa por el orígen. De modo, que si queremos expresar que un sistema de fuerzas se reduzca á una sola que pase por un punto dado, escogeremos este punto por orígen y estableceremos las tres ecuaciones $L=0, M=0, N=0$.

Resultante de un sistema cualquiera de fuerzas que no se equilibran y pueden reducirse á una sola.

92. Supongamos que las fuerzas del sistema no se equilibran y que se verifica la condicion anterior. Podemos suponer que los ejes son rectangulares. Sea R la resultante, una fuerza $-R$ igual y contraria á ésta, reducirá el sistema al equilibrio.

Hagamos para mayor sencillez, conservando las notaciones del núm. 88,

$$P'\cos\alpha'+P''\cos\alpha''+P'''\cos\alpha'''+\ldots=X$$
$$P'\cos\beta'+P''\cos\beta''+P'''\cos\beta'''+\ldots=Y$$
$$P'\cos\gamma'+P''\cos\gamma''+P'''\cos\gamma'''\ldots=Z$$
$$P'(z'\cos\beta'-y'\cos\gamma')+P''(z''\cos\beta''-y''\cos\gamma'')+\ldots=L,$$
$$P'(x'\cos\gamma'-z'\cos\alpha')+P''(x''\cos\gamma''-z''\cos\alpha'')+\ldots=M,$$
$$P'(y'\cos\alpha'-x'\cos\beta')+P''(y''\cos\alpha''-x''\cos\beta'')+\ldots=N,$$

y sean α, β, γ, los ángulos que R forma con los ejes; y x, y, z, las coordenadas de uno de sus puntos, tendremos

$$X-R\cos\alpha=0,\quad Y-R\cos\beta=0,\quad Z-R\cos\gamma=0.$$
$$L-R(z\cos\beta-y\cos\gamma)=0;\ M-R(x\cos\gamma-z\cos\alpha)=0,$$
$$N-R(y\cos\alpha-x\cos\beta)=0.$$

Se deduce de las tres primeras,

$$R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2},\ \cos\alpha=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$
$$\cos\beta=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\ \cos\gamma=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

Poniendo en las tres últimas, X por $R\cos\alpha$, Y por $R\cos\beta$, y Z por $R\cos\gamma$, se convierten en

$$L-Yz+Zy=0,$$
$$M-Zx+Xz=0,$$
$$N-Xy+Yx=0.$$

Eliminando dos de las incógnitas, x, y, z, para lo cual basta multiplicar la primera por X, la segunda por Y, la tercera por Z y sumarlas; resulta,

$$LX+MY+NZ=0;$$

que no contiene incógnita, y que expresa la condicion para que las otras puedan existir, ó para que el sistema tenga resultante única; y es la misma que hemos encontrado al principio de esta leccion. Si esta condicion se verifica, los valores de las coordenadas son indeterminados, y se presentan bajo la forma $\frac{0}{0}$, porque la resultante puede suponerse aplicada en cualquiera de los puntos de su direccion, y las tres ecuaciones anteriores son las ecuaciones de esta direccion ó sus proyecciones sobre los planos coordenados. Podíamos con facilidad encontrar los puntos en que estas proyecciones encuentran á los ejes y construir la resultante.

Equivalencia de dos sistemas de fuerzas.

93. Dos sistemas de fuerzas cuyas componentes paralelas á los ejes son

$$X, Y, Z;\ X', Y', Z'; \ldots \text{ y } X_1, Y_1, Z_1;\ X'_1, Y'_1, Z'_1; \ldots,$$

aplicadas sucesivamente á un sólido, son equivalentes, cuando las fuerzas que componen cada sistema son reducibles á la misma resultante de traslacion y al mismo par resultante. Las ecuaciones que expresan analíticamente esta condicion son:

$$\Sigma X=\Sigma X_1,$$
$$\Sigma Y=\Sigma Y_1,$$
$$\Sigma Z=\Sigma Z_1,$$
$$\Sigma(Zy-Yz)=\Sigma(Z_1 y_1-Y_1 z_1),$$
$$\Sigma(Xz-Zx)=\Sigma(X_1 z_1-Z_1 x_1),$$
$$\Sigma(Yx-Xy)=\Sigma(Y_1 x_1-X_1 y_1).$$

Si aplicamos al sólido el primer sistema de fuerzas, y todas las fuerzas del segundo sistema tomadas en sentido contrario, el sistema de fuerzas resultante será reducible á una resultante nula y á un par resultante nulo; de suerte, que el sólido estará en equilibrio. Recíprocamente, si un sistema de fuerzas aplicado á un sólido está en equilibrio, hay equivalencia entre el sistema de las fuerzas dadas y el sistema obtenido cambiándolas todas de sentido.

Aplicaciones de las teorías que acabamos de expresar.

94. Por medio de las teorías de la composicion de fuerzas y de las leyes de equilibrio de un sistema de fuerzas aplicadas á un sólido invariable, pueden demostrarse algunos teoremas de Geometría, entre los cuales expondremos los siguientes.

Dado un polígono plano ABCDEFA (fig. 45), apliquemos al vértice A, en la direccion AB, una fuerza proporcional á AB; en el vértice B, segun BC, una fuerza proporcional á BC, y así sucesivamente hasta el vértice F, al cual se aplica, segun FA, una fuerza proporcional á FA. Nos proponemos reducir todas estas fuerzas á una resultante y á un par.

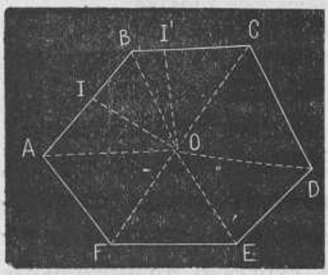


Fig. 45.

Escogeremos la escala que sirve para representar las fuerzas, de manera que AB, BC, ...FA, sean las longitudes respectivas de las fuerzas aplicadas segun estos lados.

La resultante R, se obtendrá componiendo las fuerzas, trasladadas á un mismo punto, paralelamente á ellas mismas. Sea A este punto, la resultante será el último lado del polígono de las fuerzas, construido á partir del punto A; este polígono es el polígono dado, que se cierra por sí mismo; luego la resultante R es nula, y por lo tanto las fuerzas se reducen á un par.

El par resultante está situado en el plano de la figura y su eje es perpendicular á este plano. Para obtener su momento, basta tomar la suma de los momentos de las fuerzas con respecto á un punto O cualquiera del plano. De este punto, bajemos las perpendiculares OI, OI'... sobre los lados; el momento de la fuerza AB con respecto al punto O es el producto AB × OI, ó el duplo del área del triángulo OAB, y lo mismo tendremos respecto de los demas triángulos OBD, OCD... OFA. El momento del par resultante estará representado por el duplo del área del polígono dado. El mismo resultado obtendremos tomando el punto O fuera del polígono, y tomando negativamente los triángulos exteriores al polígono, como que representan momentos negativos.

De aquí resulta, que si en el mismo plano, ó en dos planos paralelos formando un sistema sólido, se aplican, segun los lados de dos polígonos trazados respectivamente en estos planos, fuerzas proporcionales á los lados de estos polígonos, dirigiéndolas en un sentido para uno de los perímetros, y en el opuesto para el otro, el sistema que formen estará en equilibrio, siempre que las áreas de estos dos polígonos sean iguales.

En efecto, las fuerzas aplicadas en cada uno de estos polígonos se reducen á un par, cuyo momento está representado por el duplo del área del polígono respectivo; los dos pares son iguales si las áreas son iguales; ademas son de sentidos contrarios en el mismo plano ó en planos paralelos, y se componen en un par, único igual á cero, luego las fuerzas dadas se equilibran.

Teoremas de Chasles y de Möbius.

95. Un sistema cualquiera de fuerzas puede reducirse á dos no situadas en un mismo plano de una infinidad de maneras, como hemos visto en el núm. 68. Teniendo esto presente, el teorema de Chasles es el siguiente:

De cualquiera manera que se reduzcan á dos todas las fuerzas de un sistema, los tetraedros construidos sobre las rectas que representan estas dos fuerzas en cada reduccion, son equivalentes, ó su volúmen es constante.

Sean A y B los puntos de aplicacion, AP, BQ las direcciones y magnitudes de las dos fuerzas P y Q, á las cuales se ha reducido el sistema dado. Tracemos las rectas AB, PB, AQ, PQ; que con las dos fuerzas forman el tetraedro APBQ. Tomemos por base de este tetraedro el triángulo ABP, y por altura la distancia del punto Q á la base; por el punto B tracemos la BP′ paralela á AP, la cual estará contenida en el plano del triángulo PAB. Sean, φ el ángulo P′BQ de las direcciones de las fuerzas, θ el ángulo PAB y ψ el ángulo que forma el plano P′BQ con el plano PABP′. Sea AB$=a$, la distancia de los puntos de aplicacion de las dos fuerzas. El área del triángulo PAB es $\frac{1}{2}P\times a\operatorname{sen}\theta$. Del punto Q, bajemos QQ′ perpendicular al plano de las paralelas AP, BP′, y QP′ perpendicular á BP′; la recta Q′P′ es tambien perpendicular á BP′, y el ángulo QP′Q′ es el ángulo ψ de los dos planos que se cortan segun la P′B.

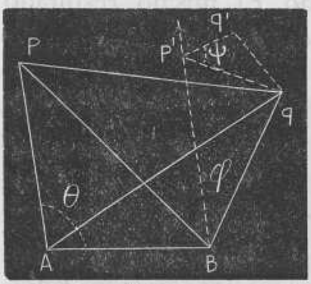


Fig. 46.

Ahora $QP'=Q \operatorname{sen} \varphi$, luego $QQ'=Q \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \psi$. El volúmen del tetraedro considerado, es

$$V=\frac{1}{2}Pa \operatorname{sen}\theta \times \frac{1}{3}Q \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi=\frac{1}{6}PQa \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi$$

Mas $a \operatorname{sen} \theta$, es la distancia de las paralelas AP, BP'; $a \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi$, es la distancia del punto A al plano P'BQ, es decir, la más corta distancia de las fuerzas P y Q; designando por h esta más corta distancia, tendremos

$$V=\frac{1}{6}PQh \operatorname{sen} \varphi;$$

que nos dice: *que el volúmen del tetraedro construido sobre las dos fuerzas, es la sexta parte del producto de las fuerzas por su más corta distancia y por el seno del ángulo formado por sus direcciones.* Por consiguiente, el volúmen del tetraedro no cambia trasportando las fuerzas á cualesquiera puntos de sus direcciones.

Observemos, que $Q \operatorname{sen} \varphi=QP'$, es la proyeccion de la fuerza Q sobre un plano normal á AP; h es la distancia de esta proyeccion á la misma recta; el producto $Qh \operatorname{sen} \varphi$ es, por lo tanto, el momento de la fuerza Q con respecto á la direccion de la fuerza P, y designándolo abreviadamente por el símbolo M_P (Q), tendremos

$$V=\tfrac{1}{6}P \times M_P(Q).$$

Tendríamos tambien del mismo modo

$$V=\tfrac{1}{6}Q \times M_Q(P);$$

estas expresiones pueden servir para atribuir un signo al volúmen V.

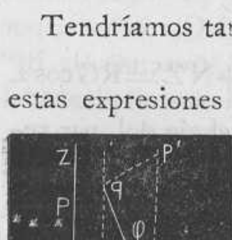


Fig. 47.

Para demostrar el teorema, interpretaremos de otro modo el producto $PQh \operatorname{sen} \varphi$.

Trasportemos las fuerzas P y Q á los puntos en que sus direcciones encuentran á la normal comun. Tomemos la direccion de la fuerza P por eje de las z, la perpendicular comun por eje de las x, y una perpendicular á éstas por eje de las y. Sea $AB=h$ la distancia de las dos fuerzas, y $QBP'=\varphi$, el ángulo de sus direcciones.

Las componentes de la fuerza P son segun

	el eje de las x,	de las y,	de las z,
	0,	0,	P,
Las de la fuerza Q	0,	Q sen φ,	Q cos φ.

Designemos por X′, Y′, Z′ las componentes de la resultante R, y por L′, M′, N′ las componentes del par resultante G, suponiendo reducidas las fuerzas P y Q á una fuerza y un par. Estas cantidades tendrán los valores:

$$X'=0,\ Y'=Q\,\text{sen}\,\varphi,\ Z'=P+Q\cos\varphi,$$

$$L'=0,\ M'=-Q\cos\varphi\times h,\ N'=+Q\,\text{sen}\,\varphi\times h;$$

multiplicando ordenadamente y sumando, tendremos

$$X'L'+M'Y'+N'Z'=PQh\,\text{sen}\,\varphi.$$

De modo que la funcion

$$L'X'+M'Y'+N'Z'=PQh\,\text{sen}\,\varphi,$$

es igual á seis veces el volúmen del tetraedro construido sobre las dos fuerzas P y Q.

Llamando α al ángulo del eje del par resultante con la resultante R, tambien tenemos, que

$$\frac{L'X'+M'Y'+N'Z'}{RG}=\cos\alpha,\ \text{ó}\ L'X'+M'Y'+N'Z'=RG\cos\alpha.$$

Ahora $G\cos\alpha$ es la proyeccion KI del eje del par resultante KG sobre la resultante RK; y es, por lo tanto, el valor del eje del par mínimo G′ (65); de suerte, que el producto $PQh\,\text{sen}\,\varphi$, es igual al producto de la resultante R por eje del par G′. El sistema de las fuerzas dadas sólo puede reducirse de una sola manera á la resultante R y al par mínimo G′; pero es reducible de una infinidad de maneras á dos fuerzas con-

Fig. 48.

jugadas P y Q; y cualquiera que sea la descomposicion adoptada, se tendrá:

$$PQh \text{ sen } \varphi = RG';$$

y por lo tanto

$$V = \tfrac{1}{6} RG';$$

luego el volúmen V *del tetraedro, construido sobre las fuerzas* P *y* Q, *es constante.*

Este volúmen es cero cuando $R=0$, y cuando $G'=0$; es decir, cuando el sistema propuesto es reducible á una fuerza única ó á un par único (91).

96. El teorema de Möbius se deduce de la ecuacion establecida

$$L'X' + M'Y' + N'Z' = PQh \text{ sen } \varphi = RG'.$$

Cada uno de los factores L', X'... es una suma de componentes ó de pares componentes, en la cual figuran las n fuerzas del sistema dado. Sean X_1, Y_1, Z_1 y L_1, M_1, N_1, las componentes y los momentos, con respecto á los ejes, de la fuerza F_1; X_2, Y_2, Z_2, L_2, M_2, N_2, las mismas cantidades de la fuerza F_2... y así sucesivamente hasta la fuerza F_n; el primer miembro tomará la forma

$$(L_1 + L_2 + L_3 + \ldots)(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots)$$
$$+ (M_1 + M_2 + M_3 + \ldots)(Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots)$$
$$+ (N_1 + N_2 + N_3 + \ldots)(Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots).$$

Multiplicando resultarán términos:

$$L_1 X_1 + M_1 Y_1 + N_1 Z_1,\ L_2 X_2 + M_2 Y_2 + N_2 Z_2, \ldots$$

que tienen los mismos subíndices: estos términos, así reunidos tres á tres, son separadamente nulos, porque el par (L_1, M_1, N_1) proviene de trasportar al punto O, paralelamente á sí misma, la fuerza (X_1, Y_1, Z_1); el ángulo de la fuerza con el eje del par es recto, y por consiguiente, su coseno $L_1 X_1 + M_1 Y_1 + N_1 Z_1$, es igual cero; y lo mismo sucede con todos los grupos análogos. En el producto quedarán los términos cuyos factores tengan subíndices diferentes, de la siguiente forma:

$$L_1X_2+L_1X_3+L_1X_4+\ldots+M_1Y_2+M_1Y_3+M_1Y_4+\ldots$$
$$+N_1Z_2+N_1Z_3+N_1Z_4+\ldots+L_2X_1+L_2X_3+L_2X_4+\ldots$$
$$+M_2Y_1+M_2Y_3+M_2Y_4+\ldots+N_2Z_1+N_2Z_3+N_2Z_4+\ldots$$
$$+L_3X_1+L_3X_2+L_3X_4+\ldots+M_3Y_1+M_3Y_2+M_3Y_4+\ldots$$
$$+N_3Z_1+N_3Z_2+N_3Z_4+\ldots$$

Bajo esta forma, vemos que la funcion $L'X'+M'Y'+$ $+N'Z'$ puede formarse sumando, dos á dos, de todas las maneras posibles, todos los factores correspondientes á las fuerzas dadas. Consideremos la combinacion de las fuerzas F_i, F_j, que nos dará los seis términos siguientes:

$$(L_iX_j+M_iY_j+N_iZ_j)+(L_jX_i+M_jY_i+N_jZ_i).$$

Este sistema de las dos fuerzas F_i y F_j dará una suma igual á

$$F_iF_jh_{ij}\text{ sen }\varphi_{ij};$$

es decir, el séxtuplo del volúmen del tetraedro construido sobre las dos fuerzas, que lo podemos representar bajo la forma

$$F_iF_jh_{ij}\text{ sen}\varphi_{ij}=F_iM_{F_i}(F_j);$$

daremos al producto el signo del momento de una de las fuerzas con respecto á un eje que coincida en direccion y en sentido con la otra fuerza. Sea V_{ij} el volúmen del tetraedro construido sobre las dos fuerzas de subíndices i y j, tomado con el signo así definido. La suma algébrica de todos los valores de V_{ij}, correspondiente á las diversas combinaciones posibles, será igual al sexto de la suma $L'X'+M'Y'+N'Z'$, tomada para el conjunto del sistema dado, y podremos establecer la ecuacion

$$L'X'+M'Y'+N'Z'=R'G'=6\,\Sigma_{i=1}^{i=n}\,\Sigma_{j=1}^{j=n}\,V_{ij}.$$

El volúmen V_{ij}, es nulo siempre que $i=j$, es decir, para todas las combinaciones que deben excluirse de la suma, y podremos atribuir á cada subíndice todos los valores de 1 á *n*.

La doble suma indicada es nula, si $R=0$ ó si $G'=0$; de suerte que se llega al teorema siguiente debido á Möbius: *Cuando un sistema de fuerzas tiene una resultante única, ó puede reducirse á un par único, la suma algébrica de los tetraedros construidos sobre estas fuerzas, tomadas dos á dos de todas las maneras posibles, es igual á cero.*

LECCION OCTAVA.

Centros de gravedad. —Determinacion del centro de gravedad de varios cuerpos unidos de un modo invariable.—Distancia del centro de gravedad á un punto dado. — Determinacion del centro de gravedad de un cuerpo.—Reglas que simplifican la determinacion del centro de gravedad.

Centros de gravedad.

97. En las lecciones anteriores hemos expuesto la manera de componer y descomponer las fuerzas y las leyes de equilibrio de un sistema de fuerzas aplicadas de un modo cualquiera á un sólido ó sistema material invariable libre. La teoría de los centros de gravedad que vamos á exponer, no es más que la aplicacion de uno de los casos examinados, el de la composicion de fuerzas paralelas, á la composicion de las fuerzas de la gravedad, que actúan sobre las moléculas de los cuerpos.

Gravedad es la fuerza que solicita todos los cuerpos hácia el centro de la Tierra. La direccion de esta fuerza está representada por la que toma una plomada en equilibrio; esta direccion se llama *vertical* y es normal á la superficie de las aguas tranquilas, por lo que diremos más adelante. Los extremos de la vertical indefinidamente prolongada, se llaman *zénit* el superior, y *nadir* el inferior. Un plano perpendicular á la vertical se llama *plano horizontal*, y toda recta trazada en este plano es una *horizontal*.

La gravedad solicita todas las moléculas de los cuerpos, y su intensidad varía con la latitud del lugar y con la altura del cuerpo, ó sea con la distancia de sus moléculas al centro de la Tierra; mas como el radio terrestre es de más de seis mil trescientos kilómetros, podemos suponer constantes las distancias de los diferentes puntos de un mismo cuerpo á dicho centro; y siendo las dimensiones de los cuerpos muy pequeñas con respecto á estas distancias, podemos suponer paralelas las acciones que la gravedad ejerce sobre los diferentes puntos de un mismo cuerpo; puesto que todas concurren cerca del centro de nuestro planeta.

98. Este sistema de fuerzas paralelas, formado por las acciones de la gravedad, que actúan sobre todas las moléculas de un cuerpo, tiene una resultante, que se llama *peso* del cuerpo; y su punto de aplicacion, que es el centro de las fuerzas paralelas, se llama *centro de gravedad.*

Cualquiera que sea la posicion del cuerpo, la direccion de su peso pasa por el centro de gravedad. De modo, que podrá determinarse experimentalmente el centro de gravedad de un cuerpo, suspendiéndole de un hilo en dos posiciones, marcando sobre el cuerpo la direccion de la vertical, que será la del hilo que le sostenga, en las dos posiciones sucesivas, y el punto de interseccion de estas dos direcciones del hilo será el centro de gravedad.

99. Un cuerpo puede ser homogéneo ó heterogéneo, segun la manera como esté agrupada la materia que lo constituye. Cuerpo *homogéneo* es aquel en que la materia está distribuida de un modo uniforme. Volúmenes iguales de un cuerpo de esta clase contiene cantidades iguales de materia y pesos iguales; ó el peso es proporcional al volúmen. Es *heterogéneo* todo cuerpo que no es homogéneo.

No todos los cuerpos homogéneos tienen, bajo el mismo volúmen, pesos iguales. Se llama peso específico de un cuerpo el peso de la unidad de volúmen de este cuerpo; de modo, que llamando p al peso específico de un cuerpo, V al volúmen y P al peso; tendremos

$$P = pV.$$

Se toma por unidad de peso el gramo, que sabemos es el peso de un centímetro cúbico de agua destilada á $4^{\circ},1$ de temperatura, al nivel del mar y en París. Aun cuando el peso de un cuerpo varía de un lugar á otro de la Tierra, su estimacion en gramos no varía, porque el gramo varía en la misma relacion.

En un cuerpo homogéneo se llama densidad á la relacion de la masa al volúmen. Si representamos por M la masa, por V al volúmen y por D la densidad; tendremos,

$$\frac{M}{V} = D \quad \text{ó} \quad M = VD.$$

La relacion $\frac{M}{V}$ es constante en un cuerpo homogéneo, es decir, que en cada uno de estos cuerpos la densidad D es constante.

Para un cuerpo heterogéneo la relacion $\frac{M}{V}$, ó la densidad D, no es constante, porque variando el volúmen V, que encierra la misma cantidad de materia, varía tambien la relacion $\frac{M}{V}$ que la expresa. Se llama densidad media, en un cuerpo de esta clase, á la relacion de su masa total á su volúmen total.

La densidad, en un punto de un cuerpo heterogéneo, es el límite hácia el cual tiende la densidad media, cuando su volúmen tiende hácia cero, alrededor de este punto. La densidad de un cuerpo heterogéneo es generalmente una funcion contínua de las coordenadas de sus diferentes puntos.

Determinacion del centro de gravedad de varios cuerpos unidos entre sí de un modo invariable.

100. Cuando se conoce el centro de gravedad de varios cuerpos, que forman un sistema invariable, es muy fácil determinar el centro de gravedad del sistema. Por el teorema de los momentos, que dice, que el momento de la resultante con respecto á un plano, es igual á la suma de los momentos de las componentes con respecto al mismo plano; hallando el peso resultante de los pesos de los cuerpos y el punto de aplicacion del mismo, que se determina como el centro de un sistema de fuerzas paralelas, se tendrá el centro de gravedad buscado.

Sean $A(x, y, z), A'(x', y', z'), A''(x'', y'', z'')\ldots,$ (fig. 50), y los centros de gravedad de varios cuerpos, cuyos pesos son $p, p', p''\ldots$; P el peso total y G (x_1, y_1, z_1) el centro de gravedad del sistema. Supondremos los ejes rectangulares, y tendremos

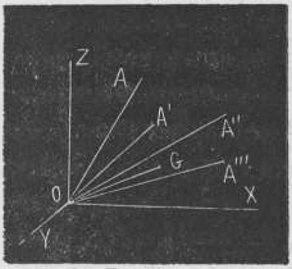


Fig. 50.

$$P = p + p' + p'' + \ldots$$

$$(1)\quad \begin{cases} Px_1 = px + p'x + p''x'' + \ldots \\ Py_1 = py + p'y' + p''y'' + \ldots \\ Pz_1 = pz + p'z', + p''z'' + \ldots \end{cases}$$

Estas cuatro ecuaciones determinan las cuatro cantidades P, x_1, y_1, z_1.

Si uno de los planos coordenados tal como YZ pasa por el centro de gravedad, $x_1 = 0$; y será

$$(2)\quad px + p'x' + p''x'' + \ldots = 0,$$

que nos dice, que la suma de los momentos de los pesos, con respecto á un plano, que contiene el centro de gravedad, es nula.

Distancia del centro de gravedad á un punto dado.

101. Sean como arriba A, A', A'', A''', (fig. 50), los centros de gravedad de varios cuerpos, G el centro de gravedad y O un punto cualquiera: queremos hallar la distancia $OG=r_1$; tracemos por O tres ejes rectangulares y llamemos $r, r' r'' \ldots$ á las distancias $OA, OA', OA'' \ldots$; tendremos las ecuaciones (1) del número anterior.

Elevándolas al cuadrado y sumándolas, se tiene,

$$P^2 r_1^2 = p^2 r^2 + p'^2 r'^2 + p''^2 r''^2 + \ldots$$
$$+ 2pp'(xx'+yy'+zz') + 2pp''(xx''+yy''+zz'') + \ldots$$

Observando que $x_1^2+y_1^2+z_1^2=r_1^2$; $x^2+y^2+z_1^2=r^2$;

$$x'^2+y'^2+z'^2=r'^2 \ldots,$$

tambien tenemos que

$$\overline{AA'}^2 = (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2 =$$
$$= r^2+r'^2-2(xx'+yy'+zz'),$$

ó $$2(xx'+yy'+zz') = r^2+r'^2-\overline{AA'}^2$$

del mismo modo

$$2(xx''+yx''+zz'') = r^2+r''^2-\overline{AA''}^2$$

y así sucesivamente. La ecuacion anterior será

$$P^2 r_1^2 = p^2 r^2 + p'^2 r'^2 + p''^2 r''^2 + \ldots + pp'(r^2+r'^2-\overline{AA'}^2)$$
$$+ pp''(r^2+r''^2-\overline{AA''}^2) + \ldots$$
$$= (pr^2+pr'^2+p''r''^2+\ldots)(p+p'+p''+\ldots)$$
$$- pp'\overline{AA'}^2 - pp''\overline{AA''}^2 \ldots$$

y poniendo $P=p+p'+p''+\ldots$; será,

$$P^2 r_1^2 = P(pr^2+p'r'^2+p''r''^2+\ldots)$$
$$- pp'\overline{AA'}^2 - pp''\overline{AA''}^2 \ldots$$

ó $$P r_1^2 = pr^2+p'r'^2+p''r''^2+\ldots$$
$$-\frac{1}{P}(pp'\overline{AA'}^2+pp''\overline{AA''}^2+\ldots).$$

Esta fórmula nos dará r_1. Hallando la distancia del centro de gravedad á tres puntos dados, quedará determinado éste; bastará para ello construir un tetraedro cuya base sea el triángulo que determinan los tres puntos dados y cuyas aristas laterales sean las distancias encontradas; el vértice del tetraedro será el centro de gravedad.

De la ecuacion anterior sale

$$pr^2+p'r'^2+p''^2\ldots=Pr_1{}^2+\frac{1}{P}(2pp'\overline{AA'}^2+2pp''\overline{AA''}^2\ldots),$$

Variando la posicion del punto O, sólo varía r_1 en el segundo miembro; de modo, que el menor valor de la suma $pr^2+p'r'^2+p''r''^2+\ldots$, es para $r_1=0$, esto es, cuando el punto O, coincide con el centro de gravedad: esta expresion tendrá un valor constante para todas las posiciones que tome el punto O, en una superficie esférica cuyo centro sea el centro de gravedad.

Al tratar de los momentos de inercia veremos una aplicacion de esta propiedad.

Determinacion del centro de gravedad de un cuerpo.

102. Siendo el centro de gravedad de un cuerpo el punto de aplicacion de la resultante de todas las fuerzas de gravedad que actúan sobre sus moléculas, y siendo estas fuerzas paralelas ó pudiéndose considerar como tales, el centro de gravedad será el centro de este sistema de fuerzas paralelas y se determinará como éste. Sean $p, p', p'', p'''\ldots$ los pesos de las moléculas, P el de todo el cuerpo, $x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''\ldots$ las coordenadas de los puntos de aplicacion de estos pesos, x_1, y_1, z_1, las del P, ó sea las del centro de gravedad: tendremos,

$$\begin{cases} Px_1=px+p'x'+p''x''+p'''x'''+\ldots=\Sigma px, \\ Py_1=py+p'y'+p''y''+p'''y'''+\ldots=\Sigma py, \\ Pz_1=pz+p'z'+p''z''+p'''z'''+\ldots=\Sigma pz, \end{cases}$$

$$\text{ó}\quad \begin{cases} x_1=\dfrac{\Sigma px}{P}, \\ y_1=\dfrac{\Sigma py}{P}, \\ z_1=\dfrac{\Sigma pz}{P}. \end{cases}$$

Estas fórmulas darán siempre las tres coordenadas del centro de gravedad. Los signos sumas Σ, que entran en ellas, se extienden á tantos términos como moléculas materiales tiene el cuerpo, que sabemos son en número indefinido, y es difícil hacer las sumas indicadas. Para evitar este inconveniente, cuando el cuerpo es homogéneo, supondremos que la materia que constituye las moléculas del cuerpo, se extiende en todos sentidos y llena completamente el volúmen aparente que ocupa el cuerpo, y que este volúmen aparente está dividido en elementos iguales que tendrán igual peso: es claro que entónces esta suma se hará por el mismo método, por el cual, sumando los volúmenes elementales, se obtiene el volúmen total; es decir, por una verdadera integracion entre ciertos y determinados límites, referentes á la superficie que termina el cuerpo. El problema, por lo tanto, llevará consigo las dificultades inherentes al cálculo de las integrales correspondientes; y es muy importante simplificar cuanto se pueda estas operaciones, necesarias para la determinacion del centro de gravedad. Sirven para este fin las siguientes reglas.

Reglas que simplifican la determinacion del centro de gravedad.

103. 1.ª Si la superficie del cuerpo es simétrica con respecto á un plano, el centro de gravedad está en este plano.

Para demostrar esta regla, tracemos en el plano de simetría dos sistemas de rectas equidistantes, perpendiculares unas á otras y tan próximas como se quiera, y por ellas planos perpendiculares al plano de simetría; estos planos dividirán el cuerpo en prismas rectos que están cortados por el plano de simetría en dos mitades superponibles. Tracemos ahora planos paralelos al de simetría y equidistantes, á uno y á otro lado de éste; estas mitades quedarán descompuestas en paralelepípedos rectángulos iguales y del mismo peso y en igual número, á uno y otro lado del plano de simetría; componiendo los pesos dos á dos, su resultante tendrá su punto de aplicacion en el punto medio de la recta que los une, que está situado en el plano de simetría; y lo mismo sucederá á todos los elementos iguales y simétricamente colocados respecto del plano; componiendo ahora todas estas resultantes, cuyos puntos de aplicacion están en el plano de simetría, el punto de aplicacion de la resultante general, que es el centro de gravedad, tambien estará en el plano de simetría.

104. 2.ª Si la superficie del cuerpo admite un plano diametral, el centro de gravedad está en este plano diametral.

Sabemos que un plano diametral es un plano que biseca á un sistema de cuerdas paralelas; por lo tanto, esta regla se demostrará como la anterior, con la sola diferencia de ser oblícuos los prismas que se forman á uno y otro lado del plano diametral, y oblicuángulos tambien los paralelepípedos en que estos quedan divididos, y que tendrán tambien el mismo volúmen y el mismo peso.

105. 3.ª Si la superficie del cuerpo tiene un eje de simetría, el centro de gravedad está en este eje. Esta regla la demostraremos trazando planos que pasen por el eje y formen entre sí ángulos diedros iguales, tan pequeños como se quiera, despues superficies cilíndricas tan próximas unas á otras como se quiera, que tengan por eje comun el eje de simetría, y por fin planos perpendiculares al eje suficientemente próximos unos á otros. De este modo quedará el cuerpo descompuesto en volúmenes iguales entre sí, dos á dos, de igual peso y situados á igual distancia del eje de simetría sobre la recta que va de una parte á otra del cuerpo, pasando por el eje de si-

metría; la resultante de cada dos de estos elementos, tiene su punto de aplicacion en el eje de simetría; luego la resultante general tambien tendrá su punto de aplicacion, que es el centro de gravedad, sobre esta recta.

106. 4.ª Si la superficie del cuerpo tiene un centro de figura, el centro de gravedad está en el centro de figura. Supongamos, para demostrarlo, que tomando como centro comun el centro de figura, trazamos una porcion de superficies esféricas, tan próximas unas á otras como se quiera; dividamos un hemisferio de una de estas esferas en elementos infinitamente pequeños por una serie de meridianos y paralelos; tomaremos estos elementos por bases de conos que tengan el vértice en el centro de la esfera, y consideremos las dos hojas opuestas de estos conos. Las superficies de estos conos y de estas esferas descomponen el sólido en elementos, que son dos á dos del mismo volúmen y del mismo peso, y están colocados simétricamente respecto del centro de figura, la resultante de cada dos de estos pesos pasará por el centro de figura; luego el punto de aplicacion de la resultante general estará en éste centro.

Si el cuerpo tiene las condiciones exigidas por la primera y segunda reglas, escogiendo el plano de simetría ó el plano diametral, por plano XY, por ejemplo, dos coordenadas bastarán para determinar el centro de gravedad. Si cumple con las de la tercera, tomando por eje de las X el de simetría, bastarán una sola. Y si cumple con la cuarta, se conocerá el centro de gravedad inmediatamente, porque el centro de figura es ordinariamente conocido.

107. Todo punto material, geométricamente considerado, tiene tres dimensiones, aunque éstas sean infinitamente pequeñas; de manera, que en rigor todo punto material es un cuerpo, y para encontrar su centro de

gravedad, debíamos usar las fórmulas establecidas para los cuerpos; mas como las dimensiones son muy pequeñas, sin error sensible, el centro de gravedad coincide con el mismo punto material.

Se consideran tambien en Mecánica superficies y líneas materiales. Si una de las dimensiones del cuerpo disminuye indefinidamente y la materia del cuerpo se condensa, obtendremos lo que se llama una superficie material. Si una de las dimensiones de la superficie disminuye indefinidamente condensándose la materia, tendremos una línea material. Estas superficies y líneas materiales, no son superficies ni líneas geométricas, sino cuerpos que por su forma se aproximan más ó ménos á éstas. Al determinar los centros de gravedad, deberemos considerar ademas de los cuerpos, las superficies y líneas materiales. Vamos á empezar por éstas últimas.

LECCION NOVENA.

Centro de gravedad de las líneas. — Línea recta. Quebrada. Contorno de un triángulo.—Arco de círculo. — Hélice. —Cicloide.— Parábola.

Centro de gravedad de las líneas.

108. Las líneas y las superficies pueden ser homogéneas y heterogéneas.

Línea material homogénea, es aquella en que porciones de ella, de igual longitud, tienen igual peso. Y superficie homogénea es una superficie tal, que porciones iguales de ella tienen igual peso.

El centro de gravedad de una línea cualquiera homogénea se obtiene expresando, que el momento del peso de esta línea, con respecto á cada uno de los tres planos coordenados, es igual á la suma de los momentos de sus elementos con respecto á los mismos planos.

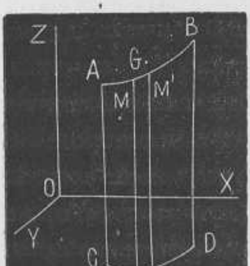


Fig. 51.

Sean (fig. 51), la línea AMB$=l$, M (x, y, z), un punto cualquiera de la línea, G (x_1, y_1, z_1), el centro de gravedad de l, AM$=s$, un arco de esta línea, MM'$=\Delta s$, uno de sus elementos.

La longitud de la línea estará dada por la fórmula

$$l=\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2},$$

tomando la integral entre los límites correspondientes á los extremos de esta línea.

El momento del elemento Δs, respecto al plano XY, es $\Delta s(z+\alpha)$, siendo α una cantidad que se hace cero cuando Δs llega á ser cero; sea M′ $(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$, el otro extremo del elemento $\Delta s=$ MM′, y que éste se halle comprendido entre dos planos paralelos al XY trazados á las distancias z y $z+\Delta z$; es claro, que $\alpha<\Delta z$, porque el centro de gravedad del pequeño arco Δs estará comprendido entre los dos planos. Aplicando el teorema arriba enunciado, tendremos

$$lz_1=\Sigma z\Delta s+\Sigma\alpha\Delta s.$$

Esta ecuacion es independiente de la magnitud de los elementos de la línea, luego será cierta cuando sean infinitamente pequeños y un número infinito. Pero en este caso lim. $\Sigma\alpha\Delta s=0$ y lim. $\Sigma z\Delta s=\int zds$; luego

$$lz_1=\int zds,$$

del mismo modo obtendremos

$$\left.lx_1=\int xds,\quad ly_1=\int ydy\right\}\ (1).$$

Estas tres integrales darán, tomándolas entre los límites correspondientes á los extremos A y B de la línea, las tres coordenadas x_1, y_1, z_1 del centro de gravedad G.

109. Si la línea es plana, tomando su plano por el XY, será $z=0$, $z_1=0$, y bastarán para resolver el problema las fórmulas

$$(2)\ lx_1=\int xds,\quad ly_1=\int yds.$$

110. Pueden obtenerse las fórmulas (1) por el mé-

todo de los límites, considerando la línea AB como el límite de un polígono homogéneo en ella inscrito.

El centro de gravedad de una recta limitada está en su punto medio, en virtud de la primera regla del núm. 103. El momento de la recta MM′ respecto al plano XY, es

$$MM'\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right) \text{ ó } \Delta s\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right)$$

aplicando el teorema conocido y llamado z_1 á la z del centro de gravedad del polígono, tendremos

$$z_1\,\Sigma MM' = \Sigma MM' z + \Sigma\frac{MM\,\Delta z}{2};$$

pasando al límite y observando, que lim. $\Sigma MM' = l$, lim. $\Sigma MM'z = \int zds$, lim. $\Sigma\frac{MM'\Delta z}{2} = 0$; resultará

$$lz_1 = \int zds,$$

y por un razonamiento análogo

$$lx_1 = \int xds,\quad ly_1 = \int yds.$$

Línea recta. Quebrada. Contorno de un triángulo.

111. El centro de gravedad de una recta limitada, está en su punto medio, como decimos arriba, porque el plano perpendicular á la recta, en su punto medio, es plano de simetría y contendrá, por lo tanto, al centro de gravedad, que será dicho punto medio.

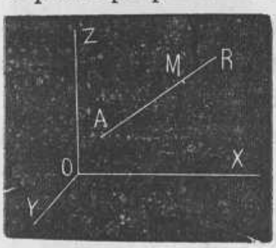


Fig. 52.

Puede tambien hallarse este centro por las fórmulas anteriores. Sean a, b, c, las coordenadas del extremo A de la recta AR (fig. 52), α, β, γ, los ángulos que forma con los ejes, AM$=s$ un secmento de la recta

AR$=l$, M (x, y, z) un punto cualquiera de ella; tendremos

$$(1)\quad x=a+s\cos\alpha,\ y=b+s\cos\beta,\ z=c+s\cos\gamma;$$

$$lx_1=\int xds=\int(a+s\cos\alpha)ds=\int ads+\int sds\cos\alpha=$$

$$=as+\frac{s^2}{2}\cos\alpha+\mathrm{C}.$$

Tomando la integral desde $s=0$, á $s=l$, será:

$$lx_1=al+\frac{l^2}{2}\cos\alpha;\ x_1=a+\frac{1}{2}l\cos\alpha,$$

del mismo modo

$$y_1=b+\frac{1}{2}l\cos\beta,$$

$$z_1=c+\frac{1}{2}l\cos\gamma.$$

El centro determinado de este modo es el punto medio de AR, porque si en las ecuaciones (1), hacemos $s=\frac{1}{2}l$, tendremos las coordenadas del punto medio de la recta,

$$x=a+\frac{1}{2}l\cos\alpha,\ y=b+\frac{1}{2}l\cos\beta,\ z=c+\frac{1}{2}l\cos\gamma.$$

112. *Línea quebrada.* — Para obtener el centro de gravedad de una línea quebrada cualquiera, supondremos aplicadas en los puntos medios de sus lados fuerzas paralelas dirigidas en el mismo sentido y proporcionales á estos lados; el centro de este sistema de fuerzas paralelas, que determinaremos por el método expuesto (79), será el centro de gravedad.

113. *Contorno de un triángulo.* — Como caso particular de línea quebrada, hallemos el centro de gravedad del contorno del triángulo ABC (fig. 53). Para ello debemos aplicar á los puntos medios A′, B′, C′, de los lados BC, AC, AB, pesos proporcionales á estos lados; hallemos la resultante de los pesos aplicados en A′ y B′; su punto de aplica-

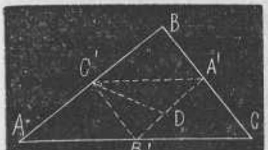


Fig. 53.

cion D dividirá á A'B' en partes inversamente proporcionales á las rectas BC y AB; hallemos la resultante de esta resultante y del peso aplicado en C'; su punto de aplicacion estará en la recta C'D, pero esta recta es la bisectriz del ángulo A'C'B', porque $\frac{A'D}{B'D}=\frac{AC}{BC}=\frac{2A'C'}{2B'C'}=\frac{A'C'}{B'C'}$. Tambien estará en la bisectriz del ángulo C'B'A' y en la del ángulo C'A'B, luego estará en su interseccion, ó lo que es lo mismo, el centro de gravedad del contorno de un triángulo, es el centro del círculo inscrito en otro triángulo que se obtiene, uniendo dos á dos los puntos medios de los lados del primer triángulo.

Arco de círculo.

114. Un arco de círculo admite un eje de simetría, que es el radio de su punto medio; luego su centro de gravedad estará sobre este radio. Sean BA C (fig. 54) el arco, O A el radio medio, que tomaremos por eje de las x, l la longitud del arco rectificado, x é y las coordenadas de uno de sus puntos, r su radio y a la distancia del centro á la cuerda BC $= c$: tendremos,

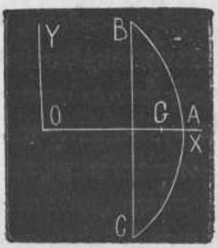


Fig. 54.

$$lx_1=\int xds;\ ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$$

$$=dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2};$$

$$x^2+y^2=r^2;\ \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y},$$

$$ds=dx\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}=dx\sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}}=\frac{r\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}},$$

$$l\,x_1=\int x\frac{rdx}{\sqrt{r^2-x^2}}=r\int\frac{xdx}{\sqrt{r^2-x^2}};$$

la integral indefinida

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{r^2-x^2}} = -\sqrt{r^2-x^2}+\text{C}.$$

Esta integral debe extenderse á las proyecciones de todos los elementos del arco situados encima ó debajo del eje de las x, de modo, que obtendremos el resultado apetecido, tomando la integral de las proyecciones de los elementos situados de A á B, y doblando el resultado; será

$$1x_1 = 2r\int_a^r \frac{xdx}{\sqrt{r^2-x^2}} = 2r\left[-\sqrt{r^2-r^2}+\sqrt{r^2-a^2}\right] =$$
$$= 2r\sqrt{r^2-a^2} = 2r\frac{1}{2}c = rc.$$

De donde $$x_1 = \frac{rc}{l},$$

es decir, que x_1 es una cuarta proporcional á l, c y r.

Arco de hélice.

115. Para hallar el centro de gravedad de un arco de hélice con facilidad haremos uso de la Geometría descriptiva. Sea A B C (fig. 55), una hélice trazada en la superficie de un cilindro recto de base circular, proyectado horizontalmente segun el círculo E F; el eje del cilindro se proyecta horizontalmente en el centro O del círculo. Vamos á buscar el centro de gravedad de un arco de esta hélice que se proyecta horizontalmente en MN y verticalmente en M'N'. Sin que el problema deje de ser general, podemos suponer que los puntos M y N son simétricos con respec-

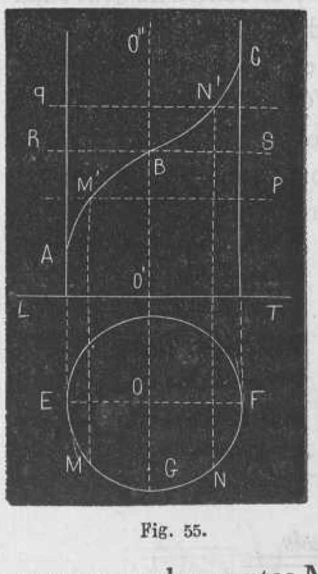


Fig. 55.

to á la perpendicular O G á la línea de tierra L T.

El centro de gravedad del arco de hélice se proyecta horizontalmente en el centro de gravedad G del arco MN, proyeccion del arco de hélice de que se trata, porque las proyecciones de los elementos ds de esta curva tienen todos el mismo peso, luego el centro de gravedad de este arco coincidirá con la proyeccion horizontal del centro de gravedad.

Para obtener la altura del centro de gravedad sobre el plano horizontal, nos valdremos de la fórmula

$$z_1 = \frac{\int z ds}{\int ds}.$$

De esta ecuacion resulta que z_1 no varía, miéntras z no varía. Si desarrollamos la superficie del cilindro sobre uno de los planos tangentes, esta altura no variará; el arco M'N', se trasforma en una recta y el centro de gravedad de esta recta será su punto medio: luego el centro de gravedad del arco M'N' estará en un plano horizontal RS equidistante de los M'P y N'Q y se proyecta verticalmente en el punto B, interseccion de dicho plano con la vertical tirada por el punto G; conociendo las proyecciones horizontal y vertical del centro de gravedad del arco de hélice M'N', es conocido este centro de gravedad.

Cycloide.

116. La ecuacion diferencial de la cycloide referida á los ejes AX y AY (fig. 56), es

$$(1) \qquad dx = \frac{y dy}{\sqrt{2ry - y^2}},$$

siendo r el radio del círculo generador. Vamos á referirla á los ejes OY' y OX', que son la tangente en el vértice y el eje de simetría de la curva; que es como suele usarse en la Mecánica. Sean $M(x,y)$ un punto cualquiera,

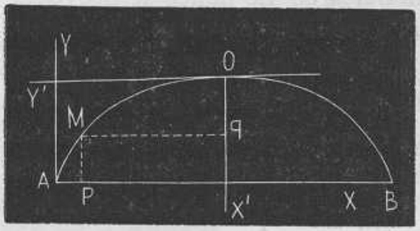


Fig. 56.

$AP=x, MP=y$, $OQ=x'$, $MQ=y'$: para trasformar coordenadas, tendremos

$x=\pi r-y'$, $y=2r-x'$, $dx=-dy'$, $dy=-dx'$; sustituyendo en la (1) se tiene

$$dy'=\frac{(2r-x')dx'}{\sqrt{2r(2r-x')-(2r-x')^2}}=\frac{dx'}{\sqrt{\frac{2r}{2r-x'}-1}}=\frac{dx'}{\sqrt{\frac{x'}{2r-x'}}}$$

$$=\frac{dx'\sqrt{2r-x'}}{\sqrt{x'}},$$

y suprimiendo ya los acentos, será

$$(2)\quad dy=\frac{\sqrt{2r-x}dx}{\sqrt{x}}$$

Supongamos que se quiere hallar el centro de gravedad x_1, y_1 de la porcion $OM=l$ de cycloide.

Hallemos primero la longitud l de este arco. Tenemos

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=dx\sqrt{1+\frac{2r-x}{x}}$$

$$=\frac{dx\sqrt{2r}}{\sqrt{x}}$$

$$(3)\quad l=\int_0^x\sqrt{2r}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{2rx}.$$

Resolvamos ya la cuestion propuesta. Para hallar x_1, tenemos,

$$lx_1=\int_0^x x\,ds=\int_0^x x.\frac{\sqrt{2r}\,dx}{\sqrt{x}}=\sqrt{2r}\int_0^x \sqrt{x}\,dx$$

$$=\frac{2}{3}\,x\sqrt{2rx};$$

$$(4)\quad x_1=\frac{\frac{2}{3}x\sqrt{2rx}}{2\sqrt{2rx}}=\frac{1}{3}x.$$

Y para hallar y_1,

$$ly_1=\int y\,ds=\sqrt{2r}\int y\,\frac{dx}{\sqrt{x}}=\sqrt{2r}\int y\,d(2\sqrt{x}).$$

Integrando por partes será:

$$ly_1=\sqrt{2r}\,(2y\sqrt{x}-2\int\sqrt{x}\,dy)$$

$$=\sqrt{2r}\left(2y\sqrt{x}-2\int\sqrt{x}\frac{\sqrt{2r-x}\,dx}{\sqrt{x}}\right)$$

$$=\sqrt{2r}\left[2y\sqrt{x}+\tfrac{4}{3}\,(2r-x)\sqrt{2r-x}+C\right].$$

Para determinar la constante, tenemos $y_1=0$, para $x=0$; luego
$0=\sqrt{2r}\left[\frac{4}{3}(2r)^{\frac{3}{2}}+C\right)$; $C=-\frac{4}{3}\,2r\sqrt{2r}$, y dividiendo por $l=2\sqrt{2rx}$

$$(5)\quad y_1=y+\frac{2}{3\sqrt{x}}\left[(2r-x)^{\frac{3}{2}}-(2r)^{\frac{3}{2}}\right].$$

117. Si queremos el centro de gravedad de la semicycloide OA, haremos $x=2r$ é $y=\pi r$, y tendremos:

$$(6)\quad x_1=\tfrac{2}{3}r,\; y_1=\pi r-\frac{2}{3\sqrt{2r}}\,2r\sqrt{2r}=2r\left(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{2}{3}\right).$$

Parábola.

118. La ecuacion ordinaria de la parábola es

$$y^2=2px;\ ydy=pdx;$$

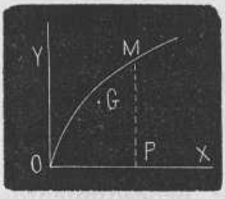


Fig. 57.

sea (fig. 57) $OM=s$; tendremos

$$s=\int ds=\int dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

$$=\int dy\sqrt{\frac{p^2+y^2}{p^2}}=$$

$$\frac{1}{p}\int dy\sqrt{p^2+y^2}.$$

Esta integral se obtiene por las fórmulas de integracion de las diferenciales binomias, y tomándola desde $y=0$, hasta $y=y$, dará:

$$(1)\quad s=\frac{1}{p}\left(y\sqrt{p^2+y^2}+p^2\,l\frac{y+\sqrt{p^2+y^2}}{p}\right).$$

Esto supuesto, busquemos las coordenadas x_1 é y_1 del centro de gravedad G; tendremos para hallar y_1

$$sy_1=\int y\,ds=\frac{1}{p}\int y\sqrt{p^2+y^2}\,dy=$$

$$\frac{1}{2p}\int 2y\,dy\,(y^2+p^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3p}(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}+C;$$

$$y=0\begin{cases}s=0,\\ sy_1=0,\end{cases}\quad C=-\frac{p^2}{3},$$

luego $\quad(2)\quad sy_1=\frac{1}{3p}(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{p^2}{3},$

fórmula que dará y_1, dividiendo por s, cuyo valor conocemos.

Hallemos ya x_1. Sabemos, que

$$sx_1=\int x\,ds=\int x\,dx\sqrt{1+\frac{p^2}{y^2}}=\int x\,dx\sqrt{1+\frac{p^2}{2px}}$$

$$=\int dx\sqrt{x^2+\frac{px}{2}}=\int dx\sqrt{\left(x+\frac{p}{4}\right)^2-\frac{p^2}{16}};$$

efectuando la integracion por las mismas fórmulas empleadas para hallar s, tendremos, observando que la constante de la integracion es $C=-l\frac{p}{4}$; por ser para

$$x=0,\ s=0,\ sx_1=0;$$

y resultará:

$$(3)\quad sx_1=\frac{1}{2}\left(x+\frac{p}{4}\right)\sqrt{x^2+\frac{px}{2}}-\frac{p^2}{32}\,l\,\frac{4x+p+4\sqrt{x^2+\frac{px}{2}}}{p}.$$

Dividiendo por s, se obtiene x_1.

Por las mismas fórmulas y análogos procedimientos hallaríamos el centro de gravedad de una línea dada cualquiera.

LECCION DÉCIMA.

Centro de gravedad de las superficies. — Caso en que sean planas. — Triángulo. — Polígono. — Trapecio. — Cuadrilátero. — Sector y segmento de círculo. — Parábola. — Cycloide.

Centro de gravedad de las superficies.

119. Supongamos una superficie homogénea cualquiera referida á ejes rectangulares, y en ella dos puntos M (x, y, z) y M′ $(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$ (fig. 58), suficientemente próximos; tracemos por estos puntos dos planos paralelos al ZX y dos paralelos al ZY, estos cuatro planos interceptarán un elemento de la superficie que llamaremos s; su proyeccion sobre el plano XY será, $s_1 = s \cos \theta$, siendo θ el ángulo que forma el plano tangente á la superficie en el punto M con el XY; el valor de este coseno es, $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$;

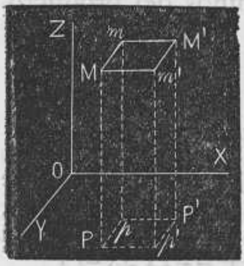


Fig. 58.

siendo $p = \frac{dz}{dx}$ y $q = \frac{dz}{dy}$; y tendremos, cuando Δx y Δy se conviertan en dx y dy,

$$s_1 = s\,\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad s = s_1\sqrt{1+p^2+q^2}$$

$$s = dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2};$$

ántes de ser Δx, Δy infinitamente pequeñas, tendremos:

$$(1) \quad s = \Delta x \Delta y \left(\sqrt{1+p^2+q^2}+\alpha\right);$$

siendo α una cantidad que se hace nula en el límite.

La z del centro de gravedad del elemento $MmM'm'$, puede representarse por $z+\beta$, siendo $\beta<\Delta z$, y haciéndose nula al mismo tiempo que Δx y Δy; porque este punto está comprendido entre dos planos paralelos al X Y, tirados por los puntos más alto y más bajo del elemento que consideramos. El momento de este elemento con respecto al plano XY es,

$$(z+\beta)(\Delta x \Delta y \sqrt{1+p^2 q^2+\alpha}),$$

ó
$$z \Delta x \Delta y \sqrt{1+p^2+q^2}+H \Delta x \Delta y;$$

llamando H á la suma de los tres términos del producto que ademas del factor comun $\Delta x \Delta y$, contienen α ó β, y serán cero cuando estas cantidades lo sean. Si descomponemos la superficie en elementos, por dos series de planos paralelos, unos al ZX y otros al ZY, llamando S á la superficie propuesta, y x_1, y_1, z_1 á las coordenadas de su centro de gravedad, tendremos,

$$(2) \quad S z_1 = \Sigma\Sigma\, z \Delta x \Delta y \sqrt{1+p^2+q^2} + \Sigma\Sigma H \Delta x \Delta y.$$

Esta ecuacion subsistirá cuando Δx y Δy se conviertan en dx y dy; mas entónces, lim. $\Sigma\Sigma H \Delta x \Delta y = 0$ y

$$\text{lim.}\Sigma\Sigma z \Delta x \Delta y \sqrt{1+p^2+q^2} = \int\int z dx\, dy \sqrt{1+p^2+q^2};$$

luego
$$(3) \quad S z_1 = \int\int z\, dy\, dx \sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Repitiendo la operacion con respecto á los otros dos planos coordenados, y poniendo s en vez de su igual $dxdy\sqrt{1+p^2+y^2}$, tendremos para encontrar x_1, y_1, z_1, las ecuaciones,

$$(4) \quad S x_1 = \int\int xs, \quad S y_1 = \int\int ys, \quad S z_1 = \int\int zs$$

que unidas á la

$$(5)\quad S=\int\int dxdy\sqrt{1+p^2+q^2},$$

resuelven el problema.

Los límites de estas integrales dobles serán, con respecto á y desde $y=\varphi(x)$, hasta $y'=\pi(x)$, considerando á x como constante; porque suponiendo que la proyeccion del contorno aparente de la superficie sobre el plano XY, es una línea convexa, como siempre se supone, á cada valor de x corresponderán dos de y, á causa de que una paralela al eje Y sólo puede cortar á la proyeccion del contorno en dos puntos. Se integrará luégo respecto á x, desde $x=a$, hasta $x=b$, siendo estas ecuaciones las de dos planos paralelos al YZ, tirados por los puntos extremos del contorno aparente, siendo $a<b$.

Centro de gravedad de las superficies planas.

120. En el caso de ser plana la superficie cuyo centro de gravedad se pide, tomando su plano por el de las XY, $z_1=0$, $\frac{dz}{dx}=0=p$, $\frac{dz}{dy}=0=q$, y las fórmulas (4) del número anterior se convertirán en las siguientes:

$$(6)\quad S=\int\int dxdy,\ Sx_1=\int\int xdxdy,$$

$$Sy_1=\int\int ydxdy;$$

integrándolas con respecto á y, y señalando los límites, serán,

$$(7)\quad S=\int_a^b (y-y')dx,\ Sx_1=\int_a^b (y-y')xdx,$$

$$Sy_1=\frac{1}{2}\int_a^b (y^2-y'^2)dx.$$

Estas fórmulas, que con facilidad pueden hallarse directamente, aplicando el razonamiento empleado en el párrafo anterior á una figura plana, situada en el plano XY, son las que usaremos en el caso de las superficies planas.

Triángulo.

121. El centro de gravedad de un triángulo puede hallarse gráfica ó analíticamente.

Para hallarlo gráficamente, sea ABC (fig. 59) el triángulo, su centro de gravedad estará en la mediana BB′, que une el vértice B con el punto medio B′ del lado opuesto; porque si tiramos un plano perpendicular al de figura por la recta BB′, tendremos un plano diametral que biseca las cuerdas paralelas á AC, y que contendrá al centro de gravedad; y como éste está tambien en el plano del triángulo, estará en la interseccion BB′ de estos dos planos. Tambien estará en la mediana AA′ que une el vértice A, con el punto medio A′ del lado opuesto; luego estará en su interseccion G. Los triángulos AEG y A′B′G son semejantes, y como AB es doble de A′B′, BG será doble de BG, ó GB′ es el tercio de BB′; luego el centro de gravedad de un triángulo está en la mediana que une el vértice con el punto medio de la base, á los dos tercios de ésta, contando desde el vértice, y á un tercio contando desde la base.

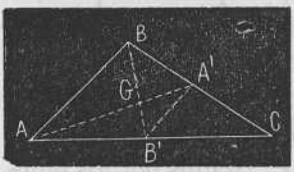


Fig. 59.

Hallemos ahora analíticamente el centro de gravedad de un triángulo. Por el vértice A (fig. 60), tracemos dos ejes rectangulares y que uno de ellos, el AX, sea perpendicular al lado opuesto BC: sean AD$=h$, la altura, y x_1, y_1, las coordenadas del

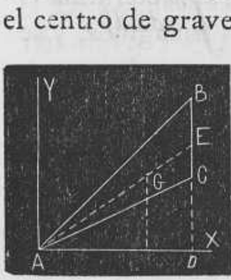


Fig. 60.

centro de gravedad G; y S el área del triángulo; $y = mx, y' = m'x$ las ecuaciones de los lados AB y AC; tendremos por las fórmulas (7) del número 119

$$S = \int_0^h (y - y')\,dx = \int_0^h (m - m')\,x\,dx = \frac{(m - m')h^2}{2},$$

$$Sx_1 = \int_0^h (y - y')\,x\,dx = \int_0^h (m - m')\,x^2 dx = \frac{(m - m')h^3}{3},$$

$$Sy_1 = \frac{1}{2}\int_0^h (y^2 - y'^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^h (m^2 - m'^2)\,x^2 dx$$

$$= \frac{(m^2 - m'^2)\,h^3}{6};$$

de donde $\quad x_1 = \frac{2}{3}h, \qquad y_1 = \frac{(m + m')h}{3}.$

Las coordenadas del punto E, medio de CB, son

$$AD = h,\ ED = \frac{(m + m')\,h}{2};$$

luego el centro de gravedad está situado sobre la mediana AE del triángulo, y á los dos tercios de esta línea á contar desde el vértice.

Polígono.

122. Para encontrar el centro de gravedad de un polígono, se descompone en triángulos, se determina el centro de gravedad de cada uno de estos triángulos, y se suponen aplicadas en cada uno de los centros de gravedad de los triángulos, fuerzas paralelas dirigidas en el mismo sentido y proporcionales á las áreas de estos triángulos; el centro de estas fuerzas paralelas, que se determina por el método expuesto (79), será el centro de gravedad del polígono.

Trapecio.

123. Como caso particular del polígono busquemos el centro de gravedad del trapecio ABCD (fig. 61). Des-

compongámosle en los triángulos ABD, cuyo centro de gravedad G_2 está en la mediana BE, á los dos tercios de B ó un tercio de E; y DBC cuyo centro de gravedad es G_1: uniendo estos dos puntos, por la G_1G_2, suponiendo aplicadas en ellos dos fuerzas paralelas y del mismo sentido, y proporcionándoles á las áreas de los triángulos ABD y DBC, el punto G de aplicacion de la resultante de estas dos fuerzas será el centro de gravedad del trapecio. Este centro G queda tambien determinado por la interseccion de la G_1G_2 con la FE, que une los puntos medios de las bases del trapecio; porque un plano trazado por FE perpendicular al del trapecio, es un plano diametral con respecto á las cuerdas paralelas á las bases AD y BC, y contendrá el centro de gravedad del trapecio, el cual está en la FE, interseccion de estos dos planos, y como sabemos que tambien estará en la G_1G_2, su interseccion G será el centro de gravedad del trapecio.

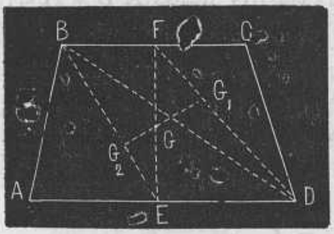


Fig. 61.

Cuadrilátero.

124. El centro de gravedad de un cuadrilátero ABCD (fig. 62), se obtendrá dividiéndole en triángulos por medio de la diagonal BC; los centros de gravedad de estos triángulos estarán en las medianas AQ y DQ á un tercio de cada una de ellas, partiendo del punto comun Q; uniendo estos centros G_1 y G_2 y dividiendo la recta G_1G_2 en partes

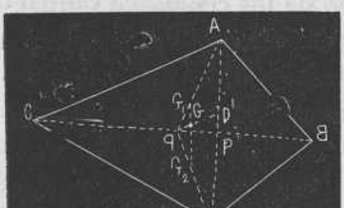


Fig. 62.

inversamente proporcionales á las áreas de los triángulos ABC y BCD, se obtendrá el punto G, que es el centro de gravedad del cuadrilátero. Pero las áreas de estos triángulos, que tienen la base comun BC, son proporcionales á las rectas AP y DP proporcionales á sus alturas; luego tomando AD′ igual á DP y uniendo D′ con Q, el punto de encuentro G de esta línea con la G_1G_2, será el centro buscado.

Sector y secmento de un círculo.

125. Para encontrar el centro de gravedad del sector CBAD (fig. 63), supondremos el arco BAC dividido en una infinidad de elementos iguales, y el sector descompuesto en los sectores infinitamente pequeños correspondientes á estos elementos; estos sectores elementales pueden considerarse como triángulos cuyo centro de gravedad estará situado en el radio del punto medio y distante del centro los dos tercios del radio: el lugar geométrico de todos estos centros de gravedad será el arco HK trazado con el radio $CH=\frac{2}{3}CB$. El centro de gravedad G del sector, será el centro de gravedad de un sistema de infinitas fuerzas paralelas é iguales que actúan sobre los diferentes puntos del arco HK, luego coincidirá con el centro de gravedad de este arco. Si llamamos r al radio CB, l á la longitud del arco BAD, y c á la cuerda BD de este arco, tendremos,

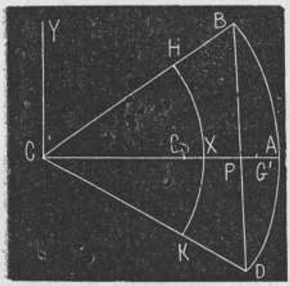


Fig. 63.

$$x_1=CG=\frac{\frac{2}{3}r.\frac{2}{3}c}{\frac{2}{3}l}=\frac{2}{3}\frac{rc}{l};$$

es decir, que el centro de gravedad del sector está situado en el radio CA del punto medio, y á una distancia del punto C, que es los dos tercios de una cuarta proporcional á la longitud del arco, su cuerda y el radio.

Para determinar el centro de gravedad G' del secmento sabemos que el área del sector CBAD, es igual á la del secmento BADP, más la del triángulo correspondiente CBD; las áreas de estas figuras son respectivamente, haciendo $p=\text{CP}$,

$$\tfrac{1}{2}lr,\ \tfrac{1}{2}cp,\ \tfrac{1}{2}(lr-cp);$$

los centros de gravedad de estas figuras están todos sobre el radio CA del punto medio, y distan del centro $\frac{2}{3}\frac{rc}{l}$, $\frac{2}{3}p$, y llamando x'_1 á la distancia del centro de gravedad del secmento al centro C, tendremos por el teorema de los momentos

$$\frac{1}{2}\,lr.\,\frac{2}{3}\frac{rc}{l}=\frac{1}{2}\,cp.\,\frac{2}{3}p+\frac{1}{2}\,(lr-cp)\,x_1;$$

despejando x'_1

$$x'_1=\frac{2}{3}\frac{(r^2-p^2)\,c}{rl-pc}=\frac{c^3}{6\,(rl-pc)}.$$

Puede obtenerse directamente y con facilidad el centro de gravedad del secmento de círculo. Sea DABD el secmento y x'_1 la distancia OG' del centro de gravedad al centro del círculo, que tomaremos por orígen de las coordenadas. Tendremos:

$$x_1=\frac{\int yxdx}{\text{S}},$$

siendo S el área del secmento. La ecuacion del círculo $x^2+y^2=r^2$, nos da $xdx=-ydy$; y la integral se reduce á

$$\int xy\,d\,x=\int -y^2dy=-\frac{y^3}{3}+\text{C}.$$

Los límites de la integral son desde $y=-\frac{c}{2}$, hasta $y=0$, teniendo cuidado de duplicar el resultado; de manera que

$$\int_{-\frac{c}{2}}^{0} -y^2\,dy=\frac{\frac{c^3}{8}}{3}=\frac{c^3}{3.8}.$$

El duplo de esta cantidad es $\frac{c^3}{3.4}$ y poniendo ya este valor en la fórmula, y en vez de S, el suyo $\frac{1}{2}(rl-pc)$, tendremos:

$$x_1=\frac{\frac{c^3}{3.4}}{\frac{1}{2}(rl-pc)}=\frac{c^3}{6\,(rl-pc)}.$$

Parábola.

126. Propongámonos encontrar el centro de gravedad de un secmento de parábola OMP (fig. 64). Como la curva inferior es el eje de las x, $y'=0$, y las fórmulas que resuelven el problema son:

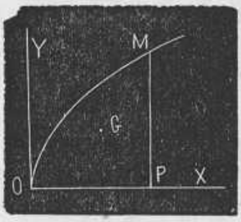


Fig. 64.

$$(1)\quad S=\int_o^x y\,dx,$$

$$Sx_1=\int_o^x xy\,dx,\ Sy_1=\frac{1}{2}\int_o^x y^2\,dx;$$

la ecuacion de la parábola $y^2=2px$, da $y=\sqrt{2px}$ y tendremos,

$$S=\int_o^x \sqrt{2p}\,x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{2}{3}\,x\sqrt{2px};$$

$$Sx_1=\int_o^x \sqrt{2p}\;x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{2}{5}x^2\sqrt{2px},$$

$$Sy_1=\frac{1}{2}\int_o^x 2px\,dx=\frac{px^2}{2}.$$

dividiendo las dos últimas por la primera, obtendremos:

$$x_1=\frac{3}{5}x,\; y_1=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{px}{2}}=\frac{3}{8}y.$$

Cyclóide.

127. La cyclóide referida á la tangente en el vértice y á su eje de simetría, tiene por ecuacion diferencial, $dy=dx\sqrt{\frac{a-x}{x}}$, siendo $a=2r$.

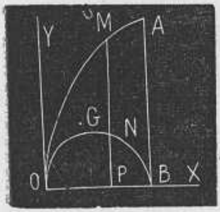


Fig. 65.

Vamos á determinar el centro de gravedad del secmento OPM (fig. 65). Por la misma razon que en el párrafo anterior, $y'=0$, y las fórmulas que resuelven el problema son:

$$(1)\quad S=\int_0^x ydx,\; Sx_1=\int_0^x xydx,\; Sy_1=\frac{1}{2}\int_0^x y^2dx.$$

Integrando por partes la primera, tendremos:

$$S=\int_0^x ydx=xy-\int_0^x xdy=xy-\int_0^x xdx\sqrt{\frac{a-x}{x}}$$

$$=xy-\int_0^x dx\sqrt{ax-x^2}.$$

Ahora el área del sector ONP está representada por $\int_0^x dx\sqrt{ax-x^2}$, de modo que llamando L á esta área, será, $L=\int_0^x dx\sqrt{ax-x^2}$, y tendremos

$$(2)\quad S=xy-L.$$

Calculemos ahora x_1. Tenemos

$$Sx_1=\int xydx=\int y\,d.\frac{x^2}{2}=\frac{x^2y}{2}-\frac{1}{2}\int x^2dy$$

$$=\frac{x^2y}{2}-\frac{1}{2}\int x^2dx\sqrt{\frac{a-x}{x}}=\frac{x^2y}{2}-\frac{1}{2}\int xdx\sqrt{ax-x^2};$$

añadiendo y quitando $\frac{a}{2}$ en la última integral, será

$$\int x\,dx\sqrt{ax-x^2}=\int\left[\frac{a}{2}-\left(\frac{a}{2}-x\right)\right]dx\sqrt{ax-x^2}$$

$$=\frac{a}{2}\int dx\sqrt{ax-x^2}-\frac{1}{2}\int(a-2x)\,dx\sqrt{ax-x^2}$$

$$=\frac{a\mathrm{L}}{2}-\frac{1}{3}(ax-x^2)^{\frac{3}{2}}:$$

luego $\quad \mathrm{S}x_1=\frac{x^2y}{2}-\frac{a\mathrm{L}}{4}+\frac{1}{6}(ax-x^2)$.

La constante de esta integracion es cero, porque $x=0$, da $\begin{cases}\mathrm{S}=0,\\ \mathrm{L}=0.\end{cases}$

Vamos á determinar y_1. Tenemos,

$$\mathrm{S}y_1=\frac{1}{2}\int y^2dx=\frac{1}{2}y^2x-\int xy\,dy;$$

$$\int xy\,dy=\int xydx\sqrt{\frac{a-x}{x}}=\int y\sqrt{x}\,dx\sqrt{a-x}$$

$$=-\frac{2}{3}y\sqrt{x}(a-x)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}\int(a-x)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}.(y\sqrt{x})$$

$$=-\frac{2}{3}y(a-x)\sqrt{ax-x^2}+\frac{2}{3}\int(a-x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}\,dy$$

$$+\frac{2}{3}\int(a-x)^{\frac{3}{2}}y\,\frac{dx}{2\sqrt{x}};$$

$$\int(a-x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}\,dy=\int(a-x)^2dx=-\frac{1}{3}(a-x)^3,$$

$$\int(a-x)^{\frac{3}{2}}y\,\frac{dx}{2\sqrt{x}}=\int(a-x)\frac{y}{2}dy=\frac{1}{4}ay^2$$

$$-\frac{1}{2}\int xydy;$$

por lo tanto

$$\int xy\,dx=-\frac{2}{3}y(a-x)\sqrt{ax-x^2}-\frac{2}{9}(a-x)^3+\frac{1}{6}ay^2$$

$$-\frac{1}{3}\int xydy;$$

despejando $\int xydy$,

$$\int xydy = -\frac{1}{2}y(a-x)\sqrt{ax-x^2} - \frac{1}{6}(a-x)^3 + \frac{1}{8}ay^2 + C.$$

Para $x=0$ se tiene $y=0$, $\int xy\,dy=0$,

$$0 = -\frac{1}{6}a^3 + C,\ C = \frac{1}{6}a^3;$$

y por fin

$$Sy_1 = \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{8}ay^2 + \frac{1}{2}y(a-x)\sqrt{ax-x^2} + \frac{1}{6}(a-x)^3 - \frac{1}{6}a^3$$

dividiendo por S, se obtienen x_1 é y_1.

Si queremos el centro de gravedad de la semicycloide OAB, bastará hacer en las fórmulas anteriores $x=a$, $y=\frac{\pi a}{2}$; será

$$S = a.\frac{\pi a}{2} - \frac{\pi a^2}{8} = \frac{3}{8}\pi a^2;\ Sx_1 = \frac{a^3\pi}{4} - \frac{a}{4}.\frac{\pi a^2}{8} = \frac{7\pi a^3}{32}$$

$$Sy_1 = \frac{1}{2}\frac{\pi^2 a^2}{4}.a - \frac{1}{8}a\frac{\pi^2 a^2}{4} - \frac{1}{6}a^3 = \frac{3\pi^2 a^3}{3^2} - \frac{1}{6}a^3$$

y por fin dividiendo por S

$$x_1 = \frac{7}{12}a,\qquad y_1 = \frac{\pi a}{4} - \frac{4a}{9\pi}.$$

LECCION XI.

Centro de gravedad de las superficies de revolucion.—Zona esférica. —Zona cycloidal.—Zona parabólica.—Teoremas de Pappus ó de Guldin.—Volúmen de un cilindro.

Centro de gravedad de las superficies de revolucion.

128. Las superficies de revolucion tienen el centro de gravedad en el eje de revolucion, por ser éste un eje de simetría de la superficie.

Sea AB (fig. 66) la curva plana, que engendra la superficie de revolucion girando al rededor de la recta OX situada en su plano, que será el eje de la superficie, y contendrá por lo tanto su centro de gravedad G.

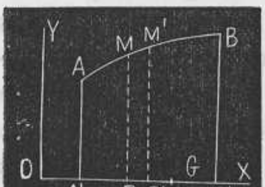


Fig. 66.

Sean M (x, y) y M' $(x + dx, y + dy)$, dos puntos infinitamente próximos de la línea generadora; MM'$=ds$ y OG$=x_1$. La superficie engendrada por la revolucion del elemento de curva ds será un tronco de cono, cuya área es $2\pi yds$, y llamando S á la superficie engendrada por toda la línea AB; tendremos

$$(1) \quad dS = 2\pi yds, \qquad S = 2\pi \int yds.$$

El momento del elemento de S, con respecto al plano ZY, es $2\pi xyds$; por ser x la distancia á este plano, del centro de gravedad del elemento infinitamente pequeño que consideramos; el momento de la superficie total S, es Sx_1: luego $$Sx_1=2\pi\int xyds.$$

Centro de gravedad de la zona esférica.

129. El centro de gravedad de la zona esférica está situado en el diámetro perpendicular á sus bases, que es el eje de revolucion. Su distancia al centro de la esfera puede determinarse facilmente por la fórmula que acabamos de establecer; pero es preferible el método siguiente. Supongamos dividida la altura de la zona en un número infinito de partes iguales, y por los puntos de division tiremos planos paralelos á las bases de la zona; quedará ésta dividida en igual número de zonas elementales de igual altura, y por lo tanto de igual área; el centro de gravedad de cada una de estas zonas elementales estará situado en el elemento correspondiente del eje; de manera, que para encontrar el centro de gravedad de la zona total, determinaremos el centro de un sistema de infinitas fuerzas paralelas é iguales, aplicadas á distancias iguales de la altura de la zona; luego el centro de gravedad de la zona se encuentra en el punto medio de su altura, es decir, en el punto medio de la recta que une los centros de los círculos que le sirven de bases.

Zona cycloidal.

130. Para determinar el centro de gravedad de la superficie engendrada por el arco OM de cyclóide, girando alrededor de OX (fig. 67), escogeremos los ejes como en el número 116, y la ecuacion diferencial de la cyclóide es $dy=dx\sqrt{\frac{a-x}{x}}$; con la cual hallaremos, que

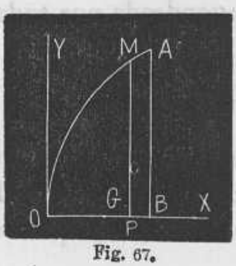


Fig. 67.

$$ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\sqrt{1+\frac{a-x}{x}} = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{x}},$$

$$\mathrm{S} = 2\pi\sqrt{a}\int\frac{ydx}{\sqrt{x}} = 2\pi\sqrt{a}\int y d.(2\sqrt{x})$$

$$= 2\pi\sqrt{a}(2y\sqrt{x} - 2\int\sqrt{x}dy)$$

$$= 4\pi\sqrt{a}(y\sqrt{x} - \int dx\sqrt{a-x}),$$

ó $$\mathrm{S} = 4\pi y\sqrt{ax} + \frac{8}{3}\pi\sqrt{a}\,(a-x)^{\frac{3}{2}} + \mathrm{C};$$

para $x=0$, $\mathrm{S}=0$; luego $0 = \frac{8}{3}\pi\sqrt{a}.\,a^{\frac{3}{2}} + \mathrm{C}$,

$$\mathrm{C} = -\frac{8}{3}\pi a^2.$$

De modo que

$$(1)\quad \mathrm{S} = 4\pi y\sqrt{ax} + \frac{8}{3}\pi\sqrt{a}(a-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{3}\pi a^2$$

Para hallar x_1, tenemos,

$$\mathrm{S}x_1 = 2\pi\int xy\,ds = 2\pi\sqrt{a}\int y\,dx\sqrt{x};$$

$$\int y\,dx\sqrt{x} = \int yd\left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}yx^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int x^{\frac{3}{2}}dy$$

$$= \frac{2}{3}xy\sqrt{x} - \frac{2}{3}\int x\sqrt{a-x}dx.$$

Esta última integral, añadiendo y quitando a, se trasforma en

$$\int x\sqrt{a-x}dx = \int[a-(a-x)]\sqrt{a-x}dx$$

$$= \int a\sqrt{a-x}dx - \int(a-x)^{\frac{3}{2}}dx = -\frac{2}{3}a\,(a-x)^{\frac{3}{2}}$$

$+\frac{2}{5}(a-x)^{\frac{5}{2}}$; sustituyendo, tendremos

$$\mathrm{S}x_1 = 2\pi\sqrt{a}\left[\frac{2}{3}xy\sqrt{x} + \frac{4}{9}a\,(a-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(a-x)^{\frac{5}{2}}\right] + \mathrm{C}$$

para $x=0$, $\mathrm{S}=0$; y da, $0 = \frac{8}{9}\pi a^3 - \frac{8}{15}\pi a^3 + \mathrm{C}$; $\mathrm{C} = -\frac{16}{45}\pi a^3$;

y por fin,

$$(2)\quad Sx_1 = \frac{4}{3}\pi xy\sqrt{ax} + \frac{8}{9}\pi a^{\frac{3}{2}}(a-x)^{\frac{3}{2}}$$
$$-\frac{8}{15}\pi\sqrt{a}(a-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{16}{45}\pi a^3:$$

dividiendo por S, obtendremos x_1.

Si se quiere el centro de gravedad de la superficie engendrada por la semicyclóide, haremos

$$x = a,\ y = \frac{\pi a}{2};$$

y resultará:

$$S = 2\pi a^2\left(\pi - \frac{4}{3}\right),\qquad Sx_1 = \frac{2\pi}{3}a^3\left(\pi - \frac{8}{15}\right)$$

$$x_1 = \frac{a}{3}\cdot\frac{\pi - \frac{8}{15}}{\pi - \frac{4}{3}}.$$

Zona parabólica.

131. Vamos á encontrar el centro de gravedad de la superficie engendrada por el arco OM de parábola, girando alrededor de su eje de simetría OX (fig. 68). La ecuacion de la parábola es

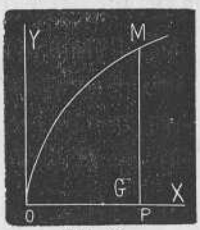


Fig. 68.

$$y^2 = 2px;\ ds = \frac{1}{p}\sqrt{p^2+y^2}\,dy;$$

$$S = 2\pi\int yds = \frac{2\pi}{p}\int y\sqrt{p^2+y^2}dy = \frac{2\pi}{3p}(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}} + C,$$

para $\quad x = 0,\ S = 0$ é $y = 0$;

luego $\quad 0 = \frac{2\pi}{3p}(p^2)^{\frac{3}{2}} + C;\quad C = -\frac{2\pi p^2}{3};$

será $\quad S = \frac{2\pi}{3p}(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2\pi p^2}{3}.$

Para hallar x_1 tenemos,

$$Sx_1 = 2\pi\int xyds = \frac{2\pi}{p}\int xydy\sqrt{y^2+p^2}$$

$$=\frac{\pi}{p^2}\int y^3 dy\sqrt{y^2+p^2}$$

$$=\frac{\pi}{p^2}\left[\frac{y^2}{3}(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}\int(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}y\,dy\right]$$

$$=\frac{\pi y^2}{3p^2}(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{2\pi}{15p^2}(y^2+p^2)^{\frac{5}{2}}+C;$$

$$x=0,\ \text{da}\begin{cases}y=0,\\ S=0,\end{cases}\text{luego } 0=-\frac{2\pi}{15p^2}(p^2)^{\frac{5}{2}}+C;\ C=\frac{2\pi p^3}{15},$$

y se tendrá

$$Sx_1=\frac{\pi y^2}{3p^2}(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{2\pi}{15p^2}(y^2+p^2)^{\frac{5}{2}}+\frac{2\pi p^3}{15}:$$

y dividiendo por la anterior, tendremos x_1.

Teoremas de Pappus ó de Guldin. (a).

132. La teoría de los centros de gravedad facilita en algunos casos la determinacion de las áreas de las superficies, y de los volúmenes de los cuerpos.

Los teoremas de Pappus comprenden la mayor parte de estos casos. Estos teoremas son dos: 1.° El área de la superficie engendrada por la revolucion de una línea plana, alrededor de un eje situado en su plano, es igual al producto de la longitud de la línea por la circunferencia que describe su centro de gravedad.

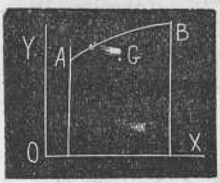


Fig. 69.

Sean AB (fig 69), una línea plana de longitud l; x_1, y_1, las coordenadas de su centro de gravedad G; la superficie engendrada por la revolucion de esta línea, que llamaremos S, será, $S=2\pi\int y\,ds$; lue-

(a) Estos teoremas, indebidamente atribuidos á Guldin, que los publicó en 1635, son debidos á Pappus, geómetra de la escuela de Alejandría, que vivia en el IV siglo de nuestra era, y que nos dejó en sus colecciones matemáticas todos los conocimientos de los geómetras de aquel tiempo, entre los cuales aparecen estos teoremas.

go observando que $ly_1=\int y\,ds$, tendremos

$$S=2\pi y_1\times l$$

conforme con el enunciado del teorema.

Si la línea no concluye la revolucion, y gira sólo de un cierto ángulo θ, llamando S′ al área de la superficie engendrada, podremos establecer la proporcion

$$\frac{S'}{S}=\frac{\theta}{2\pi} \quad ó \quad S'=\frac{S}{2\pi}\theta=\theta y_1\times l.$$

Resultado que nos dice, que el área de la superficie descrita por la línea, se obtiene, multiplicando la longitud de ésta por el arco θy_1, descrito por el centro de gravedad de la línea.

133. 2.º El volúmen del cuerpo engendrado por la revolucion de una superficie plana, que gira al rededor de un eje situado en su plano, es igual al producto del área de la superficie generadora por la circunferencia que describe su centro de gravedad.

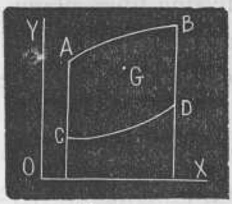


Fig. 70.

Sean ABCD (fig. 70) la superficie plana, comprendida entre las curvas AB y CD, cuyas ecuaciones son, $y=\varphi(x), y'=\psi(x)$, y dos rectas paralelas al eje OY; L la superficie generadora, G (x_1, y_1) el centro de gravedad de esta superficie y V el volúmen engendrado. Se tendrá

$$Ly_1=\frac{1}{2}\int(y^2-y'^2)dx, \quad V=\pi\int(y^2-y'^2)dx;$$

luego $$V=L\times 2\pi y_1.$$

Si la superficie no da una vuelta entera, el volúmen del cuerpo engendrado se obtendrá multiplicando la superficie generadora por el arco que describe su centro de gravedad. Proposicion que se demuestra fácilmente del mismo modo que en el teorema anterior.

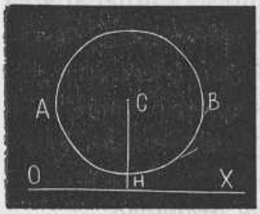


Fig. 71.

134. Apliquemos estos teoremas á la determinacion de la superficie y volúmen del toro descrito por el círculo AB (fig. 71), alrededor de OX. Sea r el radio, CH$=h$, el radio del círculo que describe el centro de gravedad; tenemos $l=2\pi r$, $L=\pi r^2$, y resultará:

$$S=4\pi^2 rh,\ V=2\pi^2 r^2 h.$$

135. Este último teorema, relativo á los volúmenes, puede extenderse á otros casos, contenidos en el teorema siguiente.

El volúmen del sólido engendrado por el movimiento de una superficie plana que se traslada en el espacio de modo que uno de sus puntos permanece siempre sobre una curva AB (fig. 72), siendo su plano constantemente normal á esta curva, es igual á la superficie generadora multiplicada por la curva que describe su centro de gravedad.

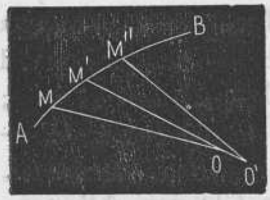


Fig. 72.

Sean en efecto OM y OM′ dos rectas infinitamente próximas, segun las cuales, el plano de la superficie móvil encuentra sucesivamente al plano osculador de la curva AB en el punto M; estos dos planos, normales á la curva, se cortan segun una recta que se proyecta en O perpendicularmente al plano osculador MOM′; esta recta es el eje del círculo osculador, y O es su centro; así, que al pasar la superficie generatriz de una posicion á la siguiente, lo verificará girando alrededor del eje que se proyecta en O. El volúmen del sólido engendrado por este movimiento infinitamente pequeño será igual al área de la superficie móvil, multiplicada por el pequeño arco de círculo, que describe el centro de gravedad de esta superficie; lo mismo sucederá en cada uno de los movimientos elementales sucesivos; luego el volúmen total será igual al área de la superficie generatriz, multiplicada por la curva que describe su centro de gravedad.

Volúmen de un cilindro truncado.

136. Como aplicacion de la teoría del centro de gravedad á la determinacion de los volúmenes, suele presentarse el problema de hallar el volúmen de un tronco de cilindro cualquiera.

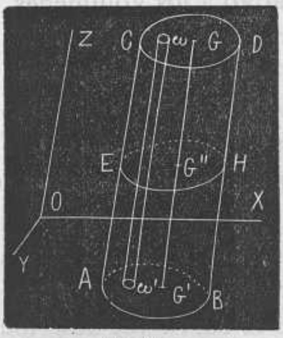


Fig. 73.

Sean ABCD (fig. 73) el tronco de cilindro, AB su seccion recta, L′ el área de esta seccion y L el área de la seccion CD, z_1 la distancia del centro de gravedad de ésta á la seccion recta AB; tracemos los ejes rectangulares, de manera que la seccion AB esté en el plano XY; sea ω un elemento de CD, ω' su proyeccion, y θ el ángulo de CD con AB; tendremos

$$Lz_1 = \int\int z\omega, \quad \omega' = \omega \cos\theta, \quad L' = L \cos\theta,$$

$$L \cos\theta z_1 = \int\int z\omega \cos\theta,$$

de donde $$L' z_1 = \int\int z\omega'.$$

Ahora, siendo z la altura del centro de gravedad del elemento ω, $z\omega'$ es el volúmen del cilindro infinitamente pequeño $\omega\omega'$; y $\int\int z\omega'$ es el volúmen del tronco de cilindro, llamándole V, será:

$$V=L'z_1,$$

que nos dice, que este volúmen es igual á la seccion recta, multiplicada por la distancia del centro de gravedad de la seccion CD, á la seccion recta AB.

El centro de gravedad G' de la seccion recta AB es la proyeccion del centro de gravedad G de la seccion CD.

Sean x_1, y_1, z_1 las coordenadas de G, x'_1, y'_1, 0 las de G'; tenemos

$$Lx_1=\int\int x\omega,\ Ly_1=\int\int y\omega;$$

multiplicado por cos θ,

$$L'x_1=\int\int x\omega',\ Ly'_1=\int\int y\omega'.$$

Tambien tenemos

$$L'x'_1=\int\int x\omega',\ L'y'_1=\int\int y\omega',$$

luego $x_1=x'_1,\ y_1=y^1.$

De aquí resulta, que los centros de gravedad de todas las secciones planas G, G', G'', hechas en un cilindro cualquiera, están en una recta paralela á la generatriz.

El volúmen de un cilindro cualquiera CDEH, es igual á la área de la seccion recta, multiplicada por la distancia de los centros de gravedad de las bases CD y EH.

Sean V_1, V_2 y V los volúmenes de ABCD, ABEH y EHCD, siendo L' el área de la seccion recta. Será

$$V_1=L'.GG',\ V_2=L'.G'G'',\ V=V_1-V_2$$
$$=L'(GG'-G'G'')=L.GG'',$$

ó bien $V=L'.GG''.$

LECCION XI.

CENTRO DE GRAVEDAD DE LOS VOLÚMENES.

Volúmen y centro de gravedad de un cuerpo cualquiera. —Paralelepípedo.— Prisma. —Cilindro. —Pirámide. —Cono.—Sector y secmento esféricos.—Centro de gravedad de los sólidos de revolucion. —Cuerpos cuyo centro de gravedad se obtiene por una sola integracion. — Secmento de parabolóide elíptico. — Secmento de elipsóide.

Volúmen y centro de gravedad de un cuerpo cualquiera.

137. Supongamos el cuerpo referido á tres ejes rectangulares X, Y, Z (fig. 74), y tiremos una serie de planos infinitamente próximos, paralelos al plano YX y distantes entre sí de la cantidad dz, los cuales dividirán al sólido en una infinidad de rebanadas, cuyas bases serán paralelas á este plano, y cuyas alturas son todas iguales á dz; tiremos otra serie de planos paralelos al YZ, los cuales descompondrán cada rebanada en una infinidad de prismas sumamente delgados, cuyas aristas son paralelas al eje Y; y por fin, otra serie de planos paralelos al ZX, los cuales descompondrán á cada uno de los prismas en una infinidad de paralelepípedos rectángulos infinitamente pequeños, cuyas aristas son dz, dx, dy; de modo, que el sólido total quedará descom-

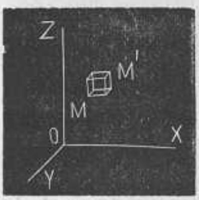


Fig. 74.

puesto en infinitos paralelepípedos de dimensiones infinitamente pequeñas.

Sea MM′ uno de estos paralelepípedos elementales, y sean x, y, z las coordenadas del punto M, $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, serán las del punto M′; el volúmen de este paralelepípedo es $dx\,dy\,dz$, y si llamamos V al volúmen total, tendremos

$$(1)\quad V=\int\int\int dx\,dy\,dz.$$

Si el cuerpo es homogéneo, el peso específico será constante, y llamando ρ á este peso específico y P al peso total, tendremos

$$(2)\quad P=\rho\int\int\int dx\,dy\,dz.$$

Si no es homogéneo ρ variará para cada elemento de sólido, y el peso del elemento será $\rho\,dx\,dy\,dz$, y el tota

$$(3)\quad P=\int\int\int \rho\,dx\,dy\,dz.$$

Ordinariamente se supone que ρ es una funcion contínua de las coordenadas de los diferentes puntos del sólido, y que tiene un valor constante en toda la extension de un elemento infinitamente pequeño.

Para integrar las expresiones anteriores, se supone que la superficie del cuerpo es convexa, y la ecuacion de esta superficie dará, para un sistema de valores de x é y dos valores para z; la ecuacion $\varphi(x,y,z)=0$, dará $z=\psi(x,y)$: sean $z=f(x,y)$, $z=F(x,z)$ el mayor y el menor de estos valores. Empezaremos integrando la expresion

$$\int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \rho\,dz,$$

considerando como constantes á x é y.

Tracemos paralelamente al eje Z, el cilindro circunscrito al sólido, y que de la ecuacion de su traza en el plano XY, se obtiene $y=\pi(x)$, $y=\theta(x)$; siendo estos valores de y el menor y el mayor de esta variable, correspondientes á un valor cualquiera de x; y considerando á ésta como constante, obtendremos la integral definida

$$\int_{\pi(x,}^{\theta(x)} dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \rho dz.$$

Por fin, si $x=a$, $x=b$, representan las ecuaciones de dos planos paralelos al YZ, el primero por el punto más próximo, y el segundo por el más lejano de este plano sobre la superficie del sólido, tendremos

$$P=\int_a^b dx \int_{\pi(x)}^{\theta(x)} dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \rho dz.$$

138. El teorema de los momentos, llamado x_1, y_1, z_1 las coordenadas del centro de gravedad del sólido, y observando que los momentos de cada elemento, respecto á los planos coordenados son $x\rho dV$, $y\rho dV$ y $z\rho dV$, siendo x, y, z las coordenadas del centro de gravedad del elemento considerádo, tendremos las ecuaciones

$$Px_1=\int\int\int x\rho dV, \quad Py_1=\int\int\int y\rho dV,$$
$$Pz_1=\int\int\int z\rho dV,$$

que nos darán las coordenadas del centro de gravedad.

Si el cuerpo es homogéneo, ρ es constante; y poniendo $V=\frac{P}{\rho}$ serán:

$$Vx_1=\int\int\int xdV, \quad Vy_1=\int\int\int ydV,$$
$$Vz_1=\int\int\int zdV.$$

Los límites de estas integrales se tomarán como cuando tratábamos de determinar el peso del cuerpo.

Paralelepípedo.

139. El paralelepípedo es un cuerpo que tiene centro de figura, que está situado en la interseccion de sus diagonales; luego este punto será el centro de gravedad.

En este caso, como en todos los que siguen, supondremos que el cuerpo es homogéneo.

Prisma.

140. Para hallar el centro de gravedad de un prisma triangular (fig. 75), observaremos que éste está en el plano MNP, que une los puntos medios de las aristas BD, AE, CF; porque es un plano diametral con respecto á las cuerdas paralelas á estas aristas. Tambien es diametral con respecto á las cuerdas paralelas á AC, el plano que pasa por BD y por el punto medio K de AC, por lo cual contiene el centro de gravedad buscado; lo mismo sucede con el plano que pasa por CF y por el punto R, luego el centro de gravedad estará en la recta $G_2 G_1$ interseccion de estos dos planos, ó lo que es lo mismo, en la paralela á las aristas tiradas por el centro de gravedad G_1 del triángulo ABC. El centro de gravedad del prisma está, pues, en el punto G de interseccion de esta línea $G_1 G_2$ con el plano MNP, es decir, que está en el punto medio de la recta $G_1 G_2$, que une los centros de gravedad de las bases; ó bien coincide con el centro de gravedad del triángulo que resulta de cortar el prisma por un plano equidistante de las bases, y paralelo á éstas.

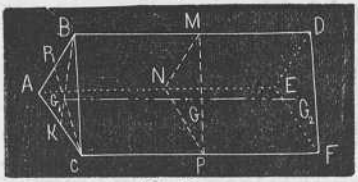


Fig. 75.

Si el prisma no es triangular, le descompondremos en prismas triangulares, por medio de planos tirados por una de sus aristas laterales; tiraremos un plano paralelo á las bases y equidistante de éstas, el cual cortará á los diferentes prismas triangulares así obtenidos segun triángulos cuyos centros de gravedad serán los de estos prismas parciales; y las superficies de estos triángulos serán proporcionales á los volúmenes de estos prismas; de modo, que el centro de gravedad del prisma total, coincide con el del polígono, segun el cual es cortado por este plano secante, y como los centros de gravedad de todas estas secciones están en la recta que une los centros de gravedad de las bases, el centro de gravedad del prisma se encuentra en el punto medio de la recta que une los centros de gravedad de las dos bases del prisma.

Cilindro.

141. El procedimiento que acabamos de exponer para hallar el centro de gravedad de un prisma, es independiente del número de sus caras; será por lo tanto aplicable al caso en que este número es infinito, es decir, al caso en que el prisma se convierta en un cilindro; luego el centro de gravedad de un cilindro está en el punto medio de la recta que une los centros de gravedad de sus bases.

Pirámide.

142. Principiemos por determinar el centro de gravedad de una pirámide triangular ABCD (fig. 76). El plano BAK tirado por la BA y por el punto medio K de la CD, es un plano diametral con respecto á las cuerdas paralelas á DC, y por lo tanto contendrá al centro de gravedad de la pirámide; por la misma razon estará este centro contenido en el plano BCH

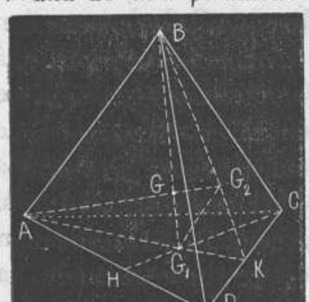


Fig. 76.

que pasa por BC y por el punto H medio de la AD; luego el centro de gravedad de la pirámide estará situado en la interseccion de estos dos planos, que es la recta que une el vértice A con el centro de gravedad de la cara opuesta ACD. Por la misma razon estará situado en la recta AG_2 que une el vértice A con el centro de gravedad G_2 de la cara opuesta BCD; luego estará en el punto de interseccion G de la BG_1 y AG_2. Por ser G_1 y G_2 los centros de gravedad de las caras ACD y BCD la recta G_1G_2 que los une, es paralela á AB é igual á $\frac{1}{3}$ AB; y como los triángulos ABG y GG_1G_2 son semejantes, $GG_1 = \frac{1}{3} BG$ ó $GG_1 = \frac{1}{4} BG_1$. Es decir, que el centro de gravedad de la pirámide triangular se encuentra en la recta que une el vértice con el centro de gravedad de la base, á las $\frac{3}{4}$ de esta línea, contando desde el vértice, y al $\frac{1}{4}$ contando desde la base.

Si cortamos la pirámide ABCD por un plano paralelo á la base ACD, á $\frac{1}{4}$ de la altura, contando desde la base, el centro de gravedad del triángulo que resulta, coincide con el centro de gravedad de la pirámide, porque la recta que une el vértice con el centro de gravedad de la base, contiene los centros de gravedad de todos los triángulos que resultan, cortando la pirámide por planos paralelos á la base, y como tambien contiene el centro de gravedad de la pirámide, coincide éste con el de la seccion que consideramos.

Para encontrar el centro de gravedad de una pirámide cualquiera, se descompone en pirámides triangulares, tirando planos por el vértice y por las diagonales del polígono de la base, se tira un plano paralelo á la base, distante de esta base $\frac{1}{4}$ de la altura de la pirámide. Los centros de gravedad de las diversas pirámides obtenidas, son los de los triángulos, segun los cuales, son cortadas por el plano secante, y sus volúmenes son proporcionales á las áreas de estos triángulos; luego el centro de gravedad de la pirámide será el centro de gravedad del polígono seccion.

Y se deduce inmediatamente, que el centro de gravedad de una pirámide cualquiera, se encuentra en la recta que une el vértice con el centro de gravedad de la base, á un cuarto de esta línea, á contar desde la base.

Cono.

143. El procedimiento que acabamos de exponer para hallar el centro de gravedad de una pirámide cualquiera, es independiente del número de sus caras, y es, por lo tanto, aplicable al cono, que es una pirámide de infinito número de caras. Por consiguiente, el centro de gravedad de un cono se encuentra en la recta que une el vértice en el centro de gravedad de la base, á un cuarto de esta línea, contando desde la base.

144. El centro de gravedad de una pirámide cualquiera y el de un cono de base plana pueden encontrarse fácilmente por el cálculo.

Sea OPQ (fig. 77), una pirámide de base cualquiera PQ, $OH=h$ su altura, $Ol=x$, $Ol'=x+dx$, las distancias al vértice de dos secciones planas, infinitamente próximas y paralelas á la base; sea u el área de la seccion $p'q'$, y b la de la base PQ; la rebanada $pqp'q'$ puede considerarse como un prisma de base u y altura dx,

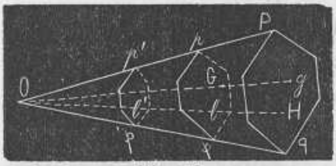


Fig. 77.

su volúmen será udx, y como $\frac{u}{x^2}=\frac{b}{h^2}$, $u=\frac{bx^2}{h^2}$, este volúmen es $\frac{bx^2}{h^2}dx$. Por consecuencia, el volúmen total de la pirámide es

$$(1)\ V=\int_0^h \frac{bx^2dx}{h^2}=\frac{b}{h^2}\int_0^h x^2dx=\frac{b}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}=\frac{bh}{3}.$$

Llamando x_1 á la distancia del centro de gravedad de la pirámide á un plano paralelo á la base, que pase por el vértice O, la distancia de la rebanada $pqp'q'$ á este plano, será x, y tendremos

$$(2)\ Vx_1=\int_0^h \frac{bx^2}{h^2}xdx,\quad ó\quad Vx_1=\frac{bh^4}{4h^2}=\frac{bh^2}{4};$$

luego

$$x_1=\frac{3}{4}h.$$

Este razonamiento es aplicable del mismo modo al cono; luego el centro de gravedad de la pirámide, ó del cono, se encuentra en la recta que une el vértice con el centro de gravedad de la base, á los tres cuartos de esta línea, contando desde el vértice.

Este procedimiento es aplicable á la determinacion del centro de gravedad de un tronco de pirámide ó de cono. Bastará para obtenerlo tomar las integrales de las ecuaciones (1) y (2) entre los límites correspondientes á estos cuerpos.

Si llamamos h' á la distancia al vértice de la base superior, dichas ecuaciones se convertirán: la primera en

$$V=\int_{h'}^{h}\frac{bx^2dx}{h^2}=\frac{b}{h^2}\int_{h'}^{h}x^2dx=\frac{b}{h^2}\frac{h^3-h'^3}{3};$$

y la segunda

$$Vx_1=\int_{h'}\frac{hbx^2}{h^2}xdx=\frac{b}{h^2}\int_{h'}^{h}xdx^3=\frac{b}{h^2}\cdot\frac{h^4-h'^4}{h}.$$

De estas dos fórmulas resulta, dividiendo la segunda por la primera,

$$x_1=\frac{3(h^4-h'^4)}{4(h^3-h'^3)},$$

que da la distancia al vértice del centro de gravedad del tronco de pirámide ó de cono.

Sector y secmento esféricos.

145. Sea el sector esférico engendrado por el sector circular ACB girando al rededor del radio CA (fig. 78); este radio será el eje del sector, luego en él estará situado el centro de gravedad del sector esférico. Para encontrarle, supongamos descompuesta la superficie esférica descrita por el arco BA en elementos iguales tan pequeños como se quiera, y que un radio de la esfera recorre el contorno de estos elementos esféricos; quedará el sector esférico descompuesto en una infinidad de conos iguales, que tendrán por base el elemento superficial correspondiente, y que todos tendrán sus centros de gravedad á los tres cuartos del radio, partiendo del centro; de modo, que si trazamos, con un radio $CB' = \frac{3}{4} CB = \frac{3}{4} r$, una zona esférica, ésta contendrá los centros de gravedad de todos los conos elementales iguales; y por lo tanto, el centro de gravedad del sector será el centro de gravedad de esta zona. Pero el centro de gravedad de la zona está en el punto medio de su altura, y si hacemos $PA = h$, será $P'A' = \frac{3}{4} h$, y tendremos

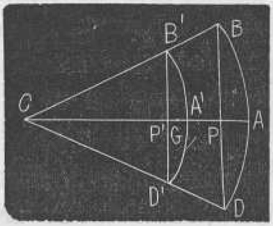


Fig. 78.

$$x_1 = OG = \frac{CA' + CP'}{2} = CA' - \frac{P'A'}{2} = \frac{3}{4} r - \frac{3}{8} h.$$

146. El centro de gravedad del secmento le encontraremos observando, que el volúmen del sector se compone del volúmen del secmento BADP, más el cono correspondiente CBPD; y en su consecuencia, con respecto á un plano perpendicular á CA que pase por el centro C, el momento del sector es igual á la suma de los

momentos del cono y del secmento con respecto al mismo plano.

El volúmen del sector es $2\pi r . h \times \frac{1}{3} r = \frac{2}{3} \pi r^2 h$: el del cono es $\frac{1}{3}(r-h) \times \pi \overline{BP}^2$; pero $\overline{BP}^2 = h(2r-h)$ luego el volúmen del cono es $\frac{1}{3}\pi h \times (r-h)(2r-h)$: el del secmento es $\frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi h(r-h)(2r-h) = \frac{1}{3}\pi h[2r^2 - (r-h)(2r-h)] = \frac{1}{3}\pi h^2(3r-h)$. Las distancias de los centros de gravedad de estos tres cuerpos son respectivamente $\frac{3}{4}r - \frac{3}{8}h, \frac{3}{4}(r-h), x_1$, llamando x_1 á la distancia buscada. Por el teorema enunciado, se tendrá $\frac{2}{3}\pi r^2 h(\frac{3}{4}r - \frac{3}{8}h) = \frac{1}{3}\pi h(r-h)(2r-h) \times \frac{3}{4}(r-h) + \frac{1}{3}\pi h^2(3r-h) \times x_1$; despejando x_1, resulta

$$x_1 = \frac{3}{4}\frac{(2r-h)^2}{3r-h}.$$

Centro de gravedad de los sólidos de revolucion.

147. Como el eje de revolucion es un eje de simetría del sólido, en él estará el centro de gravedad, y bastará una sola ecuacion para determinarlo.

Supongamos que la superficie generatriz es la superficie plana, comprendida entre las curvas AB y A′B′, y las rectas paralelas al eje de las y, AC, y BD (fig. 79), y que el eje de revolucion OX es perpendicular á AC.

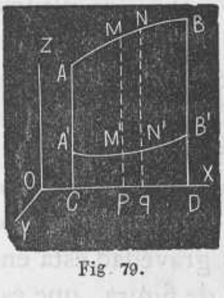


Fig. 79.

Sean $OP = x$, $OQ = x + dx$; la faja infinitamente estrecha MN M′N′ engendrará un elemento del sólido, cuyo volúmen es la diferencia de dos cilindros de igual altura dx, y que tendrán por rádios $PM = y$ $PM' = y'$; este volúmen será igual á $\pi(y^2 - y'^2)dx$; el volúmen total, haciendo $OC = \alpha$ y $OD = \beta$, será

$$V=\pi\int_{\alpha}^{\beta}(y^2-y'^2)\,dx.$$

Llamando x_1 á la distancia del centro de gravedad del sólido al plano ZY, y x á la del elemento de este sólido al mismo plano, tendremos

$$Vx_1=\pi\int_{\alpha}^{\beta}(y^2-y'^2)\,xdx.$$

Cuerpos cuyo centro de gravedad se obtiene por una sola integracion.

148. Ademas de los sólidos de revolucion hay otros que sólo exigen, para obtener su centro de gravedad, una integracion. Tales son en general todos aquellos que pueden descomponerse en elementos infinitamente delgados, cuyos centros de gravedad están en una línea recta, como los secmentos de los cuerpos, terminados por superficies de segundo grado y otros. Consideremos como ejemplos, un secmento de paraboloide elíptico y un secmento de elipsóide.

Paraboloide elíptico.

149. Sea el secmento de paraboloide elíptico comprendido entre los planos paralelos PQ y pq, ambos perpendiculares al eje de simetría OX (fig. 80); como todas las secciones causadas por planos perpendiculares á este eje son elipses, cuyo centro de gravedad está en su centro de figura, que es un punto del eje, este secmento está en el caso general arriba indicado. Vamos á determinar su volúmen y

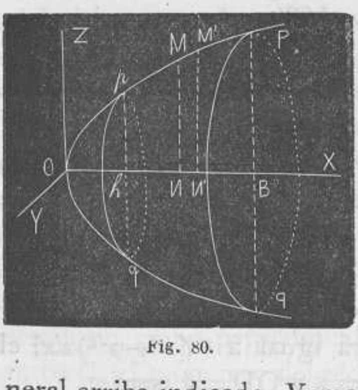


Fig. 80.

su centro de gravedad, que está situado en el eje OX.

La ecuacion del paraboloide, siendo $2p$ y $2q$ los parametros de las parábolas principales, es

$$(1)\quad \frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2q}=x.$$

Descompongamos el secmento en rebanadas infinitamente delgadas por planos perpendiculares al eje OX. Sea $ON=x$, $ON=x+dx$; la rebanada que comprenden los planos que pasan por MN y M'N', puede considerarse en el límite, como un cilindro cuya base es una elipse y cuya altura es dx. La ecuacion de la elipse es $\frac{y^2}{2px}+\frac{z^2}{2qx}=1$, los semi-ejes de esta elipse son $\sqrt{2px}$ y $\sqrt{2qx}$; su área será $\pi\sqrt{2px}\times\sqrt{2qx}=2\pi x\sqrt{pq}$; el volúmen del cilindro elemental, es $2\pi\sqrt{pqxdx}$, el volúmen total será, siendo $\begin{cases} Oh=\alpha, \\ OB=\beta, \end{cases}$

$$V=2\pi\sqrt{pq}\int_\alpha^\beta xdx=\pi\sqrt{pq}\,(\beta^2-\alpha^2).$$

Llamando x_1 á la distancia del centro de gravedad del secmento al plano ZY, tendremos

$$Vx_1=2\,\pi\sqrt{pq}\int_\alpha^\beta x^2dx=\frac{2\pi\sqrt{pq}}{3}(\beta^3-\alpha^3);$$

de donde
$$x_1=\frac{2}{3}\frac{\beta^3-\alpha^3}{\beta^2-\alpha^2}.$$

Si el sólido está limitado por el paraboloide y el plano PQ, $\alpha=0$, y tendremos

$$V=\pi\sqrt{pq}\beta^2,\ Vx_1=\frac{2\pi\sqrt{pq}}{3}\beta^3,\ x_1=\frac{2}{3}\beta.$$

Elipsoide.

150. Vamos á encontrar el centro de gravedad de un secmento de elipsoide, es decir, de la porcion de este

cuerpo, comprendida entre dos planos paralelos PM y QN.

Por el centro O del elipsoide tiremos un plano paralelo á los PM y QN (fig. 81), tracemos en este plano dos diámetros conjugados OZ y OY de la elipse seccion que resulta, y sea OX el diámetro conjugado al plano diametral ZY. Este diámetro OX contendrá los centros de gravedad de todas las secciones paralelas á ZY, porque estos centros de gravedad son los centros de todas las elipses que resultan; luego OX contendrá el centro de gravedad del secmento PMQN. Si llamamos $2a$, $2b$, $2c$ á los tres diámetros conjugados, la ecuacion del elipsoide referida á estos diámetros, es

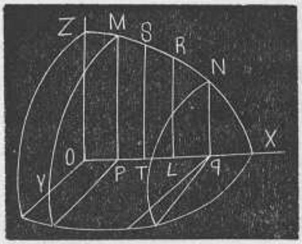


Fig. 81.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Podemos descomponer el secmento PMQN en una infinidad de rebanadas infinitamente delgadas por planos paralelos á las bases del secmento; el volúmen de una de éstas, tal como la TSLR, es el de un cilindro cuya base es la elipse TS; y la generatriz haciendo $OT=x$, y $OL=x+dx$, es dx; para encontrar el volúmen de este cilindro infinitamente delgado, la ecuacion de la elipse TS, es

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \quad ó \quad \frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1.$$

El área de esta elipse es $\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$ sen θ, siendo θ el ángulo de los diámetros conjugados.

Llamando φ al ángulo que OX forma con el plano diametral conjugado ZY; la altura del cilindro será

dx sen φ, y el volúmen del cilindro elemental es

$$\pi b c \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx.$$

El volúmen del secmento PMQN, haciendo

OP $=\alpha$, OQ $=\beta$, será

$$V=\frac{\pi bc \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi}{a^2}\int_\alpha^\beta (a^2-x^2)\,dx=$$

$$\frac{\pi bc \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi}{3a^2}(\beta-\alpha)(3a^2-\beta^2-\beta\alpha-\alpha^2).$$

Llamando x_1 la coordenada del centro de gravedad del secmento y x á la del elemento que hemos considerado, tendremos

$$Vx_1=\frac{\pi bc \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi}{a^2}\int_\alpha^\beta x\,(a^2-x^2)dx$$

$$=\frac{\pi bc \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi}{4a^2}(\beta^2-\alpha^2)(2a^2-\alpha^2-\beta^2);$$

y por fin

$$x_1=\frac{3(\alpha+\beta)(2a^2-\alpha^2-\beta^2)}{4(3a^2-\beta^2-\alpha\beta-\alpha^2)}.$$

Siendo el valor de x_1 independiente de b y c, y de θ y x, no variará cuando $a=b=c$; es decir, cuando el elipsoide se convierta en una esfera; de modo que esta fórmula da el centro de gravedad del secmento esférico, cuyo radio es a, y cuyas distancias al centro de la esfera son α y β.

LECCION XIII.

Volúmen y centro de gravedad en coordenadas polares.—Coordenadas polares y sus relaciones con las rectilíneas.—Volúmen y peso de los cuerpos referidos á coordenadas polares.—Coordenadas polares del centro de gravedad.—Límites de las integrales que contienen.—Aplicacion.

Coordenadas polares y sus relaciones con las rectilíneas.

151. Sea $M(x_1, y_1, z)$ (fig. 82), un punto referido á los ejes rectangulares X, Y, Z: las coordenadas polares de este punto son $OM=r$, el ángulo $MOX=\theta$ y el ángulo del plano MOX con un plano fijo XOY que llamaremos $\psi=MQP$: el punto referido á estas coordenadas se designa del modo siguiente, $M(r, \theta, \psi)$.

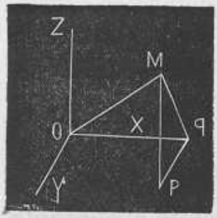


Fig. 82.

Las tres coordenadas polares determinan la posicion del punto M por la interseccion de tres superficies; una esfera descrita desde el punto O con un radio r, un cono de revolucion cuyo eje es OX y cuya genitriz forma con el eje el ángulo θ, y un plano que pasa por OX y que forma un ángulo ψ con el plano fijo XOY.

152. Las fórmulas que sirven para pasar de las coordenadas rectangulares x, y, z á las polares r, θ, ψ, se deducen de los triángulos MOQ rectángulo en Q, y MPQ rectángulo en P; y son,

$$x=r\cos\theta, \qquad y=r\operatorname{sen}\theta\cos\psi, \qquad z=r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi.$$

Elevándolas al cuadrado, y observando que $\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta=1$, $\cos^2\psi+\operatorname{sen}^2\psi=1$, se tiene

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad tg\,\psi=\frac{z}{y};$$

que sirven para pasar de las coordenadas polares r, θ, ψ, á las rectangulares x, y, z.

Volúmen y peso de los cuerpos referidos á coordenadas polares.

153. Un elemento del volúmen correspondiente á los incrementos infinitamente pequeños de las coordenadas polares $dr, d\theta, d\psi$, será un pequeño paralelepípedo rectángulo, cuyas aristas son dr, $r d\theta$ y $r \operatorname{sen}\theta\, d\psi$, y cuyo volúmen es $r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\psi\, dr$; de modo que tendremos

$$dV=r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\psi\, dr.$$

El peso dP de este elemento se obtendrá multiplicando dV, por el peso específico ρ medio del elemento, que diferirá muy poco del peso específico del punto $M(r, \theta, \psi)$; y será $dP=\rho r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\psi\, dr$.

El volúmen y peso totales del sólido son:

$$V=\int\int\int r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\psi\, dr,$$

$$P=\int\int\int \rho r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\psi\, dr.$$

154. Estas mismas fórmulas pueden obtenerse por el método de los límites.

Sea A (r, θ, ψ) (fig. 83), un punto tomado en el sólido considerado; $OA=r$, $OB=r+\Delta r$, los radios con los cuales se han descrito los arcos de círculo CA y BD terminados en la recta OD, de modo que $DOB=\Delta\theta$: si suponemos que el cuadrilátero ABCD gira al rededor de OX, describiendo un ángulo $\Delta\psi$, viniendo á colocarse en la posicion A'B'C'D'; obtendre-

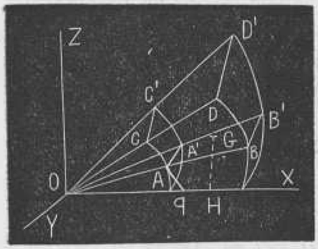


Fig. 83.

mos un pequeño sólido AD′, que tomaremos por elemento del sólido total. El volúmen de AD′, segun el teorema de Pappus (133), es igual al producto del área ABCD por el arco de círculo que describe el centro de gravedad G de esta área. Ahora

$$\text{ABCD}=\text{ODB}-\text{OCA}=\tfrac{1}{2}(r+\Delta r)^2\,\Delta\theta-\tfrac{1}{2}r^2\Delta\theta$$
$$=(r+\tfrac{1}{2}\Delta r)\,\Delta r\Delta\theta.$$

Hagamos GH$=u$; el arco descrito por el punto G es $u\Delta\psi$. Pero como el punto G está en el interior del cuadrilátero ABCD, y se aproximará cuanto se quiera al punto A, haciendo $\Delta\theta$ y Δr suficientemente pequeñas, u diferirá poco de AQ$=r$ sen θ, y podremos poner $u=r$ sen $\theta+\alpha$, siendo α una cantidad que tiende hácia cero, al mismo tiempo que $\Delta\theta$ y Δr; y por lo tanto

$$\Delta\text{V}=(r\text{ sen }\theta+\alpha)\,(r+\tfrac{1}{2}\Delta r)\,\Delta r\Delta\theta\Delta\psi.$$

Si llamamos ρ la densidad del sólido en el punto A, la densidad media del sólido elemental ΔV, será $\rho+\beta$, siendo β una cantidad que se anula en el límite, y llamando ΔP á su peso, se tendrá

$$\Delta\text{P}=(\rho+\beta)\,(r\text{ sen }\theta+\alpha)\,(r+\tfrac{1}{2}\Delta r)\,\Delta r\Delta\theta\Delta\psi.$$

Efectuando la multiplicacion y llamando K á la suma de los términos del producto, que tienen cantidades que se anulan en el límite, tendremos sumando las infinitas igualdades obtenidas como la anterior

$$\text{P}=\Sigma\rho r^2\text{ sen }\theta\Delta r\Delta\theta\Delta\psi+\Sigma\text{K}\,\Delta r\Delta\theta\Delta\psi,$$

pero lim. $\Sigma\rho r^2\text{ sen }\theta\Delta r\Delta\theta\Delta\psi=\int\int\int\rho r^2\text{ sen }\theta dr d\theta d\psi$,

y $\qquad$ lim. $\Sigma\text{K}\Delta r\Delta\theta\Delta\psi=0$,

luego $\qquad \text{P}=\int\int\int\rho\, r^2\text{ sen }\theta\, dr d\theta d\psi.$

Si el cuerpo es homogéneo ρ es constante, y observando que $\frac{\text{P}}{\rho}=\text{V}$ tendremos

$$\text{V}=\int\int\int r^2\text{ sen }\theta\, dr d\theta d\psi.$$

Coordenadas polares del centro de gravedad.

155. Los momentos de dP con respecto á los planos YZ, ZX, XY, son xdP, ydP, zdP, siendo x, y, z las distancias del centro de gravedad del elemento á los citados planos; y si x_1, y_1, z_1 son las coordenadas del centro de gravedad del sólido, tendremos, poniendo por x, y, z sus valores (152),

$$P=\int\int\int \rho r^2 \operatorname{sen}\theta dr d\theta d\psi,$$

$$Px_1=\int\int\int \rho r^3 \operatorname{sen}\theta \cos\theta dr d\theta d\psi,$$

$$Py_1=\int\int\int \rho r^3 \operatorname{sen}^2\theta \cos\psi dr d\theta d\psi,$$

$$Pz_1=\int\int\int \rho r^3 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\psi dr d\theta d\psi.$$

Estas fórmulas darán x_1, y_1, z_1, de las cuales deduciremos las coordenadas polares r_1, θ_1, ψ, del centro de gravedad por las fórmulas del núm. 152.

Límites de las integrales precedentes.

156. Para asignar los límites de las integrales precedentes, debemos distinguir dos casos, segun que el orígen de las coordenadas este en el cuerpo ó fuera de él.

En el primer caso se integra primero con respecto á ψ desde 0 hasta 2π, de 0 á π con respecto á θ y de $r=0$ á $r=f(\theta, \psi)$ con respecto á r, siendo $r=f(\theta, \psi)$ el mayor valor del radio, vector deducido de la ecuacion polar de la superficie del cuerpo. De modo que tendremos para calcular el peso, la fórmula

$$P=\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta d\theta \int_r^{f(\theta,\psi)} \rho r^2 dr.$$

Si el orígen O (fig. 84), es exterior, se integra respecto á r desde

$$r=f(\theta,\psi)=\mathrm{OA};\ \text{á}\ r=\mathrm{F}(\theta,\psi)=\mathrm{OB}.$$

Suponiendo que la superficie del cuerpo es convexa, y que el primero es el menor y el segundo el mayor de los valores de r, deducidos de la ecuacion de la superficie.

Fig. 84.

Con respecto á θ, desde θ' hasta θ'', siendo θ' y θ'' los ángulos que las tangentes á la curva interseccion de la superficie del cuerpo en el plano MOX forman en el eje OX. Y con respecto á ψ, desde $\psi=\alpha$, hasta $\psi=\beta$, siendo α y β los valores de ψ correspondientes á dos planos tangentes á la superficie, tirados por OX.

Si OX encuentra al cuerpo, los límites de ψ son desde $\psi=0$, hasta $\psi=2\pi$.

Aplicacion.

157. Apliquemos las fórmulas que acabamos de hallar á la determinacion del centro de gravedad de un cuerpo homogéneo, terminado por dos superficies esféricas concéntricas de radios a y b, y por la superficie de un cono circular recto, que tiene su vértice en el centro comun de las esferas, siendo α el ángulo que forma la generatriz con el eje del cono.

Tomemos este centro por orígen, y por eje polar el eje del cono: el centro de gravedad estará situado sobre esta recta, por ser un eje de simetría del cuerpo.

Las fórmulas que resuelven el problema son,

$$\mathrm{V}=\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_a^b r^2 dr,$$

$$\mathrm{V}x_1=\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \int_a^b r^3 dr;$$

tenemos

$$\int_a^b r^2dr=\frac{b^3-a^3}{3};\int_0^\alpha \operatorname{sen}\theta\, d\theta=1-\cos\alpha=2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\alpha;$$

$$\int_0^{2\pi} d\psi=2\pi,\ V=\frac{4\pi}{3}(b^3-a^3)\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\alpha.$$

Tambien se tiene

$$\int_a^b r^3dr=\frac{b^4-a^4}{4};\int_0^\alpha \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\alpha \operatorname{sen}2\theta\, d\theta=\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\alpha;$$

luego $\quad Vx_1=\pi\operatorname{sen}^2\alpha\frac{b^4-a^4}{4};$

y dividiendo

$$x_1=\frac{3}{16}\frac{b^4-a^4}{b^3-a^3}\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\alpha}=\frac{3}{4}\frac{b^4-a^4}{b^3-a^3}\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Si $a=0$ y $\alpha=90°$ el cuerpo se convierte en un emisferio, y observando que $\cos^2 45^0=\frac{1}{4}.2=\frac{1}{2}$, tendremos

$$x_1=\frac{3}{8}b.$$

Valor que tambien resulta de la fórmula $x_1=\frac{3}{4}r-\frac{3}{8}h$, haciendo $h=r$; pues tenemos $x_1=\frac{6}{8}r-\frac{3}{8}r=\frac{3}{8}r$.

LECCION XIV.

ATRACCION DE LOS CUERPOS.

Atraccion universal, proporcional á las masas y en razon inversa de los cuadrados de las distancias.—Atraccion de una capa esférica homogénea, sobre un punto exterior ó interior. — Caso en que el cuerpo atrayente se compone de capas esféricas homogéneas, y caso en que es una esfera.—Atraccion de dos esferas.—Atraccion de un cuerpo cualquiera sobre un punto material. — Potencial. — Reduccion de las integrales generales de la atraccion á una sola, por medio de esta funcion. — Propiedades de la funcion potencial.

Atraccion universal, proporcional á las masas y en razon inversa de los cuadrados de las distancias.

158. La experiencia nos enseña que dos cuerpos cualesquiera, puestos en presencia uno de otro, á distancias finitas, se atraen; y que esta atraccion se verifica en razon directa de las masas é inversa del cuadrado de la distancia. Esta accion de la materia sobre la materia, se ejerce por todas las moléculas que constituyen los cuerpos. El determinar la resultante de todas estas acciones es un caso particular de la composicion de fuerzas, el cual constituye la teoría de la atraccion.

Como todos los cuerpos que están á nuestro alcance se atraen, y por la Astronomía se sabe que esta atraccion es general á todos los cuerpos que forman nuestro sistema planetario, se ha extendido por induccion á todos los cuerpos del Universo, y de aquí el llamarla atraccion universal. La accion que la Tierra ejerce sobre los cuerpos, llamada gravedad, es un caso particular de la atraccion universal.

Para establecer la fórmula de la atraccion de dos cuerpos, llamemos f á la atraccion de la unidad de masa, sobre la unidad de masa colocada á la unidad de distancia sean μ y μ' las masas de estos cuerpos y u su distancia, la atraccion del uno sobre el otro, segun la ley enunciada, será $f\frac{\mu\mu'}{u^2}$. Sin error sensible, podemos suponer que la distancia de las moléculas de uno de los cuerpos á los del otro, es constante para todas ellas, y la misma que suponemos para los dos cuerpos, y en este supuesto hemos establecido la expresion anterior de la atraccion.

Atraccion de una capa específica homogénea sobre un punto material exterior ó interior.

159. Consideremos la capa esférica comprendida entre las dos superficies esféricas de radios R y r_1, que tienen el centro comun en O (fig. 85), y vamos á calcular la atraccion que ejerce sobre el punto A, cuya masa llamaremos μ. Sean M (r, θ, ψ) un punto material de la capa atrayente, cuya masa sea dm; $MA = u$, $OA = a$.

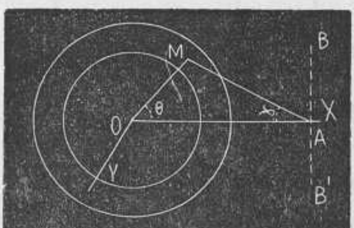


Fig. 85.

La masa dm del elemento es, llamando ρ á la densidad,

$$dm = \rho dV. = \rho r^2 \operatorname{sen} \theta d\theta dr d\psi.$$

La atraccion ejercida por el punto material M sobre el punto A, es

$$f\frac{\mu dm}{u^2} = f\mu\frac{\rho r^2 \operatorname{sen} \theta d\theta dr d\psi}{u^2}.$$

Descompongamos esta atraccion, que se ejerce segun la recta MA, en dos, una dirigida segun la recta AO, y otra, segun la perpendicular AB á esta recta; todas las componentes perpendiculares á AO se destruyen entre sí, dos á dos, porque todo punto M tiene su simétrico respecto á AO, que dará una componente igual y opuesta á la anterior, es decir, obrando en el sentido AB′, y sólo nos quedan las componentes que obran segun la recta AO. La componente de la fuerza que consideramos, se obtendrá multiplicándola por el coseno del ángulo MAO$=\alpha$. Pero en el triángulo MAO, tenemos $r^2=a^2+u^2-2au\cos\alpha$; $\cos\alpha=\frac{a^2+u^2-r^2}{2au}$. Esta componente será

$$f\mu\rho\frac{r^2 \operatorname{sen}\theta d\theta dr d\psi}{u^2}\cdot\frac{a^2+u^2-r^2}{2au}.$$

La suma de las componentes, que darán todos los elementos iguales á M en que puede considerarse descompuesta la capa esférica, se obtendrá integrando la expresion anterior entre los límites correspondientes á dicha capa; llamándola F tendremos

$$F=f\mu\rho\int_0^{2\pi}d\psi\int_{r_1}^{R}r^2dr\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta d\theta\frac{a^2+u^2-r^2}{2au^3}.$$

Para hacer la integracion respecto á θ cambiaremos de variable. Sabemos que

$$u^2=a^2+r^2-2ar\cos\theta;\quad 2udu=2ar\operatorname{sen}\theta d\theta;$$

$$\operatorname{sen}\theta d\theta=\frac{udu}{ar};$$

luego

$$F=\frac{f\mu\rho}{2a^2}\int_0^{2\pi}d\psi\int_{r_1}^{R}rdr\int_{r-a}^{r+a}\left(1+\frac{a^2-r^2}{u^2}\right)du.$$

Para integrar con respecto á u, hemos de distinguir, si el punto atraido A, es interior ó exterior.

160. Si el punto A es interior, $a<r$, y observando que $u=\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}$, y que u es positivo, los lími-

tes, 0 y π para θ, se convierten en $r-a$ y $r+a$ para la variable u, que reemplaza á θ. La última integral indefinida es

$$\int(1-\frac{a^2-r^2}{u^2})du=u+\frac{r^2-a^2}{u}+C.$$

La integral definida será

$$\int_{r-a}^{r+a}(1+\frac{a^2-r^2}{u^2})du=r+a+\frac{(r+a)(r-a)}{r+a}$$

$$-\left(r-a+\frac{(r+a)(r-a)}{r+a}\right)=0;$$

luego $F=0.$

Lo que nos dice, *que la resultante de las atracciones de todos los puntos materiales de una capa esférica homogénea, sobre un punto material interior á esta capa, es nula.*

161. Si el punto A es exterior, $a>r$, y los límites de la integral son, desde $u=a-r$, hasta $u=a+r$; y el valor de la integral definida es

$$\int_{a-r}^{a+r}\left(1+\frac{a^2-r^2}{u}\right)du=a+r-\frac{(a-r)(a+r)}{a+r}$$

$$-\left[a-r-\frac{(a-r)(a+r)}{a-r}\right]=4r \text{ y como } \int_0^{2\pi}d\psi=2\pi,$$

tendremos

$$F=\frac{f\mu\rho}{a^2}\pi\int_{r_1}^{R}rdr\times 4r=\frac{4\pi f\mu\rho}{a^2}\int_{r_1}^{R}r^2dr=\frac{4}{3a^2}\pi f\mu\rho(R^3-r_1^3).$$

Si llamamos m á la masa de la capa atrayente, $m=\frac{4}{3}\pi\rho(R^3-r_1^3)$; y se tiene

$$F=\frac{fm\mu}{a}.$$

Es decir, *que la atraccion ejercida por una capa esférica homogénea sobre un punto material exterior, es igual á la que experimentaria este punto, si toda la masa de la capa estuviera reunida en su centro.*

Caso en que el cuerpo atrayente se compone de capas esféricas homogéneas, y caso en que es una esfera.

162. Cuando el cuerpo no es homogéneo y puede descomponerse en capas esféricas concéntricas, cuya densidad varía de una á otra, segun una ley cualquiera, pero de suerte, que esta densidad sea constante en toda la extension de una misma capa, pueden aplicarse los resultados que acabamos de obtener (160 y 161). Porque si el punto A es interior, la resultante de las acciones de cada capa elemental es nula, y por lo tanto, la suma de las acciones de todas las capas elementales, ó lo que es lo mismo, la atraccion total es nula.

Si el punto es exterior, cada una de sus capas le atrae como si toda la materia de que se compone estuviera concentrada en el centro; la atraccion del cuerpo entero sobre el punto exterior será la misma que si la masa total estuviera reunida en el centro.

163. Si el punto atraido A forma parte de la masa atrayente, trazaremos por este punto una superficie esférica concéntrica con las que limitan la capa y que dividiria á ésta en dos. La exterior no ejercerá ninguna accion sobre el punto, y la interior le atraerá como si toda su masa estuviera reunida en el centro.

Estos resultados subsisten cuando la capa esférica se convierte en una esfera homogénea. Entónces, suponiendo que el punto atraido es interior, y que dista del centro la cantidad a; haciendo $r_1=0$, y $R=a$ en la expresion $F=\frac{4}{3}\pi\frac{f\mu\rho}{a^2}(R^3-r_1^3)$, tendremos $F_1=\frac{4}{3}\pi f\mu\rho a$; demodo que la atraccion de una esfera sobre un punto interior es proporcional á la distancia del punto atraido al centro.

Si el punto atraido es exterior, $a > R$; y tendremos $F_2 = \frac{4}{3}\pi f\mu\rho\frac{R^3}{a^2}$ que nos dice que la atraccion es recíprocamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro. Comparando F_1 y F_2 vemos, que la atraccion es la mayor, cuando $R = a$, es decir, cuando el punto atraido está en la superficie de la esfera atrayente. La atraccion $F_1 = 0$, si $a = 0$, es decir, si el punto está en el centro de la esfera; y siendo exterior, $F_2 = 0$, si $a = \infty$; resultados que son faciles de preveer directamente.

Atraccion de dos esferas.

164. Sean dos esferas de radios R y R′ y de densidades ρ y ρ', siendo cada una de ellas homogénea, y cuyos centros estén á una distancia u el uno del otro. Todos los puntos materiales de la primera esfera atraen una molécula de la segunda, como si estuvieran reunidos en el centro de la primera, y por ello pueden reemplazarse por uno sólo, que tenga la masa $\frac{4}{3}\pi\rho R^3$: la atraccion de la segunda esfera sobre este punto material es la misma, que si su masa $\frac{4}{3}\pi\rho' R'^3$, estuviera reunida en su centro; luego la atraccion mútua será

$$\frac{16}{9}\rho\rho'\frac{\pi^2 R^3 R'^3}{u^2}.$$

Dos esferas homogéneas, ó compuestas de capas homogéneas, se atraen como dos moléculas de masas iguales á las de las esferas, colocadas en los centros respectivos.

Atraccion de un cuerpo cualquiera sobre un punto material.

165. Sea P (fig. 86), un cuerpo cualquiera y tomemos en él un punto material $M(x,y,z)$, de masa dm; vamos á calcular la atraccion de este cuerpo sobre el punto material $O(\alpha,\beta,\gamma)$, cuya masa es μ. La atracion del elemento M sobre el punto material O, siendo $OM=u$, es

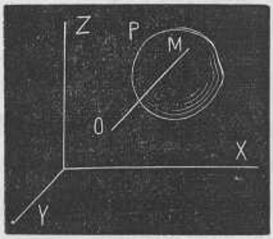


Fig. 86.

$$f\frac{\mu dm}{u^2};$$

las componentes de esta fuerza en sentido de los ejes, se obtienen multiplicándola por los cosenos de los ángulos que su direccion OM forma con los ejes; y son

$$\frac{f\mu(\alpha-x)}{u^3}dm,\quad \frac{f\mu(\beta-y)}{u^3}dm,\quad \frac{f\mu(\gamma-z)}{u^3}dm.$$

Todos los elementos materiales del cuerpo ejercen atracciones análogas sobre el punto O, y cada una da tres componentes, que serán de la forma de estas. Si llamamos A, á la resultante de todas las paralelas al eje X, B á la de las paralelas al Y, y C á las de las paralelas á Z, hallando la resultante de A, B y C, tendremos la atraccion total. Pero A, B y C son sumas de tantas componentes, como elementos tiene el cuerpo atrayente; de modo, que para obtenerlas, habrá que integrar las expresiones anteriores en toda la extension de este cuerpo; y tendremos

$$(1)\quad A=f\mu\int\int\int\frac{\alpha-x}{u^3}dm,\quad B=f\mu\int\int\int\frac{\beta-y}{u^3}dm,$$

$$C=f\mu\int\int\int\frac{\gamma-z}{u^3}dm.$$

Los signos de estas componentes serán positivos, si tienden á aumentar las coordenadas del punto atraido, y negativos si tienden á disminuirlas, segun el convenio general.

166. Para hacer con más facilidad las integraciones, colocaremos el orígen de las coordenadas en el punto atraido O, y llamando g, h, k á los ángulos de OM con los ejes, tendremos

$$\cos g = \frac{x-\alpha}{u}, \quad \cos h = \frac{y-\beta}{u}, \quad \cos k = \frac{z-\gamma}{u};$$

sean u, θ, ψ, las coordenadas polares del punto M, las fórmulas de transformacion de coordenadas

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta, \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\psi, \\ z = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\psi; \end{array}\right\} \text{ darán las } \begin{array}{r} \\ \\ (2) \end{array}\left\{\begin{array}{l} \cos g = \cos\theta, \\ \cos h = \mathrm{sen}\,\theta\cos\psi, \\ \cos k = \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\psi; \end{array}\right.$$

con sólo hacer $u = r = 1$. Poniendo ademas por dm su valor $dm = r^2\rho\,\mathrm{sen}\theta d\theta du d\psi$, tendremos

$$(3)\left\{\begin{array}{l} A = -f\mu\displaystyle\int\int\int\rho\cos g\,\mathrm{sen}\theta d\theta du d\psi, \\ B = -f\mu\displaystyle\int\int\int\rho\cos h\,\mathrm{sen}\theta d\theta du d\psi, \\ C = -f\mu\displaystyle\int\int\int\rho\cos k\,\mathrm{sen}\theta d\theta du d\psi. \end{array}\right.$$

Estas fórmulas deben integrarse entre los límites designados en el núm 156.

Potencial.— Reduccion de las integrales generales de la atraccion á una sola por medio de esta funcion.

167. Las integrales triples que entran en los valores de A, B, C de las fórmulas (1), pueden reducirse á una sola integral triple, que es

$$V = \int\int\int\frac{dm}{u}.$$

Esta funcion V, que se extiende á toda la masa del cuerpo, y es sólo funcion de las coordenadas de sus diferentes elementos y de las del punto atraido, se llama *funcion potencial*.

168. Diferenciemos esta funcion con respecto á α, β y γ. Sabemos que

$$u^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2;$$

$$udu = -(x-\alpha)\,d\alpha;\ \frac{du}{d\alpha} = -\frac{x-\alpha}{u}.$$

Tambien

$$\frac{dV}{d\alpha} = \int\int\int dm \frac{d.\frac{1}{u}}{d\alpha};\ \frac{d\frac{1}{u}}{d\alpha} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\alpha} = \frac{x-\alpha}{u^3};$$

del mismo modo

$$\frac{d\frac{1}{u}}{d\beta} = \frac{y-\beta}{u^3};\quad \frac{d\frac{1}{u}}{d\gamma} = \frac{z-\gamma}{u};$$

luego

$$(5)\quad \frac{dV}{d\alpha} = -\int\int\int \frac{(\alpha-x)dm}{u^3},$$

$$\frac{dV}{d\beta} = -\int\int\int \frac{(\beta-y)dm}{u^3},\quad \frac{dV}{d\gamma} = -\int\int\int \frac{(\gamma-z)\,dm}{u^3};$$

sustituyendo en las (1), tendremos

$$(6)\quad \begin{cases} A = -f\mu \dfrac{dV}{d\alpha}, \\ B = -f\mu \dfrac{dV}{d\beta}, \\ C = -f\mu \dfrac{dV}{d\gamma}. \end{cases}$$

De modo, que calculando la funcion potencial y diferenciándola con respecto á α, β, γ, tendremos las componentes A, B, C.

La funcion potencial es muy importante, no sólo en la teoría de la atraccion, sino en la Mecánica celeste, en la Física matemática y en otras ramas de las ciencias fisico-matemáticas.

Propiedades de la funcion potencial.

169. 1.ª Propiedad. Si el punto atraido es exterior, se verifica que

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2}+\frac{d^2V}{d\beta^2}+\frac{d^2V}{d\gamma^2}=0.$$

En efecto, siendo el punto atraido exterior, u no puede ser cero y $\frac{dm}{u}$ no es infinita, dentro de los límites de la integral definida, que determina la funcion V; y se podrán aplicar las reglas de la diferenciacion, bajo el signo integral definida, en la ecuacion

$$(1)\quad V=\int\int\int\frac{dm}{u};$$

y se deducirá

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2}+\frac{d^2V}{d\beta^2}+\frac{d^2V}{d\gamma^2}=\int\int\int dm\left(\frac{d^2\frac{1}{u}}{d\alpha^2}+\frac{d^2\frac{1}{u}}{d\beta^2}+\frac{d^2\frac{1}{u}}{d\gamma^2}\right).$$

Tenemos

$$\frac{d\,\frac{1}{u}}{d\alpha}=\frac{x-\alpha}{u^3};\quad \frac{d^2\frac{1}{u}}{d\alpha^2}=\frac{3\,(x-\alpha)^2-u^2}{u^5}$$

$$\frac{d^2\frac{1}{u}}{d\beta^2}=\frac{3\,(y-\beta)^2-u^2}{u^5};\quad \frac{d^2\frac{1}{u}}{d\gamma^2}=\frac{3\,(z-\gamma)^2-u^2}{u^5};$$

y sumando,

$$\frac{d^2\frac{1}{u}}{d\alpha^2}+\frac{d^2\frac{1}{u}}{d\beta^2}+\frac{d^2\frac{1}{u}}{d\gamma^2}=\frac{3\,[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]-3u^2}{u^5}$$

$$=\frac{3\,u^2-3\,u^2}{u^5}=0;$$

luego $\quad(2)\quad \dfrac{d^2V}{d\alpha^2}+\dfrac{d^2V}{d\beta^2}+\dfrac{d^2V}{d\gamma^2}=0.$

Esta propiedad fué dada á conocer por Laplace, y suele llamarse por ello teorema de Laplace.

170. 2.ª Propiedad. Si el punto atraido es interior, se verifica, que

$$(3)\quad \frac{d^2V}{d\alpha^2}+\frac{d^2V}{d\beta^2}+\frac{d^2V}{d\gamma^2}=-4\pi\rho'.$$

En este caso no pueden aplicarse las reglas de la diferenciacion bajo el signo integral á la ecuacion (1), porque se hace infinita la integral que contiene, en el caso de $u=0$. Para saber á qué se reduce la suma de las tres diferenciales segundas de la funcion potencial, concibamos una esfera infinitamente pequeña que envuelva al punto material O; llamemos V' á la funcion potencial, para toda la extension de esta pequeña esfera, y V'' á la funcion potencial para todo el resto del cuerpo atrayente. Por la primera propiedad, V'' satisfará á la ecuacion

$$\frac{d^2V''}{d\alpha^2}+\frac{d^2V''}{d\beta^2}+\frac{d^2V''}{d\gamma^2}=0.$$

Sean a, b, c, las coordenadas del centro C de la pequeña esfera (fig. 87), R su radio, ρ' la densidad en el punto atraido O, que ha venido á ser uno de los puntos del cuerpo atrayente, densidad que supondremos constante en toda la extension de la pequeña esfera, r_1=CO, r=MC, distancia del elemento atrayente al centro de la pequeña esfera, θ=MCO; y por fin representamos por ψ el ángulo que el plano MCO forma con un plano fijo que pase por CO; tendremos

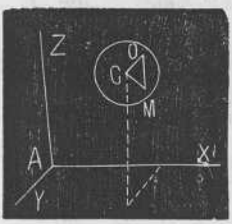


Fig. 87.

$$MO=u=\sqrt{r^2-2rr_1\cos\theta+r_1^2},\quad dm=\rho' r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\psi\, dr,$$

$$V'=\rho'\int\int\int\frac{r^2\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\psi\, dr}{u};$$

los límites de la integracion deben ser, con respecto á r, desde $r=0$, hasta $r=$R, con respecto á θ, de $\theta=0$ á $\theta=\pi$, y con respecto á ψ, desde 0 á 2π. Integremos con respecto á θ la expresion.

$$\int \frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{u} = \int \frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\sqrt{r^2-2rr_1\cos\theta+r_1^2}},$$

para lo cual cambiaremos de variable, por medio de la ecuacion

$$u^2 = r^2 - 2rr_1\cos\theta + r_1^2,$$

de la cual sale

$$udu = rr_1 \operatorname{sen}\theta d\theta, \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen}\theta d\theta = \frac{udu}{rr_1},$$

y tendremos sustituyendo,

$$\int \frac{\operatorname{sen}\theta d\theta}{u} = \int \frac{udu}{rr_1} \cdot \frac{1}{u} = \frac{1}{rr_1} \int du = u + \mathrm{C}.$$

Para $\theta = 0$, $\cos\theta = 1$, $u = \sqrt{r^2 - 2rr_1 + r_1^2} = \sqrt{(r-r_1)^2}$; para $\theta = \pi$, $\cos\theta = -1$, $u = \sqrt{r^2 + 2rr_1 + r_1^2} = r + r_1$; luego

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta d\theta}{\sqrt{r^2-2rr_1\cos\theta+r_1^2}} = \frac{1}{rr_1}\left[r + r_1 - \sqrt{(r-r_1)^2}\right].$$

Integrando con respecto á ψ y tomando siempre para $\sqrt{(r-r_1)^2}$ el valor positivo del radical, será

$$\mathrm{V}' = 2\pi\rho' \int_0^{\mathrm{R}} \left[r_1 + r - \sqrt{(r-r_1)^2}\right] \frac{rdr}{r_1}.$$

Como r_1 es siempre menor que R, tendremos

$$\int_0^{\mathrm{R}} \left[r_1 + r - \sqrt{(r-r)^2}\right] \frac{rdr}{r_1} = \int_0^{r_1} [(r_1+r)-(r_1-r)] \frac{rdr}{r_1}$$

$$+ \int_{1_1}^{\mathrm{R}} [(r_1+r)-(r-r_1)] \frac{rdr}{r_1} = \int_0^{r_1} \frac{2r^2dr}{r_1} + \int_{r_1}^{\mathrm{R}} 2rdr =$$

$$\frac{2}{3} r_1^2 + (\mathrm{R}^2 - r_1^2) = \mathrm{R}^2 - \frac{1}{3} r_1^2.$$

Sustituyendo este valor, se tiene

$$\mathrm{V}' = 2\pi\rho'(\mathrm{R}^2 - \frac{1}{3} r_1^2)$$

$$= 2\pi\rho'[\mathrm{R}^2 - \frac{1}{3}(\alpha-a)^2 - \frac{1}{3}(\beta-b)^2 - \frac{1}{3}(\gamma-c)^2],$$

por ser $\quad r_1^2 = (\alpha-a)^2 + (\beta-b)^2 + (\gamma-c)^2;$

diferenciando, resulta

$$\frac{dV'}{d\alpha}=-\frac{4}{3}\pi\rho'(\alpha-a),\qquad \frac{d^2V'}{d\alpha^2}=-\frac{4}{3}\pi\rho',$$

$$\frac{dV'}{d\beta}=-\frac{4}{3}\pi\rho'(\beta-b),\qquad \frac{d^2V'}{d\beta^2}=-\frac{4}{3}\pi\rho',$$

$$\frac{dV'}{d\gamma}=-\frac{4}{3}\pi\rho'(\gamma-c);\qquad \frac{d^2V'}{d\gamma^2}=-\frac{4}{3}\pi\rho'.$$

Sumando, tendremos

$$\frac{d^2V'}{d\alpha^2}+\frac{d^2V'}{d\beta^2}+\frac{d^2V'}{d\gamma^2}=-4\pi\rho',$$

ó lo que es lo mismo

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2}+\frac{d^2V}{d\beta^2}+\frac{d^2V}{d\gamma^2}=-4\pi\rho';$$

porque $$\frac{d^2V''}{d\alpha^2}+\frac{d^2V''}{d\beta^2}+\frac{d^2V''}{d\gamma^2}=0.$$

Esta segunda propiedad se conoce en la ciencia con el nombre de teorema de Poisson, porque fué el primero que la demostró.

LECCION XV.

Atraccion de un elipsóide homogéneo sobre un punto interior.—Fórmulas que la determinan.—Consecuencias de estas fórmulas.—Como se integran. — Fórmulas de Jacobi. —Caso en que el elipsóide difiere poco de una esfera. — Caso en que el elipsóide es de revolucion.—Teorema de Newton.—Atraccion de un elipsóide homogéneo sobre un punto exterior. Teorema d'Ibori.

Fórmulas relativas al elipsóide.

171. Supongamos que el centro y los ejes del elipsóide, son el orígen y los ejes de coordenadas; la ecuacion de la superficie es

$$(1)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

las coordenadas x, y, z serán, conservando las notaciones del caso general,

$$x=\alpha+u\cos g,$$
$$y=\beta+u\cos h,$$
$$z=\gamma+u\cos k;$$

sustituyendo en la (1), y haciendo para abreviar

$$(2)\quad m=\frac{\cos^2 g}{a^2}+\frac{\cos^2 h}{b^2}+\frac{\cos^2 k}{c^2},\quad n=\frac{\alpha\cos g}{a^2}+\frac{\beta\cos h}{b^2}+\frac{\gamma\cos k}{c^2},$$
$$l=1-\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right),$$

tendremos

$$(3)\quad mu^2+2nu-l=0,\quad u=\frac{n+\sqrt{n^2+ml}}{m}.$$

Ahora $m>0$ y $l>0$; luego u tendrá dos valores, uno positivo y otro negativo, que es extraño al problema; porque el rádio vector es una cantidad positiva, su valor será, designándolo por R,

$$R = \frac{-n+\sqrt{n^2+ml}}{m};$$

y su direccion quedará determinada por los ángulos g, h, k.

Integrando las fórmulas (3) núm. 166, con respecto á u, entre los límites 0 y R, y prescindiendo del factor constante $f\mu\rho$, serán

$$(4)\left\{\begin{array}{l} A = -\int\int R \cos g \operatorname{sen}\theta d\theta d\psi, \\ A = \int\int \frac{n-\sqrt{n^2+ml}}{m} \cos g \operatorname{sen}\theta d\theta d\psi. \\ B = \int\int \frac{n-\sqrt{n^2+ml}}{m} \cos h \operatorname{sen}\theta d\theta d\psi. \\ C = \int\int \frac{n-\sqrt{n^2+ml}}{m} \cos k \operatorname{sen}\theta d\theta d\psi. \end{array}\right.$$

La integral $\int\int \frac{\sqrt{u^2+ml}}{m} \cos g \operatorname{sen}\theta d\theta d\psi$ es cero por sí misma, lo mismo que sus análogas en las demas fórmulas, porque la suma de términos que representa, se compone de términos iguales entre sí, dos á dos, y de signo contrario, correspondientes á la direccion de un rádio vector (θ, ψ), y á su prolongacion $(\pi-\theta, \psi+\pi)$; por ser $\operatorname{sen}(\pi-\theta) = \operatorname{sen}\theta$, $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$, $\operatorname{sen}(\pi+\psi) = -\operatorname{sen}\psi$, $\cos(\pi+\psi) = -\cos\psi$; por lo tanto, $\cos g$, $\cos h$, $\cos k$, cambiarán de signo sin cambiar de valor al pasar del elemento correspondiente á un rádio vector, al que corresponde á su prolongacion, y todos los términos se destruirán dos á dos. El valor de A es

$$A = \int\int \frac{n}{m} \cos g \operatorname{sen}\theta d\theta d\psi.$$

Poniendo en vez de n su valor, será

$$A=\frac{\alpha}{a^2}\int\int\frac{\cos^2 g}{m}\operatorname{sen}\theta d\theta\, d\psi+\frac{\beta}{b^2}\int\int\frac{\cos g\cos h}{m}\operatorname{sen}\theta d\theta d\psi$$
$$+\frac{\gamma}{c^2}\int\int\frac{\cos g\cos k}{m}\operatorname{sen}\theta d\theta d\psi.$$

Tomando dos elementos, para los cuales θ tenga dos valores suplementarios, conservando ψ el mismo valor, ó dos valores suplementarios g, conservando los suyos h y k, las sumas que espresan el segundo y tercer término se componen tambien de términos iguales dos á dos, y de signos contrarios, luego estos términos se reducen á cero por sí mismos, y tendremos, haciendo operariones análogas en las fórmulas que dan B y C,

$$(5)\begin{cases} A=\dfrac{\alpha}{a^2}\displaystyle\int\int\frac{\cos^2 g}{m}\operatorname{sen}\theta d\theta d\psi, \\ B=\dfrac{\beta}{b^2}\displaystyle\int\int\frac{\cos^2 h}{m}\operatorname{sen}\theta d\theta d\psi, \\ C=\dfrac{\gamma}{c^2}\displaystyle\int\int\frac{\cos^2 k}{m}\operatorname{sen}\theta d\theta d\psi. \end{cases}$$

Poniendo por m su valor, $\cos\theta=\cos g$, $\cos h=\operatorname{sen}\theta\cos\psi$, $\cos k=\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi$,

$$(6)\begin{cases} A=\alpha\displaystyle\int\int\frac{b^2c^2\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta d\theta d\psi}{b^2c^2\cos^2\theta+a^2c^2\cos^2\psi\operatorname{sen}^2\theta+a^2b^2\operatorname{sen}^2\psi\operatorname{sen}^2\theta}, \\ B=\beta\displaystyle\int\int\frac{a^2c^2\operatorname{sen}^3\theta\cos^2\psi\, d\theta d\psi}{b^2c^2\cos^2\theta+a^2c^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\psi+a^2b^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\psi}, \\ C=\gamma\displaystyle\int\int\frac{a^2b^2\operatorname{sen}^3\theta\operatorname{sen}^2\psi\, d\theta d\psi}{b^2c^2\cos^2\theta+a^2c^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\psi+a^2b^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\psi}. \end{cases}$$

Consecuencias de estas fórmulas.

172. 1.ª Las componentes A, B, C, son proporcionales á las coordenadas α, β, γ del punto atraido, y todos los puntos situados en los planos $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$, son igualmente atraidos paralelamente á los ejes X, Y, Z.

2.ª De las ecuaciones (5), divididas por α, β, γ, y sumadas, resulta

$$\frac{A}{\alpha}+\frac{B}{\beta}+\frac{C}{\gamma}=\int\int \operatorname{sen}\theta d\theta d\psi=4\pi,$$

diferenciadas y sumadas

$$\frac{dA}{d\alpha}+\frac{dB}{d\beta}+\frac{dC}{d\gamma}=\int\int \operatorname{sen}\theta d\theta d\psi=4\pi,$$

esta última es un caso particular de la

$$\frac{d^2 V}{d\alpha^2}+\frac{d^2 V}{d\beta^2}+\frac{d^2 V}{d\gamma^2}=-4\pi\rho',$$

correspondiente al teorema de Poisson.

3.ª Los valores de A, B, C, no varian, poniendo en vez de a, b, c; na, nb, nc; de modo que la capa de elipsóide homogéneo, comprendida entre dos superficies elipsoidales, concéntricas, semejantes y semejantemente dispuestas, no ejerce ninguna accion sobre un punto colocado en su interior. Esta propiedad constituye el teorema de Newton. Por ella, la accion de un elipsóide sobre un punto de su propia masa, se reduce á la de la porcion de este cuerpo, terminada por una superficie concéntrica y semejante á la suya, que pasa por el punto dado.

Integracion de las fórmulas que se refieren al elipsóide.

173. Las fórmulas (6) núm. 171, que vamos á integrar, contienen sen θ, elevado á potencias impares, y cos θ elevado al cuadrado; luego con respecto á θ no variarán para un valor de este arco y para su suplemento $\pi-\theta$, los términos á que se refiere esta variable serán iguales dos á dos; luego podemos tomar los límites de $\theta=0$, á $\theta=\frac{1}{2}\pi$, y duplicar el resultado. La variable ψ entra por su seno y coseno cuadrados, luego serán iguales los términos que correspondan á ψ, $\pi-\psi$, $\pi+\psi$, $2\pi-\psi$;

podemos, pues, poner los límites de $\psi=0$, á $\psi=\frac{1}{2}\pi$, y cuadruplicar el resultado. El valor de A podrá ponerse, pues, bajo la forma

$$A=8b^2c^2\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta\times$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{b^2c^2\cos^2\theta+a^2c^2\cos^2\psi\operatorname{sen}^2\theta+a^2b^2\operatorname{sen}^2\psi\operatorname{sen}^2\theta};$$

cambiemos de variable en la última, poniendo

$$tg\,\psi=t;\text{ será } d\psi=\frac{1+t^2}{dt},\ \operatorname{sen}^2\psi=\frac{1+t^2}{t^2},$$

$$\cos^2\psi=\frac{1}{1+t^2};\left\{\begin{array}{ll}\psi=0, & t=0,\\ \psi=\frac{\pi}{2}, & t=\infty;\end{array}\right.$$

y se tiene

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\text{denom.}^r}=\int_0^{\infty}\frac{dt}{c^2(b^2\cos^2\theta+a^2\operatorname{sen}^2\theta)+b^2(c^2\cos^2\theta+a^2\operatorname{sen}^2\theta)t^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\pi}{bc\sqrt{(b^2\cos^2\theta+a^2\operatorname{sen}^2\theta)(c^2\cos^2\theta+a^2\operatorname{sen}^2\theta)}}.$$

Integrando entre los límites asignados por la fórmula, será

$$\int\frac{dt}{p+qt^2}=\frac{1}{\sqrt{pq}}\,arc\ tg\left(t\sqrt{\frac{p}{p}}\right);$$

de modo que

$$(7)\quad A=4\pi\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{bc\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\sqrt{(b^2\cos^2\theta+a^2\operatorname{sen}^2\theta)(c^2\cos^2\theta+a^2\operatorname{sen}\theta)}};$$

cambiando a y b se tiene B, y en la que resulte c y b se tiene C.

$$(7)\quad B=4\pi 6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{ac\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\sqrt{(a^2\cos^2\theta+b^2\operatorname{sen}^2\theta)(c^2\cos^2\theta+b^2\operatorname{sen}^2\theta)}};$$

$$(7)\quad C=4\pi\gamma\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{ab\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\sqrt{(a^2\cos^2\theta+c^2\operatorname{sen}^2\theta)(b^2\cos^2\theta+c^2\operatorname{sen}^2\theta)}}.$$

Tambien de estas fórmulas se deduce el teorema de Newton, porque no varian, cuando en vez de a, b, c se pone na, nb, nc.

174. Para hacer la última integracion, cambiaremos

tambien de variable, haciendo $\cos\theta = u$, y resulta

$$\operatorname{sen}\theta d\theta = -du,\ \operatorname{sen}^2\theta = 1 - u^2, \cos 0 = 1,$$

$\cos\frac{\pi}{2} = 0$, y se obtiene

$$A = 4\pi\alpha\frac{bc}{a^2}\int_0^1 \frac{u^2du}{\sqrt{(1+\frac{b^2-a^2}{a^2}u^2)(1+\frac{c^2-a^2}{a^2}u^2)}}.$$

Llamando M á la masa del elipsóide, $M = \frac{4}{3}\pi abc$, y haciendo $\lambda^2 = \frac{b^2-a^2}{a^2}$, $\lambda'^2 = \frac{c^2-a^2}{a^2}$;

$$(8)\quad A = \frac{3M\alpha}{a^3}\int_0^1 \frac{u^2du}{\sqrt{(1+\lambda^2u^2)(1+\lambda'^2u^2)}}.$$

De un modo análogo se tiene, haciendo

$$v = \frac{u\sqrt{1+\lambda^2}}{\sqrt{1+\lambda^2u^2}} = \frac{bu}{a\sqrt{1+\lambda^2u^2}},$$

$$(8)\quad B = \frac{3M\beta}{a^3}\int_0^1 \frac{u^2du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\lambda'^2u^2}};$$

y por fin poniendo $v = \frac{uc}{a\sqrt{1+\lambda'^2u^2}} = \frac{u\sqrt{1+\lambda'^2}}{\sqrt{1+\lambda'^2u^2}}$,

tendremos

$$(8)\quad C = \frac{3M\gamma}{a^3}\int_0^1 \frac{u^2du}{(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\lambda^2u^2}}.$$

Haciendo

$$F = \int_0^1 \frac{u^2du}{\sqrt{(1+\lambda^2u^2)(1+\lambda'^2u^2)}},$$

se obtiene

$$(9)\quad A = \frac{3M\alpha}{a^3}F;\quad B = \frac{3M\beta}{a^3}\frac{d\lambda F}{d\lambda};\quad C = \frac{3M\gamma}{a^3}\frac{d\lambda' F}{d\lambda'}.$$

Fórmulas de Jacobi.

175. Jacobi hace en la fórmula del núm. 174,

$$A = 4\pi\alpha\frac{bc}{a^2}\int_0^1 \frac{u^2du}{\sqrt{\left(1+\frac{b^2-a^2}{a^2}u^2\right)\left(1+\frac{c^2-a^2}{a^2}u^2\right)}}$$

$$u=\frac{a}{\sqrt{t+a^2}},\ \text{de donde}\ du=-\frac{a\,dt}{2\,(t+a^2)^{\frac{3}{2}}};\ \begin{cases}u=0, & t=\infty,\\ u=1, & t=o;\end{cases}$$

sustituyendo y simplificando, tendremos las fórmulas más simétricas

$$(10)\begin{cases}A=\dfrac{2\pi\alpha}{a^2}\displaystyle\int_0^\infty\frac{dt}{\left(1+\frac{t}{a^2}\right)\sqrt{\left(1+\frac{t}{a^2}\right)\left(1+\frac{t}{b^2}\right)\left(1+\frac{t}{c^2}\right)}}\\ B=\dfrac{2\pi\beta}{b^2}\displaystyle\int_0^\infty\frac{dt}{\left(1+\frac{t}{b^2}\right)\sqrt{\left(1+\frac{t}{a^2}\right)\left(1+\frac{t}{b^2}\right)\left(1+\frac{t}{c^2}\right)}}\\ C=\dfrac{2\pi\gamma}{c^2}\displaystyle\int_0^\infty\frac{dt}{\left(1+\frac{t}{c^2}\right)\sqrt{\left(1+\frac{t}{a^2}\right)\left(1+\frac{t}{b^2}\right)\left(1+\frac{t}{c^2}\right)}}.\end{cases}$$

Las fórmulas segunda y tercera se obtienen del mismo modo que la primera.

Caso en que el elipsóide difiere poco de una esfera.

176. Si el elipsóide se aproxima á la esfera, las cantidades $\lambda^2=\frac{b^2-a^2}{a^2}$, $\lambda'^2=\frac{c^2-a^2}{a^2}$ serán muy pequeñas y podremos desarrollar en série el denominador de la primera fórmula (8). Hagamos

$$\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2u^2}\,\sqrt{1+\lambda'^2u^2}}=1-P_1u^2+P_2u^4-P_3u^6\ldots$$

Determinando los coeficientes, se tiene

$$P_1=\frac{1}{2}(\lambda^2+\lambda'^2);\ P_2=\frac{1.3}{1.4}(\lambda^4+\lambda'^4)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\lambda^2\lambda'^2;$$

$$P_3=\frac{1.3.5}{2.4.6}(\lambda^6+\lambda'^6)+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\frac{1}{2}\lambda^2\lambda'^2(\lambda^2+\lambda'^2);$$

$$P_4=\frac{1.3.5.7}{2.4\,6.8}(\lambda^8+\lambda'^8)+\frac{1.3.5}{2.4\,6}\cdot\frac{1}{2}(\lambda^6\lambda'^2+\lambda^2\lambda'^6)$$
$$+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1\,3}{2.4}\lambda^4\lambda'^4\ldots$$

Sustituyendo resultará, despues de integrar entre límites, los términos sucesivos

$$A=\frac{3M\alpha}{a^3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}P_1+\frac{1}{7}P_2-\frac{1}{9}P_3+\ldots\right).$$

Séries análogas darán B y C.

Caso en que el elipsóide es de revolucion.

177. Siendo el elipsóide, de revolucion alrededor del eje menor $2a$, se tiene $\lambda=\lambda'$, y la fórmula

$$A=\frac{3Ma}{a^3}\int_0^1\frac{u^2du}{\sqrt{(1+\lambda^2u^2)(1+\lambda'^2u^2)}},$$

se reduce á

$$A=\frac{3Ma}{a^3}\int_0^1\frac{u^2du}{1+\lambda^2u^2},$$

é integrando

$$(11)\quad A=\frac{3M\alpha}{a^3\lambda^3}[\lambda-arc\ tg\lambda].$$

La

$$B=\frac{3M\beta}{a^3}\int_0^1\frac{u^2du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}$$

se convierte, para $\lambda=\lambda'$, en

$$B=\frac{3M\beta}{a^3}\int_0^1\frac{u^2du}{(1+\lambda^2u^2)^2}$$

$$(11)\quad B=\frac{3M\beta}{2a^3\lambda^3}\left(arc\ tg\lambda-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)$$

Para obtener C, observaremos que siendo $\lambda=\lambda'$, se tiene por las fórmulas

$$\frac{C}{\gamma}=\frac{B}{\beta};\ C=\frac{B\gamma}{\beta},$$

$$(11)\quad C=\frac{3M\gamma}{2a^3\lambda^3}\left(arc\ tg\lambda-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right).$$

Siendo B y C proporcionales á las coordenadas β y γ del punto atraido, su resultante A' estará dirigida segun la perpendicular δ, bajada de este punto al eje de revolucion, y tendrá por valor

$$A'=\frac{3M\delta}{2a^3\lambda^3}\left(arc\ tg\lambda-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right).$$

178. Si λ es pequeño, se puede desarrollar *arc tg* λ en série, y tendremos

$$A=\frac{M\alpha}{a^3}\left(1-\frac{3}{5}\lambda^2+\ldots\right);\quad A'=\frac{M\delta}{a^3}\left(1-\frac{6\lambda^2}{5}+\ldots\right).$$

En el caso de la esfera $\lambda=0$, la resultante es

$$A=\frac{M\alpha}{a^3}=\frac{4}{3}\pi\alpha.$$

Si el elipsóide es de revolucion alrededor del eje $2b$, suponiendo $c=a$, $b>a$, $\lambda'=0$, y obtendríamos análogamente

$$B=\frac{3M6}{a^3\lambda^3}\left[l(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2})-\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right];$$

$$\frac{A}{\alpha}=\frac{C}{\gamma}=\frac{3M}{a^3}\int_0^1\frac{u^2du}{\sqrt{1+\lambda^2u^2}}$$

$$=\frac{3M}{2a^3\lambda^3}\left[\sqrt{1+\lambda^2}-l.(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2})\right]$$

Teorema de Newton.

179. Puede demostrarse directamente el teorema de Newton, que nos dice, que una capa homogénea de cualquier espesor, comprendida entre dos superficies elipsoidales semejantes y semejantemente dispuestas, no ejerce ninguna atraccion sobre un punto interior á ellas. Este teorema lo dedugimos ya como consecuencia de las fórmulas (6) del núm 171.

Para demostrarlo directamente, supongamos un cono infinitamente estrecho, que tiene su vértice en el punto atraido O (fig. 88), y que interceptara en la capa dos porciones cuyos volúmenes que llamaremos v y v' se pueden descomponer en capas ó troncos de conos por planos perpendiculares á una generatriz qq'. La masa de la capa mn situada á la distancia $Om=u$ del vértice, es $\rho s du$, siendo s el área de la seccion mn; pero

Fig. 88.

$s=\omega u^2$ siendo ω el área de la seccion del cono distante uno del vértice. La atraccion de esta capa sobre el punto O, es

$$f\mu\rho\frac{sdu}{u^2}=f\mu\rho\,\omega du.$$

Integrando desde $u=Op$, hasta $u=Oq$, la accion es igual á $f\mu\rho\omega(Oq-Op)=f\mu\rho\omega pq$. Del mismo modo, la accion del volúmen v' sobre el mismo punto es $f\mu\rho\omega p'q'$, estas dos fuerzas actuan en sentidos contrarios, y ademas son iguales, por ser $pq=p'q'$, á causa de que en los elipsóides semejantes las cuerdas paralelas á una misma direccion tienen los puntos medios sobre un mismo plano diametral. Luego las acciones ejercidas por los diversos elementos pueden descomponerse en acciones iguales y contrarias dos á dos, y por lo tanto se destruyen; resultado conforme con el enunciado del teorema.

180. Este teorema es cierto para una capa infinitamente delgada, y por consecuencia para una capa de espesor finito, tal que se la pueda considerar formada por infinidad de capas infinitamente delgadas, comprendidas entre superficies elipsoidales concéntricas, semejantes y semejantemente dispuestas, variando la densidad de una capa á otra y siendo constante en una misma capa.

Si el punto O fuera exterior, las acciones de las porciones v y v' serían iguales, pero del mismo signo y se sumarian por lo tanto.

Atraccion de un elipsóide homogéneo sobre un punto exterior. Teorema d'Ivori.

181. Conservando las notaciones del principio y prescindiendo del factor $f\mu\rho$, tenemos

$$A=-\int\int\int \cos g du \operatorname{sen}\theta d\theta d\psi,$$

que se debe integrar con respecto á u, desde $u=R$, hasta $u=\mathrm{R}'$, siendo estas las distancias del punto atraido á los dos puntos en que la recta determinada por los ángulos θ y ψ encuentra á la superficie del elipsóide: integrando se tiene

$$\mathrm{A}=-\int\int(\mathrm{R}'-\mathrm{R})\cos\theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\psi;$$

pero $\quad \mathrm{R}=\frac{-n-\sqrt{n^2+ml}}{m},\ \mathrm{R}'=\frac{-n+\sqrt{n^2+ml}}{m},$

luego $\quad \mathrm{A}=2\int\int\frac{\sqrt{n^2+ml}}{m}\cos\theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\psi.$

Esta integracion debe efectuarse para todas las direcciones comprendidas en el interior del cono circunscrito al elipsóide y cuyo vértice es el punto atraido. Puede tambien hacerse el cálculo por el teorema de d'Ivori.

182. Supongamos dos elipsóides que tengan sus ejes a, b, c y a', b', c', segun los mismos tres ejes rectangulares. Se llaman en éstos, puntos correspondientes, dos puntos cuyas coordenadas son proporcionales á los semiejes que les son paralelos; siendo los puntos (x, y, z) y (x', y', z'), se tendrá

$$\frac{x}{a}=\frac{x'}{a'},\ \frac{y}{b}=\frac{y'}{b'},\ \frac{z}{c}=\frac{z'}{c'}.$$

Si uno de estos puntos está situado sobre la superficie del primer elipsóide, el otro estará evidentemente sobre la superficie del segundo.

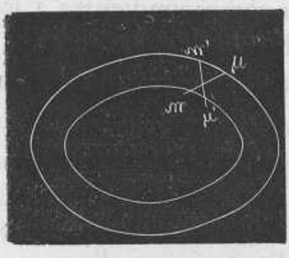


Fig. 89.

Supongamos ademas que las secciones principales de estos dos elipsóides tienen los mismos focos, es dicir, que

$$a^2-a'^2=b^2-b'^2=c^2-c'^2.$$

Si tomamos sobre las dos elisóides, dos puntos cualesquiera, $m(x, y, z)$, $\mu(\alpha, \beta, \gamma)$, (fig. 89), y sus correspondientes $m'(x', y', z')$ y $\mu'(\alpha', \beta', \gamma')$; las distancias μm y $\mu' m'$ son iguales. En efecto

$$\overline{\mu m}^2 - \overline{\mu' m'}^2 = (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2$$
$$-(\alpha' - x')^2 - (\beta' - y')^2 - (\gamma' - z')^2$$
$$= \left(\frac{\alpha'}{a} a' - x\right)^2 + \left(\frac{\beta'}{b} b' - y\right)^2 + \left(\frac{\gamma'}{c} c' - z\right)^2$$
$$-\left(\alpha' - \frac{x}{a} a'\right)^2 - \ldots$$
$$-\left(\frac{\alpha'^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2}\right)(a'^2 - a^2) + \left(\frac{\beta'^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)(b'^2 - b^2) + \left(\frac{\gamma'^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)(c'^2 - c^2)$$
$$= (a'^2 - a^2)\left[\left(\frac{\alpha'^2}{a^2} + \frac{\beta'^2}{b^2} + \frac{\gamma'^2}{c^2}\right) - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\right];$$

pero $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \quad \dfrac{\alpha'^2}{a^2} + \dfrac{\beta'^2}{b^2} + \dfrac{\gamma'^2}{c^2} = 1,$

luego $\quad \overline{\mu m}^2 - \overline{\mu' m'}^2 = 0, \qquad \mu m = \mu' m'.$

183. Siendo A, B, C, las componentes de la atraccion del primer elipsóide sobre el punto μ, tendremos prescindiendo de $f\mu\rho$,

$$A = \int\int\int \frac{\alpha - x}{u^3} dxdydz;$$

de $u^2 = (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma = z)^2$, sale $udu = -(\alpha - x)dx$, integrando y dividiendo por u^3, será

$$\int \frac{\alpha - x}{u^3} dx = -\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{u};$$

llamando R y r á los valores de u correspondientes á los límites de la integral, es decir, á los dos puntos en que la superficie del elipsóide es encontrada por una paralela al eje de las X, se tiene

$$A = \int\int \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) dydz.$$

Consideremos la atraccion que el segundo elipsóide ejerce sobre el punto μ', correspondiente á μ, y llamemos A', B', C', sus componentes, tendremos

$$A' = \int\int \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{R'}\right) dy'dz',$$

pero $r=\mu m$, $r'=\mu' m'$, luego (182) $r=r'$, y del mismo modo se tiene $R=R'$. Tambien $dy'=\frac{b'}{b}dy$, $dz'=\frac{c'}{c}dz$, por consiguiente

$$A'=\int\int\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)\frac{b'c'}{bc}dydz$$

$$=\frac{b'c'}{bc}\int\int\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)dydz=\frac{b'c'}{bc}A.$$

De análoga manera se tiene

$$B'=\frac{a'c'}{ac}B,\ B'=\frac{a'b'}{ab}C.$$

Estas ecuaciones contienen el teorema d'Ivori, que se enuncia como sigue: la atraccion de un elipsóide sobre un punto exterior μ, se reduce á la atraccion de un elipsóide homofocal sobre el punto μ' correspondiente. Este teorema es independiente de la ley de la atraccion.

Para aplicarle, debemos calcular los valores de los semiejes a', b', c', del segundo elipsóide, conociendo los del primero, y las coordenadas del punto μ. Para ello tenemos las tres ecuaciones siguientes:

$$\frac{\alpha^2}{a'^2}+\frac{\beta^2}{b'^2}+\frac{\gamma^2}{c'^2}=1,\qquad b'^2-a'^2=b^2-a^2=h,$$

$$c'^2-a'^2=c^2-a^2=k,$$

de las que se deduce

$$\frac{\alpha^2}{a'^2}+\frac{\beta^2}{a'^2+h}+\frac{\gamma^2}{a'^2+k}=1,$$

esta ecuacion da un valor positivo para a'^2, y sólo uno; porque $a'^2=0$, da al primer miembro un valor mayor que uno, y $a'^2=\infty$, le da un valor menor que uno; este primer miembro decrece de una manera contínua, creciendo a'^2 desde cero á infinito, luego habrá un sólo valor del primer miembro igual 1. Obtenido el semieje a', se tendrán los otros por las ecuaciones

$$b'^2=a'^2+h,\qquad c'^2=a'^2+k.$$

CINEMÁTICA.

LECCION XVI.

Movimiento de un punto material. Trayectoría.—Ecuacion del movimiento sobre la trayectoría.—Ley del movimiento y su representacion gráfica.—Movimiento uniforme, velocidad.—Movimiento variado, velocidad. Su determinacion analítica y gráfica.—Movimiento uniformemente variado.—Curva de los espacios, curva de las velocidades. Comparacion de estas dos curvas.—Deflnicion general de la velocidad: Velocidad angular, de circulacion, de deslizamiento, aereolar.—Proyeccion del movimiento sobre un plano fijo y sobre una recta fija.

184. Hemos dicho que la Cinemática es la parte de la Mecánica que trata del movimiento de los cuerpos considerado en sí mismo, teniendo en cuenta el tiempo en que éste se verifica, y prescindiendo de las fuerzas ó causas que lo producen; es decir, que sólo estudia el espacio recorrido por el móvil y el tiempo empleado en recorrerlo.

Siguiendo el método que nos hemos propuesto, vamos ahora á exponer los principios generales de la Cinemática, que pueden considerarse como los preliminares de la Dinámica.

Movimiento de un punto material. Trayectoría.

185. Un punto material que cambia de lugar en el espacio, pasa de una posicion á otra de una manera contínua, pasando por todas las posiciones intermedias que se pueden imaginar. Se llama *trayectoría* del punto la curva que describe, es decir, el lugar geométrico de todas las posiciones que ocupa sucesivamente el punto móvil.

La trayectoría del punto puede ser una línea recta ó una línea curva; en el primer caso se dice que el movimiento es rectilíneo y en el segundo curvilíneo. Este se llama circular, elíptico, parabólico etc., cuando la trayectoría es un círculo, una elipse, una parábola, etc.

Ecuacion del movimiento sobre la trayectoría.

186. Para conocer completamente el movimiento de un punto, es necesario que se conozca la trayectoría y ademas la ley segun la cual el móvil recorre sus diferentes partes; es decir, el tiempo que emplea en pasar de una posicion cualquiera á otra.

Sean A B (fig. 90), la trayectoría de un punto móvil, O un punto fijo tomado sobre esta curva, que consideraremos como el orígen de los arcos que describe el móvil, M la posicion del punto móvil al fin del tiempo t; llamemos s al arco OM y convengamos en llamar positivos á los arcos contados á la derecha del orígen O, y negativos á los tomados á la izquierda: el arco s

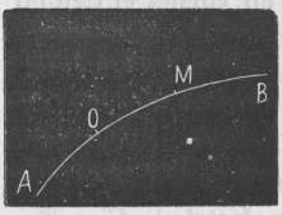


Fig. 90

dependerá del tienpo t, ó será una cierta funcion de esta variable, y el movimiento será conocido, si además de conocer la trayectoría, tenemos la relacion

$$s=f(t);$$

en la cual se conoce la naturaleza de la funcion de t, que nos dará el arco s para todos los valores imaginables de t. Esta ecuacion, es la ecuacion del movimiento sobre la trayectoría, de la cual pueden deducirse todas las circunstancias del movimiento.

Ley del movimiento y su representacion gráfica.

187. La ecuacion $s=f(t)$ expresa como hemos dicho la ley del movimiento, ley que puede representarse gráficamente del modo siguiente. Consideremos las variables s y t, como las coordenadas de un punto en un plano, es claro, que la ecuacion $s=f(t)$, representará una curva, que podrá construirse por los procedimientos que enseña la Geometría analítica, y que será la representacion geométrica de la ecuacion. Representemos los tiempos por las abscisas y los arcos s por las ordenadas, contadas sobre los ejes rectangulares OT y OS (fig. 91), y supongamos determinados los puntos correspondientes á los diferentes sistemas de valores de s y t, que satisfacen á la ecuacion del movimiento; unamos todos los puntos así determinados por un trazo contínuo, y tendremos una curva ABCDEF, que representará la ley gráfica del movimiento. Esta curva se llama, *curva de los espacios*, porque sus ordenadas son los arcos ó espacios recorridos

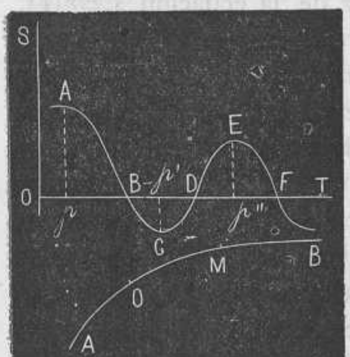


Fig. 91.

por el móvil en los tiempos expresados por las abscisas. La forma de esta curva representa gráficamente todas las circunstancias del movimiento. A medida que el tiempo crece, á partir de Op, el arco s disminuye, es decir que el móvil se aproxima al punto fijo O, con el cual coincide cuando el tiempo es igual á OB; desde $t=OB$ hasta $t=Op'$, se aleja de él hácia la izquierda, y desde $t=Op'$, vuelve á aproximarse, coincide con él de nuevo cuando $t=OD$, y sigue alejándose á la derecha, vuelve hácia el punto fijo, coincide con él, vuelve á alejarse á la izquierda, etc.

Las abcisas y las ordenadas pueden tomarse en las escalas que se quiera, para dar á la figura las dimensiones convenientes.

Es preciso cuidar de no confundir la curva ABCDEF que expresa la ley del movimiento, y se llama curva de los espacios, con la curva AOMB que el punto describe en el espacio y que llamamos la trayectoría del punto.

Movimiento uniforme, velocidad.

188. Como caso particular de la ecuacion $s=f(t)$, tomemos la

$$(1) \quad s=a+vt;$$

en este caso el movimiento se llama uniforme; que es aquel en que el móvil describe en su trayectoría arcos iguales en tiempos iguales; ó lo que es lo mismo, que los arcos son proporcionales á los tiempos empleados en recorrerlos. Puede definirse el movimiento uniforme por su ecuacion, ó por la propiedad característica que acabamos de exponer, que se deduce de ella, dando á t valores iguales. Para $t=0, 1, 2, 3...$; da $s=a, a+v, a+2v, a+3v...$

Los movimientos uniformes se distinguen unos de otros por la mayor rapidez ó lentitud con que se verifican.

Se toma por medida de esta mayor ó menor rapidez, el camino recorrido por el móvil en la unidad de tiempo, que es lo que se llama velocidad. De modo, que *velocidad*, en el movimiento uniforme, es el camino recorrido por el móvil en la unidad de tiempo.

Ordinariamente se toma por unidad de tiempo, el segundo de tiempo medio. Esta velocidad estará en general representada por un arco de curva, que podremos suponer rectificado, y entónces la velocidad estará representada por una recta.

En la ecuacion (1) vemos, que el camino recorrido en la unidad de tiempo, ó sea la velocidad, es v. Si diferenciamos la ecuacion con relacion á t, tendremos

$$\frac{ds}{dt}=v;$$

esta velocidad es constante, y es positiva ó negativa, segun que su valor se cuente en el sentido de los arcos positivos ó en el sentido de los arcos negativos, es decir, segun que ds sea positivo ó negativo.

Cuando el movimiento es uniforme, la curva de los espacios, ó la línea que expresa gráficamente la ley de este movimiento, es una línea recta, que representa el lugar geométrico de la ecuacion $s=a+vt$. Podemos construir gráficamente la velocidad; para esto, desde un punto cualquiera C de la recta AB (fig. 92), que representa la ley gráfica del movimiento, tiremos CH paralela á OT, y tomemos CH igual á la unidad de tiempo, por H tiremos HK paralela á OS, hasta que encuentre á la AB; la KH representa la velocidad. En este caso, es positiva, y del mismo modo se determinaria si fuera negativa.

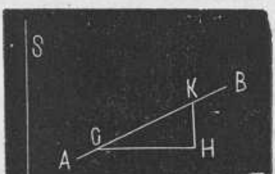


Fig. 92.

Movimiento variado, velocidad.

189. Se llama movimiento variado, todo movimiento que no es uniforme; en este movimiento el móvil recorre espacios desiguales en tiempos iguales, ó lo que es lo mismo, los espacios no son proporcionales á los tiempos empleados en recorrerlos.

Todo movimiento variado puede considerarse como la sucesion de una infinidad de movimientos uniformes, cada uno de los cuales tiene lugar durante un intervalo de tiempo infinitamente pequeño. Para ello supongamos dividido el tiempo total en un número cualquiera de partes iguales, y que el movimiento del móvil durante cada uno de estos intervalos de tiempo, se reemplaza por un movimiento uniforme, en virtud del cual, este móvil recorre la misma porcion de su trayectoría, durante este intervalo parcial de tiempo.

La sucesion de movimientos uniformes, que sustituimos así al movimiento variado, en las diversas partes en las que se ha descompuesto la duracion total del movimiento, constituirá un movimiento variado diferente del propuesto; pero la diferencia entre estos dos movimientos será tanto más pequeña, cuanto mayor sea el número de partes iguales en que se haya dividido el tiempo total; de modo, que dividiendo este tiempo en partes más y más pequeñas, el segundo movimiento tenderá á confundirse con el primero, y en el límite coincidirá con él; luego todo movimiento variado se compone de una infinidad de movimientos uniformes, cada uno de los cuales se verifica en un tiempo infinitamente pequeño. Estos movimientos uniformes sucesivos, constituyen lo que se llama los elementos del movimiento variado que se considera.

En este concepto, se llama velocidad en un instante cualquiera, en el movimiento variado, la velocidad del movimiento uniforme elemental correspondiente á este instante en el movimiento que se considera. Si se tira una tangente á la trayectoría en el punto en que el móvil se encuentra, en un instante cualquiera, segun esta tangente se dirige al movimiento elemental del móvil en este instante; y si tomamos sobre la tangente, á partir del punto de contacto, una longitud igual á la velocidad que posee el móvil en este movimiento elemental, tendremos una línea recta que representa á la vez, la longitud, la direccion y el sentido de la velocidad del móvil.

Determinacion analítica y gráfica de la velocidad.

190. Para determinar la velocidad en un instante cualquiera, llamemos v á esta velocidad y supongamos conocida la ecuacion del movimiento sobre la trayectoría,

$$s=f(t).$$

Sea t el arco recorrido por el móvil en el tiempo t, y $s+ds$ el recorrido en el tiempo $t+dt$, es claro que el móvil habrá recorrido el arco ds en el tiempo dt, y si consideramos uniforme el movimiento durante este intervalo de tiempo, tendremos para hallar v, la proporcion

$$1:dt::v:ds, \text{ ó } \quad v=\frac{ds}{dt}=f'(t).$$

Como ds puede ser positivo ó negativo, segun que el movimiento se verifica en el sentido de los arcos positivos ó negativos, la velocidad será positiva ó negativa y la expresion anterior de v nos dará el valor y el sentido de esta velocidad.

191. Para determinar geométricamente la velocidad,

sea CD (fig. 93), la curva de los espacios en el movimiento variado. La sustitucion de un movimiento uniforme al movimiento variado, durante el intervalo representado por C′H′, con la condicion de que el camino recorrido por el móvil du-

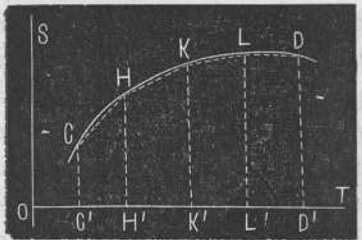


Fig. 93.

rante este tiempo, sea el mismo que el que recorre en el mismo tiempo en virtud del movimiento variado, equivale á la sustitucion de la cuerda CH, en vez del arco de curva subtendido. De modo que si dividimos el tiempo total del movimiento en cuatro partes iguales, y suponemos que el movimiento variado se reemplaza por un movimiento uniforme en cada una de estas partes, siempre con la condicion de que el camino recorrido en cada una de ellas permanezca el mismo, todo equivale á reemplazar la curva CD por el polígono CHKLD.

Segun esto, cuando decimos que un movimiento variado puede considerarse como la sucesion de una infinidad de movimientos uniformes, cada uno de los cuales se verifica en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño, es lo mismo que si digeramos que la curva CD, que representa la ley del movimiento, puede considerarse como un polígono de un número infinito de lados infinitamente pequeños.

Para encontrar la velocidad del móvil al fin del tiempo t, representado por la abscisa OK′ (fig. 94), es preciso buscar la velocidad del movimiento uniforme representado por el elemento rectilíneo de la curva CD, al que pertenece el punto K de la curva; si este movimiento

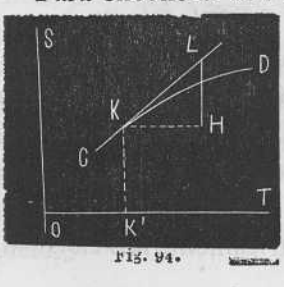


Fig. 94.

uniforme, que no tiene lugar más que durante un intervalo de tiempo infinitamente pequeño, durante un tiempo cualquiera, estaria representado por el mismo elemento rectilíneo prolongado indefinidamente, es decir, por la tangente KL á la curva CD en el punto K. La velocidad de este movimiento rectilíneo es HL, siendo KH paralela á OT, é igual á la unidad de tiempo; luego HL representa la velocidad buscada.

Movimiento uniformemente variado.

192. Como segundo caso particular de la ecuacion general del movimiento sobre la trayectoría, $s=f(t)$, examinemos el caso en que el movimiento está representado por la ecuacion

$$s=a+bt+ct^2.$$

La velocidad en un instante cualquiera es, $v=\frac{ds}{dt}$, aquí será

$$v=\frac{ds}{dt}=b+2ct;$$

haciendo en esta ecuacion $t=0, 1, 2, 3...$ la velocidad es $b, b+2c, b+4c, b+6c...$ en donde vemos que la velocidad varía en la cantidad $2c$ en cada unidad de tiempo, de modo que varía proporcionalmente al tiempo. Por esta propiedad, el movimiento de que tratamos, se llama movimiento uniformemente variado.

Si b y c son del mismo signo, la velocidad conserva siempre el signo de estas cantidades, y crece cantidades iguales en tiempos iguales, y el movimiento se llama en este caso uniformemente acelerado.

Si b y c tienen signos contrarios, v tiene en el orígen del movimiento el signo de b, y va disminuyendo, hasta ser $v=0$, cantidades iguales en tiempos iguales.

El movimiento hasta este instante se llama uniformemente retardado. Continuando creciendo el tiempo, v cambia de signo, y conserva siempre el signo de c, creciendo cantidades iguales en tiempos iguales, siendo desde el tiempo correspondiente á $v=0$, el movimiento uniformemente acelerado.

Curva de los espacios, curva de las velocidades. Comparacion de estas dos curvas.

193. La curva (fig. 91), que representa gráficamente la ley del movimiento del móvil sobre su trayectoria, y que sirve para determinar la velocidad del móvil en los diferentes instantes del movimiento, hemos dicho que se llama curva de los espacios. Para mayor generalidad, la supondremos prolongada hácia la izquierda, suponiendo que los tiempos se cuentan á partir de un instante dado; los tiempos anteriores á este instante serán negativos y se contarán á la izquierda del orígen, y los posteriores serán positivos y se contarán á la derecha del orígen.

La curva de los espacios puede presentar las formas más variadas, segun la ley del movimiento del punto; pero en todos los casos, si representa un movimiento real y efectivo, tendrá las propiedades siguientes:

1.ª A cada valor del tiempo, ó de la abscisa, corresponderá un sólo valor del arco, ó de la ordenada; porque es imposible que en un mismo instante el móvil esté á la vez en diferentes puntos de la trayectoría, correspondientes á una de las ordenadas de la curva.

2.ª La curva de los espacios es contínua, porque es imposible que el móvil pase de un punto á otro de su trayectoría, sin pasar por todos los puntos intermedios; y por lo tanto, las ordenadas de la curva variarán por grados insensibles y no por saltos bruscos.

3.ª Como la velocidad de un punto material no puede experimentar más que variaciones graduales, la curva de los espacios no puede tener puntos angulosos, para los cuales la velocidad tendría que experimentar cambios bruscos, lo que es inadmisible en el movimiento real de los puntos materiales.

4.ª La tangente á la curva de los espacios no puede nunca ser paralela al eje de ordenadas; porque para el punto en que esto tuviera lugar, corresponderia una velocidad infinita para el móvil, lo cual es inadmisible en el movimiento real.

En pocas palabras, la curva de los espacios es una curva contínua, y la ecuacion $s=f(t)$ que la representa, es finita y contínua para todos los valores de t.

Si considerando á v y t como la ordenada y la abscisa de un punto de un plano, construimos la curva representada por la ecuacion

$$v=f'(t);$$

tendremos la que se llama *curva de las velocidades*. Esta curva puede construirse por los procedimientos que enseña la Geometría analítica, y puede tambien obtenerse por medio de la curva de los espacios.

194. Supongamos trazada la curva de los espacios ABCDE (fig. 95). Construyamos para cada punto de esta curva la velocidad del móvil sobre su trayectoría, en el instante que corresponde á este punto; esta velocidad está representada por una recta paralela al eje OS, y que representa en la escala de los

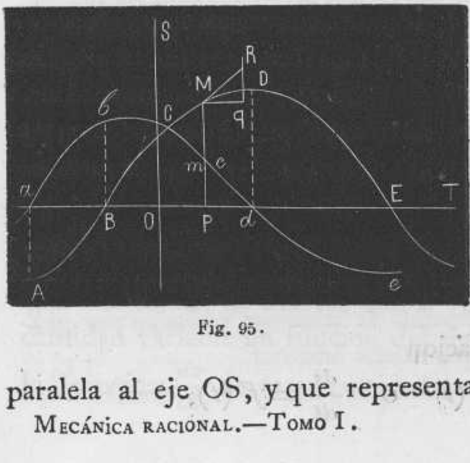


Fig. 95.

arcos un espacio descrito en la unidad de tiempo; es la ordenada de un cierto punto de la paralela al eje de las ordenadas, correspondiente al valor t de la abscisa. La reunion por un trazo contínuo de todos los puntos así determinados será la curva de las velocidades. Sea MP una ordenada cualquiera, construyamos la velocidad QR correspondiente al tiempo t=OP; tomamos Pm=QR, el punto m será un punto de la curva de las velocidades; del mismo modo se determinan todas las demas, y tendremos la curva $abcde$, que es la de las velocidades. En ella vemos que la velocidad es positiva del punto a, al punto d, es decir desde $t=-\mathrm{O}a$, hasta $t=+\mathrm{O}d$; en este período el móvil va en el sentido positivo sobre su trayectoría. Los puntos a y d son las proyecciones de los puntos A y D, donde la ordenada de la curva de los espacios llega á un valor máximo ó mínimo. La velocidad es máxima en el punto b, para el cual $t=-\mathrm{OB}$; en este instante la curva de los espacios, cuya ordenada es cero, tiene en un punto de inflexion B, la tangente á la curva alcanza en este punto su máximo de inclinacion sobre el eje de las x.

195. De las ecuaciones $s=f(t)$, y $v=f'(t)$, eliminando t, se deduce una ecuacion entre s y v que podria servir para construir una nueva curva, en la que las ordenadas v serian las velocidades correspondientes á los arcos recorridos s, tomados por abscisas; esta curva daria las velocidades del móvil para todas las posiciones que el móvil toma sobre su trayectoría.

De la curva de los espacios hemos deducido la de las velocidades, y vamos ahora á resolver el problema inverso: dada la curva de las velocidades, construir la curva de los espacios.

Conocemos la ecuacion

$$v=f'(t) \quad \text{ó} \quad \frac{ds}{dt}=f'(t);$$

integrando esta ecuacion entre los límites t_0 y t, tendremos

$$s = s_0 + \int_{t_0}^{t} f'(t)\,dt.$$

Esta integral representa el área de la curva de las velocidades entre los valores de la abscisa t_0 y t. Obtenida s en funcion de t, construiremos fácilmente la curva de los espacios.

Es de notar en la ecuacion anterior que el arco s es igual al arco s_0, más una cierta área, ó más un producto que tiene dos dimensiones; esto consiste en que la fórmula no es homogénea, y para que lo sea, basta dividir el producto que represente el área, por la longitud t, que represente la unidad de tiempo, y el resultado será una longitud que sumada con s_0 dará s.

Definicion general de la velocidad.—Velocidad angular, de circulacion, de deslizamiento, aereolar.

196. La velocidad de un móvil en un instante cualquiera dado, es la relacion del espacio infinitamente pequeño, que describe sobre su trayectoría, al tiempo empleado en describirlo. Por la consideracion de la curva de los espacios, hemos visto que puede reducirse la investigacion de esta relacion á la construccion de una tangente.

En general, cuando una cantidad variable cualquiera depende del tiempo, se llama *velocidad* de esta cantidad, en un instante dado, la relacion de la variacion infinitamente pequeña positiva ó negativa de esta cantidad, al tiempo infinitamente pequeño empleado en producir esta variacion; de suerte, que si representamos por x la cantidad variable en funcion del tiempo, la velocidad es la derivada $\frac{dx}{dt}$ de esta cantidad con relacion al tiempo;

y como se pueden siempre representar por las ordenadas de una curva, los valores de una cantidad cualquiera que depende de una sola variable, escogiendo escalas arbitrarias convenientes, se podrán encontrar, por la construccion de las tangentes en los diferentes puntos de esta curva, los valores sucesivos de la velocidad de esta cantidad.

197. Supongamos, por ejemplo, que se trata del fenómeno del enfriamiento de un cuerpo, cuya temperatura es de 100°, y está expuesto en un recinto cuya temperatura es 0°. Al enfriarse este cuerpo, su temperatura es la cantidad variable con el tiempo; y la velocidad del enfriamiento es mayor en valor absoluto al principio de la observacion que al fin. La curva de las temperaturas sucesivas presenta la forma PQ de la fig. 96. Al principio del fenómeno, el cuerpo tiene la temperatura $OP = 100°$; al cabo de los tiempos $OT_1 = 1^s, OT_2 = 2^s, OT_3 = 3^s \ldots$ las temperaturas que decrecen rápidamente están respectivamente representadas por AT_1,

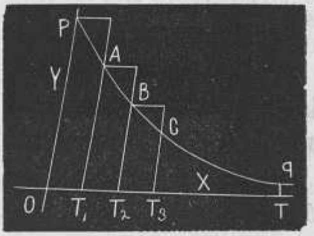


Fig. 96.

BT_2, $CT_3 \ldots$; al cabo de cierto número de segundos, $t = OT$, la temperatura está representada por QT, muy próxima á cero, si el recinto es muy grande, es decir la temperatura del mismo recinto. La temperatura va siempre disminuyendo sin llegar á descender bajo cero; la *velocidad de la temperatura*, que es negativa, va disminuyendo tambien en valor absoluto; porque la tangente á la curva en el punto P, está más inclinada sobre el eje OX, que la tangente en el punto A, ésta más que la tangente en el punto B y así sucesivamente; en Q la tangente es casi horizontal, y la disminucion de temperatura en un segundo es apénas sensible.

En este caso, existe un punto móvil animado en cada instante de la misma velocidad, que la cantidad variable cuya curva acabamos de construir; que es el extremo de la columna termométrica que sirve de medida á las diferentes temperaturas. La curva PQ es la curva de los espacios relativa al movimiento de este punto en el tubo del termómetro, que le sirve de trayectoría.

198. Del mismo modo se concibe la *velocidad angular*; si en el tiempo dt, un ángulo θ recibe un incremento positivo ó negativo $d\theta$, la velocidad del ángulo en este momento, ó la velocidad angular, es la relacion $\frac{d\theta}{dt}$; y la determinacion de esta velocidad se reduce á la construccion de la tangente á la curva cuyas abscisas representan los tiempos y cuyas ordenadas representan los valores correspondientes del ángulo variable.

Si el arco que mide el ángulo variable no está trazado con un radio igual á la unidad, sino con un radio r, el arco descrito en el tiempo dt será $rd\theta$, y la velocidad, que se llama *velocidad de circulacion*, estará expresada por $r\,\frac{d\theta}{dt}$ y se construirá como la velocidad angular.

Si un punto se mueve á lo largo de una recta r, en el tiempo dt describirá una porcion de esta recta representada por dr, y la velocidad será $\frac{dr}{dt}$; esta velocidad se llama *velocidad de deslizamiento* y podrá construirse como las anteriores.

199. Cuando un punto M se mueve sobre una línea AB (fig. 97), trazada en un plano, conviene muchas veces en Mecánica, considerar las *áreas* descritas en este plano por la recta móvil OM, que une en cada instante el punto móvil M con un punto fijo O del plano. Entre las posiciones A y M del móvil, el área descrita es AOM; esta área contada desde una posicion

fija OA, es variable con el tiempo, y si tomamos una posicion M′ infinitamente próxima á la M, crecerá por este cambio de posicion, en el área del triángulo MOM′, en el cual el lado infinitamente pequeño $MM' = ds$, puede considerarse como una recta. La velocidad del área, que se llama *velocidad aereolar*, es la relacion del área del triángulo MOM′ al tiempo dt; y llamando dA al incremento del área, será $\frac{dA}{dt}$. Llamando h á la perpendicular bajada del punto O, que se llama centro de las áreas, á la tangente MT, el área del triángulo MOM′, es $\frac{1}{2}h \times ds$; y la velocidad aereolar será $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}h\frac{ds}{dt}$. Luego la velocidad aereolar en un instante cualquiera es igual á la velocidad del móvil en este instante, $v = \frac{ds}{dt}$, multiplicada por la mitad de la distancia del centro de las áreas á la tangente trazada en este mismo instante á la trayectoría. Esto supone que el movimiento del móvil se verifica en un plano.

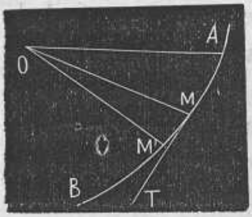


Fig. 97.

Para distinguir la velocidad de un punto sobre su trayectoría de las velocidades que acabamos de definir, se la llama *velocidad lineal*, que expresa siempre la relacion del incremento de una longitud, al tiempo empleado en producirlo.

Proyeccion del movimiento sobre un plano fijo y sobre una recta fija.

200. El uso del método de las proyecciones facilita considerablemente el estudio de las cuestiones de movimiento, porque reduce la consideracion de un movimiento,

que se verifica en el espacio, á la de los movimientos de sus proyecciones sobre un plano ó sobre una recta, que son mucho más sencillos.

Por esta razon conviene algunas veces considerar, en vez del movimiento de un punto en el espacio, el movimiento de su proyeccion sobre un plano fijo ó sobre una recta fija.

Miéntras que el punto M (fig. 98), describe la trayectoría AB en el espacio, su proyeccion *m*, determinada por la Mm trazada paralelamente á una recta dada, describe sobre el plano P la proyeccion *ab* de esta trayectoría. El movimiento de este punto *m*, es lo que se llama proyeccion del movimiento del punto M sobre el plano.

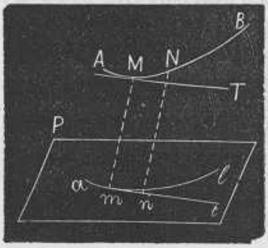


Fig. 98.

Siendo MN y *mn* los arcos descritos por M y *m* en el tiempo *dt*, y siendo el arco *nm* proyeccion de MN, dividiéndolos por *dt* se tendrá, que la velocidad de la proyeccion $\frac{mn}{dt}$, es la proyeccion de la velocidad $\frac{\text{MN}}{dt}$ del punto en el espacio. Como lo que acabamos de decir, es cierto para una proyeccion cualquiera, será tambien cierto para la proyeccion ortogonal, que no es más que un caso particular.

201. Si proyectamos el punto móvil sobre una recta fija, tirando por cada una de sus posiciones un plano paralelo á un plano director dado, el movimiento proyectado es un movimiento rectilíneo dirigido segun la recta fija.

La velocidad del punto proyectado en un instante cualquiera, es la proyeccion de la velocidad que posee el punto en el espacio en el mismo instante. Lo cual es muy fácil de demostrar razonando como en el párrafo anterior.

Esta propiedad se verifica cualquiera que sea la direccion del plano director, luego será cierta cuando este plano es perpendicular á la recta fija, es decir cuando la proyeccion es ortogonal.

LECCION XVII.

Movimiento de un sólido ó sistema invariable.—Movimiento de traslacion.—Movimiento de rotacion.—Velocidad angular, sea uniforme ó variado.—Movimiento elemental de una figura plana en su plano; centro instantáneo de rotacion.—Movimiento elemental de un sólido cuyos puntos se mueven paralelamente á un plano.—Movimiento de una figura esférica sobre su esfera y de un sólido que tiene un punto fijo.—Teorema de d'Alambert.

Movimiento de un sólido ó sistema invariable.

202. Habiendo expuesto en la leccion anterior las nociones generales del movimiento de un punto, vamos á dar en ésta las que se refieren á un sólido invariable, es decir, á un sólido ó sistema tal que las distancias mútuas de todos sus puntos permanecen invariables.

Puede definirse de varios modos la forma de un sólido ó sistema invariable; el más sencillo consiste en el conocimiento de las distancias mútuas de tres puntos A, B, C, no en línea recta (fig. 99), y en el de las distancias de todos los demas del sistema, tal como el M, á éstos. De este modo cada uno de los demas puntos M, es el vértice de un tetraedro que tiene por base el triángulo ABC. El punto M′ simétrico del M, está determinado tambien por estos datos, pero nosotros prescindiremos de esta ambigüedad. Basta, pues, conocer la posicion de este triángulo en todos los

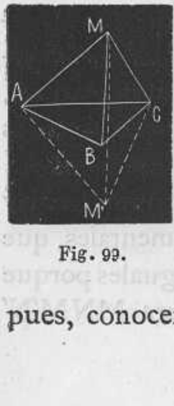


Fig. 99.

instantes del movimiento, para conocer en cada uno de ellos la posicion de todo el sistema.

Sabemos que la trayectoría de un punto puede considerarse como un polígono infinitesimal, cuyos lados recorre sucesivamente el punto: consideremos los polígonos de esta clase que recorre los diferentes puntos del sistema, de manera, que cuando uno de los puntos móviles se encuentra en uno de los vértices del polígono que recorre, todos los demas puntos se encuentran en el vértice correspondiente. Durante el primer elemento del tiempo, todos los puntos recorren los primeros elementos de sus respectivas trayectorías poligonales, durante el segundo, todos recorren los segundos lados de estos polígonos, en el tercero recorren los terceros y así sucesivamente. Cada uno de estos movimientos sucesivos, que se verifica durante los diversos elementos del tiempo, se llama movimiento elemental del sólido.

Movimiento de traslacion.

203. El movimiento del sólido es de traslacion cuando los lados del triángulo formado por los tres puntos A, B, C, no en línea recta, permanecen constantemente paralelos á sus primitivas posiciones; es claro que las líneas rectas que unen los demas puntos con los A, B, C, permanecerán tambien paralelas á sus primitivas posiciones, y que lo mismo sucederá á toda línea recta que una dos puntos cualquiera del sólido.

Sean MM′, NN′ los arcos descritos por los puntos M y N (fig. 100), en el tiempo *dt;* estos arcos elementales, que pueden considerarse como rectilíneos, son iguales porque siendo MN igual y paralela á M′N′, la figura MNM′N′

es un paralelógramo y por consiguiente, MM', es igual y paralela á NN'. Las velocidades de estos puntos se obtendrán dividiendo estos arcos iguales por dt, luego las velocidades de todos los puntos del sólido son iguales y paralelas. Se llama velocidad del sólido, en un instante, la velocidad de uno cualquiera de sus puntos; esta velocidad puede cambiar de magnitud y direccion de un instante al siguiente.

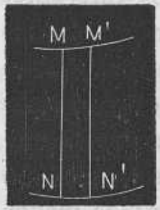


Fig. 100.

Una figura plana que se mueve en su plano, puede estar animada de un movimiento de traslacion, siendo aplicable á este movimiento cuanto hemos dicho del movimiento de traslacion de un sólido.

Movimiento de rotacion. Velocidad angular, sea uniforme ó variado.

204. Si un sólido en movimiento tiene dos puntos fijos, todos los puntos de la recta que une los dos primeros, permanecen fijos en el espacio, y el sólido sólo podrá girar alrededor de esta recta; el movimiento en este caso, se llama *movimiento de rotacion*, y la recta fija recibe el nombre de *eje* de rotacion.

Sea AB (fig. 101) el eje fijo, M un punto cualquiera del sólido; bajando la recta MP perpendicular al eje, ésta permanece perpendicular al eje en todas sus posiciones, describiendo un plano perpendicular á este eje; y como ademas la PM es constante, el punto M describirá una circunferencia cuyo centro será el pié de la perpendicular P; de modo que todos los puntos del sólido describen circunferen-

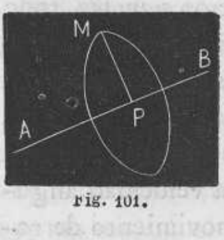


Fig. 101.

cias de círculo, cuyos planos son todos perpendiculares al eje. Las perpendiculares bajadas de los diferentes puntos del sólido sobre el eje, describen ángulos iguales en tiempos iguales; y la medida comun de los descritos en un mismo tiempo, es la medida del ángulo de que el sólido ha girado en el mismo tiempo.

205. Si el sólido gira de ángulos iguales en tiempos iguales, el movimiento de rotacion es *uniforme*; la mayor ó menor rapidez de este movimiento se mide por el ángulo de que el sólido gira en la unidad de tiempo; este ángulo se llama *velocidad angular*.

Los arcos descritos por los diferentes puntos del sólido, son proporcionales á los radios, ó á las distancias de estos puntos al eje; de modo, que las velocidades absolutas de estos puntos son proporcionales á estas distancias. Si medimos los ángulos descritos por las rectas que representan las distancias de los diferentes puntos al eje, por sus arcos correspondientes, sobre la circunferencia descrita con un radio igual á la unidad; la velocidad angular de un sólido, animado de un movimiento de rotacion uniforme, será el arco descrito en la unidad de tiempo, por un punto situado á la unidad de distancia del eje, es decir, la velocidad de este punto. Llamando ω á la velocidad angular; v á la velocidad absoluta de un punto que diste r del eje de rotacion, tendremos

$$v = r\omega.$$

206. Se llama movimiento de rotacion *variado*, todo movimiento de rotacion que no es uniforme. Un movimiento de rotacion variado puede considerarse como la sucesion de una infinidad de movimientos de rotacion uniformes, cada uno de los cuales tiene lugar durante un tiempo infinitamente pequeño. Se llama velocidad angular en un instante cualquiera, en un movimiento de rotacion variado, la velocidad angular del movimiento de

rotacion uniforme elemental, correspondiente á este instante, en el movimiento de rotacion variado.

Supongamos que el sólido ha girado del ángulo θ durante el tiempo t, y del ángulo $\theta+d\theta$ en el tiempo $t+dt$; el camino recorrido por un punto del sólido situado á la unidad de distancia del eje de rotacion, durante la unidad de tiempo, será $\frac{d\theta}{dt}$; y esta será la velocidad angular al cabo del tiempo t, es decir, llamando ω á la velocidad angular

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}.$$

Para un punto que diste r del eje, tendremos, llamando v á su velocidad absoluta, ó sea la velocidad de circulacion

$$v=r\omega=r\frac{d\theta}{dt}.$$

207. Podemos suponer que todos los puntos del sólido, que gira alrededor de un eje, están en un plano perpendicular á este eje; tendremos entónces una figura plana que gira en su plano alrededor del eje, y ninguno de sus puntos saldrá de este plano; puede considerarse en este caso la figura plana animada en su plano, de un movimiento de rotacion alrededor del punto de interseccion del eje con el plano; este punto se llama, en este caso, *centro de rotacion* de la figura plana.

Cuanto hemos dicho sobre la rotacion de un sólido alrededor de un eje, es aplicable, por lo que acabamos de decir, á la rotacion de una figura plana en su plano.

Movimïento elemental de una figura plana en su plano.

208. Para estudiar como se verifica este movimiento, estableceremos el siguiente lema. Una figura plana, que se mueve en su plano, puede llevarse de una cualquiera

de sus posiciones á otra, por un movimiento de rotacion alrededor de uno de los puntos del plano.

Para demostrar este lema, tomemos una recta MN (figura 102), que forme parte de la figura móvil y venga á colocarse en la posicion M'N', al pasar la figura de la primera posicion á la segunda; el punto A de MN se habrá colocado en B de M'N', y el punto B en C; tendremos que AB=BC; sea O el centro de la circunferencia que pasa por los tres puntos A, B, C; hagamos girar la recta MN alrededor del punto O, hasta que el punto A venga á colocarse en B y el punto B en C, la recta MN se situará en M'N' y la figura toda habrá pasado de la primera posicion á la segunda.

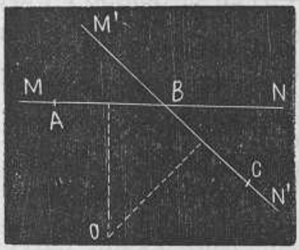


Fig. 102.

Esta demostracion supone, que las dos posiciones MN, M'N' de la recta que se considera, se cortan en el punto B, y pudiera suceder, que fueran paralelas ó que coincidieran en toda su extension; en este caso para llevar los puntos de MN á sus correspondientes de M'N', bastará dar á la recta, y por consiguiente á la figura móvil, un movimiento de traslacion rectilíneo convenientemente dirigido; pero un movimiento de este género puede considerarse como un movimiento de rotacion alrededor de un punto situado en el infinito. De modo, que el lema es cierto en todos los casos, con sólo considerar el movimiento de traslacion rectilíneo, como una rotacion cuyo centro está en el infinito.

209. Un movimiento cualquiera de una figura plana en su plano podemos descomponerlo en una serie de movimientos elementales. Considerando uno de estos movimientos elementales, la figura puede llevarse de la posi-

cion que ocupa al principio, á la que tiene al fin, por medio de una rotacion alrededor de un punto del plano: los caminos recorridos por los diferentes puntos de la figura móvil en este movimiento de rotacion, son infinitamente pequeños, y pueden por lo tanto considerarse como rectilíneos y coinciden exactamente con los caminos que estos secmentos recorren en el movimiento que consideramos: luego este movimiento es idéntico á la rotacion, en virtud de la cual llevamos la figura de la posicion inicial á la posicion final. Vemos por esto, que todo movimiento elemental de una figura plana en su plano, es un movimiento de rotacion infinitamente pequeño, alrededor de uno de los puntos del plano, punto que puede estar situado en el infinito. Los centros de estas rotaciones elementales que constituyen el movimiento total, son generalmente diferentes unos de otros, y la figura no gira alrededor de cada uno de ellos, sino durante un intervalo de tiempo infinitamente pequeño, es decir, durante un instante, y por ello se da á cada uno de estos puntos el nombre de *centro instantáneo* de rotacion.

210. Resulta de esta manera de considerar el movimiento de una figura plana en su plano, que los caminos infinitamente pequeños recorridos por los diferentes puntos de la figura, son arcos de círculo que tienen todos por centro, el centro instantáneo de rotacion de la figura correspondiente á este elemento del tiempo, ó en otros términos, las normales á las trayectorías de los diferentes puntos de la figura móvil, tiradas por las posiciones que estos puntos ocupan en un mismo instante, pasan todos por un mismo punto del plano, que es el centro instantáneo de rotacion relativo á este instante. Se sigue de aquí, que las velocidades de los diferentes puntos de la figura en un mismo instante, son proporcionales á las distancias de estos puntos al centro instantáneo de rotacion.

Conociendo las direcciones de las velocidades de dos puntos de la figura móvil, en un instante cualquiera, se encontrará el centro instantáneo de rotacion relativo á este instante, buscando el punto de encuentro de dos perpendiculares levantadas á las direcciones de estas velocidades. Si estas perpendiculares son paralelas entre sí, el centro instantáneo de rotacion está en el infinito, y el movimiento es en el instante que se considera de traslacion. Puede tambien conocerse la magnitud de las velocidades de los diferentes puntos de la figura, conociendo la direccion de las de dos puntos y la magnitud de una de ellas; bastará para ello determinar el centro instantáneo de rotacion, y establecer las proporciones que resultan, de que las velocidades son proporcionales á las distancias de estos puntos al centro instantáneo de rotacion.

211. Apliquemos esta teoría al siguiente ejemplo, Una recta AB (fig. 103), de longitud constante, se mueve de modo que sus extremos A y B recorren los dos ejes rectangulares OX y OY; un punto cualquiera D sabemos que describe una elipse en este movimiento. Las normales á las trayectorías en los puntos A y B son AC y BC, y su punto de encuentro C es el centro instantáneo de rotacion en el instante que se considera, la CD será una normal á la elipse descrita por el punto D, y la perpendicular EF á esta, es una tangente á la curva en este punto.

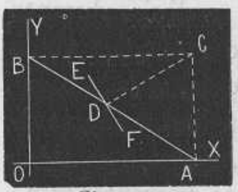


Fig. 103.

Movimiento elemental de un sólido cuyos puntos se mueven paralelamente á un plano.

212. Para conocer este movimiento, cortemos el sólido por un plano paralelo al dado, los puntos de la sec-

cion formarán una figura plana que no puede salir de su plano; así que, todo movimiento elemental de esta figura será, por lo expuesto en el párrafo anterior, un movimiento de rotacion alrededor de un cierto punto C de su plano, ó lo que es lo mismo, un movimiento de rotacion alrededor de la perpendicular comun á los dos planos, que pasa por el punto C; el sólido entero, ligado invariablemente á la figura que consideramos, participa de su movimiento, luego todo movimiento elemental de un sólido, cuyos puntos se mueven paralelamente á un plano fijo, es un movimiento de rotacion alrededor de un eje perpendicular á este plano. Puede suceder que este eje esté en el infinito, y entónces el movimiento elemental es un movimiento de traslacion.

El eje, alrededor del cual se verifica la rotacion, es distinto en general en cada uno de los movimientos elementales, y por eso recibe el nombre de *eje instantáneo* de rotacion.

Movimiento de una figura esférica sobre su esfera, y de un sólido que tiene un punto fijo. Teorema de d'Alambert.

213. Una figura esférica que se mueve sobre su esfera, puede llevarse de una cualquiera de sus posiciones á otra, por un movimiento de rotacion alrededor de un punto de la esfera, como polo, ó lo que es lo mismo, por un movimiento de rotacion alrededor de un diámetro de la esfera como eje. Esta proposicion se demuestra por el razonamiento empleado en el núm. 180 para una figura plana que se mueve en su plano, sin más que reemplazar las líneas rectas de aquella demostracion por arcos de círculo máximo de la esfera.

Tambien tendremos aquí, que todo movimiento elemental de una figura esférica sobre su esfera, es un movimiento de rotacion infinitamente pequeño alrededor de un punto de la esfera, como polo, ó de un diámetro de la esfera como eje.

214. Cuando un sólido que se mueve tiene un punto fijo, los diversos puntos del sólido que se encuentran sobre la superficie de una esfera que tiene el punto fijo por centro, forman una figura esférica que se mueve sobre su esfera; pero este movimiento es una rotacion alrededor de un diámetro de la esfera; luego el movimiento elemental del sólido, es tambien una rotacion alrededor de un eje instantáneo que pasa por este punto. Esta proposicion se conoce en la ciencia con el nombre de teorema de d'Alambert.

El sólido podrá, en general, llevarse de una posicion cualquiera á otra por una rotacion alrededor de un eje que pasa por el punto fijo, eje que ocupa diferentes posiciones en el espacio en los elementos sucesivos del tiempo, pasando siempre por el punto fijo, como pronto veremos.

LECCION XVIII.

Movimiento elemental de un sólido, que se mueve de un modo cualquiera en el espacio.—Movimiento helizoidal.—Eje instantáneo de rotacion y traslacion, y como se determina.—Movimiento contínuo de una figura plana en su plano.—Movimiento epicicloidal.—Sistemas articulados de cuerpos rígidos.—Propiedades de las epiciclóides.—Línea recta y élipse consideradas como hipociclóides.—Radio de curvatura de una curva epicicloidal plana.—Centro instantáneo de segundo órden.—Movimiento contínuo de un sólido que tiene un punto fijo.—Teorema de Poinsot.—Movimiento contínuo de un sólido en el caso general.

Movimiento elemental de un sólido que se mueve de un modo cualquiera en el espacio.

215. Cualquiera que sea el movimiento de un sólido en el espacio, puede llevarse de una de sus posiciones á otra, dándole primero un movimiento de traslacion y luégo un movimiento de rotacion alrededor de un cierto eje. En efecto, sean A, B, C, D (fig. 104), varios puntos de un sólido en la primera posicion, y A′, B′, C′, D′, estos mismos puntos en la segunda posicion del sólido; unamos los puntos A y A′ por una línea recta, y por los puntos B, C, D, tracemos las rectas BB″, CC″, DD″, iguales y paralelas á AA′. Para llevar el sólido de la primera posicion

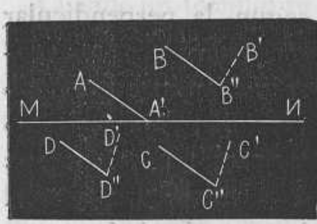


Fig. 104.

ABCD á la segunda A′B′C′D′, démosle primero un movimiento de traslacion rectilíneo, de modo que todos sus puntos describan rectas iguales y paralelas á la recta AA′; los puntos B, C, D, se colocarán en B″, C″, D″. Ahora suponiendo el punto A′ inmóvil, demos al sólido un movimiento de rotacion alrededor de un eje MN, que pase por este punto, tal que los puntos B″, C″, D″, se coloquen en B′, C′, D′, y tendremos el sólido en la segunda posicion: luego se puede llevar el sólido de la primera posicion á la segunda, por una traslacion segun AA′, y una rotacion alrededor de un eje que pase por el punto A′.

216. Los sistemas compuestos de una traslacion y una rotacion, por medio de los cuales puede llevarse un sólido de una posicion á otra, son infinitos; basta para verlo, observar que un punto cualquiera del sólido, puede hacer el papel que nosotros hemos atribuido al punto A. Entre estos sistemas diversos, existe uno, en el cual la traslacion se efectúa paralelamente al eje de la rotacion. Tiremos, en efecto, un plano P perpendicular al eje MN, y consideremos la figura F, segun la cual corta al sólido: esta figura se traslada á un plano P′ paralelo á P, en la traslacion segun AA′, tomando una posicion F′ en la rotacion que se efectúa alrededor de MN; pero para hacer pasar la figura plana de que se trata, de la primera posicion F á la última posicion F′, puede dársele primero un movimiento de traslacion segun la perpendicular que mide la distancia de los planos P, P′; y despues hacerla girar en este último plano alrededor de un punto conveniente: si se concibe que el sólido es arrastrado por esta figura, se ve que por la sucesion de los dos movimientos que acabamos de indicar, llevaremos el sólido de la primera posicion á la segunda: luégo puede llevarse un sólido móvil de una cualquiera de sus posiciones á otra, por medio de una traslacion seguida de

una rotacion alrededor de un eje de la misma direccion que la traslacion.

Movimiento helizoidal.—Eje instantáneo de rotacion y traslacion, y como se determina.

217. Se ve por lo que acabamos de decir, que un sólido que se mueve de cualquier modo en el espacio, puede llevarse de la posicion que ocupa, al principio de uno de sus movimientos elementales, á la que ocupa al fin de este movimiento, por una traslacion infinitamente pequeña, seguida de una rotacion infinitamente pequeña alrededor de un eje de la misma direccion que la traslacion. Pero el movimiento elemental del sólido, no consiste en estos dos movimientos infinitamente pequeños; porque, en el movimiento real elemental, cada uno de los puntos del sólido describe un elemento rectilíneo de su trayectoría, miéntras que en virtud de la sucesion de la traslacion y de la rotacion, de que acabamos de hablar, cada punto va de su posicion inicial á su posicion final, recorriendo una línea quebrada, formada por dos elementos rectilíneos perpendiculares uno á otro. Veamos, pues, por qué movimiento podemos reemplezar la sucesion de la traslacion y la rotacion, para tener el movimiento elemental, tal como se produce en realidad en el espacio.

Cuando un tornillo se mueve penetrando en el interior de su tuerca, que supondremos fija, cada uno de los puntos del tornillo describe una hélice; las diversas hélices que forman las trayectorías de los diferentes puntos del tornillo, están trazadas sobre superficies cilíndricas del mismo eje, y tienen todas un mismo paso. Esta clase de movimiento, se designa con el nombre de *movimiento helizoidal*. En el movimiento elemental del tornillo, cada uno de sus puntos describe un elemento rectilíneo de su trayectoría helizoidal, y el tornillo puede llevarse evidentemente de la posicion que tiene al principio del movimiento elemental, á la que ocupa al fin, por medio de una traslacion infinitamente pequeña en la direccion del eje, seguida de una rotacion infinitamente pequeña alrededor de este eje.

De aquí se deduce, que el movimiento elemental de un sólido, debido á la sucesion de una traslacion infinitamente pequeña y de una rotacion infinitamente pequeña alrededor de un eje de la misma direccion que la traslacion, puede producirse por un movimiento helizoidal infinitamente pequeño alrededor del mismo eje; y por consiguiente todo movimiento elemental de un sólido, que se mueve de un modo cualquiera en el espacio, es un movimiento helizoidal; es decir, puede asimilarse al movimiento de un tornillo que penetra en su tuerca.

218. Cuando un tornillo se mueve en el interior de su tuerca, se le suele considerar como animado de dos movimientos coexistentes: se dice que se desliza á lo largo de su eje, y que al mismo tiempo gira alrededor de este eje. Segun esto, un movimiento elemental cualquiera de un sólido móvil, puede considerarse como debido á la coexistencia de una rotacion alrededor de un cierto eje y de una traslacion ó resbalamiento á lo largo de este eje. La línea recta, alrededor de la cual el sólido gira, y á lo largo de la cual se desliza en cada uno de sus movimientos elementales sucesivos, cambia generalmente de posicion en el espacio, de un instante al siguiente, por lo que se la llama *eje instantáneo de rotacion y traslacion.*

Tambien podemos decir, que todo movimiento elemental de un sólido, es debido á la coexistencia de una traslacion igual y paralela al movimiento elemental de uno de sus puntos, y de una rotacion alrededor de un eje que pasa por este punto.

219. Veamos ahora cómo se determina el eje instantáneo.

Para ello, sea e la cantidad infinitamente pequeña de que el sólido resbala á lo largo del eje instantáneo de rotacion y traslacion, durante un elemento de tiempo dt; los caminos recorridos por los diferentes puntos del sólido proyectados sobre el eje, tendrán por proyeccion la cantidad e, la velocidad de cada uno de estos puntos se obtiene dividiendo el camino recorrido por dt, y la proyeccion de esta velocidad sobre el eje es para todos $\frac{e}{dt}$; luego las velocidades de que van animados simultáneamente todos los puntos del sólido, en un instante cualquiera, proyectadas sobre el eje instantáneo de rotacion y traslacion, relativo á este instante, producen todas proyecciones iguales entre sí.

De manera, que si tiramos, á partir de un punto O del espacio, rectas iguales y paralelas á las velocidades de que van animados los diferentes puntos en un mismo instante, las extremidades de estas rectas estarán todas en un mismo plano perpendicular al eje de rotacion y traslacion buscado; de suerte, que si del punto O bajamos una perpendicular á este plano, esta perpendicular será paralela al eje instantáneo; ahora, para determinar el plano de que se trata, basta conocer tres puntos no en línea recta; de modo que si tiramos por el punto O, tres rectas iguales y paralelas á las velocidades simultáneas de tres puntos, con tal que no estén en un plano, sus extremidades determinan el plano buscado, y una perpendicular á él, desde el punto O, será paralela al eje instantáneo de rotacion y traslacion.

220. Vamos, por medio de esta teoría, á determinar el eje instantáneo de rotacion y traslacion, y á encontrar los valores de la velocidad angular y de la velocidad de traslacion.

Tomemos en el sólido tres puntos A, B, C, (fig. 105), no en línea recta; el movimiento de estos tres puntos basta, como sabemos, para determinar el movimiento del sólido. Sean u, u', u'', las velocidades de estos tres puntos en un momento dado, conocidas en magnitud y direccion. Por un punto O del espacio, tiremos tres rectas

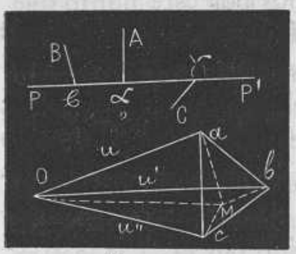


Fig. 105.

Oa, Ob, Oc, iguales y paralelas á las velocidades u, u', u'', de los puntos A, B, C. Podremos siempre escoger estos puntos de manera que sus velocidades no sean paralelas á un plano. Los tres puntos a, b, c, determinan un plano perpendicular al eje instantáneo de rotacion y traslacion; del punto O bajemos sobre este plano la perpendicular OM, y tiremos las Ma, Mb, Mc; descompongamos la velocidad u=Oa, en sus velocidades componentes OM y Ma; la u'=Ob, en OM y Mb; y la u''=Oc, en OM y Mc. De esta manera reduciremos las velocidades de los tres puntos A, B, C, á una componente comun OM y á tres componentes Ma, Mb, Mc, perpendiculares á la primera, y paralelas á un plano abc normal á OM. La recta OM será la velocidad de traslacion del sistema móvil paralelamente al eje instantáneo de rotacion y traslacion; y tendremos determinada por esta construccion, la direccion del eje y la velocidad de la traslacion.

Para encontrar la verdadera posicion del eje, cortemos el sólido por un plano perpendicular á la direccion OM, la cual lo cortará segun una figura F, que vendrá á colocarse en la posicion F', al cabo del tiempo dt, para lo cual girará alrededor de un cierto punto P del plano. Para hallar la posicion del punto P, tomemos dos puntos del plano móvil y tiremos los planos normales á sus trayectorías, estos planos normales cortarán al plano móvil en el punto buscado P; tiraremos por este punto una normal PP′ al plano móvil ó una paralela á OM, y esta será el eje instantáneo de rotacion y traslacion.

La velocidad angular será la relacion $\frac{M\alpha}{A\alpha}$ de la componente Ma á la distancia Aα. En efecto, Ma es la velocidad lineal del punto A, en la rotacion alrededor de PP, y $\frac{M\alpha}{A\alpha}$ la velocidad angular comun á todos los radios Aα, Bβ, Cγ, á causa de que, de $v=r\omega$ resulta $\omega=\frac{v}{r}$.

Esta construccion demuestra que el movimiento elemental de un sólido en el espacio, no puede reducirse más que de una sola manera á la coexistencia de una traslacion y una rotacion alrededor de un eje paralelo á la traslacion. La velocidad de la traslacion es la mínima, en sentido del eje instantáneo de rotacion y traslacion, que en cualquiera otra direccion; porque la primera está medida por la perpendicular OM al plano, y cualquiera otra estaria medida por una oblícua al mismo plano.

Movimiento contínuo de una figura plana en su plano.

221. El movimiento elemental de una figura plana en su plano, es una rotacion alrededor de un cierto punto O, centro instantáneo de rotacion; luego el movimiento contínuo es una série de rotaciones infinitamente pequeñas alrededor de centros sucesivos infinitamente próximos, cuya posicion es conocida en el plano.

Para formarnos una idea clara de este movimiento, examinaremos el siguiente caso. Supongamos que la figura móvil gira de un ángulo α alrededor de un punto O (fig. 106), de un ángulo α' alrededor del punto O', del ángulo α'' alrededor del punto O'', etc. Tomemos la figura en el instante de comenzar la rotacion alrededor del punto O; tracemos la recta OO_1', igual á OO' y que forme un ángulo α con esta recta; despues tracemos el ángulo $OO_1'M$ igual al O'; y tiremos la $O_1'O_1''$, que forme con la $O_1'M$ un ángulo igual á α', tracemos el ángulo $O_1'O_1''N$ igual al O'' y tomemos la $O_1''O_1'''$ igual á O''O''' y que forme con $O_1''N$ un ángulo α''; y así sucesivamente. Cuando la figura móvil haya girado del ángulo α alrededor del punto O, el punto O_1' coincidirá con el O'; girando la figura del ángulo α', la recta $O_1'O_1''$ vendrá á coincidir con O'O'' y el punto O_1'' cono en O''; la tercera rotacion llevará el punto O_1''' á coincidir con O''', y así sucesivamente: de modo, que durante el movimiento de la figura móvil, el polígono $OO_1'O_1''O_1'''$... rodará sobre el polígono OO'O''O'''...; ó bien, si el primer polígono rueda sobre el segundo, arrastrando consigo la figura móvil, dará á esta figura el movimiento que hemos supuesto.

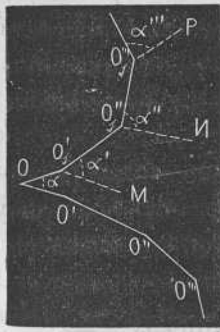


Fig. 106.

Supongamos ya que la figura plana se mueve de un modo cualquiera en el plano. En cada uno de los elementos del tiempo, la figura está animada de una rotacion infinitamente pequeña alrededor de un centro instantáneo; este centro instantáneo de rotacion ocupa, en general, diferentes posiciones en el plano de un instante al siguiente, y coincide sucesivamente con diferentes puntos de la figura móvil. Busquemos el lugar geométrico de las posiciones sucesivas del centro instantáneo sobre el plano; y el lugar geométrico de los puntos de la figura móvil con los cuales coincide sucesivamente. Es claro, que se podrá considerar el movimiento de esta figura, como debido á la rotacion del segundo lugar geométrico sobre el primero.

222. De modo, que todo movimiento contínuo de una figura plana en su plano, es un movimiento *epicicloidal*. En un instante cualquiera, la curva móvil gira alrededor del punto de contacto con la curva fija, de un ángulo que es la suma de los ángulos de contingencia de las dos curvas. De aquí podemos deducir una relacion entre la velocidad angular de la rotacion instantánea y la velocidad lineal, con la cual el punto geométrico de contacto se mueve á lo largo de las dos curvas. Sea $R=OA$ (fig. 107), el radio de curvatura de la curva fija OB; $\rho=OC$, el radio de curvatura de la curva móvil OD; ω y v las velocidades angular y líneal indicadas. En el tiempo *dt* el arco $OO'=OO_1$, recorrido sobre cada una de las curvas por el punto de contacto, es vdt; este arco corresponde en la curva fija á un ángulo de contingencia igual á $\frac{vdt}{R}$ y en la curva móvil á un ángulo de contingencia igual á $\frac{vdt}{\rho}$.

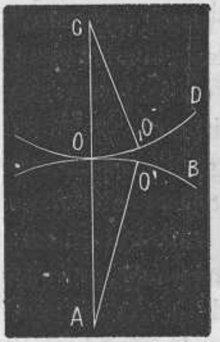


Fig. 107.

La velocidad angular ω, se obtiene dividiendo el ángulo descrito, que es la suma de estos dos, por el tiempo *dt* empleado en describirlo; luego

$$\omega=v\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{\rho}\right).$$

Si las curvaturas de las dos curvas fueran del mismo sentido, obtendríamos del mismo modo

$$\omega = v\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho}\right), \text{ ú } \omega = v\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R}\right);$$

fórmulas comprendidas en la primera, haciendo los convenios correspondientes sobre los signos de los radios de curvatura y de las velocidades.

Movimiento epicicloidal.

223. Se llama *movimiento epicicloidal* el movimiento de una curva plana que rueda sin resbalar sobre una curva fija trazada en su plano. En general, se llama *epiciclóide* la línea descrita por un punto de una figura de forma constante, unida invariablemente á una curva, que rueda sin resbalar sobre una línea fija. La ciclóide es el caso particular de la epiciclóide en que la línea fija es una recta, la curva móvil es un círculo, y el punto que la describe es un punto de la circunferencia de este círculo.

224. Propongamos construir la tangente y la normal en un punto M de la ciclóide ABC (fig. 108). El círculo DME, rueda en cada instante alrededor del punto de contacto E, que será el centro instantáneo de rotacion; luego uniendo el punto de contacto con el punto generador M, tendremos la normal EM, y DM será la tangente.

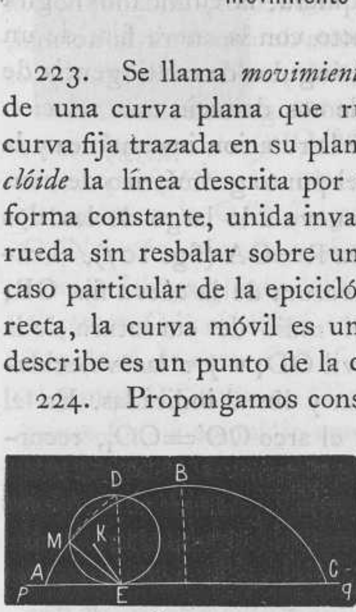


Fig. 108.

Por la misma razon, la curva descrita por un punto K unido invariablemente al círculo móvil, tiene por normal la recta EK.

Por el mismo razonamiento veríamos que cuando una curva móvil MN (fig. 109), rueda sin resbalar sobre una curva fija PQ, la normal á la curva que describe un punto K invariablemente unido á la curva móvil, es la recta RK que une, en un cierto instante, el punto K con el punto R de contacto de las dos curvas en el mismo instante. La tangente en el punto K sería la perpendicular en el punto K á la RK.

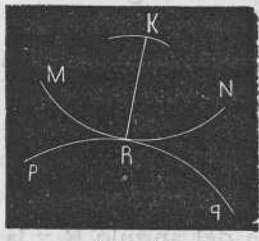


Fig. 109.

225. Podemos, fundándonos en esta manera de construir la normal, resolver el *problema inverso de los epiciclóides*; cuyo enunciado es el siguiente:

Dadas en un plano dos líneas MN, PQ, *determinar una tercera línea tal, que si se la hace rodar sobre* MN, *un punto invariablemente unido á esta línea, enjendre la otra línea* PQ.

Sea HK (fig. 110), la línea buscada en una de sus posiciones particulares, la cual toca en C á la línea MN; del punto C tracemos la normal CD á la línea PQ. El punto D, supuesto invariablemente unido á HK, describirá en el movimiento de rodadura elemental de la curva HK, un camino normal á CD; y por consiguiente, se moverá segun la curva PQ; luego el punto D es el punto generador de esta línea.

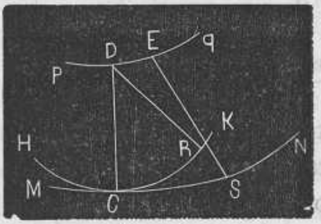


Fig. 110.

Consideremos següidamente un segundo punto R sobre la curva HK, y tomemos sobre la línea MN un arco CS=CR; el punto R vendrá á coincidir, al rodar, con el punto S, y trazando la normal SE á la curva PQ, se tendrá en E la posicion correspondiente del punto generador sobre su trayectoría PQ; pero este punto es una posicion del punto D, arrastrado por la curva móvil HK, luego la recta SE es la posicion que toma la recta RD en virtud del movimiento; por consiguiente las longitudes RD y SE son iguales, y el ángulo R formado por la recta DR y la curva HK, es igual al ángulo S formado por la recta SE y la curva NM.

Se conoce por el trazado de las dos curvas MN, PQ, la relacion que existe entre el ángulo S y la longitud l=ES, comprendida entre las dos curvas, sobre la normal á la curva PQ. Sea $tg.\,S=f(l)$,
la relacion que liga á estas dos variables. Esta relacion existirá igualmente entre la tangente del ángulo R y la longitud DR=r. Tomemos por consiguiente el punto D por polo y la recta DC por eje polar, la tangente del ángulo R se determinará por la ecuacion siguiente

$$tg.\,R=\frac{rd\theta}{dr},$$

y la ecuacion polar de la curva buscada será

$$\frac{rd\theta}{dr}=f(r),$$

ó separando las variables

$$d\theta=\frac{f(r)dr}{r}.$$

Integrando esta ecuacion obtendremos la ecuacion finita de la curva. Conviene notar, que la igualdad que existe punto por punto entre los ángulos R y S y entre las longitudes ES y DR conduce tambien á la igualdad de los arcos CS y CR.

226. Como ejemplo del problema inverso de las epicicloides, se dan dos rectas MN y PQ (fig. 111); y se pide qué curva hay que hacer rodar sobre la recta MN, para que un punto invariablemente unido á esta curva describa la recta PQ.

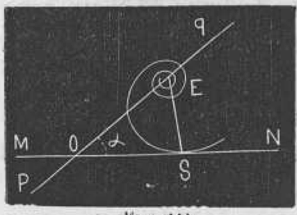


Fig. 111.

Tracemos la normal ES á la PQ; el triángulo SEO es rectángulo en todas las posiciones de la curva buscada, luego el ángulo S es constante é igual á $90^0-\alpha$, siendo α el ángulo de las rectas. La ecuacion diferencial de la curva buscada es

$$\frac{rd\theta}{dr}=tg(90^0-\alpha)=\cot\alpha;$$

que integrando, y llamando A á la constante arbitraria, dará

$$r=Ae^{\theta tg\alpha},$$

ecuacion de una espiral logarítmica, que corta á todos sus radios vectores bajo el ángulo $90^o-\alpha$, y que tiene el polo por punto asintótico. Cuando se hace rodar esta curva sobre una recta, el polo describe otra recta que forma un ángulo α con ella. De aquí se deduce esta otra propiedad de la espiral logorítmica, que la longitud del arco de la curva, contado desde uno de sus puntos S, hasta el polo alrededor del cual da una infinidad de vueltas, es finita é igual á SO.

Sistemas articulados de cuerpos rígidos.

227. Consideremos un sistema de cuerpos rígidos unidos por articulaciones. El polígono que tiene por vértices los puntos de articulacion, es variable de forma; pero cada uno de sus lados, considerado aisladamente, es una figura invariable, y por lo que acabamos de exponer se pueden determinar las relaciones geométricas que existen entre las velocidades de los diversos puntos del sistema, cuando su movimiento está suficientemente determinado.

Examinemos por ejemplo el caso de dos rectas de longitud constante que giran respectivamente alrededor de los centros C y C′ (fig. 112). Para trasmitir el movimiento de una de estas rectas á la otra, es decir, para hacer de manera que el movimiento de una de ellas determine el de la otra, se articulan los extremos M,

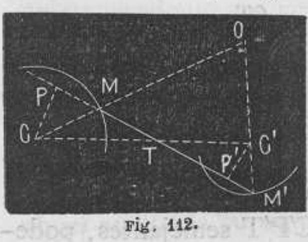


Fig. 112.

M' de los radios de las manivelas á una ligadura invariable; se pide la relacion de las velocidades de los puntos M y M'.

En este caso, el centro instantáneo de rotacion de la ligadura MM', está en el punto O, interseccion de los dos radios prolongados; luego

$$\frac{v}{v'}=\frac{OM}{OM'},$$

y reemplazando los radios OM, OM' por los senos de sus ángulos opuestos en el triángulo OMM', tendremos: 1.° que las velocidades de los extremos de la ligadura están en razon inversa de los senos de los ángulos de esta ligadura con los radios.

Esta propiedad subsiste cuando las trayectorías de los puntos M y M' son curvas cualquiera; siendo CM y C'M' las normales de estas curvas, y permaneciendo la longitud MM' invariable; luego en general: 2.° las velocidades de los extremos de la ligadura están en razon inversa de los cosenos de los ángulos, que la ligadura forma con las trayectorías de sus extremidades.

Para encontrar la relacion de las velocidades angulares de las dos manivelas, pondremos en la igualdad anterior por v y v' sus valores $\omega\times CM$ y $\omega'\times C'M'$ y tendremos

$$\frac{\omega\times CM}{\omega'\times C'M'}=\frac{MO}{M'O},$$

y despejando $\frac{\omega}{\omega'}$ será

$$\frac{\omega}{\omega'}=\frac{C'M'\times MO}{CM\times M'O}=\frac{CT}{C'T},$$

aplicando el teorema de Ptolomeo al triángulo OCC'; 3.° luego las velocidades angulares de los dos radios vectores están en razon inversa de los secmentos determinados por la ligadura sobre la línea de los centros.

Siendo los triángulos CPT, C'P'T semejantes, podemos establecer 4°; las velocidades angulares están en razon inversa de las perpendiculares de los dos centros sobre la ligadura.

228. Propiedades geométricas idénticas se encuentran en la trasmision del movimiento por correas, muy usado en la industria. En vez de ligar por una barra rígida los cuerpos sujetos á girar alrededor de los centros C y C′, pueden unirse por una cuerda ó una correa que se arrolla sobre dos superficies convexas fijas á cada uno de los cuerpos (fig. 113). Con este sistema, un cuerpo no puede arrastrar al otro más que en un sentido, porque la correa no funciona más que estando tirante; supuesta esta restriccion, busquemos la relacion de las velocidades angulares de los cuerpos que giran.

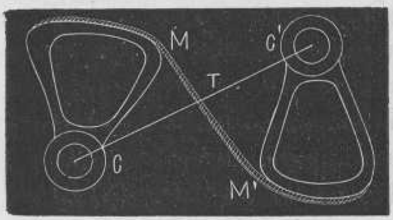


Fig. 113.

La recta MM′ rueda alrededor de su punto de contacto M, con respecto al cuerpo C, absolutamente lo mismo que si hubiera una articulacion en M; otro tanto sucede en el punto M′; y como la correa está tirante, entramos en el caso anterior, y las velocidades angulares de los dos árboles, están en razon inversa de los segmentos determinados en la línea de los centros por la prolongacion de la parte rectilínea de la correa.

Propiedades de las epiciclóides.— Línea recta y elipse consideradas como hipociclóides.

229. El movimiento epicicloidal más interesante, es aquel en que la curva móvil y la curva fija son dos circunferencias de círculo, porque las curvas así engendradas

tienen muchas aplicaciones industriales, y ademas, porque en todas las cuestiones que se refieren al segundo órden infinitesimal, se puede, en un movimiento epicicloidal cualquiera, reemplazar las dos curvas que se mueven una sobre otra, por sus respectivos círculos osculadores.

Las epiciclóides pueden ser *exteriores* ó *interiores*, ó *hipociclóides*, segun que el punto generador es exterior ó interior al círculo móvil, las primeras son prolongadas y las segundas achatadas; particularmente se llaman epiciclóides las que están descritas por un punto de la circunferencia móvil.

La hipociclóide más curiosa es la que describe un punto de una circunferencia que rueda en el interior de otra circunferencia de radio doble.

Para verlo, consideremos el movimiento de una recta AB (fig. 114), de longitud constante, cuyos extremos A y B se deslizan respectivamente sobre dos rectas fijas rectangulares OX, OY. Busquemos la manera de realizar este movimiento, haciendo rodar sobre una curva fija una curva unida invariablemente á la recta AB.

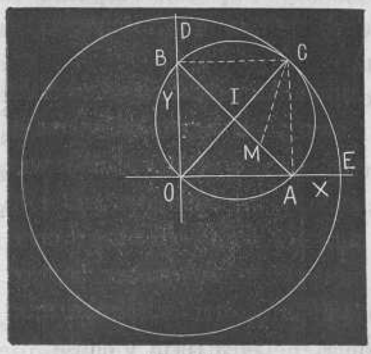


Fig. 114.

En un instante cualquiera, el centro instantáneo de rotacion es el punto C, interseccion de las perpendiculares AC y BC á los ejes OX y OY; el punto C es el cuarto vértice del rectángulo AOBC; las diagonales OC y BA son iguales, y como la segunda es constante, OC lo es tambien, y el lugar de los centros instantáneos de rotacion sobre el plano, es por consiguiente, una circunferencia DCE, cuyo centro es O y cuyo radio es OC, igual á la recta dada AB; con lo cual tenemos ya la curva fija.

La curva móvil es el lugar geométrico del punto C, vértice del ángulo recto BCA; será pues el arco capaz de este ángulo trazado sobre la AB, que es la circunferencia trazada sobre AB como diámetro. El movimiento de la recta AB se obtiene haciendo rodar la circunferencia AOBC sobre la circunferencia fija DCE.

Hubiéramos llegado á la misma conclusion si los ejes OX y OY no fueran perpendiculares.

Todo punto de la circunferencia AOBC describe un diámetro de la circunferencia fija; el punto I, centro de esta circunferencia describe un círculo cuyo centro es O y cuyo diámetro es AB; y todo punto M de la recta móvil describe una elipse, que tiene por normal á MC, y cuyo centro de curvatura puede obtenerse por medio de la construccion de Savary, como pronto veremos.

Movimiento contínuo de un sólido que tiene un punto fijo. Teorema de Poinsot.

230. Apliquemos lo que acabamos de decir sobre el movimiento contínuo de una figura plana en su plano al movimiento contínuo de un sólido que tiene un punto fijo. Las posiciones del eje instantáneo en el espacio, como que pasa siempre por el punto fijo, forman un cono cuyo vértice es este punto. Las posiciones que el eje instantáneo ocupa sucesivamente en el interior del cuerpo, forman un segundo cono que tiene el mismo vértice que el primero. El movimiento contínuo del sólido puede considerarse como debido á la *rodadura* del segundo cono sobre el primero.

231. Este resultado constituye el teorema de Poinsot, cuyo enunciado es el siguiente: *De cualquier manera*

que un cuerpo se mueva girando alrededor de un punto fijo, este movimiento se reduce al movimiento de un cono móvil, cuyo vértice está en este punto, y que rueda sin resbalar sobre la superficie de otro cono fijo del mismo vértice.

El cono móvil está unido al cuerpo y se mueve con él; y el cono fijo en el espacio hará tomar al cuerpo el movimiento de que le suponemos animado; la generatriz de contacto de los dos conos, es en cada instante el eje alrededor del cual gira el sólido, es decir, el eje instantáneo; y se ve como este eje, móvil á la vez dentro del cuerpo y en el espacio absoluto, describe en el espacio el cono fijo, y en el interior del cuerpo el cono móvil.

Tal es, dice Poinsot, el último grado de claridad á que puede llevarse la idea compleja y oscura del movimiento de un cuerpo, que gira de una manera cualquiera alrededor de un centro fijo.

Consideremos un sólido invariable móvil alrededor de un punto fijo O (fig. 115); cortemos este sólido por una superficie esférica EE′, obtendremos una figura esférica F que se mueve sobre su esfera E, arrastrada por el movimiento del sólido.

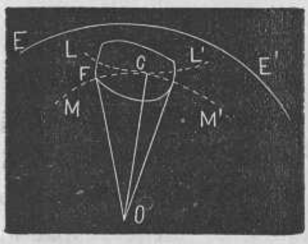


Fig. 115

El movimiento contínuo de una figura esférica sobre la esfera, puede obtenerse haciendo rodar una línea unida á la figura móvil sobre una línea fija trazada sobre la esfera; la figura móvil es el lugar geométrico de los puntos en que el centro instantáneo de rotacion encuentra á la figura esférica, y la figura fija es el lugar geométrico de los centros instantáneos de rotacion sobre la esfera. En pocas palabras, el movimiento contínuo de una figura móvil sobre la esfera es un *movimiento epiciclóidal esférico.*

Esto supuesto, sabemos que el movimiento contínuo de la figura F sobre la esfera E, puede obtenerse haciendo rodar la línea LL′, que forma parte de la figura F, sobre la línea MM′ trazada sobre la esfera E. Tomemos las líneas LL′ y MM′ como las directrices de las superficies cónicas indicadas, y cuyo vértice comun es el punto O; la rodadura de LL′ sobre MM′ equivale á la rodadura de la superficie cónica OLL′, sobre la superficie cónica fija OMM′; de suerte, que el movimiento contínuo de un sólido invariable, que tiene un punto fijo O, puede obtenerse haciendo rodar una superficie cónica perteneciente al sólido y teniendo por vértice el punto O, sobre una segunda superficie cónica del mismo vértice, que permanece fija en el espacio. El eje instantáneo de rotacion del sólido, en un instante dado, es la generatriz de contacto OC del cono móvil con el cono fijo.

Los resultados que hemos obtenido para el movimiento de un sólido paralelamente á un plano, son casos particulares del movimiento de un sólido que tiene un punto fijo. La esfera se convierte en un plano cuando su radio se hace infinito, alejándose el punto O; los conos OLL′ y OMM′ se convierten en cilindros, y las líneas LL′ y MM′ son las secciones rectas de estos cilindros. Por consiguiente, el movimiento contínuo de un sólido invariable que se mueve paralelamente á un plano, es el resultado de la rodadura de una superficie cilíndrica unida al cuerpo, sobre una superficie cilíndrica fija en el espacio, y las generatrices de estas dos superficies son perpendiculares al plano paralelamente al cual se mueve el sólido.

Movimiento de un sólido en el caso general.

232. El eje instantáneo de rotacion y traslacion, relativo á cada elemento del tiempo, ocupa diferentes po-

siciones en el espacio, cuyo lugar geométrico es una superficie reglada: las posiciones que el mismo eje ocupa sucesivamente en el interior del sólido, forman otra superficie reglada. El movimiento contínuo del sólido puede considerarse como debido á la rodadura de la segunda de estas superficies sobre la primera, acompañada de un deslizamiento á lo largo de la generatriz, segun la cual, se tocan las dos superficies. En virtud de este movimiento, la superficie móvil vendrá á aplicar sucesivamente sus generatrices rectilíneas, sobre las generatrices rectilíneas de la superficie fija, rodando y deslizándose á lo largo de cada una de ellas.

Tambien observando, que todo movimiento elemental de un sólido, puede considerarse como debido á la coexistencia de una traslacion, igual y paralela al movimiento elemental de uno de los puntos del sólido, y de una rotacion alrededor de un eje que pasa por este punto, si tomamos siempre el mismo punto del sólido para aplicar esta consideracion, en los diversos elementos del tiempo, las posiciones en el espacio del eje relativo á este punto forman un cono, cuyo vértice es dicho punto; y las posiciones del mismo eje en el interior del cuerpo forman un cono del mismo vértice; luego el movimiento contínuo de un sólido puede representarse por la rodadura de un cono ligado al sólido, sobre un cono que está animado al mismo tiempo de un movimiento de traslacion en el espacio.

LECCION XIX.

Movimiento absoluto y relativo de un punto material.—Movimientos simultáneos de un punto. Movimientos componentes y resultante. —Composicion de las velocidades; paralelógramo, polígono y paralelepípedo de las velocidades.— Descomposicion de una velocidad en dos ó más.—Movimiento de un punto referido á coordenadas rectilíneas.—Movimiento de un punto referido á coordenadas polares.

Movimiento absoluto y relativo de un punto material.

233. Para formarnos idea del movimiento de un punto en el espacio, le referimos á otros de posicion conocida, que se llaman puntos de comparacion ó de referencia; el movimiento del punto móvil queda completamente determinado, por el conocimiento de los cambios que esperimentan en cada instante sus distancias á los puntos de comparacion. Si los puntos de comparacion son ó se suponen fijos, el movimiento observado es el que realmente experimenta el móvil en el espacio, y se llama movimiento *absoluto*. Si los puntos de comparacion se mueven, el movimiento que obtendremos no será el movimiento real, sino el movimiento con relacion á los puntos de comparacion, este movimiento se llama movimiento *relativo*.

Movimientos simultáneos de un punto. Movimientos componentes y resultante.

234. Para ver la idea que debemos formarnos de lo que se entiende por movimientos simultáneos de un punto, consideremos los dos ejemplos siguientes: 1.º Supon-

gamos un tren que se mueve sobre una vía férrea, con movimiento uniforme y rectilíneo y un punto material que se mueve en uno de los coches del tren, tambien con movimiento uniforme y rectilíneo. Un viajero colocado en el mismo coche y participando de su movimiento, verá al punto móvil cambiar de lugar con respecto al coche y á sí mismo de cierta manera; este movimiento aparente es el que llamamos relativo, diferente del real, que es el que veria un observador, que no participara del movimiento del coche, y que estuviera á la orilla de la vía contemplando el movimiento del punto.

Conociendo el movimiento aparente del punto en el coche y el movimiento de éste, puede deducirse fácilmente el movimiento real ó absoluto del punto en el espacio.

Supongamos en efecto, que el coche esté animado de un movimiento de traslacion rectilíneo y uniforme segun la direccion AB (fig. 116), con una velocidad AH y que el punto móvil A tenga sobre el coche un movimiento aparente rectilíneo y uniforme segun la direccion AC, con una velocidad AK. Al cabo de un segundo la recta AC ha sido llevada por el movimiento del coche paralelamente á sí misma á la posicion HD, pero en el mismo tiempo el punto móvil ha recorrido la porcion AK de esta línea; luégo al fin del primer segundo el punto móvil se encuentra en L. Al cabo del tiempo t el coche habrá recorrido el camino $AP = AH \times t$; la recta AC tomará la posicion PE, pero en el mismo tiempo el móvil ha recorrido sobre la línea AC un camino $AQ = AK \times t$; luego el móvil se encontrará en M al cabo del tiempo t. Los puntos A, L, M, están en línea recta, luego el

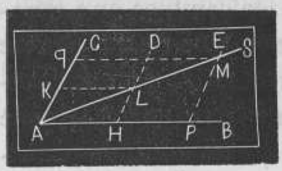


Fig. 116

movimiento absoluto es un movimiento rectilíneo dirigido segun la recta AS. La semejanza de los triángulos AHL y APM, nos da

$$AM = AL \times t;$$

lo que nos dice que el movimiento absoluto del móvil es uniforme, y la velocidad está representada por AL; es decir, por la diagonal del paralelógramo construido sobre las velocidades AH y AK.

235. Supongamos en general, que un punto referido á un sistema de ejes móviles X, Y, Z (fig. 117), describe con respecto á estos ejes la curva AB; y que, por consecuencia del movimiento de los ejes, esta línea toma sucesivamente en el espacio las posiciones A'B', A''B'', A'''B'''... El punto móvil tendrá en el espacio un movimiento absoluto, que determinaremos fácilmente, conociendo el movimiento de los ejes, y el del punto sobre la curva AB. Sean t, t', t'', los tiempos al fin de los que esta curva toma las posiciones AB, A'B', A''B'', y M, N, P, las posiciones del punto móvil al fin de los mismos tiempos sobre la curva AB. Al fin del tiempo t el móvil está en M. Al fin del tiempo t' el móvil está en N, pero entónces la curva ha tomado la posicion A'B' y por ello el punto N se ha trasladado al punto N'; luego al fin del tiempo t' el móvil está en N'; se ve del mismo modo que al fin del tiempo t'', el móvil está en P', y así sucesivamente. La trayectoria del punto móvil en el espacio, es MN'P'Q'... y ocupa en ella las posiciones M, N', P', Q'... al fin de los tiempos t, t', t'', t'''...

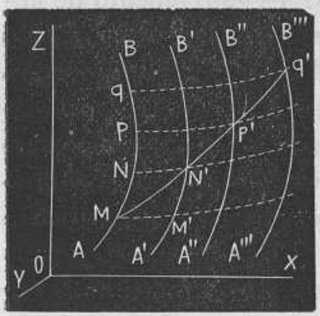


Fig. 117.

236. En los dos casos examinados se considera el

punto móvil con respecto al coche ó á los ejes móviles, y el movimiento del coche ó de los ejes, como dos movimientos de que el móvil está animado simultáneamente. El movimiento del punto con relacion á los puntos de comparacion móviles se llama, como hemos dicho, movimiento relativo; el movimiento de los puntos de comparacion (coche ó ejes), se llama movimiento *de arrastre.*

La operacion que tiene por objeto encontrar el movimiento absoluto de un punto, dados su movimiento relativo y su movimiento de arrastre, constituye lo que se llama *composicion de movimientos.* El movimiento de arrastre y el movimiento relativo son los movimientos componentes, y el movimiento absoluto es el movimiento resultante.

Un punto que ocupa sucesivamente diferentes posiciones en el espacio, no puede evidentemente estar animado más que de un sólo movimiento; y cuando nosotros le consideramos animado á la vez de dos movimientos, no hacemos más que una operacion ideal, que tiene por objeto simplificar la cuestion, y que no tiene nada de real; lo mismo que cuando llevamos un sólido de una posicion á otra, por una traslacion y una rotacion.

Puede suceder que un punto se considere animado de tres ó más movimientos á la vez. Un punto se mueve sobre un tren, el tren se mueve sobre la tierra, la Tierra gira alrededor de su eje, y es trasportada á la vez en su órbita alrededor del Sol, y éste con todo el sistema planetario se dirige hácia la constelacion de Hércules; todos estos movimientos pueden considerarse como movimientos simultáneos del punto de que nos ocupamos; y puede obtenerse el movimiento absoluto, conociendo todos estos movimientos simultáneos. Componiendo el movimiento relativo del punto en el coche del tren, con el de el tren, tendremos el movimiento con relacion á la Tierra; componiendo este con el de rotacion de la Tierra, tendremos el movimiento de éste con relacion á ejes de direccion constante que pasa por el centro de la Tierra; y así sucesivamente, se llega á obtener el movimiento absoluto del móvil en el espacio.

Composicion de las velocidades; paralelógramo, polígono y paralelepípedo de las velocidades.

237. Cuando un punto se considera animado á la vez de varios movimientos, acabamos de ver que su movimiento real se obtiene por la composicion de estos movimientos simultáneos; y vamos á ver ahora, que la velocidad del punto, en cada instante, puede deducirse fácilmente de las velocidades que posee, en el mismo instante, en cada uno de los movimientos componentes.

En el ejemplo del punto que se mueve con un movimiento uniforme y rectilíneo, en un coche arrastrado por una locomotora en una vía férrea, tambien con un movimiento uniforme y rectilíneo, hemos visto que la velocidad del movimiento absoluto está representada por la diagonal del paralelógramo construido sobre las velocidades de los movimientos componentes.

Tambien en el caso general del núm. 235, la velocidad del móvil en el movimiento absoluto, se deduce de la misma manera de las velocidades de los dos movimientos componentes. Si suponemos que el intervalo de tiempo $t'-t$, empleado por el móvil en ir de M á N' (fig. 177), sea infinitamente pequeño, la figura MM'NN', es un paralelógramo, porque los lados MN y M'N', siendo dos posiciones infinitamente próximas de un mismo elemento de la trayectoría relativa AB, que forman entre sí un ángulo infinitamente pequeño, deben considerarse como iguales y paralelos. El camino MN' recorrido por el móvil en el movimiento absoluto, durante un intervalo de tiempo infinitamente pequeño, es la diagonal del paralelógramo construido sobre los caminos recorridos en el mismo tiempo por el móvil en el movimiento relativo, y el que recorre por el movimiento de arrastre de los ejes móviles. Los caminos infinitamente pequeños MN', MN y MM', son proporcionales á las velocidades absoluta, relativa y de arrastre; pues que se obtendrian estas velocidades dividiendo los arcos MN', MN, MM' por el tiempo infinitamente pequeño $t'-t=dt$: luego si construimos un paralelógramo MLTS (fig. 118), sobre las velocidades relativa y de arrastre, la diagonal MT representará en magnitud y direccion la velocidad en el movimiento absoluto del punto. Esta proposicion se llama regla del *paralelógramo de las velocidades*; y es análoga á la regla del paralelógramo de las fuerzas.

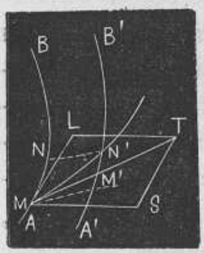


Fig. 118.

La construccion que acabamos de exponer para hallar la velocidad en el movimiento absoluto, es la misma, aunque la velocidad relativa se convierta en la velocidad de arrastre y al contrario. Por ello, pues, se llama á la primera simplemente velocidad resultante, y á las otras dos velocidades componentes.

238. Cuando se considera el punto móvil animado de tres ó más movimientos, se obtiene la velocidad absoluta construyendo el *polígono da las velocidades*, del mismo modo que el de las fuerzas; y la recta que cierra el polígono es la resultante. De esta regla se deduce, que la velocidad resultante, de várias que tiene la misma direccion, es igual á la suma de las que van dirigidas en un sentido, ménos la suma de las dirigidas en el opuesto, y estará dirigida en el sentido de la mayor de estas sumas.

239. En el caso de ser tres las velocidades, y no estar situadas en un mismo plano, la velocidad resultante es la diagonal del paralelepípedo construido sobre ellas. Por lo cual, esta regla suele llamarse, regla *del paralelepípedo de las velocidades*.

Descomposicion de una velocidad en dos ó más.

240. Descomponer una velocidad en dos, equivale á hallar los lados del paralelógramo de que la velocidad dada es la diagonal; desde luego se ve, que sin más datos, el problema es indeterminado. Mas si se conocen las direcciones de las velocidades componentes, el problema es determinado, y tirando por el extremo de la velocidad que se quiere descomponer, paralelas á las direcciones conocidas, resulta un paralelógramo, cuyos lados adyacentes son las componentes pedidas.

Si se quiere descomponer una velocidad en tres, cuyas direcciones no están en un plano, se construye un paralelepípedo que tenga por diagonal la dada, y las componentes son las tres aristas del paralelepípedo, que concurren en el extremo de la velocidad que se quiere descomponer. Descomponiendo una ó várias de las componentes, podriamos descomponer una velocidad en tantas como se quiera.

Movimiento de un punto referido á un sistema de coordenadas rectilíneas.

241. Las posiciones de un punto que se mueve en un plano, son completamente conocidas, cuando se conocen sus coordenadas rectilíneas en cada una de estas posiciones. El conocimiento de las variaciones de estas coordenadas con el tiempo, lleva consigo el conocimien-

to de todas las circunstancias del movimiento del punto.

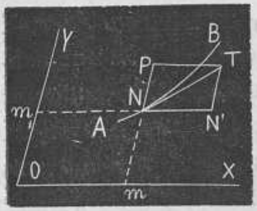


Fig. 119.

Sean los ejes coordenados OX y OY (fig. 119), N el punto móvil, AB su trayectoría, las coordenadas $x = Om$, $y = Om_1$, son funciones del tiempo de la forma

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t);$$

las proyecciones del punto N sobre los ejes, son m y m_1; de modo, que estas ecuaciones son las del movimiento de las proyecciones del punto móvil sobre los ejes; tambien se las llama ecuaciones del movimiento del punto N.

Eliminando t en estas ecuaciones, tendremos una ecuacion en x é y, que será la ecuacion de la trayectoría AB.

Llamando u y u_1 á las velocidades de las proyecciones m y m_1, del punto N, tendremos

$$u = \frac{dx}{dt} = f'(t), \quad u_1 = \frac{dy}{dt} = \varphi'(t).$$

Conociendo estas velocidades podemos determinar la velocidad v del punto; bastará para ello tirar por el punto N dos rectas NN', NP, iguales y paralelas á u y u_1; la diagonal NT del paralelógramo construido sobre ellas, es la velocidad v del punto N, ó lo que es lo mismo, la velocidad resultante de sus proyecciones u, u_1 sobre los ejes coordenados.

Tambien puede considerarse, que el punto m se mueve sobre el eje OX con las condiciones que encierra la ecuacion de su movimiento $x = f(t)$; y que la recta OX se mueve en el plano segun las leyes que expresa la ecuacion $y = \varphi(t)$; en virtud de la existencia simultánea de estos dos movimientos, el punto N se moverá en el plano XOY describiendo la trayectoría AB. Este movimiento absoluto del punto N puede considerarse como resultante de la composicion de los movimientos de sus proyecciones sobre los ejes; y por ello, la velocidad v debe ser la resultante de las velocidades u, u_1, de sus proyecciones.

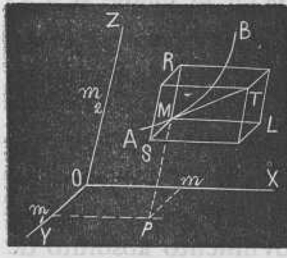


Fig. 120.

242. Estas consideraciones son aplicables al caso en que el punto esté referido á tres ejes OX, OY, OZ, (fig. 120). Sean x, y, z, las tres coordenadas Om, mP, PM, ó sus iguales Om. $Om_1 Om_2$; estas coordenadas son funciones del tiempo de la forma

$$x=f(t), \qquad y=\varphi(t), \qquad z=\psi(t);$$

los puntos m, m_1, m_2 son las proyecciones del punto M sobre los ejes, y estas ecuaciones son las ecuaciones de los movimientos de estas proyecciones sobre ellos; tambien se llaman ecuaciones del movimiento del punto M. Eliminando la variable t entre estas tres ecuaciones, vendremos á parar á dos ecuaciones entre x, y, z que serán las ecuaciones de la trayectoría AB del punto M en el espacio.

Las velocidades u, u_1, u_2 de las proyecciones m, m_1, m_2 del punto M estarán dadas por las ecuaciones

$$u=\frac{dx}{dt}=f'(t), \quad u_1=\frac{dy}{dt}=\varphi'(t), \quad u_2=\frac{dz}{dt}=\psi'(t).$$

Estas velocidades son las proyecciones de la velocidad v sobre los ejes, de modo, que si por el punto M tiramos rectas iguales y paralelas á ellas, y construimos sobre las tres un paralelepípedo, la diagonal MT de este paralelepípedo, será la velocidad v del punto M en el espacio; de modo, que v es la resultante de u, u_1, u_2, ó sea de las velocidades de sus proyecciones sobre los ejes.

Se llega á las mismas consecuencias suponiendo que el móvil recorre la recta OX, obedeciendo en su movimiento á la ecuacion $x=f(t)$; al mismo tiempo la OX se mueve paralelamente á sí misma en el plano XOY, segun las condiciones que expresa la ecuacion $y=\varphi(t)$; y que á la vez el plano XOY se mueve con un movimiento de traslacion paralelo al eje Z y segun la ecuacion $z=\psi(t)$. La coexistencia de estos tres movimientos equivale al movimiento del punto M. De modo, que los movimientos de las proyecciones, del punto M, son los movimientos componentes y el movimiento absoluto de este punto es el movimiento resultante, y las velocidades u, u_1, u_2 son las velocidades componentes de la velocidad v de el punto M.

Movimiento de un punto referido á coordenadas polares.

243. La posicion de un punto en un plano se determina tambien por sus coordenadas polares. Sean OX (fig. 121) el eje polar, O el polo, OM$=r$ el radio vector y θ el ángulo polar. Las coordenadas polares r, θ son funciones del tiempo, de la forma

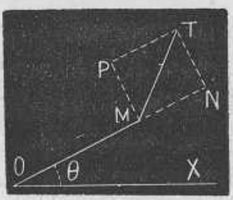


Fig. 121.

$$r=f(t), \qquad \theta=F(t);$$

estas ecuaciones son los ecuaciones polares del movimiento del punto M, y el conocimiento de las funciones anteriores basta para conocer completamente el movimiento del punto M.

Podemos considerar que el punto M se mueve á lo largo del radio vector y que al mismo tiempo este radio gira alrededor del polo. La composicion de estos dos movimientos simultáneos dará el movimiento real del punto M. El movimiento en sentido del radio vector es un movimiento relativo y el de rotacion alrededor del polo es un movimiento de arrastre. Las velocidades en estos dos movimientos son respectivamente

$$\frac{dr}{dt}, \quad r\frac{d\theta}{dt};$$

construyendo sobre ellas un paralelógramo MNPT, la diagonal MT será la velocidad absoluta del punto M.

244. Si el movimiento se verifica de un modo cualquiera en el espacio, las coordenadas polares r, θ, φ son funciones del tiempo, de la forma

$$r=f(t), \quad \theta=\mathrm{F}(t), \quad \varphi=\mathrm{P}(t).$$

Podemos considerar el movimiento del punto M en el espacio como resultante de tres movimientos simultáneos: un movimiento de resbalamiento á lo largo del radio vector OM (fig. 122); un movimiento de rotacion del radio vector OM alrededor del polo en el plano MOX; y un movimiento de este plano alrededor de OX. Las velocidades en cada uno de estos movimientos son respectivamente

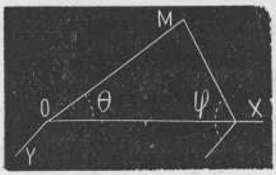


Fig. 122.

$$\frac{dr}{dt}, \quad r\frac{d\theta}{dt}, \quad r\operatorname{sen}\theta\frac{d\varphi}{dt}.$$

Llevando estas velocidades, á partir del punto M, paralelamente á sus direcciones, y construyendo un paralelepípedo, su diagonal será la velocidad absoluta del punto M.

LECCION XX.

Método de Roberval para trazar tangentes á las curvas planas.—Tangentes á la elipse y á la hipérbola referidas á sus focos. — Tangente á una seccion cónica. — Tangente á la concoide. — Extension dada al método de Roberval por Mannheim. — Centros de curvatura de la elipse y de la epicicloide; construccion de Savary.—Radio de curvatura de una curva epicicloidal plana. — Centro instantáneo de segundo órden.

Método de Roberval para trazar tangentes á las curvas.

245. Este método está fundado, en que la velocidad de un punto móvil está dirigida, en cada instante, segun la tangente á la curva que describe, y por lo tanto, el conocimiento de la velocidad lleva consigo el de la tangente. Supongamos que el movimiento del móvil esté descompuesto en varios movimientos componentes, si podemos determinar las velocidades simultáneas de estos movimientos componentes, componiendo estas velocidades, deduciremos la direccion de la velocidad absoluta del móvil, que es la direccion de la tangente.

246. El problema de las tangentes á las curvas, es uno de los más importantes de la geometría y la investigacion de sus soluciones, condujo á Newton al descubrimiento del cálculo diferencial. El método de Roberval, cuyo fundamento acabamos de indicar, conduce en muchos casos á la solucion del problema.

Por cálculo diferencial la direccion de la tangente á una curva $f(x,y)=0$, en un punto (x,y), está determinada por la relacion $\frac{dy}{dx}$, deducida de la ecuacion de la curva; esto equivale á decir, que la velocidad del punto móvil, descompuesta paralelamente á los ejes, tiene por componentes, velocidades proporcionales á dx y dy; pero de la ecuacion de la curva, se deduce

$$\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy=0,$$

de donde resulta

$$\frac{dx}{\frac{df}{dy}}=-\frac{dy}{\frac{df}{dx}};$$

luego obtendremos la tangente buscada, componiendo dos rectas, una $\frac{df}{dy}$, trazada paralelamente al eje de las x, y otra, $-\frac{df}{dx}$, trazada paralelamente al eje de las y.

Algunas veces se determina fácilmente una de las dos velocidades componentes en magnitud y direccion, y la segunda sólo en direccion, lo cual no es suficiente para construir el paralelógramo cuya diagonal es la tangente buscada. En este caso, se puede resolver el problema descomponiendo el movimiento del punto de otra manera, para que las dos velocidades componentes sean conocidas en direccion, y una de ellas en magnitud; y de las dos construcciones, se deduce la direccion de la tangente.

Apliquemos este método á algunas curvas.

Tangentes á la elipse y á la hipérbola, referidas á sus focos.

247. La elipse es el lugar geométrico de las posiciones del punto M (fig. 123), que se mueve de modo, que la suma de las distancias FM+F'M es constante. Considerado el punto M, como correspondiente al radio vector FM, estará animado de un movimiento á lo largo de este radio y de una rotacion alrededor del punto F; su

Fig. 123.

velocidad se compondrá de las dos velocidades correspondientes. Lo mismo sucederá considerando al punto M como formando parte de F'M. Siendo FM+F'M= constante, las velocidades del punto M en sentido de los radios vectores, son iguales, y dirigidas una en sentido de la prolongacion y otra en sentido del mismo radio vector. Sea MN la velocidad en el movimiento á lo largo de FM, la velocidad de la rotacion seguirá la perpendicular NS al radio vector; la velocidad sobre F'M, será MN', y la de rotacion estará en la perpendicular N'S' á la MN' en el punto N'; si conocieramos el extremo de una de estas velocidades, uniéndolo con M tendriamos la tangente; pero como esta ha de pasar por un punto de cada una de las perpendiculares, pasará por el punto de encuentro T; y uniéndole con el M, tenemos la tangente MT. Se ve fácilmente que esta tangente es la bisectriz del ángulo formado por un radio vector, y la prolongacion del otro, lo cual ya sabemos por la Geometría.

Del mismo modo se reconoce que la tangente MT á la hipérbola (fig. 124), es la bisectriz del ángulo FMF', formado por los radios vectores del punto M.

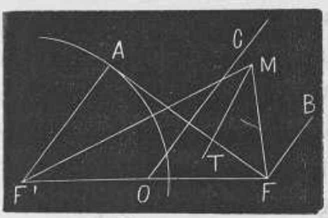


Fig. 124.

La ecuacion de la hipérbola es $r'-r=2a$; y las asíntotas se obtendrán describiendo del foco F' como centro, con un radio $2a$, una circunferencia, á la cual se trazará una tangente FA desde el otro foco. Las rectas paralelas F'A y FB, concurren en un punto infinitamente lejano de la hipérbola, la tangente OC en este punto, es una asíntota de la hipérbola, la cual se obtendrá trazando por el centro O de la hipérbola una paralela á la FB.

Tangente á una seccion cónica.

248. Sea MN (fig. 125) una seccion cónica, F su foco y PB la directriz; $r=$MF y $p=$MP, las distancias del punto M de la curva al foco y á la directriz; la relacion de estas distancias es constante, y llamando K á esta relacion, la ecuacion de la curva es

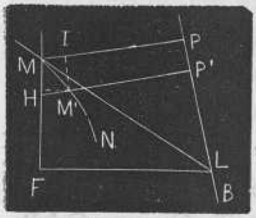


Fig. 125.

$$r=Kp.$$

Para trazar una tangente á la curva en el punto M, tomemos sobre la curva un punto M′ infinitamente próximo á M, cuyas coordenadas sean $r'=$M′F y $p'=$M′P′; proyectemos el punto M′ en I sobre MP, y en H sobre MF. Si diferenciamos la ecuacion de la curva, tendremos $dr=Kdp$; pero $dr=$MH y $dp=$MI, luego

$$MH=K\times MI.$$

Podemos hacer pasar el punto móvil de M á M′ de dos modos: 1.° Haciéndole deslizar desde M á H, y despues haciendo girar el radio FH alrededor de F hasta que el punto H coincida con M′; 2.° Haciéndole deslizar de M á I, y despues moviendo la recta PI paralelamente á la directriz PB de la cantidad PP′. La velocidad del móvil, segun la tangente buscada, tiene por consiguiente, por proyeccion sobre la MF, una velocidad proporcional á MH, y sobre la MP una velocidad proporcional á MI; pero MH y MI son entre sí como MF es á MP.

Luego se puede tomar MF para representar la proyeccion de la velocidad buscada sobre MF, y MP representará entónces la proyeccion de la misma velocidad sobre la direccion MP; basta, por consiguiente, levantar en F una perpendicular FL á la FM, prolongándola hasta que encuentre á la directriz en un punto L, uniendo este punto con el M, tendremos la tangente buscada LM.

Esta construccion equivale á construir un cuadrilátero PMFL, semejante al cuadrilátero infinitesimal IMHM′, y semejantemente dispuesto respecto al punto M.

Tangente á la concóide.

249. La concóide MN (fig. 126), es el lugar geométrico de los puntos B, que se obtienen, trazando por un punto fijo O rectas OAB, que encuentran á una recta fija PQ, y tomando sobre estas rectas una longitud constante AB, contando desde la recta fija PQ. Considerando el punto como el polo, alrededor del cual gira el radio vector OAB, podremos considerar las velocidades de los puntos A y B como resultantes cada una de ellas de la composicion de una velocidad de deslizamiento á lo largo del radio vector, y da una velocidad de circulacion que será la velocidad de arrastre alrededor del punto O; las velocidades de deslizamiento de los puntos A y B son evidentemente iguales, porque la distancia AB es constante; las velocidades de circulacion ó de arrastre, son proporcionales á OA y OB; la velocidad absoluta del punto A está dirigida segun la recta PQ; sea AC esta velocidad, construyamos el rectángulo ADCE, AD será la velocidad de arrastre del punto A, y AE su velocidad de deslizamiento; si trazamos BK perpendicular á OB, hasta que encuentre á la OD prolongada, y tomamos BH=AE, BH y BK serán las velocidades de deslizamiento y circulacion del punto

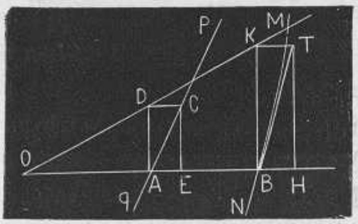


Fig. 126.

B; la diagonal BT será la velocidad absoluta del punto B, y por consiguiente, la tangente á la concóide en el punto B.

Extension dada al método de Roberval por Mannheim.

250. La aplicacion del método de Roberval á la determinacion de las tangentes á las curvas, puede conducir á menudo, á que nos encontremos con muchas velocidades componentes para determinar la velocidad total, ó sea la direccion de la tangente á la curva, que nos lleven á construcciones, sino impracticables, sumamente complicadas.

Para evitar este inconveniente, M. Mannheim ha tratado de deducir del principio de Roberval, un pequeño número de elementos sencillos, que hacen en esta teoría el papel que llenan en el cálculo diferencial las fórmulas que dan las derivadas, de un producto, de un cociente, de una funcion de funcion, etc.; de las cuales ha deducido algunas fórmulas fundamentales que conducen á las elegantes construcciones siguientes.

Primera fórmula: expresion de la variacion de la longitud de una recta. Sean (fig. 127), M y M′ los puntos en que un radio vector, que parte del polo O, encuentra á dos curvas cualesquiera; y N, N′ los puntos en que las normales á estas dos curvas encuentran á la perpendicular al radio vector trazada por el punto O; tenemos

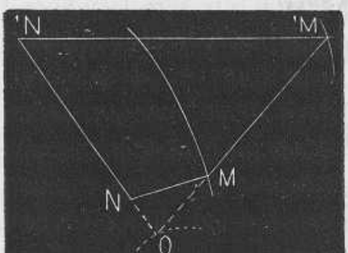


Fig. 127.

$$d.\mathrm{OM}=\mathrm{ON}.d\theta,$$
$$d.\mathrm{OM}'=\mathrm{ON}'.d\theta;$$

luego

$$(1)\quad d.\mathrm{MM'}=\mathrm{NN'}.d\theta.$$

Esta fórmula da la variacion de la longitud MM′ interceptada sobre una recta móvil por dos curvas cualesquiera. La ley del movimiento de la recta indefinida OMM′ es arbitraria; el punto O es aquel en que esta recta es tangente á su envolvente.

251. Apliquemos esta fórmula al siguiente problema. Una recta MM′ (fig. 128), se mueve segun una ley dada por la envolvente de las posiciones sucesivas de esta recta, la cual encuentra á dos curvas cualesquiera en los puntos M, M′; se divide la distancia MM′ en el punto M″, en dos partes cuya razon λ sea constante; se pide la normal á la curva que describe el punto M″.

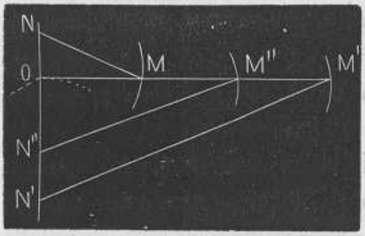


Fig. 128.

Tracemos la perpendicular ON, las normales MN, M′N′ á las curvas dadas; y sea M″N″ la normal buscada. Se tiene

$$\mathrm{MM''}=\lambda \mathrm{M''M'};$$

de donde se deduce

$$d.\mathrm{MM''}=\lambda d.\mathrm{M''M'};$$

pero $d.\mathrm{MM''}=\mathrm{NN''}d\theta$, y $d\mathrm{M''M'}=\mathrm{N''N'}d\theta$; luego sustituyendo

$$\mathrm{NN''}=\lambda\,\mathrm{N''N'}.$$

Se obtendrá la normal uniendo el punto M″ al punto N″, que divide NN′ en la relacion dada λ.

252. Problema inverso del de las tangentes. Observemos que el problema inverso del que consiste en trazar la tangente á una curva, es aquel en el que se pide, dada

la ley del movimiento de una recta, determinar el punto en que esta recta es tangente á su envolvente.

Por ejemplo, la recíproca del problema precedente es: una recta encuentra á tres curvas dadas, de manera que la relacion de los segmentos interceptados es constante; se pide el punto en que la recta es tangente á su envolvente.

En este caso, las normales á las tres curvas son los datos de la cuestion; y el problema se reduce, por lo que precede, á buscar una perpendicular á la recta considerada, perpendicular que esté dividida por las tres normales en la relacion dada. Las dos cuestiones siguientes, son casos particulares de este problema.

Centro de curvatura de la elipse.

253. Sabemos que las partes de la normal á la elipse, comprendidas entre la curva y los ejes están en la relacion constante $\frac{b^2}{a^2}$. De aquí se sigue, que la solucion que acabamos de encontrar, nos dará el centro de curvatura de la elipse, considerando este punto como aquel en que la normal es tangente á su envolvente, es decir, á la evoluta de la elipse.

Sea (fig. 129), MM′M″ la normal dada; las tres curvas son la elipse y sus dos ejes CA y CB. Tracemos las normales M′N′, M″N″; se trata de construir una perpendicular MM′, tal que se tenga

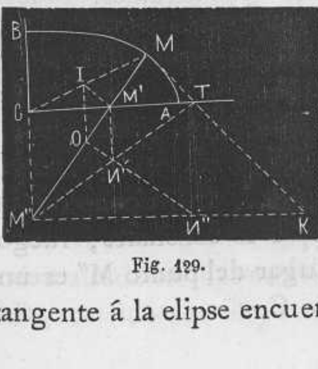


Fig. 129.

$$\frac{\text{ON}'}{\text{ON}''} = \frac{\text{MM}'}{\text{MM}''} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Sea T el punto en que la tangente á la elipse encuentra al eje focal; la recta M″T pasa por el punto N'; porque en efecto, prolongando MT hasta el punto K, en que esta recta encuentra á la M''N'', se tiene evidentemente

$$\frac{ON'}{ON''}=\frac{MT}{MK}=\frac{MM'}{MM''}.$$

De donde resulta la siguiente construccion: levántase en M' una perpendicular á M'M, por el punto I, en que esta perpendicular encuentra al radio CM, tírese IO paralela á CB, esta recta encuentra á la MM'' en el centro de curvatura O.

Centro de curvatura de la epiciclóide; construccion de Savary.

254. La epiciclóide es la curva engendrada por un punto M (fig. 130), unido á un círculo C_1, cuando este círculo rueda sobre un círculo fijo C. Sabemos que la normal á esta curva es la línea que une el punto generador M, al punto de contacto M' de los dos círculos. Tracemos la MC_1, y

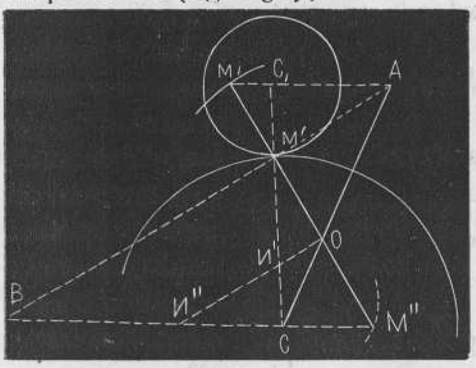


Fig. 130.

tiremos por C una paralela á esta recta, hasta que encuentre á la normal en M''. Se tiene

$$\frac{CM''}{C_1M}=\frac{R}{R_1}.$$

Llamando R y R_1 á los radios respectivos del círculo fijo y del círculo móvil. Pero C_1M es constante, luego CM'' es tambien constante y el lugar del punto M'' es un círculo concéntrico con el círculo C.

Ademas, $\frac{MM'}{MM''}=\frac{R_1}{R}$; luego la normal MM′ está dividida por la curva misma y por los dos círculos cuyo centro es C en dos segmentos cuya relacion es constante, y se obtendrá el centro de curvatura O de la epiciclóide, construyendo una perdendicular ON′N″ á MM′, tal que se tenga

$$\frac{ON'}{N'N''}=\frac{R_1}{R};$$

para lo cual, levantemos en M′ una perpendicular sobre MM″, terminada en MC_1, y tracemos AC; el punto de encuentro de esta recta con MM′ es el punto buscado O. Porque en efecto, prolongando AM′ hasta B, se tiene

$$\frac{ON'}{N'N''}=\frac{AM'}{M'B}=\frac{R_1}{R}.$$

Esta construccion se llama *construccion de Savary*.

Radio de curvatura de una curva epicicloidal plana.

255. Sea M (fig. 131) el punto generador, tomemos sobre la curva móvil y la curva fija á partir del punto de contacto, dos arcos infinitamente pequeños é iguales AB, AB′; sea M′ la posicion del punto M, cuando B′ coincida con B, la normal en M′ se construye uniendo el punto M′ al punto B, ó al B′: esta recta viene á cortar á la normal infinitamente proxima MA en el centro de curvatura buscado C_x.

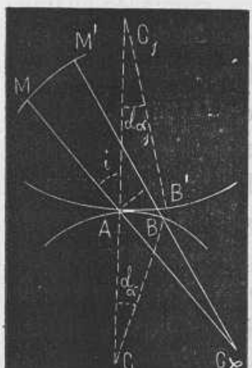


Fig. 131.

Sean $MM'=ds$, $AB=AB'=ds'$, $AC=R$, $AC_1=R_1$, $MA=r$, $MC_x=\rho$. La rotacion de la figura móvil alrededor del centro instantáneo A, por el camino AB recorrido por el punto de contacto, es igual á la suma de los ángulos de contingencia respectivos de los dos círculos; que es igual á

$$ds'\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right);$$

lo que da para el valor del arco MM'

$$ds=rds'\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right);$$

tambien si designamos por i el ángulo que forma AM con la recta de los centros CC_1, tendremos por los triángulos semejantes $MM'C_x, AB\,C_x$,

$$\frac{ds}{ds'\cos i}=\frac{\rho}{\rho-r};$$

y de estas dos igualdades resulta

$$\frac{\rho\cos i}{\rho-r}=r\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right),$$

ó $$\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\rho-r}\right)\cos i=\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1};$$

y de estas ecuaciones se deduce la construccion de Savary que ya conocemos.

Centro instantáneo de segundo órden.

256. Cuando se conoce el centro A_1 (fig. 132) del círculo móvil, se encuentra el punto C_x, prolongando la recta MA_1 hasta que encuentre á la perpendicular AP á la MA, y tirando por el punto P una paralela á la AA_1; esta es la construccion de Savary para el caso en que la circuferencia fija se convierte en una recta.

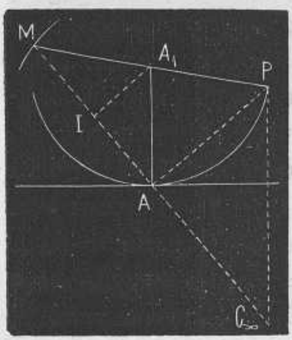


Fig. 132.

Basta, pues, conocer el punto A_1 para resolver todas las cuestiones geométricas que se refieren al segundo órden diferencial; lo mismo que el punto

A da la solucion de todos los que se refieren al primero, por cuya razon conviene dar al punto A_1 el nombre de *centro instantáneo de segundo órden.* Existen puntos dotados de propiedades análogas para el tercero, el cuarto órden, etc.; de manera que basta conocer para cada órden un punto único, para resolver todas las cuestiones del órden correspondiente, á las cuales da orígen al movimiento infinitamente pequeño de una figura plana en su plano.

LECCION XXI.

Movimientos simultáneos de un sólido.—Composicion de los movimientos simultáneos de un sólido.—Composicion de dos ó más traslaciones.—Composicion de una traslacion y una rotacion.—Composicion de dos rotaciones cuyos ejes son paralelos. — Par de rotaciones.—Composicion de rotaciones cuyos ejes son consecuentes.—Paralelógramo de las rotaciones.—Composicion de dos rotaciones cuyos ejes no están en un plano.—Composicion de movimientos cualesquiera.—Descomposicion de un movimiento en tres traslaciones y tres rotaciones.—Valores de las componentes.—Determinacion analítica del eje instantáneo de rotacion y traslacion.

Movimientos simultáneos de un sólido.

257. Si referimos las posiciones sucesivas de los diferentes puntos de un sólido en movimiento á ejes coordenados, que se mueven en el espacio, tendremos el movimiento relativo con respecto á los ejes móviles y no el absoluto del sólido en el espacio. Podemos considerar el sólido, como animado á la vez de dos movimientos, uno el movimiento relativo y otro el movimiento de arrastre, que tendría, si estuviera unido invariablemente á los ejes móviles; el movimiento real del sólido se obtendrá por la composicion del movimiento relativo y el movimiento de arrastre.

Un sólido puede, como un punto, suponerse animado á la vez de tres ó más movimientos distintos, cuya composicion nos dará siempre el movimiento real del sólido en el espacio. Vamos á exponer el procedimiento para componer entre sí los diversos movimientos de un sólido, en todos los casos posibles; bastará para esto que nos ocupemos de los movimientos elementales simultáneos, porque aplicando las reglas que vamos á establecer, á los movimientos elementales que se producen durante los elementos sucesivos del tiempo, se deducirá con facilidad la composicion de los movimientos contínuos simultáneos del sólido, cualquiera que sea la naturaleza de estos movimientos.

Composicion de los movimientos simúltáneos de un sólido.—Composicion de dos ó más traslaciones.

258. Los movimientos simples de un sólido son la traslacion y la rotacion. El conocimiento de la traslacion exige el de su direccion y su velocidad líneal; y el de la rotacion, el de la posicion verdadera del eje alrededor del cual se verifica, y la velocidad angular; ademas debe conocerse, tanto para la traslacion como para la rotacion, el sentido en que se operan estos movimientos.

Para la traslacion, el sentido está indicado por el sentido mismo de la recta paralela á la traslacion, de modo, que una recta AB, tomada en el sentido AB, determina completamente la magnitud, el sentido y la direccion de una traslacion; porque indica que esta traslacion se verifica paralelamente á AB, en el sentido AB y con una velocidad AB.

Podemos representar del mismo modo por una recta HK (fig. 133), tomada en un sentido conveniente, la magnitud y sentido de una rotacion. La direccion indefinida KH, es el eje de esta rotacion; la longitud KH representa la medida de la velocidad angular de la rotacion; es decir, la longitud del arco rectificado descrito en la unidad de tiempo por un punto del cuerpo, situado á la unidad de distancia del eje; añadiendo además el convenio que hicimos para re-

Fig. 133.

presentar un par por su eje, se indicará el sentido de la rotacion; tendremos que el eje de una rotacion KH representa, la direccion del eje, la velocidad angular y el sentido en que se verifica.

Este convenio permite atribuir signos á las rotaciones efectuadas alrededor de los ejes rectangulares coordenados X, Y, Z (fig. 134). Si la rotacion se efectúa alrededor de OX, el sentido del eje será el sentido OX, cuando la rotacion se opere de Y hácia Z, para que el observador la vea efectuarse de izquierda á derecha; la direccion del eje es en este caso la de las abscisas positivas, y suele decirse por analogía que la rotacion es positiva. Si se efectúa de Z hácia Y el sentido del eje, será OX', del lado de las abscisas negativas, y la rotacion se llamará negativa. Del mismo modo la rotacion es positiva alrededor de OY, cuando se opera de Z hácia X, y alrededor de eje OZ cuando se opera de X hácia Y.

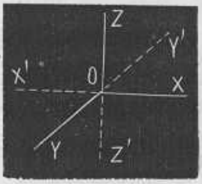


Fig. 134.

Establecidos estos preliminares, vamos á buscar las reglas de la composicion de los movimientos simples, definidos por rectas de posicion, sentido y magnitud conocidas.

Los casos que pueden presentarse son: composicion de dos ó más traslaciones; composicion de una traslacion y una rotacion, que comprende el caso en que sean perpendiculares entre sí, y el caso en que tengan una direccion cualquiera; composicion de dos rotaciones, que comprende los tres casos, que los ejes sean paralelos, sean concurrentes y no estén situados en un plano.

259. Si un sólido está animado á la vez de dos movimientos elementales de traslacion, cada uno de sus puntos describirá, en virtud del movimiento resultante,

la diagonal del paralelógramo construido sobre los caminos infinitamente pequeños que recorre en virtud de cada uno de los movimientos componentes.

Todos los paralelógramos así construidos para los diferentes puntos del sólido, tienen sus lados iguales y paralelos; sus diagonales serán tambien iguales y paralelas; luego el movimiento resultante del sólido, será un movimiento de traslacion. La velocidad del sólido, en este movimiento resultante, está representada en magnitud y direccion por la diagonal del paralelógramo construido sobre las rectas que representen las velocidades de los movimientos componentes.

Si el sólido está animado de un número cualquiera de movimientos elementales de traslacion, se compondrán los dos primeros; el movimiento resultante y el tercero, y así sucesivamente. El movimiento resultante será un movimiento de traslacion. La velocidad de este movimiento resultante se deducirá de las velocidades de los movimientos componentes, por la construccion del polígono de las velocidades, ó por la del paralelepípedo de las velocidades en el caso de que las componentes sean tres no situadas en un mismo plano.

Se puede inversamente descomponer, de una infinidad de maneras, una traslacion dada en dos ó tres traslaciones simultáneas; para lo cual, basta que la traslacion dada sea la diagonal del paralelógramo ó paralelepípedo cuyos lados ó aristas representen las traslaciones buscadas.

Composicion de una traslacion y una rotacion.

260. Consideremos un sólido animado á la vez de una traslacion y una rotacion alrededor de un eje perpendicular á la direccion de la traslacion; sea O (fig. 135), la proyeccion del eje de rotacion, que se verifica en el sentido de

la flecha ω, AB la direccion de la traslacion cuyo sentido indica la flecha b; sea v la velocidad de la traslacion y ω la velocidad angular de la rotacion; vdt será el camino recorrido por el cuerpo en el tiempo dt, en virtud de la traslacion, y ωdt el ángulo de que el sólido gira en el mismo tiempo, en virtud de la rotacion. Tiremos por el punto O una perpendicular á la direccion de la traslacion, y tomemos en ella un punto M para el cual se verifique, que

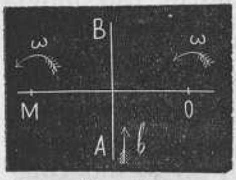


Fig. 135.

$$(1) \quad v = \omega \times \mathrm{OM}.$$

El punto M se mueve hácia abajo y perpendicularmente á la OM de una cantidad igual á $\omega dt \times \mathrm{OM}$, en virtud de la rotacion; y se eleva sobre esta recta perpendicularmente de la cantidad vdt, á causa de la traslacion; estas dos cantidades son iguales en virtud de la relacion (1); luego el punto M permanece inmóvil; de aquí se deduce inmediatamente, que el movimiento resultante del sólido es un movimiento de rotacion alrededor de un eje que pasa por el punto M. Este eje es ademas paralelo al O de la rotacion componente, porque tirando por M una recta paralela al eje que se proyecta en O, si el eje de la rotacion resultante no coincidiera con ella, formaría un cierto ángulo, y todas las rectas que formaran el mismo ángulo, estarían en igual caso; y debiendo el eje de la rotacion resultante ser único, coincidirá con la paralela que hemos tirado por el punto M. La velocidad angular de la rotacion resultante, es la misma que la de la rotacion componente, porque observando que el punto O no se mueve en virtud de la rotacion, el camino que recorre por la traslacion, es vdt; dividiendo por el radio OM de la rotacion resultante, y considerando este camino como debido al movimiento resultante, tendremos el ángulo descrito por el cuerpo en virtud de este movimiento en el tiempo dt; por la relacion (1), tendremos

$$vdt = \omega dt \times \mathrm{OM}, \quad \text{ó} \quad \frac{vdt}{\mathrm{OM}} = \omega\, dt;$$

es decir, que el ángulo descrito en el tiempo dt, es ωdt; luego la velocidad angular es ω. El sentido de esta rotacion es el mismo de la rotacion componente.

261. En el caso en que el sólido esté animado á la vez de una rotacion y una traslacion, cuya direccion no sea perpendicular al eje de la rotacion, descompondremos la traslacion en dos componentes, una perpendicular y otra paralela al eje de la rotacion; compondremos la primera de estas traslaciones con la rotacion, lo que nos dará una rotacion del mismo sentido y la misma velocidad que la propuesta alrededor de un eje paralelo al de esta; y nos quedará una rotacion y una traslacion dirigida segun el eje de la rotacion, cuya coexistencia nos dará un movimiento helizoidal análogo al movimiento de un tornillo que penetra en su tuerca.

Siendo el movimiento helizoidal elemental de un sólido, el resultante de la composicion de una rotacion alrededor del eje instantáneo de rotacion y traslacion del sólido, y de una traslacion á lo largo de este eje, es fácil deducir la expresion de la velocidad de un punto cualquiera del sólido móvil.

Llamando v á la velocidad de la traslacion, ω á la angular de la rotacion y r á la distancia del punto que se considera al eje instantáneo de rotacion y traslacion, las componentes serán

$$v \quad \text{y} \quad \omega r;$$

y como estas componentes son perpendiculares, la velocidad resultante será

$$\sqrt{v^2 + \omega^2 r^2}.$$

Esta velocidad es tanto mayor, cuanto mayor es la distancia r: y es mínima para los puntos del eje en que $r=0$, reduciéndose entónces la velocidad á v.

Composicion de las rotaciones cuyos ejes son paralelos.

262. En la composicion de dos rotaciones cuyos ejes son paralelos, puede suceder que las rotaciones sean del mismo sentido ó de sentidos contrarios. Examinemos el primer caso.

Supongamos un sólido animado á la vez de dos rotaciones alrededor de dos ejes paralelos, que se proyectan en O y O' (fig. 136), en el sentido de las flechas, y cuyas velocidades angulares son ω y ω'. Dividamos la recta OO' en partes inversamente proporcionales á ω y ω': sea M el punto de division, tendremos

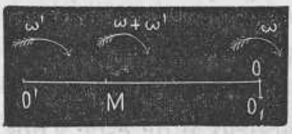


Fig. 136.

$$\omega \times OM = \omega' \times O'M.$$

En virtud de la rotacion ωdt alrededor del eje O, el punto M se eleva por encima de la OO' de la cantidad $\omega dt \times OM$; en virtud de la rotacion $\omega' dt$ alrededor del eje O' este punto baja por debajo de la OO' de una cantidad $\omega' dt \times O'M$: estos dos caminos recorridos simultáneamente por el punto M son iguales y contrarios: luego el punto M permanece inmóvil, por lo tanto, el movimiento resultante es una rotacion alrededor de un eje que pasa por el punto M, y como este eje es el lugar geométrico de todos los puntos que resultarian inmovibles en las secciones del sólido por planos perpendiculares á los ejes de las rotaciones componentes, es paralelo á los ejes de las rotaciones componentes, está situado en el plano de estos y encuentra á la OO' en el punto que determina la relacion de arriba. Para determinar la velocidad angular de la rotacion resultante, observaremos, que el camino recorrido por el punto O en el tiempo dt, es debido únicamente á la rotacion $\omega' dt$ alrededor del eje O′, y es igual á $\omega' dt \times O'O$; considerando este camino como recorrido en virtud de la rotacion resultante alrededor del eje M, tendremos el ángulo descrito en el mismo tiempo, dividiendo por OM, será

$$\frac{OO_1}{OM} = \frac{\omega' dt \times OO'}{OM} = \frac{\omega' dt (O'M + OM)}{OM} = \frac{OM(\omega dt + \omega' dt)}{OM}$$
$$= (\omega + \omega') dt;$$

de modo, que la velocidad angular es $\omega + \omega'$, es decir, la suma de las velocidades angulares de las rotaciones componentes. El sentido de la rotacion resultante es el mismo de las rotaciones componentes, como es fácil ver examinando los movimientos que toman los puntos O y O′.

263. Vamos al caso en que los sentidos de las rotaciones, alrededor de ejes paralelos, son contrarios. Sean como ántes, los ejes proyectados en O y O′ y ω y ω' las velocidades angulares, siendo $\omega > \omega'$: sea M un punto que divide á la recta OO′ (figura 137), en dos segmentos sustractivos O′M y OM inversamente proporcionales á ω' y ω, de modo que se tenga

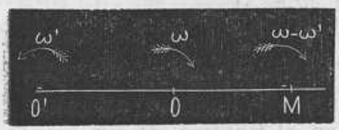


Fig. 137.

$$(1) \quad \omega \times OM = \omega' \times O'M;$$

razonando absolutamente como en el caso anterior, veremos que el punto M permanece inmóvil, y que el movimiento resultante es una rotacion alrededor del eje paralelo á los de las rotaciones componentes que se proyecta en M. El sentido de la rotacion resultante es el de la rotacion ω; y la velocidad angular es $\omega-\omega'$, porque

$$\frac{OO_1}{OM}=\frac{\omega' dt\times OO'}{OM}=\frac{\omega' dt(O'M-OM)}{OM}=\frac{OM(\omega dt-\omega' dt)}{OM}$$
$$=(\omega-\omega')dt;$$

es decir, que la velocidad angular de la rotacion resultante es la diferencia de las velocidades angulares de las rotaciones componentes.

264. De la igualdad (1) salen las proporciones

$$\frac{\omega}{\omega'}=\frac{O'M}{OM};\ \frac{\omega-\omega'}{\omega'}=\frac{O'M-OM}{OM}=\frac{OO'}{OM},\ OM=\frac{\omega'\times OO'}{\omega-\omega'};$$

en el caso particular de ser $\omega=\omega'$, $OM=\infty$; es decir, que en este caso la velocidad angular de la rotacion resultante es nula, y el eje de esta rotacion resultante, está en el infinito: lo cual quiere decir, que el movimiento resultante es una traslacion dirigida perpendicularmente al plano de los ejes de las rotaciones componentes. Puede demostrarse directamente que el caso de dos rotaciones iguales y de sentidos contrarios, alrededor de ejes paralelos, que constituye lo que *se llama un par de rotaciones*, equivale á una traslacion dirigida perpendicularmente al plano de los ejes de las dos rotaciones ó al plano del par. Sean O, O′ (fig. 138), los ejes de las rotaciones componentes y ω la velocidad angular comun; en el tiempo *dt* un punto cualquiera M tomado entre los dos ejes, desciende de la cantidad $\omega dt\times OM$ en virtud de la rotacion O, y desciende tambien de la cantidad $\omega dt\times O'M$ en virtud de la rotacion O′; el camino total recorrido en virtud de las dos es $\omega dt\,(OM+O'M)$ $=\omega dt\, OO'$: un punto M′ tomado en el plano de los ejes y fuera del espacio comprendido por éstos, desciende de la cantidad $\omega dt\times OM'$ en virtud de la rotacion O, y se eleva de la cantidad $\omega dt\times O'M'$ por la rotacion O; el camino total

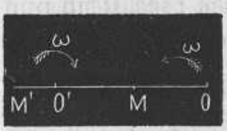


Fig. 138.

recorrido por este punto es la diferencia de los dos, es decir $\omega dt(OM' - O'M') = \omega dt \times OO'$; luego dos puntos cualesquiera M y M' describen en el tiempo *dt* rectas iguales y paralelas; por el tanto, el movimiento resultante de un par de rotaciones es una traslacion.

265. Si un sólido va animado á la vez de un número cualquiera de rotaciones del mismo sentido alrededor de ejes paralelos, obtendremos el movimiento resultante, que será una rotacion del mismo sentido, alrededor de un eje paralelo á los de los ejes componentes y de una velocidad angular igual á la suma de las velocidades angulares de las rotaciones componentes, componiendo dos de ellas, la resultante y la tercera y así sucesivamente. En el caso que el sólido esté animado á la vez de un número cualquiera de rotaciones de sentidos contrarios alrededor de ejes paralelos, reduciremos todas las de un sentido á una sola, y todas las del sentido opuesto á otra, y componiendo estas dos rotaciones, tendremos el movimiento resultante del sólido, que será una rotacion ó una traslacion, segun que las velocidades de las dos rotaciones de sentidos contrarios sean desiguales ó iguales.

Composicion de rotaciones cuyos ejes son concurrentes. Paralelógramo de las rotaciones.

266. Supongamos un sólido animado de dos rotaciones simultáneas alrededor de dos ejes AB, CD (fig. 139), que se encuentran en el punto E, y sean ω, ω' las velocidades angulares correspondientes á cada una de ellas.

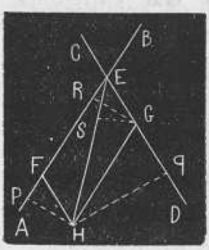


Fig. 139.

El punto E, como pertenece á los dos ejes, permanece inmóvil, por lo que, el movimiento resultante será una rotacion alrededor de un eje, que pasa por este punto.

Para determinar otro punto de este eje, sean EF y EG los ejes de las rotaciones componentes definidas, como ántes hemos dicho, y construyamos el paralelógramo EFGH; el punto H permanece inmóvil, y por lo tanto, el eje de la rotacion resultante es la diagonal de este paralelógramo. Para probar que el punto H queda inmóvil, tiremos las perpendiculares HP y HQ, y observaremos, que en el tiempo dt se eleva sobre el plano una cantidad $\omega dt \times PH$ por la rotacion AB; y por la rotacion CD desciende debajo del mismo una cantidad $\omega dt \times HQ$. Más los triángulos HPF y HQG, son semejantes, y nos dan

$$\frac{HP}{HQ}=\frac{HF}{HG}=\frac{EG}{EF}=\frac{\omega'}{\omega}, \text{ ó } \omega\times HP=\omega'\times HQ;$$

luego los caminos recorridos á la vez y perpendicularmente al plano EBD, son iguales y contrarios, y por ello el punto H permanece inmóvil; luego la línea EH es el eje de la rotacion resultante.

Para encontrar la velocidad angular de la rotacion resultante, que llamaremos U, observemos que el punto G no se mueve por la rotacion CD, y recorre un camino $\omega dt \times GR$ por la rotacion AB, si consideramos este camino, como recorrido por la rotacion resultante, será $Udt \times GS$, y tendremos

$$\omega dt \times ER = Udt \times GS \text{ ó } \frac{\omega}{U}=\frac{GS}{GR};$$

pero los triángulos EFH y EHG son iguales, los productos que expresan los duplos de sus áreas tambien lo son, es decir,

$$EF\times GR = EH \times GS, \text{ de donde } \frac{GS}{GR}=\frac{EF}{EH};$$

de esta proporcion y la anterior, resulta la siguiente:

$$\frac{\omega}{U}=\frac{EF}{EH};$$

que nos dice, que si EF y EG representan las velocidades

ω y ω', EH representa U; de modo que la diagonal del paralelógramo construido de este modo, representa el eje y la velocidad de la rotacion resultante. El sentido es el mismo de las rotaciones componentes cuando se miran del punto E. Esta proposicion constituye lo que se llama la regla del *paralelógramo de las rotaciones*, análogo al de las fuerzas y al de las velocidades.

267. Cuando tengamos que componer un número cualquiera de rotaciones elementales, simultáneas de un sólido, alrededor de ejes que concurren en un punto, procederemos del mismo modo que si trataramos de encontrar la resultante de varias fuerzas concurrentes; representaremos la magnitud, el sentido y la velocidad angular de cada una de ellas por una cierta recta llevada, como hemos visto, á partir del punto de encuentro sobre el eje, alrededor del que se efectúa esta rotacion. Trataremos estas rectas como fuerzas y por la regla del polígono de las fuerzas, obtendremos, el eje, la velocidad y el sentido de la rotacion resultante.

En el caso de que las rotaciones componentes sean tres, no situadas en el mismo plano, obtendremos la rotacion resultante por la regla del paralelepípedo de las rotaciones y por una construccion igual á la del paralelepípedo de las fuerzas.

Composicion de dos rotaciones cuyos ejes no están en un plano.

268. Sean AB, CD (fig. 140) los ejes, no situados en un mismo plano, de dos rotaciones elementales simultáneas de un sólido. Por un punto E de AB tiremos C'D' paralela á CD; podemos considerar la rotacion alrededor de CD, como resultante de la composicion de una rotacion igual y del mismo sentido alrededor de C'D', y una traslacion perpendicular al plano CD C'D'

(260). Esta traslacion tiene la magnitud y el sentido del camino que recorre el punto E, por la rotacion alrededor de CD, y una velocidad igual al producto de la velocidad angular de esta rotacion, por la distancia de las paralelas CD, C'D'. Reemplazando la rotacion alrededor de CD por los dos movimientos que acabamos de indicar, tendremos que componer tres movimientos elementales, la rotacion AB, la C'D' y la traslacion EF. Compondremos las dos rotaciones por la regla del paralelógramo de las rotaciones, y luego compondremos la rotacion resultante con la traslacion EF, lo que nos dará un movimiento helizoidal, porque EF, perpendicular al plano CD C'D', no puede ser perpendicular al eje de la rotacion resultante que está en el plano AEC'.

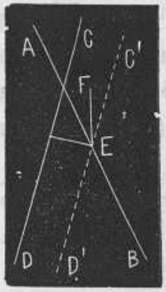


Fig. 140.

Composicion de movimientos cualesquiera.

269. Todo movimiento elemental de un sólido equivale á la coexistencia de una rotacion alrededor de un eje, y una traslacion á lo largo de este eje; la composicion de dos movimientos elementales cualesquiera de un sólido, se reduce, pues, á la composicion de cuatro movimientos simultáneos, dos traslaciones y dos rotaciones. Compondremos primero las dos rotaciones, lo que nos dará en general una rotacion y una traslacion; hallaremos la traslacion resultante de las tres traslaciones, es decir, las dos primitivas y la que se acaba de obtener, y los movimientos elementales dados, se reducen á una rotacion y una traslacion, lo que en general nos dará un movimiento helizoidal.

Si un sólido está animado á la vez de más de dos movimientos elementales cualesquiera, encontraremos el movimiento resultante componiendo dos de ellos; luego el resultante y un tercero, y así sucesivamente. El resultado final será, en general, un movimiento helizoidal, que es el movimiento elemental más general de que un sólido puede estar animado.

Descomposicion de un movimiento en tres traslaciones y tres rotaciones.

270. Supongamos un sólido móvil referido á tres ejes rectangulares X, Y, Z, y consideremos un punto O del sólido, ó unido invariablemente á él, que coincide con el orígen O al principio del movimiento de que nos ocupamos; este movimiento elemental del sólido podemos descomponerle en una traslacion igual y paralela al movimiento del punto escogido, y una rotacion alrededor de un eje que pasa por dicho punto. La traslacion puede descomponerse en tres traslaciones dirigidas en el sentido de los ejes OX, OY, OZ (259); y la rotacion que tiene lugar alrededor de un eje que pasa por O, puede tambien descomponerse en tres rotaciones alrededor de los mismos ejes, núm. 265. Luego todo movimiento elemental de un sólido puede descomponerse en tres traslaciones paralelas á tres ejes rectangulares, tomados á voluntad, y en tres rotaciones alrededor de estos ejes.

271. La composicion de los movimientos elementales simultáneos, nos conduce á volver á encontrar y á completar los teoremas relativos al movimiento elemental de un sistema sólido.

Hemos visto que el movimiento elemental de un sólido puede descomponerse en una traslacion igual y paralela al movimiento elemental de un punto O y á una rotacion, que designaremos por V, alrededor de un eje que pasa por este punto O (215).

Si la traslacion es normal á la rotacion, los dos movimientos se componen en una sola rotacion, igual y paralela á la rotacion primitiva V (260). Si la traslacion es oblícua á la rotacion, se puede descomponer la traslacion en dos nuevas traslaciones, una normal á la rotacion y otra paralela á ella; los dos primeros movimientos se componen en una rotacion igual y paralela á la rotacion dada V, y el movimiento queda reducido á una rotacion y una traslacion paralela á ella, los cuales producen un movimiento helizoidal (261). En todas estas transformaciones, la rotacion primitiva V conserva su magnitud y direccion.

Podiamos, en vez de componer la rotacion ω con la componente de la traslacion que le es normal, reemplazar la traslacion por un par de rotaciones (ω, ω') alrededor de dos ejes paralelos, uno de los cuales encuentra al eje de la rotacion V; componer las dos rotaciones concurrentes ω y V, y darán una rotacion V′ (266); y el movimiento elemental del sólido queda reducido á dos rotaciones ω', V′; alrededor de ejes no concurrentes.

Valores de las componentes.

272. Supongamos que se defina, en un cierto instante, el movimiento elemental de un sistema sólido por la velocidad de traslacion OP del orígen O (fig. 141), que supondremos es un punto del sistema, y por la magnitud y direccion OR del eje de la rotacion instantánea alrededor de un eje que pasa por este mismo punto. Vamos á descomponer estos movimientos en tres traslaciones, en el sentido de los ejes X, Y, Z, y tres rotaciones alrededor de los mismos. Sea V la velocidad de la traslacion OP y u, v, w,

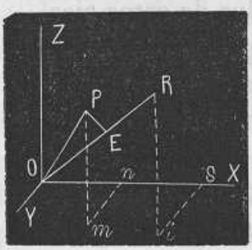


Fig. 141.

sus componentes, segun los ejes; α, β, γ los ángulos que V, ú OP, forma con estos mismos ejes; U la velocidad de la rotacion OR, p, q, r sus componentes; y λ, μ, ν los ángulos de OR con los ejes; tendremos

$$\begin{aligned} u &= V\cos\alpha, & p &= U\cos\lambda, \\ v &= V\cos\beta, & q &= U\cos\mu, \\ w &= V\cos\gamma; & r &= U\cos\nu. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones nos darán las tres traslaciones y las tres rotaciones en que puede descomponerse el movimiento dado. Elevando al cuadrado y sumando, tendremos

$$V=\sqrt{u^2+v^2+w^2}, \quad U=\sqrt{p^2+q^2+r^2};$$

que servirán para determinar V y U cuando se conozcan sus componentes.

Determinacion analítica del eje instantáneo de rotacion y traslacion.

273. Vamos á determinar el eje instantáneo de rotacion y traslacion.

Desde luego sabemos que es paralelo á OR (271). Descompongamos la traslacion OP en dos componentes OE, EP, bajando del punto P la perpendicular EP sobre OR; la recta OE será la velocidad de traslacion en el movimiento helizoidal, la cual es igual á V por cos POR; este coseno es

$$\cos POR = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\lambda$$
$$= \frac{up+vq+wr}{VU};$$

de modo, que la velocidad de traslacion es igual á

$$\frac{up+vq+\omega r}{U};$$

y forma en los ejes los ángulos λ, μ, ν.

Para encontrar la posicion del eje instantáneo de rotacion y traslacion, podríamos componer la rotacion

U=OR, con la traslacion normal PE (260). Pero es más sencillo el procedimiento siguiente:

Sea M (x, y, z) un punto cualquiera del sistema sólido, busquemos las variaciones que esperimentan sus coordenadas x, y, z por consecuencia de los seis movimientos elementales simultáneos que esperimenta el sólido. Basta para esto considerar sucesivamente estos seis movimientos, determinar las variaciones correspondientes de las coordenadas y hacer la suma algébrica de los resultados así obtenidos.

La velocidad u aumenta, durante el tiempo dt, la coordenada x de udt sin alterar á z ni á y.

Del mismo modo, la velocidad v aumenta y de vdt, sin variar x ni z, y wdt es el aumento de z por la velocidad w, x é y no varian.

Cada una de las rotaciones p, q, r, altera á la vez dos coordenadas quedando constante la que es paralela al eje alrededor del cual se verifica la rotacion. Así p altera z é y sin alterar x; q altera x y z sin alterar y; r altera x é y, sin alterar z.

Para determinar las variaciones de z é y debidas á la rotacion p, proyectemos el punto M sobre el plano YZ (fig. 142); la rotacion p, supuesta positiva, lleva en el tiempo dt el punto M á M', por una rotacion en el sentido de y á z alrededor de un eje que se proyecta en O: el incremento de y es—ML y el de z es M'L. De los triángulos semejantes MM'L y MNO, resulta

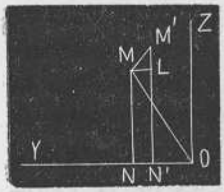


Fig. 142.

$$\frac{ML}{MN} = \frac{LM'}{ON} = \frac{MM'}{OM},$$

y observando que $MM' = OM.pdt$, deduciremos

$$ML = pzdt, \quad LM' = pydt.$$

La variacion de y debida á la rotacion p, es $-pzdt$, y la de z, $+pydt$. Del mismo modo la rotacion q hace variar á z, de $-qxdt$, y á x, de $+qzdt$.

En fin, la rotacion r hace variar á x de $-rydt$, y á y de $+rxdt$.

Reuniendo todos estos resultados, tendremos las variaciones de las coordenadas que son

$$(1)\quad \begin{cases} dx = udt + qzdt - rydt = (u + qz - ry)dt, \\ dy = vdt - pzdt + rxdt = (v - pz + rx)\,dt, \\ dz = wdt + pydt - qxdt = (w + py - qx)dt. \end{cases}$$

274. Puede tambien descomponerse la velocidad V en dos ó más componentes, y operar sobre cada una de estas componentes tomadas separadamente; se encontrará siempre el mismo resultado reuniendo las variaciones correspondientes por vía de adicion algébrica. Tomemos por una de las componentes de la velocidad V la velocidad de traslacion OE; las componentes de esta velocidad son:

Segun OX,

$$\frac{up+vq+wr}{\mathrm{U}} \times \frac{p}{\mathrm{U}} = \frac{up^2+vpy+wpr}{p^2+q^2+r^2},$$

Segun OY,

$$\frac{up+vq+wr}{\mathrm{U}} \times \frac{q}{\mathrm{U}} = \frac{upq+vq^2+wqr}{p^2+q^2+r^2};$$

Segun OZ,

$$\frac{up+vq+wr}{\mathrm{U}} \times \frac{r}{\mathrm{U}} = \frac{upr+vqr+wr^2}{p^2+q^2+r^2}.$$

Las componentes, segun los mismos ejes de la velocidad EP, son las diferencias

$$u - \frac{up^2+vpq+wpr}{p^2+q^2+r^2} = \frac{u(q^2+r^2)-p(vq+wr)}{p^2+q^2+r^2},$$

$$v - \frac{upq+vq^2+wqr}{p^2+q^2+r^2} = \frac{v(p^2+r^2)-q(up+wr)}{p^2+q^2+r^2},$$

$$w - \frac{upr+vqr+wr^2}{p^2+q^2+r^2} = \frac{w(p^2+q^2)-r(up+vq)}{p^2+q^2+r^2},$$

y por consiguiente, hecha abstraccion de la velocidad de traslacion, las variaciones de las coordenadas debidas á la rotacion U y la traslacion EP, serán

$$(2)\begin{cases} dx' = \left[\dfrac{u(q^2+r^2)-p(vq+wr)}{p^2+q^2+r^2}+qz-ry\right]dt, \\ dy' = \left[\dfrac{v(r^2+p^2)-q(wr+up)}{p^2+q^2+r^2}+rx-pz\right]dt, \\ dz' = \left[\dfrac{w(p^2+q^2)-r(up+vq)}{p^2+q^2+r^2}+py-qx\right]dt; \end{cases}$$

hemos obtenido estas fórmulas reemplazando en las ecuaciones (1) las componentes u, v, w de la velocidad total V, por las componentes de su componente EP.

Ahora, el eje instantáneo de rotacion y traslacion queda inmóvil cuando se suprime la traslacion á lo largo de su direccion; las ecuaciones de éste se obtendrán, por lo tanto, igualando á cero las variaciones dx', dy', dz'; y serán

$$(3)\begin{cases} py-qx = \dfrac{r(up+vq)-w(p^2+q^2)}{p^2+q^2+r^2}, \\ qz-ry = \dfrac{p(vq+wr)-u(q^2+r^2)}{p^2+q^2+r^2}, \\ rx-pz = \dfrac{q(wr+up)-v(r^2+p^2)}{p^2+q^2+r^2}. \end{cases}$$

Estas tres ecuaciones son compatibles, porque eliminando z entre las dos últimas, resulta la primera en virtud de la identidad,

$$p[p(vq+wr)-u(q^2+r^2)]+q[q(up+wr)-v(p^2+r^2)] \\ +r[r(up+vq)-w(p^2+q^2)]=0.$$

275. Busquemos las variaciones de las coordenadas que produce sobre un sólido una rotacion ω alrededor de un eje AP (fig. 143), que no pasa por el orígen.

Para definir la posicion del eje AP, supondremos conocidas las coordenadas x', y', z' de uno de sus puntos A, y las componentes p', q', r', de la rotacion ω, descompuesta paralelamente á los tres ejes.

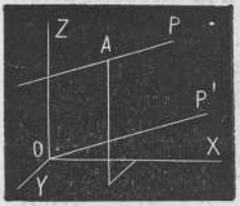


Fig. 142.

Por el punto O tiremos un eje OP', paralelo á AP; podemos suponer la rotacion ω trasportada á este eje, añadiendo una traslacion perpendicular al plano de las dos rectas AP, OP'. Sean u', v', w' las componentes de esta traslacion, tendremos

$$u'p' + v'q' + w'r' = 0,$$

porque el ángulo de la traslacion con la rotacion OP', es recto; las ecuaciones del eje AP serán las (3), escritas como sigue,

$$p'y - q'x = \frac{r'(u'p' + v'q') - w'(p'^2 + q'^2)}{p'^2 + q'^2 + r'^2},$$
$$q'z - r'y = \frac{p'(v'q' + w'r') - u'(q'^2 + r'^2)}{p'^2 + q'^2 + r'^2},$$
$$r'x - p'z = \frac{q'(w'r' + u'p') - v'(r'^2 + p'^2)}{p'^2 + q'^2 + r'^2},$$

Reemplazando $u'p' + v'q'$, por $-w'r'$, $v'q' + w'r'$ por $-u'p'$, y $u'p' + w'r'$ por $-u'q'$ se convierten en

$$p'y - q'x = -w',$$
$$q'z - r'y = -u',$$
$$r'x - p'z = -v';$$

ecuaciones que determinan las componentes u', v', w', de la traslacion.

El eje AP, pasa por el punto A, cuyas coordenadas x', y', z', son cantidades conocidas y satisfacen á las ecuaciones anteriores, y tendremos

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} u' &= r'y' - q'z', \\ v' &= p'z' - r'x', \\ w' &= q'x' - p'y'; \end{aligned} \right.$$

estas relaciones pueden deducirse de las ecuaciones (1), haciendo dx, dy, dz, iguales á cero. Podemos, por lo tanto, aplicar estas mismas ecuaciones á la investigacion de las variaciones de las coordenadas x, y, z, de un punto cualquiera, por la influencia de la traslacion (u', v', w') y de la rotacion (p', q', r'), que pasan por el orígen; por consiguiente, tendremos

$$(5)\left\{\begin{array}{l} dx=(r'y'-q'z'+q'z-r'y)dt=[q'(z-z')-r'(y-y')]dt, \\ dy=(p'z'-r'x'+r'x-p'z)dt=[r'(x-x')-p'(z-z')]dt, \\ dz=(q'x'-p'y'+p'y-q'x)dt=[p'(y-y')-q'(x-x')]dt, \end{array}\right.$$

fórmulas que podiamos obtener directamente por un cambio de coordenadas, llevando el orígen al punto A, y conservándose paralelos los ejes.

LECCION XXII.

Teoría de los movimientos relativos.—Movimiento relativo de un punto material referido á un sistema de ejes animado de un movimiento de traslacion en el espacio.—Movimiento relativo de un punto cuando el movimiento de los ejes es de rotacion.—Movimiento relativo cuando los ejes se mueven de un modo cualquiera en el espacio.—Movimiento relativo de dos sólidos, que se mueven de un modo cualquiera en el espacio.—Teoría de la rodadura y resbalamiento de los sólidos, los unos sobre los otros. Ejemplos.

Teoría de los movimientos relativos.

276. Ya sabemos que el movimiento de un punto con respecto á un sistema de ejes movibles, se llama movimiento relativo; y como la Tierra que nosotros habitamos está siempre en movimiento, todos los movimientos que nosotros observamos son relativos. De aquí la necesidad de estudiar con el mayor cuidado estos movimientos en los diferentes casos que pueden presentarse; los cuales son tres principalmente, segun que el movimiento de los ejes móviles es de traslacion, de rotacion, ó un movimiento cualquiera, y constituyen la teoría de los movimientos relativos, objeto de esta leccion.

Movimiento relativo de un punto material referido á un sistema de ejes animado de un movimiento de traslacion en el espacio.

277. Un punto móvil describe en el espacio la trayectoria MM′M″ (fig. 144), encontrándose en M al fin

del tiempo t, en M′ al fin del tiempo t', en M″ al fin del tiempo t'', etc.; y referimos su movimiento á un sistema de ejes AX′, AY′, AZ′ que se mueven conservándose paralelos á los ejes fijos OX, OY, OZ; tratamos de hallar el movimiento aparente del punto móvil, para un observador que participa del movimiento de los ejes móviles AX′, AY′, AZ′.

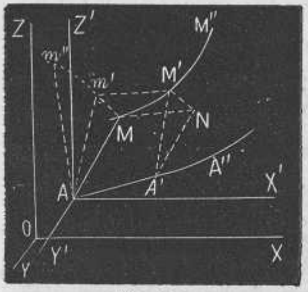


Fig. 144.

Sea AA′A″ la trayectoría del orígen móvil, que se encuentra en A al fin del tiempo t, en A′ al fin del tiempo t', en A″ al fin del tiempo t'', etc. Al fin del tiempo t, el observador que supondremos situado en el orígen de los los ejes móviles, ve el punto M segun la direccion AM; al fin del tiempo t', lo ve segun A′M′; tiremos A′N igual y paralela á AM, será preciso que el punto móvil se encuentre en N al fin del tiempo t', para que el observador crea que éste no se ha movido durante el tiempo $t'-t$: en lugar de esto, el punto móvil está en M′ al fin del tiempo t', de modo que el observador creerá que ha ido de N á M′, en el tiempo $t'-t$; pero el observador, que se cree inmóvil, refiere al punto A, lo que sucede en el punto A′, de suerte, que si por este punto A tiramos una recta Am' igual y paralela á A′M′, creerá que Mm' igual y paralela á NM′, es el camino recorrido por el punto móvil. Del mismo modo si por el punto A tiramos una recta Am'', igual y paralela á A″M″, obtendremos la posicion m'' donde el punto parecerá haberse colocado el fin del tiempo t'', y así sucesivamente: la línea M$m'm''$ es la trayectoría del movimiento relativo del punto M.

Si $t'-t$ es igual á dt, MM′, MN, Mm' son los caminos elementales simultáneos recorridos, en el movimiento absoluto, en el del orígen de los ejes móviles y en el movimiento relativo; el primero es la diagonal del paralelógramo construido sobre los otros dos; dividiéndolos por dt, tendremos las velocidades correspondientes á estos tres movimientos, velocidades que estarán dirigidas segun las líneas MM′, MN, Mm'; luego la velocidad absoluta del punto móvil es la resultante de la velocidad relativa y de la velocidad del orígen de los ejes móviles. Sean MT, MR, NS (fig. 145), estas tres velocidades, tomando MR′=MR en la prolongacion de la MR y en sentido opuesto á ésta, MS es la diagonal del paralelógramo MTSR′; luego la velocidad relativa MS es la resultante de la velocidad absoluta MT y de una velocidad MR′ igual y contraria á la velocidad MR del orígen de los ejes móviles.

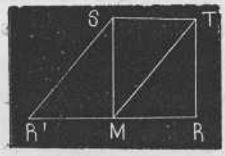


Fig. 145.

278. Las coordenadas del punto móvil M con respecto á los ejes fijos X, Y, Z, son funciones del tiempo y llamándolas x, y, z, tendremos

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t),\quad z=\psi(t);$$

llamando x_1, y_1, z_1 á las coordenadas del orígen móvil A, con respecto á los mismos ejes fijos, tendremos tambien

$$x_1=f_1(t),\quad y_1=\varphi_1(t),\quad z_1=\psi_1(t).$$

Las coordenadas x', y', z' del punto móvil son respecto á los ejes AX′, AY′, AZ′ las diferencias entre cada dos del mismo nombre de las anteriores, y tambien funciones del tiempo; de modo que

$$x'=f(t)-f_1(t),\quad y=\varphi(t)-\varphi_1(t),\quad z'=\psi(t)-\psi_1(t);$$

estas ecuaciones son las del movimiento relativo del punto M. Eliminando t en estas tres ecuaciones, obtendremos dos en x', y', z', que serán las ecuaciones de la trayectoría M$m'm''$ del movimiento relativo.

Examinemos en particular el caso en que el punto M está en reposo absoluto. En este caso sus coordenadas con respecto á los ejes fijos X, Y, Z serán constantes, y tendremos

$$x=a, \quad y=b, \quad z=c;$$

de modo, que las ecuaciones del movimiento relativo serán

$$x'=a-f_1(t), \quad y'=b-\varphi_1(t), \quad z'=c-\psi_1(t).$$

Tiremos por el punto M (fig. 146), de que se trata, tres ejes MX'_1, MY'_1 MZ'_1 paralelos á OX, OY, OZ y de sentido contrario; las coordenadas x', y', z', del orígen A con respecto á estos ejes, estarán expresadas por las fórmulas

$$x_1=a-f_1(t), \quad y_1=b-\varphi_1(t), \quad z_1=c-\psi_1(t).$$

Luego las coordenadas del orígen móvil A, con respecto á los ejes fijos MX'_1, MY'_1, MZ'_1, son constantemente iguales á las coordenadas del punto M con relacion á los ejes móviles AX', AY', AZ'. De aquí se deduce, que la trayectoría relativa ó aparente del punto M con respecto á los ejes móviles, es simétrica con la trayectoría real del punto A. Son simétricas estas trayectorías, por ser simétricos los ángulos triedros OXYZ y $MX'_1Y'_1Z'_1$.

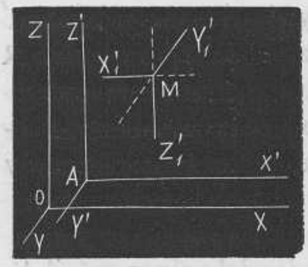


Fig. 146.

En el caso particular en que estando el punto M en reposo absoluto, la trayectoría del punto A es plana, la trayectoría relativa del punto M es tambien plana; y como dos figuras simétricas planas son necesariamente iguales, se deduce que en este caso la trayectoría aparente del punto M es exactamente igual á la trayectoría real del punto A, y no difiere de ella más que por la posicion que ocupa. Tenemos un ejemplo de este caso en el movimiento anual de la Tierra alrededor del Sol; en este movimiento la Tierra describe una elipse que tiene el Sol en uno de sus focos; resulta, pues, que para un observador situado sobre la Tierra, el Sol parece describir anualmente una elipse igual á la precedente, que tiene la Tierra en uno de sus focos.

Movimiento relativo de un punto cuando el movimiento de los ejes es de rotacion.

279. Sea AB (fig. 147), el eje de rotacion del sistema de los ejes móviles, con respecto á los cuales queremos determinar el movimiento relativo; escojamos los ejes de modo que uno de ellos sea el AB. Sean M, M′, M″, las posiciones del punto móvil al fin de los tiempos t, t', t''.

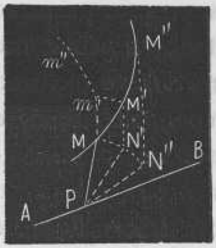


Fig. 147.

El punto M, considerado como unido á los ejes móviles, describe un círculo MN′N″, cuyo centro es P, en virtud de la rotacion de estos ejes alrededor de AB, encontrándose en N′ y N″, al fin de los tiempos t' y t''.

Para que el punto M aparezca en la misma posicion al fin del tiempo t', que al fin del tiempo t, para el observador que participa del movimiento de los ejes, sería preciso que este punto estuviera en N′ al fin del tiempo t'; pero entónces está en M′, de modo que parece haber ido de N′ á M′. Como el observador, se cree inmóvil, refiere esta trayectoría aparente al punto M, que es donde estaba situado ántes el punto móvil, de suerte que para él, el móvil parece haber ido de M á m', esta línea Mm' es la misma N′M′, á la cual se ha hecho girar alrededor de AB hasta que N′ coincida con M; del mismo modo el móvil debia estar en N″ al fin del tiempo t'', para que pareciera no moverse, pero está entónces en M'', de modo que parece haber ido de N'' á M'', ó de M á *m''*; la línea M*m''* es la N''M'' que ha girado sobre AB, hasta que N'' ha coincidido con M. La trayectoría relativa del punto M, es M*m'm''*. Es claro que para obtenerla, basta dar en cada instante al punto móvil un movimiento de rotacion alrededor de AB; igual y contrario al de los ejes móviles alrededor de esta línea; componiendo este movimiento, con el movimiento absoluto del punto, se obtendrá su movimiento relativo ó aparente.

De aquí resulta, que en el caso particular en que el punto cuyo movimiento relativo se busca, está en reposo absoluto en el espacio, este movimiento relativo es un movimiento de rotacion igual y contrario al movimiento de rotacion de los ejes móviles. Tenemos un ejemplo de este caso en el movimiento diurno de las estrellas, llamadas fijas, y áun de los planetas; este movimiento es un movimiento relativo ó aparente, debido á la rotacion de la Tierra alrededor de su eje, que es la línea de los polos.

Movimiento relativo cuando los ejes se mueven de un modo cualquiera en el espacio.

280. Se puede generalizar lo expuesto en los dos casos anteriores al movimiento relativo de un punto referido á un sistema de ejes que se mueven de cualquier modo en el espacio. Demos al conjunto del punto móvil y de los ejes móviles un movimiento cualquiera; el movimiento relativo del punto con respecto á los ejes móviles, no cambiará por el movimiento comun. Si escogemos este movimiento comun, de manera, que en cada instante sea igual y contrario al movimiento que poseen los ejes en este instante, estos quedarán en reposo; y el punto móvil estará animado del movimiento resultante

de la composicion del movimiento que ántes tenía y del comun que acabamos de darle; este movimiento resultante es el movimiento relativo buscado.

La velocidad del punto móvil en cada instante en su movimiento relativo, es la resultante de su velocidad absoluta, y de una velocidad igual y contraria á la que tendria si estuviera invariablemente unido á los ejes móviles en la posicion que ocupa en este instante.

Movimiento relativo de dos sólidos animados de un movimiento cualquiera en el espacio.

281. Si dos sólidos A y B se mueven de un modo cualquiera en el espacio, encontraremos el movimiento del sólido A, con respecto al sólido B, ó lo que es lo mismo, con respecto á ejes coordenados unidos invariablemente á este sólido B y móviles con él, operando como acabamos de hacerlo en el párrafo precedente. Daremos al conjunto de los sólidos A y B un movimiento comun igual y contrario al movimiento del sólido B, este quedará en reposo, y componiendo el movimiento que tenía el sólido A con el que le acabamos de dar, encontraremos un movimiento resultante, que es precisamente el movimiento relativo buscado.

Teoría de la rodadura y resbalamiento de los sólidos los unos sobre los otros. Ejemplos.

282. Hemos hablado de una curva que rueda sobre otra curva, y de una superficie que rueda sobre otra superficie, al estudiar el modo cómo se efectúa el movimiento contínuo de una figura plana en su plano, y de un sólido en el espacio; pero conviene que demos una definicion precisa de este movimiento, en todos los casos que se pueden presentar.

Se dice que una curva rueda sobre otra curva, cuando la primera curva se mueve con respecto á la segunda, sin que estas dejen de ser tangentes entre sí, y que el punto de contacto recorre arcos de igual longitud sobre las dos curvas. Esta última condicion puede enunciarse diciendo, que las diversas partes de la primera curva vienen sucesivamente á aplicarse sobre arcos de la misma longitud de la segunda curva.

Si dos sólidos se mueven el uno con respecto al otro, y sus superficies se tocan constantemente por un punto, el punto de contacto cambia en general de lugar sobre cada una de estas superficies: el lugar geométrico de las posiciones que este punto de contacto ocupa sobre la superficie del primer sólido es una curva, y el lugar geométrico de las posiciones de este punto sobre el segundo sólido es otra curva; y si el movimiento de los sólidos se verifica de manera que la primera de estas curvas rueda sobre la segunda, conforme á la definicion que hemos dado de la rodadura de las curvas, se dice que el primer sólido rueda sobre el segundo.

Pueden tocarse dos sólidos por varios puntos á la vez. Si el número de puntos de contacto es finito, habrá rodadura de los sólidos el uno sobre el otro, para los puntos de contacto en los que se verifiquen las condiciones que acabamos de indicar, para el caso en que hay un sólo punto de contacto.

En el caso en que dos sólidos se tocan por un número infinito de puntos, formando su conjunto una línea de contacto, definiremos la rodadura del uno sobre el otro, del modo siguiente. Supongamos trazada una curva cualquiera sobre la superficie del primer sólido, de manera que encuentre á la línea de contacto de los dos sólidos, en las diversas posiciones que esta línea de contacto toma sucesivamente sobre el primer sólido: supongamos trazada sobre el segundo sólido una curva, lugar geométrico de los puntos donde esta superficie es tocada sucesivamente por la curva trazada sobre el primer sólido. Habrá rodadura del primer sólido sobre el segundo, si las dos curvas, de que acabamos de hablar, ruedan la una sobre la otra.

283. La definicion que acabamos de dar de la rodadura de una curva sobre otra curva y de un sólido sobre otro, en los diversos casos que pueden presentarse, es aplicable al caso en que se mueven una de las curvas ó uno de los sólidos. La rodadura es absoluta ó relativa, segun que una de las curvas ó uno de los sólidos está en reposo ó que las dos curvas ó los dos sólidos se mueven al mismo tiempo. La rodadura relativa puede reducirse á la rodadura absoluta, por el medio indicado en el número 281, para referir un movimiento relativo cualquiera al movimiento absoluto.

Cuando una curva móvil rueda sobre una curva inmóvil, ya estén estas solas, ya trazadas sobre las superficies de dos sólidos, que ruedan el uno sobre el otro, el punto de contacto de las dos curvas, considerado como perteneciente á la curva móvil, permanece en reposo durante un intervalo de tiempo infinitamente pequeño; el movimiento elemental de la curva móvil, ó del sólido á que pertenece, debe ser una rotacion alrededor de un eje instantáneo que pasa por este punto de contacto (209). Resulta de aquí, que si un sólido en movimiento toca constantemente á un sólido inmóvil por varios puntos, y hay rodadura del primer sólido sobre el segundo en cada uno de los puntos de contacto, el movimiento elemental del sólido móvil, en cada instante, es una rotacion alrededor de un eje instantáneo que pasa por estos diversos puntos de contacto con el sólido inmóvil; y por consecuencia, todos estos puntos están en línea recta. En el caso en que el sólido en movimiento toca el sólido inmóvil, en una infinidad de puntos, formando una línea, no puede haber rodadura del primer sólido sobre el segundo, á lo largo de la línea de contacto, si esta línea no es recta. Para que un sólido pueda rodar de una manera contínua, durante un tiempo cualquiera, sobre otro sólido inmóvil, á lo largo de una línea de contacto de sus superficies, es necesario que las superficies de estos sólidos sean superficies regladas.

Este resultado obtenido para el caso de la rodadura absoluta de un sólido móvil sobre un sólido inmóvil, que se tocan en varios puntos, es aplicable á una rodadura relativa, porque ésta puede reducirse á una rodadura absoluta de los mismos sólidos, que se tocan sucesivamente por los mismos puntos.

284. Se dice que hay resbalamiento de un sólido sobre otro, entre dos sólidos en movimiento que se tocan sucesivamente, siempre que en este movimiento no tienen lugar las condiciones que caracterizan la rodadura del uno sobre el otro. El resbalamiento es absoluto ó relativo, segun que uno sólo de los sólidos se mueve en el espacio, ó que se mueven los dos. Basta que estudiemos el resbalamiento absoluto, porque el resbalamiento relativo se reduce á él por el método expuesto en el párrafo 281.

Resbalamiento elemental de dos sólidos, que tienen un punto de contacto, que permanece el mismo de la superficie de uno de los sólidos y se mueve al mismo tiempo sobre la superficie del otro, es la cantidad de que los dos puntos de las dos superficies que coinciden al principio, se encuentran separados al fin del movimiento elemental; la velocidad del punto que pertenece al sólido móvil es la velocidad del resbalamiento. En general el punto de contacto se mueve á la vez sobre las superficies de los dos sólidos, y el resbalamiento elemental es siempre la cantidad de que los puntos se han separado en virtud de un movimiento elemental del sólido móvil, y la velocidad del resbalamiento es siempre la velocidad del punto que pertenece al sólido móvil; este resbalamiento elemental y la velocidad que le corresponde están siempre dirigidos en el plano tangente comun á los dos sólidos tirado por el punto de contacto.

El movimiento del sólido móvil puede descomponerse en cada instante en un movimiento de rotacion alrededor de un eje, que pasa por su punto de contacto en el sólido móvil, y un movimiento de traslacion; la velocidad de este movimiento de traslacion es precisamente la velocidad de resbalamiento.

Cuando los sólidos tienen más de un punto de contacto, podemos decir de cada uno de ellos lo que acabamos de decir del punto de contacto único, en el caso que suponíamos que habia uno sólo.

La teoría de la rodadura y resbalamiento de los sólidos es de la mayor importancia en la teoría de los engranajes, y por consecuencia en la Mecánica aplicada á las máquinas, como vamos á ver en los siguientes problemas que son los más interesantes de esta teoría.

285. 1.° Supongamos que dos círculos O y O′ (fig. 148), ó mejor los cilindros rectos á los cuales sirven de bases, están animados cada uno de un movimiento de rotacion alrededor de sus centros, ó de sus ejes, que se proyectan en dichos centros, en el sentido de las flechas f y f', de manera que las velocidades lineales de los puntos de las dos circunferencias sean iguales; vamos á determinar el movimiento del sistema O′ con respecto al sistema O.

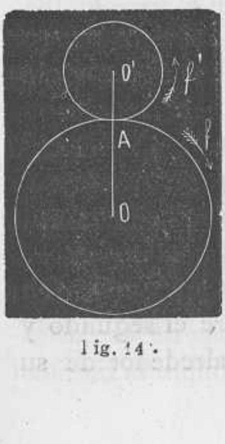


Fig. 148.

Sea v la velocidad lineal comun á las dos circunferencias; la velocidad angular de la rotacion alrededor del eje O será $\frac{v}{R}$, llamando R al radio OA del primer círculo; la velocidad angular del segundo círculo será tambien $\frac{v}{r}$, siendo r=O′A. Imprimamos al conjunto de los dos sistemas un movimiento igual y contrario al movimiento propio del sistema O; de este modo quedará en reposo el sistema O, y el sistema O′ tomará un movimiento compuesto que es el que buscamos.

Luego la cuestion queda reducida á componer la rotacion $\frac{v}{r}$ alrededor del eje que se proyecta en O′, movimiento propio del círculo O′A, con una rotacion igual y contraria á $\frac{v}{R}$, alrededor del eje O.

Estas dos rotaciones son paralelas y del mismo sentido y se componen en una sola (262) paralela, del mismo sentido, é igual á su suma $\frac{v}{r}+\frac{v}{R}$, y el eje de la rotacion resultante divide á la distancia OO′, de los ejes de las rotaciones componentes, en razon inversa de las velocidades angulares; es decir, que tendremos

$$\frac{\frac{v}{R}}{\frac{v}{r}}=\frac{r}{R}=\frac{O'A}{OA};$$

luego este eje pasa por el punto de contacto A de los dos círculos ó es la generatriz de contacto de los cilindros correspondientes. La circunferencia O′A rueda sin deslizarse sobre la circunferencia OA; el movimiento relativo del círculo O′ con respecto al círculo es una rodadura uniforme del primer círculo sobre el segundo y la velocidad angular del círculo móvil alrededor de su punto de contacto con la circunferencia fija es igual á

$$\frac{v}{R}+\frac{v}{r}=v\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right),$$

fórmula que hemos establecido de una manera general (222) para la rodadura de una curva móvil sobre una curva fija, llamando v á la velocidad lineal del punto de contacto de las dos curvas.

286. 2.° Dos cuerpos sujetos á girar alrededor de dos ejes fijos y paralelos O, O′, están en contacto por dos dientes de forma cualquiera, por ejemplo, cilíndrica; encontrar la relacion de las velocidades angulares de estos dos cuerpos alrededor de los ejes respectivos, y encontrar la magnitud del resbalamiento relativo.

Segun acabamos de ver, el movimiento del cuerpo O′ con respecto al cuerpo O es una rotacion alrededor de un centro instantáneo A (fig. 149), situado sobre la recta OO′. Ademas, sabemos que la normal comun á las dos curvas que están sujetas á permanecer constantemente en contacto, pasa por el centro instantáneo de la rotacion relativa; luego este centro es el punto en que la normal MN encuentra á la recta OO′ de los centros.

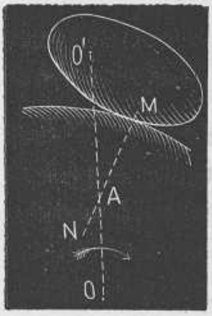


Fig. 149.

Determinado el punto A, sabemos por el problema anterior que las velocidades angulares están en razon inversa de los segmentos OA y O′A, y tendremos; que las velocidades angulares de dos curvas planas que se apoyan una sobre otra, están en razon inversa de los segmentos determinados por la normal comun sobre la recta que une los centros, alrededor de los cuales giran estas dos curvas.

Para que la relacion de las velocidades angulares sea constante, es necesario y suficiente que la normal comun encuentre á la recta de los centros en un punto fijo.

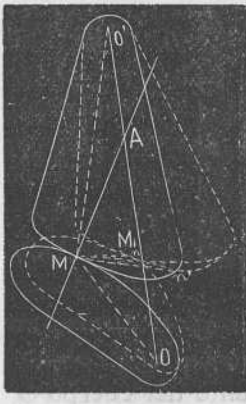


Fig. 150.

Para encontrar la magnitud del resbalamiento relativo, sea M el punto de contacto (fig. 150): al fin del tiempo dt el contacto se verifica en otro punto M_1, y los puntos primitivamente unidos en M, se encuentran trasladados á n y n'. La distancia nn' es, segun la definicion, el arco de resbalamiento; arco cuya direccion límite es la de la perpendicular á la normal comun. Consideremos el triángulo Mnn' cuyos lados tienen los valores

$$Mn = ds = \omega dt \times OM,$$
$$Mn' = ds' = \omega dt \times O'M,$$
$$nn' = dS = v_r dt;$$

estos lados son entre sí como los senos de los ángulos opuestos; pero siendo los tres lados del triángulo Mnn' perpendiculares respectivamente á las rectas MA, MO, MO', tendremos

$$\frac{dS}{\text{sen}\, O'MO} = \frac{ds}{\text{sen}\, O'MA} = \frac{ds'}{\text{sen}\, OMA'};$$

y se deduce de esta serie de razones iguales la relacion de la velocidad de resbalamiento á una ú otra de las velocidades angulares.

Para que $dS = 0$, ó que el resbalamiento elemental sea nulo, es necesario que $\text{sen}\, OMO' = 0$; es decir, que el punto de contacto de las dos curvas esté situado en la recta de los centros.

287. 3.° Determinar las dos curvas de manera que la trasmision del movimiento se efectúe sin resbalamiento y que la relacion de las velocidades angulares sea constante.

Para que el resbalamiento sea nulo, es necesario que el punto de contacto de las curvas buscadas esté en la recta de los centros de rotacion.

Si ademas, la relacion de las velocidades ha de ser constante, este punto ha de ser un punto M de la recta OO'. De aquí se sigue que las longitudes OM y O'M son constantes, y que por consiguiente, las curvas descritas por el punto M, con relacion á los centros respectivos O y O', son dos circunferencias (fig. 148). Los radios de estas circunferencias están determinados por su suma igual á OO', y porque su relacion es la inversa de las velocidades dadas.

Si suprimimos la restriccion, *sin resbalamiento*, el punto de contacto de las dos curvas puede ser cualquiera, y la relacion de las velocidades no dejará de ser constante, y conservará su valor, siempre que la normal comun pase por el punto de contacto M de las circunferencias; de suerte, que geométricamente, el problema admite una infinidad de soluciones: puede darse arbitrariamente una de las circunferencias, y la otra será la envolvente de las posiciones de ésta. Entre estas infinitas soluciones, la práctica ha adoptado las más convenientes.

288. 4.° Dada la curva O' (fig. 151), determinar la curva O, de manera, que el resbalamiento sea nulo, y encontrar en esta hipótesis la relacion variable de las velocidades simultáneas de los dientes.

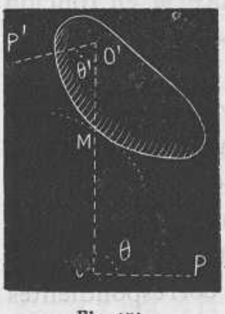


Fig. 151.

Hagamos,

$$OO'=a, OM=r, O'M=r',$$

y sean θ y θ' los ángulos de los radios vectores r y r' con estos dos ejes OP, O'P', fijos respectivamente en los centros O y O'. La curva (r, θ), debiendo ser tangente en el punto M á la curva (r', θ'), se tienen las siguientes relaciones,

$$(1)\quad \begin{cases} r+r'=a, \\ r\dfrac{d\theta}{dr}=r'\dfrac{d\theta'}{dr'}, \\ dr=-dr'; \end{cases}$$

de donde se deduce

$$(2)\quad rd\theta=-r'd\theta';$$

que es la ecuacion diferencial de la curva buscada en coordenadas polares.

El movimiento es una rodadura simple, porque

$$ds=\sqrt{dr^2+r^2d\theta^2}=\sqrt{dr'^2+r'd\theta^2}=ds',$$

y los arcos recorridos por el punto de contacto sobre las dos curvas son iguales.

Conocido r en funcion de r', la relacion de las velocidades es

$$(3)\quad m=\frac{r}{r'}.$$

Recíprocamente, dada la relacion variable de las velocidades, encontrar las dos curvas O y O′, siendo nulo el resbalamiento.

Las ecuaciones (1), (2) y (3) resuelven este problema.

Ordinariamente, el movimiento de uno de los árboles es uniforme, y se da la ley del movimiento que se quiere imprimir al otro; entónces se conoce m en funcion del tiempo, ó de θ, que varía proporcionalmente al tiempo.

Cuando se han encontrado dos curvas convenientes, se pueden, sin dejar de satisfacer la condicion, deformar estas dos curvas, del siguiente modo: se reducen los ángulos θ y θ', en una relacion constante cualquiera, relacion que debe ser la misma para las dos curvas conjugadas; despues, sobre cada uno de los radios correspondientes á los ángulos reducidos, se llevarán longitudes iguales á las de los radios vectores primitivos; las curvas así obtenidas satisfacen á todas las condiciones del problema.

289. 5.° Un cuerpo gira alrededor de un eje fijo D' (figura 152); encontrar su movimiento con respecto á otro cuerpo animado de un movimiento de traslacion *f*.

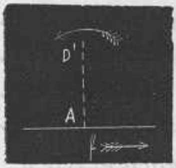


Fig. 152.

Se pasa de dos rotaciones á una rotacion y una traslacion, suponiendo que el centro D' se aleja hasta el infinito sobre la perpendicular á la traslacion.

Para resolver el problema directamente, se compone la rotacion D' con una traslacion contraria á la traslacion dada. Reemplacemos esta traslacion por un par de rotaciones, y tomemos una de las rotaciones del par igual y contraria á la rotacion D', lo que siempre es posible; el movimiento compuesto se encuentra representado por la otra rotacion del par, la cual es igual á la rotacion D' y está dirigida en el mismo sentido. La posicion A del eje de esta rotacion queda determinada por la relacion

$$\omega' \times D'A = v,$$

siendo v la velocidad de la traslacion.

Se obtiene el movimiento relativo, trasladando la rotacion O' paralelamente á sí misma, á un cierto punto de la perpendicular bajada del centro O' sobre la velocidad de traslacion.

290. 6.° Dos cuerpos giran uniformemente alrededor de dos ejes no situados en el mismo plano; encontrar el movimiento relativo y el eje central de este movimiento.

Sean (fig. 153), P*p*, Q*q* los ejes de las dos rotaciones dadas; tracemos la más corta distancia PQ de estas rectas y sea *h* la longitud de esta mínima distancia. Para obtener el movimiento relativo del segundo cuerpo, hay que componer su rotacion Q*q* con una rotacion Pp_1 igual y contraria á la rotacion del otro sólido. Introduzcamos dos rotaciones contrarias é iguales á Pp en valor absoluto, lo cual no cambiará en nada el movimiento buscado. Las rotaciones q y p_2 se componen en una sola r, y se tiene ademas el par p_1, p_3, que equivale á la traslacion QA perpendicular al plano PQp_2.

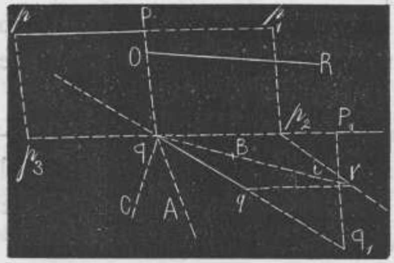


Fig. 153.

El movimiento relativo se compone de la rotacion Qr y de la traslacion QA, cuya velocidad está representada por el producto ph.

Para determinar el eje central, descompongamos la traslacion QA en dos, una QB dirigida segun el eje de la rotacion resultante, y otra QC perpendicular á este eje; se tiene

$$QB = ph \operatorname{sen} p_2 Qr,$$
$$QC = ph \cos p_2 Qr;$$

reemplacemos QC por un par, del que una de las rotaciones sea igual y contraria á r; la otra se efectuará alrededor de un eje contenido en el plano PQr. Sea OR este nuevo eje, y z el brazo de palanca del par, es decir, la distancia QO, se tendrá

$$rz = ph \cos p_2 Qr;$$

la recta así determinada es el eje central.

De la anterior ecuacion se deduce

$$z = \frac{ph \cos p_2 Qr}{r}, \quad h - z = \frac{qh \cos qQr}{r};$$

teniendo presente, que evidentemente

$$r = p \cos p_2 Qr, + q \cos qQr;$$

luego $\frac{z}{h-z}=\frac{p\cos p_2Qr}{q\cos qQr}=\frac{\cot p_2Qr}{\cot qQr}$,

porque $\frac{p}{q}=\frac{\operatorname{sen} qQr}{\operatorname{sen} p_2Qr}$.

Para construir z, inscribamos en la proyeccion horizontal del ángulo de los ejes dados, y perpendicularmente al eje de la rotacion resultante, una longitud $P_1Q_1=PQ=h$; esta línea estará dividida en el punto i en la relacion pedida; porque $Qi=Q_1i\cot qQr=iP_1\cot p_2Qr$; de donde

$$\frac{Q_1i}{iP_1}=\frac{z}{h-z}.$$

Si los ejes son rectangulares, los ángulos p_2Qr y qQr son complementarios, luego

$$\frac{p}{q}=\cot p_2Qr=\frac{1}{\cot qQr},\quad \frac{z}{h-z}=\frac{p^2}{p^2}.$$

Y el eje central divide la más corta distancia de los dos ejes, supuestos rectangulares, en razon inversa de los cuadrados de las velocidades p^2 y q^2; ó las velocidades angulares de los dos árboles están en razon inversa de las raíces cuadradas de las distancias de los ejes al eje central.

291. 7.° Determinar las dos superficies regladas que describe el eje instantáneo en el interior de cada uno de los cuerpos.

Consideremos sólo el caso en que la relacion de las velocidades $\frac{p}{q}$ es constante; el eje instantáneo está fijo en el espacio, pero no lo está en los dos cuerpos; y sus posiciones sucesivas trazan respectivamente en cada uno de ellos dos hiperbolóides de revolucion, que durante el movimiento se tocan constantemente á lo largo de la generatriz comun.

Puede verificarse, *à posteriori*, fácilmente, que estas dos superficies satisfacen á la condicion del contacto de los dos hiperbolóides de revolucion. En efecto, los radios R y R_1 de los círculos de garganta de estos hiperbolóides son respectivamente iguales á z y $h-z$; las inclinaciones i é i_1 de la generatriz sobre cada eje, son los ángulos que hemos designado por qQr y p_2Qr; luego la ecuacion

$$z \cot qQr = (h-z) \cot p_2Qr$$

se reduce á la conocida relacion

$$R \cot i = R_1 \cot i_1.$$

LECCION XXIII.

Aceleracion en el movimiento de un punto. — Aceleracion en el movimiento rectilíneo uniformemente variado. — Aceleracion en el movimiento variado general; ley de la variacion de la velocidad en este movimiento. — Aceleracion en el movimiento curvilíneo; aceleracion tangencial, aceleracion centrípeta. — Curva de las aceleraciones. — Comparacion de las curvas de los espacios, de las velocidades y de las aceleraciones — Aceleracion en el movimiento proyectado sobre un plano fijo y sobre una recta fija. — Aceleracion en el movimiento de un punto referido á un sistema de coordenadas rectilíneas. — Determinacion del radio de curvatura de ciertas curvas.

Aceleracion en el movimiento de un punto.

292. Las variaciones del arco de curva recorrido por un punto material en su trayectoría, durante los diferentes intervalos de tiempo en que se verifica el movimiento, se determinan por medio de la velocidad correspondiente á cada uno de estos intervalos. Pero la velocidad varía tambien en todo movimiento que no es uniforme, y sus variaciones se determinan tambien por medio de la aceleracion, que juega el mismo papel respecto de la velocidad, que el que la velocidad desempeña respecto del arco de trayectoría. En esta leccion y la siguiente vamos á dar á conocer la aceleracion en las diferentes clases de movimiento que puede tener un punto material, y la manera de determinarla en todos ellos.

Aceleracion en el movimiento rectilíneo uniformemente variado.

293. La ecuacion de este movimiento, segun sabemos, es

$$s = a + bt + ct^2;$$

la velocidad en un instante cualquiera, será

$$\frac{ds}{dt}=v=b+2ct;$$

esta velocidad crece proporcionalmente al tiempo, y $2c$ es el incremento que experimenta en la unidad de tiempo.

Se llama *aceleracion*, en el movimiento que nos ocupa, el incremento de la velocidad en la unidad de tiempo; de modo, que $2c$ es la aceleracion. La aceleracion sirve de medida al grado de lentitud ó de rapidez con que se verifica el incremento de la velocidad. La aceleracion es positiva ó negativa, segun el signo de c; y si diferenciamos la expresion anterior, tendrémos,

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=2c;$$

la cantidad dv se llama *velocidad adquirida elemental;* y esta expresion nos dice, que en el movimiento rectilíneo uniformemente variado, la aceleracion se obtiene dividiendo la velocidad adquirida elemental dv, por dt.

Aceleracion en el movimiento rectilíneo variado general; ley de la variacion de la velocidad en este movimiento.

294. Si dividimos el tiempo total que dura un movimiento rectilíneo variado general, en un número de partes tan pequeñas como se quiera, y suponemos que el movimiento que tiene lugar durante cada una de ellas es uniformemente variado, podremos considerar el movimiento total como la sucesion de una infinidad de movimientos rectilíneos uniformemente variados, todos de la misma direccion y que cada uno de ellos tiene lugar durante un intervalo de tiempo infinitamente pequeño.

Esto supuesto, se llama *aceleracion* en un instante cualquiera, en un movimiento rectilíneo variado, la aceleracion del movimiento rectilíneo uniformemente variado, que forma uno de los elementos del movimiento rectilíneo variado, en el instante que se considera.

Sea v la velocidad al fin del tiempo t, $v+dv$ la velocidad al cabo del tiempo $t+dt$, dv es la velocidad adquirida elemental, correspondiente al tiempo dt; considerando el movimiento durante este intervalo de tiempo como uniformemente variado, obtendremos la aceleracion al cabo del tiempo t, dividiendo dv por dt, es decir, que si la llamamos j, será

$$j=\frac{dv}{dt};$$

y tendremos las tres ecuaciones siguientes:

$$s=f(t), \quad v=\frac{ds}{dt}=f'(t), \quad j=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}=f''(t).$$

295. La ley de la variacion de la velocidad del móvil en el movimiento rectilíneo variado, puede representarse por la curva de las velocidades, que es el lugar geométrico de la ecuacion $v=f'(t)$. Si el movimiento es uniformemente variado, la ecuacion $v=b+2ct$, representará una línea recta; y la aceleracion correspondiente al tiempo t, al que corresponde el C de la recta AB (fig. 154), se obtendrá tirando por este punto una recta CE paralela á OT é igual á la unidad de tiempo, y por el extremo E de ésta, una paralela ED á la OV hasta que encuentre á la AB, y DE es la aceleracion; ó lo que es lo mismo, el incremento de la velocidad en la unidad de tiempo.

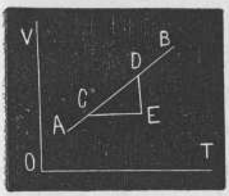


Fig. 154.

En el caso del movimiento rectilíneo variado, la consideracion en que nos hemos apoyado para definir la aceleracion, que consiste en considerarlo formado por la sucesion de una infinidad de movimientos uniformemente variados, cada uno de los cuales tiene lugar en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño, equivale á considerar la curva de las velocidades como un polígono infinitesimal.

Sea C (fig. 155), el punto de esta curva que corresponde al fin del tiempo t; el elemento de la curva, ó sea el lado del polígono infinitesimal, tendrá la direccion de la tangente CD y la aceleracion correspondiente es la EF, es decir, la aceleracion del movimiento uniformemente variado, que corresponde al fin del tiempo t, para el movimiento elemental correspondiente.

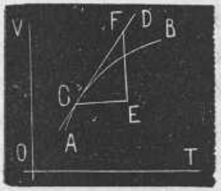


Fig. 155.

Aceleracion en el movimiento curvilíneo; aceleraracion tangencial, aceleracion cetrípeta.

296. Llamaremos velocidad adquirida elemental en el movimiento curvilíneo variado, á la velocidad que el punto móvil adquiere durante el tiempo infinitamente pequeño dt, es decir, la velocidad que, componiéndose con la velocidad v al cabo del tiempo t, da la velocidad $v+dv$, al fin del tiempo $t+dt$.

En el movimiento curvilíneo, llamaremos *aceleracion* del móvil al fin del tiempo t, al incremento de la velocidad durante la unidad de tiempo, si en cada una de las porciones infinitamente pequeñas é iguales, en las cuales se puede concebir dividida esta unidad de tiempo, adquiriera un elemento de velocidad de igual magnitud y direccion, que el elemento de velocidad, que realmente adquiere durante el primer elemento de tiempo, que sigue al tiempo t. Esta definicion comprende, como caso particular, la dè la aceleracion en el movimiento rectilíneo.

Resulta de esta definicion, que la aceleracion en un instante cualquiera, en el caso general, es una velocidad finita, cuya direccion y sentido son los mismos que la direccion y el sentido de la velocidad adquirida elemental, relativa á este instante; y que ademas, para obtener la magnitud de esta aceleracion basta dividir la velocidad adquirida elemental por el tiempo infinitamente pequeño dt que le corresponde. En el movimiento rectilíneo la velocidad del móvil tiene siempre la misma direccion del movimiento, la velocidad adquirida elemental, y por consecuencia, la aceleracion, tendrán siempre la misma direccion de éste. No sucede lo mismo en el movimiento curvilíneo, en la cual no es conocida, *à priori*, la direccion de la aceleracion; así que es preciso, en cada caso particular, determinar la magnitud y direccion de la aceleracion, lo cual se consigue determinando dos componentes de esta aceleracion de direcciones conocidas como vamos á ver.

297. Sea AB (fig. 156), la trayectoría del punto móvil, que se encuentra en M, al fin del tiempo t, y en M′ al fin del tiempo $t+dt$. Por un punto cualquiera C tiremos una recta CD igual y paralela á la velocidad v del móvil en M, y una recta CE igual y paralela á la velocidad $v+dv$, que tiene en M′. La recta DE es evidentemente igual y paralela á la velocidad adquirida elemental, correspondiente al elemento de tiempo que el móvil emplea en ir de M á M′; por consiguiente, la aceleracion del móvil al fin del tiempo t, está dirigida segun una paralela á DE, tirada por el punto M, y su magnitud será $\frac{DE}{dt}$.

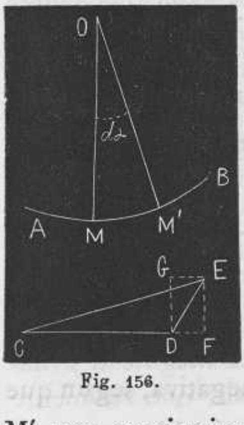


Fig. 156.

Si tiramos EF perpendicular á CD y construimos el rectángulo DEFG, podremos considerar la velocidad infinita nente pequeña DE como resultante de la composicion de las velocidades DF y DG: y tambien podemos considerar la velocidad adquirida elemental del móvil en M, como resultante de la composicion de otras dos velocidades DF y DG dirigidas una segunda la tangente á la trayectoría en M, y otra segun la perpendicular á esta tangente tirada en el plano osculador de la curva, es decir, segun el radio de curvatura MO. La aceleracion total $\frac{DE}{dt}$ tendrá tambien por componentes á $\frac{DF}{dt}$, y á $\frac{DG}{dt}$, llamadas la primera aceleracion tangencial y la segunda aceleracion centrípeta.

Para obtener la aceleracion tangencial tenemos, llamando $d\alpha$ al ángulo que forman las direcciones de las velocidades v y $v+dv$, ó lo que es lo mismo, al ángulo de las tangentes á las trayectorías, tiradas por los puntos M, M';

$$DE=(v+dv)\cos d\alpha-v$$

poniendo por cos $d\alpha$ su desarrollo en funcion del arco, y despreciando los términos que tienen potencias de este arco superiores á la segunda, se tiene $\cos d\alpha=1-\frac{d\alpha^2}{2}$,

$$\frac{DF}{dt}=\frac{(v+dv)\left(1-\frac{d\alpha^2}{2}\right)-v}{dt}=\frac{dv}{dt}-\frac{1}{2}v\frac{d\alpha}{dt}d\alpha,$$

que en el límite se reduce á

$$\frac{DF}{dt}=\frac{dv}{dt}.$$

La velocidad $v=\frac{ds}{dt}$ es positiva ó negativa, segun que se dirige en el sentido de los arcos s positivos ó en el contrario; la aceleracion tangencial es positiva ó negativa, segun que está dirigida en el sentido de las velocidades positivas ó negativas.

La aceleracion centrípeta dirigida de la curva hácia el centro de curvatura O, se obtiene como sigue:

$$\frac{\mathrm{DG}}{dt}=\frac{(v+dv)\operatorname{sen} d\alpha}{dt}=\frac{vd\alpha+dvd\alpha}{dt}=v\,\frac{d\alpha}{dt},$$

en atencion á que $\frac{dv}{dt}d\alpha$ tiende hácia cero en el límite.

Pero $d\alpha$ es el ángulo de las normales que unen M, M′ al centro de curvatura O, de suerte, que llamando ρ al radio de curvatura, tenemos

$$\rho d\alpha=ds,\quad d\alpha=\frac{ds}{\rho},\quad \frac{d\alpha}{dt}=\frac{ds}{dt}\times\frac{1}{\rho}=v\times\frac{1}{\rho};$$

por lo tanto, la aceleracion centrípeta es

$$\frac{\mathrm{DG}}{dt}=\frac{v^2}{\rho}.$$

Construyendo un rectángulo sobre la aceleracion tangencial $\frac{dv}{dt}$, y la aceleracion centrípeta $\frac{v^2}{\rho}$, la diagonal de este rectángulo será la aceleracion total j del móvil en M.

Si el movimiento es rectilíneo, $\rho=\infty$, la aceleracion centrípeta es nula y la aceleracion total se reduce á la componente tangencial $\frac{dv}{dt}$. En el caso del movimiento curvilíneo y uniforme, $dv=0$, $\frac{dv}{dt}=0$, y la aceleracion total se reduce á su componente normal $\frac{v^2}{\rho}$. En fin, en el caso del movimiento rectilíneo y uniforme las dos componentes de la aceleracion total son nulas, luego la aceleracion total es nula tambien.

Curva de las aceleraciones.—Comparacion de las curvas de los espacios, de las velocidades y de las aceleraciones.

298. La ecuacion

$$j=f''(t),$$

considerando á t y j, como la abscisa y la ordenada de un punto de un plano, representa una curva, que se puede construir por los procedimientos de la Geometría analítica, y que se llama la *curva de las aceleraciones*.

Si el movimiento es rectilíneo $j = \frac{dv}{dt}$, representa la aceleracion total; y si es curvilíneo la aceleracion tangencial $\frac{dv}{dt}$; la curva se llamará en el primer caso, curva de las aceleraciones y en el segundo curva de las aceleraciones tangenciales.

199. Construyamos en un mismo dibujo las curvas de los espacios, velocidades y aceleraciones; representadas por las tres ecuaciones

$$s = f(t), \quad v = f'(t), \quad j = f''(t).$$

Sean estas curvas ABCDE, A'B'C'D'E', A''B''C''D''E'', (figura 157). De la curva de los espacios ABCDE deduciremos la curva de las velocidades A'B'C'D'E', por la consideracion de las tangentes trazadas á la primera curva; y por el mismo procedimiento deduciremos la curva de las aceleraciones de la curva de las velocidades.

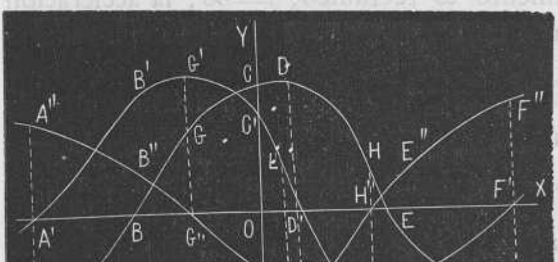


Fig. 157.

La curva de las velocidades corta al eje de abscisas en los puntos A', D', F', que son las proyecciones de los puntos A, D, F, en los que la ordenada de la curva de los espacios es un máximo ó un mínimo. Estos puntos determinan los tiempos en que el móvil se detiene sobre su trayectoría para volver sobre sus pasos. Las ordenadas de la curva de las velocidades son positivas desde A′ hasta D′, porque el móvil entre estas épocas tiene un movimiento directo; y son negativas entre D′ y F′, porque el movimiento es retrógado.

La curva de las aceleraciones corta al eje de abscisas en los puntos G″ y H″, proyecciones de los puntos G′ y H′ en que la curva de las velocidades tiene una ordenada máxima ó mínima y de los puntos G y H en que la curva de los espacios presenta una inflexion.

Las ordenadas de la curva de las aceleraciones son negativas entre G″ y H″ porque entre las dos épocas determinadas por estos puntos, la velocidad del móvil disminuye; y son positivas en todos los demas puntos porque la velocidad del móvil aumenta. En el punto L″ pasan por máximo ó mínino porque en L′ la curva de las velocidades tiene una inflexion, etc.

300. Si entre dos de las tres ecuaciones

$$s=f(t),\qquad v=f'(t),\qquad j=f''(t),$$

eliminamos t, obtendremos tres ecuaciones

$$\varphi(s,v)=0,\qquad \psi(s,j)=0,\qquad \pi(v,j)=0;$$

cada una de las cuales podemos considerar que representa una línea: la primera, la línea de las velocidades en funcion de los espacios; la segunda la línea de las aceleraciones en funcion de los espacios, y la tercera la línea de las aceleraciones en funcion de las velocidades. Dada una de estas seis ecuaciones, las cinco restantes se encuentran definidas, salvo las constantes que provengan de las integraciones. Si se da por ejemplo la relacion

$$\pi(v,j)=0;$$

esta ecuacion, reemplazando v por $\frac{ds}{dt}$ y j por $\frac{ds^2}{dt^2}$, es una ecuacion diferencial de segundo órden, cuya integral general dará s en funcion de t y de dos constantes arbitrarias; esta integral reemplazará á la ecuacion $s=f(t)$; diferenciándola deduciremos la segunda y tercera; y eliminando t entre ella y éstas, obtendremos la cuarta y la quinta.

Aceleracion en el movimiento proyectado sobre un plano fijo y sobre una recta fija.

301. Sabemos (200), que cuando se proyecta el movimiento de un punto sobre un plano fijo, la velocidad de la proyeccion es en cada instante la proyeccion de la velocidad del punto en el espacio, y vamos á demostrar que una cosa análoga sucede con las aceleraciones. Supongamos que para el movimiento que se proyecta hemos construido el triángulo CDE (fig. 106), en el cual los tres lados CD, CE, DE son respectivamente iguales y paralelos á la velocidad v al cabo del tiempo t, á la velocidad $v+dv$ al fin del tiempo $t+dt$, y á la velocidad adquirida elemental, correspondiente al elemento de tiempo dt. Si proyectamos este triángulo CDE sobre el plano fijo, la proyeccion será otro triángulo cde; en este triángulo el lado cd, proyeccion de CD, será igual y paralelo á la velocidad de la proyeccion del móvil sobre el plano fijo al fin del tiempo t; el lado ce, proyeccion de CE, será igual y paralelo á la velocidad de la proyeccion del móvil al fin del tiempo $t+dt$; luego el tercer lado de, proyeccion de DE, hará el mismo papel, respecto al movimiento proyectado, que DE en el movimiento en el espacio, es decir, que de será igual y paralela á la velocidad adquirida elemental de la proyeccion del móvil correspondiente al tiempo infinitamente pequeño dt. De aquí se deduce inmediatamente que la aceleracion en el

movimiento proyectado, es la proyeccion de la aceleracion en el movimiento del espacio.

Conviene observar, que esta conclusion se refiere sólo á la aceleracion total en el movimiento proyectado y á la proyeccion de este movimiento. Porque si descomponemos la aceleracion total en sus componentes, la aceleracion tangencial y la aceleracion centrípeta, el rectángulo que resulta, dará por proyeccion, en general, un paralelógramo; la diagonal de este paralelógramo representará la aceleracion total del movimiento proyectado; pero sus lados, uno de ellos dirigido en sentido de la tangente á la trayectoría del movimiento proyectado, representarán dos componentes de esta aceleracion; pero estas componentes no son rectangulares, y son diferentes de la aceleracion tangencial y la aceleracion centrípeta, en el movimiento proyectado. No será, pues, cierto en general, que la aceleracion tangencial y la aceleracion centrípeta en el movimiento proyectado, son respectivamente las proyecciones de la aceleracion tangencial y de la aceleracion centrípeta en el movimiento del espacio.

302. Cuando se proyecta el movimiento de un punto sobre una recta fija (201), la velocidad de la proyeccion es en cada instante la proyeccion de la velocidad del punto en el espacio. Y tambien la aceleracion en el movimiento proyectado, es la proyeccion de la aceleracion en el movimiento que se proyecta. Para probarlo, supongamos construido el triángulo CDE (fig. 156), de que ántes nos hemos servido, y supongamos que se proyecta este triángulo sobre la recta fija, sobre la que se proyecta el movimiento del punto. La proyeccion de CE será igual á la suma de las proyecciones de CD y de DE, y como las proyecciones de estos lados son respectivamente iguales á las velocidades del punto proyectado al fin de los tiempos t y $t+dt$, resulta que la proyeccion de

DE será igual á la diferencia de estas dos velocidades, es decir, que será la velocidad adquirida elemental del punto proyectado, correspondiente al tiempo infinitamente pequeño dt. Luego la velocidad adquirida elemental en el movimiento proyectado, es la proyeccion de la velocidad adquirida elemental en el movimiento del espacio; y por consiguiente, la aceleracion en el movimiento proyectado, es la proyeccion de la aceleracion total en el movimiento que se proyecta.

Aceleracion en el movimiento de un punto referido á un sistema de coordenadas rectilíneas.

303. Supongamos un punto móvil referido á un sistema de coordenadas rectilíneas, y consideremos á la vez el movimiento de este punto y los movimientos de sus proyecciones sobre los ejes. Sabemos (242), que la velocidad del móvil en un instante cualquiera, es la resultante de las velocidades de sus proyecciones sobre los ejes, y vamos á ver que lo mismo sucede con las aceleraciones.

En efecto, segun acabamos de demostrar (302), la aceleracion del movimiento proyectado sobre cualquiera de los ejes, es la proyeccion de la aceleracion total del movimiento en el espacio; luego, si por la posicion que ocupa el móvil en un instante cualquiera, tiramos rectas iguales y paralelas á las aceleraciones de las proyecciones de este punto sobre los ejes, y construimos sobre ellas un paralelógramo ó un paralelepípedo, segun haya dos ó tres ejes, la diagonal de este paralelógramo ó de este paralelepípedo, será precisamente la aceleracion total del punto móvil en el espacio. Así, puede decirse que esta aceleracion total del móvil, es la resultante de las aceleraciones de sus proyecciones sobre los ejes coordenados.

Fácil será encontrar la aceleracion total en el movimiento de un punto referido á dos ó tres ejes coordenados, cuando se conocen las ecuaciones del movimiento. Sean en el primer caso las ecuaciones

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t);$$

tendremos

$$v_1=\frac{dx}{dt}=f'(t),\quad j_1=\frac{dv_1}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t);$$

$$v_2=\frac{dy}{dt}=\varphi'(t),\quad j_2=\frac{dv_2}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}=\varphi''(t);$$

llamando v_1, v_2 y j_1, j_2 á las velocidades y aceleraciones respectivas de las proyecciones del punto sobre los ejes X é Y; la aceleracion total será la diagonal del paralelógramo, cuyos lados sean iguales y paralelos á $f''(t)$ y $\varphi''(t)$.

En el caso de tres ejes, de las ecuaciones

$$x=f(t),\quad y=\varphi(t),\quad z=\psi(t),$$

sale

$$j_1=\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t),\quad j_2=\frac{d^2y}{dt^2}=\varphi''(t),\quad j_3=\frac{d^2z}{dt^2}=\psi''(t);$$

y la aceleracion total será la diagonal del paralelepípedo construido sobre tres rectas iguales y paralelas á j_1, j_2 y j_3.

Determinacion del radio de curvatura de ciertas curvas.

304. De la manera de obtener la aceleracion total se deduce un medio para determinar la magnitud y direccion del radio de curvatura de una curva dada en el espacio, en uno cualquiera de sus puntos.

Sea la curva AB (fig. 158), queremos hallar su radio de curvatura en el punto M; supongamos que un móvil recorre esta curva con una velocidad constante v. La aceleracion total se reduce entónces á la aceleracion centrípeta $\frac{v^2}{\rho}$. Conociendo la ley del movimiento del móvil sobre la curva, podremos deducir las leyes de los movimientos de sus proyecciones M_1, M_2, M_3 sobre los ejes coordenados, y construir las curvas de los espacios, de las de las velocidades y las de las aceleraciones en los movimientos de estas proyecciones; luégo conoceremos las tres aceleraciones j_x, j_y, j_z, que deben componerse para dar la aceleracion total $\frac{v^2}{\rho}$. La diagonal del paralelepípedo construido sobre estas tres aceleraciones será la direccion buscada de la normal principal; la longitud de esta diagonal será igual á $\frac{v^2}{\rho}$, y dividiendo v^2 por dicha diagonal, obtendremos el radio de curvatura ρ.

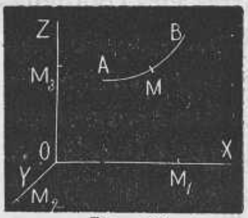


Fig. 158.

305. Sea por ejemplo la *hélice* AB (fig. 159), trazada en la superficie de un cilindro BCAL, que tiene por eje, el eje de las z, y cuya directriz es un círculo AC, situado en el plano YX perpendicular á OZ. La hélice forma un ángulo constante con las generatrices del cilindro; por consiguiente, el movimiento uniforme de un móvil que recorre esta hélice, tiene por proyeccion sobre el eje OZ un movimiento uniforme, luégo $j_z = 0$. Las aceleraciones j_x, j_y se componen en una sola, que será la aceleracion del movimiento circular del punto M', proyeccion del punto M considerado sobre el plano XY. Este movimiento circular es tambien uniforme, y si llamamos v' á la velocidad constante del punto M', sobre el arco de círculo CA, la aceleracion j, de este movimiento estará dirigida de M' hácia O, y será igual á $\frac{v'^2}{R}$, siendo R el radio del círculo;

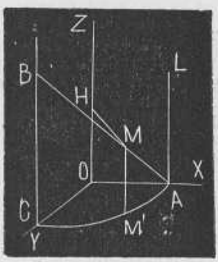


Fig. 159.

tenemos que componer en el punto M una aceleracion $\frac{v'^2}{R}$, dirigida segun MH paralela á M'O, con la aceleracion j_z que es cero; luego la resultante es la misma aceleracion $\frac{v'^2}{R}$, dirigida segun la recta MH.

La nornal principal á la hélice en el punto M es esta perpendicular MH. Su longitud se deduce de la ecuacion $\frac{v^2}{\rho}=\frac{v'^2}{R}$, de la que se obtiene

$$\rho=R\left(\frac{v}{v'}\right)^2.$$

Pero $\frac{v}{v'}$ es la relacion constante entre la longitud AM de un arco de hélice y la longitud AM′ de su proyeccion. Sea α el ángulo constante de la hélice con las generatrices del cilindro; en el plano XY, tendremos

$$\frac{v}{v'}=\frac{1}{\cos\alpha}.$$

Pero

$$tg\alpha=\frac{h}{2\pi R},\quad \left(\frac{v}{v'}\right)^2=1+\left(\frac{h}{2\pi R}\right)^2,$$

siendo h el paso de la hélice; luego

$$\rho=R\left[1+\left(\frac{h}{R\pi 2}\right)^2\right].$$

LECCION XXIII.

Determinacion de la aceleracion de un punto por el camino que recorre en el espacio.—Aceleracion en el movimiento compuesto.—Caso en que uno de los movimientos componentes es de traslacion.—Caso en que el movimiento de arrastre es un movimiento cualquiera.—Teorema de Coriolis.—Componentes de la aceleracion complementaria.—Aplicaciones del teorema de Coriolis.

Determinacion de la aceleracion de un punto por el camino que recorre en el espacio.

306. El procedimiento general para determinar la aceleracion consiste en determinar la velocidad adquirida elemental, correspondiente al elemento de tiempo que se considera, y dividiéndola por dt, se obtiene la aceleracion buscada. Hay casos, sin embargo, en que puede determinarse ésta sin recurrir al procedimiento que acabamos de indicar, y son todos aquellos en que se conoce el camino, que recorre el punto móvil sobre su trayectoría en el espacio.

Sea AB (fig. 160), la trayectoría de un punto móvil, M la posicion de este al fin del tiempo t, MZ la direccion de la aceleracion en este instante; tiremos la tangente MX á la trayectoría, y una recta MY no situada en el plano ZMX, y tomemos por ejes coordenados las rectas MZ, MX, MY. Designemos por θ el tiempo contado á partir del instante en que el móvil se encuentra en M, y supongamos que este tiempo sea

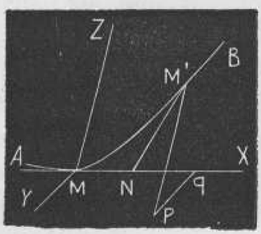


Fig. 160.

bastante pequeño para que las coordenadas x, y, z del móvil, que son funciones del tiempo, puedan desarrollarse en series, segun las potencias enteras crecientes y positivas de θ. Llamemos v á la velocidad del móvil en el punto M, y j á la aceleracion total, tendremos

$$\begin{aligned} x &= v\theta + a\theta^3 + b\theta^4 + \ldots \\ y &= \quad\; + c\theta^3 + d\theta^4 + \ldots \\ z &= \tfrac{1}{2}j\theta^2 + e\theta^3 + f\theta^4 + \ldots \end{aligned}$$

Porque por la eleccion de los ejes tenemos para $\theta = 0$,

$$x=0,\ y=0,\ z=0,\ \frac{dx}{d\theta}=0,\ \frac{dy}{d\theta}=0,\ \frac{dz}{d\theta}=0,$$

$$\frac{d^2x}{d\theta^2}=0,\ \frac{d^2y}{d\theta^2}=0,\ \frac{d^2z}{d\theta^2}=j.$$

Sea M′ la posicion del móvil al fin del tiempo θ, determinemos las coordenadas del punto M′, y tomemos $MN = v\theta$. Podemos considerar á NM′ como la diagonal del paralelepípedo que tiene por aristas NQ, QP y PM′: llevemos sobre las direcciones de estas tres aristas y de la diagonal longitudes iguales respectivamente á $\frac{2NQ}{\theta^2}$, $\frac{2QP}{\theta^2}$, $\frac{2PM}{\theta^2}$ y $\frac{2NM'}{\theta^2}$; las cuales formarán un paralelepípedo semejante al primero, y del que la última será la diagonal. Vamos á ver á qué se reduce la diagonal de este paralelepípedo cuando θ decrece indefinidamente hasta cero.

Tenemos, que

$$NQ = x - v\theta = a\theta^3 + b\theta^4 + \ldots \quad \frac{2NQ}{\theta^2} = 2a\theta + 2b\theta^2 + \ldots$$

$$QP = y = c\theta^3 + d\theta^4 + \ldots \quad \frac{2QP}{\theta^2} = 2c\theta + 2d\theta^2 + \ldots$$

$$PM' = z = \tfrac{1}{2}j\theta^2 + e\theta^3 + f\theta^4 + \ldots \quad \frac{2PM'}{\theta^2} = j + 2e\theta + 2f\theta^2 + \ldots$$

Vemos en estos desarrollos, que $\frac{2NQ}{\theta^2}$ y $\frac{2QP}{\theta^2}$ tienden indefinidamente hácia cero al mismo tiempo que θ, y entónces $\frac{2PM'}{\theta^2}$ tiende hácia j en el límite; de manera, que á medida que θ disminuye, la diagonal $\frac{2NM'}{\theta^2}$ del segundo paralelepípedo, que hemos considerado, tiende indefinidamente á confundirse con la arista $\frac{2PM'}{\theta^2}$ de este paralelepípedo, y en el límite tiene la misma direccion y magnitud que esta arista; y como esta es igual j en el límite, $\frac{2NM'}{\theta^2}$ se confunde con la aceleracion del móvil en el punto M. De donde se deduce, que si M y M' son las posiciones que ocupa el móvil al fin de los tiempos t y $t+dt$, y MN es el camino que este móvil recorreria uniformemente sobre la tangente MX, durante el tiempo dt, en virtud de la velocidad v, que posee al fin del tiempo t, la aceleracion total de su movimiento está dirigida segun la NM' y tiene por valor $\frac{2NM'}{dt^2}$.

Aceleracion en el movimiento compuesto.

307. El movimiento de un punto en el espacio puede considerarse como resultante de la composicion de dos ó más movimientos; y hemos visto cómo se deduce la velocidad del punto en un instante cualquiera, de las velocidades de que está animado en cada uno de los movimientos componentes. Vamos á ver ahora cómo se puede tambien obtener la aceleracion en el movimiento resultante, conocida que sea la naturaleza de los movimientos componentes.

Dos casos principales pueden presentarse; el primero cuando siendo cualquiera el movimiento relativo, el de arrastre, es decir, el de los ejes móviles, es un movimiento de traslacion; y el segundo aquél en que el movimiento de arrastre es un movimiento cualquiera.

Caso en que el movimiento de arrastre es de traslacion.

308. Supongamos que la trayectoría relativa AB (fig. 161), ocupa sucesivamente las posiciones A′B′, A″B″, A‴B‴, en virtud del movimiento de traslacion de los ejes móviles, y que sus puntos van animados de velocidades iguales y paralelas. Al fin de los tiempos t y $t+dt$, el móvil ocupa en su trayectoría las posiciones M y N, y ella se encuentra al fin de los mismos en AB y A′B′; MN′ será el camino recorrido por el móvil durante el tiempo dt.

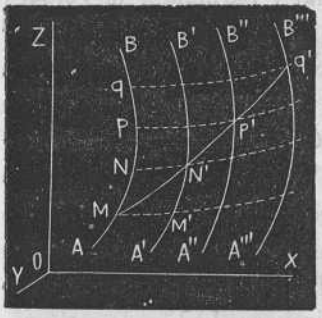


Fig. 161.

Sea v la velocidad absoluta del móvil cuando está en M y $v+dv$, cuando está en N′; v' la velocidad comun á los diferentes puntos de la trayectoría relativa al fin del tiempo t, $v'+dv'$ esta velocidad al fin del tiempo $t+dt$; v'' y $v''+dv''$ las velocidades del móvil en su trayectoría relativa al fin de los tiempos t y $t+dt$. Al fin del tiempo t, la velocidad absoluta v del móvil, que está entónces en M, es la resultante de la velocidad del movimiento de los ejes v', y la velocidad relativa v''. Al fin del tiempo $t+dt$ la velocidad absoluta $v+dv$, es la resultante de las velocidades $v'+dv'$, y $v''+dv''$ del punto en los movimientos componentes.

Esto supuesto, por un punto P (fig. 162), tiremos una recta PQ igual y paralela á la velocidad v', por el punto Q una recta QR igual y paralela á la velocidad v''; la recta PR representará la velocidad v en magnitud y direccion.

Del mismo modo tiremos por el punto P la PS igual y paralela á $v'+dv'$, y por S la ST igual y paralela á $v''+dv''$; la recta PT representará la velocidad $v+dv$ en magnitud y direccion. La recta RT será igual y paralela á la velocidad adquirida elemental del móvil en su movimiento absoluto; pero si trazamos SH igual y paralela á QR, y unimos el punto H con T y con R, la velocidad infinitamente pequeña TR es la resultante de las dos velocidades RH y HT; más RH igual y paralela á QS, es la velocidad adquirida elemental en el movimiento de arrastre del punto M de la trayectoría relativa; y HT es la velocidad adquirida elemental en el movimiento relativo: la velocidad adquirida elemental en el movimiento absoluto es la resultante de las velocidades adquiridas elementales correspondientes en el movimiento de arrastre y en el movimiento relativo. Como las aceleraciones se obtienen dividiendo estas velocidades adquiridas elementales por dt, tendremos que la aceleracion total en el movimiento absoluto, es la resultante de las aceleraciones totales en los movimientos de arrastre y relativo, compuestas por la regla del paralelógramo de las velocidades.

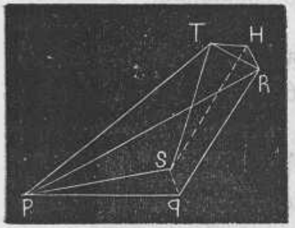


Fig. 162.

Si suponemos que un punto móvil está animado á la vez de más de dos movimientos, y que los diversos movimientos componentes, que hacen el papel de movimientos de arrastre, son todos movimientos de traslacion, la aceleracion total del movimiento resultante se encontrará componiendo las aceleraciones totales de los diversos movimientos componentes por la regla del polígono de las velocidades.

Determinacion de la aceleracion en el caso que el movimiento de arrastre es un moviento cualquiera.

309. La aceleracion en este caso es la resultante de tres componentes como vamos á ver. Consideremos las posiciones AB, A′B′ (fig. 163), que la trayectoría relativa ocupa al fin de los tiempos t y $t+dt$, y supongamos que en los mismos instantes el móvil se encuentra en los puntos M y N de esta línea. La curva AB puede llevarse á la posicion A′B′ por un movimiento de traslacion igual al camino infinitamente pequeño MM′ recorrido por el punto M, seguido de una rotacion alrededor de un eje CD que pasa por M′.

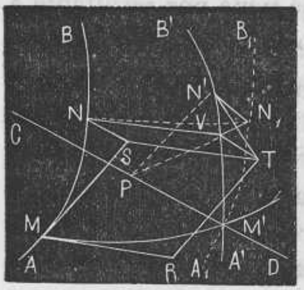


Fig. 163.

Sea $A_1 B_1$ la posicion que toma la trayectoría en virtud de la traslacion; el punto N para ir á N′, recorrerá primero el camino NN_1, igual y paralelo á MM′, en virtud de la traslacion, y despues un arco de círculo $N_1 N'$, en virtud de la rotacion alrededor del eje CD.

Tomemos sobre la tangente á la trayectoría MM′, del movimiento de traslacion de M, una longitud $MR=v_a dt$, y sobre la tangente á la trayectoría relativa AB la longitud $MS=v_r dt$, siendo v_a y v_r las velocidades del punto M en los movimientos de arrastre y relativo. La diagonal MT del paralelógramo construido sobre MR y MS, estará ligada á la velocidad absoluta por la relacion

$$MT=vdt;$$

y esta diagonal será ademas tangente en M, á la trayectoría del movimiento absoluto del punto móvil. Uniendo T con N′, la recta TN′ tendrá la direccion de la aceleracion total en el movimiento absoluto, y la magnitud de esta aceleracion será $\frac{2TN'}{dt^2}$ (306): determinemos ahora las componentes de esta aceleracion.

Uniendo el punto S con el punto N y tirando por el punto T una recta TV igual y paralela á la SN, y despues, uniendo el punto V con el punto N_1, tendremos el polígono alabeado $TVN_1N'T$, que tiene por resultante á la TN'; si construimos un nuevo polígono semejante á éste, tomando sobre sus lados longitudes iguales á $\frac{2TV}{dt^2}$, $\frac{2VN_1}{dt^2}$, $\frac{2N_1N'}{dt^2}$; la aceleracion $\frac{2TN'}{dt^2}=j$, será la resultante de las tres aceleraciones anteriores, cuyas direcciones son las de las líneas TV, VN_1, N_1N'. Pero observemos, que TV es igual y paralela á SN, y por lo tanto, la aceleracion componente $\frac{2TV}{dt^2}$ es la aceleracion total j_r, en el movimiento relativo del móvil á lo largo de la trayectoría AB; y siendo VN_1 igual y paralela á RM', la segunda aceleracion componente $\frac{2VN_1}{dt^2}$ es la aceleracion total j_a, en el movimiento de arrastre; es decir, en el movimiento que tendria el punto móvil, si permaneciera en reposo en M, relativamente á los ejes móviles. Para hallar la tercera componente, llamemos ω á la velocidad angular en la rotacion instantánea de los ejes móviles alrededor de CD, y si P es el pié de la perpendicular bajada del punto N_1 sobre CD, se tiene

$$N_1N'=\omega dt \times N_1P;$$

y si llamamos α al ángulo formado por CD con $M'N_1$, tendremos

$$N_1P=M'N_1 \operatorname{sen}\alpha=v_r dt\times \operatorname{sen}\alpha, \quad \text{y} \quad \frac{2N_1N'}{dt^2}=2\,\omega v_r \operatorname{sen}\alpha.$$

Esta tercera aceleracion componente recibe el nombre de aceleracion complementaria, y está dirigida perpendicularmente al plano que pasa por CD y por el elemento $M'N_1$ de la trayectoría relativa, y en el sentido de N_1 á N'.

Teorema de Coriolis.

310. Segun esto, cuando el movimiento de un punto se considera como resultante de un movimiento de arrastre y de un movimiento relativo, se puede obtener la aceleracion total de este movimiento del siguiente modo. Se supone el movimiento de arrastre elemental de los ejes móviles, en el instante que se considera, descompuesto en una rotacion al rededor de un eje instantáneo, que pasa por el punto donde se encuentra el móvil en este instante, y una traslacion igual al movimiento de este mismo punto, supuesto unido á los ejes movibles; se determina la velocidad angular ω de esta rotacion elemental, y el angulo α que el eje instantáneo de la rotacion forma con la direccion de la velocidad relativa v_r del móvil, y se componen entre sí: 1.° la aceleracion del movimiento de arrastre j_a: 2.° la aceleracion j_r en el movimiento relativo del punto con respecto á los ejes móviles: y 3.° una *aceleracion complementaria* j_c, igual á $2\omega v_r \operatorname{sen} \alpha$, dirigida perpendicularmente al plano que pasa por la velocidad relativa v_r y por el eje instantáneo de rotacion de los ejes móviles, y en el sentido en el cual, la extremidad de la línea que representa la velocidad relativa, gira en la rotacion instantánea alrededor de este eje. Componiendo estas tres aceleraciones por la regla del polígono de las fuerzas, se obtendrá la aceleracion en el movimiento absoluto que se considera.

Sean como hemos dicho, j, j_a, j_r, las aceleraciones en los movimientos absoluto, de arrastre y relativo, y

$j_c = 2\,\omega\, v_r \operatorname{sen} \alpha$, la aceleracion complementaria. Por un punto H (fig. 164), tracemos una recta igual, paralela y del mismo sentido que j_r; por su extremo K otra igual, paralela y del mismo sentido que j_a; y por su extremo P otra igual, paralela y del mismo sentido que j_c; la recta $QH = j$, que cierra el polígono, será la resultante de las tres, ó sea la aceleracion en el movimiento absoluto. Por consiguiente, esta construccion dará la aceleracion j en el movimiento absoluto por medio de j_r, j_a y j_c. Este teorema, en virtud del cual se obtiene la aceleracion en el movimiento absoluto, es debido á Coriolis, por lo cual se llama *teorema de Coriolis*.

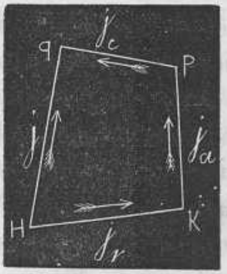


Fig. 164.

Si el movimiento de arrastre es de traslacion, $\omega = 0$, y por lo tanto $j_c = 0$, la aceleracion j es la resultante de j_r y j_a como hemos visto directamente. Tambien $j_c = 0$ si $v_r = 0$, ó si $\operatorname{sen}\alpha = 0$, es decir, cuando la velocidad relativa es nula, ó está dirigida segun el eje instantáneo de rotacion, y j es como ántes la resultante de j_r y j_a.

Componentes de la aceleracion complementaria.

311. La definicion que acabamos de dar de la aceleracion complementaria j_c, la determina completamente; pero es poco cómoda para las aplicaciones, y por ello vamos á determinar sus componentes, paralelas á los tres ejes rectangulares, con respecto á los que se descomponen la rotacion instantánea ω y la velocidad relativa v_r. El problema que vamos á resolver es el siguiente: dadas las tres componentes

$$p,\ q,\ r,\ \text{de}\ \omega;$$

y las tres componentes

$$v_x,\ v_y,\ v_z,\ \text{de}\ v_r;$$

encontrar las componentes de la aceleracion $j_c = 2\omega v_r \operatorname{sen}\alpha$, con respecto á los mismos ejes.

Sean (fig. 165), M el punto móvil, PP el eje instantáneo de rotacion, que podemos suponer pasa siempre por el punto M, por medio de una traslacion conveniente introducida en el movimiento de arrastre; MA una recta que representa en magnitud y direccion la velocidad relativa v_r. Tomemos sobre el eje PP una cantidad MB, que represente en magnitud y direccion la velocidad angular ω, tomada en el sentido en que el observador deberia colocarse sobre el eje, para ver efectuarse la rotacion de izquierda á derecha, como suponemos que se efectúan todas las rorotaciones.

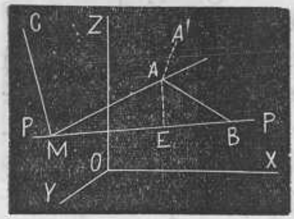


Fig. 165.

El extremo A de la velocidad relativa se mueve por la rotacion ω en el sentido AA'; tracemos en el punto M una perpendicular MC al plano AMB, en el sentido AA', y tomemos sobre ella una longitud $MC = 2\omega v_r \operatorname{sen}\alpha$; el ángulo $\alpha = AMB$, y por lo tanto $v_r \operatorname{sen}\alpha = AE$, altura del triángulo AMB; la aceleracion buscada será igual á

$$2 \times MB \times AE,$$

ó sea al cuádruplo del area de este triángulo. Tomemos sobre MC una longitud que represente, en una escala arbitraria, cuatro veces el área del triángulo AMB; y esta longitud MC será la que debemos proyectar sobre los tres ejes.

El ángulo de MC con cada uno de los ejes, es igual al ángulo del plano AMB con el plano perpendicular al eje que se considera; por consecuencia, para proyectar MC sobre OX, basta proyectar el área del triángulo sobre el plano YZ, y tomar el cuádruplo de esta proyeccion; del mismo modo las proyecciones del triángulo sobre los planos XY y ZX multiplicadas por cuatro, serán las proyecciones de MC sobre OZ y OY.

Tiremos por el orígen la recta OR igual y paralela á MB (fig. 166); y una recta ON igual y paralela á MA, y sean n y r las proyecciones sobre el plano XY de N y R. Proyectemos n y r en n' y r' sobre el eje X, tendremos

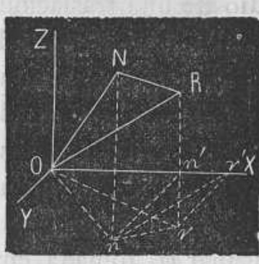


Fig. 166.

$$p = Or', \qquad q = r'r,$$
$$v_x = On', \qquad v_y = nn'.$$

El triángulo Onr, proyeccion del ONR = MAB, es igual á la diferencia del cuadrilátero $Onrn'$ y del triángulo $On'r$; los triángulos $nn'r$ y $nn'r'$ son equivalentes, y tendremos

$$Onr = Onn' + nn'r' - On'r = Onr' - On'r.$$

Poniendo por estos triángulos sus medidas; será

$$Onr = \tfrac{1}{2}(pv_y - qv_x);$$

y multiplicando por 4, tendremos la componente de j_c, segun el eje de las Z, que podemos escribir

$$j_{c,z} = 2(pv_y - qv_x).$$

Esta fórmula atribuye un signo á la componente de j_c. Para verlo, supongamos que el eje instantáneo sea paralelo al eje X y luégo al eje Y. En el primer caso (fig. 167), supondremos v_r dirigida paralelamente al eje OY y en el segundo al eje OX, y serán en el primero $q = 0$ y $v_x = 0$; y se reduce la fórmula á

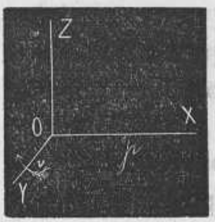


Fig. 167.

$$j_{c,z} = pv_y,$$

resultado conforme con la regla, porque si p y v_y son positivas, la rotacion instantánea tiende á hacer girar el extremo de la velocidad relativa en el sentido YZ, y por consiguiente, la aceleracion complementaria tiene la direccion positiva OZ. Del mismo modo se verificaria la fórmula para los demas signos que pueden tener p y v_y. En el segundo caso (fig. 168), serán $p=0$, $v_y=0$; y la fórmula será

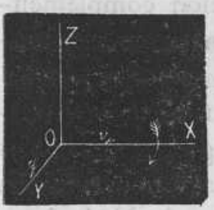


Fig. 168.

$$j_{c,z}=-2qv_x;$$

que se verifica fácilmente para todos los casos que pueden presentar los signos de q y v_x.

Por el principio de Descartes, el signo encontrado para estos casos particulares, es el que tiene la fórmula en el caso general.

Por un razonamiento análogo en los otros dos planos, tendremos las fórmulas siguientes:

$$j_{c,x}=2(qv_z-rv_y);$$
$$j_{c,y}=2(rv_x-pv_z);$$
$$j_{c,z}=2(pv_y-qv_x).$$

Los segundos miembros de estas ecuaciones se pueden formar fácilmente, tomando las diferencias de los productos en cruz de las cantidades

$$\begin{array}{cccc} p & q & r & p \\ v_x & v_y & v_z & v_x \end{array}$$

en la forma en que están escritas en estas dos líneas, ó sea las determinantes; y multiplicándolas por 2 tendremos cada una de las componentes de j_c: cada producto contiene las paralelas á dos de los ejes coordenados de la rotacion y de la velocidad relativa, y representa la proyeccion de la aceleracion j_c sobre el tercer eje.

Aplicaciones del teorema de Coriolis.

312. Siendo la aceleracion j en el movimiento absoluto la resultante de las tres aceleraciones j_r, j_a y j_c, tene-

mos tambien, que la aceleracion j_r en el movimiento relativo es la resultante de tres aceleraciones, la aceleracion j en el movimiento absoluto y las aceleraciones j_a y j_c tomadas en sentido contrario. La aceleracion complementaria, tomada en sentido contrario, se llama *aceleracion centrífuga compuesta.*

Cuando el movimiento de arrastre es rectilíneo y uniforme, $\omega=0, j_a=0$ y $j_c=0$, y por consiguiente $j_r=j$; es decir, que la aceleracion absoluta es igual á la aceleracion relativa, no obstante ser en este caso la velocidad absoluta diferente de la velocidad relativa.

313. Como aplicacion de las teorías anteriores, supongamos que un círculo O (fig. 169), se mueve en su plano rodando uniformemente sobre una recta XY; vamos á determinar la aceleracion total del movimiento de que está animado el punto M ligado al círculo móvil. Para pasar de la posicion actual á una posicion infinitamente próxima, el círculo gira alrededor del punto de contacto A, que es su centro instantáneo de rotacion: designemos por ω la velocidad angular constante de esta rotacion instantánea; sea r el radio AO del círculo, p la distancia AM y α el ángulo MAO; tendremos $v=p\omega$, siendo v la velocidad del punto M. En el tiempo dt, el punto M describe un arco $MM'=p\omega dt$; en el mismo tiempo el punto O describe otro arco igual á $r\omega dt$; y como el punto de contacto A anda el mismo camino que el punto O, tendremos que $AA'=r\omega dt$. Las rectas MA, M'A' son dos normales infinitamente próximas á la trayec-

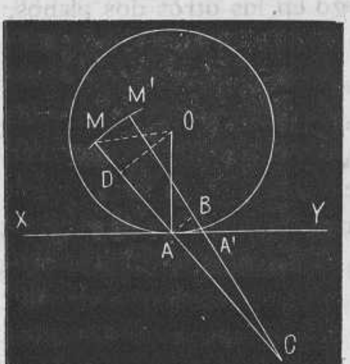


Fig. 169.

toría del punto M, y su punto de encuentro C, es el centro de curvatura de esta trayectoría. Describamos de C como centro, con un radio CA, el arco infinitamente pequeño AB, tendremos para hallar el radio de curvatura CM$=\rho$, la proporcion

$$\frac{\rho}{\rho-p}=\frac{\mathrm{MM'}}{\mathrm{AB}}=\frac{p\omega dt}{r\omega dt\times\cos\alpha};\ \text{de donde}\ \rho=\frac{p^2}{p-r\cos}.$$

La aceleracion tangencial $\frac{dv}{dt}=\omega\frac{dp}{dt}=\omega\frac{\mathrm{BA'}}{dt}=\omega^2 r\operatorname{sen}\alpha$ $=\omega^2\times\mathrm{OD}$. La aceleracion centrípeta del mismo punto es $\frac{v^2}{\rho}=\omega^2(p-r\cos\alpha)=\omega^2\times\mathrm{MD}$. De modo, que la aceleracion total está dirigida segun la MO, y será

$$\sqrt{\omega^4.\ \mathrm{OD}^2+\omega.^4\,\mathrm{MD}^2}=\omega^2\sqrt{\mathrm{OD}^2+\mathrm{MD}^2}=\omega^2\times\mathrm{OM}.$$

Tambien puede obtenerse este resultado considerando el movimiento del punto M, como debido á una traslacion del círculo á lo largo de XY, con una velocidad $r\omega$, y una rotacion alrededor del punto O, con una velocidad angular ω.

El movimiento de traslacion puede considerarse como movimiento de arrastre y el de rotacion como un movimiento relativo. La aceleracion total del punto M se obtendrá por la composicion de las aceleraciones totales de los movimientos componentes. Pero la aceleracion en el movimiento de arrastre es nula, porque es rectilíneo y uniforme: luego la aceleracion total en el movimiento resultante se reduce á la del movimiento de rotacion alrededor del punto O; esta aceleracion del punto M en su rotacion uniforme alrededor del punto O, tiene por valor el cuadrado de la velocidad $\omega\times\mathrm{OM}$, dividido por el radio OM, es decir, $\frac{\omega^2\times\mathrm{OM}^2}{\mathrm{OM}}=\omega^2\times\mathrm{OM}$ como ántes.

314. Los movimientos que observamos en la superficie de la Tierra, los referimos á objetos situados sobre

ésta superficie y que participan del movimiento de nuestro planeta, siendo por lo tanto movimientos aparentes; y la observacion directa no nos revela más que velocidades y aceleraciones relativas. Para deducir de éstas las velocidades y aceleraciones absolutas, hay que componer las primeras con las velocidades de arrastre de los puntos de referencia ó ejes móviles, y las segundas con las aceleraciones en el movimiento de arrastre y con las aceleraciones complementarias. El movimiento de rotacion y traslacion pueden considerarse separada y sucesivamente, componiendo luégo los resultados. Si consideramos sólo el movimiento de rotacion de la Tierra alrededor de la línea de los polos PP′ (fig. 170), veremos que á la aceleracion observada j_r, que es la del movimiento aparente del punto L, debemos agregar la aceleracion del movimiento de arrastre j_a, que es una rotacion uniforme del punto L alrededor del eje PP′, y es igual á $\omega^2 \times \mathrm{LN}$ y dirigida en el sentido NL; y la aceleracion complementaria j_c, perpendicular á la vez á la trayectoría relativa y al eje PP′, é igual á $2\omega v_r \operatorname{sen}\alpha$, siendo v_r la velocidad relativa observada, y α el ángulo que ella forma con el eje del mundo PP′. Si, por ejemplo, la observacion tiene lugar en el ecuador EF y el móvil sigue un meridiano, tendremos $\operatorname{sen}\alpha=0$, y la aceleracion complementaria será nula. Lo mismo sucederá con respecto á cualquier paralelo si el móvil sigue un meridiano.

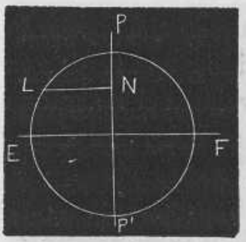


Fig. 170.

Cuando el movimiento es muy lento, y v_r es por consiguiente muy pequeña, la aceleracion j_c es muy pequeña y puede prescindirse de ella en los cálculos. Pero cuando los movimientos son rápidos, debemos tener en cuenta la aceleracion complementaria, si no queremos exponernos á incurrir en errores más ó ménos grandes, segun las circunstancias.

Más adelante, en la Dinámica, tendremos ocasion de aplicar estas teorías, cuando nos ocupemos del equilibrio y movimiento de los cuerpos en la superficie de la Tierra.

315. Tambien podemos deducir del teorema de Coriolis, la aceleracion en el movimiento de un punto referido á coordenadas polares.

El movimiento de un punto determinado por los valores de sus coordenadas polares r y θ, en funcion del tiempo, puede descomponerse en una traslacion á lo largo del radio vector, y una rotacion de este radio alrededor del polo.

La velocidad de deslizamiento está representada por $\frac{dr}{dt}$, y la de rotacion por $\frac{d\theta}{dt}$.

Podemos considerar el primer movimiento como un movimiento relativo, y el segundo, como un movimiento de arrastre; vamos á buscar la aceleracion total del movimiento absoluto resultante.

La aceleracion relativa j_r, es igual á $\frac{d^2r}{dt^2}$, y está dirigida segun el radio vector. La aceleracion de arrastre j_a, es la del punto del radio vector que describe una circunferencia alrededor del polo, con una velocidad $r\frac{d\theta}{dt}$; la aceleracion total de este movimiento circular, se descompone en la aceleracion tangencial perpendicular al radio vector, é igual á $r\frac{d^2\theta}{dt^2}$, y la aceleracion centrípeta, dirigida segun este radio, é igual á $\frac{\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2}{r}=r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$. La aceleracion complementaria $j_c = 2\omega v_r \operatorname{sen} \alpha$, es igual á $2 \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{dr}{dt}$, porque $\alpha = 90°$.

Sumando algébricamente las aceleraciones que tienen la misma direccion, obtendremos dos componentes de la aceleracion total, que son

segun el radio vector, $\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$,

y segun la perpendicular á este radio,

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{dr}{dt}.$$

y la resultante de estas dos será la aceleracion total.

DINÁMICA.

PRIMERA PARTE.

LECCION XXV.

Division de la Dinámica. — Primeros principios en que se funda la Dinámica. — Principio de igualdad de la accion y de la reaccion.— Independencia del efecto de una fuerza y del movimiento anterior adquirido por el punto material. — Efecto de una fuerza de magnitud y direccion constantes sobre un punto material. — Independencia de los efectos de las fuerzas que actúan simultáneamente sobre un mismo punto material.— Relacion entre las fuerzas, las aceleraciones y las masas. — Relacion entre fuerzas, masas y velocidades; cantidad de movimiento.—Relacion entre el peso y la masa.— Unidades empleadas en Mecánica.

Division de la Dinámica.

316. La Dinámica tiene por objeto el estudio del movimiento de los cuerpos, producido por la accion de las fuerzas á que se encuentran sometidos. Pero este estudio es bastante complicado, y con el objeto de simplificarlo, dividiremos la Dinámica en dos partes; en la primera trataremos del estudio de las leyes del movimiento de los cuerpos, considerándolos como simples puntos materiales, y prescindiendo de sus dimensiones. En la segunda estudiaremos el movimiento de los cuerpos, tales como se presentan en la naturaleza. De este modo el complicado problema del movimiento de los cuerpos

se simplifica mucho, y por consiguiente, se comprenderá con más facilidad.

En esta primera parte de la Dinámica llamaremos *punto material*, á un punto de un cuerpo en el cual supondremos que se ha condensado toda la materia que constituye el cuerpo. El punto ordinariamente escogido para condensar en él idealmente toda la materia del cuerpo, es el centro de gravedad. Este supuesto equivale á prescindir de las dimensiones de los cuerpos; y no significa de ningun modo, que éstos sean más ó ménos pequeños. Así, cuando decimos que los planetas describen elipses alrededor del Sol, suponemos implícitamente que la materia de cada uno de ellos está condensada en su centro de gravedad, y que estos centros describen las mencionadas elipses; del mismo modo, al decir que un proyectil describe una parábola, se sobrentiende que la masa de este proyectil está condensada en su centro de gravedad, y que este punto describe la curva. En la segunda parte de la Dinámica tendremos en cuenta, como hemos dicho, las dimensiones de los cuerpos de que ahora hacemos abstraccion.

Primeros principios en que se funda la Dinámica.

317. Las leyes de la Dinámica se apoyan (2) en ciertas verdades fundamentales, deducidas de la observacion y la experiencia, que son los primeros principios de la ciencia. Estos principios son tres: el de la inercia de la materia, fundamento de la Estática, expuesto en el núm. 3; y los dos siguientes, que son la base de la Dinámica.

Principio de igualdad de la accion y la reaccion.

318. Este principio, descubierto por Newton, consiste: en que toda fuerza aplicada á un punto material A,

emana de otro punto material B, situado á cierta distancia del primero; al mismo tiempo, el punto B está sometido á la accion de otra fuerza que emana del punto A; estas dos fuerzas, llamadas *accion* y *reaccion*, son iguales entre sí, están dirigidas segun la recta AB y en sentido contrario una de otra.

La oposicion de sentido de las dos fuerzas á que están sugetos los puntos materiales A y B, es independiente del sentido de cada una de ellas tomada aisladamente; puede suceder, que la fuerza que actúa sobre el punto A, tienda á aproximarlo al punto B, y entónces la fuerza que actúa sobre el punto B tiende tambien á aproximarlo al punto A; en este caso las fuerzas son atractivas. Si las fuerzas tienden á alejar los puntos A y B uno del otro, se dice que son repulsivas.

Independencia del efecto de una fuerza y del movimiento anterior adquirido por el punto material.

319. El tercer principio de los generales en que se funda la Dinámica, descubierto por Galileo, se enuncia como sigue: *El efecto producido por una fuerza sobre un punto material, es independiente de todo movimiento anteriormente adquirido por este punto.*

Supongamos, para comprender este principio, referido el punto material móvil á un sistema de ejes animado de un movimiento de traslacion rectilíneo y uniforme, en el cual la velocidad tiene la misma magnitud y direccion, que la velocidad del punto material en un instante cualquiera de su movimiento. Si á partir de este instante, el punto material no estuviera sugeto á la accion de ninguna fuerza, su movimiento sería rectilíneo y uniforme, en virtud del principio de inercia; y por lo tanto, conservaria la misma posicion con respecto á los ejes móviles á que le suponemos referido. El principio que acabamos de enunciar significa, que el punto material por la accion de la fuerza que se le aplica, toma, á partir del mismo instante, un movimiento exactamente igual al movimiento absoluto que esta fuerza le comunicaria si partiera del reposo; de modo, que para obtener el movimiento absoluto del punto material en el espacio, no hay más que componer este movimiento del punto con respecto á los ejes móviles, con el movimiento de estos mismos ejes.

Efecto de una fuerza de magnitud y direccion constantes sobre un punto material.

320. Fundándonos en el tercer principio, vamos á determinar inmediatamente el movimiento que toma un punto material sujeto á la accion de una fuerza de intensidad y direccion constantes. Tres casos pueden presentarse en esta cuestion; que el punto no lleve velocidad inicial; que la direccion de la velocidad inicial sea la misma que la de la fuerza; y que la direccion de la velocidad inicial sea distinta que la de la fuerza.

1.° En el primer caso supongamos el tiempo total dividido en una porcion de partes iguales, y que la fuerza, en vez de actuar de una manera contínua, ejerce sólo su accion al principio de cada uno de los intervalos de tiempo en que hemos dividido el tiempo total. Entre dos acciones consecutivas de esta fuerza el punto material estará animado de un movimiento uniforme y rectilíneo; y la sucesion de estos movimientos constituirá su movimiento al cabo de un tiempo cualquiera. Despues de la primera de estas acciones sucesivas de la fuerza, el punto material estará animado de una cierta velocidad, cuya direcion y sentido son precisamente la direccion y sentido de la fuerza.

Para tener la velocidad del punto despues de la segunda accion de la fuerza, es preciso componer la velocidad que posee despues de la primera accion de la fuerza, con una velocidad de la misma magnitud, direccion y sentido, producida por la nueva accion que el punto ha recibido de la fuerza: la resultante de estas dos velocidades será el duplo de cada una de ellas. Despues de la tercera accion de la fuerza, la velocidad será el triplo de la que adquiere el punto despues de la primera accion de la fuerza, y así sucesivamente. El movimiento del punto, en un tiempo cualquiera, se verificará á lo largo de una recta de la misma direccion de la fuerza y en el sentido en que ésta actúa: la velocidad del punto, en un instante cualquiera, será proporcional al número total de impulsos de la fuerza, que habrá experimentado ántes de este instante.

Si la duracion de los intervalos iguales de tiempo que median entre las acciones consecutivas de la fuerza, decrece indefinidamente, la fuerza tenderá á ejercer su accion de una manera contínua, y el movimiento que se producirá será el límite hácia el cual tiende el movimiento que acabamos de obtener. De aquí resulta, que si un punto primitivamente en reposo, se pone en movimiento por la accion de una fuerza de intensidad y direccion constantes, la trayectoría del punto será una línea recta de la misma direccion que la fuerza, y su velocidad crecerá proporcionalmente al tiempo, contado desde el principio del movimiento; de modo, que este movimiento será rectilíneo y uniformemente acelerado (192).

Sea j la aceleracion del movimiento, t el tiempo contado desde el orígen del movimiento, x la distancia comprendida entre su posicion inicial y su posicion final. La ecuacion del movimiento será

$$x = \tfrac{1}{2} j t^2;$$

porque para $t=0$, son cero la constante, y $\frac{dx}{dt}=v$, por no haber por hipótesis velocidad inicial.

321. Tenemos un ejemplo de este movimiento en la caida de los cuerpos pesados, cuando caen libremente en el vacío sin velocidad inicial, y de una altura tal, que pueda considerarse como infinitamente pequeña con respecto al radio de la Tierra.

En este caso, la fuerza que solicita al móvil puede considerarse como de intensidad y direccion constantes, y estamos en el caso que acabamos de considerar; si llamamos g á la aceleracion, la ecuacion del movimiento es

$$x=\tfrac{1}{2}gt^2.$$

Las experiencias ejecutadas con el plano inclinado y con la máquina de Atwod, prueban que en el descenso de los graves, el movimiento sigue las leyes del uniformemente acelerado, como indica la teoría. La aceleracion g que varía para cada lugar de la Tierra, ha sido determinada en varios puntos por la experiencia. En París es $g=9^m,8088$. Para Madrid no ha sido determinada experimentalmente con suficiente exactitud; miéntras se determina, podemos tomar el valor que da la siguiente fórmula aproximada, que expresa g en funcion de la latitud de lugar,

$$g=9^m,781104+0^m,055645\,\text{sen}^2\varphi;$$

de la cual resulta para Madrid, en que $\varphi=40^\circ\ldots 24'\ldots 30''$,

$$g=9^m,8046.$$

La velocidad en un instante cualquiera, tiene por valor

$$v=gt;$$

eliminando t entre esta ecuacion y la anterior, resulta

$$v^2=2gx, \quad \text{ó} \quad v=\sqrt{2gx};$$

esta última se llama la velocidad debida á la altura x.

322. 2.° caso. El punto material, cuando principia á recibir la accion de la fuerza de intensidad y direccion constantes, va animado de cierta velocidad inicial v_0, de

la misma direccion que la fuerza. Si esta velocidad v_0 es del mismo sentido que la fuerza, obtendremos el movimiento resultante, componiendo el movimiento rectilíneo y uniforme representado por la ecuacion

$$x_1 = v_0 t,$$

con un movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado, cuya ecuacion es

$$x_2 = \tfrac{1}{2} j t^2.$$

El movimiento resultante será rectilíneo, de la direccion de los movimientos componentes, y su ecuacion será

$$x = v_0 t + \tfrac{1}{2} j t^2;$$

la velocidad

$$v = v_0 + j t,$$

es de la misma direccion y sentido y crece proporcionalmente al tiempo.

Si la velocidad inicial v_0, está dirigida en sentido contrario al de la fuerza, obtendremos del mismo modo la ecuacion del movimiento, que es

$$x = v_0 t - \tfrac{1}{2} j t^2;$$

y la velocidad

$$v = v_0 - j t,$$

es al principio positiva y va decreciendo hasta llegar á ser cero; y entónces $t = \frac{v^0}{j}$; se hace luégo negativa y aumenta indefinidamente.

El movimiento es uniformemente retardado hasta que llega á ser cero la velocidad, cambia luégo de sentido, y es desde entónces, uniformemente acelerado.

323. Este es el movimiento de un cuerpo pesado lanzado de abajo á arriba verticalmente y en el vacío. Siendo v_0 la velocidad inicial de abajo á arriba y g la aceleracion debida á la gravedad, el cuerpo sube con un movimiento uniformemente retardado hasta que $t = \frac{v_0}{g}$, en este instante deja de subir y empieza á bajar con movi-

miento uniformemente acelerado. La altura á que ha subido, se obtiene poniendo en vez de t, su valor $\frac{v_0}{g}$, en la ecuacion del movimiento, que es

$$x = v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2;$$

y resulta la altura

$$x = \frac{v_0^2}{2g},$$

que es la misma que obtendríamos de la fórmula $v_0^2 = 2gx$; de modo, que x es la altura de donde debia descender el punto material sin velocidad inicial, para adquirir al fin de la caida la velocidad v_0.

324. 3.er caso. La direccion de la velocidad inicial no coincide con la direccion de la fuerza. Sea A (fig. 171), el punto de partida, AX la direccion de la velocidad inicial v_0, AY una recta paralela constantemente á la direccion de la fuerza. Obtendremos el movimiento en este caso, suponiendo que la recta AX se mueve paralelamente á sí misma en virtud de la fuerza que suponemos aplicada, como si no hubiera velocidad inicial; y que al mismo tiempo el punto A recorre la recta AX con un movimiento uniforme en virtud de la velocidad inicial v_0: siendo j la aceleracion que la fuerza comunica al punto material, tendremos

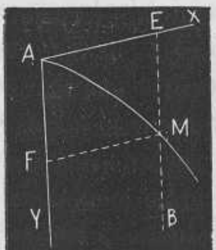


Fig. 171.

$$AF = y = \tfrac{1}{2} j t^2,$$

para el camino AF que recorreria el punto material en el tiempo t, desde el principio del movimiento. En el mismo tiempo la recta AY se ha trasladado á la posicion EB, de modo que tenemos

$$AE = x = v_0 t;$$

el móvil se encontrará en el punto M de esta línea, al fin del tiempo t, punto que se obtiene tomando EM=AF.

Del mismo modo se obtienen otras posiciones del móvil. La ecuacion de la trayectoría de este movimiento se obtiene eliminando t en las ecuaciones

$$x = v_0 t,\ y = \tfrac{1}{2} j t^2;$$

y resulta para ecuacion de esta trayectoría

$$y = \frac{j}{2v_0^2} x^2;$$

ecuacion que representa una parábola, cuyo eje de simetría es paralelo al eje de las y, siendo esta parábola tangente al eje de las x en el punto A.

Este movimiento parabólico es el que siguen los cuerpos pesados, cuando son lanzados oblícuamente al horizonte en el vacío, el cual estudiaremos detalladamente más adelante.

Resumiendo lo dicho en los tres casos, resulta, que una fuerza de direccion é intensidad constantes, comunica á un punto material un movimiento uniformemente variado, rectilíneo en los dos primeros casos y curvilíneo en el tercero.

Independencia de los efectos de las fuerzas que actúan simultáneamente sobre un mismo punto material.

325. Del principio de Galileo se deduce el modo cómo un punto material se pone en movimiento, cuando se le somete á la accion de várias fuerzas á la vez; modo que se enuncia como sigue: *Cuando várias fuerzas actúan simultáneamente sobre un punto material, cada una de ellos produce el mismo efecto que si actuase sola.*

Es decir, si un punto material está sujeto á la accion de várias fuerzas, se encontrará el movimiento que toma á partir de un instante cualquiera, componiendo el movimiento uniforme y rectilíneo correspondiente á la veocidad que posee en este instante, con el movimiento que le comunicaria la primera fuerza, si actuase sola sobre él como si partiera del reposo; el movimiento resultante con el que le comunicaria la segunda fuerza, el movimiento resultante con el que comunicaria la tercera fuerza, y así sucesivamente. En esta composicion de movimientos deben tomarse como de traslacion todos los movimientos componentes, que hacen el papel de movimientos de arrastre.

Relaciones entre las fuerzas, las aceleraciones y las masas.

326. Existen relaciones entre las fuerzas, las masas y las aceleraciones, que sirven para expresar las fuerzas en funcion de las masas y las aceleraciones; siendo esta expresion de las fuerzas la que usaremos en todas las cuestiones de la Dinámica. Para establecer estas relaciones y deducir la manera de expresar las fuerzas, demostraremos, que á igualdad de masa, las fuerzas son proporcionales á las aceleraciones; que á igualdad de aceleracion, las fuerzas son como las masas; y de las dos deduciremos, que en general, cuando las fuerzas y las masas son desiguales, las fuerzas son proporcionales á los productos de las masas por las aceleraciones.

Para demostrar lo primero, supongamos que la fuerza F, de intensidad y direccion constantes, actuando sobre un punto material en reposo, le pone en movimiento; que será rectilíneo y uniformemente acelerado (320), y que sea j la aceleracion de este movimiento. Sea j' la aceleracion del movimiento que tomará este mismo punto material por la accion, en las mismas circunstancias, de otra fuerza F'; y vamos á probar que

$$\frac{F}{F'}=\frac{j}{j'}.$$

Admitamos que las fuerzas F y F' son entre sí como los números enteros n y n'; es decir, que sean comensurables y contengan á la medida comun que llamaremos

F_1, la primera n veces y la segunda n' veces; tendremos

$$F=nF_1,\ F'=n'F_1,\quad ó\quad \frac{F}{F'}=\frac{n}{n'}.$$

La fuerza F equivale á n fuerzas iguales á F_1, actuando todas al mismo tiempo sobre el punto material, en la misma direccion y sentido que la fuerza F; sea j_1 la aceleracion del movimiento que cada una de las fuerzas F_1, actuando sola, comunicaria al mismo punto material; el movimiento que este punto tomará por la accion simultánea de n fuerzas F_1, de la misma direccion y sentido, se obtendrá por la composicion de los diversos movimientos rectilíneos y uniformemente acelerados, que cada una de ellas le comunicaria separadamente; y la aceleracion en el movimiento resultante, será la resultante de las aceleraciones en los movimientos componentes; es decir, la suma de las aceleraciones de estos movimientos, de modo que tendremos $j=nj_1$. Del mismo modo veríamos que $j'=n'j_1$; y de estas dos se deduce que

$$\frac{j}{j'}=\frac{n}{n'};$$

luego

$$\frac{F}{F'}=\frac{j}{j'}.$$

327. Cuando la fuerza de intensidad y direccion constantes actúa sobre un punto material, que no está en reposo, y va animado de una cierta velocidad inicial, el movimiento de este punto se obtiene por la composicion del movimiento uniforme y rectilíneo debido á su velocidad inicial, con el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado que la fuerza le comunicaria, si partiera del reposo. Pero la aceleracion en el movimiento resultante, es la resultante de las aceleraciones en los movimientos componentes; y como la aceleracion en el movimiento rectilíneo y uniforme es cero, la aceleracion en el movimiento rectilíneo ó parabólico que un punto material animado de una velocidad inicial toma por la accion

de una fuerza constante en magnitud y direccion, es exactamente la misma, que si el punto partiera del reposo. Luego tambien en el caso de una velocidad inicial las fuerzas son como las aceleraciones.

328. Cuando un punto material recibe la accion de una fuerza que no satisface á la doble condicion de tener á la vez una intensidad y direccion constantes, la aceleracion total de este punto, correspondiente á un instante cualquiera de su movimiento, no es otra cosa que la aceleracion que esta fuerza le comunicaria, si á partir de este instante, conservára constantemente la misma intensidad y direccion. Porque esta aceleracion total se deduce de las circunstancias, que presenta el movimiento, durante un intervalo de tiempo infinitamente pequeño, y el movimiento que tiene lugar durante este tiempo, puede considerarse como un elemento del movimiento que el punto material tomaria, si la intensidad y direccion de la fuerza cesáran de variar desde el fin de este intervalo de tiempo.

De cuanto acabamos de decir, se deduce, que si se considera el movimiento que un punto material toma por la accion de una fuerza cualquiera, y se compara al movimiento que el mismo punto material toma por la accion de otra fuerza tambien cualquiera, las intensidades de estas dos fuerzas, tomadas cada una en un instante determinado, son proporcionales á las aceleraciones totales correspondientes á los mismos instantes, en los movimientos que producen. De modo, que la proporcionalidad entre las fuerzas y las aceleraciones existe siempre entre dos fuerzas que actúan separadamente sobre un mismo punto material, ó sobre puntos materiales de igual masa.

329. Ya digimos que *masa* es la cantidad de materia que contiene un cuerpo ó un punto material. Se dice que dos puntos materiales tienen masas iguales, cuando sometidos, en las mismas condiciones, á la accion de una mis-

ma fuerza, reciben una misma aceleracion. Uniendo dos puntos materiales de igual masa, tendremos un punto material de masa doble de la de cada uno de ellos; reuniendo tres, tendremos uno de masa triple, y reuniendo muchos tendremos uno de masa múltiple de la de uno de ellos. La masa de un cuerpo ó de un punto material podrá expresarse, segun esto, por un número, tomando por unidad de masa la de un cuerpo escogido arbitrariamente. Vamos á demostrar ahora que, á igualdad de aceleraciones, las fuerzas son como las masas.

Sean las fuerzas F y F′, que actúan sobre dos puntos materiales de masas m y m', y les comunican la misma aceleracion; supongamos como ántes las fuerzas expresadas por las relaciones

$$\mathrm{F}=n\mathrm{F}_1,\ \mathrm{F}'=n'\mathrm{F}_1;\ \text{de donde}\ \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{F}'}=\frac{n}{n'}.$$

Consideremos el punto material de masa m, como la reunion de n puntos materiales todos de la misma masa m_1; el punto material de masa m', como la reunion de n' puntos materiales de masa m'_1, y tendremos

$$m=n\,m_1\quad m'=n'\,m'_1.$$

Si la fuerza F_1 actuára sin cambiar de intensidad y direccion sobre un punto material de masa m_1, partiendo del reposo, le daria un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, en el cual la aceleracion tendria un cierto valor dependiente de la intensidad de la fuerza F_1 y de la magnitud de la masa m_1. Concibamos que n puntos materiales, teniendo todos la misma masa m_1, se encuentran los unos al lado de los otros, y que se ponen todos en movimiento en un mismo instante, por la accion de fuerzas aplicadas á cada uno de ellos; si estas fuerzas son todas iguales á F_1 y actúan todas segun la misma direccion y en el mismo sentido, los n puntos materiales tomarán todos el mismo movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado, segun la misma direccion y con la misma aceleracion; por consecuencia, se encontrarán los unos al lado de los otros como ántes de su partida. Nada cambiará en el movimiento del conjunto, suponiendo los puntos materiales unidos entre sí, formando un sólo punto material, cuya masa sea $nm_1=m$; los n fuerzas iguales á F_1 de la misma direccion y sentido, equivalen á la fuerza única F; luego la fuerza F, actuando sobre un punto material de masa m, que parte del reposo, le dará un movimiento que será idéntico al que la fuerza F_1 comunicará á un punto de masa m_1, tambien sin velocidad inicial; por consiguiente, la aceleracion comunicada por la fuerza F al punto material de masa m, es la misma que la aceleracion comunicada por la fuerza F_1 al punto material de masa m_1.

Del mismo modo veríamos que las aceleraciones comunicadas respectivamente á los puntos materiales de masas m' y m'_1, por las fuerzas F′ y F_1, son exactamente las mismas. Pero por hipótesis, las fuerzas F, F′ comunican la misma aceleracion á las masas m, m'; luego la fuerza F_1 aplicada sucesivamente á los dos puntos materiales de masas m_1 y m'_1, les comunica la misma aceleracion, luego $m_1=m'_1$; y dividiendo las relaciones anteriores, tenemos

$$\frac{m}{m'}=\frac{n}{n'};$$

esta proporcion y la anterior tienen una razon comun, luego

$$\frac{F}{F'}=\frac{m}{m'}.$$

330. De estas proporciones se deduce, que en general, las fuerzas son proporcionales á los productos de las masas por las aceleraciones.

Sean F y F′ dos fuerzas cualesquiera, que comunican las aceleraciones j y j' á los puntos materiales de masas m y m'. Llamemos F'' á una fuerza que comunique al punto material de masa m la aceleracion j'. Tendremos, comparando F con F'',

$$\frac{F}{F''}=\frac{j}{j'};$$

comparando F'' con F', tendremos

$$\frac{F''}{F'}=\frac{m}{m'};$$

y multiplicando ordenadamente estas proporciones, resulta

$$\frac{F}{F'}=\frac{mj}{mj'};$$

que demuestra, que las fuerzas son proporcionales á los productos de las masas por las aceleraciones.

331. Si convenimos en tomar por unidad de masa la de un punto material, que por la accion de una fuerza igual 1, tome una aceleracion igual 1, resultará, haciendo $m'=1$, $F'=1$ y $j'=1$, en la relacion anterior,

$$\frac{F}{1}=\frac{mj}{1\times 1}, \quad \text{ó} \quad F=mj:$$

que expresa, que una fuerza es igual al producto de la masa por la aceleracion; es decir, que la fuerza es á la unidad de fuerza, como mj es al producto de la unidad de masa multiplicada por la unidad de aceleracion.

Si la fuerza que solicita al cuerpo de masa m, es su propio peso, que llamaremos P, siendo g la aceleracion debida á la gravedad, tendremos

$$P=mg;$$

de donde

$$m=\frac{P}{g},$$

relacion que nos da un medio fácil de determinar numéricamente la masa de un cuerpo, en el caso de tener la unidad de masa el valor que le acabamos de asignar; pues que $g=9^{m},8046$, y P se puede determinar fácilmente por medio de una balanza. Para obtener una masa igual 1, es necesario que $P = g$ en la expresion anterior; por consiguiente, la unidad de masa corresponde á un peso de $9^{kg.}$,8046.

Relaciones entre fuerzas, masas y velocidades; cantidad de movimiento.

332. Las relaciones que existen entre las fuerzas, las masas y las velocidades, se deducen por el mismo procedimiento que acabamos de emplear para relacionar las fuerzas, las masas y las aceleraciones. Así, llamando F y F′ á las fuerzas, *m* y *m′* á las masas, á las cuales imprimen en el mismo tiempo igual velocidad, tendremos como ántes

$$\frac{F}{F'} = \frac{m}{m'}.$$

Si la masa es igual, y las velocidades son v y v', tendremos

$$\frac{F}{F'} = \frac{v}{v'};$$

y siendo las fuerzas F y F′, las masas m y m', y las velocidades que reciben en el mismo tiempo v y v', tendremos

$$\frac{F}{F'} = \frac{mv}{m'v'}.$$

333. Se llama *cantidad de movimiento* de un cuerpo, ó de un punto material, al producto de su masa m por la velocidad del punto material, ó por la velocidad comun á todos los puntos del cuerpo. De manera, que la proporcion anterior nos dice, que las fuerzas son proporcionales á las cantidades de movimiento de los cuerpos que ponen en movimiento. Si tomamos por unidad de masa la masa de un cuerpo, que solicitado por la unidad de fuerza, adquiere en la unidad de tiempo la unidad

de velocidad, tendremos $F'=1$, $v'=1$, $m'=1$; convirtiéndose la proporcion anterior en

$$F = mv;$$

que nos dice, que la fuerza F tiene por medida la cantidad de movimiento que comunica á la masa m en la unidad de tiempo.

Unidades usadas en la Mecánica.

334. Las unidades usadas en Mecánica son, el metro para las longitudes, y el segundo de tiempo medio para las duraciones. Para unidad de fuerza se emplea el *kilográmetro*, que es la fuerza capaz de elevar un kilógramo de peso á un metro de altura en un segundo. Ademas de estas unidades, suele emplearse en Mecánica aplicada el caballo de vapor, que equivale á 75 kilográmetros en Francia; en Inglaterra es, segun Boulton y Watt, de 33.000 libras, elevadas á un pié de altura en un minuto, y equivale á 76,04 kilográmetros. En España no hay convenio sobre el caballo de vapor, y se usa el caballo de vapor francés, de 75 kilográmetros.

LECCION XXVI.

Movimiento rectilíneo de un punto material libre.—Ecuacion diferencial de este movimiento. Cómo se integra. —Movimiento vertical de los cuerpos pesados en el vacío, teniendo en cuenta la variacion de la gravedad.—Caso particular en que el móvil está á una pequeña distancia de la superficie de la Tierra.—Caida de un cuerpo en un medio que resiste como el cuadrado de la velocidad.—Caso en que la resistencia llega á ser nula.

Movimiento rectilíneo de un punto material libre.

335. Con los principios expuestos en la leccion anterior y la nueva manera de representar las fuerzas, podemos entrar ya en el estudio del movimiento de un punto material, ó de un cuerpo al que idealmente podamos suponer reducido á un punto material. En este movimiento puede considerarse el punto material como libre ó sujeto á ciertas condiciones; y siendo libre, el movimiento puede ser rectilíneo ó curvilíneo. Empecemos por el movimiento rectilíneo.

Si várias fuerzas obran sobre un punto material, podemos suponerlas reemplazadas por su resultante y razonar como si el movimiento fuera en todos los casos debido á una fuerza única.

El movimiento será rectilíneo, si la fuerza que obra sobre el punto material, que parte del reposo, es de direccion constante; y tambien lo será, si el punto ha recibido una velocidad inicial cuya direccion coincide con la direccion constante de la fuerza que se le aplica; en ambos casos el punto material se moverá segun la recta que indica la direccion de la fuerza.

Ecuacion diferencial del movimiento rectilíneo de un punto material. Cómo se integra.

336. Representando por F la fuerza de direccion constante, que puede variar de cualquier modo en cuanto á su intensidad, por m la masa del punto material y por j la aceleracion de su movimiento en un instante cualquiera, tenemos (331),

$$F=mj.$$

Si conociéramos la ley de la variacion de la fuerza F, esta ecuacion daria la ley de la variacion de la aceleracion j, y sería conocida la ley del movimiento que estudiamos. Sea t el tiempo contado á partir de un instante cualquiera tomado por orígen, x la distancia del punto móvil á un punto fijo de la trayectoría rectilínea, al fin del tiempo t, v la velocidad de este punto en el mismo instante; tenemos

$$v=\frac{dx}{dt}, \quad j=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}.$$

La aceleracion j tiene el mismo signo que dv, y es positiva ó negativa con esta cantidad; como v tiene el signo de su igual $\frac{dx}{dt}$, la velocidad adquirida elemental es positiva ó negativa segun que se dirija en el sentido de las x positivas ó en sentido de las x negativas, y lo mismo sucede á la aceleracion j. De modo, que la relacion $F=mj$, establecida teniendo en cuenta los valores absolutos de las cantidades j y F, subsistirá cuando se tengan en cuenta los signos de estas cantidades, considerando á F como positiva ó negativa, segun si actúa en el sentido de las x

positivas ó en el de las x negativas. Reemplazando j por su valor $\frac{d^2x}{dt^2}$ en la relacion anterior, tendremos

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2};$$

que es la *ecuacion diferencial* del movimiento rectilíneo de un punto material. La integracion de esta ecuacion diferencial dará la ecuacion finita del movimiento. Las dos constantes arbitrarias de esta integracion se determinan por las condiciones iniciales del movimiento, es decir, por los valores de x y de $\frac{dx}{dt}$, para $t=0$.

337. La fuerza F varía, en general, con t, y por lo tanto con x y v, siendo funcion de estas tres variables t, x, v. La integracion se efectuará con más ó ménos facilidad segun la forma de esta funcion, teniendo en cuenta la relacion $v = \frac{dx}{dt}$; y cualesquiera que sean las dificultades de cálculo que presente la integracion, el problema del movimiento rectilíneo de un punto material estará siempre resuelto por la ecuacion anterior.

Cuando F sea funcion de una sola de las cantidades t, x, v, la integracion es muy sencilla, como vamos á ver en cada uno de los tres casos que puedan ocurrir.

1.er caso. F es funcion de t, de la forma

$$F = f(t);$$

la ecuacion diferencial del movimiento es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(t);$$

multiplicando por dt é integrando, resulta

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{1}{m}\int f(t)\,dt = \varphi(t);$$

llamando v_0 á la velocidad del móvil para $t=0$, ó sea la velocidad inicial, y representando por $\varphi(t)$ el valor de $\frac{dx}{dt}$.

Multiplicando por dt, volviendo á integrar, y llamando x_0 al valor inicial de x, tendremos

$$x = x_0 + \int^t \varphi(t)\, dt.$$

2.° caso. Se tiene

$$F = f(x);$$

la ecuacion diferencial será

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(x), \quad ó \quad m\frac{dv}{dt} = f(x);$$

multiplicando los dos miembros de esta última ecuacion por los de la $vdt = dx$, tendremos

$$v\,dv = \frac{1}{m} f(x)dx;$$

integrando y llamando v_0 á la velocidad inicial, será

$$v^2 = v_0{}^2 + \frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx;$$

despejando v en esta ecuacion, resultará

$$v = \varphi(x), \quad ó \quad \frac{dx}{dt} = \varphi(x), \quad dt = \frac{dx}{\varphi(x)};$$

volviendo á integrar, será

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\varphi(x)};$$

x_0 es el valor unicial de x, es decir, el correspondiente á $t=0$.

3.er caso. Tenemos

$$F = f(v);$$

la ecuacion diferencial del movimiento es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(v), \quad ó \quad m\frac{dv}{dt} = f(v), \quad dt = m\frac{dv}{f(v)};$$

integrando

$$t = m\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{f(v)}.$$

Despejando en esta ecuacion v, se tiene

$$v = \varphi(t), \quad ó \quad \frac{dx}{dt} = \varphi(t), \quad dx = \varphi(t)\,dt;$$

integrando, y llamando x_0 al valor inicial de x, tendremos

$$x = x_0 + \int_0^t \varphi(t)\, dt.$$

En cada uno de los tres casos puede modificarse la marcha general que hemos expuesto, siempre que la forma que tomen las diferenciales que se hayan de integrar, admita alguna simplicacion, que ahora no es fácil indicar *à priori*, pero que enseña la práctica de esta clase de operaciones.

Movimiento vertical de los cuerpos pesados en el vacío, teniendo en cuenta la variacion de la gravedad.

338. Sabemos que la gravedad, debida á la atraccion de la Tierra sobre los cuerpos, varía en razon inversa de los cuadrados de las distancias de estos cuerpos al centro de la Tierra. De modo, que el caso de movimiento que vamos á examinar, es el de un punto material ó un cuerpo sujeto á la accion de una fuerza, que varía en razon inversa del cuadrado de la distancia del punto móvil á un punto fijo. Supongamos que un punto material pesado, cae en el vacío sin velocidad inicial de un punto A (fig. 172), bastante lejano de la superficie de la Tierra, que encuentra en B á la recta que une el punto A con el centro de la Tierra C, para que la intensidad de la gravedad no pueda considerarse como constante, y varía en la razon que acabamos de expresar. El peso del punto material, en B, es mg, y el que tendrá en M, que es la fuerza que solicita el punto en su movimiento, se obtiene haciendo $AM = x$, $AC = a$, $BC = r$, por la proporcion

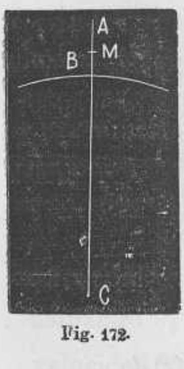


Fig. 172.

$$\frac{p}{mg}=\frac{r^2}{(a-x)^2}, \quad p=mg\frac{r^2}{(a-x)^2};$$

y la ecuacion diferencial del movimiento rectilíneo que consideramos, será

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg\frac{r^2}{(a-x)^2}, \quad \text{ó} \quad \frac{d^2x}{dt^2}=g\frac{r^2}{(a-x)^2}. \quad (1)$$

Multiplicando los dos miembros de esta ecuacion por $2dx$, se tiene

$$\frac{2dxd^2x}{dt^2}=g\frac{2r^2dx}{(a-x)^2}, \quad \text{ó} \quad d\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=2gr^2\times d\frac{1}{a-x};$$

integrando y determinando la constante por la condicion de que la velocidad v, y x sean cero, para $t=0$, tendremos

$$(2) \quad v^2=\frac{2gr^2}{a}\frac{x}{a-x}.$$

Esta fórmula nos dice que la velocidad aumenta con x ó con la distancia recorrida, como era fácil preveer *à priori*. Si queremos su valor en la superficie de la Tierra, haciendo $AB=h=a-r=x$, tendremos

$$v=\sqrt{\frac{2gr^2}{a}}\sqrt{\frac{h}{r}}=\sqrt{2gh}\sqrt{\frac{r}{a}};$$

y como $r<a$, $\sqrt{\frac{r}{a}}<1$ y $v<\sqrt{2gh}$; es decir, que la velocidad es menor que la velocidad que alcanzaria el punto móvil, si cayera de la misma altura y la gravedad fuera constante. Lo cual era tambien fácil de preveer.

Si en la fórmula (2) hacemos $x=a$, resulta $v=\infty$; es decir, que si toda la masa de la Tierra estuviera concentrada en su centro C, la velocidad del móvil al llegar á este centro sería infinita.

Poniendo en la fórmula (2) en vez de v su igual $\frac{dx}{dt}$, y despejando $dt\sqrt{\frac{2gr^2}{a}}$, tendremos

$$\sqrt{\frac{2gr^2}{a}}dt=\sqrt{\frac{a-x}{x}}\,dx,\ \text{ó}\ \sqrt{\frac{2gr^2}{a}}dt=\frac{(a-x)}{\sqrt{ax-x^2}}dx;\quad (3)$$

como la velocidad es positiva, dx y dt son ambas positivas, y por lo mismo, los radicales llevan el signo $+$. Demos al segundo miembro, para integrarle, la forma

$$\sqrt{\frac{2gr^2}{a}}dt=\frac{\frac{1}{2}a-x}{\sqrt{ax-x^2}}dx+\frac{\frac{a}{2}dx}{\sqrt{ax-x^2}};$$

el primer término es

$$\frac{\frac{1}{2}a-x}{\sqrt{ax-x^2}}dx=d\sqrt{ax-x^2};\ \text{luego}\int\frac{\frac{1}{2}a-x}{\sqrt{ax-x}}dx=\sqrt{ax-x^2};$$

el segundo

$$\int\frac{\frac{a}{2}dx}{\sqrt{ax-x^2}}=\int\frac{\frac{a}{2}dx}{\sqrt{\frac{a^2}{4}-\left(\frac{a}{2}-x\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}a\int\frac{\frac{2}{a}dx}{\sqrt{1-\left(\frac{a-2x}{a}\right)^2}}=\frac{1}{2}a\ \text{arco}\ \cos\frac{a-2x}{a};$$

reuniendo las dos integrales, y observando que la constante es cero, por ser $x=0$, para $t=0$, tendremos

$$(4)\quad \sqrt{\frac{2gr^2}{a}}\times t=\sqrt{ax-x^2}+\frac{1}{2}a\ \text{arco}\ \cos\frac{a-2x}{a}.$$

339. Esta relacion entre x y t sabemos que puede representarse siempre por una curva, que da la ley gráfica de las variaciones de estas variables, ó sea la curva de los espacios, y que en este caso es una cyclóide, como vamos á ver.

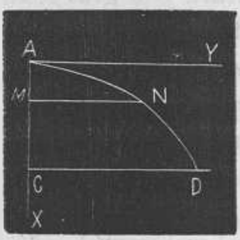


Fig. 173.

Hagamos girar una circunferencia de diámetro AC sobre la perpendicular CD á la AC (fig. 173), el punto A describe una cyclóide, cuya ecuacion diferencia referida á los ejes AX y AY, es

$$dy=\sqrt{\frac{a-x}{x}}dx=\frac{(a-x)}{\sqrt{ax-x^2}}dx;$$

los segundos miembros de esta ecuacion y de la (3), son iguales, luego los primeros deberán serlo, y tendremos

$$dy=\sqrt{\frac{2gr^2}{a}}dt, \quad \text{ó} \quad y=\sqrt{\frac{2gr^2}{a}}\times t, \quad t=\frac{y}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}};$$

esta última relacion nos dice, que el tiempo empleado por el móvil en recorrer la recta AM es proporcional á la ordenada correspondiente de la cyclóide.

Caso particular en que el móvil está á una pequeña distancia de la superficie de la Tierra.

340. Las fórmulas (2) y (4) que acabamos de encontrar, deben contener, como caso particular, las fórmulas de la velocidad y el espacio en el movimiento uniformemente acelerado, cuando la altura AB es muy pequeña con respecto al radio de la Tierra; porque entónces la gravedad es próximamente una fuerza de intensidad y direccion constantes.

Haciendo (fig. 172),

$$AB=h, \quad \text{tenemos} \quad a=r+h;$$

y la fórmula (2), será

$$v^2=\frac{2gr^2}{a}.\frac{x}{r+h-x}.$$

Pero h y x son muy pequeñas con relacion á r, de modo que podemos despreciar su diferencia en esta expresion, y poniendo r por a, tendremos

$$v^2=2gx, \quad \text{ó} \quad v=\sqrt{2gx}.$$

Tambien en la (4)

$$\tfrac{1}{2}a \text{ arco cos}\frac{a-2x}{a}=\tfrac{1}{2}a \text{ arco sen}\sqrt{1-\left(\frac{a-2x}{a}\right)^2}$$

$$=\tfrac{1}{2}a \text{ arco sen}\frac{2}{a}\sqrt{ax-x^2};$$

pero $\frac{2}{a}\sqrt{ax-x^2}=2\sqrt{\frac{x}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)}$ es muy pequeña, y podemos reemplazar el arco por su seno, y tendremos

$$\tfrac{1}{2}\,a \text{ arco sen } \frac{2}{a}\sqrt{ax-x^2}=\tfrac{1}{2}\,a\,\frac{2}{a}\cdot\sqrt{ax-x^2}=\sqrt{ax-x^2}:$$

x^2 es muy pequeña con relacion á ax, y despreciándola, tendremos, escribiendo r en vez de a,

$$\sqrt{\frac{2gr^2}{a}}\,t=\sqrt{ax}+\sqrt{ax}=2\sqrt{ax}, \quad \text{ó} \quad 2grt^2=4rx;$$

de donde

$$x=\tfrac{1}{2}g\,t^2.$$

Caida de un cuerpo pesado en un medio que resiste como el cuadrado de la velocidad.

341. Consideremos que el cuerpo, que desciende, tiene una forma tal, que permita considerarle como un punto material, para lo cual bastará que sea simétrico respecto á un eje que coincide en el descenso con la vertical. El peso del cuerpo es una fuerza dirigida segun la vertical, y suponiendo que la altura de la caida es muy pequeña, con relacion al radio de la Tierra, podremos suponer que esta fuerza es de intensidad constante. El medio que resiste como el cuadrado de la velocidad, es la resistencia del aire, que se opone á la caida, y se supone que varía proporcionalmente al cuadrado de la velocidad; de modo, que el cuerpo está sometido á la accion de dos fuerzas, de la misma direccion y opuestas, una constante, que es su peso mg, y otra la resistencia que designaremos por R y que varía en la proporcion que acabamos de indicar. Para calcular esta última llamemos K al valor que toma la velocidad v, cuando la segunda de estas fuerzas es igual á la primera; tendremos la proporcion

$$mg:\mathrm{R}::\mathrm{K}^2:v^2 \quad \text{de donde} \quad \mathrm{R}=mg\,\frac{v^2}{\mathrm{K}^2}. \quad (1)$$

Supongamos que el cuerpo empieza á moverse sin velocidad inicial; la fuerza que produce el movimiento es

$$F = mg - mg\frac{v^2}{K^2} = mg\left(1 - \frac{v^2}{K^2}\right)$$

y la ecuacion del movimiento será

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\left(1 - \frac{v^2}{K^2}\right), \quad \text{ó} \quad \frac{dv}{dt} = g\left(\frac{K^2 - v^2}{K^2}\right); \quad (2)$$

de esta deducimos

$$\frac{2gdt}{K} = \frac{2K\,dv}{K^2 - v^2}:$$

que puede ponerse bajo la forma

$$\frac{2gdt}{K} = \frac{(K+v)+(K-v)}{(K+v)(K-v)}dv = \frac{dv}{K+v} + \frac{dv}{K-v};$$

integrando, y observando que para $t=0$, la constante es cero, tendremos

$$\frac{2gt}{K} = l.(K+v) - l.(K-v), \quad \text{ó} \quad \frac{2gt}{K} = l.\frac{K+v}{K-v}. \quad (3)$$

Para despejar v, pasemos de los logaritmos á los números, y tendremos

$$\frac{K+v}{K-v} = e^{\frac{2gt}{K}}; \text{ de donde } v = K\frac{e^{\frac{2gt}{K}} - 1}{1 + e^{\frac{2}{K}}};$$

y multiplicando numerador y denominador por $e^{-\frac{gt}{K}}$, tendremos

$$v = K\frac{e^{\frac{gt}{K}} - e^{-\frac{gt}{K}}}{e^{\frac{gt}{K}} + e^{-\frac{gt}{K}}}. \quad (4)$$

Para obtener x en funcion de t, pondremos por v, $\frac{dx}{dt}$, y tendremos

$$dx = K\frac{\left(e^{\frac{gt}{K}} - e^{-\frac{gt}{K}}\right)dt}{e^{K} + e^{-\frac{gt}{K}}};$$

siendo el numerador la diferencial del denominador, salvo el factor constante $\frac{K}{g}$, tendremos integrando,

$$x=\frac{K^2}{g}\, l.\left(\frac{e^{\frac{gt}{K}}+e^{-\frac{gt}{K}}}{2}\right); \quad (5)$$

la constante de esta integracion es $-\frac{K^2}{g}\, l.\, 2$, por ser $x=0$, para $t=0$.

342. Podemos obtener fácilmente una relacion entre el espacio x y la velocidad v. De las fórmulas

$$v=\frac{dx}{dt},\ \frac{dv}{dt}=j;\ \text{resulta } vdv=jdx.$$

Pero de $F=mj$, sale, $\frac{F}{m}=j=g\left(1-\frac{v^2}{K^2}\right)$, y tendremos

$$vdv=g\left(1-\frac{v^2}{K^2}\right)dx;$$

$$dx=\frac{K^2}{2g}\times\frac{2vdv}{K^2-v^2};$$

integrando y determinando la constante por la condicion de ser $x=0$, para $v=0$, tendremos

$$x=\frac{K^2}{2g}\, l\, \frac{K^2}{K^2-v^2}. \quad (6)$$

343. Discutiendo las fórmulas (4) y (5), vemos, que la velocidad crece con el tiempo; el término $e^{-\frac{gt}{K}}=\frac{1}{e^{\frac{gt}{K}}}$ disminuye creciendo el tiempo, y se hace nulo para $t=\infty$; despreciando $e^{-\frac{gt}{K}}$ en las fórmulas, serán

$$v=K,\ x=Kt-\frac{K^2}{g}\, l.2.$$

De modo, que cuando el tiempo t es muy grande, el movimiento tiende ha hacerse uniforme, y la aceleracion $j=g-g\frac{v^2}{K^2}$, tiende hácia cero; y llega á ser cero, para $v=K$; es decir, para $t=\infty$; lo cual era fácil de prever, por ser el peso del cuerpo constante, y la resistencia del aire una fuerza variable, que aumenta con la velocidad del móvil, y concluye por ser igual á él al cabo de un tiempo infinito, y entónces $v=\mathrm{K}$.

Caso en que la resistencia llega á ser nula.

344. En este caso el punto material se mueve como si estuviera en el vacío, siendo la gravedad constante, así que las fórmulas del espacio y la velocidad deben reducirse á $v=gt=\sqrt{2gx}$, y $x=\frac{1}{2}gt^2$.

En efecto, la resistencia es $\mathrm{R}=mg\frac{v^2}{\mathrm{K}^2}$; que para $\mathrm{R}=0$, exige que sea $\mathrm{K}=\infty$; introduciendo esta condicion en las fórmulas, deben resultar las que buscamos. Para hacer esta hipótesis, desenvolvamos en serie las esponenciales $e^{\frac{gt}{\mathrm{K}}}$ y $e^{-\frac{gt}{\mathrm{K}}}$. Tenemos

$$e^{\frac{gt}{\mathrm{K}}}=1+\frac{gt}{\mathrm{K}}+\frac{g^2t^2}{2\mathrm{K}^2}+\ldots,\quad e^{-\frac{gt}{\mathrm{K}}}=1-\frac{gt}{\mathrm{K}}+\frac{g^2t^2}{2\mathrm{K}^2}-\ldots;$$

y deduciremos

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{gt}{\mathrm{K}}}-e^{-\frac{gt}{\mathrm{K}}}\right)=\frac{gt}{\mathrm{K}}+\frac{g^3t^3}{6\mathrm{K}^3}+\ldots$$

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{gt}{\mathrm{K}}}+e^{-\frac{gt}{\mathrm{K}}}\right)=1+\frac{g^2t^2}{2\mathrm{K}^2}+\ldots$$

Sustituyendo en la (4), tendremos para $\mathrm{K}=\infty$, hechas las reducciones

$$v=\mathrm{K}\frac{e^{\frac{gt}{\mathrm{K}}}-e^{-\frac{gt}{\mathrm{K}}}}{e^{\frac{gt}{\mathrm{K}}}+e^{-\frac{gt}{\mathrm{K}}}}=\mathrm{K}\frac{\frac{gt}{\mathrm{K}}+\frac{g^3t^3}{6\mathrm{K}^3}+\ldots}{1+\frac{g^2t^2}{2\mathrm{K}^2}+\ldots}=gt.$$

Tambien la (5) nos dará

$$x=\frac{\mathrm{K}^2}{g}\,l\left(\frac{e^{\frac{gt}{\mathrm{K}}}+e^{-\frac{gt}{\mathrm{K}}}}{2}\right)=\frac{\mathrm{K}^2}{g}\,l.\left(1+\frac{g^2t^2}{2\mathrm{K}^2}+\ldots\right)$$

Desarrollando $l\left(1+\frac{g^2t^2}{2K^2}+\ldots\right)$, en serie por la fórmula $l(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}\ldots$

$$l\left(1+\frac{g^2t^2}{2K^2}+\ldots\right)=\frac{g^2t^2}{2K^2}-\frac{g^4t^4}{4K^4}\ldots$$

Sustituyendo, será

$$x=\frac{K^2}{g}\left(\frac{g^2t}{2K^2}-\frac{g^4t^4}{4K^4}+\ldots\right)=\frac{gt^2}{2}+A.$$

Siendo A un polinomio cuyos términos tienen todos K en el denominador, de modo que para $K=\infty$, $A=0$; y resulta

$$x=\tfrac{1}{2}gt^2;$$

y volvemos á encontrar las fórmulas que hemos expresado al principio.

LECCION XXVII.

Movimiento de un cuerpo pesado lanzado de abajo á arriba.—Movimiento de un cuerpo en un medio que resiste como la velocidad.—Movimiento de un cuerpo no pesado en un medio que resiste como la raíz cuadrada de la velocidad. —Movimiento rectilíneo de dos puntos materiales que se atraen en razon inversa del cuadrado de su distancia.—Movimiento de un punto material atraido por un centro fijo en razon directa de la distancia.—Movimiento de un punto material repelido por un centro fijo en razon directa de la distancia.

Movimiento de un cuerpo pesado lanzado de abajo á arriba.

345. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo ó punto material, son las mismas que en el caso anterior, es decir, el peso del cuerpo y la resistencia del aire. Principia el cuerpo elevándose verticalmente, en virtud de la velocidad inicial v_0 que se le comunica, la velocidad disminuye hasta que llega á ser cero, en cuyo caso el móvil deja de subir, y principia á descender, siguiendo en este descenso las leyes que hemos indicado en el caso anterior. Conservando las notaciones allí usadas, la fuerza que solicita al móvil en el ascenso, es la suma de las dos que actúan sobre él; y tendremos, contando las x de abajo á arriba, segun la AX (fig. 174),

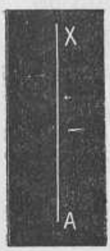


Fig. 174.

$$F=-\left(mg+mg\frac{v^2}{K^2}\right)=-mg\left(1+\frac{v^2}{K^2}\right),$$

y la ecuacion del movimiento será

$$m\frac{d^2x}{at^2}=-mg\left(1+\frac{v^2}{K^2}\right), \quad \text{ó} \quad \frac{dv}{td}=-g\left(\frac{K^2+v^2}{K^2}\right); \quad (1)$$

de donde $\frac{gdt}{K} = -\frac{kdv}{K^2+v^2}$.

Integrando y determinando la constante por la condicion de que para $t=0$, se tiene $v=v_0$, resulta

$$\frac{gt}{K} = \text{arco tg}\frac{v_0}{K} - \text{arco tg}\frac{v}{K};$$

ecuacion que nos da el tiempo en funcion de la velocidad, es decir

$$(2) \quad t = \frac{K}{g}\left(\text{arco tg}\frac{v_0}{K} - \text{arco tg}\frac{v}{K}\right).$$

Para despejar v, hagamos arco tg $\frac{v_0}{K} = a$, arco tg $\frac{v}{K} = b$, y tendremos

$$\frac{gt}{K} = a - b, \quad \text{ó} \quad b = a - \frac{gt}{K},$$

de manera que $\quad \text{tg}\, b = \dfrac{\text{tg}\, a - \text{tg}\,\frac{gt}{K}}{1 + \text{tg}\, a\, \text{tg}\frac{gt}{K}}$;

$$\text{y} \quad v = K\frac{\frac{v_0}{K} - \frac{\text{sen}\frac{gt}{K}}{\cos\frac{gt}{K}}}{1 + \frac{v_0}{K}\frac{\text{sen}\frac{tg}{K}}{\cos\frac{gt}{K}}} = K\frac{\frac{v_0}{K}\cos\frac{gt}{K} - \text{sen}\frac{gt}{K}}{\frac{v_0}{K}\text{sen}\frac{gt}{K} + \cos\frac{gt}{K}}. \quad (3)$$

Para obtener x en funcion de t, pondremos por v, $\frac{dx}{dt}$; y observando, despues de multiplicar por dt ambos miembros, que el numerador es la diferencial exacta del denominador, con sólo introducir el factor $\frac{K}{g}$, é integrando, y determinando la constante por la condicion de $x=0$, para $t=0$, tendremos

$$(4) \quad x = \frac{K^2}{g}\, l\left(\frac{v_0}{K}\,\text{sen}\,\frac{gt}{K} + \cos\frac{gt}{K}\right).$$

346. Puede obtenerse el camino x recorrido por el punto en funcion de la velocidad; para ello tenemos (342),

$$vdv = jdx;$$

pero $j = -g\left(1+\frac{v^2}{K^2}\right)$, sustituyendo será

$$vdv = -g\left(\frac{K^2+v^2}{K^2}\right)dx, \quad \text{ó} \quad 2gdx = -\frac{K^2 2vdv}{K^2+v^2};$$

integrando y determinando la constante por la condicion de que para $t=0$, se tiene $x=0$, y $v=v_0$, tendremos

$$(5) \quad x = \frac{K^2}{2g}\, l\, \frac{K^2+v_0^2}{K^2+v^2}.$$

El móvil deja de ascender, y principia á descender, cuando la velocidad es cero: llamando t_1 al tiempo empleado en el ascenso, tendremos, haciendo $v=0$ en la fórmula (3),

$$\frac{v_0}{K}\cos\frac{gt_1}{K} - \operatorname{sen}\frac{gt_1}{K} = 0, \ \text{ó} \ \operatorname{tg}\frac{gt_1}{K} = \frac{v_0}{K},\ t_1 = \frac{K}{g}\operatorname{arco}\operatorname{tg}\frac{v_0}{K}:$$

y tambien en la fórmula (5), llamando h á la altura,

$$h = \frac{K^2}{2g}\, l\, \frac{K^2+v_0^2}{K^2}.$$

Si llamamos v', á la velocidad con que el móvil llega al punto de partida A, en el descenso, tendremos (342),

$$h = \frac{K^2}{2g}\, l.\frac{K^2}{K^2-v'^2};$$

de donde

$$\frac{K^2}{2g}\, l.\frac{K^2+v_0^2}{K^2} = \frac{K^2}{2g}\, l.\frac{K^2}{K^2-v'^2}, \quad \text{ó} \quad \frac{K^2+v_0^2}{K^2} = \frac{K^2}{K^2-v'^2};$$

de esta última se deduce

$$v' = v_0\frac{K}{\sqrt{K^2+v_0^2}}.$$

Expresion que nos dice, que $v' < v_0$, por ser $\frac{K}{\sqrt{K^2+v_0^2}} < 1$; así que, el móvil vuelve al punto de partida con una velocidad menor que la velocidad inicial v_0.

El tiempo t_2 del descenso se determina por la fórmula (3) núm. 341,

$$\frac{2gt}{K} = l.\frac{K+v}{K-v},$$

poniendo v' en vez de v, y tendremos

$$t_2=\frac{K}{g}\ l.\sqrt{\frac{K+v'}{K-v'}}=\frac{K}{g}\ l.\frac{\sqrt{v_0^2+K^2}+v_0}{K}.$$

El tiempo total T, que el móvil emplea hasta volver á su posicion inicial, es

$$T=t_1+t_2=\frac{K}{g}\left(\text{arco tg}\frac{v_0}{K}+l.\frac{\sqrt{v^{02}+K^2}+v_0}{K}\right).$$

Hallando el tiempo T experimentalmente, puede servir esta fórmula para determinar la constante K, y ver si la resistencia sigue en sus variaciones la ley que hemos supuesto.

Movimiento de un cuerpo pesado en un medio que resiste como la velocidad.

347. En el caso en que el punto material móvil va animado de una pequeña velocidad, la experiencia enseña y se admite, que la resistencia del medio es proporcional á esta velocidad. Tal sucederia, por ejemplo, si un cuerpo pesado descendiera en un líquido de densidad poco menor que la suya, solicitado por su propio peso. En este caso tendremos, conservando la notacion de los párrafos anteriores

$$m\frac{dv}{dt}=mg\left(1-\frac{v}{K}\right),\quad \text{ó}\quad g\frac{dt}{K}=\frac{dv}{K-v};\qquad (1)$$

integrando y determinando la constante por la condicion de que no haya velocidad inicial, resulta

$$\frac{gt}{K}=l\frac{K}{K-v},\quad \text{ó}\quad e^{\frac{gt}{K}}=\frac{K}{K-v};$$

de donde

$$(2)\qquad v=K\left(1-e^{-\frac{gt}{K}}\right),\quad dv=Kdt-Ke^{-\frac{gt}{K}}dt;$$

integrando y determinando la constante por la condicion de ser $x=0$, para $t=0$, resulta por fin

$$(3)\qquad x=\mathrm{K}t-\frac{\mathrm{K}^2}{g}\left(1-e^{-\frac{gt}{\mathrm{K}}}\right).$$

Las fórmulas (2) y (3) resuelven el problema. Discutiendo la (2) se obtienen resultados análogos á los del ejemplo anterior.

Movimiento de un cuerpo no pesado en un medio que resiste como la raíz cuadrada de la velocidad.

348. Es importante este caso por sus propiedades analíticas, y porque se aplica en la teoría de los flúidos imponderables de la Física.

Como el móvil sólo está solicitado por la resistencia del medio, que actúa en sentido contrario del movimiento, la ecuacion del problema será

$$(1)\qquad m\frac{dv}{dt}=-\alpha.m\sqrt{v};$$

siendo la unidad de velocidad arbitraria, la escogeremos de manera que $\alpha=2$, y la ecuacion precedente se reduce á

$$\frac{dv}{dt}=-2\sqrt{v},\quad \text{ó}\quad dt=-\frac{dv}{2\sqrt{v}},\quad t=-\sqrt{v}+\mathrm{C}.$$

Para determinar la constante, sea v_0 la velocidad para $t=0$; tendremos

$$t=\sqrt{v_0}-\sqrt{v},\quad \text{ó}\quad v=(\sqrt{v_0}-t)^2;\quad (2)$$

de aquí sale

$$dx=(\sqrt{v_0}-t)^2dt=v_0dt-2\sqrt{v_0}tdt+t^2dt.$$

$$x=v_0t-\sqrt{v_0}t^2+\frac{t^3}{3}=\frac{v_0\sqrt{v_0}-(\sqrt{v_0}-t)^3}{3}.\quad (3)$$

La fórmula (2) nos dice, que v disminuye creciendo t, y que $v=0$, cuando $t=\sqrt{v_0}$, siendo entónces $x=\frac{v_0\sqrt{v_0}}{3}$. De modo, que el móvil se detiene despues de haber recorrido el espacio $\frac{v^0\sqrt{v_0}}{3}$, y como la fuerza aceleratriz es nula en este momento, el cuerpo ó punto material permanecerá indefinidamente en reposo. Pero si damos á t un valor mayor que $\sqrt{v_0}$, las fórmulas (2) y (3) dan para v y x valores diferentes, de cero el primero, y distinto de $\frac{v_0\sqrt{v_0}}{3}$ el segundo; resultado que aparece en contradicion con la consecuencia anterior. Pero si nos remontamos á la ecuacion (1), vemos que esta se verifica para $v=0$, cualquiera que sea el valor de t, de modo que esta es una solucion particular aplicable al caso de ser $t=\sqrt{v_0}$, pero no puede aplicarse á $t<\sqrt{v_0}$, porque entónces v no es cero. Así, para $t<\sqrt{v_0}$, aplicaremos las fórmulas (2) y (3); y la solucion particular, que da la (1), para $t \geqq \sqrt{v_0}$.

Movimiento rectilíneo de dos puntos materiales que se atraen en razon inversa del cuadrado de su distancia.

349. El movimiento de los cuerpos pesados por la atraccion de la Tierra, no es más que un caso particular del movimiento debido á la atraccion universal, que como probaremos luégo, se ejerce en razon directa de las masas é inversa de los cuadrados de las distancias; así, que el movimiento rectilíneo de dos puntos materiales, que se atraen segun esta ley, puede estudiarse del mismo modo que hemos estudiado aquél.

Sean m y m' las masas de estos dos puntos, x y x' sus distancias á un orígen fijo tomado sobre la recta que los une, u la distancia que los separa al cabo del tiempo t. Las ecuaciones del movimiento, observando que la fuerza F, es igual á $f\frac{mm'}{u^2}$ para uno, y $-f\frac{mm'}{u^2}$ para el otro, serán

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{fmm'}{u^2},\quad m'\frac{d^2x'}{dt^2}=-\frac{fmm'}{u^2};$$

sumándolas resulta

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+m'\frac{d^2x'}{dt^2}=0,$$

que integrada, y llamando a y b, á las constantes de la integracion, será

$$\frac{mx+m'x'}{m+m'}=at+b;$$

si llamamos x_1 á la distancia del centro de gravedad de las dos masas al orígen, tenemos

$$(m+m')\,x_1=mx+m'x',\quad \text{ó}\quad x_1=\frac{mx+m'x'}{m+m'}$$

y la ecuacion interior se convierte en

$$x_1=at+b;$$

que nos dice, que el centro de gravedad de las dos masas se mueve con un movimiento uniforme y rectilíneo.

Restando las dos ecuaciones del movimiento, tendremos

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{d^2x'}{dt^2}=\frac{f(m+m')}{u^2}$$

y como $u=x'-x$, $\dfrac{d^2u}{dt^2}=\dfrac{d^2x'}{dt^2}-\dfrac{d^2x}{dt^2}$;

tendremos

$$\frac{d^2u}{dt^2}=-\frac{f(m+m')}{u^2}.$$

Así, uno de los puntos se mueve respecto al otro, como si fuera atraido por la suma de las masas $m+m'$, colocada en un centro fijo. En esta ecuacion determinaremos u, y conocida esta tendremos x y x' por las relaciones $u=x'-x$, y $\dfrac{mx+mx'}{m+m}=at+b$, y queda el problema resuelto.

Movimiento de un punto material atraido por un punto fijo en razon directa de su distancia.

350. Este caso de movimiento y el siguiente son muy útiles en el estudio de las atracciones y repulsiones eléctricas y magnéticas

Supongamos en A (fig. 175), un punto material atraido por un centro fijo O, en razon directa de su distancia á este centro, que tomaremos por orígen de las distancias x, y que parte de A sin velocidad inicial. La ecuacion del movimiento, siendo n^2 la medida de la atraccion ejercida sobre la unidad de masa del cuerpo colocado á la unidad de distancia, será

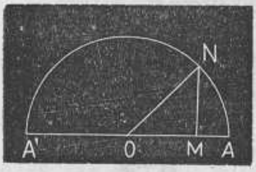


Fig. 175

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-n^2mx, \quad \text{ó} \quad \frac{d^2x}{dt^2}=-n^2x; \quad (1)$$

multiplicando por $2dx$ é integrando, y haciendo $AO=a$, tendremos

$$\frac{2dxd^2x}{dt^2}=-2n^2xdx, \text{ y } \left(\frac{dx}{dt}\right)^2=n^2(a^2-x^2); \quad (2)$$

hemos determinado la constante por la condicion de ser para $t=0$, $x=a$, y $v=\frac{dx}{dt}=0$.

Extrayendo la raíz cuadrada, y tomándola con signo ménos por ser la velocidad negativa, tenemos,

$$dx=-ndt\sqrt{a^2-x^2}, \quad \text{ó} \quad ndt=-\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

integrando, y determinando la constante por la condicion de ser $x=0$, para $t=0$, que da constante $=0$, se tiene

$$nt=\text{arco cos}\frac{x}{a}, \quad \text{ó} \quad \frac{x}{a}=\cos nt, \; x=a\cos nt; \quad (3)$$

diferenciando esta, se obtiene

$$v = -na \operatorname{sen} nt. \quad (4)$$

351. Discusion. Cuando el móvil llega al punto O, $x=0$, $nt=\frac{\pi}{2}$, $t=\frac{\pi}{2n}$, y $v=-na$; el móvil no se detiene en el punto O, sino que sigue moviéndose á la izquierda en virtud de la velocidad adquirida. Por la accion de la fuerza atractiva, esta velocidad $-na$ va disminuyendo, hasta que $v=0$; entónces $nt=\pi$, ó $t=\frac{\pi}{n}$, y por lo mismo $x=-a$; es decir, que el punto móvil se detiene en un punto A′, tal que A′O = AO.

En el punto A′ se encuentra sin velocidad inicial y exactamente en las mismas condiciones que en A, será atraido hácia O, llegará á este punto con una velocidad na, continuará hasta A y volverá á repetirse el movimiento como al principio; de manera, que el móvil ejecutará una infinidad de oscilaciones iguales de A á A′, y de A′ á A.

La relacion entre el espacio y el tiempo puede representarse en este caso fácilmente por una curva, que será la curva de los espacios. Para ello, sobre AA′ (fig. 175), como diámetro, construyamos una semi-circunferencia, sea $OM=x$, tiremos MN perpendicular al diámetro, y tendremos

$$x = a \cos \frac{AN}{a};$$

pero $$x = a \cos nt;$$

luego $$\frac{AN}{a} = nt, \quad \text{ó} \quad AN = ant, \; t = \frac{AN}{an};$$

de modo que $\frac{AN}{an}$, representa el tiempo que el móvil emplea en ir desde el punto A á un punto cualquiera M.

Movimiento de un punto material repelido por un centro fijo en razon directa de su distancia.

252. Supongamos que al principio el punto material, animado de una velocidad representada por $-nb$, está en el punto A (fig. 176), á una distancia $OA=a$; la fuerza aceleratriz será n^2mx,

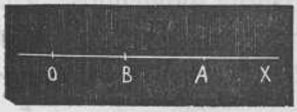


Fig. 176.

y la ecuacion del movimiento es

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2}=mn^2x,\quad \text{ó}\quad \frac{d^2x}{dt^2}=n^2x;\qquad (1)$$

multiplicando por $2dx$ é integrando, se obtiene

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=n^2x^2+C;$$

para $t=0$, $v=\dfrac{dx}{dt}=-nb$, $x=a$; luego

$$n^2b^2=n^2a^2+C,$$

y eliminando C; resulta

$$v^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=n^2(x^2+b^2-a^2),\qquad (2)$$

ó

$$v=-n\sqrt{x^2+b^2-a^2}.\qquad (3)$$

Ponemos el signo — al radical por ser negativa la velocidad al principio. Tambien se deduce

$$-n\,dt=\frac{dx}{\sqrt{x^2+b^2-a^2}},$$

que integrada y determinada la constante, por la condicion de ser para $t=0$, $x=a$, resulta

$$-nt=l\,\frac{x+\sqrt{x^2+b^2-a^2}}{a+b},\quad \text{ó}\quad x+\sqrt{x^2+b^2-a^2}=(a+b)e^{-nt};$$

de donde

$$x=\frac{(a+b)e^{-nt}+(a-b)e^{nt}}{2}.\qquad (4)$$

353. Discusion. Pueden presentarse tres casos, segun que $b>a$, $b<a$, $b=a$.

1.er caso, $b>a$. En este caso la velocidad no puede ser cero, como se ve en la fórmula (3); el móvil llegará al orígen en que $x=0$, con una velocidad $v=-n\sqrt{b^2-a^2}$, al cabo del tiempo

$$t=-\frac{1}{n}\,l.\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a+b}.$$

Este valor de t es positivo, porque $\sqrt{b^2-a^2}<a+b$; el móvil pasará del punto O, y como seguirá siendo repelido por el centro O, se moverá indefinidamente hácia la izquierda.

2.o caso, $b<a$. La velocidad será nula en este caso cuando se tenga que

$$x=\sqrt{a^2-b^2},$$

valor de x, que corresponde á un punto B, situado entre A y O; el tiempo t en que el móvil llegará á este punto, es

$$t=-\frac{1}{n}\,l\,\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}.$$

Llegado á este punto, y repelido por el centro fijo, principiará á moverse á la derecha, y su velocidad será positiva, de modo, que á partir de este instante, deberemos usar la fórmula

$$v=+n\sqrt{x^2+b^2-a^2}.$$

En este caso, el móvil no puede llegar al punto O, porque para $x=0$, la fórmula

$$t=-\frac{1}{n}\,l\,\frac{x+\sqrt{x^2+b^2-a^2}}{a+b}$$

da

$$t=-\frac{1}{n}\,l\,\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a+b},$$

en la que, como $\sqrt{b^2-a^2}$ es imaginaria, t tiene un valor imaginario.

3.er caso, $b=a$. Las fórmulas se reducen á

$$v=-nx,\ 2x=2ae^{-nt},\ t=-\frac{1}{n}\,l\,\frac{x}{a}.$$

La primera nos dice que $v=0$, para $x=0$. Pero la segunda y la tercera nos dan para $x=0$, $t=\infty$; es decir, que el móvil se apróxima á O contínuamente, y no llegará á él, sino cuando $t=\infty$.

LECCION XXVIII.

Movimiento curvilíneo de un punto material libre.—Fuerza tangencial, fuerza centrípeta.—Proyeccion del movimiento sobre un plano fijo.—Proyeccion del movimiento sobre una recta fija.—Ecuaciones diferenciales del movimiento de un punto material. Indicaciones generales sobre su integracion.—Consecuencias de las fórmulas del movimiento de un punto. Teoremas de las cantidades de movimiento.—Teorema de los áreas; su recíproco.

Movimiento curvilíneo de un punto material libre.

354. El movimiento de un punto material será en general curvilíneo, excepto en los casos examinados en las lecciones anteriores; es decir, cuando la fuerza que actúe sobre él sea de direccion constante, y no hay velocidad inicial, y siendo la direccion de la fuerza constante, cuando hay una velocidad inicial cuya direccion coincida con la direccion de la fuerza.

En la mayor parte de los casos la trayectoría del movimiento curvilíneo será una curva alabeada, cuyos elementos estarán situados de un modo cualquiera en el espacio, y en este concepto general debemos estudiar el movimiento. Hay dos casos, sin embargo, en los cuales podemos asegurar, *à priori*, que el movimiento se verificará en un plano, ó lo que es lo mismo, que la trayectoría será plana. 1.° Cuando la fuerza que actúa sobre el punto material permanece constantemente paralela á un plano fijo, siendo la velocidad inicial tambien paralela á este plano. En efecto, en el primer intervalo de tiempo la direccion de la velocidad del punto, que será la resultante de la velocidad inicial y de la que le comunica la fuerza, estará situada en el plano paralelo al plano fijo, que determinan la direccion de la velocidad inicial y la direccion de la fuerza; en el segundo intervalo tambien estará la velocidad del punto en el plano así determinado, y lo mismo sucederá en los intervalos siguientes, y esto independientemente de la magnitud de estos intervalos; y como los elementos de la trayectoría coinciden con las direcciones de las respectivas velocidades, todos los elementos de la trayectoría estarán en un plano, y ésta, por lo tanto, será plana. 2.º Cuando la fuerza está siempre dirigida hácia un punto fijo, siendo cualquiera la direccion de la velocidad inicial. Como en el primer caso se prueba, con la mayor facilidad, que el movimiento se verifica en el plano que determinan la direccion de la velocidad y el punto fijo. En estos dos casos, y en todos los que pueden reconocerse, *à priori*, que el movimiento se verifica en un plano, su estudio es mucho más sencillo; así, que es muy conveniente averiguar, si es posible, si el movimiento tiene lugar ó no en un plano.

Fuerza tangencial, fuerza centrípeta.

355. Supongamos una fuerza F que ejerce su accion sobre un punto material de masa m, al cual comunica la aceleracion j; de cualquiera manera que ésta fuerza cambie de intensidad y direccion con el tiempo, la aceleracion total j del movimiento del punto, es en cada instante, de la misma direccion que la fuerza; y la magnitud de ésta aceleracion total está ligada con la de la fuerza, por la relacion

$$F = mj.$$

Si descomponemos la aceleracion total j, en el movimiento del punto material sujeto á la accion de la fuerza F, en dos componentes dirigidas, una segun la tangente á la trayectoría del móvil, y otra segun el radio de curvatura, tendremos dos aceleraciones componentes, cuyos valores son (297)

$$\frac{dv}{dt}, \quad \frac{v^2}{\rho};$$

y que hemos llamado aceleracion tangencial y aceleracion centrípeta. Descompongamos del mismo modo la fuerza F en dos componentes F_1 y F_2, dirigidas segun las mismas rectas. El paralelógramo que servirá para hacer esta descomposicion será evidentemente semejante, al que sirve para hacer la descomposicion de la aceleracion total; puesto que los lados y las diagonales de estos dos paralelógramos están contados sobre las mismas rectas, y son ademas proporcionales: por lo tanto existirá entre las dos componentes F_1 y F_2 de la fuerza F, y las componentes $\frac{dv}{dt}$ y $\frac{v^2}{\rho}$, de la aceleracion total j, la misma relacion que entre la fuerza F y la aceleracion total j; y tendremos

$$F_1 = m\frac{dv}{dt}, \quad F_2 = m\frac{v^2}{\rho}.$$

La fuerza F_1, que es la proyeccion de la fuerza F sobre la tangente á la trayectoría del móvil, se llama *fuerza tangencial*.

La fuerza F_2, proyeccion de la fuerza F sobre el radio de curvatura de esta trayectoría, se llama *fuerza centrípeta*.

La primera de estas fuerzas componentes es la que produce las variaciones de la velocidad, y la segunda los cambios de direccion de la velocidad del móvil. De manera, que si esta fuerza tangencial fuera constantemente nula, es decir, si la fuerza F fuera siempre normal á la trayectoría, $F_1 = 0$, y $dv = 0$, la velocidad v sería constante, y el movimiento sería uniforme. Del mismo modo, si $F_2=0$, es decir, si F estuviera siempre dirigida segun la velocidad del móvil, ó segun la tangente á la trayectoría, sería $\rho=\infty$, la trayectoría sería una recta, y el movimiento sería rectilíneo.

Proyeccion del movimiento sobre un plano fijo.

356. Hemos visto ya (200) lo que se entiende por proyeccion del movimiento de un punto sobre un plano, y tambien hemos demostrado que la velocidad y la aceleracion total en el movimiento proyectado, son las proyecciones de la velocidad y de la aceleracion total del móvil en el espacio (301). Vamos ahora á probar que la fuerza que produciria el movimiento proyectado, es la proyeccion de la fuerza que actúa sobre el punto móvil en el espacio.

Sean para ello F la fuerza que actúa sobre el punto material, m su masa, y j la aceleracion de su movimiento; la aceleracion j y la fuerza F tienen en cada instante la misma direccion, y entre sus magnitudes existe la relacion

$$F=mj;$$

llamemos α el ángulo que forma la tangente á la trayectoría con el plano de proyeccion, F' y j' á las proyecciones de la fuerza y la aceleracion sobre el mismo plano; multiplicando los dos miembros de la ecuacion anterior por $\cos\alpha$, tendremos

$$F\cos\alpha=mj\cos\alpha,\quad \text{ó}\quad F'=mj'.$$

De manera, que el movimiento del punto proyectado sobre el plano fijo, es el movimiento que tomaria un punto material de masa m, por la accion de la fuerza proyectada F', habiendo recibido una velocidad igual á la proyeccion de la velocidad inicial del móvil en el espacio.

Proyeccion del movimiento sobre una recta fija.

357. Cuanto acabamos de decir para la proyeccion del movimiento sobre un plano fijo, tiene lugar cuando éste se proyecta sobre una recta fija. Ya vimos (302), que la velocidad y la aceleracion total en el movimiento proyectado, son las proyecciones de la velocidad y la aceleracion total del movimiento en el espacio. Repitiendo el razonamiento del párrafo anterior, tendremos, que el movimiento proyectado es el que tomaria sobre la recta fija un punto material de la misma masa, que el que se mueve en el espacio, si estuviera constantemente sujeto á la accion de la fuerza proyectada, y hubiera recibido una velocidad inicial igual á la proyeccion de la velocidad inicial del móvil en el espacio. Este resultado, como el del número anterior, son ciertos de cualquier modo que se efectúen las proyecciones, aunque en el razonamiento hemos supuesto que las proyecciones son ortogonales.

Ecuaciones diferenciales del movimiento de un punto material. Indicaciones generales sobre su integracion.

358. Si suponemos referido el movimiento de un punto material á un sistema de ejes coordenados rectilíneos, rectangulares ú oblícuos, el movimiento será completamente conocido, cuando se conozcan las coordenadas del punto, en cada uno de los instantes en que podemos suponer dividido el tiempo; es decir, conociendo las proyecciones del movimiento sobre cada uno de los ejes coordenados, en cada uno de los intervalos de tiempo considerados. Mas cada uno de los movimientos proyectados es precisamente el movimiento rectilíneo, que tomará un punto material de la misma masa, que aquel de

que se trata, si estuviera sujeto á la accion de la fuerza proyectada sobre el eje, y si hubiera recibido una velocidad inicial igual á la proyeccion de la velocidad inicial del móvil en el espacio (357). Llamemos m á la masa del punto material, cuyo movimiento queremos estudiar, x, y, z á las coordenadas de este punto en un instante cualquiera, X, Y, Z á las componentes ó proyecciones sobre los ejes, de la fuerza F, que suponemos aplicada al móvil. Las ecuaciones diferenciales de los movimientos, proyecciones del propuesto sobre los tres ejes, serán

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\mathrm{X},\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=\mathrm{Y},\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=\mathrm{Z}.$$

Tomadas estas tres ecuaciones á la vez, son las del movimiento del punto en el espacio, y cada una de ellas por separado es la ecuacion del movimiento de la proyeccion del punto sobre el eje correspondiente. Colectivamente se llaman *ecuaciones diferenciales* del movimiento de un punto material.

En el caso que se sepa, *à priori*, que el movimiento tiene lugar en un plano, tomaremos por plano de las XY este plano, será $z=0$, y dos ecuaciones bastarán para definir el movimiento del punto material, que serán

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\mathrm{X},\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=\mathrm{Y}.$$

359. Sobre la integracion de cada una de las ecuaciones diferenciales que acabamos de obtener, podemos hacer consideraciones análogas á las que hicimos (260), para la integracion de la ecuacion $m\frac{d^2x}{dt^2}=\mathrm{F}$; la integracion será más ó ménos difícil, y se simplificará, en general, tomando las ecuaciones á la vez, ó formando sistema; y cuando la integracion esté ejecutada, las ecuaciones que resulten, darán x, y, z en funcion de t, que serán las ecuaciones finitas del movimiento del punto material.

La integracion de las tres ecuaciones diferenciales de segundo órden, introducirá en el cálculo seis constantes arbitrarias, que determinaremos por las condiciones iniciales del movimiento; es decir, por los valores que tienen x, y, z; y $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; para $t=0$. En el caso de ser sólo dos las ecuaciones del movimiento, habrá cuatro constantes arbitrarias que determinar, que se determinarán tambien por las circunstancias iniciales del movimiento.

En todo caso, y cualesquiera que sean las dificultades de la integracion, el movimiento estará definido y caracterizado por las ecuaciones diferenciales que acabamos de establecer, que resuelven en general el problema del movimiento de un punto material.

Consecuencias de las fórmulas del movimiento de un punto material. Teoremas de las cantidades de movimiento.

360. Antes de estudiar estas consecuencias, fijaremos bien el sentido de lo que se llama cantidad de movimiento y fuerza viva. Ya sabemos que se llama *cantidad de movimiento*, de un punto material, el producto mv que se obtiene multiplicando su masa m por la velocidad v, de que va animado. Tambien vimos (333) que siendo F la fuerza que solicita el punto material, existe la relacion

$$F = mv,$$

en virtud de la cual, la medida de una fuerza es su cantidad de movimiento, y por lo tanto, que podemos considerar á esta cantidad como una fuerza, á la cual daremos la direccion de la velocidad v, y atribuirle el signo de esta velocidad.

Sea AB (fig. 177), la trayectoría que recorre el punto M en el sentido AB, y v la velocidad de este punto en la posicion M, dirigida segun la tangente MT á la trayectoría. La cantidad de movimiento del punto material, en este instante, es mv, y la podremos representar por una longitud MN que le sea proporcional, tomada sobre la tangente, á partir del punto de contacto en el sentido del movimiento.

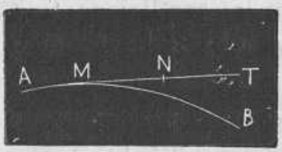


Fig. 177.

Si proyectamos el movimiento sobre un eje OX, y llamamos v_x á la proyeccion de la velocidad, mv_x será la cantidad de movimiento proyectado sobre el eje OX, y tendrá el signo de la velocidad proyectada v_x.

La recta MN, que equivale á la cantidad de movimiento mv, puede descomponerse como la fuerza F que representa, segun las direcciones de tres ejes coordenados, y cada componente será la cantidad de movimiento proyectada sobre el eje á que se refiera, paralelamente al plano de los otros dos ejes. Ordinariamente los ejes son rectangulares y las proyecciones ortogonales. Tambien podemos tomar el momento de la cantidad de movimiento con respecto á un eje OX, el cual será el producto de la proyeccion de MN sobre un plano perpendicular á OX, por la más corta distancia de este eje á la recta MN, con el signo + ó el signo —, segun los convenios establecidos en la Estática (75).

361. Se llama *fuerza viva* de un punto material de masa m y velocidad v, el producto mv^2 de la masa del punto por el cuadrado de su velocidad. No hay necesidad de atribuir á la fuerza viva una direccion determinada, como á la cantidad de movimiento.

La denominacion impropia de fuerza viva consagrada por el uso, no es más que un nombre dado al producto mv^2; más adelante veremos el orígen histórico de esta definicion, en la cual la palabra fuerza, no tiene su significacion ordinaria de causa de movimiento. La fuerza viva de un punto es siempre una cantidad positiva.

362. De la forma que presentan las ecuaciones del movimiento, tanto rectilíneo como curvilíneo, de un punto material, se deducen várias consecuencias que facilitan el estudio del problema del movimiento del punto, y que presentadas bajo la forma de teoremas, son otras tantas propiedades de este movimiento. Estos teoremas simplifican el planteo de las cuestiones de movimiento de un punto, dando ecuaciones, que llevan ya efectuada una de las dos integraciones, que exigen en general las ecuaciones de este movimiento.

La ecuacion del movimiento rectilíneo de un punto material de masa m, producido por la accion de una fuerza F, es

$$m\frac{dv}{dt}=\mathrm{F}, \quad \text{ó} \quad mdv=\mathrm{F}\,dt;$$

que integrada entre los límites 0 y t, y designando por v_0 la velocidad inicial, dará

$$mv-mv_0=\int_0^t \mathrm{F}\,dt.$$

La cantidad Fdt se llama *impulso elemental* de la fuerza F, y la integral $\int_0^t \mathrm{F}\,dt$ se llama *impulso total* de la misma fuerza, durante el tiempo á que esta integral se refiere.

Con estas definiciones podemos enunciar las anteriores ecuaciones en los siguientes términos: 1.ª *El incremento de la cantidad de movimiento mdv, durante el tiempo dt, es igual al impulso elemental* Fdt *de la fuerza* F; 2.º *El incremento total de la cantidad de movimiento* $(mv-mv_0)$, *durante el tiempo t, es igual al impulso total de la fuerza* F, *durante el mismo tiempò t.*

363. Si el punto material se mueve de un modo cualquiera en el espacio, y proyectamos su movimiento sobre una recta fija, podremos aplicar los dos teoremas que acabamos de enunciar para el movimiento rectilíneo; y tendremos, que el incremento que experimenta la cantidad de movimiento proyectado, durante un intervalo cualquiera de tiempo, infinitamente pequeño ó finito, es siempre igual al impulso de la fuerza proyectada durante el mismo intervalo de tiempo. Entiéndese aquí por cantidad de movimiento proyectada en un instante cualquiera, el producto de la masa del móvil por la proyeccion de la velocidad de que va animado en este instante.

En el moviento curvilíneo la fuerza tangencial, que hemos designado por F_1, es

$$F_1 = m\frac{dv}{dt};$$

de la cual deduciremos

$$mdv = F_1 dt \quad \text{y } mv - mv_0 = \int_0^t F_1 dt;$$

ecuaciones que nos dicen que en este caso el incremento de la cantidad de movimiento, de un punto material, durante un tiempo cualquiera infinitamente pequeño ó finito, es igual al impulso de la fuerza tangencial durante este tiempo.

Puede determinarse la integral $\int_0^t F\,dt$, que hemos llamado impulso total de la fuerza F, exacta ó aproximadamente cuando la fuerza es conocida en funcion del tiempo t; cuando la fuerza es dada en funcion de otras cantidades, que son funciones de t, como la velocidad del móvil, su distancia un punto fijo, etc., no podrá encontrarse inmediatamente el valor de la integral $\int_0^t \mathrm{F}dt$; y sólo será esto fácil, cuando se conozcan las leyes del movimiento, y en su consecuencia pueda expresarse F en funcion de t: en todo caso la integral $\int_0^t \mathrm{F}dt$ tendrá un valor determinado, cualesquiera que sean las dificultades de cálculo que presente su integracion.

364. Para establecer el teorema de los momentos de las cantidades de movimiento, consideremos primero que el movimiento se verifica en un plano. De la relacion $\mathrm{F}=mj$, sale $j=\frac{\mathrm{F}}{m}$; y de $j=\frac{dv}{dt}$, $dv=jdt=\frac{\mathrm{F}}{m}dt$; la direccion de la aceleracion es la misma, que la de la fuerza que la produce. Sea MT (fig. 178), la línea que representa la velocidad v del punto material al fin del tiempo t, MN una recta igual y paralela á la que representa su velocidad v' al fin del tiempo $t+dt$; MP igual y paralela á TN es la velocidad adquirida elemental durante el tiempo dt. La velocidad v', ó MN es la resultante de las velocidades $v=\mathrm{MT}$, y $dv=\mathrm{MP}=\frac{\mathrm{F}}{m}dt$.

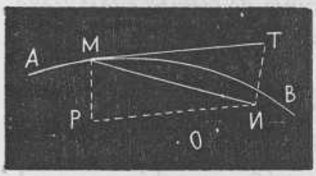


Fig. 178.

Mas las velocidades se componen como las fuerzas, y el teorema de los momentos es aplicable á las velocidades; y tendremos, que el momento de la velocidad resultante, con respecto á un punto O del plano en que se efectúa el movimiento, es igual á la suma de los momentos de las velocidades componentes con respecto á este mismo punto. Llamando p, p', p'' á las distancias del punto O á las rectas MT, MN, MP, tendremos

$$v'\times p'=v\times p+\frac{\mathrm{F}}{m}dt\times p''$$

ó $$mv' \times p' - mv \times p = \mathrm{F}dt \times p'';$$

ecuacion que nos dice, *que el incremento del momento de la cantidad de movimiento del punto material con respecto al punto* O, *durante el tiempo dt, es igual al momento del impulso elemental, durante este mismo tiempo dt, tomado con respecto al mismo punto* O. Llamamos momento de la cantidad de movimiento mv, y del impulso elemental Fdt, á los productos de estas cantidades por las distancias del punto O á las direcciones de v y de F. Sumando miembro á miembro todas las ecuaciones análogas á la anterior, correspondientes á los diferentes intervalos de tiempo que componen el tiempo total t, tendremos el teorema siguiente:

El incremento total del momento de la cantidad de movimiento del punto material con respecto á un punto del plano de la trayectoria, durante un intervalo de tiempo cualquiera, es igual á la suma de los momentos, con respecto á este punto, de los impulsos elementales de la fuerza correspondientes á los diversos elementos de este tiempo.

365. Este teorema, demostrado para el movimiento que tiene lugar en un plano, se verifica tambien para la proyeccion de un movimiento cualquiera sobre un plano fijo; y podemos decir, que de cualquier manera que un punto material se mueva en el espacio por la accion de una fuerza, si proyectamos este movimiento sobre un plano fijo, el incremento total del momento de la cantidad de movimiento proyectado, con respecto á un punto del plano de proyeccion, durante un tiempo cualquiera, es igual á la suma de los momentos, con respecto á este punto, de los impulsos elementales de la fuerza proyectada, correspondientes á los diversos elementos de este tiempo.

366. Puede demostrarse analíticamente el teorema de los momentos de las cantidades de movimiento por me-

dio de las ecuaciones del movimiento. Estas ecuaciones son:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\mathrm{X},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=\mathrm{Y},$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=\mathrm{Z}.$$

Tomemos los momentos con respecto al eje OX, por ejemplo. Multipliquemos la segunda por z, y la tercera por y, y restemos la segunda de la tercera; resultará

$$m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\mathrm{Z}y-\mathrm{Y}z.$$

Multiplicando por dt, é integrando entre los límites t_0 y t, tendremos

$$m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=\int_{t_0}^{t}(\mathrm{Z}y-\mathrm{Y}z)dt+\mathrm{C};$$

el primer miembro de esta ecuacion puede escribirse bajo la forma

$$m\frac{dz}{dt}\times y-m\frac{dy}{dt}\times z,$$

que representa el momento, con respecto al eje OX, de la cantidad de movimiento del punto material, tomado al fin del tiempo t. La constante C es el valor que toma este momento cuando $t=t_0$, ó en el instante inicial, y podemos representarlo por la expresion

$$m\left[y_0\left(\frac{dz}{dt}\right)_0-z_0\left(\frac{dy}{dt}\right)_0\right].$$

La integral del segundo miembro representa la suma de los momentos de la fuerza, cuyas componentes son X, Y, Z, durante el intervalo $t-t_0$, con respecto al eje OX.

Y la ecuacion puede ponerse bajo la forma

$$m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)-m\left[y_0\left(\frac{dz}{dt}\right)_0-z_0\left(\frac{dy}{dt}\right)_0\right]$$

$$=\int_{t_0}^{t}(\mathrm{Z}y-\mathrm{Y}z)\,dt,$$

ó empleando la notacion de los momentos

$$M_{OX}(mv) - M_{OX}(mv_0) = \int_{t_0}^{t} M_{OX}\, F\, dt;$$

que es la ecuacion del teorema enunciado.

Teorema de las áreas; su recíproco.

367. Supongamos que el movimiento se verifica en un plano y que la direccion de la fuerza F pasa constantemente por un punto O de este plano, el momento del impulso elemental Fdt de la fuerza F, con respecto á este punto, será siempre igual cero, y la ecuacion del número 364, nos dará

$$mvp = mv'p';$$

es decir, que mvp es una cantidad constante, que no cambiará de valor con el tiempo, y podremos escribir

$$mvp = C;$$

multiplicando los dos miembros de esta igualdad por la cantidad constante $\frac{dt}{2m}$, tendremos

$$\tfrac{1}{2} vdt \times p = \frac{C\,dt}{2m},$$

y su primer miembro seguirá siendo constante. Pero $\frac{1}{2} vdt \times p$ representa el área del sector formado por los radios vectores, dirigidos del punto O al punto móvil, al principio y al fin del tiempo dt; luego las áreas descritas por los radios vectores, que unen el móvil al punto fijo, en tiempos iguales, son iguales; y por lo tanto, el área total descrita por el radio vector en un tiempo cualquiera es proporcional á este tiempo.

Este es el enunciado del teorema de las áreas. Este teorema sólo supone que la direccion de la fuerza pase siempre por un punto del plano en que se verifica el movimiento, pudiendo cambiar de cualquier modo la intensidad y la direccion de esta fuerza, sin que el teorema deje de verificarse.

Recíprocamente, si el movimiento de un punto material se efectúa en un plano, de modo que el radio vector que une el móvil á un punto fijo del plano, describa áreas iguales en tiempos iguales, la fuerza que actúa sobre el punto móvil está siempre dirigida á este punto fijo O. En efecto, siendo iguales las áreas descritas por el radio vector, en tiempos iguales, el primer miembro de la ecuacion

$$m'vp' - mvp = \mathrm{F}dt \times p'',$$

será igual cero; luego $\mathrm{F}\,dt \times p''=0$, y para que lo sea, es necesario que $p''=0$, ó que F pase por el punto fijo.

Si consideramos el movimiento de un punto en el espacio, y proyectamos este movimiento sobre un plano fijo, será aplicable el teorema de las áreas á este movimiento proyectado, y podremos enunciarlo en los siguientes términos: si la proyeccion de la fuerza pasa constantemente por un punto fijo del plano de proyeccion, las áreas descritas por el radio vector, que une este punto fijo con la proyeccion del móvil sobre el plano, son proporcionales á los tiempos empleados en describirlas.

LECCION XXIX.

Consecuencias de las fórmulas del movimiento de un punto.—Diferencial de la fuerza viva.—Diversas formas del polinomio $Xdx+Ydy+Zdz$.—Definicion del trabajo.— Teorema de las fuerzas vivas.—Consecuencias del teorema de las fuerzas vivas.—Superficies de nivel y sus propiedades. — Caso en que la fuerza es de intensidad y direccion constantes. —Caso en que el móvil está solicitado por fuerzas dirigidas á centros fijos.—Caso en que existe rozamiento ó la resistencia de un medio.—Locuciones usadas antiguamente en la Mecánica.

Diferencial de la fuerza viva.

368. Ya sabemos que se llama fuerza viva de un punto material de masa m, el producto mv^2, que se obtiene multiplicando la masa del móvil por el cuadrado de la velocidad.

Sea F la fuerza que solicita á un punto material de masa m, y X, Y, Z sus componentes paralelas á los ejes; las ecuaciones del movimiento son

$$(1) \quad m\frac{d^2x}{dt^2}=X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z;$$

multiplicando estas ecuaciones respectivamente por $2dx$, $2dy$, $2dz$, y sumando, tendremos

$$m\left(\frac{2dxd^2x+2dyd^2y+2dzd^2z}{dt}\right)=2(Xdx+Ydy+Zdz);$$

observando, que $v^2=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}$, el primer paréntesis es igual á $d.v^2$, y la ecuacion se convierte en

$$(2) \quad d.mv^2=2(Xdx+Ydy+Zdz).$$

Ecuacion que nos dice, que la diferencial de la fuerza viva es el duplo del polinomio $Xdx+Ydy+Zdz$; en el que X, Y, Z son las componentes de la fuerza motriz F.

369. La ecuacion (2), que da la diferencial de la fuerza viva, subsiste aun cuando supongamos el móvil sometido á una fuerza normal á la trayectoría, ademas de la fuerza motriz F. Sea N esta fuerza normal, que forma con los ejes los ángulos a, b, c; las ecuaciones del movimiento serán

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X+N\cos a,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y+N\cos b,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=Z+N\cos c;$$

multiplicando y sumando como ántes, resulta

$$m\left(\frac{2dxd^2x+2dyd^2y+2dzd^2z}{dt^2}\right)=2(Xdx+Ydy+Zdz)$$
$$+2N(\cos a dx+\cos b dy+\cos c dz);$$

pero el último paréntesis expresa el coseno del ángulo de la tangente con la normal, y es por lo tanto igual cero; de modo que la ecuacion se reduce á la ecuacion (2).

Diversas formas del polinomio $Xdx+Ydy+Zdz$.

370. Sea α el ángulo formado por la fuerza motriz F con la tangente á la trayectoría AB (fig. 179), en el punto M, donde se encuentra el móvil al fin del tiempo t. Por la expresion del coseno del ángulo de dos rectas, tendremos, observando que $F_1=F\cos\alpha$,

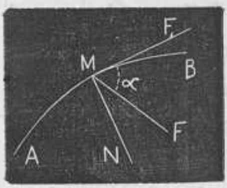


Fig. 179.

$$\cos\alpha=\frac{X}{F}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{Y}{F}\cdot\frac{dy}{ds}+\frac{Z}{F}\cdot\frac{dz}{ds};$$

de donde

$$Xdx+Ydy+Zdz=F\cos\alpha\, ds=F.ds\cos\alpha=F_1 ds;$$

el primer valor del polinomio es el producto de la fuerza por el coseno del ángulo, que ésta forma con la tangente, y por el elemento de la trayectoría; el segundo es el producto de la fuerza por la proyeccion del elemento *ds* sobre la direccion de la fuerza, ó lo que es lo mismo, el producto de la fuerza por el camino que recorre su punto de aplicacion, estimado en la direccion de la fuerza; y el tercero es el producto de la componente tangencial F_1 de la fuerza motriz por el elemento de trayectoría *ds*.

Definicion del trabajo.

371. Se llama *trabajo elemental* de una fuerza, el producto que se obtiene multiplicando esta fuerza por la proyeccion del elemento de trayectoría *ds* sobre la direccion de la fuerza, ó por el camino que recorre su punto de aplicacion, estimado en la direccion de la fuerza, durante el tiempo *dt*; ó bien el producto de la componente tangencial de la fuerza por el elemento de trayectoría *ds*, recorrido por el móvil durante el tiempo *dt*. El trabajo elemental es *positivo*, cuando la componente tangencial de la fuerza actúa en sentido del movimiento, y *negativo* en el caso contrario; es decir, positivo si $\alpha < 90°$, y negativo si $\alpha > 90°$. El signo del trabajo elemental será el del producto $F \cos \alpha \, ds$, considerando á F y *ds* como positivos. En el caso de ser $\alpha = 90$, $F_1 = 0$, y el trabajo elemental de la fuerza es cero.

Supongamos várias fuerzas aplicadas á un punto material, y determinada la resultante de todas estas fuerzas; si el punto recorre un camino infinitamente pequeño *e*, en una direccion cualquiera, cada una de las fuerzas dará lugar á un trabajo elemental, que se obtendrá multiplicando *e* por la proyeccion de la fuerza sobre la direccion del camino *e*. Mas nosotros sabemos que la proyeccion de la resultante sobre esta direccion, es igual á la suma de las proyecciones de las componentes sobre la misma direccion; luego si multiplicamos estas proyecciones de la resultante y de las componentes por e, tendremos, que el trabajo elemental de la resultante es igual á la suma de los trabajos elementales de las componentes.

Se llama *trabajo total* de una fuerza F en un tiempo cualquiera t, durante el cual el móvil recorre un arco cualquiera de su trayectoría, á la suma de los trabajos elementales de esta fuerza, correspondientes á los diversos elementos de que se compone el camino recorrido por el móvil; es decir, la integral $\int F_1 ds$, tomada entre los límites correspondientes á los extremos del arco recorrido. Las fuerzas normales á la trayectoría no tienen ninguna influencia sobre la componente tangencial, y no influyen nada, por lo tanto, en el trabajo total.

Teorema de las fuerzas vivas.

372. Poniendo en la ecuacion (2) por $Xdx + Ydy + Zdz$, su igual $F_1 ds$, é integrado entre los límites 0 y t, y llamando v_0 y s_0, á los valores de v y s, para $t = 0$, tendremos

$$mv^2 - mv_0^2 = 2\int_{s_0}^{s} F_1 ds; \quad (3)$$

que es la ecuacion que da el teorema de las fuerzas vivas, y que se enuncia diciendo: *que el incremento de la fuerza viva de un punto material, que se mueve por la accion de una fuerza* F, *durante un tiempo cualquiera, es igual al duplo del trabajo de la misma fuerza, durante este tiempo.*

Puede obtenerse directamente la ecuacion del teorema de las fuerzas vivas. En efecto, la componente tangencial de la fuerza F es

$$F_1 = m \frac{dv}{dt};$$

multiplicándola miembro á miembro, por $ds = vdt$, se tiene

$$mvdv = F_1 ds;$$

é integrando

$$mv^2 - mv_0^2 = 2\int_{s_0}^{s} F_1 ds.$$

373. Si la fuerza F es la resultante de várias F', F'', F'''..., cuyas componentes tangenciales son F_1', F_1'', F_1'''..., tendremos

$$F_1 = F_1' + F_1'' + F_1'''...,$$

y $\int F_1 ds = \int F_1' ds + \int F_1'' ds + \int F_1''' ds + ...;$

y podremos escribir la ecuacion (3), en esta forma

$$mv^2 - mv_0^2 = 2\left(\int F_1' ds + \int F_1'' ds + \int F_1''' ds + ...\right); (4)$$

y llamando fuerzas motrices á las que forman un ángulo agudo con la tangente, es decir, aquellas cuyo trabajo es positivo, y fuerzas resistentes á las que forma un ángulo obtuso, y cuyo efecto es oponerse al movimiento del móvil sobre su trayectoría, podremos enunciar el teorema de las fuerzas vivas en estos términos: *el incremento de de la fuerza viva de un móvil, al pasar de una posicion á otra, es igual al duplo del exceso del trabajo de las fuerzas motrices sobre el trabajo de las fuerzas resistentes.*

Bajo esta forma se usa este teorema en la Mecánica aplicada á las máquinas, en la cual es de la mayor importancia. Nosotros lo hemos demostrado aquí sólo para el caso de un punto material, más adelante lo extenderemos á un sistema material cualquiera.

Consecuencias del teorema de las fuerzas vivas.

374. En el caso en que el móvil no está solicitado por ninguna fuerza, ó que todas las fuerzas que obran sobre él, son siempre normales á la trayectoría, tendremos, $F_1=0$, $mv^2-mv_0^2=0$, y $v=v_0$; y el movimiento será por lo tanto uniforme, como vimos ya al tratar de las componentes tangencial y centrípeta de la fuerza F.

Si $Xdx+Ydy+Zdz$, que se llama el *trinómio del trabajo*, es la diferencial exacta de una cierta funcion $f(x,y,z)$, de las coordenadas x,y,z, del móvil, consideradas como variables independientes, para lo cual basta, que

$$(5) \qquad X=\frac{df}{dx}, \qquad Y=\frac{df}{dy}, \qquad Z=\frac{df}{dz};$$

tendremos que

$$Xdx+Ydy+Zdz=df(x,y,z),$$

que integrada entre los límites correspondientes á $t=0$, y $t=t$, y llamando v_0, x_0, y_0, z_0 á los valores de v, x, y, z para $t=0$, se tiene,

$$(6) \qquad mv^2-mv_0^2=2[f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)].$$

Superficies de nivel y sus propiedades.

375. La ecuacion

$$(7) \qquad f(x,y,z)=C,$$

representa una superficie, y dando en ella á la constante C diferentes valores, para cada valor de C representa una superficie distinta. Estas superficies se llaman *superficies de nivel*, por lo que más adelante veremos. Las propiedades de estas superfies son tres: la primera consiste en que si el punto móvil atraviesa várias veces una misma superficie de nivel, en todas ellas llega á la superficie animado de la misma velocidad. Porque, en efecto, el segundo miembro de la ecuacion (6) tiene para una misma superficie de nivel el mismo valor, luego el primer miembro tendrá tambien en ella el mismo valor, y v será constante, para todas las veces que el móvil llegue á la misma superficie de nivel. Esta propiedad sufre alguna excepcion, en el caso en que las superficies de nivel se cortan; y en la cual no nos detendremos, porque entónces no tienen estas superficies ningun interés para la Dinámica.

376. La segunda consiste en que para cada una de las posiciones del punto móvil, la fuerza motriz F es normal á la superficie de nivel que pasa por este punto. En efecto, la ecuacion diferencial de las superficies de nivel, es la diferencial de la (7), que es

$$Xdx+Ydy+Zdz=0;$$

y dividiéndola por $F.ds$, toma la forma

$$\frac{X}{F}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{Y}{F}\cdot\frac{dy}{ds}+\frac{Z}{F}\cdot\frac{dz}{ds}=0;$$

bajo la cual expresa, que los productos de los cosenos, de dos en dos, de los ángulos que la fuerza F, y la tangente, forman con los ejes, es cero; luego el coseno del ángulo de la fuerza y la tangente, es cero, y por lo tanto, la fuerza es normal á la superficie de nivel que pasa por el punto en el cual se encuentra el móvil.

Si imaginamos en cada una de las posiciones del punto material en el espacio la direccion de la fuerza aplicada al punto material, las superficies de nivel son en todas ellas normales á estas direcciones y las encuentran todas á ángulo recto. De esta observacion se deduce, que la existencia de las superficies de nivel, está sujeta á ciertas restricciones. Así, dada una serie indefinida de rectas aplicadas cada una á un punto del espacio, no es siempre posible determinar una superficie que corte todas estas rectas á ángulo recto, ó que sea normal á todas ellas. En otros términos, una ecuacion de la forma $Xdx+Ydy+Zdz=0$, no es siempre integrable. Si todas las fuerzas están contenidas en un plano, se puede, por el contrario, trazar en este plano una línea que encuentre ángulo recto las direcciones de las fuerzas aplicadas en sus diferentes puntos; lo que equivale á integrar la ecuacion con dos variables $Xdx+Ydy=0$.

377. Y por fin, la tercera propiedad consiste, en que el trabajo desarrollado por la fuerza al pasar el punto móvil de una superficie de nivel á otra infinitamente próxima, es constante, cualquiera que sea el camino, que al pasar de una á otra recorra, y el tiempo que emplee en recorrerlo. Sean LS y L'S' (fig. 180), dos superficies de nivel infinitamente próximas, y supongamos que el móvil las atraviesa diferentes veces durante todo el movimiento. Cada vez que el punto móvil llega á la superficie LS, va animado de la misma velocidad, y lo mismo sucede cada vez que llega á la superficie L'S': la fuerza viva variará siempre de la misma cantidad, cada vez que el móvil pase de la primera superficie á la segunda; y por consiguiente, el trabajo desarrollado por la fuerza F en el paso de una superficie á otra tendrá siempre el mismo valor. Este trabajo es $F \times MB$, siendo MB la proyecion del camino MN sobre la direccion de la fuerza F, que es normal á la superficie LS. Se ve, en consecuencia, que este trabajo es constante, y que los valores de F, al pasar al móvil de la superficie LS á la L'S', son inversamente proporcionales á las distancias normales MB de las dos superficies, en los puntos donde estos pasos se verifican.

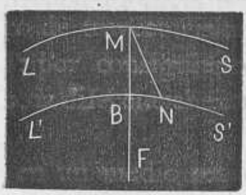


Fig. 180.

Es muy conveniente conocer los casos en que el polinomio $Xdx+Ydy+Zdz$, es ó no la diferencial exacta de una cierta funcion $f(x, y, z)$; porque de este conocimiento depende el que el teorema de las fuerzas vivas pueda aplicarse ó no con ventaja á la resolucion del problema de que se trata. Aunque no pueden indicarse *á priori*, todos los casos en que esto tiene lugar, vamos á exponer los dos casos más generales en que el polinomio es la diferencial exacta de una funcion, y los dos casos tambien generales en que no lo es.

Caso en que la fuerza es de intensidad y direccion constantes.

378. La condicion de que el trinomio del trabajo $Xdx+Ydy+Zdz$, sea una diferencial exacta, se verifica cuando F es una fuerza de intensidad y direccion constantes; porque si escogemos los ejes coordenados, de modo que el eje de las Z sea paralelo á la direccion de la fuerza F, tendremos que $X=0$, $Y=0$, $Z=F$; $Xdx+Ydy+Zdz=Fdz$, la ecuacion de las superficies de nivel será

$$Fz=C;$$

de modo que estas, son planos paralelos al XY, y perpendiculares, por lo tanto, á la direccion de la fuerza F.

El movimiento de los cuerpos solicitados por la accion de su propio peso, presenta un ejemplo de este caso, en el cual las superficies de nivel son planos horizontales, y el incremento de la fuerza viva, cuando el móvil pasa de uno de estos planos á otro, es independiente de la forma de la trayectoría y del tiempo empleado en recorrerla.

379. Supongamos que un punto material de masa m solicitado por su propio peso, recorre la trayectoría AL (fig. 181), y que ademas recibe la accion de fuerzas normales á esta trayectoría, que no producen ningun trabajo, y tienen sólo por efecto, hacer seguir la curva AL al punto móvil, sin influir sobre su velocidad, la cual depende únicamente del peso del punto.

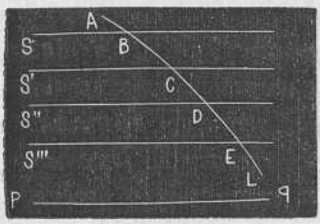


Fig. 181.

Las superficies de nivel son entónces los planos horizontales S, S', S'', S''', que encuentran á la trayectoria AL en los puntos B, C, D, E. El trabajo desarrollado por el peso del cuerpo, al pasar del plano S al S', es mgh, siendo h la distancia vertical de estos dos planos, y si llamamos z y z' á las distancias verticales de S y S', á un plano de referencia PQ, la ecuacion de las fuerzas vivas será para este caso

$$mv^2 - mv'^2 = 2mg(z-z') = 2mgh,$$

ó

$$v^2 - v'^2 = 2g(z-z') = 2gh.$$

En esta ecuacion vemos, que la velocidad v' en la superficie de nivel S', será conocida siempre que se conozca la velocidad del móvil al pasar por otra superficie S. De manera que podremos asignar la velocidad del móvil en cualquier punto del espacio, cuando se conozca su velocidad en un punto dado.

Caso en que el móvil está solicitado por fuerzas dirigidas á centros fijos.

380. Tambien $Xdx + Ydy + Zdz$ es una diferencial exacta, cuando el punto material está solicitado por fuerzas dirigidas á centros fijos, y cuyas intensidades son funciones de las distancias del móvil á estos centros fijos. Supongamos que una fuerza de intensidad R, dirigida al centro fijo A (h, k, l), (fig. 182), atrae á un punto M (x, y, z), y que la intensidad de la fuerza es sólo funcion de la distancia $AM = r$. Las componentes de esta fuerza, que es negativa, son $-R\frac{x-h}{r}, -R\frac{y-k}{r}, -R\frac{z-l}{r}$, la parte

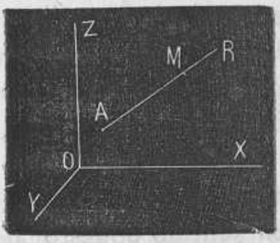


Fig. 182.

del trinomio del trabajo $Xdx+Ydy+Zdz$, debida á esta fuerza, es

$$-\frac{R}{r}[(x-h)dx+(y-k)dy+(z-l)dz]=-Rdr;$$

por ser

$$r^2=(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2,$$
$$rdr=(x-h)dx+(y-k)dy+(z-l)dz;$$

y siendo R funcion de r, y por consiguiente, de x, y, z, sucederá lo mismo á Rdr. Si la fuerza fuera repulsiva, el término correspondiente á esta fuerza en $Xdx+Ydy+Zdz$, será Rdr.

Si el móvil fuera solicitado por várias fuerzas R, R′, R″..., dirigidas en cada instante á los centros fijos A, A′, A″.... y funciones de las respectivas distancias, se tendria

$$d.mv^2=2(\pm Rdr\pm R'dr\pm R''dr''\pm...);$$

y como cada término del segundo miembro es una diferencial exacta, su suma tambien lo será.

En este caso las superficies de nivel son esferas cuyos centros son los puntos A, A′, A″.... y cuyos radios son r, r', r''... Porque su ecuacion diferencial es $Rdr=0$, que da $r=$constante.

Caso en que existe rozamiento ó la resistencia de un medio.

381. Cuando existe rozamiento, ó el móvil se mueve en un medio resistente, el trinomio $Xdx+Ydy+Zdz$, no es una diferencial exacta, como vamos á ver. El rozamiento, que más adelante estudiaremos, se ejerce segun la tangente á la trayectoría en sentido opuesto al movimiento, y es proporcional á la presion normal N del móvil sobre la curva que describe. De manera que el rozamiento está representado por $-fN$, siendo f un

coeficiente constante. Sus componentes paralelas á los ejes son

$$-f\mathrm{N}\frac{dx}{ds}, -f\mathrm{N}\frac{dy}{ds}, -f\mathrm{N}\frac{dz}{ds};$$

y la parte de $\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz$, correspondiente á esta fuerza, es

$$-f\mathrm{N}\left(\frac{dx}{ds}dx+\frac{dy}{ds}dy+\frac{dz}{ds}dz\right)=-f\mathrm{N}\left(\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{ds}\right)$$
$$=-f\mathrm{N}\frac{ds^2}{ds}=-f\mathrm{N}ds.$$

Pero la presion N es desconocida en el punto que se considera, y no depende sólo del arco de trayectoría recorrido, y lo mismo sucede á $-f\mathrm{N}ds$; por consiguiente, $\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz$, no es, en este caso, la diferencial exacta de una funcion de x, y, z.

382. Cuando el móvil se mueve en un medio resistente, la resistencia del medio es una cierta funcion, $f(v)$ de la velocidad, y la parte de esta fuerza correspondiente al polinomio $\mathrm{X}dx+\mathrm{X}dy+\mathrm{Z}dz$, es por un cálculo análogo al anterior, $-f(v)\,ds$. Mas la velocidad v, y por consecuencia $f(v)$, no depende de las diferenciales de x, y, z, y por lo mismo no es una diferencial exacta, y lo mismo sucede al trinomio del trabajo.

En estos casos no debe aplicarse el teorema de las fuerzas vivas, y debe resolverse el problema por las ecuaciones generales del movimiento

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\mathrm{X},\ m\frac{d^2y}{dt^2}=\mathrm{Y},\ m\frac{d^2z}{dt^2}=\mathrm{Z};$$

que dan lugar á la integracion de tres ecuaciones diferenciales de segundo órden, miéntras que si $\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz$, es una diferencial exacta, no hay más que integrar una ecuacion diferencial de primer órden, que es la que resulta del teorema de las fuerzas vivas.

Teorema de la menor accion para un punto material libre.

383. Si la expresion diferencial $Xdx + Ydy + Zdz$ es integrable, la ecuacion de las fuerzas vivas será

$$mv^2 = 2f(x, y, z) + C;$$

que para un valor dado de la constante C, dará la velocidad del móvil para todos los puntos del espacio. Supongamos que para ir de una posicion A á otra posicion B tomada sobre la trayectoría AMB (fig. 183), el móvil sigue un camino cualquiera ACB trazado de uno á otro de estos puntos; en cada punto de este eamino la ecuacion anterior dará la velocidad correspondiente. Tomemos uno de los elementos infinitamente pequeños ds, que componen la trayectoría, y formemos el producto $mvds$ de la cantidad de movimiento del punto por el elemento del arco descrito ds; tomemos la suma $\int mvds$ entre el punto A y el punto B. El *teorema de la menor accion* consiste en que esta integral es un mínimo, en general, para la trayectoría efectiva AMB; es decir, menor para esta trayectoría que para cualquiera otra línea ACB, que une los mismos extremos.

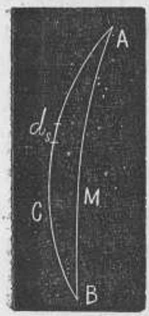


Fig. 183.

El producto $mvds$ se llama *cantidad* de accion de un punto móvil en el recorrido del elemento ds; $\int mvds$ es la cantidad de accion total correspondiente al paso del punto A al punto B. Como $ds = vdt$, $\int mvds = \int mv^2\,dt$ tomando las integrales entre los mismos límites. La *accion* es tambien la suma de los productos de la fuerza viva por el elemento de tiempo dt.

Para demostrar el teorema de la menor accion sean x, y, z, las coordenadas del punto móvil tomadas sobre su trayectoría efectiva; las coordenadas del mismo punto sobre una trayectoría ficticia infinitamente próxima serán $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$; los puntos extremos A y B permanecerán fijos. Hagamos

$$U=\int mvds,$$

y busquemos la variacion δU de esta integral. Tendremos

$$\delta U=\delta\int mvds=\int\delta(mvds)=\int m\delta vds+\int mv\delta ds.$$

De la ecuacion

$$mv^2=2f(x,y,z)+C,$$

variando sus dos miembros se deduce

$$mv\delta v=\frac{df}{dx}\delta x+\frac{df}{dy}\delta y+\frac{df}{dz}\delta z=X\delta x+Y\delta y+Z\delta z$$

y por lo tanto, poniendo vdt por ds, en la primera de las integrales del segundo miembro, tendremos

$$\int m\delta vds=\int mv\delta vdt=\int dt(X\delta x+Y\delta y+Z\delta).$$

Tenemos tambien

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2,$$

luego variando

$$ds\delta ds=dx\delta dx+dy\delta dy+dz\delta dz,$$

ó $$\delta ds=\frac{dx}{ds}\delta dx+\frac{dy}{ds}\delta dy+\frac{dz}{ds}\delta dz;$$

multiplicando esta ecuacion por $mv=m\frac{ds}{dt}$, será

$$mv\delta ds=m\frac{dx}{dt}\delta dx+m\frac{dy}{dt}\delta dy+m\frac{dz}{dt}\delta dz.$$

Integrando, y sumando las dos integrales tendremos,

$$\delta U=\int dt(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)+$$

$$\int\left(m\frac{dx}{dt}\delta dx+m\frac{dy}{dt}\delta dy+m\frac{dv}{dt}\delta dz\right).$$

Tambien tenemos, integrando por partes el término

$$\int m\frac{dx}{dt}\delta dx=\int m\frac{dx}{dt}d\delta x=m\frac{dx}{dt}\delta x-\int\delta x m\frac{d^2x}{dt^2}dt.$$

Del mismo modo

$$\int m\frac{dy}{dt}\delta dy=m\frac{dy}{dt}\delta y-\int\delta y m\frac{d^2y}{dt^2}dt,$$

$$\int m\frac{dz}{dt}\delta dz=m\frac{dz}{dt}\delta z-\int\delta z m\frac{d^2z}{dt^2}dt.$$

Y por fin

$$\delta\mathrm{U}=m\left(\frac{dx}{dt}\delta x+\frac{dy}{dt}\delta y+\frac{dz}{dt}\delta z\right)+$$

$$\int dt\left[\left(\mathrm{X}-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(\mathrm{Y}-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(\mathrm{Z}-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right].$$

Pero los dos extremos A y B son fijos y dados, luego δx, δy, δz son cero en estos puntos límites, á los cuales se refiere el término fuera del signo $\int$, luego este término es cero. Por las ecuaciones del movimiento del punto tenemos

$$\mathrm{X}-m\frac{d^2x}{dt^2}=0,\quad \mathrm{Y}-m\frac{d^2y}{dt^2}=0,\quad \mathrm{Z}-m\frac{d^2z}{dt^2}=0;$$

luego la integral del segundo miembro tambien es cero, y tendremos

$$\delta\mathrm{U}=\delta\int mv\,ds=0.$$

Siendo $\delta\mathrm{U}=0$, la funcion U es un máximo ó un mínimo; y como por la naturaleza de la cuestion no puede ser un máximo, porque siempre es posible alargar el camino ficticio y hacer que la $\int mv\,ds$ crezca indefinidamente; será necesariamente un mínimo.

Cuando este célebre teorema se demostró en toda su generalidad, al principio del siglo XVIII, las ciencias naturales estaban aún obscurecidas por nociones metafísicas; y se creyó que este resultado analítico era un principio, *á priori*, á que obedecian todas las fuerzas de la naturaleza. Se discutia sobre una vana economía de accion que debia presidir á la formacion del Universo. Pero esta economía de accion no tiene sentido fuera de lo que se refiere á nuestros trabajos personales; y ademas todas las fuerzas de la naturaleza no satisfacen las condiciones que exige este teorema, puesto que no todas satisfacen á la condicion de que el trinomio del trabajo $Xdx+Ydy+Zdz$, sea una diferencial exacta. Así que este teorema no tiene la importancia que se le dió en un principio.

Locuciones usadas antiguamente en la Mecánica.

384. Por medio de los teoremas de las cantidades de movimiento y de las fuerzas vivas, podemos fijar el sentido en que deben entenderse ciertas locuciones de la Mecánica.

En la frase *fuerza de un cuerpo en movimiento*, la palabra *fuerza* está tomada en una acepcion vaga, que no tiene nada de comun con la significacion atribuida á esta palabra en la Mecánica. Fuerza es la causa que interviene para modificar el estado de reposo ó movimiento rectilíneo y uniforme de un punto material. En un punto material en movimiento aparecen dos elementos de naturaleza diferente, la masa y la velocidad; la fuerza es completamente extraña al fenómeno observado, miéntras que la velocidad cambia su direccion y su magnitud. Cuando la velocidad cambia de direccion, de magnitud, ó á la vez de magnitud y direccion, interviene la fuerza para producir las variaciones observadas; pero esta fuerza no pertenece al cuerpo, este la sufre y no la posee; no hay por consiguiente fundamento para preguntar cuál es la fuerza del punto material.

No hay acuerdo entre los geómetras sobre esta cuestion mal planteada. Unos miden la fuerza de un punto en movimiento por su cantidad de movimiento, es decir, por el producto mv de su masa por su velocidad. Otros la miden por la fuerza viva mv^2, producto de la masa por el cuadrado de la velocidad. Descartes y su escuela seguian la primera definicion, y Leibnitz, Huyghens y los Bernuilli preferian la segunda. D'Alambert concilió las dos opiniones, interpretando los principios é introduciendo más precision en el lenguaje.

Cuando un punto material B, de masa m, recorre una recta OX (fig. 184), con una velocidad v, se puede, haciendo actuar una fuerza retardatriz constante —F, reducir gradualmente su velocidad hasta cero; el punto material, abandonado entónces á sí mismo, quedará indefinidamente en reposo en un cierto punto A de su trayectoría, despues de haber re corrido $BA = s$, durante el tiempo t de la accion de la fuerza F.

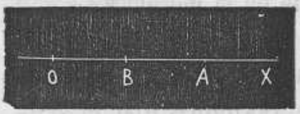


Fig. 184.

Apliquemos los teoremas de las cantidades de movimiento y de las fuerzas vivas. Siendo v_0 la velocidad inicial y cero la velocidad final, el incremento de la cantidad de movimiento es $-mv_0$, y el de la fuerza viva $-mv^2{}_0$; la suma de los impulsos de la fuerza es $-Ft$ y el duplo de trabajo total de la fuerza $-2Fs$; tendremos las dos ecuaciones

$$mv_0 = Ft, \quad mv_0{}^2 = 2Fs.$$

En lugar de la fuerza —F, aplicada al punto en sentido contrario á su movimiento, podemos imaginar que el punto para ir de B á A, ha tenido que vencer un obstáculo que desarrolla sobre él una resistencia equivalente. En virtud del principio de igualdad de la accion y la reaccion, el punto material ejercerá contra el obstáculo una fuerza igual al esfuerzo que el obstáculo ejerce sobre él en sentido opuesto, ó sea un esfuerzo igual á —F. Luego relativamente al obstáculo vencido, el punto material de masa m animado de la velocidad v_0, representa un esfuerzo constante igual á—F, que se ejerce durante el tiempo t á lo largo del camino recorrido s.

La cantidad de movimiento mv_0 representa, por consecuencia, el impulso total Ft de la fuerza F, que el punto móvil es capaz de desarrollar contra el obstáculo, hasta que se pára; y la mitad de la fuerza viva $\frac{1}{2}mv_0^2$ representa el trabajo total Fs, de la misma. La fuerza F permanece indeterminada; porque varía, para una masa y una velocidad dadas con los factores t y s, que no están definidos de antemano.

La frase fuerza de un cuerpo en movimiento, no tiene una significacion precisa, si se toma la palabra fuerza en la acepcion ordinaria; el producto mv_0, será el impulso de una fuerza, y la fuerza viva mv_0^2 representará un trabajo, es decir, el producto de la fuerza por el espacio recorrido. La frase indicada se ha suprimido hace tiempo del vocabulario de la Mecánica, y la fuerza viva, que se ha conservado, sirve sólo para designar el producto mv^2, siendo estraña á esta definicion toda idea de fuerza.

En opinion de los antiguos geómetras, *fuerza viva* era la antítesis de *fuerza muerta*, siendo las primeras, las que producen un movimiento efectivo, y las fuerzas muertas, las que producen equilibrio, es decir, las de la Estática. Tambien dividian las fuerzas en activas y pasivas, siendo las activas las fuerzas motrices, y las pasivas las resistencias ó las reacciones de los apoyos fijos. No se usan ya las frases *fuerza muerta* ni *fuerza pasiva* que no expresan ninguna idea exacta. Las definiciones de la Mecánica moderna, excluyen todas estas discusiones ociosas, nacidas de la mala inteligencia de las palabras.

LECCION XXX.

Movimiento de los proyectiles en el vacío.—Trayectoría. Condiciones para que la altura y la amplitud sean máximas.—Direccion de la velocidad inicial para que el móvil pase por un punto dado.—Lugar geométrico de los puntos de interseccion de las parábolas que resultan variando el ángulo de proyeccion y siendo constante la velocidad inicial.—Movimiento de los proyectiles en el aire. Método de Coriolis. Trayectoría en funcion de las coordenadas de sus puntos.—Asíntota de la rama descendente de esta curva.—Caso en que el ángulo de proyeccion es muy pequeño.—Movimiento de los proyectiles cuando la resistencia del aire se representa por una funcion cualquiera de la velocidad.

Movimiento de los proyectiles en el vacío.

385. Expuestas en las lecciones anteriores las fórmulas del movimiento curvilíneo de un punto material libre, y sus consecuencias, vamos á presentar algun ejemplo de movimiento curvilíneo. Sabemos que un punto material sometido á la accion de una fuerza de intensidad y direccion constantes y animado de una velocidad inicial de direccion distinta que la de la fuerza, describe una parábola.

Vamos á estudiar este movimiento parabólico, suponiendo que se trata de un cuerpo pesado, lanzado en una direccion cualquiera con una velocidad inicial v_0, y sujeto despues á la accion de la gravedad, que supondremos de intensidad y direccion constantes; este caso de movimiento es de los proyectiles en el vacío.

Como la fuerza que solicita el móvil está constantemente dirigida al centro de la Tierra, el movimiento tendrá lugar en un plano, que será el determinado por la direccion de la velocidad inicial y la vertical del lugar. Sea OA (fig. 185), la direccion de la velocidad inicial, y α el ángulo que forma con la horizontal OX, tomemos por ejes esta horizontal y la vertical OY; las ecuaciones del movimiento son, siendo m la masa del punto material,

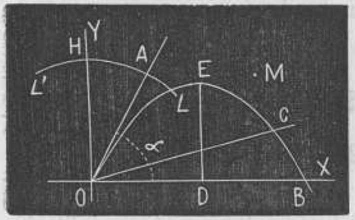


Fig. 185.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg,\quad \text{ó}\quad \frac{d^2x}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-g. \quad (1)$$

Integrando, tenemos

$$\frac{dx}{dt}=c,\quad \frac{dy}{dt}=-gt+c';$$

las constantes c y c' se determinan por la condicion de ser, para $t=0$, $\frac{dx}{dt}=v_0\cos\alpha$, y $\frac{dy}{dt}=v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha$, y por lo tanto $c=v_0\cos\alpha$, $c'=v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha$, y sustituyendo, serán las anteriores

$$(2)\quad \frac{dx}{dt}=v_0\cos\alpha,\quad \frac{dy}{dt}=v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha-gt;$$

volviendo á integrar

$$(3)\quad x=v_0\cos\alpha.t,\quad y=v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha.\,t-\tfrac{1}{2}gt^2;$$

las constantes de esta integracion son cero, por ser $x=0$, $y=0$, para $t=0$.

Estas son las ecuaciones finitas del movimiento: la primera de estas ecuaciones nos dice, que la proyeccion del móvil sobre el eje de las x, se mueve con un movimiento uniforme, cuya velocidad es $v_0\cos\alpha$; y la segunda, que la proyeccion del móvil sobre el eje de las y, se mueve con un movimiento uniformemente retardado, como si el móvil fuera lanzado verticalmente de abajo á arriba con una velocidad inicial $v_0 \operatorname{sen} \alpha$.

Elevando al cuadrado y sumando las ecuaciones (2), tendremos

$$\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}=v^2=v_0^2-2v_0 g \operatorname{sen} \alpha . t+g^2 t^2;$$

ó $$v^2=v_0^2-2gy. \quad (4)$$

Trayectoría. Condiciones para que la altura y la amplitud sean máximas.

386. Para obtener la ecuacion de la trayectoría, basta eliminar t entre las dos ecuaciones (3), y se obtiene

$$y=x \operatorname{tg} \alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

que haciendo $v_0^2=2gh$, se convierte en

$$(5) \quad y=x \operatorname{tg} \alpha-\frac{x^2}{4h \cos^2 \alpha};$$

ecuacion de la trayectoría que representa una parábola, cuyo eje es paralelo al eje de las y; es decir, vertical.

Trasformemos esta ecuacion (5) en otra, que tenga la forma de la ecuacion ordinaria de la parábola. Quitando el denominador y trasponiendo, será

$$4h \cos^2 \alpha . y-4h \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha . x+x^2=0;$$

que puede ponerse bajo la forma

$$(x-2h \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha)^2=4h \cos^2 \alpha\,(h \operatorname{sen}^2 \alpha-y);$$

y haciendo

$$x-2h \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha=x', \quad h \operatorname{sen}^2 \alpha-y=y',$$

se convierte en

$$x'^2=4h \cos^2 \alpha . y';$$

que tiene la forma apetecida. En el vértice, que es el orígen de las coordenadas, $x'=0$ é $y'=0$; luego

$$x=2h \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha=\mathrm{OD}, \quad y=h \operatorname{sen}^2 \alpha=\mathrm{ED}.$$

Esta ordenada ED, es lo que se llama *altura* del tiro;

la altura será máxima, cuando $\operatorname{sen}^2\alpha = 1$, ó $\alpha = 90^\circ$, teniendo entónces el valor máximo que es $ED = h$.

Obtendremos la *amplitud* ó alcance del tiro, haciendo $y = 0$ en la ecuacion (5); y será

$$x = OA = 4h \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = 2h \operatorname{sen} 2\alpha.$$

Esta amplitud será máxima, cuando $\operatorname{sen} 2\alpha = 1$, ó $2\alpha = 90^\circ$, y $\alpha = 45^\circ$; entónces $AB = 2h$. De modo que la amplitud máxima es el duplo de la altura máxima.

Vemos, que la amplitud es máxima, cuando la OA es la bisectriz del ángulo YOX. Del mismo modo encontraríamos, que la amplitud en una direccion dada OC es máxima, cuando la direccion de la velocidad inicial es la bisectriz del ángulo YOC. Para probarlo, basta repetir el cálculo tomando por ejes coordenados las rectas OY y OC.

Direccion de la velocidad inicial, para que el móvil pase por un punto dado.

387. Sea M (X, Y) el punto dado, por donde queremos que pase el proyectil, hagamos $\operatorname{tg}\alpha = u$, de donde $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + u^2$; la incógnita del problema será α, que podremos determinar por medio de su tangente que es u, viniendo á ser esta la incógnita de la cuestion. Poniendo estas cantidades en la ecuacion (5), será

$$Y = Xu - \frac{X^2(1+u^2)}{4h};$$

resolviéndola, resulta

$$u = \frac{2h}{X} \pm \frac{1}{X}\sqrt{4h^2 - 4hY - X^2}.$$

La naturaleza de los valores de u depende del signo de la cantidad sub-radical, que puede ser

$$4h^2-4hY-X^2>0,$$
$$=0,$$
$$<0;$$

en el primer caso, u tiene dos valores reales y positivos, por consiguiente, el proyectil puede lanzarse en dos direcciones diferentes para que pase por el punto M; en el segundo caso, $u=\operatorname{tg}\alpha=\frac{2h}{X}$, resulta un sólo ángulo de proyeccion determinado por esta fórmula; en el tercero, los valores de u son imaginarios, lo que nos dice que el problema es imposible.

La curva que representa la ecuacion de condicion en el segundo caso; es decir, cuando

$$4h^2-4hy-x^2=0, \quad \text{ó} \quad x^2=4h(h-y);$$

es una parábola L'HL (fig. 185), cuyo eje coincide con la vertical OY, y cuyo vértice está situado á la altura $OH=h$. Y los resultados precedentes pueden enunciarse en los siguientes términos: Cuando el punto á que se quiere dirigir el proyectil, está en el interior de esta parábola, éste puede lanzare segun dos direcciones diferentes; en una sola, si el punto está situado sobre esta misma parábola, y cuando el punto está fuera de la parábola, el problema es imposible.

Lugar geométrico de los puntos de interseccion de las parábolas que resultan, variando el ángulo de proyeccion y permaneciendo constante la velocidad inicial.

388. La envolvente de todas las parábolas que resultan variando sólo la direccion de la velocidad inicial y conservándose constante la magnitud de esta velocidad,

se obtiene, eliminando el parámetro variable entre la ecuacion de la curva y la ecuacion que resulta, diferenciando esta ecuacion con relacion á este parámetro; como hemos visto en las aplicaciones del cálculo diferencial á la Geometría.

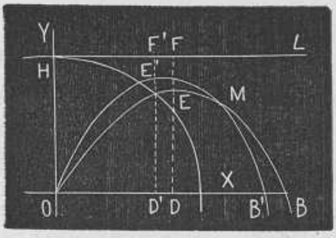


Fig. 186.

Sean OEB y OEB' (fig. 186), dos de las parábolas obtenidas, variando el ángulo α de proyeccion; vamos á buscar el lugar geométrico de los puntos M en que estas parábolas se cortan; la ecuacion de la parábola OEB, es

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{x^2}{4h \cos^2 \alpha};$$

el parámetro de esta parábola es $4h \cos^2 \alpha$, segun vemos por la ecuacion ordinaria de esta curva; la distancia del vértice E á la directriz es $h \cos^2 \alpha$; la ordenada $DE = h \operatorname{sen}^2 \alpha$, luego $DF = DE + EF = h(\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = h$, de modo, que la distancia de la directriz al eje de las x, es h para todas estas parábolas. Los focos de todas estas parábolas, están todos en la circunferencia trazada desde el punto O, como centro, con un radio h.

Pongamos la ecuacion anterior, de una de estas parábolas, bajo la forma general

$$f(x, y, u) = 0, \quad \text{ó} \quad y - xu + \frac{x^2(1+u^2)}{4h} = 0;$$

otra de estas curvas tendrá por ecuacion

$$f(x, y, u + \Delta u) = 0.$$

Para el punto comun M de estas curvas, las dos ecuaciones se verificarán á la vez, y podemos reemplazarlas por el sistema

$$\left.\begin{aligned} f(x,y,u)&=0, \\ \frac{f(x,y,u+\Delta u)-f(x,y,u)}{\Delta u}&=0, \end{aligned}\right\} \quad \text{ó} \quad \left\{\begin{aligned} f(x,y,u)&=0, \\ \frac{df}{du}&=0; \end{aligned}\right.$$

que equivale á

$$\left\{\begin{aligned} y-xu+\frac{x^2(1+u^2)}{4h}&=0, \\ u&=\frac{2h}{x}. \end{aligned}\right.$$

Eliminando u entre estas dos ecuaciones, resulta

$$x^2=4h(h-y),$$

para el lugar geométrico de los puntos M de interseccion; es decir, para la envolvente de todas las parábolas de que se trata. Mas esta ecuacion es precisamente la que hemos encontrado para la parábola L′HL, lugar geométrico de los puntos á que el proyectil no puede llegar más que en una sola direccion; de manera, que esta parábola L′HL, es la envolvente que buscábamos. Como la ecuacion $\frac{df}{du}=0$, expresa, que para un sistema cualquiera de valores de x é y, u considerada como incógnita, tiene dos valores iguales; por eso hemos encontrado esta misma parábola para envolvente de las otras, pues ambas están determinadas por la misma condicion analítica; la de que la ecuacion tenga raíces iguales ó que la propuesta y su derivada tengan un divisor comun.

Movimiento de los proyectiles en el aire. Método de Coriolis. Trayectoria en funcion de las coordenadas de sus puntos.

389. Tambien la trayectoría del móvil, cuando éste se mueve en el aire, es en general plana, como en el caso anterior; y estará situada en el plano vertical que determinan la vertical y la velocidad inicial; porque la

resistencia del aire obra segun la tangente á la trayectoría.

Sólo los proyectiles oblongos, que reciben un movimiento rápido de rotacion alrededor de su eje de figura, experimentan una desviacion que los aleja gradualmente del plano determinado por la vertical del punto de partida, y la direccion de la velocidad inicial. El movimiento de rotacion de la Tierra produce tambien, en la trayectoría de todo proyectil, una alteracion análoga. Pero estas desviaciones laterales son muy pequeñas; por lo que prescindiremos de ellas y estudiaremos el movimiento como si se verificára rigurosamente en el plano que acabamos de definir.

Dos fuerzas solicitan el móvil, su propio peso y la resistencia del aire, que supondremos proporcional al cuadrado de la velocidad, y representada como en el caso del descenso de los graves, por $mg\frac{v^2}{K^2}$, dirigida segun la tangente á la trayectoría y en sentido contrario al movimiento; su componente horizontal será negativa y su componente vertical será negativa cuando el móvil asciende y positiva cuando desciende.

Podemos establecer las ecuaciones del movimiento, proyectando las fuerzas sobre los dos ejes rectangulares del caso anterior; mas las ecuaciones que por este procedimiento se obtienen para la resolucion del problema, son muy complicadas, por ello seguiremos el método de Coriolis, tomando por ejes en un instante cualquiera una paralela al eje de las x, es decir, una horizontal, y la normal á la trayectoría en el punto donde se encuentra el móvil. De este modo, como los ejes son dos perpendiculares á las direcciones de las dos fuerzas, en ninguna de las ecuaciones entrarán á la vez las proyecciones de las dos fuerzas; y de este modo, aunque los ejes son oblícuos y variables de posicion con el móvil, tendremos ecuaciones muy sencillas para resolver el problema de que tratamos.

390. Sean v la velocidad, qué forma con el eje X (fig. 187), el ángulo α, MC la normal á la curva dirigida del punto M en que se encuentra el móvil al centro de curvatura; los ejes móviles en el instante que consideramos son MX y MC. La ecuacion de la proyeccion del movimiento sobre el eje de las x, observando que la proyeccion de mg sobre la horizontal es

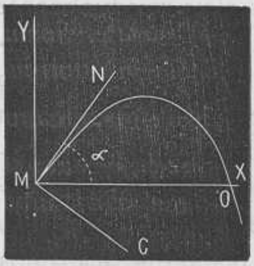


Fig. 187.

cero, y que la de $mg\frac{v^2}{K^2}$ es $mg\frac{v^2}{K^2}\cos\alpha$, será

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=m\frac{d.v\cos\alpha}{dt}=-mg\frac{v^2}{K^2}\cos\alpha,$$

ó
$$\frac{d.v\cos\alpha}{dt}=-g\frac{v^2}{K^2}\cos\alpha. \quad (1)$$

La fuerza centrípeta es $m\frac{v^2}{\rho}$, y como $\rho=\frac{ds}{d\alpha}$, siendo $d\alpha$ negativa, $m\frac{v^2}{\rho}=-mv^2\frac{d\alpha}{ds}$; la componente del peso del cuerpo sobre la normal es $mg\cos\alpha$, y la de la resistencia del aire sobre la normal cero, de modo, que la segunda ecuacion del movimiento es

$$mg\cos\alpha=-mv^2\frac{d\alpha}{ds}, \text{ ó } g\cos\alpha=-v^2\frac{d\alpha}{ds}. \quad (2)$$

Tambien puede ponerse esta ecuacion bajo la forma

$$g\cos\alpha=-v\frac{d\alpha}{dt}, \text{ ó } g\cos\alpha=-\frac{ds\,d\alpha}{dt^2}. \quad (3)$$

Las ecuaciones (1) y (3) son las que usaba Cauchy; pero obtenia la segunda por medio de una eliminacion entre las ecuaciones resultantes de estimar las fuerzas paralelamente á los ejes rectangulares, miéntras que por el método de Coriolis se obtiene esta, sencilla y directamente, con sólo emplear los ejes variables, que conducen á cálculos tan sencillos, como los que acabamos de exponer. Vamos á integrarlas.

De la (1) se deduce

$$\frac{d.v\cos\alpha}{v\cos\alpha}=-\frac{g}{K^2}vdt=-\frac{g}{K^2}\frac{ds}{dt}.\,dt=-\frac{g}{K^2}ds,$$

integrando se tiene

$$l.v\cos\alpha=-\frac{gs}{K^2}+C;$$

llamando v_0 y θ á los valores de v y α, para $t=0$, en que tambien es $s=0$, tendremos

$$l.\,v_0\cos\theta=C,$$

y la anterior toma la forma siguiente,

$$l.\frac{v\cos\alpha}{v_0\cos\theta}=-\frac{gs}{K^2},\quad \text{ó}\quad v\cos\alpha=v_0\cos\theta\, e^{-\frac{gs}{K^2}}=\frac{dx}{dt};$$

despejando v en esta ecuacion y sustituyéndolo en la (2), se obtiene

$$(4)\qquad \frac{d\alpha}{\cos^3\alpha}=-\frac{g}{v_0^2\cos^2\theta}e^{\frac{2gs}{K^2}}ds;$$

esta ecuacion entre α y s, es la ecuacion diferencial de la trayectoría.

391. Para integrarla hagamos

$$\operatorname{tg}\alpha=p,$$

de donde

$$\frac{d\alpha}{\cos^3\alpha}=dp\sqrt{1+p^2};$$

y la ecuacion anterior se convierte en

$$(5)\qquad dp\sqrt{1+p^2}=-\frac{g}{v_0^2\cos^2\theta}e^{\frac{2gs}{K^2}}ds;$$

que integrada da

$$(6)\quad p\sqrt{1+p^2}+l.\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)=-\frac{K^2}{v_0^2\cos^2\theta}e^{\frac{2gs}{K^2}}+C;$$

la constante C se determina por la condicion de ser

$s=0, p=\operatorname{tg}\theta$, al principio del movimiento, lo que da

$$C=\operatorname{tg}\theta\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}+l.\left(\operatorname{tg}\theta+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}\right)+\frac{K^2}{v_0^2\cos\theta};$$

como la forma de C es complicada, es preferible conservarla en las fórmulas.

La ecuacion (6) es la ecuacion de la trayectoría; pero como es poco cómoda para su construccion, vamos á introducir las coordenadas x é y en vez del arco s. Para ello

$$dx=ds\cos\alpha=\frac{ds}{\sqrt{1+p^2}}, \text{ ó } ds=dx\sqrt{1+p^2};$$

sustituyendo este valor de ds en la (5), tendremos

$$dx=-\frac{v_0^2\cos^2\theta}{g}e^{-\frac{2gs}{K^2}}dp,$$

multiplicando ésta y la (6) miembro á miembro, despues de pasar C al primer miembro, y despejando dx, desaparece la esponencial, y se tiene

$$(7)\quad dx=\frac{K^2}{g}\frac{dp}{p\sqrt{1+p^2}+l.(p+\sqrt{1+p^2})-C};$$

y como $dy=pdx$, se tendrá tambien

$$(8)\quad dy=\frac{K^2}{g}\frac{pdp}{p\sqrt{1+p^2}+l.(p+\sqrt{1+p^2})-C}.$$

Integrando estas ecuaciones, y por aproximacion sus segundos miembros, obtendremos x é y en funcion de p; lo que nos dará tantos puntos de la trayectoría como queramos.

Para saber el instante en que el móvil pasará por uno cualquiera de estos puntos, hallaremos t en funcion de p. De la ecuacion (3), se deduce

$$dt=\sqrt{\frac{dsd\alpha}{g\cos\alpha}},$$

poniendo en esta por ds su valor deducido de la (4), y teniendo presente que dt y $d\alpha$, son de signos contrarios, tendremos

$$dt = -\frac{v_0 \cos\theta}{g} e^{-\frac{gs}{K^2}} \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = -\frac{v_0 \cos\theta}{g} e^{-\frac{gs}{K^2}} dp,$$

y eliminando la esponencial por medio de la ecuacion (6), resulta

$$(9) \qquad dt = -\frac{K}{g} \frac{dp}{[-p\sqrt{1+p^2}p - l.(p+\sqrt{1+p^2}) + C]^{\frac{1}{2}}};$$

integrando por aproximacion esta ecuacion, obtendremos t en funcion de p.

Tambien podemos expresar la velocidad del móvil en funcion de p. En efecto,

$$(10) \qquad v^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \frac{K^2(1+p^2)}{C - p\sqrt{1+p^2} - l.(p+\sqrt{1+p^2})}.$$

El vértice de la curva se obtiene haciendo $p=0$; pero la curva no será simétrica respecto á la vertical que pasa por este punto. La amplitud del tiro será el valor de x que se obtendrá haciendo $y=0$; esta amplitud será menor que en el caso precedente, y su máximo con respecto á θ corresponderá á un ángulo menor que 45°.

Asíntota de la rama descendente de esta curva.

392. La rama descendente de la trayectoría es indefinida, y tiene una asíntota vertical, como vamos á demostrar. En la ecuacion (9) vemos, que p aumenta indefinidamente al mismo tiempo que t, porque el denominador del segundo miembro se compone de términos positivos por ser p negativo; y como no puede ser cero el denominador, es necesario que p crezca indefinidamente al mismo tiempo que t. De manera que la tangente á la trayectoría tiende á ser vertical.

Hagamos $p=-q$, para poner de manifiesto el signo, y supongamos que q es suficientemente grande para poder reemplazar $\sqrt{1+q^2}$ por q, y despreciar la diferencia $l.(p+\sqrt{1+p^2})$—C, con relacion á q; las ecuaciones (7) y (8), darán

$$dx = \frac{K^2}{g}\frac{dq}{q^2}, \quad dy = -\frac{K^2}{g}\frac{dq}{q};$$

integrando y llamando x_1 é y_1 á los valores de x é y, correspondientes al valor q_1 de q, de donde partimos, tendremos

$$x - x_1 = \frac{K^2}{g}\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q}\right), \quad y_1 - y = \frac{K^2}{q}\ l.\frac{q}{q_1};$$

la segunda de estas ecuaciones nos dice que el valor negativo de y, y aumenta indefinidamente; y la primera para $q=\infty$, nos da una asíntota paralela al eje de las y; es decir, vertical, cuya ecuacion es $x = x_1 + \frac{K^2}{gq}$.

Estos resultados no son más que aproximados por las cantidades que hemos despreciado; para obtener la ecuacion exacta de la asíntota, hay que integrar el valor de dx, hasta $p=\infty$.

La ecuacion (10) da para la velocidad, cuando $p=\infty$, $v=$K, de modo que la velocidad del móvil tiende á hacerse uniforme, como sucedia en la caida de los cuerpos pesados, y llega á ser igual á K, cuando $t=\infty$.

Caso en que el ángulo de proyeccion es muy pequeño.

393. En este caso el móvil se eleva á una pequeña altura sobre el eje de las x, y el ángulo α tendrá una tangente muy pequeña; de modo, que podremos despreciar p^2 y la relacion

$$ds = dx\sqrt{1+p^2}, \quad \text{será} \quad ds = dx, \ s = x;$$

En este caso la ecuacion (5) se reduce, poniendo x por s, á

$$dp = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2\theta} e^{\frac{2gs}{K^2}} dx;$$

integrando

$$p = -\frac{K^2}{2v_0^2 \cos^2\theta} e^{\frac{2gx}{K^2}} + C;$$

la constante se obtiene haciendo á la vez $x=0$, $p=\operatorname{tg}\theta$, y será

$$C = \operatorname{tg}\theta + \frac{K^2}{2v_0^2 \cos^2\theta},$$

y por lo tanto

$$p = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta - \frac{K^2}{2v_0^2 \cos^2\theta}\left(e^{\frac{2gx}{K^2}} - 1\right);$$

integrando y observando que para $x=0$, es $y=0$, tendremos

$$y = x\left(\operatorname{tg}\theta + \frac{K^2}{2v_0^2 \cos^2\theta}\right) - \frac{K^4}{4gv_0^2 \cos^2\theta}\left(e^{\frac{2gx}{K^2}} - 1\right),$$

que es la ecuacion de la trayectoría.

De la ecuacion $\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\theta e^{-\frac{gs}{K^2}}$,

se deduce poniendo por s, x

$$dt = \frac{e^{\frac{gx}{K^2}} dx}{v_0 \cos\theta}, \quad \text{ó} \quad t = \frac{K^2}{gv_0 \cos\theta}\left(e^{\frac{gx}{K^2}} - 1\right).$$

Las constantes, que entran en estas ecuaciones, pueden determinarse conociendo por la experiencia las coordenadas del punto en que el proyectil llega al suelo. De este modo podrian hallarse K y g;

Movimiento de los proyectiles cuando la resistencia del aire se representa por una funcion cualquiera de la velocidad.

394. Para el movimiento de los cuerpos en un medio resistente, propuso Newton la ley que expresa, que

la resistencia del medio, varía proporcionalmente al cuadrado de la velocidad del móvil. Posteriormente se ha reconocido por la experiencia, que en los movimientos rápidos de los proyectiles de artillería, esta resistencia no sigue la expresada ley; por lo cual es conveniente estudiar estos movimientos, suponiendo que la resistencia del aire está representada por una funcion cualquiera de la velocidad, $\varphi(v)$.

Sea $M(x, y)$ (fig. 188), la posicion del proyectil al cabo del tiempo t, referido á los ejes X é Y, que son una horizontal y una vertical, que pasan por el punto O; sea MT la tangente á la trayectoría en el punto M, en sentido contrario al movimiento.

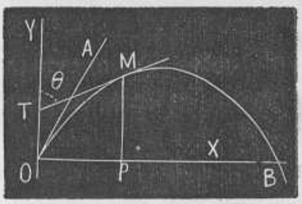


Fig. 188.

Las fuerzas, que solicitan el móvil, son la gravedad en el sentido MP, y la resistencia del aire en el sentido MT, representada esta última por la funcion $\varphi(v)$ de la velocidad; supondremos que una y otra están referidas á la unidad de masa. Las ecuaciones del movimiento divididas por la masa m, serán

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\varphi(v)\,\text{sen}\,\theta, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\varphi(v)\cos\theta - g; \end{aligned}\right.$$

siendo θ el ángulo YTM que forma la tangente con la vertical.

Estas son las ecuaciones del movimiento; de las cuales se deduce una de primer órden entre v y θ; integrada la cual, se concluye el problema por las cuadraturas.

En efecto, tenemos

$$\frac{dx}{dt} = v\,\text{sen}\,\theta,$$

$$\frac{dy}{dt} = v\cos\theta;$$

diferenciando, serán

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\operatorname{sen}\theta\frac{dv}{dt}+v\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\cos\theta\frac{dv}{dt}-v\operatorname{sen}\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

Sustituyendo en las ecuaciones del movimiento, dividiendo una por otra desaparece dt, y tendremos,

$$\frac{\operatorname{sen}\theta dv+v\cos\theta d\theta}{\cos\theta dv-v\operatorname{sen}\theta d\theta}=\frac{\varphi(v)\operatorname{sen}\theta}{\varphi(v)\cos\theta+g};$$

quitando denominadores y reduciendo, tendremos la ecuacion de primer órden

$$(2)\qquad \frac{dv}{dt}+v\cot\theta+\frac{v\varphi(v)}{g\operatorname{sen}\theta}=0.$$

395. Integrada esta ecuacion, y determinada la constante, haciendo $\theta=\theta_0$, y $v=v_0$, terminaremos la resolucion del problema. El tiempo t se deduce de la ecuacion

$$\operatorname{sen}\theta\frac{dv}{dt}+v\cos\theta\frac{d\theta}{dt}=-\varphi(v)\operatorname{sen}\theta,$$

que da $\qquad dt=-\dfrac{\operatorname{sen}\theta dv+v\cos d\theta}{\varphi(v)\operatorname{sen}\theta}.$

Podrán reemplazarse en esta ecuacion v y dv por sus valores deducidos de la ecuacion integral.

Los valores de x é y se deducirán de las ecuaciones

$$dx=v\operatorname{sen}\theta dt,$$
$$dy=v\cos\theta dt;$$

cuyos segundos miembros pueden hacerse depender de una sola variable, tal como θ por ejemplo.

De manera, que toda la dificultad del problema consiste en la integracion de la ecuacion (2).

Esta ecuacion puede simplificarse tomando por variable la componente horizontal de la velocidad, ó mejor la relacion de esta componente á la aceleracion g.

Hagamos

$$u=\frac{v\operatorname{sen}\theta}{g},$$

de donde
$$v=\frac{ug}{\operatorname{sen}\theta},$$
y
$$\frac{dv}{d\theta}=-\frac{ug}{\operatorname{sen}^2\theta}\cos\theta+\frac{g}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{du}{d\theta}.$$

Reemplazando en la ecuacion (2), tendremos,
$$-\frac{ug}{\operatorname{sen}^2\theta}\cos\theta+\frac{g}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{du}{d\theta}+\frac{gu}{\operatorname{sen}\theta}\cot\theta+\frac{\frac{gu}{\operatorname{sen}\theta}\cdot\varphi\left(\frac{gu}{\operatorname{sen}\theta}\right)}{g\operatorname{sen}\theta}=0$$
ó
$$\frac{du}{d\theta}+\frac{u\varphi\left(\frac{gu}{\operatorname{sen}\theta}\right)}{g\operatorname{sen}\theta}=0. \qquad (3)$$

396. La experiencia ha demostrado, que para los movimientos rápidos de los proyectiles de artillería la forma de la funcion φ puede ponerse bajo la forma
$$\varphi(v)=Mv^3+Nv^2+P;$$
siendo M, N, P funciones de la seccion trasversal del proyectil.

La resistencia del aire crece por lo tanto con más rapidez que el cuadrado de la velocidad; siendo el exceso debido en parte al crecimiento de la densidad del aire comprimido por el movimiento del proyectil.

La ecuacion (2) no es integrable bajo forma finita, si se da á $\varphi(v)$ esta forma complicada. Sólo en algunos casos particulares, como el de $\varphi(v)=Av^n+B$, que puede representar por aproximacion la ley definida por la fórmula $\varphi(v)=Mv^3+Nv^2+P$, disponiendo convenientemente de los coeficientes A y B y del exponente n, puede integrarse la fórmula; y el de $\varphi(v)=A\,log.\,v+B$, pero este caso sólo presenta un interés analítico.

No nos detendremos en la integracion en estos casos particulares, y nos contentaremos con la resolucion del problema por el método de Coriolis, anteriormente expuesto, el cual supone que $\varphi(v)=\frac{v^2}{K^2}$, puesto que en los demas casos no es posible la integracion de la ecuacion (2).

LECCION XXXI.

Movimiento de un punto material no libre.—Movimiento de un punto sobre una curva dada ó sobre una superficie dada. Fuerza centrífuga.—Movimiento de un punto material pesado sobre una recta inclinada.—Problema de Saladini.—Movimiento de un punto material pesado sobre una curva.

Movimiento de un punto material no libre.

397. En las lecciones anteriores hemos estudiado el movimiento de un punto material libre; es decir, de un punto al que se puede atribuir indiferentemente la posicion que se quiera, y hacerle pasar de esta posicion á otra por un camino enteramente arbitrario, á lo largo del cual no encuentra ninguna resistencia.

Mas no siempre puede considerarse como libre el punto material á que se aplica una ó várias fuerzas, porque muchas veces sólo puede moverse en cierto y determinado sentido. Tal sucede, por ejemplo, á un wagon colocado sobre una vía férrea, que no puede moverse más que á lo largo de la vía, en un sentido ó en otro, sean las que fueren las intensidades y direcciones de las fuerzas que se le apliquen, siempre que no excedan de ciertos límites determinados por la resistencia de los carriles de la vía. Lo mismo sucede á una bala de plomo suspendida del extremo de un hilo inestensible, y fijo por el otro extremo, solicitada por una fuerza que no sea capaz de romper el hilo, la cual se moverá siempre de manera, que su centro de figura permanecerá sobre la superficie ó dentro de una esfera, cuyo radio sea la longitud del hilo, y cuyo centro esté situado en el punto de suspension de éste. En ambos casos el movimiento es debido á las fuerzas directamente aplicadas al wagon y á la bala, y á las reacciones que experimentan de parte de los carriles y del hilo en cada uno de los puntos de su trayectoría. Si suponemos reducidos el wagon y la bala á puntos materiales, sobre los que actúen las diversas fuerzas, que acabamos de considerar, obtendremos las leyes de sus movimientos, aplicando las teorías expuestas para el movimiento de un punto material libre, y teniendo cuidado de introducir, juntamente con las fuerzas que les sean directamente aplicadas, las que representen las reacciones de los carriles y del hilo en su caso, sobre los puntos materiales que consideramos. Estas reacciones son desconocidas *à priori*, y toman magnitudes y direcciones convenientes para mantener el punto material sobre la curva ó superficie en que se mueve; el conocimiento prévio de la trayectoría que sigue el móvil, ó de la superficie en que se mueve, reemplazan en el cálculo al conocimiento de las reacciones que se desarrollan en su movimiento.

Vemos, pues, que hay casos en que un punto móvil no es libre para moverse en todas direcciones, y se le considera como sujeto á permanecer sobre una curva dada ó sobre una superficie dada, segun los casos. Siempre debemos tener presente que un punto material puede considerarse como libre, si con las fuerzas que le son directamente aplicadas, introducimos las reacciones que se desarrollan y le obligan á moverse sobre la línea ó superficie dadas.

Movimiento de un punto material sobre una curva dada ó sobre una superficie dada. Fuerza centrífuga.

398. Para formarnos idea clara del movimiento de un punto sobre una curva, supongamos que una bola de billar se mueve en un tubo de un diámetro igual al suyo, tubo á cuyo eje se ha dado la forma de una curva cualquiera; ó que un grano de rosario provisto de su abertura, por la cual pasa un delgado hilo metálico, al cual se ha dado préviamente la forma de una curva cualquiera, se mueve sobre este hilo. Haciendo abstraccion de las dimensiones trasversales del tubo ó del hilo metálico, y que al mismo tiempo supongamos reducido el cuerpo, que sólo puede deslizarse á lo largo del tubo ó del hilo metálico á un punto material, tendremos precisamente, lo que se llama un punto material sujeto á moverse sobre una curva fija.

Apliquemos á la bola de billar ó al grano de rosario, que supondremos primitivamente en reposo, una fuerza cuya direccion sea normal á la curva que representa el hilo metálico ó el eje del tubo; es claro que el punto material, no se pondrá en movimiento por la accion de esta fuerza, en uno ni otro sentido, porque la direccion de la fuerza forma ángulos iguales con la direccion de los dos sólos movimientos que puede tomar. En este caso, la fuerza aplicada al cuerpo, desarrollará una presion sobre el tubo ó sobre el hilo metálico; y resultará una reaccion del tubo ó del hilo sobre el cuerpo, que será igual y contraria á la presion; el cuerpo permanecerá en reposo y la reaccion del tubo ó del hilo se equilibrará con esta fuerza.

Si aplicamos al cuerpo una fuerza oblícua á la direccion del tubo ó del hilo, en el punto donde se encuentre colocado, descompondremos esta fuerza en dos componentes, una en direccion de la tangente á la curva del tubo ó del hilo y otra normal á esta curva; esta última no puede producir el movimiento del cuerpo, y la primera le obligará á moverse á lo largo del tubo ó del hilo. En este movimiento se desarrolla una resistencia en sentido contrario al movimiento, que se llama *rozamiento*, y del cual prescindiremos por ahora, y supondremos que el móvil puede deslizarse á lo largo del tubo y del hilo con la mayor facilidad. Más adelante ya veremos cómo se puede tener en cuenta este rozamiento.

Fundados en estas consideraciones, supondremos que un punto material, sujeto á permanecer en su movimiento sobre una curva fija, no puede experimentar de parte de ésta más que una reaccion normal á esta curva; y esta reaccion normal es la que deberemos introducir en el sistema de fuerzas aplicadas al punto, para poderle considerar como libre, tanto en las cuestiones de equilibrio como en las cuestiones de movimiento.

399. Sea AB (fig. 189), la curva sobre la cual está sujeto á moverse un punto material de masa m, esta curva puede ser plana ó de doble curvatura, el móvil en el punto M está sujeto á la fuerza F, resultante de todas las fuerzas que le son directamente aplicadas, y á la reaccion N de la curva sobre el punto, que como ántes hemos dicho, es normal á esta curva; podemos considerar el móvil como si fuera un punto material libre, moviéndose bajo la accion de las fuerzas F y N.

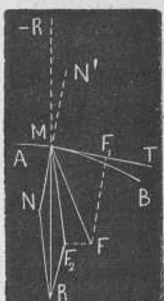


Fig. 189.

Descompongamos la fuerza F en dos componentes, F_1 en la direccion de la tangente, y F_2 perpendicular á esta tangente en el plano FMT; compongamos F_2 y N, y tendremos la resultante R dirigida tambien perpendicularmente á la tangente MT como las N y F_2; todas las fuerzas del sistema quedarán reducidas á la componente tangencial F_1 y á la componente centrípeta R, y como éstas tienen por valores (355), $m\frac{dv}{dt}$ y $m\frac{v^2}{\rho}$, tendremos

$$m\frac{dv}{dt}=F_1=F\cos\alpha,\quad m\frac{v^2}{\rho}=R;$$

la primera ecuacion, teniendo en cuenta que $v=\frac{ds}{dt}$, nos dará todas las circunstancias del movimiento sobre la curva, cuando sea dada la fuerza F, y tambien el ángulo α que forme con la tangente MT; la determinacion de la ecuacion finita del movimiento, se reduce á integrar esta ecuacion, del mismo modo que si tratáramos de encontrar la ecuacion del movimiento rectilíneo de un punto material libre.

Si $F=0$, ó $\cos\alpha=0$, es decir, si F fuera normal á la curva, $\frac{dv}{dt}=0$, el punto se moveria en virtud de la velocidad inicial, y el movimiento sería uniforme porque v sería constante.

400. En la expresion de la fuerza centrípeta R,

$$m\frac{v^2}{\rho}=R,$$

en la que ρ es el radio de curvatura de la trayectoría en el punto M, esta fuerza R está dirigida hácia el centro de curvatura y del lado de la concavidad de la curva. Esta fuerza R, siendo la resultante de F_2 y de N una fuerza $-R$, igual y contraria á R, equilibrará á los dos, F_2 y N. Formando las fuerzas $-R$, F_2 y N un sistema de fuerzas en equilibrio, una de ellas cualquiera, es igual y directamente opuesta á la resultante de las otras dos; luego $-N'$ igual y opuesta á N, es la resultante de $-R$ y de F_2; de modo, que la presion del punto material sobre la curva, es la resultante de la componente normal F_2 de la fuerza F, y de una fuerza—R, igual y opuesta á la fuerza centrípeta $R = m\frac{v^2}{\rho}$.

Esta fuerza—$R = -m\frac{v^2}{\rho}$, se llama *fuerza centrífuga.* En el caso de ser $F_2 = 0$, ya por ser $F = 0$, ó bien por estar dirigida segun la tangente á la trayectoría, la presion ejercida por el móvil sobre la curva AB, se reduce á la fuerza centrífuga. Como en este caso el móvil no está sujeto á la accion de ninguna fuerza, se moveria uniformemente y en línea recta, si estuviera libre; la precision en que se encuentra de seguir la curva AB, no altera la uniformidad de su movimiento, pero la direccion de su velocidad tiene que cambiar en cada instante; este cambio de velocidad no puede producirse sin que el móvil reaccione sobre la curva, y esta reaccion constituye la fuerza centrífuga, cuyo nombre indica la tendencia del móvil á marchar en línea recta; es decir, á alejarse del centro del círculo osculador de la curva AB. La fuerza centrífuga está dirigida segun la prolongacion del radio de curvatura de la curva AB, es decir, del lado de la convexidad de la curva.

401. Todos los teoremas que hemos establecido para el movimiento de un punto material libre, son aplicables al caso en que el móvil esté sujeto á moverse sobre una curva dada, con la condicion de agregar á la fuerza F, directamente aplicada al punto material, la reaccion N que experimenta de parte de la curva fija, y considerar el movimiento como debido á la accion de estas dos fuerzas. Mas como la fuerza N no es conocida *à priori*, es conveniente usar sólo los teoremas en que no entre esta fuerza. Como la fuerza tangencial F_1 es igual á $m\frac{dv}{dt}$, y no depende en manera alguna de la reaccion N de la

curva, será aplicable el teorema de las cantidades de movimiento; y tendremos, que el incremento de la cantidad de movimiento del punto material, durante un tiempo cualquiera, es igual al impulso de la componente tangencial F_1 de la fuerza F, durante el mismo tiempo. Tambien, como el trabajo de la reaccion normal N es cero, es aplicable el teorema de las fuerzas vivas; y tendremos, que el incremento de la fuerza viva del punto material, durante un intervalo cualquiera de tiempo, es igual al duplo del trabajo de la fuerza F durante este tiempo.

La reaccion N de la curva sobre el punto material no desaparece, en general, de las ecuaciones de las cantidades de movimiento proyectadas, ni de las de los momentos de las cantidades de movimiento. El teorema de las áreas sólo podrá aplicarse en el caso de que la resultante de las fuerzas dadas y de la reaccion normal N, esté en cada instante contenida en un plano que pase por una recta fija.

402. Las leyes del movimiento de un punto material sobre una superficie dada, se deducen fácilmente de lo expuesto para el movimiento del mismo sobre una línea. Por consideraciones análogas á las allí empleadas, veremos, que la reaccion de la superficie sobre el punto debe ser normal á esta superficie, tanto en el caso de equilibrio como en el de movimiento. Las fuerzas tangencial F_1, centrípeta R y centrífuga—R, tendrán los valores

$$F_1 = m\frac{dv}{dt},\quad R = m\frac{v^2}{\rho},\quad -R = -n\frac{v^2}{\rho}$$

y de ellos se deducirán absolutamente las mismas consecuencias del caso anterior, que podemos considerar aquí como repetidas.

403. El movimiento de un punto sujeto á recorrer

sin rozamiento una curva dada, está definido por la ecuacion única $m\frac{dv}{dt}=F_1$,

que expresa la igualdad entre la componente tangencial F_1, y el producto de la masa por la aceleracion tangencial.

Esta ecuacion es independiente de la forma de la línea dada, y la ley del movimiento del punto depende únicamente de la velocidad inicial del punto, y de los valores sucesivos que toma la componente tangencial de la fuerza, que actúa sobre él en cada instante.

Se puede por lo tanto, referir el problema del movimiento de un punto sobre la curva dada, al movimiento de un punto de igual masa sobre cualquiera otra línea, con tal que las velocidades iniciales y las componentes tangenciales de las fuerzas sean respectivamente iguales para los dos puntos; podemos sustituir, por ejemplo, la trayectoría por una línea recta, y aplicar al punto móvil en la direccion de esta recta una fuerza igual á F_1. De este modo se refiere el estudio de un movimiento curvilíneo, segun una curva dada, al estudio del movimiento rectilíneo de un punto libre.

Movimiento de un punto material pesado sobre una recta inclinada.

404. Sea M un punto material de masa m, que desciende sin rozamiento á lo largo de la recta AL (fig. 190), que forma con el horizonte LT el ángulo α. Su peso mg, que es la única fuerza que solicita al móvil, se descompone en dos componentes; una $mg\cos\alpha$, igual y contraria á la reaccion normal N de la recta sobre el punto, y otra $mg \operatorname{sen} \alpha$ que es la que produce el movimiento.

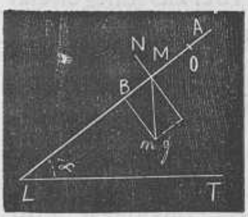


Fig. 190.

Llamemos l á la porcion de recta recorrida á partir de un punto fijo O de la recta: la ecuacion del movimiento será

$$m\frac{d^2l}{dt^2}=mg\operatorname{sen}\alpha; \quad ó \quad \frac{d^2l}{dt^2}=g\operatorname{sen}\alpha.$$

Integrando esta ecuacion, tendremos

$$l=\tfrac{1}{2}gt^2\operatorname{sen}\alpha+ct+c'.$$

Las constantes c y c' de la integracion se determinan por las condiciones iniciales del movimiento; si el punto parte del orígen sin velocidad inicial, tendremos para $t=0$, $l=0$, y $v=0$; luego $c=c'=0$, y la ecuacion del movimiento será

$$l=\tfrac{1}{2}gt^2\operatorname{sen}\alpha.$$

El movimiento se verifica, como si el punto material estuviera libre, y recorriera la recta AL por la accion de una gravedad dirigida segun esta recta, y reducida en la relacion de g á $g\operatorname{sen}\alpha$. Lo mismo sucederia, si un punto material pesado, descendiera sin rozamiento por la línea de máxima pendiente de un plano inclinado. Disminuyendo el ángulo α, se puede reducir cuanto se quiera la aceleracion $g\operatorname{sen}\alpha$ del movimiento que se desea observar. En este principio fundó Galileo su estudio de las leyes de la gravedad por medio del plano inclinado.

405. La duracion del movimiento para ir el móvil del punto O (fig. 191), á un punto O′, determinado por la distancia $OO'=l$, se deduce de la ecuacion despejando t; y es

$$t=\sqrt{\frac{2l}{g\operatorname{sen}\alpha}}=\sqrt{\frac{2}{g}\cdot\frac{l}{\operatorname{sen}\alpha}}.$$

Esta duracion es constante para todo trayecto OO′, tal, que $\frac{l}{\operatorname{sen}\alpha}$ tenga el mismo valor. Elevemos en el punto O′, y en el plano vertical, una perpendicular O′P sobre O′O, y sea P el punto en que esta recta corta á la vertical OP tendremos

$$OP=\frac{OO'}{\operatorname{sen}\alpha},$$

y por consiguiente

$$t=\sqrt{\frac{2OP}{g}}.$$

Sobre OP como diámetro describamos una circunferencia; toda cuerda OO′, OO″, OO‴...., será recorrida en el mismo tiempo por un móvil pesado, que resbale sin rozamiento á lo largo de esta cuerda, partiendo sin velocidad inicial del punto O, y este tiempo es el mismo que el que tardaria el móvil en recorrer, cayendo libremente, el diámetro vertical OP.

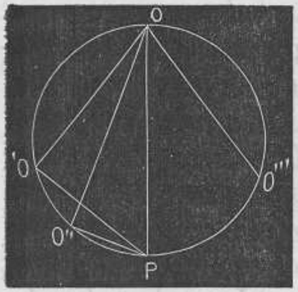


Fig. 191.

Por la misma razon un móvil abandonado sin velocidad inicial en el punto O′, deslizándose á lo largo de O′P, empleará tambien el mismo tiempo en llegar á P; porque este móvil está en las mismas condiciones que un móvil que parte sin velocidad del punto O, y recorre la cuerda OO‴, igual y paralela á O′P. Luego un punto material solicitado por su propio peso, tarda el mismo tiempo en recorrer el diámetro vertical de un círculo, que cualquiera de sus cuerdas.

Problema de Saladini.

406. Propongamos encontrar en un plano vertical una curva OMB (fig. 192), tal, que un móvil pesado emplee el mismo tiempo para ir del punto O, sin velocidad inicial, á un punto M cualquiera tomado sobre la curva, siguiendo la curva OBM, ó siguiendo la cuerda OM.

Consideremos sobre la curva dos puntos infinitamente próximos M y M′. El tiempo que tardará el móvil en ir de O á M′, siguiendo la curva, se compone del tiempo que gastará en ir de O á M, y del tiempo que emplea en ir de M á M′; ahora, en este último trayecto infinitamente pequeño, su velocidad es conocida é igual á la velocidad debida á la altura M′P, de donde ha descendido.

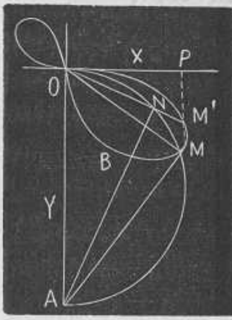


Fig. 192.

En el punto M, elevemos MA perpendicular á OM, y sobre OA como diámetro describamos una semicircunferencia, que cortará á la cuerda OM′ en el punto N. Dos móviles partiendo sin velocidad del punto O y siguiendo, el uno la cuerda OM, y el otro la ON, llegan al cabo del mismo tiempo á los puntos N y M. El recorrido de la cuerda OM′ comprende la duracion del recorrido ON, igual á la del recorrido OM, y la duracion del recorrido infinitamente pequeño NM′, durante el cual la velocidad del móvil es la debida á la altura M′P. La igualdad de tiempos exige la condicion NM′=MM′, puesto que las velocidades en el recorrido de estos dos elementos son las mismas.

Deduzcamos la ecuacion de la curva en coordenadas polares. Sea $OM=r$, $MOA=\theta$; $OM'=r+dr$, $M'OA=\theta+d\theta$; tendremos

$$OA=\frac{r}{\cos\theta};\quad ON=OA\cos(\theta+d\theta)=r\frac{\cos(\theta+d\theta)}{\cos\theta}$$
$$=r(1-\operatorname{tg}\theta\, d\theta);$$

luego

$$ds=NM'=(r+dr)-ON=r+dr-r(1-\operatorname{tg}\theta\, d\theta)$$
$$=dr+r\operatorname{tg}\theta\, d\theta.$$

Elevando al cuadrado, y reemplazando ds^2 por su igual $dr^2+r^2d\theta^2$, será

$$r^2d\theta^2=r^2\operatorname{tg}^2\theta\, d\theta^2+2rdr\operatorname{tg}\theta\, d$$

ó simplificando

$$r d\theta(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = 2 dr \operatorname{sen}\theta \cos\theta;$$

y en fin

$$\frac{dr}{r} = \frac{\cos 2\theta}{\operatorname{sen} 2\theta} d\theta = \frac{1}{2} \frac{\cos 2\theta \, d(2\theta)}{\operatorname{sen} 2\theta};$$

é integrando y llamando A^2 á la constante, tendremos

$$2 l.r = l.(A^2 \operatorname{sen} 2\theta),$$

y pasando de los logaritmos á los números, la ecuacion es

$$r^2 = A^2 \operatorname{sen} 2\theta;$$

ecuacion que representa una lemniscata, que tiene por centro el punto O y es tangente en este punto á los ejes coordenados OX y OY.

Movimiento de un punto material pesado sobre una curva.

407. Un punto cuyo peso mg es la única fuerza que actúa sobre él, se mueve sobre la curva AMBM'A' (fig. 193), el trabajo desarollado por este peso, al recorrer la altura z, es mgz, las superficies de nivel son los planos horizontales A A', C C'...; la ecuacion del movimiento del punto, es, por el teorema de las fuerzas vivas,

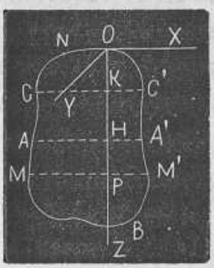


Fig. 193.

$$mv^2 - mv_0^2 = 2mg(z-h),$$

$$\text{ó} \quad v^2 = v_0^2 + 2g(z-h); \quad (1)$$

suponiendo que hemos tomado por eje de las z la vertical que pasa por el punto O, el más alto de la curva, y que para $z = OH = h$ tenemos $v = v_0$. Puede suceder que $v_0 = 0$, es decir, que el móvil parta del punto A sin velocidad inicial, y entónces la ecuacion se reduce á

$$v^2 = 2g(z-h);$$

al llegar el móvil al punto M, para el que se tiene $HP=z-h$, tendremos

$$v^2=2g.HP;$$

de manera, que la velocidad adquirida por el móvil es la misma que si hubiera recorrido libremente la altura HP. En el punto más bajo B, tendrá el móvil la mayor velocidad, continuará moviéndose en virtud de la velocidad adquirida y llegará á A′, en donde será cero la velocidad, por estar A′ en la superficie de nivel AA′; volverá á descender en sentido inverso en virtud de su peso y llegará al punto A, donde volverá á ser nula la velocidad, y así sucesivamente; es decir, que ejecutará un número indefinido de oscilaciones de A á A′ y de A′ á A.

El tiempo empleado por el móvil en recorrer el arco $s=AM$, es el mismo, ya descienda, ya ascienda el móvil; porque debiendo ser v constante para todos los planos horizontales que representan las superficies de nivel, la relacion $dt=\frac{ds}{v}$ dará para valores iguales de los elementos ds, el mismo valor para dt.

Si en el punto A, para el cual $z=h$, el móvil va animado de una cierta velocidad v_0, al llegar el móvil al punto A′, va animado de la misma velocidad v_0, que le obligará á elevarse más sobre la curva. Para ver á donde llegará, supondremos el orígen de las coordenadas en el punto más alto O, y examinaremos los tres casos

$$v_0 \begin{smallmatrix}<\\>\\=\end{smallmatrix} \sqrt{2gh}.$$

En el primer caso, la velocidad del móvil en el punto A es menor que la que adquiriria cayendo verticalmente de la altura $OH=h$, el móvil se detendrá en un punto C′, entre A′ y O, para el cual $v=0$, y la ecuacion (1) dará

$$z=OK=h-\frac{v_0^2}{2g}=\frac{2gh-v_0^2}{2g};$$

de C′ volverá á descender por la accion de su peso, vendrá á pararse en C, situado á la misma altura que C′, de C volverá á C′ y así sucesivamente verificando una porcion de oscilaciones, todas de la misma duracion, es decir, *isocronas*.

2.° caso: $v_0 > \sqrt{2gh}$. La velocidad del móvil

$$v^2 = 2gz + (v_0{}^2 - 2gh),$$

no puede ser cero, porque el segundo miembro de esta ecuacion se compone de dos cantidades positivas; el móvil llegará al punto O, para el que $z=0$, con una velocidad $v = \sqrt{v_0{}^2 - 2gh}$, en virtud de la cual, pasará de este punto á la izquierda y recorrerá la curva una infinidad de veces siempre en el mismo sentido.

3.er caso: $v_0 = \sqrt{2gh}$. La ecuacion anterior se reduce á $v^2 = 2gz$, que se verifica para $z=0$, y $v=0$, el móvil se parará en el punto O, pero no llega á este punto sino despues de un tiempo infinito. En efecto, haciendo $\mathrm{ON} = s$, tendremos

$$v = \sqrt{2gz}, \quad \text{ó} \quad \frac{ds}{dt} + \sqrt{2gz} = 0, \quad (a)$$

llamando ν al ángulo que la normal en el punto N forma con el eje de las z, y siendo ρ el radio de curvatura, tenemos

$$\frac{d\,\frac{dz}{ds}}{ds} = \frac{\cos \nu}{\rho};$$

y siendo α una cantidad tal, que $\alpha < \frac{\rho}{\cos \nu}$, se tendrá

$$\frac{d\,\frac{dz}{ds}}{ds} < \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{dz}{ds} < \frac{s}{\alpha}, \quad z < \frac{s^2}{2\alpha};$$

por consiguiente la ecuacion (a), dará

$$\frac{ds}{s} + dt\sqrt{\frac{g}{\alpha}} > 0;$$

que integrando da

$$l.s - l.s' + (t-t')\sqrt{\frac{g}{\alpha}} > 0, \quad ó \quad t-t' > \sqrt{\frac{\alpha}{g}}\, l.\frac{s'}{s}.$$

Para $s=0$, $\frac{s'}{s}=\infty$, luego $t-t'$ toma un valor infinito cuando $s=0$; es decir, el tiempo transcurrido es infinito cuando el móvil llega del punto O.

LECCION XXXII.

Péndulo simple. Ecuacion de su movimiento. — Caso en que esta ecuacion puede integrarse. — Caso en que las oscilaciones son pequeñas.—Teoría general del péndulo simple. — Desarrollo en serie de la duracion de una oscilacion.—Determinacion de la tension del hilo.

Péndulo simple. Ecuacion de su movimiento.

408. Se llama péndulo á un cuerpo sólido pesado que puede oscilar alrededor de un eje horizontal. Suponiendo el cuerpo pesado reducido á un punto material, suspendido al extremo de un hilo ó de una varilla inextensible y sin peso, tendremos lo que se llama un *péndulo simple*. El punto material, separado de la posicion de equilibrio sin velocidad inicial, ó con una velocidad situada en el plano vertical del péndulo, describe un arco de círculo, por lo que tambien suele llamarse este aparato *péndulo circular*. El centro de este arco es el punto de suspension.

Dos cuestiones principales debemos examinar en la teoría del péndulo, una la ley de su movimiento y otra la tension del hilo. El estudio de esta última, es tanto más importante, cuanto que ella nos indicará, si el punto material permanece sobre la circunferencia, ó si la abandona introduciéndose dentro del círculo: el primer caso se verifica si la tension del hilo es positiva; y el segundo si se hace nula para pasar á ser negativa; porque este cambio de signo indica, que para mantener el punto móvil sobre la curva, el hilo deberá resistir á un esfuerzo de compresion. Para evitar la distincion de los dos casos, podemos suponer que se reemplaza el hilo por una varilla rígida, inextensible, incompresible y sin masa apreciable.

Sea M (fig. 194), la posicion del móvil sobre la circunferencia, en un instante cualquiera, y v su velocidad dirigida en el sentido de la tangente MH. El teorema de las fuerzas vivas dará la velocidad en todos los puntos de la curva; y podremos conocer la naturaleza particular del movimiento. A la velocidad v corresponde una altura $h = \frac{v^2}{2g}$, de la cual el móvil no podrá pasar, y cuando llegue á esta altura su velocidad será cero. Tracemos á la distancia vertical ME $= h$ una horizontal RR′, si esta recta corta el círculo en dos puntos R y R′, el punto móvil no podrá pasar más arriba de estos puntos y recorrerá el arco RBR′; en los puntos R y R′ el móvil se encuentra su velocidad y vuelve á descender por su propio peso, tomando las mismas velocidades en sentido contrario. El movimiento es entónces *oscilatorio*. Si la recta RR′ no corta á la circunferencia, la velocidad del móvil no puede ser nunca cero, ni cambiar de signo; siendo en este caso el movimiento revolutivo en el sentido MBR′AR.

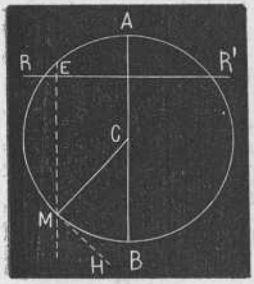


Fig. 194.

En el caso en que la recta RR′ sea tangente á la circunferencia, el móvil llega al punto de contacto A con una velocidad nula, pero tarda en llegar un tiempo infinito, como hemos visto al final de la leccion anterior.

409. Para estudiar la ley del movimiento del péndulo ismp!e, tomemos por orígen de las coordenadas el punto C, de suspension (fig. 195), y el eje de las z vertical, contándose las z de arriba á abajo: sea v_0 la velocidad inicial, cuando el ángulo que forma el hilo con la vertical es $ACB=\alpha$. La ecuacion del movimiento será, por el teorema de las fuerzas vivas,

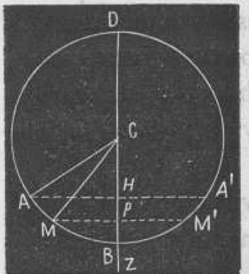


Fig. 195.

$$(1)\quad v^2=v_0^2+2g(z-h),$$

siendo h la z del punto A, ó tambien

$$\frac{ds}{dt}=\pm\sqrt{v_0^2+2g(z-h)};$$

contando los arcos á partir de A, s crece con t, cuando el móvil va de A á A' y debemos tomar el signo $+$, y decrece de A' á A y entónces tomaremos el signo $-$. Cuando el móvil llega al punto M, haremos al ángulo $MCB=\theta$, y llamaremos l á la longitud CA del péndulo, y tendremos

$$s=l(\alpha-\theta),\quad \text{y}\quad ds=-l\,d\theta$$

de modo que

$$-\frac{l\,d\theta}{dt}=\sqrt{v_0^2+2g(z-h)};$$

pero $CP=z=l\cos\theta$, $CH=h=l\cos\alpha$, poniendo estos valores y despejando dt, la ecuacion del movimiento es

$$(2)\quad dt=-\frac{l\,d\theta}{\sqrt{v_0^2+2gl(\cos\theta-\cos\alpha)}}.$$

Caso en que esta ecuacion puede integrarse.

410. La ecuacion anterior es irracional y sólo puede integrarse exactamente, en el caso, en que

$$v_0^2=2gl(1+\cos\alpha).$$

Esta condicion se verifica cuando la velocidad del móvil en el punto A, es la que adquiriria descendiendo sin velocidad inicial del punto más alto del círculo D; porque en este caso el cuadrado de la velocidad del móvil al llegar al punto A es $2g\mathrm{DH}$, y como

$$\mathrm{DH}=l+l\cos\alpha=l(1+\cos\alpha),$$

tendremos

$$v_0^2=2gl(1+\cos\alpha),$$

sustituyendo este valor de v_0^2 en la ecuacion (2), y reduciendo, se convierte en

$$dt=-\frac{ld\theta}{\sqrt{2gl(1+\cos\theta)}}=-\frac{ld\theta}{\sqrt{2gl.2\cos^2\frac{1}{2}\theta}}=-\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{\frac{d\theta}{2}}{\cos\frac{1}{2}\theta};$$

ó
$$dt=\sqrt{\frac{l}{g}}\times\frac{d\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Haciendo

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}=2x,\qquad dt=\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{dx}{\operatorname{sen}x\cos x}=\sqrt{\frac{l}{g}}d.l.\operatorname{tg}x;$$

integrando,

$$t=\sqrt{\frac{l}{g}}l.\operatorname{tg}x+\mathrm{C},\quad ó\quad t=\sqrt{\frac{l}{g}}\,l.\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)+\mathrm{C}$$

para $t=0$, $\theta=\alpha$ y

$$\mathrm{C}=-\sqrt{\frac{l}{g}}\,l.\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right);$$

y por fin

$$(3)\qquad t=\sqrt{\frac{l}{g}}\;l.\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)};$$

fórmula que nos da el tiempo empleado por el móvil en recorrer el arco AM, habiendo partido del punto D sin velocidad inicial.

Si en ella hacemos $\theta=0$, tendremos

$$t=\sqrt{\frac{l}{g}}\,l.\frac{\operatorname{tg}45^0}{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)}=\sqrt{\frac{l}{g}}\,l.\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right);$$

expresion del tiempo empleado en recorrer el arco AB. Haciendo $\theta=-\pi$, obtendremos el tiempo que emplea el móvil en volver al punto D, que es en este caso $t=\infty$; es decir, que al cabo de un tiempo infinito el móvil vuelve al punto de partida D.

Caso en que las oscilaciones son pequeñas.

411. Tambien puede integrarse por aproximacion la fórmula (2) del movimiento del péndulo, en el caso en que las oscilaciones son pequeñas. Podemos suponer en ella que $v_0=0$, para lo cual bastará aumentar el ángulo α en un cierto número de grados, para que el móvil llegue al punto A con la velocidad v_0, y suponer que el móvil parte del punto en que la velocidad inicial es nula. La fórmula (2) se convierte entónces, en

$$dt=-\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{d\theta}{\sqrt{2\cos\theta-2\cos\alpha}};$$

reemplazando en esta $\cos\theta$ y $\cos\alpha$, por sus desarrollos en serie en funcion del arco, y despreciando las potencias de α y θ, desde la cuarta en adelante, por ser estos arcos muy pequeños, tendremos

$$dt=-\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2-\theta^2}};$$

que integrando, dará

$$(4)\qquad t=\sqrt{\frac{l}{g}}\text{arco}\cos\frac{\theta}{\alpha}:$$

la constante de esta integracion es cero, porque para $t=0$, $\theta=\alpha$, y arco $\cos(1)=0$.

Despejando θ, arco descrito por el móvil en el tiempo t, tendremos

$$(5)\quad \theta = \alpha \cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

Obtendremos la duracion T de una oscilacion, haciendo en la (4), $\theta = -\alpha$, y será

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \operatorname{arco} \cos(-1), \quad \text{ó} \quad T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (6).$$

Esta fórmula (6) es la que tanto se usa en la Física; y no debemos olvidar, que no es más que aproximada, y que se acercará tanto más á la verdad, cuanto más pequeñas sean las oscilaciones. Por ella vemos, que la duracion de una oscilacion es independiente de la amplitud de esta oscilacion, amplitud que puede reducirse á la mitad, al tercio, al cuarto, etc., sin que su duracion varíe; por supuesto, siempre en la hipótesis de que las oscilaciones son muy pequeñas. Las oscilaciones serán isocronas cualquiera que sea la amplitud (407).

412. Una de las aplicaciones más importantes de la fórmula (6), es la que se hace para determinar g, ó sea la aceleracion debida á la gravedad, en los diferentes lugares de la Tierra. Para lo cual, como es difícil determinar en la práctica la duracion de una oscilacion, se cuenta el número n de oscilaciones, que ejecuta el péndulo en un tiempo T_1, y se tendrá la duracion T de una de ellas, como sigue,

$$T = \frac{T_1}{n} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \text{ de donde } g = \frac{n^2\pi^2 l}{T_1^2}.$$

Si en la fórmula (5) ponemos por $\sqrt{\frac{g}{l}}$, su valor $\frac{\pi}{T}$, deducido de la (6), tendremos

$$\theta = \alpha \cos \pi\frac{t}{T}, \text{ y } \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\pi\alpha}{T} \operatorname{sen} \pi\frac{t}{T}.$$

De estas fórmulas se deduce, que si añadimos á t,

$2T$, θ y $\frac{d\theta}{dt}$ permanecen los mismos en magnitud y en signo; y que si les añadimos T, θ y $\frac{d\theta}{dt}$, cambian de signo conservando su valor absoluto; de manera que para intervalos de tiempo que difieren de una doble oscilacion, $2T$, el péndulo va animado de la misma velocidad y forma ángulos iguales con la vertical; y que para intervalos de tiempo que difieran de una oscilacion T, el péndulo forma ángulos iguales y de signo contrario con la vertical, y sus velocidades son tambien iguales y de signo contrario.

Teoría general del péndulo simple.

413. Aunque las fórmulas expuestas en los párrafos anteriores, bastan generalmente para las aplicaciones del péndulo, vamos á exponer la teoría general de éste, porque ademas de darnos fórmulas aplicables á todos los casos, cualquiera que sea la fuerza que solicite al móvil, nos permitirá tener en cuenta la resistencia del medio en que se mueva el péndulo.

Conservemos las notaciones de los párrafos anteriores, y sea m la masa del punto móvil, su peso mg se descompondrá en dos componentes, una en la direccion de la prolongacion del hilo, que quedará destruida por la resistencia del punto de suspension, y otra en direccion de la tangente á la trayectoría, que será la componente tangencial que es la que produce el movimiento, el valor de esta es $g\,\text{sen}\,\theta$, y su expresion general es $m\frac{dv}{dt}$, de modo que

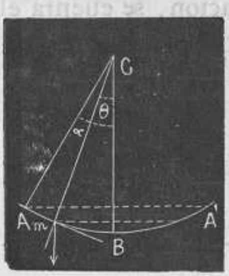


Fig. 196.

tenemos

$$m\frac{dv}{dt}=mg \text{ sen } \theta, \quad \text{ó} \quad \frac{dv}{dt}=g \text{ sen } \theta. \quad (1)$$

Llamando s al arco Am (fig. 196), tendremos

$$s=l(\alpha-\theta), \; v=\frac{ds}{dt}=-\frac{ld\theta}{dt}, \; \frac{dv}{dt}=-l\frac{d^2\theta}{dt^2};$$

y la ecuacion del movimiento es

$$-l\frac{d^2\theta}{dt^2}=g \text{ sen } \theta, \quad \text{ó} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\text{sen } \theta=0; \quad (2)$$

multiplicando por $2d\theta$ é integrando, resulta

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2-2\frac{g}{l}\cos\theta+C=0.$$

Al principio de la oscilacion, $\theta=\alpha$, y $\frac{d\theta}{dt}=0$; luego

$$C=2\frac{g}{l}\cos\alpha;$$

sustituyendo este valor, y despejando dt, tendremos

$$(3) \quad dt=\mp\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{d\theta}{\sqrt{2\cos\theta-2\cos\alpha}};$$

creciendo t, θ disminuye, cuando el móvil va de A á A', y aumenta cuando va de A' á A, y debemos tomar el signo $-$ en el primer caso, y el $+$ en el segundo.

Para obtener la duracion de una oscilacion llamemos a y x á las alturas de los puntos A y m, sobre el plano horizontal tirado por el punto B, y tendremos

$$a=l(1-\cos\alpha), \quad x=l(1-\cos\theta),$$

de donde restándolas y diferenciando la segunda, resultan

$$2\cos\theta-2\cos\alpha=2\frac{a-x}{l}, \; d\theta=\frac{dx}{\sqrt{2lx-x^2}};$$

sustituyendo en la (3), sale por medio de fáciles trasformaciones

$$dt=-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}\sqrt{1-\frac{x}{2l}}};$$

siendo T la duracion de una oscilacion, $\frac{1}{2}$ T es el tiempo empleado por el péndulo en llegar al punto más bajo B, y los límites de la integral con relacion á x, serán, desde $x=a$, hasta $x=0$; por lo tanto

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{T}=-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_a^0\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}\sqrt{1-\frac{x}{2l}}},$$

$$(4)\quad \mathrm{T}=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}\left(1-\frac{x}{2l}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Desarrollo en série de la duracion de una oscilacion.

414. No pudiéndose determinar exactamente la integral de la ecuacion (4), la obtendremos aproximadamente desarrollando en série el factor $\left(1-\frac{x}{2l}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Este desarrollo será

$$\left(1-\frac{x}{2l}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2l}+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x}{2l}\right)^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{x}{2l}\right)^3+\ldots;$$

esta série es siempre convergente, porque x es menor que $2l$.

Por lo tanto la integral será

$$\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}\left(1-\frac{x}{2l}\right)^{-\frac{1}{2}}=\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{1}{2l}\int_0^a\frac{x\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{4l^2}\int_0^a\frac{x^2dx}{\sqrt{ax-x^2}}+\ldots$$

Hagamos

$$\mathrm{A}_n=\int_0^a\frac{x^n\,dx}{\sqrt{ax-x^2}},$$

y tendremos

$$\mathrm{T}=\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\mathrm{A}_0+\tfrac{1}{2}\,\frac{\mathrm{A}_1}{2l}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{\mathrm{A}_2}{4l^2}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{\mathrm{A}_3}{8l^3}+\ldots\right).$$

Ahora, sabemos por la teoría de las integrales binomias, que

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{ax-x^2}} = -\frac{x^{n-1}\sqrt{ax-x^2}}{n} + \frac{(2n-1)a}{2n}\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{ax-x^2}};$$

y por lo tanto

$$\int_0^a \frac{x^n dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{(2n-1)a}{2n}\int_0^a \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}, \text{ ó } A_n = \frac{(2n-1)a}{2n} A_{n-1},$$

poniendo por n, $n-1$, $n-2$, $n-3$... y multiplicando ordenadamente las ecuaciones que resultan, se obtiene

$$A_n = \frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)a^n}{2.4.6..\ 2n} A_0.$$

Mas

$$A_0 = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \pi;$$

porque

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{a^2}{4} - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{2dx}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{a-2x}{a}\right)^2}} = \text{arco cos.}\frac{a-2x}{a} + C;$$

y tendremos

$$A_0 = \pi,\ A_1 = \tfrac{1}{2}a\pi,\ A_2 = \frac{1.3}{2.4}a^2\pi,\ A_3 = \frac{1.3.5.}{2.4.6}a^3\pi, ..$$

y por consiguiente

$$(5)\quad T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{a}{2l} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{a}{2l}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \left(\frac{a}{2l}\right)^3 + \ldots\right];$$

fórmula general, que da en todos los casos la duracion de una oscilacion.

Si la amplitud es muy pequeña, $a = l(1-\cos\alpha)$, puede despreciarse y volvemos á obtener la fórmula

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Si reemplazamos

$a=l(1-\cos\alpha)$, por $l\left(\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^4}{1.2.3.4}+\ldots\right)$, despreciando las potencias de α superiores á la segunda, obtendremos

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\alpha^2}{16}\right);$$

y del mismo modo deduciríamos valores de T, tan aproximados como quisiéramos.

Determinacion de la tension del hilo.

415. Para encontrar la tension del hilo, que representa aquí la reaccion normal de la circunferencia, hay que buscar la resultante de la componente normal de la gravedad; y de la fuerza centrífuga.

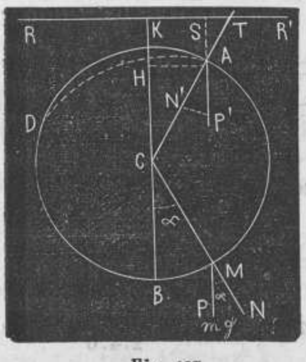


Fig. 197.

Sea M la posicion del móvil, y MN (fig. 197), la componente normal del peso mg, la tension T del hilo será

$$T=MN+\frac{mv^2}{l}=mg\cos\alpha+\frac{mv^2}{l}.$$

Las dos componentes se suman en toda la semicircunferencia inferior, para la cual el ángulo α varía, de $-\frac{\pi}{2}$ á $\frac{\pi}{2}$, y su coseno es positivo; y se restan para todo punto A situado en la semicircunferencia superior. Se puede determinar la posicion del punto A, para el que la tension es nula, $\frac{mv^2}{l}$ y $AN'=MN$, son iguales y de signo contrario; á partir de este punto, si el móvil está sostenido por un hilo y no por una varilla rígida, entrará en el círculo como un punto libre y describirá una parábola, que partiendo tangencialmente á la circunferencia, del punto A, llevará al móvil á otro punto D de la circunferencia.

Para encontrar este punto A, tracemos la recta horizontal RR′ correspondiente á la velocidad nula del móvil, y bajemos la perpendicular AS sobre esta recta. La velocidad v en el punto A se obtendrá por la ecuacion

$$v^2 = 2g \times \mathrm{SA}.$$

La fuerza centrífuga, que está dirigida segun AT, tiene por valor

$$\frac{mv^2}{l} = \frac{2mg \times \mathrm{SA}}{l}.$$

La componente normal de la gravedad AN′ debe serle igual.

Del punto A bajemos una perpendicular AH sobre la vertical CK. Los triángulos semejantes AHC, P′N′A, darán

$$\frac{\mathrm{AN'}}{\mathrm{AP'}} = \frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{CA}}, \text{ ó } \mathrm{AN'} = \frac{\mathrm{AP'}}{\mathrm{CA}}\mathrm{CH} = \frac{mg}{l} \cdot \mathrm{CH}.$$

Por consiguiente

$$\frac{2mg \times \mathrm{SA}}{l} = \frac{mg}{l} \cdot \mathrm{CH}; \text{ ó } 2\mathrm{SA} = \mathrm{CH}.$$

Pero SA=KH; luego el punto H está en el tercio superior de la distancia CK, y conocido H se conoce A. Es preciso, pues, para que la tension del hilo llegue á ser nula, que la línea de nivel RR′, que corresponde á una velocidad nula, esté más alta que el punto C, y que la horizontal al tercio superior de su distancia á este punto, encuentre á la circunferencia.

LECCION XXXIII.

Péndulo cicloidal ó péndulo de Huyghnes. Su movimiento, y porqué se da á la ciclóide el nombre de tautocrona.— Tautocrona en vacío.—Brachistochrona.—Péndulo circular en un medio resistente.

Péndulo cicloidal ó péndulo de Huyghens. Su movimiento y porqué se da á la ciclóide el nombre de tautocrona.

416. Se da el nombre de péndulo cicloidal á un péndulo en el que el punto material se mueve sobre una cicloide. Huyghens para realizar este péndulo, construyó dos hemiciclóides, CD, DC′ (fig. 198), que reunidas constituyen la evoluta de la ciclóide; si colocamos dos piezas cilíndricas que tengan estas curvas por bases, y fijamos un extremo del hilo, cuya longitud es DB=b, del punto D; y en el otro

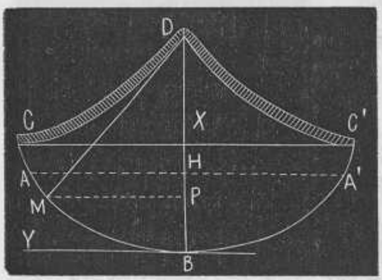


Fig. 198.

extremo un punto material pesado, y le separamos de la posicion del equilibrio DB, oscilará á uno y otro lado de la vertical DB, y realizará el fin, de que el punto material se mueva sobre la ciclóide CBC′; porque en una posicion cualquiera del hilo DM, siendo este tangente á la curva CD, el punto M estará sobre la ciclóide.

Para encontrar las leyes del movimiento de este péndulo, tomando por ejes BD y BY, y suponiendo que el péndulo parte del punto A sin velocidad inicial, por el teorema de las fuerzas vivas, tendremos, haciendo $BH=h$ y $BP=x$,

$$(1) \quad v^2=2g(h-x).$$

Llamemos s al arco BM, contado á partir del punto más bajo B de la curva, tendremos $s^2=4ax$, siendo a el diámetro del círculo generador de la ciclóide, y por ser $2a=b$, será

$$s^2=2bx, \quad s=\sqrt{2bx}, \quad ds=\sqrt{2b}\,\frac{dx}{2\sqrt{x}};$$

como $v=\frac{ds}{dt}$, de la (1) sale

$$-\frac{ds}{dt}=\sqrt{2g(h-x)} \quad \text{ó} \quad dt=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{g}}\,\frac{dx}{\sqrt{hx-x^2}} \quad ; \quad (2)$$

integrando, y determinando la constante por la condicion de ser $x=h$, cuando $t=0$, constante que es cero, resulta

$$(3) \quad t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{g}} \text{ arco cos } \frac{2x-h}{h}.$$

El tiempo T, empleado por el móvil en una oscilacion, es el duplo del que emplea en recorrer el arco AB que se obtendrá haciendo $x=0$; y tendremos

$$\tfrac{1}{2}T=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{g}}\text{arco cos}(-1), \text{ ó } T=\pi\sqrt{\frac{b}{g}}. \quad (4)$$

417. Esta ecuacion nos dice, que la duracion de las oscilaciones del péndulo cicloidal es rigurosamente independiente de la amplitud de estas oscilaciones; así que, diferentes móviles, que parten en el mismo instante, sin velocidad inicial, de diversos puntos de la ciclóide, llegan al mismo tiempo al punto más bajo de esta curva, y verifican todos á uno y otro lado de este punto oscilaciones de igual duracion. El tiempo empleado en una de estas

oscilaciones $\pi\sqrt{\frac{b}{g}}$, es el mismo que el de las pequeñas oscilaciones de un péndulo circular, cuya longitud fuera $b=$DB.

El péndulo cicloidal descrito al principio, á pesar de esta propiedad notabilísima de la ciclóide, no da resultados muy precisos en la práctica, y se prefiere por ello el péndulo circular, que verifique pequeñas oscilaciones á uno y otro lado de la vertical.

Tambien por esta propiedad de que un punto pesado abandonado, sin velocidad inicial, de cualquier punto de esta curva, llega en el mismo tiempo al punto más bajo, se da á la ciclóide el nombre de *tautocrona*.

Tautocrona en el vacío.

418. Vamos á demostrar la recíproca de la proposicion que acabamos de enunciar; á saber, que toda curva tautocrona en el vacío, es una ciclóide. Sea AB (fig. 198), una curva tautocrona, conservando las notaciones del número anterior, la ecuacion del movimiento es

$$dt=-\frac{ds}{\sqrt{2g(h-x)}},\quad \text{ó}\quad dt\sqrt{2g}=\frac{-ds}{\sqrt{h-x}};$$

$$\text{y tambien}\quad (1)\quad t\sqrt{2g}=\int_0^h \frac{\frac{ds}{dx}}{\sqrt{h-x}}\,dx;$$

en esta ecuacion, t es el tiempo empleado por el móvil en describir el arco AB, y se trata de determinar s en funcion de x, de modo que este tiempo sea independiente de h.

Desarrollemos s en série ordenada, segun las potencias ascendentes de x, y sea

$$(2)\quad s=\mathrm{A}x^{\alpha}+\mathrm{B}x^{6}+\mathrm{C}x^{\gamma}+\ldots;$$

$$\frac{ds}{dx}=\mathrm{A}\alpha x^{\alpha-1}+\mathrm{B}6x^{6-1}+\mathrm{C}\gamma x^{\gamma-1}+\ldots;$$

como s y x tienen el orígen en el punto más bajo B, serán á la vez $s=0$ y $x=0$; para lo cual es preciso que los exponentes de x, sean todos positivos y diferentes de cero. El más pequeño α, debe ser menor que 1, porque en el punto B, $\frac{dx}{ds}=0$, $\frac{ds}{dx}=\infty$; lo cual exjie, que $\alpha-1\leq 0$; sustituyendo en la (1) por $\frac{ds}{dx}$ su valor, se tiene

$$t\sqrt{2g}=A\alpha\int_0^h \frac{x^{\alpha-1}}{\sqrt{h-x}}dx+B6\int_0^h \frac{x^{6-1}}{\sqrt{h-x}}dx$$
$$+C\gamma\int_0^h \frac{x^{\gamma-1}}{\sqrt{h-x}}dx+\ldots;$$

haciendo $x=hu$, se convierte en la siguiente,

$$t\sqrt{2g}=A\alpha h^{\alpha-\frac{1}{2}}\int_0^1 \frac{u^{\alpha-1}}{\sqrt{1-u}}du+B6h^{6-\frac{1}{2}}\int_0^1 \frac{u^{6-1}}{\sqrt{1-u}}du+\ldots$$

El segundo miembro de esta ecuacion debe ser independiente de h, para lo cual es preciso, que

$$\alpha-\tfrac{1}{2}=0,\ \alpha=\tfrac{1}{2},\ B=0,\ C=0\ldots;$$

porque si $\alpha-\frac{1}{2}$ fuera positivo, sería $t=0$, para $h=0$; y si fuera negativo, sería para $h=0$, $t=\infty$.

Sustituyendo en la (2), resulta

$$s=Ax^{\frac{1}{2}},\ s^2=A^2x,\ A^2=2a,\ s^2=2ax;$$

ecuacion que representa una ciclóide; luego la ciclóide es la única curva que goza en el vacío de la propiedad de ser tautocrona.

El valor de t se obtiene, observando que $A\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{2a}$, y sustituyendo en la ecuacion, resulta

$$t\sqrt{2g}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2a}\int_0^1 \frac{u^{-\frac{1}{2}}du}{\sqrt{1-u}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2a}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u-u^2}}=\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{2a},$$

y despejando t, tendremos

$$t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Brachistocrona.

419. La ciclóide de eje vertical, tiene ademas una propiedad muy notable bajo el punto de vista mecánico, por la cual se le da el nombre de *brachistocrona*, que es la curva por donde un punto material pesado bajará en el menor tiempo posible desde un punto á otro del espacio. Sean A y B dos puntos, siendo A el más elevado; unamos estos dos puntos por una curva cualquiera ACB (fig. 199), supongamos que un punto pesado desciende por ella de A á B, solicitado sólo por su propio peso y sin rozamiento. Por el teorema de las fuerzas vivas calcularemos las velocidades del móvil en cada punto, y el tiempo que emplea en pasar del punto A al punto B.

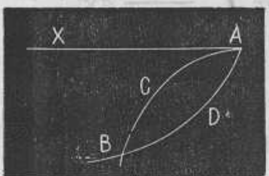


Fig. 199.

A cada curva corresponde un tiempo diferente, y la ciclóide ADB, de eje vertical, cuyo punto de retroceso es el punto A y que pasa por el punto B, es la curva para la cual, el tiempo t es el más pequeño posible, ó lo que es lo mismo, que la ciclóide ADB es la curva del más rápido descenso, entre todas las que unen los puntos A y B.

Para demostrarlo observaremos que $v = \frac{ds}{dt}$, de donde $dt = \frac{ds}{v}$, y como $v^2 = 2gz$, $v = \sqrt{2gz}$; será $dt = \frac{ds}{\sqrt{2g}\sqrt{z}}$, que integrada, dará $\int dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{ds}{\sqrt{z}}$; de manera, que la funcion que debe ser un mínimo, es la integral $\int \frac{ds}{\sqrt{z}}$ tomada entre los límites correspondientes á los puntos A y B.

420. Consideremos por el cálculo de las variaciones, en general, la funcion $\int V dx$, en la que V es funcion de x, de z y de $\frac{dz}{dx}=p$; suponiendo para mayor sencillez, que $\delta x=0$, lo cual no disminuye la generalidad del razonamiento. En esta hipótesis, tendremos

$$\delta\int V dx=\int\delta V dx=\int\delta V\times dx,$$

pero $\delta V=\frac{dV}{dz}\delta z+\frac{dV}{dp}\delta p$; omitiendo el término $\frac{dV}{dx}\delta x$, por ser $\delta x=0$; y $\delta p=\delta\frac{dz}{dx}=\frac{\delta\, dz}{dx}$, y tendremos

$$\int V dx=\int\frac{dV}{dz}\delta z dx+\int\frac{dV}{dp}\delta\, dz.$$

Integrando por partes el último término, será

$$\int\frac{dV}{dp}\delta dz=\frac{dV}{dp}\delta z-\int\delta z d\frac{dV}{dp},$$

luego

$$\int V dx=\frac{dV}{dp}\delta z+\int\left(\frac{dV}{dz}dx-d\frac{dV}{dp}\right)\delta z.$$

La cantidad fuera del signo $\int$ es nula en los límites, porque los puntos extremos de la curva buscada son fijos. La condicion del mínimo es, por lo tanto, para que δz sea arbitraria en toda la curva;

$$\frac{dV}{dz}dx-d\frac{dV}{dp}=0.$$

Para aplicar este método al problema de la brachistocrona, reemplacemos ds por $dx\sqrt{1+p^2}$, y tendremos $V=\frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{z}}$.

y $$\frac{dV}{dz}=-\frac{\sqrt{1+p^2}}{2z\sqrt{z}};\quad \frac{dV}{dp}=\frac{p}{\sqrt{z}\sqrt{1+p^2}};$$

y la condicion del mínimo nos daria la siguiente ecuacion diferencial de la curva buscada

$$\frac{\sqrt{1+p^2}}{2z\sqrt{z}}dx+d\frac{p}{\sqrt{z}\sqrt{1+p^2}}=0.$$

En vez de integrar esta ecuacion para obtener la ecuacion finita de la curva, podemos hacer lo siguiente: sabemos, que $ds=dz\sqrt{1+\frac{dx^2}{dz^2}}=dz\sqrt{1+q^2}$, siendo $q=\frac{dx}{dz}=\frac{1}{p}$; y la funcion que debemos hacer un mínimo, es

$$\int\frac{\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{z}}dz,$$

la cual no contiene más que las variables z y q. La condicion del mínimo, considerando á x como variable independiente, hemos visto que es la ecuacion

$$\frac{dV}{dz}dx-d\frac{dV}{dp}=0.$$

Por un procedimiento igual al seguido, obtendríamos, tomando z por variable independiente, la ecuacion

$$\frac{dV}{dx}dz-d\frac{dV}{dq}=0.$$

Aquí $\frac{dV}{dx}=0$; la condicion del mínimo es por lo tanto $d\frac{dV}{dq}=0$; ó lo que es lo mismo, $\frac{dV}{dq}=$constante.

Pero $$\frac{dV}{dq}=\frac{q}{\sqrt{z}\sqrt{1+q^2}},$$

de manera que la ecuacion de la curva es

$$\frac{\frac{q}{\sqrt{1+q^2}}}{\sqrt{z}}=\text{constante},$$

y como $\frac{q}{\sqrt{1+q^2}}=\text{sen}\,\alpha$, siendo α el ángulo que la tangente á la curva forma con la vertical, tendremos

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\sqrt{z}}=\text{constante}.$$

Esta ecuacion representa una ciclóide, que empieza en el punto más alto A, y que describiria un punto de un círculo, que resbalase sobre la horizontal AX en el plano vertical ABX.

Si quisiéramos, dados el punto A y el punto B (fig. 200), trazar la curva del más rápido descenso entre ellos, trazaremos la horizontal AE en el plano vertical de los puntos dados, y describiremos una ciclóide A*be*, haciendo rodar por debajo de AC una circunferencia arbitraria; el diámetro de esta circunferencia es la ordenada máxima de la ciclóide. Y como todas las ciclóides son semejantes, bastará amplificar la curva en la relacion de los radios vectores A*b* y AB, de manera que la curva que tracemos pase por el punto B. De esta manera se encontrará el diámetro CD del círculo generador de la ciclóide pedida.

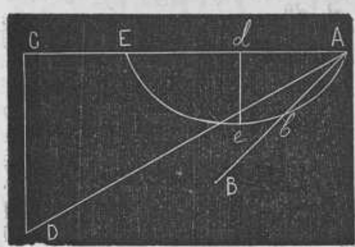


Fig. 200.

Péndulo en un medio resistente.

421. Cuando el péndulo se mueve en el aire, ó en cualquier otro medio resistente; la resistencia del medio, que llamaremos R, modifica el movimiento; y como todas las experiencias del péndulo se hacen en el aire y no en el vacío, segun ántes hemos supuesto, vamos á ver cómo influye esta resistencia. La ecuacion del movimiento es en este caso

$$\frac{dv}{dt}=g\operatorname{sen}\theta-\mathrm{R}, \quad \text{ó} \quad \frac{d^2s}{dt^2}=g\operatorname{sen}\theta-\mathrm{R}. \qquad (1)$$

Supondremos que la resistencia R es proporcional á la velocidad, en razon á ser la velocidad generalmente pequeña, y su valor será (347)

$$R=g\frac{v}{K}=\frac{g}{K}\cdot\frac{ds}{dt}$$

y como $s=l(\alpha-\theta)$, $\frac{ds}{dt}=-\frac{ld\theta}{dt}$, $\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{ld^2\theta}{dt^2}$, resulta

$$R=-\frac{gl}{K}\frac{d\theta}{dt};$$

y la ecuacion (1) será

$$-l\frac{d^2\theta}{dt^2}=g\,\mathrm{sen}\,\theta+\frac{gl}{K}\frac{d\theta}{dt},$$

que poniendo θ en vez de sen θ, á causa de ser las oscilaciones muy pequeñas, se convierte en

$$(2)\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{K}\frac{d\theta}{dt}+\frac{g}{l}\theta=0;$$

ecuacion lineal de segundo órden que vamos á integrar.

Tendremos una solucion particular de esta ecuacion, poniendo

$$\theta=ce^{rt};\ \text{de donde}\ \frac{d\theta}{dt}=rce^{rt},\ \frac{d^2\theta}{dt^2}=r^2ce^{rt};$$

sustituyendo estos valores en la ecuacion, y suprimiendo el factor comun ce^{rt}, resulta

$$(3)\qquad r^2+\frac{g}{K}r+\frac{g}{l}=0;$$

ecuacion de segundo grado cuyas dos raíces son imaginarias: resolviéndola, tendremos

$$r=-\frac{g}{2K}\pm\sqrt{\frac{gl}{4K^2}-1}\times\sqrt{\frac{g}{l}};$$

poniendo

$$\gamma=\sqrt{1-\frac{gl}{4K^2}},$$

$$r=-\frac{g}{2K}\pm\gamma\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{-1}.$$

La solucion general de la ecuacion lineal, es

$$\theta=\left[c\cos\left(t\gamma\sqrt{\frac{g}{l}}\right)+c'\,\mathrm{sen}\left(t\gamma\sqrt{\frac{g}{l}}\right)\right]e^{-\frac{gt}{2K}}.$$

Las constantes c y c' se determinan por la condicion de que para $t=0$, $\theta=\alpha$, y $\frac{d\theta}{dt}=0$; y resulta $c=\alpha$, y $c'=\frac{\alpha\sqrt{gl}}{2K\gamma}$; luego

$$(4)\quad \theta=\alpha\left[\cos\left(t\gamma\sqrt{\frac{g}{l}}\right)+\frac{\sqrt{gl}}{2K\gamma}\,\text{sen}\left(t\gamma\sqrt{\frac{g}{l}}\right)\right]e^{-\frac{gt}{2K}};$$

diferenciando ésta, tendremos

$$\frac{d\theta}{dt}=-\alpha\sqrt{\frac{g}{l}}\left(\gamma+\frac{l}{2K\gamma}\right)\text{sen}\left(t\gamma\sqrt{\frac{g}{l}}\right)e^{-\frac{gt}{2K}}.$$

Al fin de cada oscilacion $\theta=\alpha$, $\frac{d\theta}{dt}=0$, lo que nos da, llamando T á la duracion de una oscilacion,

$$\text{sen}\,T\gamma\sqrt{\frac{g}{l}}=0,\ \text{ó}\ T\gamma\sqrt{\frac{g}{l}}=\pi,\ \text{y}\ T=\frac{\pi}{\gamma}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Comparando este valor de T con el obtenido para la duracion de una oscilacion en el vacío, $T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, vemos, que las oscilaciones son isocronas, y su duracion está aumentada por la resistencia del aire en la relacion de 1 á γ, siendo $\gamma<1$.

La amplitud α_n de la enésima oscilacion, la obtendremos, haciendo en la (4), $t=nT$, y tendremos

$$\alpha_n=\alpha\cos(n\pi)+\sqrt{\frac{gl}{2K\gamma}}\,\text{sen}\,(n\pi)\,e^{-\frac{n\frac{\pi}{\gamma}\sqrt{gl}}{2K}},$$

$$\text{ó}\quad (5)\quad \alpha_n=\alpha e^{-\frac{n\pi\sqrt{gl}}{2K\gamma}}=\alpha\rho^n;$$

de manera, que lasamplitudes sucesivas forman una progresiva geométrica decreciente, cuya razon es

$$\rho=e^{-\frac{\pi\sqrt{gl}}{2K\gamma}}.$$

422. Siendo las oscilaciones muy pequeñas, como hemos supuesto para poner θ en vez de sen θ, la observacion directa prueba, que en el aire el decremento de la

amplitud tiene lugar efectivamente segun la progresion que acabamos de indicar, y que es sumamente lento. M. Poisson cita unas experiencias de Bordá en las que, al cabo de 1800 oscilaciones, siendo el ángulo primitivo α de un tercio de grado, la amplitud se habia reducido solamente en los dos tercios de su pimitivo valor. Esta circunstancia permite apreciar el valor de γ, porque la ecuacion (5) dará, dividiendo por α

$$e^{-\frac{1800\pi\sqrt{gl}}{2K\gamma}}=\frac{2}{3},$$

de la que se deduce, que γ no es menor que la unidad próximamente más que una cien millonésima; de modo, que se puede sin error sensible, despreciar la resistencia del aire en el cálculo de la duracion T.

Tambien dice M. Poisson, que cuando las oscilaciones tienen una amplitud algo mayor, estas no drecrecen en progresion geométrica, ó el aire no actúa como una resistencia proporcional á la velocidad. Entónces parece natural admitir, que la resistencia del medio es proporcional al cuadrado de la velocidad, es decir

$$R=g\frac{v^2}{K^2}=\frac{g}{K^2}\frac{l^2 d\theta^2}{dt^2};$$

y la ecuacion del movimiento será

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}-\frac{lg}{K^2}\frac{d\theta^2}{dt^2}+\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta=0,$$

fórmula que integrada nos dará las leyes del movimiento en este caso. Haremos notar desde luégo, que la duracion de una pequeña oscilacion resulta $T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, lo mismo que en el vacío. De modo, que la resistencia del medio, cuando se supone proporcional al cuadrado de la velocidad, no influye en la duracion de las pequeñas oscilaciones.

423. Para integrar la ecuacion anterior pondremos el arco θ (fig. 201) en vez de sen θ y el error cometido será tanto menor, cuanto más pequeñas sean las oscilaciones; y haciendo $\frac{gl}{K^2}=\mu$, la ecuacion será

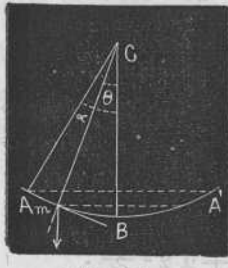


Fig. 201.

$$(1) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta-\mu\frac{d\theta^2}{dt^2}=0.$$

La cantidad μ es muy pequeña, y supondremos que se puede desarrollar θ en série ordenada segun las potencias ascendentes y enteras de μ, de la forma

$$\theta=P+P_1\mu+P_2\mu^2+\ldots$$

siendo $P, P_1, P_2 \ldots$, funciones de t y del ángulo inicial α; y como sólo buscamos una fórmula aproximada, tomaremos sólo los dos primeros términos de la série, que será en este caso

$$(2) \quad \theta=P+P_1\mu.$$

P es el valor que toma θ cuando $\mu=0$; introduciendo esta hipótesis en la ecuacion (1); se convierte en

$$(3) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0,$$

cuya integral general es, con dos constantes arbitrarias

$$\theta=A\cos t\sqrt{\frac{g}{l}}+B\operatorname{sen} t\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Para determinar las constantes tenemos, para $t=0$, $\theta=\alpha$, y $\frac{d\theta}{dt}=0$; y resultará

$$A=\alpha, \quad B=0.$$

La integral de la ecuacion (3) es en consecuencia

$$(4) \quad \theta=\alpha\cos t\sqrt{\frac{g}{l}};$$

y por consiguiente $\quad P=\alpha\cos t\sqrt{\frac{g}{l}}.$

Sustituyamos este valor de P en la ecuacion (2), y reemplacemos P_1 por $\alpha^2\theta_1$, siendo θ_1 una nueva funcion de t; de manera que el valor corregido de θ será

$$(5)\qquad \theta=\alpha\cos t\sqrt{\frac{g}{l}}+\mu\alpha^2\theta_1.$$

Esta ecuacion para $t=0$, da á la vez $\theta=\alpha$, y $\frac{d\theta}{dt}=0$, y tambien $\theta_1=0$, y $\frac{d\theta_1}{dt}=0$.

Diferenciando la ecuacion (5), tendremos

$$(6)\begin{cases}\dfrac{d\theta}{dt}=-\alpha\sqrt{\dfrac{g}{l}}\operatorname{sen} t\sqrt{\dfrac{g}{l}}+\mu\alpha^2\dfrac{d\theta_1}{dt}.\\[2ex] \dfrac{d^2\theta}{dt^2}=-\alpha\sqrt{\dfrac{g}{l}}\cos t\sqrt{\dfrac{g}{l}}+\mu\alpha^2\dfrac{d^2\theta_1}{dt^2}.\end{cases}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion (1), desarrollando los cálculos, simplificando y suprimiendo los términos que contienen potencias de μ superiores á la primera, se reduce despues de dividir por $\mu\alpha^2$, á

$$(7)\qquad \frac{d^2\theta_1}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta_1-\frac{g}{l}\operatorname{sen}^2 t\sqrt{\frac{g}{l}}=0.$$

424. Para integrar esta ecuacion tenemos, que $\operatorname{sen}^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2}$, y sustituyendo, se reducirá á la siguiente

$$(8)\qquad \frac{d^2\theta_1}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta_1-\frac{g}{2l}+\frac{g}{2l}\cos 2t\sqrt{\frac{g}{l}}=0.$$

Podemos escribir la integral de esta ecuacion, bajo la forma

$$(9)\qquad \theta_1=M+N\cos t\sqrt{\frac{g}{l}}+P\cos 2t\sqrt{\frac{g}{l}};$$

siendo M, N y P coeficientes constantes, que vamos á determinar.

Deduciremos de esta ecuacion (9)

$$(10)\begin{cases}\dfrac{d\theta_1}{dt}=-N\sqrt{\dfrac{g}{l}}\operatorname{sen} t\sqrt{\dfrac{g}{l}}-2P\sqrt{\dfrac{g}{l}}\operatorname{sen} 2t\sqrt{\dfrac{g}{l}},\\[2ex] \dfrac{d^2\theta_1}{dt^2}=-N\dfrac{g}{l}\cos t\sqrt{\dfrac{g}{l}}-4P\dfrac{g}{l}\cos 2t\sqrt{\dfrac{g}{l}}.\end{cases}$$

Para $t=0$, $\theta_1=M+N+P$, que es por consecuencia constante; y $\frac{d\theta_1}{dt}=0$, sean los que fueren los coeficientes N y P. Sustituyamos en la ecuacion (8) los valores de θ_1, y de $\frac{d^2\theta_1}{dt^2}$, y dispongamos de los coeficientes M, N y P, de manera, que esta ecuacion se reduzca á una identidad. Hecha la sustitucion y reduccion, se convierte en

$$\frac{g}{l}(M-\tfrac{1}{2})+\frac{g}{l}\cos 2t\sqrt{\frac{g}{l}}(\tfrac{1}{2}-3P)=0.$$

Para que esta ecuacion sea idéntica, es necesario que

$$M=\tfrac{1}{2},\ 3P=\tfrac{1}{2},\ \text{ó}\ P=\tfrac{1}{6}$$

de donde, siendo $M+N+P=0$, resulta

$$N=-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{6}=-\tfrac{2}{3}.$$

Así que, la ecuacion (9) será

$$(11)\qquad \theta_1=\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{3}\cos t\sqrt{\frac{g}{l}}+\tfrac{1}{6}\cos 2t\sqrt{\frac{g}{l}},$$

y el valor de θ de la ecuacion (5) toma la forma

$$\theta=\alpha\cos t\sqrt{\frac{g}{l}}+\mu\alpha^2\left[\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{3}\cos t\sqrt{\frac{g}{l}}+\tfrac{1}{6}\cos 2t\sqrt{\frac{g}{l}}\right]$$

ó $$(12)\qquad \theta=\tfrac{1}{2}\mu\alpha^2+\left(\alpha-\frac{2\mu\alpha^2}{3}\right)\cos t\sqrt{\frac{g}{l}}+\tfrac{1}{6}\mu\alpha^2\cos 2t\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Para encontrar el punto A′ donde se detiene el móvil, busquemos el instante en que $\frac{d\theta}{dt}$ se anula la primera vez, despues del instante de partida correspondiente á $t=0$. Diferenciando la ecuacion (12), resulta

$$\frac{d\theta}{dt}=-\left(\alpha-\frac{2\mu\alpha^2}{3}\right)\sqrt{\frac{g}{l}}\operatorname{sen} t\sqrt{\frac{g}{l}}-\frac{1}{3}\mu\alpha^2\sqrt{\frac{g}{l}}\operatorname{sen} 2t\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$=-\sqrt{\frac{g}{l}}\operatorname{sen} t\sqrt{\frac{g}{l}}\left[\alpha-\frac{2\mu\alpha^2}{3}+\frac{2}{3}\mu\alpha^2\cos t\sqrt{\frac{g}{l}}\right]=0;$$

la cual exige, que

$$\operatorname{sen} t\sqrt{\frac{g}{l}}=0;\ \text{ó que}\ \alpha-\frac{2\mu\alpha^2}{3}+\frac{2}{3}\mu\alpha^2\cos t\sqrt{\frac{g}{l}}=0.$$

De esta segunda condicion, resulta

$$\cos t\sqrt{\frac{g}{l}}=-\frac{\alpha-\frac{2\mu\alpha^2}{3}}{\frac{2}{3}\mu\alpha^2}=-\frac{3-2\mu\alpha}{2\mu\alpha},$$

número superior á la unidad en valor absoluto, cuando μ y α son fracciones muy pequeñas, como aquí hemos supuesto. De modo, que esta solucion es inadmisible, porque no da para t un valor real. La sen $t\sqrt{\frac{g}{l}}=0$, da para el arco $t\sqrt{\frac{l}{g}}$ una infinidad de valores reales; los menores son

$$t\sqrt{\frac{g}{l}}=0,$$

$$t\sqrt{\frac{g}{l}}=\pi, \text{ de donde } t=\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

para la duracion de la oscilacion de A á A'. Encontramos, pues, la misma fórmula que si la oscilacion se hubiera verificado en el vacío; y que es cierto, como hemos dicho al principio, que la resistencia del aire, supuesta proporcional al cuadrado de la velocidad, no altera la duracion de las oscilaciones, y sólo cambia su amplitud.

Si en la fórmula (12) hacemos $t=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, tendremos el ángulo θ, que fija la posicion de A', y será

$$\theta=\frac{1}{2}\mu\alpha^2+\left(\alpha-\frac{2\mu\alpha^2}{3}\right)\cos\pi+\frac{1}{6}\mu\alpha^2\cos 2\pi=$$

$$\frac{1}{2}\mu\alpha^2-\left(\alpha-\frac{2\mu\alpha^2}{3}\right)+\frac{1}{6}\mu\alpha^2=-\alpha+\frac{4}{3}\mu\alpha^2;$$

lo que nos dice, que la resistencia del aire reduce el ángulo de oscilacion de la cantidad $\frac{4}{3}\mu\alpha^2$. Los ángulos sucesivos con la vertical, descritos en cada una de las oscilaciones, serán

$$2\alpha - \frac{4}{3}\alpha^2\mu = \alpha_1;\ 2\alpha_1 - \frac{4}{3}\mu\alpha_1{}^2 = \alpha_2;\ 2\alpha_2 - \frac{4}{3}\mu\alpha_2 = \alpha_3 \ldots$$

y así sucesivamente.

Para que la constancia de la duracion de las oscilaciones tenga lugar, es preciso, que aumentado el tiempo del descenso en la semi-oscilacion descendente, por la resistencia del aire, disminuya en una cantidad correspondiente en la semi-oscilacion ascendente, por ser en esta la resistencia del aire contraria al movimiento como la accion de la gravedad, y compensándose el aumento de tiempo en el descenso con la disminucion en el ascenso, puede ser la duracion igual.

Debe tenerse tambien presente que cuando el péndulo se mueve en un medio más ó ménos denso, pierde de su peso otro tanto cuanto pesa el volúmen del flúido que desaloja, segun el principio de Arquímedes.

LECCION XXXIV.

Movimiento de un punto material sobre una superficie dada.—Péndulo cónico.—Ecuaciones de su movimiento.—Cómo se reducen á tres.—Indicaciones sobre su integracion.—Raíces reales de la ecuacion de tercer grado que resulta.— Condiciones para que el móvil describa un círculo horizontal.— Caso en que el hilo forma un ángulo muy pequeño con la vertical.—Fuerza de reaccion.

Movimiento de un punto material sobre una superficie dada.

425. Hemos visto que cuando un punto material se mueve sobre una superficie dada, podemos considerarle como libre, introduciendo entre las fuerzas que le son directamente aplicadas, la reaccion que la superficie ejerce sobre el punto móvil. Esta reaccion es normal á la superficie, en el caso en que el punto material esté en equilibrio; y nosotros admitiremos que tambien es normal, en el caso del movimiento.

Supongamos que un punto material de masa m, esté sujeto á resbalar sin rozamiento sobre una superficie fija, definida por la ecuacion

$$(1) \quad f(x, y, z) = 0.$$

La reaccion, que llamaremos N, de la superficie sobre el punto es normal á esta superficie como ántes hemos dicho; y si llamamos α, β, γ á los ángulos que esta normal forma con los tres ejes coordenados, que supondremos rectangulares, tendremos las igualdades

$$(2)\quad \frac{\cos\alpha}{\frac{df}{dx}}=\frac{\cos\beta}{\frac{df}{dy}}=\frac{\cos\gamma}{\frac{df}{dz}}=\frac{1}{\pm\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2+\left(\frac{df}{dz}\right)^2}},$$

de las cuales deduciremos $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$, en funcion de x, y, z. El doble signo del radical permite distinguir sobre la normal, la porcion exterior de la porcion interior á la superficie.

Sea F la fuerza que solicita al punto material, y X, Y, Z, sus componentes paralelas á los ejes. Las ecuaciones del movimiento serán

$$(3)\left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2}&=X+N\cos\alpha,\\ m\frac{d^2y}{dt^2}&=Y+N\cos\beta,\\ m\frac{d^2z}{dt^2}&=Z+N\cos\gamma.\end{aligned}\right.$$

En estas ecuaciones, poniendo por $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, sus valores deducidos de las ecuaciones (2), tendremos las tres ecuaciones (3) y la (1), ó sean cuatro ecuaciones entre las cinco variables x, y, z, N y t, de las cuales podremos deducir las cuatro primeras en funcion de t; y el problema estará resuelto en general.

426. Todos los teoremas que hemos establecido para el movimiento de un punto material libre, se aplicarán al movimiento que consideramos, teniendo en cuenta la accion de la fuerza que expresa la reaccion de la superficie sobre el punto. Entre estos teoremas preferiremos el de las fuerzas vivas, y los de las cantidades de movimiento, porque en ellos no entra la reaccion de la superficie sobre el punto, como aparece del siguiente resúmen:

1.° Teorema de las cantidades de movimiento totales. La trayectoría trazada sobre la superficie es constantemente normal á la fuerza N, y por consiguiente la suma de los impulsos elementales de esta fuerza, estimada segun la tangente, es igual á cero. Por consiguiente, el teorema se aplica al movimiento del punto material sin tener en cuenta la reaccion N de la superficie. Sin embargo, el uso de este teorema es poco cómodo, porque la proyeccion de las fuerzas debe hacerse sobre las tangentes sucesivas á la trayectoría, que en general no es inmediatamente conocida.

El caso en que se proyecta el movimiento sobre una recta fija, el teorema de las cantidades de movimiento proyectadas contiene en general la reaccion N de la superficie y puede servir, conocido el movimiento, para determinar esta reaccion.

2.° Teorema de los momentos de las cantidades de movimiento. Este teorema no elimina en general la reaccion N de la superficie. Sólo en el caso en que las normales á la superficie encuentran á la recta fija tomada por eje de los momentos, el momento de la fuerza normal N es constantemente nulo, y no entra en la ecuacion que da este teorema. En este caso, la superficie es de revolucion alrededor del eje de los momentos. Por el contrario, la ecuacion de los momentos tomados con respecto á otro eje, contendrá el momento de la fuerza N.

3.° El teorema de las áreas sólo se aplica cuando la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el móvil encuentra á un eje fijo, y en general no se puede asegurar, si existe una recta fija, que encuentre en cada instante á la resultante de las fuerzas F y N.

Pero hay un caso particular en que se aplica el teorema de las áreas, y es aquel en que la superficie directriz es una superficie de revolucion, y la resultante de las fuerzas F encuentra al eje ó le es paralela. Entónces la reaccion N encuentra tambien al eje, y la resultante de todas las fuerzas que solicitan al móvil, tiene constantemente un momento nulo, con respecto al eje de la superficie. La proporcionalidad de las áreas descritas, á los tiempos empleados en describirlas, tiene lugar en este caso para la proyeccion del movimiento sobre un plano perpendicular al eje de revolucion, tomando el pié del eje por centro de las áreas.

4.° El teorema de las fuerzas vivas se aplica, como hemos dicho al principio, al movimiento del punto, sin que entre en la ecuacion de este teorema la reaccion N, porque esta reaccion es constantemente normal á la trayectoría y su trabajo es constantemente nulo. En la aplicacion de este teorema podremos considerar el punto como libre, teniendo sólo en cuenta las fuerzas dadas F', F''... y su resultante F. Si á esta resultante corresponden superficies de nivel, dando cada una su velocidad particular para el móvil, la interseccion de estas superficies de nivel con la superficie dada, dará líneas de nivel en que la velocidad del móvil estará definida del mismo modo.

Péndulo cónico. Ecuaciones de su movimiento.

427. Supongamos un péndulo formado por un hilo OM, sujeto por el extremo O (fig. 202), y que lleva en el otro extremo un punto material pesado, y que separado de su posicion de equilibrio OZ, le imprimimos una velocidad v_0 situada fuera del plano vertical ZOM; este péndulo se mueve alrededor de la vertical OZ, tirada por el punto de suspension, y se aproxima y aleja alternativamente de esta vertical, con lo cual no viene á coincidir en ninguna posicion.

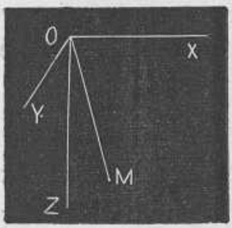


Fig. 202.

En este caso, el péndulo se llama *péndulo cónico*, porque el hilo describe una superficie cónica que tiene por vértice el punto de suspension. El punto material se mueve en este caso en una superficie esférica, que tiene por centro el punto de suspension O, y la longitud l del hilo por rádio.

Para establecer las ecuaciones del movimiento, refiramos el punto á tres ejes rectangulares, que tengan por orígen el punto O, y que el de las Z coincida con la vertical que pasa por este punto, contándose éstas de arriba á abajo, el plano XY será horizontal; llamando N á la tension del hilo, ésta expresará la reaccion de la superficie esférica sobre el móvil, y las ecuaciones del movimiento serán

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\text{N}\frac{x}{l},\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=-\text{N}\frac{y}{l},\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=mg-\text{N}\frac{z}{l};$$

$$\text{ó}\quad \frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{\text{N}}{m}\frac{x}{l},\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{\text{N}}{m}\frac{y}{l},\quad \frac{d^2z}{dt^2}=g-\frac{\text{N}}{m}\frac{z}{l}. \quad (1)$$

Además, el punto material se mueve sobre la esfera, cuya ecuacion es

$$(2)\quad x^2+y^2+z^2=l^2.$$

Estas cuatro ecuaciones (1) y (2) sirven para determinar en funcion de t, las cantidades x, y, z, N; y por lo tanto resuelven el problema.

Cómo se reducen á tres estas ecuaciones. Indicaciones sobre su integracion.

428. Si entre las cuatro ecuaciones eliminamos N, tendremos tres ecuaciones para determinar x, y, z. Verificándolo entre las dos primeras, tendremos

$$y\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2y}{dt^2}=0,$$

ecuacion que se integra inmediatamente, y nos da

$$(3)\quad y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}=C,\quad ó\quad ydx-xdy=Cdt;$$

siendo C la constante de la integracion. Esta ecuacion se obtendria aplicando el teorema de las áreas al movimiento de la proyeccion del móvil sobre el plano XY, teorema que podremos aplicar, porque la proyeccion de las fuerzas mg y N, sobre este plano, pasa constantemente por el punto fijo O; C, segun esto, expresa el duplo del área descrita por el radio vector, que une el orígen O con la proyeccion del punto sobre el plano XY, en la unidad de tiempo.

De las ecuaciones (1) multiplicadas respectivamente por $2dx$, $2dy$, $2dz$, y sumadas, resulta

$$\frac{2dxd^2x+2dyd^2y+2dzd^2z}{dt^2}=2gdz-\frac{N}{ml}(2xdx+2ydy+2zdz);$$

pero de la (2) se deduce

$$2xdx+2ydy+2zdz=0,$$

la cual reduce la anterior á

$$\frac{2dxd^2x+2dyd^2y+2dzd^2z}{dt^2}=2gdz;$$

que integrada produce la

$$(4)\quad \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=2gz+C',\quad ó\quad v^2=2gz+C'.$$

Esta ecuacion (4) pudiera haberse obtenido inmediatamente por el teorema de las fuerzas vivas: llamando v_0 y z_0 á los valores iniciales de v y z, tendremos

$$v^2=v_0^2+2g(z-z_0),$$

que comparada con la anterior, nos da para la constante C′, el valor

$$C'=v_0^2-2gz_0.$$

429. Las tres ecuaciones (2), (3) y (4) darán x, y, z en funcion de t, puesto que no contienen N. Para mayor comodidad reemplazaremos x é y por las coordenadas polares en el plano XY; sea r el radio vector de la pro-

yeccion del móvil sobre este plano, y θ el ángulo que este radio forma con el eje de las x; serán, $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$, y sustituidos estos valores y sus diferenciales, tendremos

$$x^2+y^2=r^2,\quad xdy-ydx=r^2d\theta,\quad dx^2+dy^2=dr^2+r^2d\theta^2;$$

y las ecuaciones (2), (3) y (4) se reducen á las

$$\left.\begin{array}{r} r^2+z^2=l^2, \\ r^2\dfrac{d\theta}{dt}=\mathrm{C}, \\ \dfrac{dr^2+r^2d\theta^2+dz^2}{dt^2}=2gz+\mathrm{C}'. \end{array}\right\}(5)$$

La eliminacion de θ y r en estas ecuaciones, nos dará

$$(6)\quad dt=\pm\frac{ldz}{\sqrt{(l^2-z^2)(2gz+\mathrm{C}')-\mathrm{C}^2}};$$

y de la 2.ª de las (5), resulta

$$(7)\quad d\theta=\pm\frac{\mathrm{C}ldz}{(l^2-z^2)\sqrt{(l^2-z^2)(2gz+\mathrm{C}')-\mathrm{C}^2}}.$$

Como dt es siempre positivo, debe en las fórmulas (6) y (7), tomarse el signo $+$ cuando el móvil desciende, y el signo $-$ cuando asciende.

Integradas las ecuaciones (6) y (7) nos darán t y θ en funcion de z, y como tenemos ya r en funcion de z, por la primera de las (5), el problema estará completamente resuelto; á lo más faltará resolver las ecuaciones que resulten con respecto á x, y, z, y tendremos las tres coordenadas del punto en funcion de t. Las ecuaciones (6) y (7) sólo pueden integrarse por aproximacion, ó bien por las funciones elípticas, pero esta dificultad de cálculo no se opone á que el problema dinámico esté resuelto.

430. Vamos ahora á determinar la tension N del hilo. Para ello multipliquemos las (1) por x, y, z, respectivamente y sumemos; tendremos

$$\frac{xd^2x+yd^2y+zd^2z}{dt^2}=-\frac{\mathrm{N}}{ml}(x^2+y^2+z^2)+gz;$$

diferenciando dos veces la ecuacion (2), se tiene

$$\frac{xd^2x+yd^2y+zd^2z}{dt^2}=-\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=-v^2;$$

de modo que la anterior, es

$$-v^2=-\frac{\mathrm{N}l}{m}+gz, \quad \text{ó} \quad (8)\ \mathrm{N}=\frac{mv^2}{l}+mg\frac{z}{l}.$$

Poniendo en ésta, $v^2=2gh_0+2g\,(z-z_0)$, teniendo presente que $v_0{}^2=2gh_0$, resultará

$$(9)\quad \mathrm{N}=\frac{mg}{l}(3z-2z_0+2h_0).$$

El valor (8) de N puede escribirse inmediatamente, en virtud de lo dicho respecto de la presion que ejerce un punto móvil sobre la superficie en que se mueve; porque $\frac{mv^2}{l}$, es la fuerza centrífuga que actúa segun la normal á la superficie, y $mg\frac{z}{l}$ es la proyeccion del peso mg sobre la misma normal, en el punto en que se encuentra el móvil; la resultante de estas dos fuerzas estará representada, pues, por su suma, como vemos en la ecuacion.

Raíces reales de la ecuacion de tercer grado que resulta.

431. Para que dt y $d\theta$ sean reales en las ecuaciones (6) y (7), es preciso que la cantidad sub-radical sea positiva; y para ver los valores que puede tener z, que cumplan con esta condicion, la igualaremos á cero y determinaremos sus raíces. La ecuacion que resulta, es

$$(l^2-z^2)\,(2gz+\mathrm{C}')-\mathrm{C}^2=0;$$

esta ecuacion es de tercer grado en z, y tiene una raíz real comprendida entre $-l$ y $-\infty$, que es un valor extraño á la cuestion; luego los otros dos valores de z deben ser reales, y estar comprendidos entre $+l$ y $-l$, como exigen las condiciones físicas del problema; el valor inicial de z, que hemos llamado z_0, debe estar comprendido entre estas dos raíces, que corresponden á un máximo y un mínimo del valor de z, porque se obtienen igualando á cero el valor de $\frac{dz}{dt}$, deducido de la ecuacion (6).

Llamemos α al ángulo que la direccion de la velocidad inicial v_0 del móvil forma con la perpendicular al plano vertical que contiene el péndulo; y descompongamos v_0 en dos componentes rectangulares, una $v_0 \cos \alpha$ dirigida segun esta perpendicular; recordando, que C representa el duplo del área descrita en el plano XY, por el radio vector r_0 en la unidad de tiempo, tendremos, que

$$C = r_0 v_0 \cos \alpha;$$

y poniendo este valor de C, y el de $C' = v_0^2 - 2gz_0$, en la ecuacion anterior, tomará la forma

$$(10) \quad 2gz^3 + (v_0^2 - 2gz_0)z^2 - 2gl^2z + r^2v_0^2 \cos^2 \alpha - (v_0^2 - 2gz_0)\, l^2 = 0;$$

en la cual puede verificarse, que tiene una raíz comprendida entre $-l$ y z_0, y otra comprendida entre z_0 y $+l$, conforme con lo que arriba hemos indicado, cuyas raíces son los valores máximo y mínimo de z.

Condiciones para que el móvil describa un círculo horizontal.

432. Para que el móvil describa un círculo horizontal de la esfera sobre la cual se mueve, ó lo que es lo mismo, para que el hilo del péndulo describa un cono de revolucion, cuyo eje sea la vertical del punto de suspension, es claro, que las distancias de los puntos de la curva que describe, al plano horizontal de las XY, deben ser todas iguales; luego todas las z deben ser iguales; es decir, que las dos raíces de la ecuacion anterior, entre las cuales varía z, deben ser iguales entre sí, é iguales á z_0. Esta condicion se expresa, haciendo que z_0 sea raíz

de la ecuacion (10) y de su derivada. De este modo encontraremos las condiciones

$$\alpha=0, \quad v_0^2=\frac{gr_0^2}{z}.$$

La primera expresa que la direccion de la velocidad inicial ha de ser perpendicular al plano vertical que contiene al péndulo, y la segunda nos da el valor de esta velocidad inicial v_0. Introduciendo estas condiciones en la segunda de las ecuaciones (5), é integrando, resulta

$$\theta=\frac{v_0}{r_0}t+\theta_0=\sqrt{\frac{g}{z_0}}\times t+\theta_0,$$

siendo θ_0 el valor inicial de θ; lo que nos dice, que en este caso, el movimiento del péndulo es uniforme, y el tiempo empleado en una revolucion alrededor de la vertical, que llamaremos T, será, poniendo $\theta-\theta_0=2\pi$,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{z_0}{g}}.$$

Caso en que el hilo forme un ángulo muy pequeño con la vertical.

433. En el caso en que el péndulo se aparta poco de la vertical, la tension N del hilo se acerca mucho al peso mg, porque en la posicion de equilibrio $N=mg$; y cuando se separa poco, tendremos, haciendo

$$z=l-u, \quad z_0=l-u_0$$

siendo u y u_0 muy pequeños, y sustituyendo en la (9)

$$N=\frac{mg}{l}\left(3z-2z_0-2h_0\right),$$

obtendremos

$$N=mg\left(1+\frac{2u_0+2h_0-3u}{l}\right);$$

la fraccion de dentro del paréntesis es muy pequeña, y despreciándola, resultará próximamente $N=mg$.

Poniendo este valor de N en las dos primeras ecuaciones (1), se convierten en

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-mg\frac{x}{l},\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg\frac{y}{l}$$

$$\text{ó}\quad \frac{d^2x}{dt^2}=-g\frac{x}{l},\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-g\frac{y}{l};\qquad (11)$$

que integradas, darán x é y en funcion de t; y conocidas estas, la ecuacion de la esfera $x^2+y^2+z^2=l^2$, nos dará z, y tendremos x, y, z en funcion de t, y como ya conocemos N, estará el problema resuelto. Para integrar la primera, llamando u' y u'' á las proyecciones de v sobre los ejes, tendremos $u'=\frac{dx}{dt}$, $\frac{du'}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$, y será

$$\frac{du'}{dt}=-g\frac{x}{l}$$

y multiplicando esta por la $u'dt=dx$, quedarán separadas las variables, y se reducirá á

$$u'du'=-\frac{g}{l}x\,dx,\ \text{ó}\ u'^2=c-\frac{g}{l}x^2,$$

$$\frac{dx}{dt}=u'=-\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\frac{cl}{g}-x^2};\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt=\frac{-dx}{\sqrt{\frac{cl}{g}-x^2}};$$

que integrada nos dará, siendo α una constante, y haciendo para $t=0$, $x=\sqrt{\frac{cl}{g}}$,

$$x=\alpha\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right);$$

la segunda integrada, dará

$$y=6\,\text{sen}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right);$$

siendo tambien 6 constante, y poniendo $\mu=\sqrt{\frac{g}{l}}$, será:

$$(12)\quad x=\alpha\cos\mu t,\quad y=6\,\text{sen}\,\mu t.$$

Poniendo estos valores de x é y en la ecuacion de la esfera, tendremos z, y estará el problema resuelto aproximadamente.

Elevando al cuadrado y sumando las ecuaciones anteriores, tendremos

$$(13)\quad \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{6^2}=1;$$

esta ecuacion representa una elipse en el plano XY, y nos dice, que la proyeccion horizontal de la curva que describe el móvil, es una elipse, ó que la proyeccion del punto móvil en este plano describe una elipse, cuyos semi-ejes son las constantes α y 6. Dividiendo las (12) una por otra, tendremos

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}=\frac{6}{\alpha}\operatorname{tg}\mu t;$$

el tiempo empleado en una semi-revolucion, se obtendrá haciendo $\theta=\pi$, lo que nos dará $\mu T=\pi$, ó

$$(14)\quad T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}:$$

esta duracion es la misma que la de una pequeña oscilacion del péndulo circular.

Fuerza de reaccion.

434. En el movimiento de un punto material no libre hemos examinado los casos en que éste se moviera sobre una línea, ó sobre una superficie dada, y pudiera presentarse el caso en que un punto material M, por estar unido con un cuerpo N, no sólo describa una trayectoría dada, sino que recorra esta curva con velocidades crecientes ó decrecientes sucesivas, que varíen segun una ley determinada. Sea, por ejemplo, M un cuerpo unido á la mano por medio de una cuerda, y al que se da un movimiento cualquiera sin abandonarle. El cuerpo M reaccionará sobre la mano que le arrastra, y esta reaccion es

la que nosotros llamaremos *fuerza de reaccion*. Algunos llaman á esta reaccion fuerza de inercia, nosotros, por evitar confusiones, le conservaremos el nombre de fuerza de reaccion, que recuerda su orígen.

No debe perderse de vista, que esta reaccion de un punto material sobre el cuerpo que le obliga á tomar un movimiento determinado, y que llamamos fuerza de reaccion, no actúa sobre el mismo punto material, sino sobre el cuerpo que le obliga á moverse. Es fácil encontrar la intensidad y direccion de esta reaccion. De la forma de la trayectoría que describe el punto material M, y de la ley de su movimiento sobre esta curva, se puede deducir en cada instante la intensidad y direccion de la fuerza, que debia actuar sobre él, si estuviera libre, para imprimirle el mismo movimiento, fuerza que tiene por valor el producto de la masa del punto material M por la aceleracion de su movimiento; esta fuerza es la accion que el cuerpo N ejerce sobre el punto material M, la reaccion de éste sobre el cuerpo N es igual y contraria á la fuerza que acabamos de indicar: de modo, que la fuerza de reaccion del punto M es igual al producto de la masa de este punto por la aceleracion de su movimiento y está dirigida en sentido contrario de esta aceleracion.

Podemos darnos cuenta de este resultado muy sencillamente, interpretando la ecuacion

$$F = mj, \text{ ó } F - mj = 0.$$

En esta segunda ecuacion podemos considerar á $-mj$ como una fuerza á la cual atribuiremos una direccion contraria á la aceleracion j del punto móvil, ó lo que es lo mismo, contraria á la fuerza F; y la ecuacion indica que hay equilibrio entre la fuerza real y la fuerza ficticia $-mj$, que le es igual y contraria. Esta fuerza $-mj$ es la que llamamos fuerza de reaccion. Segun esto, podemos decir, que el movimiento de un punto material se establece de manera, que hay en cada instante equilibrio entre la fuerza real F y la fuerza de reaccion; y podemos definir la fuerza de reaccion de un punto material en movimiento, diciendo, *que es la reaccion ejercida por este punto sobre un sistema material, que actúa sobre él, para comunicarle el movimiento de que está animado.*

Las componentes de la fuerza de reaccion paralelas á los ejes, serán

$$-m\frac{d^2x}{dt^2},\ -m\frac{d^2y}{dt^2},\ -m\frac{d^2z}{dt^2};$$

y las ecuaciones del movimiento del punto podrán escribirse bajo la forma

$$X-m\frac{d^2x}{dt^2}=0,\ Y-m\frac{d^2y}{dt^2}=0,\ Z-m\frac{d^2z}{dt^2}=0;$$

que expresan el equilibrio entre las componentes de la fuerza F y las componentes de la fuerza de reaccion.

435. Esta fuerza de reaccion puede descomponerse tambien en dos componentes iguales y contrarias á las componentes tangencial y centrípeta de la fuerza, que obliga al punto M, á seguir el movimiento que posee. La componente tangencial de la fuerza de reaccion tiene por valor $-m\frac{dv}{dt}$, y será de signo contrario á $\frac{dv}{dt}$, es decir, estará dirigida en sentido contrario al movimiento, si $\frac{dv}{dt}$ es positiva, y en el mismo sentido si $\frac{dv}{dt}$ es negativa. La componente normal es igual á $\frac{mv^2}{\rho}$, y está siempre dirigida en sentido contrario al radio de curvatura de la trayectoría; por lo tanto, es la que hemos llamado fuerza centrífuga de un punto, sujeto á moverse sobre una curva dada.

436. Tambien podemos calcular el trabajo elemental

de la fuerza de reaccion para un recorrido $MM' = ds = vdt$ (fig. 203), de un punto material.

La componente centrífuga de la fuerza de reaccion, $m\frac{v^2}{\rho}$ da un trabajo nulo, porque es normal á la trayectoría.

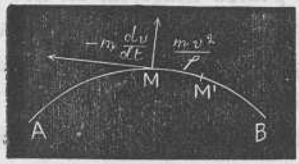


Fig. 203.

La componente tangencial es $-m\frac{dv}{dt}$, y el punto de aplicacion de esta fuerza recorre el arco $ds = vdt$. Si la velocidad es positiva y creciente, la fuerza de reaccion tiene una direccion opuesta al movimiento, y por consecuencia su trabajo elemental es negativo, é igual á $-m\frac{dv}{dt} \times vdt = -mvdv$. Esta fórmula es general, sean los que fueren los signos de v y dv. El trabajo total de la fuerza de reaccion, para un recorrido finito del punto móvil, es

$$\int_{v_0}^{v} -mvdv = \tfrac{1}{2}mv_0^2 - \tfrac{1}{2}mv^2,$$

tomada entre los límites correspondientes á los extremos del arco recorrido, en los cuales las velocidades son v_0 y v. *El trabajo de la fuerza de reaccion* en el paso del móvil de un punto A á otro punto B de la trayectoría, es igual en valor absoluto, y de signo contrario, al incremento de la mitad de la fuerza viva del punto material en este recorrido.

En cada instante la fuerza de reaccion se equilibra con las fuerzas que solicitan al móvil; la suma de los trabajos de todas las fuerzas, comprendida la de reaccion, será nula en todos los instantes; y si hacemos la suma de todos estos trabajos elementales, desde el punto A al punto B, tendremos una suma igual cero. Llamemos T á la suma de los trabajos elementales de las fuerzas aplicadas al punto material, y tendremos

$$T+\tfrac{1}{2}mv_0^2-\tfrac{1}{2}mv^2=0, \quad ó \quad mv^2-mv_0^2=2T;$$

que es precisamente la ecuacion del teorema de las fuerazs vivas.

Esta teoría de la fuerza de reaccion nos dará á conocer, por ejemplo, la tension de las amarras de los coches, que forman un tren en nuestras vías férreas. Cuando se acelera el movimiento, el furgon de cola sólo ejerce su reaccion sobre el penúltimo carruaje, los dos últimos obran sobre las amarras que unen éste al anterior, y así sucesivamente; de modo, que la mayor reaccion se ejercerá sobre las amarras que unen el ténder á la locomotora.

LECCION XXXV

Equilibrio y movimiento relativos de un punto material.—Teoría de las fuerzas aparentes en el movimiento relativo.—Aplicacion de esta teoría al equilibrio y movimiento relativos de un punto material.—Equilibrio y movimiento de los cuerpos en la superficie de la Tierra. Efectos de la rotacion de ésta.—Fuerza centrífuga en los diferentes lugares de la Tierra.—Peso de los cuerpos, vertical.

Equilibrio y movimiento relativos de un punto material.

437. En todas las teorías hasta aquí expuestas hemos tratado del equilibrio y movimiento absolutos de los cuerpos ó de los puntos materiales; es decir, del estudio de estos dos estados de los cuerpos, cuando se refieren á puntos de comparacion ó á ejes fijos en el espacio. Mas como el planeta que habitamos está contínuamente en movimiento, y no conocemos puntos materiales, ni ejes fijos, todos los resultados que hemos obtenido deben modificarse, para que puedan aplicarse á los fenómenos que podemos observar sobre la Tierra, en la cual estamos sujetos á no poder observar más que el equilibrio y movimiento relativos. Pueden seguirse, para estudiar estas modificaciones, distintos caminos, entre los cuales escogeremos el siguiente, fundado en la teoría de las fuerzas aparentes, que es el que facilita más este estudio.

Teoría de las fuerzas aparentes en el movimiento relativo.

438. Si un punto en movimiento está referido á un sistema de ejes móviles en el espacio, el movimiento ab-

soluto de este punto es el que resulta, de componer el movimiento relativo respecto á estos ejes, con el movimiento de los mismos ejes. La aceleracion j en el movimiento absoluto, se obtiene por el teorema de Coriolis (310), componiendo tres aceleraciones, que son, la aceleracion j_r en el movimiento relativo con respecto á los ejes móviles, la aceleracion j_a en el movimiento de arrastre de estos ejes, y la aceleracion complementaria j_c, igual á $2\omega v_r \text{sen}\,\alpha$, dirigida perpendicularmente al plano que pasa por la velocidad relativa v_r, y por el eje instántaneo de rotacion de los ejes móviles, y en el sentido en el cual, el extremo de la línea que representa la velocidad relativa, gira en la rotacion instantánea alrededor de este eje. Compongamos estas tres aceleraciones, y para ello, por un punto cualquiera H (fig. 204), tracemos una recta HK igual y paralela á la que representa la aceleracion relativa j_r, por el extremo de esta K, tracemos una recta KP igual y paralela á la que representa la aceleracion en el movimiento de arrastre j_a, y por P una recta PQ, igual y paralela á la que representa la aceleracion complementaria $j_c = 2\omega v_r \text{sen}\,\alpha$; la recta HQ, que cierra el polígono, será la resultante de las tres aceleraciones; esto es, la aceleracion j en el movimiento absoluto.

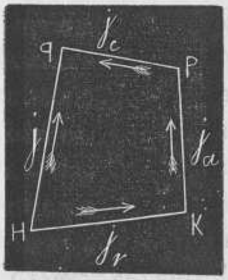


Fig. 204.

Tambien sabemos que la aceleracion j_r, representada por la recta HK, puede considerarse como la resultante de tres aceleraciones representadas respectivamente, en cuanto á su magnitud, su direccion y su sentido, por las tres rectas HQ, QP, PK; la primera es la aceleracion j en el movimiento absoluto, y las otras dos son iguales y contrarias á las aceleraciones j_r y $j_c = 2\omega v_r \text{sen}\,\alpha$, que ántes hemos considerado; luego la aceleracion j_r, en el movimiento relativo de un punto con respecto á un sistema de ejes móviles, se obtiene componiendo por la regla del polígono de las aceleraciones, la aceleracion en el movimiento absoluto del punto, con dos aceleraciones iguales y contrarias á j_r y $j_c = 2\omega v_r$ sen α.

Las fuerzas se componen como las aceleraciones, y si llamamos m á la masa del punto material en movimiento, la fuerza que obrando sobre este punto, determina la aceleracion j de su movimiento absoluto es mj, y tiene el mismo sentido y direccion que la aceleracion j (331); siendo la aceleracion j_r en el movimiento relativo deferente de la aceleracion j en el movimiento absoluto, para el observador que participa del movimiento de los ejes móviles, debe aparecer el punto solicitado por una fuerza distinta de la que realmente actúa sobre él, y debe creerle solicitado por la fuerza mj_r, de la misma direccion y sentido que la aceleracion j_r. Y del mismo modo que j_r puede obtenerse componiendo la aceleracion j, con dos aceleraciones iguales y contrarias á j_a y $j_c = 2\omega v_r$ sen α, la fuerza que produce el movimiento relativo mj_r, será la resultante de la fuerza mj y de dos fuerzas $-mj_a$ y $-mj_c = -2m\omega v_r$ sen α, dirigidas en sentido contrario á las aceleraciones j_r y $2\omega v_r$ sen $\alpha = j_c$. De modo, que para el observador, que no ve más que el movimiento relativo del punto material, que considera como movimiento absoluto, las cosas pasan como si este punto estuviera solicitado por la fuerza mj, que le está realmente aplicada, y por las dos fuerzas $-mj_a$ y $-mj_c = -2m\omega v^r$ sen α, de que acabamos de hablar. Estas dos últimas fuerzas se llaman *fuerzas aparentes* en el movimiento relativo.

439. La primera de estas dos fuerzas aparentes, que tiene por valor $-mj_a$ y que está dirigida en sentido con-

trario á la aceleracion j_a, es evidentemente igual y directamente opuesta á la fuerza, que sería capaz de dar al punto material un movimiento tal, que permaneciera en reposo con respecto á los ejes móviles. Recordando la definicion que hemos dado de la fuerza de reaccion (434), vemos que esta primera fuerza aparente es precisamente la fuerza de reaccion del punto material en su movimiento de arrastre; es decir, en el movimiento de que estaria animado, si estuviese unido invariablemente á los ejes móviles, y arrastrado por éstos en el movimiento que experimentan.

La segunda fuerza aparente $-mj_c$, ha recibido de M. Coriolis el nombre de *fuerza centrífuga compuesta*; y para obtener su valor, basta descomponer el movimiento elemental de los ejes móviles, que se efectúa inmediatamente despues del instante que se considera, en una rotacion al rededor de un eje instántaneo, que pasa por el punto en donde se encuentra el móvil en este instante, y en una traslacion igual al movimiento de este mismo punto, supuesto unido á los ejes móviles; siendo ω la velocidad angular de la rotacion elemental así obtenida, α el ángulo que el eje de la rotacion instántanea forma con la direccion de la velocidad relativa v_r del móvil, la fuerza centrífuga compuesta es $-2m\omega v_r$ sen α. Ademas esta fuerza está dirigida perpendicularmente al plano que determinan la velocidad relativa v_r y el eje instántaneo de rotacion de los ejes móviles; y actúa en sentido contrario del en que se mueve la extremidad de la línea que representa la velocidad relativa, en la rotacion instantánea al rededor de este eje.

440. Hemos visto (311), que las componentes de la aceleracion complementaria, siendo los ejes rectangulares, y $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, las componentes de la velocidad re-

lativa v_r; y p, q, r, las de la rotacion ω; son

$$j_{c,x}=2\left(q\frac{dz}{dt}-r\frac{dy}{dt}\right),$$
$$j_{c,y}=2\left(r\frac{dx}{dt}-p\frac{dz}{dt}\right),$$
$$j_{c,z}=2\left(p\frac{dy}{dt}-q\frac{dx}{dt}\right).$$

De mlismo modo las componentes paralelas á los ejes de la fuerza centrífuga compuesta, son

$$X'=2m\left(r\frac{dy}{dt}-q\frac{dz}{dt}\right),$$
$$Y'=2m\left(p\frac{dz}{dt}-r\frac{dx}{dt}\right),$$
$$Z'=2m\left(q\frac{dx}{dt}-p\frac{dy}{dt}\right).$$

La fuerza centrífuga compuesta $2m\omega v_r$ sen α, es cero, cuando lo son cada uno de los tres factores que entran en su expresion: 1.°, cuando $\omega=0$, es decir, cuando el movimiento de arrastre se reduce á una traslacion; 2.°, cuando $v_r=0$, ó sea en el caso en que el punto está en reposo relativo; 3.°, cuando sen $\alpha=0$, lo cual sucede cuando la direccion de la velocidad relativa v_r coincide con la del eje instantáneo de rotacion.

En estos tres casos las fuerzas aparentes se reducen á la fuerza de reaccion debida al movimiento de arrastre. Esta fuerza de reaccion es tambien cero, cuando el movimiento de arrastre es rectilíneo y uniforme, porque entónces $j_a=0$. En este caso no hay ninguna fuerza aparente.

Tambien conviene recordar, que se puede descomponer la velocidad relativa v_r, y la rotacion ω, en tantas velocidades y tantas rotaciones como se quiera; entónces la aceleracion complementaria es la resultante de las aceleraciones complementarias parciales, que se obtienen asociando cada una de las velocidades componentes á cada una de las rotaciones componentes. Si multiplicamos por la masa, pasaremos de las aceleraciones á las fuerzas, y tendremos, que la fuerza centrífuga compuesta, correspondiente á una velocidad relativa v_r y á una rotacion ω, es la resultante de todas las fuerzas centrífugas compuestas que corresponden á las componentes de v_r, asociadas sucesivamente á las componentes de ω.

Aplicacion de esta teoría al equilibrio y movimiento relativos de un punto material.

441. La teoría de las fuerzas aparentes en el movimiento relativo, que acabamos de exponer, puede aplicarse al caso en que el punto material que se considera, se mueve de manera que conserva constantemente la misma posicion con respecto á los ejes móviles; es decir, al caso en que está en equilibrio relativo.

En este caso, la velocidad relativa v_r, es igual cero; y la fuerza centrífuga compuesta, $2m\omega v_r \operatorname{sen} \alpha$, es tambien cero; la fuerza de reaccion correspondiente al movimiento de arrastre, será la única fuerza aparente que deberemos unir á las fuerzas realmente aplicadas al punto material, para asimilar su equilibrio relativo á un equilibrio absoluto.

442. Por la teoría de las fuerzas aparentes, todo movimiento relativo de un punto material puede considerarse como un movimiento absoluto, con la condicion de unir á las fuerzas que actúan realmente sobre el punto material, las dos fuerzas aparentes cuya magnitud, direccion y sentido acabamos de defenir. Los teoremas que hemos deducido de las ecuaciones del movimiento de un punto material, podrán aplicarse al movimiento relativo de éste, teniendo en cuenta en ellos el efecto de las dos fuerzas aparentes, la fuerza de reaccion y la fuerza centrífuga compuesta. En el teorema de las fuer-

zas vivas no debemos tener en cuenta para nada esta última, porque siendo perpendicular á la direccion de la velocidad relativa, su trabajo será siempre igual cero. En los demas, es decir, en el teorema de las áreas, en el de las cantidades de movimiento y en el de los momentos de las cantidades de movimiento entrarán las dos fuerzas aparentes con todas las circunstancias que las distinguen.

Tambien son aplicables al movimiento relativo de un punto material, sujeto á moverse sobre una curva ó sobre una superficie dadas, los teoremas establecidos en el mismo caso para el movimiento absoluto, con tal que á las fuerzas que le son directamente aplicadas, ademas de la reaccion de la curva ó superficie sobre el punto, agreguemos la fuerza de reaccion y la fuerza centrífuga compuesta.

443. Teniendo en cuenta estas indicaciones generales, vamos á estudiar el movimiento relativo de un punto material libre, con respecto á un sistema de ejes animados de un movimiento de traslacion en el espacio. La fuerza centrífuga compuesta es nula en este caso, porque la velocidad angular ω es igual cero, por ser el movimiento de los ejes móviles de traslacion; y de las dos fuerzas aparentes sólo debemos tener en cuenta, en este caso, la fuerza de reaccion. Sean x_1, y_1, z_1 las coordenadas del orígen de los ejes móviles, referido á un sistema de ejes fijos, á los cuales estos ejes móviles permanecen constantemente paralelos: la aceleracion total, en el movimiento de arrastre, tiene por componentes paralelas á los ejes, las expresiones

$$\frac{d^2x_1}{dt^2},\ \frac{d^2y_1}{dt^2},\ \frac{d^2z_1}{dt^2};$$

de modo, que las componentes de la fuerza de reaccion del punto material de masa m, en este movimiento de arrastre, son

$$-m\frac{d^2x_1}{dt^2},\ -m\frac{d^2y_1}{dt},\ -m\frac{d^2z_1}{dt^2}.$$

Llamemos x', y', z' las coordenadas del punto material con respecto á los ejes móviles, y sean X, Y, Z, las componentes segun estos ejes de la resultante de las fuerzas aplicadas á este punto; tendremos las ecuaciones siguientes para determinar su movimiento relativo,

$$m\frac{d^2x'}{dt^2}=X-m\frac{d^2x_1}{dt^2},$$
$$m\frac{d^2y'}{dt^2}=Y-m\frac{d^2y_1}{dt^2},$$
$$m\frac{d^2z'}{dt^2}=Z-m\frac{d^2z_1}{dt^2}.$$

Teniendo presente que

$$x=x_1+x',\ y=y_1+y',\ z=z_1+z',$$

siendo x, y, z las coordenadas del punto móvil, diferenciando dos veces y sustituyendo en las ecuaciones del movimiento absoluto de un punto material.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X,\ m\frac{d^2y}{dt^2}=Y,\ m\frac{d^2z}{dt^2}=Z,$$

resultan las ecuaciones anteriores del movimiento relativo.

Si los ejes móviles están animados de un movimiento de traslacion rectilíneo y uniforme, las dos fuerzas aparentes que trasforman el movimiento relativo en un movimiento absoluto, son iguales á cero; porque en un movimiento rectilíneo y uniforme la aceleracion es nula, y las ecuaciones diferenciales son las mismas que las del movimiento absoluto.

Equilibrio y movimiento de los cuerpos en la superficie de la Tierra. Efectos de la rotacion de ésta.

444. Como el planeta que habitamos está constantemente en movimiento, un cuerpo que nos parece en re-

poso en su superficie, está en equilibrio relativo, y un cuerpo en movimiento aparece para nosotros, que participamos del movimiento de la Tierra, con un movimiento que no es más que un movimiento relativo. Vamos á ver cómo por medio de las fuerzas aparentes, este equilibrio y movimiento relativos pueden considerarse como un equilibrio y un movimiento absolutos.

La Tierra, ademas de otros pequeños movimientos, va animada de dos movimientos principales, uno de rotacion sobre su eje, que se llama movimiento diurno, y otro de traslacion al rededor de el Sol, que se llama movimiento anual. Los pequeños movimientos de la Tierra no influyen en el equilibrio y movimiento de los cuerpos colocados sobre su superficie, y para estudiar el efecto de los dos principales, supondremos primero que la Tierra sólo está animada del movimiento de rotacion sobre su eje, y luégo veremos cómo se modifican los resultados obtenidos, por efecto del movimiento anual.

Teniendo esto presente, vamos á estudiar el equilibrio relativo de los cuerpos en la superficie de la Tierra, en el cual la fuerza centrífuga compuesta es cero, y de las dos aparentes, sólo debemos tener en cuenta la fuerza de reaccion. Si un cuerpo, que supondremos reducido á un punto material, se coloca sobre un sustentáculo cualquiera, ó sobre el suelo, aparecerá como si estuviera en reposo, ó mejor dicho, en equilibrio; y debe existir este equilibrio entre todas las fuerzas que actúan sobre él, que son las que le están directamente aplicadas, y la fuerza aparente que debe unirse á las primeras, para que el equilibrio relativo pueda considerarse como un equilibrio absoluto. El movimiento de arrastre del cuerpo, debido á la rotacion de la Tierra alrededor de su eje, es un movimiento circular y uniforme, y la fuerza aparente de que se trata, es decir, la fuerza de reaccion, se reduce á la fuerza centrífuga, correspondiente á este movimiento; su valor es

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{m\omega^2 r^2}{r} = m\omega^2 r,$$

siendo m la masa del cuerpo, ω la velocidad angular de la Tierra en su movimiento diurno, y r el radio del círculo que describe el punto alrededor de la línea de los polos. Las fuerzas reales que actúan sobre el cuerpo son: 1.°, la atraccion que sobre él ejerce la Tierra; 2.°, la presion que sobre él ejerce de abajo á arriba el suelo, ó el sustentáculo que lo sostiene: estas dos fuerzas, y la fuerza centrífuga $m\omega^2 r$ se equilibran; luego la presion del suelo sobre el cuerpo es igual y directamente opuesta á la resultante de la fuerza centrífuga y de la atraccion que experimenta de parte de la Tierra. Esta resultante es lo que se llama peso del cuerpo; de manera, que no debe confundirse el peso del cuerpo con la atraccion que sobre él ejerce la Tierra, pues segun vemos, el peso se obtiene componiendo esta atraccion con la fuerza centrífuga debida á la rotacion de la Tierra.

Del mismo modo, si el cuerpo en equilibrio relativo, está suspendido al extremo inferior de un hilo, que tiene el extremo superior fijo, la direccion del hilo es la direccion de la resultante; de manera, que la vertical es la direccion de esta resultante de la atraccion de la Tierra y de la fuerza centrífuga.

Fuerza centrífuga en los diferentes lugares de la Tierra. Peso de los cuerpos, vertical.

445. La fuerza centrífuga $m\omega^2 r$ es nula en los polos de la Tierra, y va creciendo con el radio r de los diferentes paralelos, hasta el ecuador, en que el radio es máximo; en todos los casos tiende á alejar los cuerpos del eje de

rotacion de la Tierra. Vamos á apreciar su influencia, primero en el ecuador y despues en un paralelo cualquiera. Sea M (fig. 205), un punto material situado en el ecuador EE′, y llamemos G á la intensidad de la atraccion de la Tierra sobre la unidad de masa en el punto M, y cuya direccion es próximamente CM; la fuerza centrífuga $\omega^2 r$, sobre la unidad de masa, está dirigida en sentido opuesto á la atraccion G, ó sea segun la prolongacion MF de la MC; la aceleracion g que expresa el peso de la unidad de masa, ó la presion de esta unidad de masa sobre el apoyo que la sustenta, será la diferencia de estas dos; y tendremos, siendo r el radio del ecuador,

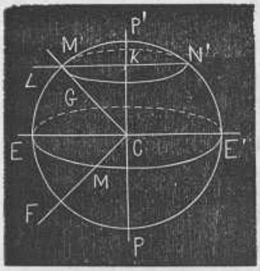


Fig. 205.

$$g = G - \omega^2 r.$$

Pero $\omega = \frac{2\pi}{86164} = 0,0000729$; el radio ecuatorial es

$$r = 6378230\, m;$$

luego

$$\omega^2 r = 0,^{m}033852;$$

comparando con el valor de g en el ecuador,

$$g = 9,^{m}781104,$$

resulta

$$\omega^2 r = \frac{g}{289} = g\,\frac{1}{17^2};$$

de modo, que próximamente

$$g = G - \frac{g}{17^2} = G\left(1 - \frac{1}{17^2}\right);$$

es decir, que la aceleracion en el ecuador es igual á la debida á la atraccion de la Tierra, disminuida en $\frac{g}{17^2}$; y si la Tierra girára 17 veces más de prisa, ω sería 17 veces mayor y el peso de los cuerpos sería nulo en el ecuador.

En general, el peso de la unidad de masa en el ecuador es próximamente

$$g = G\left(1 - \frac{1}{289}\right).$$

Así, que la fuerza centrífuga en el ecuador, que es donde tiene mayor intensidad, es una pequeña fraccion de la fuerza debida á la atraccion terrestre; y cuando tomamos esta atraccion por el peso del cuerpo, cometemos un pequeño error.

Ademas, sólo en el ecuador es opuesta á la atraccion de la Tierra.

446. Veamos ahora el valor de la fuerza centrífuga en un paralelo cualquiera. Sea M′ un punto material situado en el paralelo M′N′ cuyo radio $M'K = r'$, φ el ángulo M′CE, es decir, la latitud del lugar, G la intensidad de la atraccion de la Tierra. La fuerza centrífuga $\omega^2 r'$ referida á la unidad de masa, está dirigida segun la prolongacion M′L del radio del paralelo, y tendremos

$$g = G - \omega^2 r' \cos\varphi;$$

pero $r' = r\cos\varphi$, y la expresion anterior será

$$g = G - \omega^2 r \cos^2\varphi.$$

Dando en esta expresion valores á φ, desde el ecuador en que es cero hasta el polo en que es 90°, tendremos la aceleracion debida á la gravedad en los diferentes lugares de la Tierra.

De cuanto acabamos de exponer, resulta, que el efecto de la rotacion diurna de la Tierra sobre los cuerpos en equilibrio, es modificar la atraccion que de ella experimentan; y que el peso de los cuerpos es la resultante de esta atraccion y de la fuerza centrífuga. La vertical en un punto cualquiera de la Tierra, indicada por la direccion de un hilo que lleva un peso suspendido en su extremo, es la direccion de la resultante de la atraccion de la Tierra y de la fuerza centrífuga, y no pasa por su centro, ni pasaria por este punto, aunque fuera esférica.

Como la fuerza centrífuga es muy pequeña con relacion á la atraccion de la Tierra, el error cometido cuando prescindimos del movimiento diurno de ésta, es insignificante en la mayor parte de las cuestiones de equilibrio de los cuerpos en la superficie terrestre.

LECCION XXXVI.

Movimiento de los cuerpos en la superficie de la Tierra. Determinacion de las componentes de la fuerza centrífuga compuesta en un lugar cualquiera de la Tierra.—Caida de los cuerpos de una gran altura.—Tendencia lateral de los cuerpos en movimiento en un plano horizontal.—Movimiento del péndulo cónico, teniendo en cuenta el movimiento diurno de la Tierra.—Rotacion aparente del plano de oscilacion del péndulo.—Experimento de M. Foucault.—Influencia del movimiento anual de la Tierra en el equilibrio y movimiento de los cuerpos situados en su superficie.—Mareas.

Movimiento de los Cuerpos en la superficie de la Tierra. Determinacion de las componentes de la fuerza centrífuga compuesta en un lugar cualquiera de la Tierra.

447. Las cuestiones de movimiento relativo de los cuerpos en la superficie de la Tierra ó en su inmediacion, pueden considerarse como cuestiones de movimiento absoluto, introduciendo entre las fuerzas que les son directamente aplicadas, las dos fuerzas aparentes del movimiento relativo.

Cuando un punto material está en movimiento, la fuerza centrífuga compuesta $2m\omega v_r \operatorname{sen} \alpha$, no es igual cero, á no ser en el caso en que la velocidad relativa es paralela al eje polar del globo. Estudiemos el efecto de esta fuerza en el movimiento de un cuerpo pesado. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, son la atraccion de la Tierra, y las dos fuerzas aparentes, la fuerza de reaccion, que es aquí la fuerza centrífuga, y la fuerza centrífuga compuesta. El peso del cuerpo es la resultante de la atraccion del globo y de la fuerza centrífuga, y la direccion de esta resultante es la vertical del lugar. Tenemos, pues, que componer el peso conocido en magnitud y direccion, con la fuerza centrífuga compuesta que vamos á determinar.

Sean PP′ el eje polar del globo, P′ el polo Norte y EE′ el ecuador de la Tierra (fig. 206), A el lugar de la observacion, que supondremos en el hemisferio Norte, AZ la vertical y g la aceleracion debida á la gravedad.

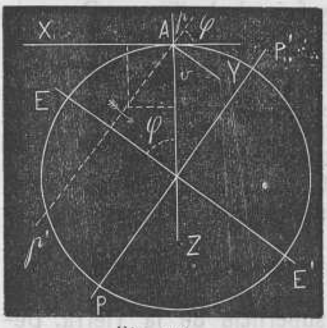


Fig. 206.

Tomaremos por ejes coordenados, AZ dirigido segun la vertical en el sentido descendente, AX tangente al meridiano en el punto A y en la direccion Sur, AY tangente al paralelo del punto A hácia el Este, de manera que el plano XY, es el plano horizontal del punto A.

Descompongamos la fuerza centrífuga compuesta, segun los tres ejes, por medio de las ecuaciones del número (440); es necesario ántes descomponer, segun los tres ejes, la rotacion ω de la Tierra, que se efectúa del Oeste al Este alrededor del eje PP′, ó alrededor de una paralela pp' á él, tirada por el punto A.

El sentido de la rotacion ω es por lo tanto Ap; descompuesta segun los ejes AX, AY, AZ, y siendo p, q, r sus componentes, tendremos

$$p = \omega \cos \varphi, \quad q = 0, \quad r = \omega \operatorname{sen} \varphi.$$

Sustituyendo estos valores en las fórmulas de las componentes de la fuerza centrífuga, serán

$$X'=2m\left(r\frac{dy}{dt}-q\frac{dz}{dt}\right)=2m\omega\,\text{sen}\,\varphi\frac{dy}{dt},$$

$$Y'=2m\left(p\frac{dz}{dt}-r\frac{dx}{dt}\right)=2m\omega\left(\cos\varphi\frac{dz}{dt}-\text{sen}\,\varphi\frac{dx}{dt}\right),$$

$$Z'=2m\left(q\frac{dx}{dt}-p\frac{dy}{dt}\right)=-2m\omega\cos\varphi\frac{dy}{dt}.$$

Las ecuaciones generales del movimiento, llamando X, Y, Z, á las componentes de la fuerza, que ademas de la gravedad, actúe sobre el punto móvil, serán para un lugar A de la Tierra

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X+2m\omega\,\text{sen}\,\varphi\frac{dy}{dt},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=Y+2m\omega\left(\cos\varphi\frac{dz}{dt}-\text{sen}\,\varphi\frac{dx}{dt}\right),$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=Z-2m\omega\cos\varphi\frac{dy}{dt}+gm.$$

Caida de un cuerpo de una gran altura.

448. Si dejamos caer, sin velocidad inicial, un cuerpo en la superficie de la Tierra ó en su inmediacion, principia á moverse siguiendo la vertical de su punto de partida, y luégo se separa de ella poco á poco, á medida que aumenta su velocidad, desviándose al Este como vamos á ver. Para tratar el movimiento del cuerpo como un movimiento absoluto, debemos tener en cuenta, ademas de la atraccion de la Tierra, la fuerza centrífuga correspondiente al movimiento circular y uniforme de que el cuerpo estaria animado si permaneciera inmóvil con respecto á la Tierra, en la posicion que ocupa al principio del movimiento, y la fuerza centrífuga compuesta. Esta última fuerza es nula al principio del movimiento, porque contiene la velocidad relativa como factor, y va creciendo á medida que crece la velocidad del móvil;

de manera, que éste principia á descender por la vertical, que es la direccion de la resultante de las otras dos fuerzas, resultante que constituye el peso del cuerpo, y la aceleracion g que recibe al principio de su caida aparente, es la que una fuerza igual á su peso le comunicaria; así que, el peso P está ligado á la aceleracion por la relacion

$$P = mg.$$

Esta relacion, establecida en la hipótesis de la inmovilidad de la Tierra, será cierta teniendo en cuenta su movimiento de rotacion, en el caso del equilibrio de los cuerpos; y en el caso de movimiento, para que lo sea, deberemos tomar para g el valor de la aceleracion en los primeros instantes del movimiento.

449. Cuando el cuerpo que desciende está ya en movimiento, la fuerza centrífuga compuesta $2m\omega v_r \operatorname{sen} \alpha$, no es igual cero, y desvia el cuerpo de la vertical, segun la cual principió á moverse. Para averiguar el efecto que esta fuerza produce, y que se ha podido hacer constar por la experiencia, á pesar de ser muy pequeño, determinaremos la magnitud y direccion de la fuerza centrífuga compuesta, considerando al movimiento aparente del cuerpo como si fuera un movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado, que tiene lugar segun la vertical que pasa por su punto de partida. Sea M (fig. 207) la posicion del móvil en un instante cualquiera del descenso, despues de haber recorrido la altura $ZM = h$; tiremos por el punto M la paralela MP al eje de la Tierra; podremos considerar la rotacion elemental de la Tierra durante un elemento de tiempo, contado á partir del instante que consideramos, como resultante de la composicion de una rotacion ele-

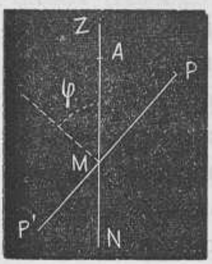


Fig. 207.

mental igual y del mismo sentido alrededor de MP, y de una traslacion que tenga la misma magnitud, direccion y sentido que el movimiento elemental del punto M, supuesto invariablemente unido á la Tierra. La velocidad aparente del móvil en M, es gt, y llamando φ á la latitud del lugar, complemento del ángulo que forma la ZM con el eje MP, ángulo que tiene el mismo seno que el PMN$=\alpha$; tendremos que la fuerza centrífuga compuesta, es

$$2m\omega gt \cos\varphi;$$

ademas NMP es el meridiano del lugar, y en la rotacion elemental del globo terrestre alrededor de MP, el nadir, ó sea el extremo N de la vertical, que representa la direccion de la velocidad aparente del móvil, se dirige hácia el Oeste; y deduciremos que la fuerza centrífuga compuesta está dirigida segun la perpendicular al meridiano del lugar, y tiende á llevar el móvil hácia el Este.

El efecto de la fuerza centrífuga compuesta es, en consecuencia, desviar el móvil de la vertical de su punto de partida, produciendo una desviacion hácia el Este, cuya magnitud vamos á calcular. Consideremos para ello la proyeccion del movimiento del cuerpo sobre un plano horizontal; la proyeccion de la fuerza total que produce el movimiento aparente del cuerpo, es la fuerza centrífuga compuesta que se proyecta en su verdadera magnitud en el plano horizontal; y el movimiento que esta fuerza proyectada comunicará durante el tiempo de la caida, á un punto material que parte del reposo y tiene la misma masa que el cuerpo, será igual á la desviacion buscada. La ecuacion diferencial del movimiento proyectado es

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 2\omega gt \cos\varphi;$$

que integrada y determinadas las constantes, de manera que x y $\frac{dx}{dt}$ sean cero, para $t=0$, se tiene

$$y=\tfrac{1}{3}\,\omega g t^3 \cos\varphi.$$

450. Podemos estudiar esta cuestion y aún con más exactitud por las fórmulas del núm. (447); en las cuales en este caso $X=0$, $Y=0$, $Z=0$; y $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ son muy pequeñas, porque el móvil se aparta poco de la vertical; y despreciando los términos que las contengan, las ecuaciones generales serán para el caso que nos ocupa

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=2m\,\omega\cos\varphi\,\frac{dz}{dt},$$

$$m\frac{d^2z}{dt}=mg.$$

Integrando la última, y teniendo en cuenta que la constante es cero, porque no hay velocidad inicial, será

$$\frac{dz}{dt}=gt.$$

Sustituyendo en la segunda, se reduce á

$$\frac{d^2y}{dt^2}=2\,\omega\cos\varphi\, gt,$$

que integrada, dará

$$\frac{dy}{dt}=\omega\cos\varphi\, gt^2$$

y por fin

$$y=\tfrac{1}{3}\,\omega\cos\varphi\, gt^3;$$

que es la misma que hemos encontrado directamente; y prueba que la desviacion se verifica hácia el Este, que es hácia donde se cuentan las y positivas.

Si queremos llevar más adelante la aproximacion, haremos en las ecuaciones rigurosas del movimiento, $\frac{dx}{dt}=0$, y $\frac{dy}{dt}=\omega\cos\varphi g t^2$; valores obtenidos por la primera aproximacion, y tendremos

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2\omega^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi g t^2,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=g-2\omega^2\cos^2\varphi g t^2.$$

De estas ecuaciones deduciremos por la integracion, las siguientes

$$\frac{dx}{dt}=\tfrac{2}{3}\,\omega^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\, g t^3,$$

$$\frac{dz}{dt}=gt-\tfrac{2}{3}\omega^2\cos^2\varphi g t^3;$$

valores que sustituidos en la segunda de dichas ecuaciones, darán

$$\frac{d^2y}{dt}=2\,\omega\cos\varphi(gt-\tfrac{2}{3}\omega^2\cos^2\varphi g t^3)$$

$$-2\omega\operatorname{sen}\varphi.\tfrac{2}{3}\,\omega^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi g t^3=2\omega\cos\varphi g t-\tfrac{4}{3}\,\omega^3\cos\varphi g t^3,$$

que da por la integracion un valor más exacto de la desviacion y. En ella se ve que la parte principal de la desviacion

$$y=\tfrac{1}{3}\omega\cos\varphi\, g t^3,$$

está dirigida al Este. Hay tambien una pequeña desviacion hácia el Sur, que se obtiene integrando la ecuacion

$$\frac{dx}{dt}=\tfrac{2}{3}\omega^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi g t^3,$$

la cual nos dará

$$x=\tfrac{1}{6}\omega^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi g t^4.$$

De la fórmula $h=\frac{1}{2}gt^2$, sale $t^3=\frac{2h}{g}\sqrt{\frac{2h}{g}}$; y tendremos para calcular la desviacion al Este, la fórmula que da la primera aproximacion

$$y=\frac{2\sqrt{2}.}{3}\,\omega\,\frac{h\sqrt{h}}{\sqrt{g}}\cos\varphi.$$

451. Aplicando esta fórmula á las experiencias que

hizo M. Reich en un pozo de mina de Freyberg, en el que $h=158^m,5$, $\varphi=51°$, y poniendo el valor correspondiente de g y de ω se tiene, $y=0,0276$, para la desviacion y: un gran número de experiencias hechas con todo el esmero posible, dieron para la desviacion, $y=0,0283$, resultado casi igual al que da la fórmula.

La conformidad entre los resultados obtenidos por la fórmula, que da la teoría, y los obtenidos directamente por la experiencia, puede considerarse como una demostracion experimental de la rotacion de la Tierra.

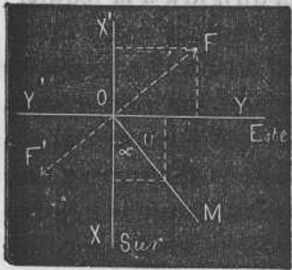
Este cálculo prueba tambien, que la desviacion es muy pequeña, aunque la altura sea muy grande. En general, en el movimiento aparente de un cuerpo en la superficie de la Tierra, la fuerza centrífuga compuesta $2m\omega v_r \operatorname{sen}\alpha$ es muy pequeña; y para que su mayor valor $2m\omega v_r$, sea igual á $m\omega^2 r$, fuerza centrífuga en el ecuador, es necesario que $v_r \overline{\gtrless} \frac{1}{2}\omega r$; es decir, poniendo por ω y por r su valor, que la velocidad relativa fuera tal, que el móvil andára más de 230^m por segundo.

Así que en general, la fuerza centrífuga compuesta podrá omitirse en el estudio del movimiento de los cuerpos en la superficie de la Tierra, siempre que no se trate de una velocidad aparente sumamente grande, ó de masas considerables.

Tendencia lateral de los cuerpos en movimiento en un plano horizontal.

452. Supongamos que un punto de masa m se mueve en un plano horizontal con una velocidad constante v_r, en una direccion OM (fig. 208), que forma un ángulo α

con el eje de las x, es decir, con la porcion del meridiano dirigido hácia el Sur; siendo este ángulo positivo, si está al Este del meridiano ó en el sentido que lleva el eje de las x hácia el eje de las y.



Fi. 208.

Por ser el movimiento del punto rectilíneo y uniforme, tendremos

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=0, \quad \frac{d^2z}{dt^2}=0;$$

y para hacerle seguir la recta OM, habrá que aplicarle una fuerza cuyas componentes X, Y, Z, se determinarán por las ecuaciones

$$X+2m\,\omega \operatorname{sen}\varphi v_r \operatorname{sen}\alpha=0,$$
$$Y-2m\omega \operatorname{sen}\varphi\, v_r \cos\alpha=0,$$
$$Z+mg-2m\,\omega\cos\varphi\, v_r \operatorname{sen}\alpha=0.$$

La tercera ecuacion da la reaccion vertical del plano ó de la recta que sirve de guía al punto. Si estuviera en reposo esta reaccion será igual á su peso mg. El movimiento del punto disminuye la presion ejercida sobre la recta, cuando α es positiva, y la aumenta cuando α es negativa; el primer caso se verifica cuando el punto se dirige al Este, y el segundo cuando se dirige al Oeste del meridiano. La presion vertical es igual al peso mg, cuando $\alpha=0$, ó $\alpha=\pi$.

Ademas de la reaccion vertical hay una reaccion horizontal F, cuyas componentes son X é Y.

La tangente trigonométrica del ángulo que esta fuerza forma con el eje OX es

$$\frac{Y}{X}=-\frac{2m\,\omega v_r \operatorname{sen}\varphi \cos\alpha}{2m\,\omega v_r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\alpha}=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Luego la fuerza F es perpendicular á la direccion OM; y ademas vemos que siendo $X=-2m\omega v_r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\alpha$ é

$Y = 2m\omega v_r \operatorname{sen}\varphi \cos\alpha$, la fuerza F tiene el sentido indicado en la figura, es decir, que está dirigid a á la izquierda de OM con respecto á un observador animado de la velocidad v_r á lo largo de esta recta. En fin, $F = \sqrt{X^2 + Y^2} = 2m\omega v_r \operatorname{sen}\varphi$, valor de F independiente del ángulo α.

La presion horizontal del punto sobre la recta OM, es igual y contraria á la reaccion de la recta sobre el punto, ó sea á una fuerza F′, independiente del ángulo α, perpendicular á OM, y dirigida á la derecha de la velocidad v_r. Si el punto en vez de estar guiado por una recta, estuviera libre en el plano horizontal, tenderá á dirigirse á la derecha.

La tendencia así manifestada es nula en el ecuador y alcanza su mayor valor en los polos.

Esta teoría nos da cuenta de una porcion de fenómenos que se observan en la superficie de la Tierra. Un proyectil lanzado horizontalmente con una gran velocidad, pero sin movimiento giratorio sobre su eje, sale del plano vertical en el que ha sido lanzado, y se desvia fuertemente hácia la derecha; la fuerza centrífuga compuesta tiene en este caso un gran valor, porque el valor de v_r es muy grande.

Los rios que corren en el hemisferio Norte, á latitudes elevadas, ejercen una presion mayor sobre la orilla derecha que sobre la orilla izquierda; la velocidad v_r no es muy grande, más la accion que sufre la orilla es proporcional á la masa, es decir, al caudal del rio, lo que da un factor muy considerable cuando se trata de un gran rio en crecida. El Ebro en España, el Ural y el Volga, en la Rusia europea, manifiestan sensiblemente esta tendencia.

La cual se observa en la embocadura de los rios, cuyas aguas al salir al mar, se apoyan hácia la derecha, en el hemisferio boreal. Poco sensible en el Océano, á causa de las corrientes y de las mareas, se nota muy bien en los mares interiores, como el Mediterráneo, el Mar Negro, el mar Caspio, y en los lagos; la corriente litoral está dirigida de izquierda á derecha para un observador que sigue el curso del rio.

Los movimientos del aire atmosférico están sujetos á la misma influencia. Es conocida la regularidad de los vientos *alíseos* que soplan de los polos al Ecuador, inclinándose hácia el Oeste. Una razon semejante explica la corriente llamada *Gulf-Stream*, que del golfo de Méjico se dirige á las costas de Inglaterra y de Noruega, y sigue una línea oblícua á los meridianos apoyándose hácia la derecha, es decir, hácia el Este.

Movimiento del péndulo cónico, teniendo en cuenta el movimiento diurno de la Tierra.

453. Hemos estudiado el movimiento del péndulo cónico, sin tener en cuenta el movimiento de la Tierra, y ya sabemos que el movimiento relativo de éste puede considerarse como un movimiento absoluto, por medio de la teoría de las fuerzas aparentes. Supondremos por ahora, que la Tierra está sólo animada del movimiento diurno.

El punto material M (fig. 209) que termina el péndulo, está sujeto, como sabemos, á moverse sobre la esfera, cuyo radio $AM = l$, es la longitud del hilo. Coloquemos el orígen de las coordenadas en el punto de la suspension y tomemos por eje de las z, contadas de arriba á abajo, la vertical AZ, por eje de las x la meridiana del lugar, contándolas de Norte á Sur, y por eje de las y la línea Este Oeste, contándolas de Oeste á Este. Las

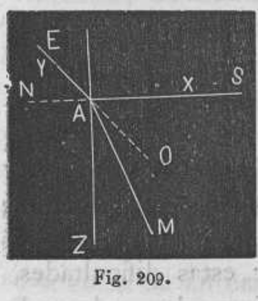


Fig. 209.

fuerzas que debemos tener en cuenta, para considerar el movimiento aparente del punto material como un movimiento absoluto, son cuatro: dos fuerzas reales, que son la atraccion de la tierra y la tension del hilo; y dos fuerzas aparentes, que son la fuerza centrífuga debida á la rotacion de la Tierra, y la fuerza centrífuga compuesta. La resultante de la primera y la tercera es el peso mg, dirigida verticalmente y en el sentido de las z positivas; la tension del hilo la designaremos por N; y sus componentes paralelas á los ejes, son

$$X=-N\frac{x}{l},\quad Y=-N\frac{y}{l},\quad Z=-N\frac{z}{l};$$

la fuerza centrífuga compuesta es $2m\omega v_r$ sen α, y para establecer las ecuaciones del movimiento, emplearemos las ecuaciones generales del movimiento relativo del número (447).

Por medio de aquellas fórmulas podemos escribir inmediatamente las ecuaciones del movimiento del péndulo cónico, que son los siguientes:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{N}{m}\frac{x}{l}+2\omega\frac{dy}{dt}\,\text{sen}\,\varphi,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{N}{m}\frac{y}{l}+2\omega\left(\frac{dz}{dt}\cos\varphi-\frac{dx}{dt}\,\text{sen}\,\varphi\right),$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=g-\frac{N}{m}\frac{z}{l}+2\omega\frac{dy}{dt}\cos\varphi,$$

$$x^2+y^2+z^2=l^2.$$

La integracion de estas ecuaciones nos dará á conocer todas las circunstancias del movimiento aparente del péndulo cónico. Esta integracion presentará más ó ménos dificultades, como vimos al tratar del movimiento absoluto del péndulo cónico; mas no por estas dificultades analíticas dejarán las ecuaciones anteriores de resolver el problema de que nos ocupamos.

Rotacion aparente del plano de oscilacion del péndulo. Experimento de M. Foucault.

454. Las ecuaciones diferenciales que acabamos de obtener nos dan el medio de explicar la rotacion aparente del plano de oscilacion del péndulo, que se observa en el experimento de M. Foucault. Para ello eliminemos N entre las dos primeras ecuaciones, y obtendremos la ecuacion de la proyeccion del movimiento en el plano de las XY, que es

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=-2\omega\,\text{sen}\,\varphi\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)+2\omega\cos\varphi\, x\frac{dz}{dt}.$$

En los polos de la Tierra, el último término de esta ecuacion es nulo, porque $\cos\varphi=0$; en otro punto cualquiera de la superficie terrestre, puede despreciarse este término, si las oscilaciones del péndulo tienen una amplitud pequeña, siendo l muy grande, porque el factor $\frac{dz}{dt}$ es entónces muy pequeño; suprimido este término, la ecuacion es inmediatamente integrable, y nos da integrándola

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=-\omega\,\text{sen}\,\varphi\,(x^2+y^2)+C.$$

La constante C es nula, si el péndulo se pone en movimiento, de manera que en cada oscilacion venga á coincidir con la vertical del punto de suspension; porque entónces la ecuacion debe quedar satisfecha, haciendo $x=0, y=0$; en este caso el péndulo cónico se convierte en péndulo circular. Reemplacemos en el plano horizontal las coordenadas rectangulares x é y, por las polares r y θ; tenemos

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\,\text{sen}\,\theta;$$

y la ecuacion anterior se reduce á

$$\frac{d\theta}{dt}=-\omega\,\text{sen}\,\varphi,$$

que integrada, da

$$\theta = \theta_0 - \omega \operatorname{sen} \varphi . t.$$

Esta ecuacion nos dice, que el plano de oscilacion del péndulo gira uniformemente alrededor de la vertical, con una velocidad igual á $-\omega \operatorname{sen} \varphi$. Si el lugar de la observacion está en el hemisferio boreal, $\varphi > 0$, y la rotacion se efectúa en el sentido *Sur*, *Oeste*, *Norte*, *Este;* si está en el hemisferio austral, $\varphi < 0$; y la rotacion tiene lugar en sentido contrario. Segun lo que precede, la rotacion uniforme del plano de oscilacion del péndulo está rigurosamente demostrada si el péndulo se coloca en los polos de la Tierra; y en los demas lugares de ésta, la rotacion es aproximadamente uniforme, y se acerca tanto más á ser uniforme cuanto más pequeña es la amplitud.

455. Supongamos que la constante C no sea cero, de suerte que el movimiento del péndulo no se verifique en un plano, que pase por la vertical del punto de suspension. Suponiendo que las oscilaciones son pequeñas, para que $\frac{dz}{dt} = 0$, podremos integrar la ecuacion del modo siguiente.

Sea M (fig. 210) la proyeccion horizontal del punto móvil; supongamos que cuando $t=0$, se haya abandonado el punto sin velocidad en el plano vertical OY; en este instante, podemos concebir un plano vertical móvil, animado alrededor de OZ de una velocidad angular $\omega \operatorname{sen} \varphi$, en el sentido de Y hácia X; al cabo de cierto tiempo, este plano ocupará la posicion OY′, y tendremos $YOY' = \omega t \operatorname{sen} \varphi$. Refiramos la posicion del punto á dos ejes móviles OY′, OX′ rectangulares; entre las antiguas coordenadas x é y, y las

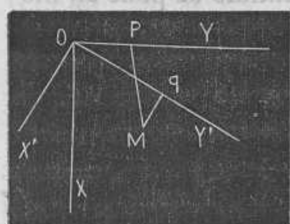


Fig. 210.

nuevas x' é y', existirán las relaciones

$$x = y' \text{ sen } (\omega t \text{ sen } \varphi) + x' \cos (\omega t \text{ sen } \varphi),$$
$$y = y' \cos (\omega t \text{ sen } \varphi) - x' \text{ sen } (\omega t \text{ sen } \varphi).$$

De estas ecuaciones deduciremos, diferenciando, los valores de $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$; los sustituiremos en las dos ecuaciones primeras del problema, teniendo en cuenta que próximamente $\frac{dz}{dt} = 0$, y despreciando los términos que contienen ω^2, que son muy pequeños, y hechas las reducciones convenientes, tendremos las siguientes

$$\left(m \frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{Ny'}{l}\right) \text{sen} (\omega t \text{sen} \varphi) + \left(m \frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{Nx'}{l}\right) \cos (\omega t \text{sen} \varphi) = 0,$$
$$\left(m \frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{Ny'}{l}\right) \cos (\omega t \text{sen} \varphi) - \left(m \frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{Nx'}{l}\right) \text{sen} (\omega t \text{sen} \varphi) = 0.$$

Eliminando en estas el ángulo ωt sen φ, se obtienen las siguientes

$$m \frac{d^2y'}{dt^2} = -\frac{Ny'}{l},$$
$$m \frac{d^2x'}{dt^2} = -\frac{Nx'}{l};$$

que son las ecuaciones del movimiento del punto M con respecto á los ejes móviles OY', OX'; y nos dicen (433) que este punto recorre una elipse cuyo centro es el punto O, y esta elipse gira alrededor del punto O, en el sentido Este, Sur, Oeste, Norte, con una velocidad angular ω sen φ, en el hemisferio Norte, en que $\varphi > 0$, y en sentido contrario en el hemisferio Sur, para el cual $\varphi < 0$; lo mismo que en el caso en que la constante $C = 0$.

Por la teoría que acabamos de exponer, se explica la demostracion experimental de la rotacion de la Tierra, que ideó M. Foucault. El experimento, que constituye esta demostracion, se ha repetido muchas veces en diferentes lugares de la Tierra, y en todas el resultado ha sido conforme á la teoría que acabamos de exponer, el cual puede considerarse como la prueba más concluyente del sistema del Mundo de Copérnico.

Influencia del movimiento anual de la Tierra en el equilibrio y movimiento de los cuerpos situados en su superficie.

456. Hasta aquí hemos estudiado el equilibrio y movimiento de los cuerpos en la superficie de la Tierra, suponiendo á ésta animada solamente de su movimiento diurno, vamos á ver ahora qué influencia tiene, sobre los resultados obtenidos, el movimiento anual de la Tierra alrededor del Sol.

El movimiento de la Tierra en el espacio se compone de un movimiento de rotacion alrededor del eje polar, y de un movimiento de traslacion igual al de su centro; cuando descomponemos el movimiento total de la Tierra en una rotacion alrededor de un eje, que pasa por un punto cualquiera del globo, y una traslacion igual al movimiento de este punto, la rotacion componente es la misma que si prescindimos del movimiento del centro de la Tierra: luego la fuerza centrífuga compuesta de un punto material, cuyo movimiento aparente en la superficie de la Tierra, queremos estudiar, tendrá la misma intensidad, la misma direccion y el mismo sentido, ya prescindamos del movimiento anual del centro de la Tierra alrededor del Sol, ya lo tengamos en cuenta.

La fuerza de reaccion, correspondiente al movimiento de arrastre del punto móvil, tiene un valor diferente del que le hemos asignado, suponiendo que la Tierra sólo estaba animada de su movimiento diurno: esta fuerza, en el caso de tenerse en cuenta los movimientos de rotacion y traslacion de la Tierra, es la resultante de la fuerza centrífuga debida á la rotacion de la Tierra y de una fuerza igual y contraria á la que daria al móvil, supuesto libre, precisamente un movimiento igual al del centro de la Tierra. Pero al mismo tiempo que se tiene en cuenta el movimiento de esta alrededor de el Sol, que es debido á la atraccion de este astro sobre el globo terrestre, debemos tener en cuenta la atraccion del Sol sobre el cuerpo cuyo equilibrio ó movimiento con respecto á la Tierra, queremos estudiar.

Así que, para tener en cuenta el movimiento anual del centro de la Tierra alrededor del Sol, debemos agregar dos fuerzas á las que ántes hemos considerado, cuando sólo atribuimos á la Tierra su movimiento de rotacion, que son: una fuerza real, que es la atraccion del Sol sobre el móvil de que nos ocupamos, y una fuerza aparente igual y contraria á la que sería capaz de darle una aceleracion de la misma magnitud, direccion y sentido que la que la atraccion del Sol comunica al centro de la Tierra. Estas dos fuerzas, que debemos tener en cuenta en el estudio del equilibrio y movimiento aparentes de un cuerpo sobre la Tierra, son casi iguales y contrarias una á otra, á causa de la pequeñez del radio de la tierra, con relacion á la distancia de la Tierra al Sol; su resultante, que es sumamente pequeña, cambia de magnitud y direccion en las diferentes horas del dia, á consecuencia del cambio de posicion del cuerpo con respecto al Sol, y debemos considerarla como una fuerza perturbadora, que determina una variacion periódica en la magnitud del peso de los cuerpos y en la direccion de la vertical. Estas variaciones son tan pequeñas, que no se pueden observar directamente; mas el cambio de direccion de la vertical, se hace sensible en la superficie del Occéano, produciendo las oscilaciones periódicas, conocidas con el nombre de *mareas*.

Mareas.

457. Para estudiar las mareas debe tenerse en cuenta la presencia de la Luna, que tambien contribuye por su parte á la traslacion de la Tierra.

La resultante de la atraccion de la Luna sobre el cuerpo, y de una fuerza capaz de darle una aceleracion igual y contraria á la que la Luna comunica al centro de la Tierra, constituye una nueva fuerza perturbadora que se combina con la precedente para producir el cambio periódico en la direccion de la vertical, que da orígen al fenómeno de las mareas. Esta última fuerza perturbadora es mayor que la primera, porque la Luna está mucho más cerca de la Tierra que el Sol; por esta razon el fenómeno de las mareas se calcula con arreglo al movimiento de la Luna, que influye en él más que el del Sol.

La influencia del movimiento anual de la Tierra alrededor del Sol, sólo se manifiesta en el equilibrio y movimiento de los cuerpos sobre la Tierra, por una variacion casi insensible en el peso de los cuerpos y en la direccion de la vertical de cada lugar; de modo, que los resultados que hemos obtenido prescindiendo de estos movimientos, apénas son modificados cuando la tenemos en cuenta, como vamos á ver.

458. Calculemos, segun estos principios, detalladamente el efecto del movimiento de traslacion del centro de la Tierra en el equilibrio y movimiento de los cuerpos pesados colocados en su superficie.

El movimiento del centro de la Tierra es debido á la atraccion de los demas cuerpos del sistema solar, y principalmente á la del Sol y á la de la Luna, cuyas acciones son preponderantes; la del primero á causa de su gran masa, y la de la segunda por su proximidad á la Tierra.

Prescindiremos de los otros cuerpos, porque su masa es pequeña y están muy lejanos de la Tierra.

Sean T, L, S (fig. 211), los centros de la Tierra, de la Luna y del Sol; m, m' y M las masas de estos cuerpos; y A un punto cualquiera de la Tierra.

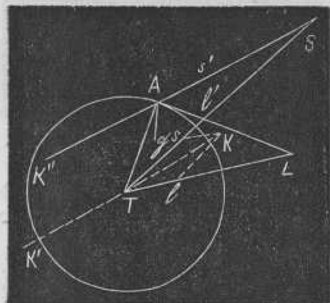


Fig. 211.

La atraccion del Sol sobre la Tierra es $f\frac{Mm}{\overline{TS}^2}$ y está dirigida segun la TS; la aceleracion del centro T del globo terrestre es $Ts = \frac{fM}{\overline{TS}^2}$; del mismo modo, la aceleracion correspondiente á la atraccion de la Luna estará representada por una recta $Tl = \frac{fm'}{\overline{TL}^2}$.

La resultante de las aceleraciones Ts y Tl es la aceleracion total TK del centro de la Tierra, tirando en sentido contrario la recta $TK' = TK$, tendremos en magnitud y direccion la aceleracion que debe entrar en la expresion de la fuerza de reaccion, debida al movimiento de arrastre.

El punto material A está solicitado en su movimiento relativo por las fuerzas siguientes: 1.°, su propio peso, que comprende la influencia de la rotacion del globo; la aceleracion correspondiente la representaremos en direccion y magnitud por la recta Ag: 2.°, la atraccion del Sol que da la aceleracion $As' = \frac{fM}{\overline{AS}}$: 3.°, la atraccion de la Luna que produce la aceleracion $Al' = \frac{f'm}{\overline{AL}^2}$; y 4.°, la fuerza de reaccion debida á la traslacion de la Tierra; la aceleracion correspondiente está representada en la figura por una recta AK″ igual y paralela á TK′.

Estando representada la gravedad por la recta A*g*, hecha abstraccion de traslacion terrestre, la influencia de esta traslacion estará dada por la resultante de las tres aceleraciones A*l*′, A*s*′ y AK″. Vamos á ver que la resultante de estas tres fuerzas es casi nula. En efecto, el radio terrestre TA es muy pequeño con respecto á las distancias TL y TS, de suerte, que se puede sin gran error, considerar á AS como igual y paralela á TS, y AL como igual y paralela TL. Entónces, la figura formada por las tres rectas A*s*′, A*l*′, AK″, no será otra cosa que la figura formada por las rectas T*s*, T*l*, TK′, trasportada paralelamente á sí misma.

La resultante de las tres aceleraciones, siendo rigurosamente nula alrededor del punto T, sucederá lo mismo alrededor del punto A, y las tres fuerzas correspondientes se destruirán sobre este punto. Si no es así rigurosamente, la resultante está muy cerca de ser nula; es en efecto tan pequeña, que la observacion directa no llega á ponerla en evidencia. Ella se revela, como hemos dicho, por un gran fenómeno natural, las mareas del Occéano que son debidas á las desviaciones periódicas de la vertical causadas por la atraccion solar y lunar y por el movimiento de traslacion de la Tierra.

459. En vez de componer á la vez, como acabamos de hacer, la accion del Sol y de la Luna, calculemos separadamente estas dos influencias, limitándonos en este cálculo á una aproximacion. Busquemos en particular la accion del Sol.

Tenemos la aceleracion $Ts = \frac{fM}{TS^2}$, del centro de la

Tierra (fig. 212), y la aceleracion $As' = \frac{fM}{\overline{AS}^2}$; esta última debemos componerla con una aceleracion As'', igual y paralela, mas de sentido contrario á Ts. El ángulo TSA es muy pequeño, y las rectas As' y As'' son próximamente prolongacion una de la otra, y la resultante de estas dos es casi igual á su diferencia $As' - As''$, ó á

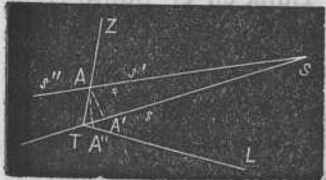


Fig. 212.

$$fM\left(\frac{1}{\overline{AS}^2} - \frac{1}{\overline{TS}^2}\right),$$

y tiene una direccion sensiblemente paralela á TS. Pero AS es próximamente igual á su proyeccion A′S sobre ST. Reemplacemos $\frac{1}{\overline{AS}^2}$ por $\frac{1}{\overline{A'S}^2}$, resultará

$$\frac{1}{\overline{A'S}^2} - \frac{1}{\overline{TS}^2} = \frac{TS^2 - A'S^2}{\overline{A'S}^2 \times \overline{TS}^2} = \frac{(TS - A'S)(TS + A'S)}{\overline{A'S}^2 \times \overline{TS}^2}$$

$$= \frac{TA' \times (TS + A'S)}{\overline{A'S}^2 \times \overline{TS}^2}.$$

Esta última expresion se reduce por aproximacion á

$$\frac{2TA'}{\overline{TS}^3}.$$

La aceleracion que debemos componer con la gravedad, para tener en cuenta la que nace de la accion del Sol, y la debida al movimiento de traslacion de la Tierra, debido á esta accion, es

$$2f\frac{M \times TA'}{\overline{TS}^3}.$$

Del mismo modo, para la accion de la Luna, tendremos

$$2f\frac{m' \times TA''}{\overline{TL}^3}.$$

Las cantidades TA′ y TA″ son las proyecciones de TA sobre las rectas que unen el centro de la Tierra con los del

Sol y la Luna; la relacion de estas cantidades al radio terrestre, depende de los ángulos ZTS y ZTL, ó sean las distancias zenitales del Sol y la Luna en el punto A, ó los complementos de las alturas del Sol y de la Luna sobre el horizonte del mismo punto.

Se ve, pues, que á igualdad de alturas sobre el horizonte, las influencias del Sol y de la Luna sobre la gravedad son proporcionales á la masa del cuerpo atrayente, é inversamente proporcionales al cubo de su distancia á la Tierra.

La relacion de las dos influencias, siempre á igualdad de alturas sobre el horizonte, es

$$\frac{M}{m'}\times\left(\frac{TL}{TS}\right)^3.$$

Siendo próximamente

$$M=m\times 355000;\quad m'=\frac{m}{88};\quad TL=60r;\quad TS=24000r;$$

resulta

$$\frac{M}{m'}\times\left(\frac{TL}{TS}\right)^3=355000\times 88\times\left(\frac{60}{24000}\right)^3=\frac{355000\times 88}{(400)^3}$$
$$=0,488.$$

La accion de la Luna es próximamente doble que la accion del Sol; lo cual confirma la experiencia. Y por eso, como hemos dicho, las mareas se calculan teniendo en cuenta con preferencia la accion de la Luna.

460. Resumiendo todos estos resultados, se deduce, que siendo muy pequeña la fuerza de reaccion correspondiente al movimiento de arrastre de un cuerpo colocado en la superficie de la Tierra, el peso de un cuerpo colocado sucesivamente á diferentes alturas sobre la superficie de ésta, varía sensiblemente en razon inversa del cuadrado de su distancia al centro de la Tierra, porque la fuerza de reaccion es muy pequeña con respecto á la atraccion que sobre él ejerce el globo terrestre: el peso del cuerpo difiere tambien muy poco de esta atraccion,

próximamente dirigida al centro de la Tierra, y varía en razon inversa del cuadrado de la distancia del cuerpo á este centro.

Cuando desciende el cuerpo de una gran altura, la fuerza centrífuga compuesta, lo desvía un poco hácia el Este de la vertical, como vimos en el párrafo 449, pero esta desviacion es inapreciable, á no ser que la velocidad relativa del móvil ó la masa, sean sumamente grandes. Si la altura es pequeña, podemos despreciar no sólo la influencia de la fuerza centrífuga compuesta, sino tambien la variacion que experimenta la magnitud y direccion del peso del cuerpo, á medida que cambia de posicion sobre la superficie de la Tierra; de suerte, que en este caso el movimiento aparente de un cuerpo pesado, se efectúa como un movimiento absoluto, producido por una fuerza de intensidad y direccion constantes.

LECCION XXXVII.

Fuerzas centrales y movimiento de los planetas. Aplicacion del teorema de las áreas.—Expresion de la velocidad en coordenadas polares.—Fuerza aceleratriz y sus componentes.—Leyes de Keplero.—Consecuencias de las leyes de Keplero.

Fuerzas centrales y movimiento de los planetas. Aplicacion del teorema de las áreas.

461. En las dos lecciones anteriores hemos expuesto las teorías del equilibrio y movimiento relativos, y el modo de considerarlos como equilibrio y movimiento absolutos, por medio de las fuerzas aparentes del movimiento relativo. Ahora vamos á estudiar el movimiento de los planetas, que será para nosotros, un movimiento relativo, puesto que la Tierra que habitamos está en movimiento; estudiaremos primero este movmiento como si fuera absoluto, y luégo veremos qué modificaciones debemos introducir en los resultados obtenidos, cuando se tengan en cuenta las fuerzas aparentes del movimiento relativo.

Las fuerzas que solicitan á los planetas en sus movimientos, están dirigidas al centro del Sol, y son por lo tanto, de las llamadas centrales, que vamos á estudiar préviamente.

Se da el nombre de fuerzas centrales á las fuerzas cuyas direcciones pasan constantemente por centros fijos. De esta clase son las fuerzas que retienen á los planetas en sus órbitas, que como acabamos de indicar, todas pasan por el cèntro del Sol; y por eso el estudio de estas fuerzas servirá como de preliminar al del movimiento de los planetas.

462. El teorema de las áreas (367), se verifica para todo movimiento producido por las fuerzas centrales, pues que todas estas fuerzas pasan por puntos fijos. Tambien se verifica el teorema de las áreas, para las proyecciones del movimiento del punto móvil, sobre los tres planos coordenados.

Sea M (x, y, z), un punto material móvil, solicitado por una fuerza que pasa constantemente por el centro C (fig. 213). El área del sector MCN, descrito por el radio vector CM en el tiempo t, es proporcional á este tiempo t; luego el área de su proyeccion M'CN', tambien será proporcional al tiempo t empleado por CM', proyeccion del radio vector, en describirla. Esta consecuencia del teorema de las áreas, puede demostrarse directamente.

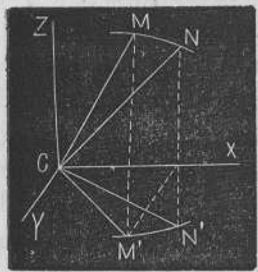


Fig. 213.

Llamemos F á la fuerza que solicita al móvil, dirigida segun la CM, las ecuaciones del movimiento del punto M, cuya masa representaremos por m, son, llamando u á la CM,

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F\frac{x}{u},\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=F\frac{y}{u},\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=F\frac{z}{u},$$

de las cuales resulta

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{x}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{y}=\frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{z},$$

ó $$\frac{xd^2y-yd^2x}{dt^2}=0,\quad \frac{zd^2x-xd^2z}{dt^2}=0,\quad \frac{yd^2z-zd^2y}{dt^2}=0;$$

cualquiera de estas ecuaciones es consecuencia de las otras dos; integrándolas y llamando c, c' y c'' á las constantes de esta integracion, tendremos

1) $xdy-ydx=cdt$, $zdx-xdz=c'dt$, $ydz-zdy=c''dt$.

Estas constantes se determinan por medio de los valores iniciales de x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; lo cual exije el conocimiento de la posicion inicial del móvil y la direccion y magnitud de la velocidad inicial.

Multiplicando las ecuaciones anteriores, respectivamente por z, y, x, y sumándolas, se obtiene la ecuacion

$$0=cz+c'y+c''x;$$

que expresa que la trayectoria es una curva plana, cuyo plano pasa por el orígen C de las coordenadas; y confirma lo que digimos (354), asegurando, *à priori*, que el movimiento tiene lugar en un plano, determinado por el punto fijo y la direccion de la velocidad inicial, siempre que el móvil está solicitado por una fuerza que pasa constantemente por un punto fijo.

El primer miembro de la primera de las ecuaciones (1) representa, en coordenadas rectangulares, el duplo de la diferencial del área del sector M'CN', descrito por la proyeccion CM' del rádio vector CM sobre el plano XY, durante el tiempo dt; llamando λ al área M'CN', tendremos

$$d\lambda=\tfrac{1}{2}(xdy-ydx)=\tfrac{1}{2}cdt.$$

En coordenadas polares, siendo $CM'=r$, y $M'CX=\theta$ será

$$d\lambda=\tfrac{1}{2}r^2d\theta=\tfrac{1}{2}cdt,$$

é integrando, teniendo en cuenta que para $t=0$, $\lambda=0$; y por lo mismo la constante de la integracion es cero, tendremos

$$\lambda=\tfrac{1}{2}ct.$$

Esta ecuacion nos dice, *que el área del sector engendrado por el movimiento de la proyeccion del radio vector sobre un plano cualquiera es proporcional al tiempo empleado en describirla.* Haciendo $t=1$, resulta $c=2\lambda$; es decir, que la constante c, es el duplo del sector descrito por la proyeccion del radio vector sobre el plano XY en la unidad de tiempo. En los otros dos planos coordenados obtendríamos resultados análogos; y llamando λ' y λ'' á las áreas de los sectores descritos por la proyeccion del radio vector sobre los planos ZX y ZY, tendremos

$$\lambda=\tfrac{1}{2}ct,\ \lambda'=\tfrac{1}{2}c't,\ \lambda''=\tfrac{1}{2}c''t.$$

Ecuaciones que demuestran, que el teorema de las áreas se verifica para las proyecciones del movimiento sobre los tres planos coordenados, como indicamos en el párrafo 367 ántes citado.

Expresion de la velocidad en coordenadas polares.

463. En el plano de la curva tomemos el centro fijo C (fig. 214), por el cual pasa constantemente la direccion de la fuerza motriz, por polo, y por eje polar la recta CX; llamemos r y θ, á las coordenadas polares del punto móvil M, y tendremos

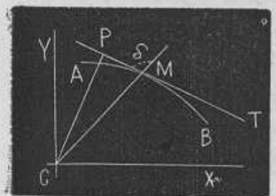


Fig. 214.

$$x=r\cos\theta,\quad \frac{dx}{dt}=\frac{dr}{dt}\cos\theta-r\operatorname{sen}\theta\frac{d\theta}{dt},$$

$$y=r\operatorname{sen}\theta,\quad \frac{dy}{dt}=\frac{dr}{dt}\operatorname{sen}\theta+r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}:$$

sabemos, que $\quad v^2=\frac{ds^2}{dt^2}=\frac{dx^2+dy^2}{dt^2},$

luego sustituyendo y reduciendo, será

$$(1)\quad v^2=\frac{dr^2+r^2d\theta^2}{dt^2}.$$

Si en esta ecuacion eliminamos dt, obtendremos una expresion de la velocidad, que no tendrá t, ni sus diferenciales. Para esto tenemos, $r^2d\theta=cdt$, que da $dt^2=\frac{r^4d\theta^2}{c^2}$ y sustituyendo, será

$$(2)\quad v^2=c^2\frac{dr^2+r^2d\theta^2}{r^4d\theta^2}=c^2\left[\frac{1}{r^2}+\frac{\left(\frac{dr}{r^2}\right)^2}{d\theta^2}\right]$$

$$=c^2\left[\frac{1}{r^2}+\frac{\left(d\frac{1}{r}\right)^2}{d\theta^2}\right];$$

de modo, que si conocemos la ecuacion polar de la trayectoria AB, deduciremos de ella $\frac{1}{r^2}$ y $\frac{\left(d\frac{1}{r}\right)^2}{d\theta^2}$, los sustituiremos y obtendremos la velocidad en un punto cualquiera de la curva.

464. Es conveniente en algunos casos, conocer las componentes de la velocidad en un punto M de la curva, segun el radio vector CM, y segun una perpendicular á esta recta: sea para esto δ el ángulo formado por el radio vector con la tangente MT á la trayectoria, estas componentes serán $v\cos\delta$ y $v\,\text{sen}\,\delta$. Pero tenemos

$$\cos\delta=\frac{dr}{ds},\ \text{sen}\,\delta=\sqrt{1-\cos^2\delta}=\sqrt{1-\frac{dr^2}{ds^2}}=\sqrt{\frac{ds^2-dr^2}{ds^2}}$$
$$=\sqrt{\frac{r^2\,d\theta^2}{ds^2}}=\frac{rd\theta}{ds},\ v=\frac{ds}{dt};$$

por lo tanto,

$$(3)\quad v\cos\delta=\frac{dr}{dt},\qquad v\,\text{sen}\,\delta=\frac{rd\theta}{dt}.$$

Si en estas ecuaciones ponemos por dt su valor $\frac{r^2d\theta}{c}$, tendremos las expresiones de estas componentes independientemente del tiempo, que son

$$(4)\qquad v\cos\delta=\frac{cdr}{r^2d\theta}=-\frac{cd\frac{1}{r}}{d\theta},\quad v\,\text{sen}\,\delta=\frac{cr\,d\theta}{r^2\,d\theta}=\frac{c}{r}.$$

Si llamamos p, á la perpendicular CP, á la tangente MT, será $CP=p=r\,\text{sen}\,\delta$, y resultará

$$(5)\qquad v=\frac{c}{p};$$

que nos dice, que la velocidad en un punto de la curva está en razon inversa de la perpendicular bajada del punto C sobre la tangente á la trayectoria en el punto considerado.

Fuerza aceleratriz y sus componentes.

465. Sea R la fuerza aceleratriz que actúa segun la MC y supongamos la atractiva; sus componentes paralelas á los ejes serán $-R\frac{x}{r}$, y $-R\frac{y}{r}$, y tendremos las siguientes ecuaciones del movimiento,

$$(6) \quad \frac{d^2x}{dt}=-R\frac{x}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=-R\frac{y}{r}.$$

Eliminando R entre estas dos ecuaciones, resultará

$$\frac{xd^2y-yd^2x}{dt^2}=0,$$

que integrada dará

$$xdy-ydx=cdt, \text{ ó } r^2d\theta=cdt;$$

resultado igual al que obtuvimos en el párrafo 462.

Multiplicando las (6) por $2dx$ y $2dy$, y sumando, tendremos

$$\frac{2dxd^2x+2dyd^2y}{dt^2}=-2R\frac{xdx+ydy}{r}.$$

Como $v^2=\frac{ds^2}{dt^2}=\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}$, $r^2=x^2+y^2$, resultará diferenciando

$$dv^2=\frac{2dxd^2x+2dydy^2}{dt^2}, \quad rdr=xdx+ydy,$$

que reducen la anterior á

$$(7) \quad dv^2=-2Rdr.$$

Diferenciando la ecuacion (2), resulta

$$dv^2=c^2\left[-\frac{2dr}{r^3}-\frac{2dr}{r^2}\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right];$$

y sustituyendo en la (7), tendremos

$$(8) \quad R=c^2\left[\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right]=\frac{c^2}{r^2}\left[\frac{1}{r}+\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right].$$

Expresion que nos da la fuerza aceleratriz, en funcion de las coordenadas polares del punto de la trayectoria en que se encuentra el móvil; y que nos dará la trayectoria cuando se conozca la ley de la variacion de la fuerza R.

Leyes de Keplero.

466. Keplero á principios del siglo XVII, comparando las observaciones del planeta Marte, que le comunicó Ticho-Brahe, descubrió las tres leyes del movimiento de los planetas que llevan su nombre.

Estas leyes se enuncian en los siguientes términos:

Primera ley. Las trayectorias de todos los planetas son curvas planas, y en cada una de ellos, el área descrita por el radio vector que une el centro del Sol con el del planeta, es proporcional al tiempo empleado en describirla.

Segunda ley. Los planetas describen alrededor del Sol elipses, que tienen este astro en uno de sus focos.

Tercera ley. Los cuadrados de los tiempos empleados por los diferentes planetas, para cumplir una de sus revoluciones, son entre sí como los cubos de los ejes mayores de sus órbitas.

Consecuencias de las leyes de Keplero.

467. De la primera de estas leyes y del recíproco del teorema de las áreas (367), se deduce inmediatamente, que la fuerza motriz que solicita á un planeta, pasa constantemente por el centro del Sol. Como por la segunda ley, la trayectoria es una elipse, que vuelve su concavidad hácia el Sol, resulta tambien que esta fuerza motriz es atractiva; puesto que desvía en cada instante al planeta, de la tangente á esta curva, y tiende á aproximarlo al Sol.

468. Vamos á deducir tambien de la segunda ley,

cómo varía la intensidad de esta fuerza con la distancia del planeta al Sol. Sea AMA′ (fig. 215) la trayectoria, S el foco de la elipse en que está situado el centro del Sol,

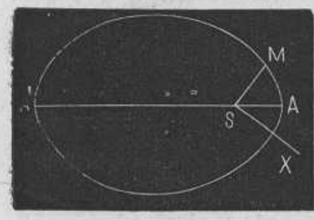


Fig. 215.

$AA'=2a$, el eje mayor de la elipse, SX el eje polar, $ASX=\omega$, M el punto donde se encuentra el centro del planeta, cuyas coordenadas polares son, $SM=r$ y $MSX=\theta$. Llamando $e=\frac{c}{a}$ á la excentricidad, ó sea á la relacion de la distancia focal al eje mayor, la ecuacion polar de la elipse, es

$$(1) \quad r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta-\omega)};$$

de ella se deduce

$$\frac{1}{r}=\frac{1+e\cos(\theta-\omega)}{a(1-e^2)}, \quad \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}=-\frac{e \operatorname{sen}(\theta-\omega)}{a(1-e^2)};$$

sustituyendo estos valores en la fórmula (2), del párrafo 463, tendremos

$$v^2=c^2\left[\frac{1+2e\cos(\theta-\omega)+e^2}{a^2(1-e)^2}\right]=c^2\left[\frac{2-1+2e\cos(\theta-\omega)+e^2}{a^2(1-e^2)}\right]$$

$$=c^2\left[\frac{2(1+e\cos(\theta-\omega)-(1-e^2)}{a^2(1-e^2)^2}\right];$$

poniendo $\frac{a(1-e^2)}{r}$ por $1+e\cos(\theta-\omega)$, y dividiendo por $1-e^2$, será

$$(2) \quad v^2=\frac{c^2}{a^2(1-e^2)}\left(\frac{2a}{r}-1\right), \quad \text{y} \quad dv^2=-\frac{2c^2}{a(1-e^2)}\frac{dr}{r^2}.$$

Sustituyendo este valor de dv^2 en la ecuacion

$$dv^2=-2Rdr,$$

tendremos

$$-2Rdr=-\frac{2c^2}{a(1-e^2)}\frac{dr}{r^2}, \quad \text{ó} \quad R=\frac{c^2}{a(1-e^2)}\frac{1}{r^2},$$

y haciendo $\mu = \frac{c^2}{a(1-e^2)}$,

resulta por fin (3) $R = \frac{\mu}{r^2}$.

Esta ecuacion nos dice, que la fuerza motriz R varía en razon inversa del cuadrado de la distancia del centro de gravedad del planeta al del Sol. Ademas, como μ y r^2 son positivas, R tambien es positiva; es decir, que la fuerza motriz es atractiva como habíamos previsto.

Tambien podemos deducir el valor de R de la fórmula (8) párrafo 465, sustituyendo en ella los valores de

$$\frac{1}{r} = \frac{1+e\cos(\theta-\omega)}{a(1-e^2)}, \text{ y } \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} = -\frac{e\cos(\theta-\omega)}{a(1-e^2)},$$

y será

$$R = \frac{c^2}{r^2}\left[\frac{1+e\cos(\theta-\omega)-e\cos(\theta-\omega)}{a(1-e^2)}\right] = \frac{c^2}{a(1-e^2)}\frac{1}{r^2} = \frac{\mu}{r^2}$$

469. Haciendo en esta ecuacion $r=1$, resulta $R=\mu$; y vamos á demostrar que esta cantidad μ, que representa la aceleracion referida á la unidad de distancia, es constante para todos los planetas. Para ello sabemos que la constante c representa, para una órbita cualquiera, el duplo del área descrita por el radio vector en la unidad de tiempo; y si llamamos T á la duracion de una revolucion completa del planeta que consideramos, tendremos, siendo b el semi-eje menor de la elipse,

$$\tfrac{1}{2}cT = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2},$$

y

$$c = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T}, \quad c^2 = \frac{4\pi^2 a^4(1-e^2)}{T^2};$$

y por fin

$$\mu = \frac{c^2}{a(1-e^2)} = 4\pi^2\frac{a^3}{T^2},$$

y como la fraccion $\frac{a^3}{T^2}$, es la misma para todos los planetas, segun la tercera ley de Keplero, μ es constante para todos ellos.

LECCION XXXVIII.

Movimiento de un punto atraido por una fuerza dirigida á un centro fijo y que varía en razon inversa del cuadrado de la distancia del móvil al centro fijo.—Ecuacion de la trayectoria.—Caso en que esta curva es una elipse.—Caso de una órbita circular ó casi circular. Orbita parabólica.

Movimiento de un punto atraido por una fuerza dirigida á un centro fijo y que varía en razon inversa del cuadrado de la distancia del móvil al centro fijo.

470. En la leccion anterior hemos visto cómo de la segunda de las leyes de Keplero, se deduce, que la fuerza que solicita á los planetas en sus movimientos alrededor del Sol, varía en razon inversa del cuadrado de la distancia del centro del planeta al centro del Sol. Vamos á probar ahora en general, que un punto material solicitado por una fuerza dirigida á un punto fijo, y que varía en razon inversa del cuadrado de la distancia del móvil al punto fijo, describe una curva de segundo grado; es decir, una elipse, una parábola ó una hipórbola; y á examinar las circunstancias del movimiento del punto en cada una de estas curvas.

Como la fuerza que solicita al móvil está siempre dirigida á un punto fijo, la trayectoria será plana; supongámosla referida á coordenadas polares en su plano, y sea CX el eje polar, C el punto fijo, que tomaremos por polo, y M el punto móvil (fig. 214), en el cual supondremos concentrada toda la masa del planeta ó cuerpo que se mueve; y llamemos r y θ á las coordenadas polares del punto M; por el teorema de las áreas, tenemos

$$r^2 d\theta = c dt,$$

llamando v á la velocidad del móvil y δ al ángulo que forma el radio vector con la tangente á la trayectoria, será

$$(1) \quad c = \frac{r^2 d\theta}{dt} = r\frac{r d\theta}{dt} = v . r \operatorname{sen} \delta.$$

Expresion que nos dice que la constante c, que representa el duplo del área del sector engendrado por el radio vector en la unidad de tiempo, es tambien igual al producto de la velocidad del móvil por la perpendicular bajada del centro fijo sobre la tangente á la trayectoria en el punto correspondiente al valor de r.

Llamemos R á la fuerza aceleratriz; como varía en razon inversa del cuadrado de la distancia, será $R = \frac{\mu}{r^2}$, siendo μ la fuerza aceleratriz á la unidad de distancia, y sustituyendo su valor en la expresion

$$dv^2 = -2R\, dr, \text{ será, } dv^2 = -\frac{2\mu dr}{r^2};$$

integrándola y llamando b á la constante arbitraria, resultará

$$(2) \quad v^2 = \frac{2\mu}{r} - b.$$

Tambien tenemos

$$v^2 = c^2\left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right];$$

de estas dos se deduce la ecuacion diferencial de la trayectoria, que es

$$(3) \quad c^2\left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right] = \frac{2\mu}{r} - b.$$

Ecuacion de la trayectoria.

471. Cambiemos de variable para integrar esta ecuacion, poniendo $\frac{1}{r}=z$, y despejando $d\theta$, será

$$d\theta=\frac{\mp c dz}{\sqrt{-b+2\mu z-c^2z^2}}.$$

Si r crece con θ, z disminuye y debemos tomar el signo — del numerador; y el signo + si r disminuye creciendo θ. Suponiendo el primer caso

$$d\theta=\frac{-cdz}{\sqrt{-b+2\mu z-c^2z^2}}=\frac{-cd^2z}{\sqrt{\mu^2-bc^2-(c^2z-\mu)^2}},$$

ó $$d\theta=\frac{-c^2dz}{\sqrt{\mu^2-bc^2}\sqrt{1-\left(\frac{c^2z-\mu}{\sqrt{\mu^2-bc^2}}\right)^2}}.$$

Como $\frac{d\theta}{dz}$ sería siempre imaginario, si $\sqrt{\mu^2-bc^2}$ fuera imaginario, tendremos que $\mu^2-bc^2>0$; y haciendo

$$\frac{c^2z-\mu}{\sqrt{\mu^2-bc^2}}=q, \quad dq=\frac{c^2dz}{\sqrt{\mu^2-bc^2}};$$

la ecuacion anterior se convierte en la siguiente

$$d\theta=\frac{-dq}{\sqrt{1-q^2}};$$

que puede integrarse inmediatamente; y llamando ω á un ángulo constante, tendremos

$$\theta=\omega+\text{arco}\cos q,$$

ó lo que es lo mismo,

$$\cos(\omega-\theta)=\frac{c^2z-\mu}{\sqrt{\mu^2-bc^2}}. \quad (4)$$

Esta fórmula obtenida para el caso de dz negativo, es aplicable al caso en que sea positivo, ó sea al caso en que creciendo θ, r disminuye; en este caso $\frac{dq}{d\theta}$ y $\frac{dz}{dt}$ son siempre del mismo signo.

Mas de la ecuacion

$$\cos(\theta-\omega)=q, \text{ resulta } \frac{dq}{d\theta}=-\text{sen}(\theta-\omega);$$

que nos dice, que en la fórmula $\theta-\omega=\text{arco}\cos q$, $\frac{dq}{d\theta}$, y por consiguiente, $\frac{dz}{d\theta}$, cambian de signo y se anulan, cuando $\theta-\omega=n\pi$, siendo n un número entero cualquiera; lo que corresponde á las posiciones del móvil, para las cuales, z es un máximo ó un mínimo; y entónces r, es respectivamente, un mínimo ó un máximo.

Poniendo en vez de z su valor $\frac{1}{r}$ en la ecuacion (4), y despejando r, tendremos la ecuacion de la trayectoria, que es

$$(5) \qquad r=\frac{\frac{c^2}{\mu}}{1+\sqrt{1-\frac{bc^2}{\mu^2}}\cos(\theta-\omega)}.$$

Vemos, pues, que esta es una curva de segundo grado, referida á un foco como polo, y á un eje polar, que forma con el eje de simetría de la curva, que pasa por este foco, un ángulo ω. Comparándola con la ecuacion polar de las tres curvas de segundo grado, referida al mismo foco y eje polar,

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-\omega)},$$

la cual representa una elipse, si $e<1$, una parábola si $e=1$, y una hipérbola si $e>1$. Por lo tanto, observando que $e=\sqrt{1-\frac{bc^2}{\mu}}$, y que $b=\frac{2\mu^2}{r}-v^2$, vemos, que la curva será

elipse. . . . . . si $v^2<\frac{2\mu}{r}$,

parábola. . . . . si $v^2=\frac{2\mu}{r}$,

hipérbola. . . . si $v^2>\frac{2\mu}{r}$.

De modo que la naturaleza de la curva depende únicamente de la magnitud de la velocidad, cuando principia el movimiento, y no de su direccion; de suerte, que diferentes móviles, lanzados sucesivamente del mismo punto del espacio, con velocidades iguales y direcciones diferentes, recorrerán todos curvas de la misma especie; es decir, todos elipses, todos parábolas ó todos hipérbolas.

Caso en que la curva es una elipse.

472. Siendo $2a$ el eje mayor de la elipse y e la excentricidad, su ecuacion polar es

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta-\omega)};$$

comparándola con la ecuacion (5), resultan las fórmulas

$$e=\sqrt{1-\frac{bc^2}{\mu^2}},\quad a=\frac{\mu}{b};$$

que nos dan los elementos de la elipse, en funcion de los datos del problema.

Para conocer las leyes del movimiento, tenemos que determinar la velocidad v y las coordenadas polares θ y r, en funcion del tiempo, y con ellas tendremos la posicion y la velocidad del móvil en una época dada. Tenemos (2), núm. 470.

$$v^2=\frac{2\mu}{r}-b,$$

y como tambien

$$v^2=\frac{dr^2+r^2d\theta^2}{dt^2},$$

tendremos

$$\frac{dr^2+r^2d\theta^2}{dt^2}=\frac{2\mu}{r}-b.$$

Eliminando $d\theta$ por medio de la ecuacion $r^2d\theta=cdt$, y despejando dt, será

$$dt = \frac{\mp rdr}{\sqrt{-br^2+2\mu r-c^2}};$$

tomaremos el signo + del numerador, suponiendo que r crece con t, y poniendo en vez de b su valor $\frac{\mu}{a}$, y reemplazando c^2 por $\mu a\,(1-e^2)$, será

$$(6)\qquad dt = \frac{rdr}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}\sqrt{a^2c^2-(a-r)^2}}.$$

Para verificar esta integracion, cambiaremos de variable; y para ello sea A'MA (fig. 216) la elipse recorrida por el móvil, el extremo A del eje mayor más próximo al Sol, ó sea al punto S, donde el móvil está más cerca del polo situado en el foco S de la elipse, se llama *perihelio* del planeta; y el extremo A' más lejano de S ó del Sol, se llama *afhelio*. Y como el radio vector r, varía desde $SA=a\,(1-e)$, hasta $SA'=a\,(1+e)$, podemos poner

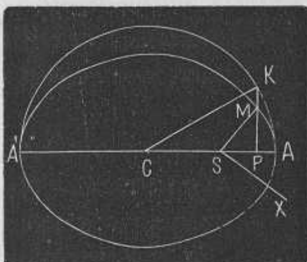


Fig. 216.

(7) $r=a(1-e\cos u)$, de donde $dr=ae\,\mathrm{sen}\,u du$.

Sustituyendo estos valores en la ecuacion (6), se reduce á

$$\frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}dt=(1-e\cos u)\,du,\quad \text{ó}\quad ndt=(1-e\cos u)du;\ (8)$$

haciendo por abreviar $n=\frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}$, é integrando, será

$$(9)\qquad nt=u-e\,\mathrm{sen}\,u.$$

La constante de esta integracion es cero, si se cuenta el tiempo desde el momento en que el planeta está en su perihelio, porque entónces $r=a(1-e)$ y por lo tanto $\cos u=1$, $u=0$, al mismo tiempo que $t=0$.

473. Para construir el ángulo auxiliar u, sobre A'A como diámetro, describamos una circunferencia; sea M la posicion actual del móvil y C el centro de la elipse, prolongando la ordenada PM hasta el punto K, en que encuentra á la circunferencia, será el ángulo $KCA=u$. Porque

$$r=a-\frac{cx}{a}=a-e.CP=a-e.a\cos KCA$$
$$=a(1-e\cos KCA)$$

comparando este valor con el de r de la ecuacion (7), resulta $\cos KCA=\cos u$, y $KCA=u$.

El ángulo u se llama *anomalía excéntrica* del planeta, y el ángulo $MSA=\theta-\omega$, se llama la *anomalía verdadera*. Podíamos eliminar u entre las ecuaciones (7) y (9), pero es preferible conservar estas ecuaciones con la variable auxiliar u, y dándole todos los valores posibles, deduciremos los correspondientes de r y t.

Podemos encontrar una relacion entre la anomalía excéntrica y la anomalía verdadera. Tenemos para ello

$$r=a(1-e\cos u)=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta-\omega)},$$

de donde

$$(10)\qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\theta-\omega)=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}u.$$

La duracion T de la revolucion entera del planeta se deduce de la fórmula, $nt=u-e\operatorname{sen}u$, haciendo $u=2\pi$, y tendremos

$$nT=2\pi,\quad \text{ó}\quad T=\frac{2\pi a\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}}\qquad (11)$$

poniendo en vez de n su valor $\frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}$. De esta ecuacion se deduce el valor de la aceleracion μ, á la unidad de distancia, comun á todos los planetas que es, $\mu=\frac{4\pi^2a^3}{T^2}$.

Debe tenerse presente, que la excentricidad e es muy pequeña en todas las órbitas planetarias; en la de Marte, que es la de mayor excentricidad, $e = \frac{1}{60}$.

Caso de una órbita circular ó casi circular.

474. Sabemos que la elipse se convierte en un círculo cuando $e = 0$; y entónces $r = a$, $v^2 = \frac{2\mu}{r} - b = \frac{2\mu}{a} - \frac{\mu}{a} = \frac{\mu}{a}$; es decir, que el cuadrado de la velocidad es constante. La fuerza aceleratriz $\frac{\mu}{r^2} = \frac{\mu}{a^2} = \frac{av^2}{a^2} = \frac{v^2}{a}$, es tambien constante é igual á la fuerza centrípeta $\frac{v^2}{a}$.

Si e es muy pequeña, se puede determinar aproximadamente la anomalía excéntrica u, el radio vector r y la anomalía verdadera $\theta - \omega$, en funcion del tiempo. Se deduce de la ecuacion, $nt = u - e \operatorname{sen} u$,

$$u = nt + e \operatorname{sen} (nt + e \operatorname{sen} u),$$

$$u = nt + e \operatorname{sen} nt \cos (e \operatorname{sen} n) + e \cos nt \operatorname{sen} (e \operatorname{sen} u).$$

Siendo e muy pequeña, podremos, sin gran error, despreciar todas las potencias de esta cantidad superiores á la primera, y tomar 1 por $\cos (e \operatorname{sen} u)$, $e \operatorname{sen} u$ por $\operatorname{sen} (e \operatorname{sen} u)$, y despreciar $e \operatorname{sen} (e \operatorname{sen} u)$; y la ecuacion anterior se convierte en

$$(12) \quad u = nt + e \operatorname{sen} nt.$$

Reemplazando u por este valor en la ecuacion $r = a(1 - e \cos u)$, y despreciando las potencias de e superiores á la primera, tendremos

$$(13) \quad r = a(1 - e \cos nt).$$

Para hallar la anomalía verdadera $\theta - \omega$, en funcion de t, tenemos $r^2 d\theta = c dt$; y ademas

$$c = na^2 \sqrt{1 - e^2} \quad \text{y} \quad r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos (\theta - \omega)};$$

desarrollando por la division $\frac{1}{1+e\cos(\theta-\omega)}$, será

$$r=a(1-e^2)[1-e\cos(\theta-\omega)+e^2\cos^2(\theta-\omega)\ldots];$$

y despreciando las potencias de e, superiores á la primera

$$r=a[(1-e\cos(\theta-\omega)],$$

y del mismo modo

$$r^2d\theta=a^2[1-2e\cos(\theta-\omega)]^2d\theta=cdt=na^2\sqrt{1-e^2}dt,$$

que se reduce, desarrollando en série $(1-e^2)^{\frac{1}{2}}$, y despreciando desde la segunda potencia de e, á

$$[1-2e\cos(\theta-\omega)]d\theta=ndt;$$

integrando, será $\quad \theta-\omega=nt+2e\operatorname{sen}(\theta-\omega);$

de donde

$$\operatorname{sen}(\theta-\omega)=\operatorname{sen}(nt+2e\operatorname{sen}(\theta-\omega)=\operatorname{sen}nt\cos[2e\operatorname{sen}(\theta-\omega)]$$
$$+\cos nt\operatorname{sen}[(2e\operatorname{sen}(\theta-\omega)],$$

desarrollando y despreciando como ántes, las potencias de e, superiores á la primera, tendremos

$$(14)\quad \theta-\omega=nt+2e\operatorname{sen}nt.$$

Las ecuaciones (12), (13) y (14) resuelven la cuestion que nos habíamos propuesto.

475. Si $e=0$ la fórmula (13) da $r=a$; es decir, que la trayectoria es un círculo, y al mismo tiempo la (14) nos dice que θ aumenta proporcionalmente al tiempo, y la velocidad es constante, como ya habíamos visto anteriormente.

En virtud de esto, si A'MA (fig. 216) es la órbita de un planeta, describamos desde el punto S, como centro, con un radio arbitrario Sa, un círculo, y supongamos que un móvil m se mueve sobre este círculo con movimiento uniforme, que tenga por ecuacion $\theta-\omega=nt$; de suerte, que este móvil y el planeta se encuentran en el mismo

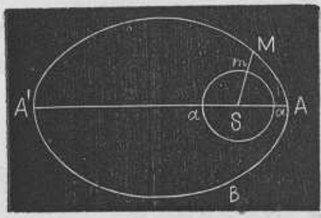


Fig. 217.

instante en a y A, sobre el eje mayor de la elipse, y que las dos cumplan una revolucion en el mismo tiempo. La fórmula (14) $\theta-\omega=nt+2e\,\text{sen}\,nt$, nos dice que en la primera mitad de la órbita AMA', el radio SM precederá al Sm; porque al ángulo nt, descrito por Sm, hay que añadir $2e$ sen nt para tener el ángulo descrito por SM; lo contrario sucede en la segunda mitad de la órbita A'BA, porque el término $2e$ sen nt, cambia de signo en esta segunda mitad.

Orbita parabólica.

476. La curva es parábola, cuando $e=\sqrt{1-\frac{bc^2}{\mu^2}}=1$, ó cuando $b=0$; entónces la ecuacion de la trayectoria es

$$(15)\quad r=\frac{\frac{c^2}{\mu}}{1+\cos(\theta-\omega)},$$

que comparada con la ecuacion general de la parábola

$$r=\frac{p}{1+\cos(\theta-\omega)},$$

dará para el semiparámetro p, el valor $p=\frac{c^2}{\mu}$.

Obtendremos la posicion del móvil sobre la parábola por la ecuacion $r^2d\theta=cdt$; poniendo por r su valor, por la constante c el suyo $\sqrt{p\mu}$; y despejando dt, será

$$dt=\frac{p\sqrt{p}}{\sqrt{\mu}}\frac{d\theta}{[1+\cos(\theta-\omega)]^2}.$$

Para integrar, hagamos $\theta-\omega=2\alpha$, y resulta

$$1+\cos(\theta-\omega)=2\cos^2\alpha,\quad d\theta=2d\alpha,$$

$$\frac{d\theta}{[1+\cos(\theta-\omega)]^2}=\frac{1}{2}\frac{d\alpha}{\cos^4\alpha}=\frac{1}{2}\frac{\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{2}(1+\text{tg}^2\alpha)d\,\text{tg}\,\alpha.$$

Por lo tanto

$$dt = \tfrac{1}{2}\frac{p\sqrt{p}}{\sqrt{\mu}}(1+\mathrm{tg}^2\alpha)\,d.\,\mathrm{tg}\,\alpha;$$

y por fin

$$(16)\quad t = \frac{p\sqrt{p}}{2\sqrt{\mu}}\left[\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\theta-\omega) + \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}\,\frac{3}{2}(\theta-\omega)\right].$$

La constante es cero, si contamos el tiempo desde el instante en que el móvil está en el vértice de la parábola, en el cual $\theta=\omega$.

Las fórmulas (15) y (16) que determinan la trayectoria y la posicion del móvil en una época dada, son las que se emplean en el estudio del movimiento de los cometas, cuyas órbitas son elipses muy prolongadas, que pueden considerarse sin error sensible como parábolas.

No estudiamos el movimiento hiperbólico, porque ninguno de los cuerpos de nuestro sistema planetario describe una hipérbola.

LECCION XXXIX

Atraccion universal y masa de los planetas. — Leyes de la atraccion universal. — Verificacion de la ley de la atraccion. — Movimiento absoluto y relativo de dos cuerpos que se atraen.—Masa de los planetas acompañados de satélites.—Masa de la Tierra.—Masa de los planetas que no tienen satélites.

Atraccion universal. Leyes de la atraccion universal.

477. Hemos deducido de las leyes de Keplero, que las fuerzas, que determinan el movimiento de los planetas, están dirigidas hácia el centro del Sol, son inversamente proporcionales á los cuadrados de las distancias que median entre ellos y el Sol, y vamos á demostrar que tambien son proporcionales á las masas del planeta y del Sol.

El movimiento de revolucion de la Luna alrededor de la Tierra y el de los satélites de Júpiter, de Saturno, de Urano y de Neptuno alrededor de sus respectivos planetas, prueban que todos estos planetas ejercen sobre sus satélites acciones análogas á las que el Sol ejerce sobre los cuerpos que forman el sistema planetario, y los movimientos de los satélites con respecto á sus planetas principales, están sujetos á las leyes de Keplero. Los satélites son tambien atraidos por el Sol, pero como su distancia al planeta es muy pequeña con respecto á la del planeta al Sol, la aceleracion que resulta de la atraccion del Sol sobre un satélite, puede considerarse como idéntica, con la que resulta de la atraccion del Sol sobre el planeta; y por lo tanto, esta última fuerza no altera el movimiento relativo del satélite alrededor del planeta.

Tambien, por el principio de que la accion es igual y contraria á la reaccion, los planetas y sus satélites atraen al Sol. Esta atraccion recíproca es proporcional á las masas de los dos cuerpos que se atraen; porque de la tercera ley de Keplero resulta, que la aceleracion que la atraccion del Sol comunica á los planetas colocados á la unidad de distancia, es constante para todos ellos (469); y si dos planetas estuvieran colocados, sin velocidad inicial, á la misma distancia del centro del Sol, los dos recorrerian en línea recta espacios iguales en el mismo tiempo; mas como á igualdad de aceleraciones, las fuerzas son proporcionales á las masas, *las fuerzas motrices de los planetas son proporcionales á sus masas.* Por consiguiente, si suponemos la masa de un planeta dividida en una infinidad de moléculas de igual masa, todas estas moléculas serán atraidas hácia el Sol por fuerzas que se podrán considerar como iguales y paralelas, en razon á las pequeñas dimensiones del planeta, comparadas con la distancia de éste al Sol. Del mismo modo, las moléculas del Sol son atraidas por las de los planetas, y extendiendo por induccion estos resultados á todos los cuerpos del Universo, llegamos á esta gran ley general de la Naturaleza:

Dos moléculas materiales se atraen en razon directa de sus masas y en razon inversa del cuadrado de su distancia.

Partiendo de esta ley, la atraccion de dos moléculas materiales de masas m y m', colocadas á la distancia r, será $f\frac{mm'}{r^2}$, siendo f la atraccion de la unidad de masa sobre la unidad de masa colocada á la unidad de distancia. La expresion $f\frac{mm'}{r^2}$ es la misma que empleábamos para calcular la atraccion de los cuerpos en la Estática, considerando esta cuestion como un caso particular de la composicion de fuerzas, y que como sabemos se aplica al cálculo de la atraccion que ejercen unos sobre otros, los cuerpos que forman nuestro sistema planetario.

Verificacion de la ley de la atraccion.

478. Cuéntase que Newton, al ver caer una manzana del árbol, sospechó que la fuerza que producia este fenómeno era la atraccion de la Tierra; y luégo pensó que si la manzana se iba alejando de la superficie de ésta, la atraccion subsistiria, y que si la manzana llegaba á colocarse á la distancia de la Luna, todavía subsistiria la accion de la Tierra; esta induccion le llevó al descubrimiento de la gravitacion universal. Descubierta ésta, es claro que la gravedad, que obliga á descender los cuerpos en la superficie de la Tierra, no es más que un caso particular de la gravitacion universal. Puede verificarse la ley de la atraccion, calculando la aceleracion que la atraccion de la Tierra comunica á un cuerpo colocado á distancias diferentes del centro de ésta, por ejemplo, en su superficie y á la distancia de la Luna; y en estas dos posiciones podemos comprobar si la aceleracion varía en razon inversa del cuadrado de la distancia.

Sean para esto T y L (fig. 217), los centros de la Tierra y de la Luna; la gravedad disminuida en razon del cuadrado de la distancia LT, deberá ser la fuerza motriz de nuestro satélite en cada instante. Supongamos, para mayor sencillez, que la órbita de la Luna es una circunferencia; en esta hipótesis, la velocidad de ésta debe considerarse como constante, y es preciso que la fuerza centrífuga de la Luna sea pre-

Fig. 218.

cisamente igual á la gravedad disminuida en la relacion de $\overline{TA}^2=r^2$, á $\overline{LT}^2=\rho^2$. Sea F la fuerza centrífuga de la unidad de masa de la Luna, como $F=\omega^2\rho$, y $\omega^2=\frac{4\pi^2}{T^2}$, tendremos $F=\frac{4\pi^2\rho}{T^2}$, siendo en este cálculo aproximado, $\rho=60\,r$, y T el tiempo que la Luna emplea en una revolucion alrededor de la Tierra, que es $T=39343\times 60''$, de modo que

$$F=\frac{4\pi^2.60r}{T^2}=\frac{120\pi.2\pi r}{T^2}=\frac{120\pi.40000000}{T^2}$$

$$=\frac{1}{60^2}\times\frac{120\pi.40000000}{(39343)^2}.$$

El valor del quebrado $\frac{12\pi.40000000}{(39343)^2}$, estimado hasta las centésimas, es 9,81, próximamente igual á g; y tendremos

$$F=\frac{g}{60^2},\quad ó\quad F:g::r^2:\rho^2.$$

Proporcion que prueba que las aceleraciones varian en razon inversa de los cuadrados de las distancias.

Movimiento absoluto y relativo de dos cuerpos que se atraen.

479. En virtud de la ley de la gravitacion universal, llamando M y m á las masas del Sol y de un planeta, r á la distancia de sus centros de gravedad y f al coeficiente de la atraccion, $f\frac{Mm}{r^2}$ es la medida de la atraccion que cada uno de estos cuerpos ejerce sobre el otro; por lo tanto, $\frac{fM}{r^2}$ y $\frac{fm}{r^2}$ son respectivamente las aceleraciones del planeta y del Sol, proporcionales á las masas de estos dos cuerpos; y resulta, que si no fueran animados de ninguna velocidad inicial, vendrian á reunirse sobre la recta que une los centros, en el centro de gravedad del sistema de estos dos cuerpos, cuyo punto divide á esta recta en dos partes recíprocamente proporcionales á sus masas.

Si queremos obtener el movimiento relativo de un planeta alrededor del Sol, ó sea el movimiento aparente del planeta para un observador colocado en la superficie del Sol, podremos considerar el movimiento relativo como un movimiento absoluto, introduciendo, entre las fuerzas aplicadas al móvil las dos fuerzas aparentes del movimiento relativo; es decir, la fuerza que hemos llamado de reaccion y la fuerza centrífuga compuesta. Esta última es cero, porque el movimiento de arrastre del Sol es de traslacion, y la primera es igual y contraria á la que hace mover al Sol en el espacio; por lo tanto, es necesario considerar aplicada al centro de gravedad del planeta, una fuerza igual á esta fuerza de reaccion, por lo que el planeta estará constantemente solicitado por una fuerza, referida á la unidad de masa, dirigida hácia el centro del Sol é igual á

$$\frac{fM}{r^2}+\frac{fm}{r^2}=\frac{f(M+m)}{r^2}=\frac{\mu}{r}.$$

Llamando μ á la cantidad $f(M+m)$, constante para todas las posiciones del planeta; en cada instante la fuerza aceleratriz, que produce el movimiento aparente del planeta alrededor del Sol, supuesto fijo, es la que acabamos de obtener y que varía en razon inversa del cuadrado de la distancia. Por consiguiente, la trayectoria aparente del planeta es una seccion cónica, y no alejándose éste indefinidamente del Sol, será una elipse.

480. Todas estas consecuencias suponen que el Sol y el planeta considerado están sólos y sujetos á sus acciones mútuas; mas como hay varios planetas girando al rededor del Sol, y todos ellos ejercen su accion sobre el Sol y sobre los demas planetas, resulta, que si las leyes de Keplero fueran rigurosamente verdaderas, las consecuencias que hemos deducido, es decir, las leyes de la gravitacion universal, no serian absolutamente exactas, y deberian modificarse. Mas lo que sucede, es precisamente lo contrario; las leyes de la gravitacion universal son absolutamente

exactas, miéntras que las leyes de Keplero, que nos han servido de punto de partida para llegar á ellas, no son más que aproximadas.

Así obtuvimos (469) la fórmula, $\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$, siendo a el semi-eje mayor de la elipse y T la duracion de una revolucion entera, y como tenemos $\mu = f(M + m)$ resultará

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = f(M + m).$$

Variando la masa m de un planeta á otro, $\frac{a^3}{T^2}$ no puede ser constante para todos los planetas. Sin embargo, como la observacion demuestra que la tercera ley de Keplero es muy aproximada á la verdad, debemos concluir que m es muy pequeña con respecto á M, ó que las masas de los planetas son muy pequeñas comparadas con la del Sol. En efecto, la masa de Júpiter, que es el planeta de mayor masa, no llega á $\frac{1}{1000}$ de la del Sol.

Tampoco el movimiento elíptico es rigurosamente el de los planetas alrededor del Sol; porque todos los planetas se atraen los unos á los otros, y estas atracciones producen perturbaciones en sus movimientos aparentes, y no son como se les habia calculado en un principio; sin embargo, como las masas de los planetas son muy pequeñas con respecto á la del Sol, y las distancias de los unos á los otros son muy considerables, se apartan muy poco del movimiento elíptico. El cálculo de estas pequeñas perturbaciones forma en gran parte el objeto de la Mecánica celeste.

Masas de los planetas acompañados de satélites.

481. La fórmula establecida en el párrafo anterior

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = f(M + m),$$

puede servirnos para calcular las masas de los planetas acompañados de satélites. Sean M, m y m' las masas respectivas del Sol, del planeta y de su satélite, a el semi-eje mayor de la órbita del planeta en su movimiento relativo al rededor del Sol, T la duracion de una revolucion completa, y sean a' y T' los datos análogos en el movimiento aparente del satélite al rededor del planeta, tendremos

$$\frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2} = f(m+m').$$

Dividiendo esta ecuacion por la anterior, resultará

$$\frac{m+m'}{M+m} = \frac{a'^3}{a^3} \cdot \frac{T^2}{T'^2};$$

en el primer miembro de esta ecuacion podemos despreciar m' en el numerador y m en el denominador, por ser las masas de los satélites muy pequeñas con respecto á las de sus planetas principales, y la del planeta muy pequeña con respecto á la del Sol; con esta simplificacion la ecuacion anterior se reducirá á

$$\frac{m}{M} = \frac{a'^3}{a^3} \frac{T^2}{T'^2};$$

fórmula que puede servir para calcular la relacion de la masa del planeta á la del Sol. Esta fórmula da $\frac{1}{1067}$ para la relacion de la masa de Júpiter á la del Sol; ó segun trabajos más recientes $\frac{1}{1070}$.

Masa de la Tierra.

482. El método que acabamos de exponer no puede servir para determinar la relacion de la masa de la Tierra á la del Sol, porque la masa de la Luna no puede despreciarse con respecto á la de la Tierra; y resolveremos este problema por el siguiente procedimiento. Llamemos m á la masa de la Tierra, si esta fuese perfectamente esférica, llamando r á su radio, $\frac{fm}{r^2}$ sería la atraccion total

que ejerceria sobre la unidad de masa de un cuerpo colocado en su superficie; y como la forma de un esferoide, que es la que más se aproxima á la de la Tierra, difiere muy poco de una esfera, y aunque la atraccion no sea la misma en todos los puntos de aquella superficie, existe un cierto paralelo, sobre el cual la atraccion terrestre tiene precisamente por medida $\frac{fm}{r^2}$; mas resulta del cálculo de la atraccion de los esferoides, que para este paralelo, sen $^2 \varphi = \frac{1}{3}$, llamando φ á su latitud. La observacion demuestra, por otra parte, que la gravedad sobre este paralelo tiene por medida $g = 9^m,79386$. Ademas la componente vertical de la fuerza centrífuga, tiene por medida sobre el mismo paralelo, la fraccion $\frac{\cos^2\varphi}{289} = \frac{2}{3}\frac{1}{289}$ de la gravedad, y hay que añadir esta componente á g; lo que da para la atraccion del esferoide terrestre, sobre la unidad de masa de un cuerpo colocado sobre este paralelo, $G = 9^m,81645$. Tenemos,

$$G = \frac{fm}{r^2};\quad \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = f(M+m),$$

dividiendo y despejando $\frac{M}{m}$, resulta

$$\frac{M}{m} = \frac{4\pi^2 a^3}{G r^2 T^2} - 1,$$

siendo M la masa del Sol, a el semi-eje de la órbita de la Tierra, y T el número de segundos que contiene un año. Sustituyendo en esta fórmula, $G = 9^m,81645$, $r = 6364551^m$, $a = 23984r$, $T = 86400^s \times 365,3563...$ se encuentra

$$\frac{M}{m} = 354592,$$

para la relacion de la masa del Sol á la de la Tierra.

Puede deducirse de este resultado la relacion de la densidad media del Sol á la de la Tierra. Tenemos, que $M=V.D$, y $m=v.d$, de donde $\frac{D}{d}=\frac{M}{m}\frac{v}{V}$; siendo D,d y V,v las densidades medias y volúmenes respectivos del Sol y de la Tierra; la relacion de los volúmenes es $\frac{v}{V}=\frac{1}{1331000}$; sustituyendo este valor y el de $\frac{M}{m}$, resulta $\frac{D}{d}=\frac{1}{4}$ próximamente; la densidad del Sol es, pues, la cuarta parte de la de la Tierra.

Tambien puede calcularse con estos datos, la atraccion que la masa del Sol ejerce sobre la unidad de masa de un cuerpo colocado en su superficie; es decir, la gravedad en la superficie del Sol. Esta cantidad está expresada por $G_1=\frac{fM}{R^2}$, siendo M la masa y R el radio del Sol; en la Tierra hemos visto que es $G=\frac{fm}{r^2}$, y despreciando la fuerza centrífuga, que es pequeña con la superficie del Sol, tendremos, dividiendo las expresiones anteriores, $G_1=\frac{M}{m}\cdot\frac{r^2}{R^2}\cdot G$; poniendo $\frac{r}{R}=\frac{1}{110}$, $\frac{M}{m}=354592$, resulta que la gravedad en la superficie del Sol, es $29\times G$, ó 29 veces mayor que en la superficie de la Tierra. De manera que un cuerpo en la superficie del Sol, recorre en el primer segundo $29\times 4,^{m}9$, ó sea próximamente 142 metros en el primer segundo de su caida.

Masa de un planeta que no tiene satélites.

483. Determinada la masa de la Tierra, podemos determinar la de un planeta que no tiene satélites; llamando m' á su masa, a' al semi-eje mayor de su órbita, y T' á la duracion de una revolucion completa del planeta en cuestion, tenemos

$$\frac{4\pi^2a'^3}{T'^2}=f(M+m'),\ \text{y para la Tierra}\ G=\frac{fm}{r^2};$$

eliminando f, resulta

$$\frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2} = Gr^2\left(\frac{M}{m}+\frac{m'}{m'}\right);$$

en esta ecuacion, poniendo en vez de $\frac{M}{m}$, su valor 354592, podemos despejar $\frac{m'}{m}$, ó sea la relacion de la masa del planeta á la de la Tierra.

Hemos deducido las relaciones de las masas de los planetas y del Sol, y por ellas podemos, conociendo la masa de uno de ellos, conocer las de todos los demas; y como conocemos la masa de la Tierra, por ella deduciremos de las relaciones anteriores las masas de todos los cuerpos de nuestro sistema planetario. Para conocer la masa de la Tierra no hay más que multiplicar su densidad media por su volúmen.

La densidad media de la Tierra ha sido determinada repetidas veces y por varios procedimientos, siendo de todos ellos el más notable el de Cavendish, por el cual encontró este célebre físico inglés, que la densidad media de la Tierra es 5,48; número que han confirmado recientes experiencias, que dan 5,67 (*Soc. Astr. de Lóndres*, t. XIV). De manera, que la densidad media de la Tierra es próximamente cinco veces y media la del agua á su máximo de densidad.

FIN DEL TOMO I.

ERRATAS.

Pág.	Lin.ª	Dice.	Debe decir.
49	33	SM	AS
55	25	OA y OB	OB y OA
58	18	y—V	y V
58	20	fuerzas situadas.	fuerzas no situadas.
68	19	$\begin{cases} Px+Px+Px+\ldots, \\ Pq+Pq+Pq+\ldots \end{cases}$	$Px+P'x'+P''x''+\ldots,$ $Py+P'y'+P''y''+\ldots$
99	4	$\frac{1}{P}(2pp'\overline{AA}'^2+2pp''\overline{AA}^2+\ldots)$	$\frac{1}{P}(pp'\overline{AA}'^2+pp''\overline{AA}''^2+\ldots)$
113	11	$s=\frac{1}{p}($	$s=\frac{1}{2p}($
115	18	$\sqrt{1+p^2+y^2}$	$\sqrt{1+p^2+q^2}$
116	11	$\sqrt{1+p^2q^2+\alpha}$	$\sqrt{1+p^2+q^2+\alpha}$
125	5	$\frac{1}{6}(ax-x^2)$	$\frac{1}{6}(ax-x^2)^{\frac{3}{2}}$
136	1	XI.	XII.
141	4	vértice A	vértice B
157	14	especifica	esférica
173	7	$\frac{1+t^2}{dt}, \frac{1+t^2}{t^2}$	$\frac{dt}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}$
218	19	cono en	con
290	10	$\sqrt{dr'^2+r'd\theta^2}$	$\sqrt{dr'^2+r'^2d\theta'^2}$
303	21	$f=f''(t)$	$j=f''(t)$
310	1	XXIII.	XXIV.
311	10	$\frac{dx}{d\theta}=0$	$\frac{dx}{d\theta}=v$
327	3	XXIV.	XXV.
360	25	dv	dx
425	28	$-n\frac{v^2}{\rho}$	$-m\frac{v^2}{\rho}$
440	30	g sen θ	mg sen θ

LECCIONES
DE MECÁNICA
RACIONAL

1.