ARITMÉTICA

Y

CÁLCULOS MERCANTILES

TRATADO DE ARITMÉTICA

Y

CÁLCULOS MERCANTILES

POR

JOSÉ ANGULO Y MORALES

Doctor en ciencias; Profesor mercantil;
Agrimensor; Catedrático de matemáticas por oposición;
numerario en la actualidad de la asignatura de Aritmética y Cálculos mercantiles
en la Escuela superior de Comercio de Madrid; Director, que ha sido,
de Instituto; autor de obras, etc.

TOMO I

ARITMÉTICA TEÓRICO-PRÁCTICA

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE G. JUSTE
Calle de Pizarro, núm. 15, bajo
1889

A LOS PROFESORES Y A LOS ALUMNOS

Somos, en general, enemigos de toda clase de advertencias y prólogos, y, sin embargo, nos obliga á escribir algunas líneas un deber de conciencia, que harto temerosos estamos de los defectos que forzosamente ha de encerrar cuanto brote de nuestra modesta pluma, para que sin protesta aceptemos además las numerosas y justísimas críticas, y las merecidas y severas responsabilidades, que seríamos los primeros en formular y exigir al autor del presente trabajo, considerándolo bajo el punto de vista científico, si no abrigáramos la convicción de que la mayoría de las censuras que á nosotros mismos nos aplicaríamos, tendrían su origen en agenas culpas.

No pretendemos escribir un Tratado verdaderamente completo de Aritmética y Cálculos mercantiles, que abrace desde sus primeros fundamentos hasta la última palabra que la ciencia Matemática, aplicada al mundo mercantil, haya pronunciado, porque esto exigiría muchos volúmenes, que contendrían materia para varios cursos de lección diaria; solamente nos proponemos ser útiles á cuantos se vean obligados á efectuar cualquier combinación numérica relacionada con las diferentes y numerosas profesiones que ese mundo abraza, y especialmente á los profesores y alumnos de enseñanza oficial y libre, por lo que nos vemos precisados á encerrarnos dentro de los estrechos límites del programa de Aritmética impuesto á unos y otros para el ingreso en las Escuelas de Comercio y del heterogéneo y abigarrado conjunto de *Aritmética*, *Cálculos mercan-*

tiles y hasta *Caligrafía* (!) que en la excesivamente pequeña duración de un solo curso fija la Ley vigente, para que desarrollando en él cuantas aplicaciones del Análisis matemático pueden hacerse en las múltiples esferas de la especulación y los negocios, demostremos los catedráticos, reemplazando á los santos de la Edad Media, que aún no ha terminado el tiempo de los milagros.

Las explicaciones de dicho curso, por otra parte, han de apoyarse en el referido programa oficial de ingreso, para redactar el cual ignoramos las opiniones que se habrán tenido en cuenta, pero que nos vemos forzados á declarar no haríamos nuestro de ningún modo, y á mayor abundamiento ha de enseñarse á personas que, no debiendo estudiar hasta más adelante la Economía política, Estadística y Legislación, y careciendo de las nociones más elementales de Gramática española, que para nada se les exige antes del estudio de las lenguas Francesa, Inglesa y Alemana ó Italiana, desconocen por completo el tecnicismo comercial, así como el significado de muchas palabras frecuentemente usadas en nuestro hermoso idioma, y por lo tanto, el de una multitud de frases y conceptos que han de entrar en el enunciado y exposición de la parte exclusivamente científica y de un gran número de cuestiones prácticas.

Pero si no pretendemos que la presente obra sea verdaderamente completa, tampoco quisiéramos añadir una más á las varias que en España se han publicado, excelentes muchas de ellas con arreglo al criterio que presidió á su confección y á las necesidades de la época en que vieron la luz pública, si no hubieran de existir entre una y otras profundas y fundamentales diferencias, porque esto á nada conduciría, convencidos como estamos de que, si así no fuese, ningún fin útil realizaríamos con escribir un Tratado que llevase nuestro nombre, y que por lo mismo que ha de llevarlo, tendría que ser inferior á todos los demás, fuese cual fuese el punto de vista bajo el cual se le considerase.

Desde la publicación del Real decreto de 11 de Agosto de 1887, por el cual fueron creadas en nuestro país diferentes Escuelas de Comercio con carácter oficial, el plan de estudios ha variado radicalmente, y es necesario que las nuevas obras se armonicen con el nuevo plan, si es que alguno ha presidido á la reorganización de estos estudios y se quiere sean fecundas en resultados de algún provecho.

Consideremos, pues, este supuesto plan con algún detenimiento para justificar, si es posible, el que nosotros nos proponemos seguir.

Los titulos de Perito y Profesor mercantil se otorgaban ya antes de la creación de esas Escuelas, pero no habilitaban para ninguna carrera oficial, proponiéndose solo el que los obtenía adquirir ciertos conocimientos que le permitieran encontrar fácil colocación en algún establecimiento particular; de aquí el que cuantas obras conocemos, que bajo un nombre ú otro se ocupen de los Cálculos mercantiles, revistan un carácter exageradamente práctico y exageradamente elemental, en armonía con el objeto que debían proponerse sus autores, puesto que por una parte sólo se exige al dependiente de una casa de Comercio, sea de la categoría que sea, la práctica del corto número de operaciones relacionadas con los negocios á que se dedica, aun cuando no se dé cuenta de lo que hace, ni de por qué lo hace de aquel modo, y por otra, todo lo que se refería á Cálculos, Contabilidad y Teneduría de libros, debía estudiarse en el mismo curso.

Hoy existe uno para el estudio de los primeros, otro para la Contabilidad y Teneduría, y un tercero para las Prácticas de operaciones de Comercio, lo que permite suprimir ciertos detalles que en realidad pertenecen á los últimos; pero en cambio el título de Profesor mercantil habilita para lo que indica su nombre, para el profesorado oficial, y si el dependiente de una casa puede ser en cierto modo una máquina de calcular y confesar no sabe más en determinadas ocasiones, el Profesor ha de ser un hombre científico, que se dé razón de todo, capaz de resolver cualquier cuestión que se le presente relacionada con su carrera y que, llamado para desempeñar un empleo ó solventar una dificultad por el Gobierno, por el Juzgado ó por la Junta directiva de una Caja de Ahorros ó de Retiro, de un Banco, de una Tontina, de una Sociedad de Seguros ó de cualquier otra análoga, no debe verse en el caso de tener que confesar ignora por completo cómo ha de empezar, seguir y terminar los cálculos necesarios para llenar la misión que quiere confiársele; de aquí que sus estudios, sin dejar de ser prácticos, tengan que ser teóricos al mismo tiempo y algo menos elementales, debiendo, como debe conocer, siquiera sea tan solo en sus fundamentos, todas aquellas cuestiones á que el Cálculo pueda aplicarse en el extenso campo de la especulación.

Pero este campo lo constituyen multitud de profesiones cuyas necesidades son distintas, desde las del que se dedica á la enseñanza de la asignatura, que nada debe ignorar de cuanto en ella pueda comprenderse, hasta la del más modesto dependiente del más modesto de los comerciantes; el primero pudiera descuidar ciertos detalles prácticos, dedicándose principalmente á la parte teórica; para los otros sigue siendo la práctica de capital importancia, y las obras deben escribirse para todos, como para todos debe darse la enseñanza, ya que no existen, como deberían existir, un curso elemental y esencialmente práctico entre las asignaturas correspondientes al Peritaje, y otro algo más superior y teórico para los que aspiran al Profesorado, sin perjuicio del que se considerase necesario como preparatorio, para seguir con fruto los estudios de aplicación al Comercio.

Veamos ahora los medios que proporciona la legislación actual para llevar á cabo el objeto que debe proponerse y hemos de creer se propone.

Antiguamente era necesaria la aprobación previa de un curso de Aritmética y Algebra para matricularse á dichos estudios; de aquí el que las supongan conocidas todos los autores y hablen de logaritmos, despejen incógnitas y deduzcan fórmulas literales, en la seguridad de que los lectores comprenden perfectamente su lenguaje, las varias transformaciones que ejecutan y lo que esas fórmulas significan.

Hoy ese curso se ha sustituído por algunas nociones de Aritmética, exigidas por la Ley para el ingreso en la Escuela, suprimiendo por completo el Algebra; y como por lo menos ciertas nociones del Cálculo literal son indispensables para la determinación de muchos resultados, sin llegar á los cuales no es posible resolver numerosas cuestiones, de aquí que estos conocimientos tengan que adquirirse durante el curso, á menos que los futuros Profesores mercantiles, después de obtener su honorífico y pomposo título, se contentaran con saber realizar aquellas combinaciones numéricas que por lo frecuentes y generalizadas, han llegado á ser del dominio de los memorialistas menos ilustrados.

Pero no es esto todo.

El no enseñarse en las Escuelas la parte de Aritmética que ha de servir de base á la asignatura que nos ocupa, ofrece desde luego un inconveniente gravísimo, aun suponiendo á los que ingresan perfectamente impuestos en dicha parte; y es que, habiéndola estudiado con diferentes maestros y con arreglo á autores muy distintos, no sólo es fácil tengan ideas diversas sobre la esencia de las operaciones aritméticas, sino que puede asegurarse con certidumbre que, siendo tantos los procedimientos que en casi todos los casos pueden seguirse para ejecutarlas, cada cual estará acostumbrado á practicar uno, quedándose sin entender las explicaciones del catedrático cuando éste emplee algún otro; de aquí la necesidad absoluta de fijar un punto de partida concreto á que referirse siempre y uniformar los conocimientos que se suponen adquiridos ya.

De si esto es más una suposición que una realidad, apenas hay por qué hablar; nadie ignora que la mayoría de los examinandos ingresan en las Escuelas sin saber más Aritmética que la que se enseña en las de instrucción primaria, y aun sabiendo menos, de lo que no culpamos á los que constituyen los tribunales, aunque á muchos podría culparse, porque, de todos modos, este resultado es preciso y fatal desde el momento en que se impone como forma del examen una sola pregunta, sacada á la suerte de entre 42, y no puede suspenderse, ni se puede hacer otra, al que saque la 1.ª, y diga lo que son *Matemáticas, cantidad, número y extensión*; al que conteste á la 10.ª, *definiendo las potencias* y nada más, ó al que responda á la 34.ª con la *definición de raíces y modo de indicarlas*, aun cuando los que le han de juzgar estén convencidos de que ahí concluye todo su saber; de aquí que el recordar cuanto debe saberse, aprovechando las mismas explicaciones nuevas, sea del todo indispensable, aunque para ganar tiempo se supongan adquiridas las nociones y las reglas explícitamente comprendidas en el Programa oficial de ingreso, que también se ha impuesto por el Gobierno á los alumnos y á los profesores.

Es, pues, verdad que este Programa existe. ¡Ojalá no existiera! Pero es tan deficiente, tan desordenado, tan vago, al propio tiempo que confuso; tan erróneo é incomprensible en algunos de los conceptos que abraza y preguntas de que consta, y hasta tan antagónico con la necesidad que debía satisfacer, que á no expresar la Real orden de 4 de Septiembre de 1887 que había sido formado en la Dirección general de Instrucción pública, hubiéramos asegurado que en su redacción no había intervido ninguna persona que poseyera con exactitud y claridad los más elementales principios de la Ciencia de los números, de que hoy se halla en posesión casi todo el mundo, y ni aun hubiéramos tenido inconveniente en creer que había nacido por generación espontánea en las columnas de la *Gaceta*.

Tan absurdo es el tal Programa, que aun los mismos autores que han publicado obras con posterioridad á la fecha del mismo, no han podido creer sin duda lo que sus ojos veían, y dando á las preguntas más alcance del que se deduce de su texto y del que de fijo le darán los que sólo tienen obligación de contestar á lo que se les pide de un modo terminante y claro, suponen conocidas diferentes propiedades y reglas no contenidas en él, y sobre todo, las que hacen referencia á la importantísima teoría de las razones y proporciones, base y fundamento de la mayor parte de los problemas comerciales, olvidando que la pregunta 41.ª sólo exige que se tenga un *concepto general de las mismas*; de aquí la necesidad, no sólo del repaso de que hemos hablado, sino también de ampliar y completar los conocimientos aritméticos que puedan tenerse, con todo aquello que sea fundamental y conveniente para las posteriores explicaciones y para los variados cargos que dentro de la extensa carrera mercantil puedan desempeñar las personas que deseen pertenecer á ella.

Esperamos que con lo dicho se comprenderá fácilmente cuál es nuestro criterio, erróneo ó no, sobre el particular; cuáles son los propósitos que nos animan; cuál el objeto que nos proponemos, y cuál el plan que nos trazamos al comenzar á escribir este Tratado.

Intentamos, sin que se nos oculte la dificultad y magnitud de la empresa, publicar una obra de utilidad para los alumnos, para los profesores y para cuantos se dedican al Comercio en la parte que se relaciona con las aplicaciones al mismo del Análisis matemático; para lo cual necesitamos ante todo fijar un punto de partida terminante, claro y categórico, y fundados en él, desarrollar después tres clases de conocimientos diversos, aunque unidos por estrecho lazo: los que se refieran al Complemento de Aritmética, indispensable para llegar al desarrollo y comprensión de las aplicaciones mercantiles ó de innegable utilidad para determinadas profesiones relacionadas con las mismas; los necesarios para formarse idea clara de todas las magnitudes y resolver cuantas cuestiones caen bajo el dominio del verdadero Comercio, es decir, del acto de comprar para vender, procurando obtener una ganancia, y los precisos para resolver otros problemas de orden un poco más elevado, que no por ocurrir con menos frecuencia, son menos importantes para evitar que un Profesor mercantil tenga que quedarse perplejo y confuso en cuanto salga fuera del mostrador de una tienda ó del escritorio de una casa comercial, y se ofrezca á su atónita mirada algo que, apartándose ligeramente de lo más vulgar y conocido, pueda ser para él totalmente incomprensible y nuevo.

Para conseguir lo primero, ó sea fijar el punto de partida, haremos lo único que nos permite hacer la imposición del Programa del ingreso, que es anteponer al resto de la obra un *Resumen* de las contestaciones que á sus preguntas puede darse, resumen que además podrá servir de consulta en cualquier tiempo para aprender ó recordar una propiedad ó una regla desconocida ú olvidada, sin necesidad de acudir á distintos libros.

La diferencia de los otros conocimientos nos obliga á dividir en tres tomos nuestra obra, lo que además de facilitar su adquisición, permitirá á los profesores prescindir de alguno si juzgasen excesiva la materia contenida en todos, aunque procuraremos al mismo tiempo demostrar que no lo es, incluyendo delante de cada parte un *Programa* que, además de evitar á los alumnos un nuevo gasto, podrá servir de índice de los párrafos en que se desarrollan las explicaciones correspondientes á cada pregunta, y que en su totalidad procuraremos no exceda de las cien Lecciones que suelen componer los referentes á asignaturas diarias, lecciones que sabemos por experiencia pueden exponerse detalladamente en el término medio de una hora, con un poco de buena voluntad.

El primero comprenderá, con el resumen dicho, la *Arit-*

mética teórico-práctica, con cuyo nombre lo distinguiremos.

Al escribirlo tendremos presente, que el mejor modo de acostumbrar al alumno á conocer cuándo debe aplicar las operaciones fundamentales, es darle de sus objetos y fines ideas claras, precisas y generales, haciéndole ver al propio tiempo las íntimas relaciones que entre sí tienen; que el medio más adecuado de acostumbrarle á pensar, es enseñarle desde el principio á deducir de las mismas definiciones cuantas consecuencias de importancia se desprendan de ellas, y á realizar cuantas transformaciones numéricas puedan imaginarse; que esas operaciones fundamentales apenas son aplicables si no se aprende á combinarlas entre sí y á operar con los signos generales que exigen determinadas fórmulas, entre los cuales se encuentran con gran frecuencia, no sólo las letras á cuyo uso hay que ir acostumbrándose poco á poco, sino también los límites de los números indefinidamente pequeños é indefinidamente grandes, los resultados negativos, los exponentes é índices de esta clase ó fraccionarios y algunos otros, que al anularse un numerador ó denominador, al tener que restar dos números, efectuar una división inexacta, etc., suelen ofrecer una insuperable dificultad á los que no tienen de ellos ninguna idea; que en aquella carrera en que el tiempo es oro, según la conocida frase inglesa, un calculista, es decir, un hombre verdaderamente práctico, debe conocer cuantos métodos y disposiciones de cálculo se relacionen con aquéllas, para escoger siempre los más breves y sencillos ahorrando trabajo y horas, y poder repasar y comprobar los que otra persona haya efectuado por cualquier procedimiento; que en las cuestiones en que siempre se compromete el dinero propio ó el ajeno, es esencial aprender á calcular los resultados finales que no puedan ser exactos, como no lo pueden ser en la mayoría de los casos, en menos de un céntimo, por ejemplo, sin exponerse á que este pequeño error, como desgraciadamente sucede con frecuencia en la práctica, multiplicado después por un millón de pesetas, si así lo exige la índole del problema que se resuelve, dé una diferencia de diez mil pesetas en el resultado; por último, que ciertas propiedades y teorías, algunas de las cuales hemos indicado ya, son indispensables para proseguir los estudios con fundamento y base suficientes.

Confiamos, por lo tanto, en que este tomo contendrá reglas, disposiciones de cálculo, métodos, procedimientos y abreviaciones casi desconocidos en nuestra patria, y aun algo nuevo y propio, como varias de las referidas consecuencias y el detenido estudio que hemos hecho sobre los defectos y modificación de las reglas abreviadas de Wantzel.

El segundo comprenderá, con el nombre de *Cálculos mercantiles elementales*, además de la Metrología, todas las reglas y cuestiones más usuales y frecuentes.

Recordaremos al escribirlo, que para formarse clara idea de todas las magnitudes, no basta el aprender de memoria unos cuantos nombres y relaciones de unidades, sino que es preciso también comprender siquiera la posibilidad de llevar á cabo toda clase de mediciones por medio de aparatos adecuados; que por la innumerable variedad de las cuestiones que ocurren, pueden no bastar muchas veces las reglas de carácter invariable y tener que apelar al planteo y resolución de sencillas ecuaciones; que ese planteo suele ser la parte más dificultosa cuando las relaciones entre los datos no están muy claras, y, que por lo tanto, conviene en ciertos casos disponer de otros medios para poder llegar al fin propuesto; que los procedimientos generales son preferibles casi siempre á los particulares, incapaces á menudo de salvar la más pequeña dificultad al sufrir el enunciado de un problema la más ligera modificación, y que en cambio los particulares suelen ser los más convenientes para llegar al fin con claridad, sencillez y prontitud.

Este segundo tomo, por consiguiente, será el que mayor semejanza habrá de guardar con las obras más conocidas y con lo que hasta aquí ha sido costumbre enseñar; pero esperamos que será más completo, y por su desarrollo, y aun por su contenido, no dejará de ofrecer algunas novedades, entre las que podrá incluirse la resolución de ciertos problemas que no hemos visto tratados en otros libros.

El tercero comprenderá los *Cálculos mercantiles superiores*, con los principios más esenciales y fáciles de la Teoría de probabilidades, base y fundamento de las Rentas vitalicias, de los Seguros y de un gran número de cuestiones análogas.

Procuraremos que en su exposición no quede reducido el importantísimo estudio de las Rentas generales en sus diversas formas, á las breves nociones que es costumbre adquirir sobre los casos particulares en que se trate de Anualidades ó de Imposiciones; que á las pocas palabras que suelen pronunciarse al hablar de amortizaciones, sustituya siquiera una idea general de las diferentes clases de empréstitos, del modo de realizarlos y de la marcha que debe seguirse en los cálculos que para extinguirlos sea necesario efectuar; que no se ignoren las múltiples combinaciones que pueden presentar las Rentas vitalicias y Seguros; que se comprenda la necesidad y construcción de las Tablas ó curvas de mortalidad y vida probable, así como las diferencias que las distinguen, y, en fin, que se conozca el modo de fundar y sostener cualquiera de esas muchas Sociedades particulares que, con nombres diversos, tanto van extendiéndose por todas las naciones.

De la primera parte de estos estudios, casi desconocidos en España, nada que sepamos se había escrito hasta hace dos años, en que el distinguido matemático D. Vicente Vázquez Queipo publicó, bajo el nombre de *Aritmética superior mercantil*, el único libro que merece tal calificativo por contener, expuestas con verdadero método y perfecta claridad, las fórmulas relativas á toda clase de Rentas generales y Empréstitos, muchas de las cuales son completamente originales y más sencillas que las dadas á conocer por algunos autores extranjeros; de la segunda, algo, aunque muy poco, hemos encontrado en nuestro idioma, pero precisamente en un libro de los menos conocidos, bastante antiguo, en el que abundan las erratas de imprenta y no faltan algunas de concepto, que hacen ciertas fórmulas y teorías del todo incomprensibles.

Esperamos, pues, que en el tercer tomo hallarán la mayoría de los lectores bastantes cosas nuevas, y aun podemos asegurarlo, en razón á que sobre algunos de los puntos que abrazará como el del Interés continuo, por ejemplo, los Préstamos vitalicios y otros, creemos poder tener la certidumbre de que nada se ha escrito en nuestra patria.

Abrigando la pretensión de que dichos tres tomos sean útiles á todos, y al mismo tiempo que de enseñanza puedan servir de consulta en cualquier circunstancia, procuraremos que en la práctica no pueda presentarse un solo caso de combinación numérica que no haya sido examinado; incluiremos también cuantos *ejemplos* y *Tablas* puedan servir para facilitar la comprensión y las operaciones prácticas, y cuando esto sea imposible, modelos de las últimas; adicionaremos, con el carácter de *Apéndices*, al primer tomo las principales ideas sobre fracciones continuas, que pueden ser de gran aplicación; al segundo los métodos más usuales de llevar y disponer las cuentas corrientes con interés, *cuentas* cuya explicación y detalle pertenecen en realidad, según indica su mismo nombre, al curso de *Contabilidad*, pero que están íntimamente ligadas al de Cálculos, é importa conocer á todo comerciante; y al último, la resolución general de las ecuaciones de segundo, tercero y cuarto grado, haciendo ver por medio de aplicaciones prácticas la importancia que para determinados casos pueden tener estos conocimientos, aunque en las explicaciones del curso se prescinda de ellos para dar cabida á otros aún más indispensables por la mayor frecuencia de su necesidad; remediaremos en lo posible el desconocimiento del tecnicismo comercial y del significado de ciertas frases, con las definiciones más indispensables; en la necesidad de concretar y resumir mucho por la falta de tiempo, suprimiremos cuanto no pertenezca realmente al Cálculo y sí á los cursos de Contabilidad y Teneduría, Práctica de operaciones comerciales, Legislación mercantil y Economía política, para evitar repeticiones que siempre redundan en perjuicio del que estudia, robándole un tiempo durante el cual hubiera podido adquirir conocimientos nuevos; en una palabra, sin dejar de dar á la práctica toda la importancia que merece y debe tener, no olvidaremos al razonarlo todo, y al propio tiempo que de todo presentaremos ejemplos, que esa práctica debe ser hija de la teoría para que el operador tenga conciencia de lo que hace, y que el que sigue una senda cualquiera con el propósito de llegar á un punto determinado, ha de tener certeza de que siguiéndola conseguirá lo que se propone, y ha de saber por qué la ha escogido y por qué la sigue, sin lo cual el extravío es casi seguro é imposible salvar el más insignificante obstáculo imprevisto.

Entre las tablas que contendrá el primer tomo, se hallará una de Logaritmos de los 10000 primeros enteros, que tanto por su innegable utilidad para todos, como para evitar á los discípulos el que se vean obligados á comprar otra, queremos incluir, y cuya confección nos ha de costar gran trabajo, porque no pudiendo prolongarla más sin aumentar considerablemente el volumen, necesitándose siete cifras decimales en las mantisas para que al multiplicarlas por los exponentes, el error del resultado no sea excesivo; y no conteniendo las que con ese número de cifras conocemos más que las diferencias correspondientes á los logaritmos de los números comprendidos entre 10000 y 100000, nos veremos obligados á calcular las 9000 que figurarán en las nuestras, dispuestas á simple entrada, no porque dejemos de comprender las ventajas de la doble, sino porque la simple hace menos fáciles las equivocaciones al manejarlas.

Finalmente, como estas siete decimales no son suficientes para ciertos cálculos de rentas y amortizaciones, sobre todo cuando se trata de números no muy grandes, cuyos logaritmos tienen, por consiguiente, diferencias de bastante consideración, en el tomo tercero incluiremos las mantisas de los cien primeros y de los comprendidos entre 100 y 1000, con 30 y 15 cifras decimales respectivamente.

Si acertamos ó no al proponernos lo que nos proponemos y realizar lo que realizamos; si conseguimos, en conformidad al buen deseo que nos anima é impulsa, ayudar con nuestro trabajo y con nuestras fuerzas, sean ó no escasas, á dar á la en España reciente carrera del Comercio toda la importancia que merece y á que es acreedora en las presentes y en las futuras sociedades; si contribuimos ó no, con el consabido grano de arena, cuya insignificancia no nos corresponde apreciar, á extender cierta clase de conocimientos y á elevar el nivel intelectual de nuestra patria, otros son quienes lo han de decir.

Cuando conozcamos su parecer y sepamos si nuestras ideas sobre el particular son ó no equivocadas; si las personas competentes en la materia aprueban nuestros esfuerzos ó los creen inútiles, y si nuestro trabajo ha de ser ó no estéril, tal vez nos decidamos á publicar un cuarto tomo, verdaderamente *superior*, en el que ampliando los conocimientos sobre la Teoría de probabilidades, completemos nuestro Tratado enseñando los métodos que hoy deben seguirse para construir las Tablas de mortalidad, vida probable, conmutación y demás análogas, así como la determinación de los tantos instantáneos de mortalidad, anualidades á interés continuo, etc., deduciendo las fórmulas más exactas y modernas para el cálculo de las primas fijas ó temporales, constantes ó variables, con interés ó sin él, referentes á las Rentas vitalicias, Seguros y supervivencias á término fijo ó variable; las que sirven para la transformación de unas en otras, reembolsos de anualidades y primas, seguros mixtos y contra-seguros, reservas, fondos de garantía de las Sociedades, y, en fin, detallando los numerosos problemas mercantiles, para cuya resolución metemática, que tanto contribuye á disipar errores muy extendidos y generalizados en nuestro país, se necesita el apoyo y concurso del Algebra superior y del Cálculo diferencial é integral.

Ténganse en cuenta las dificultades que ya sabemos se nos presentarán y los inconvenientes con que desde luego deberemos luchar al salirnos del camino trillado, y después júzguese nuestra obra.

Desde luego suponemos no faltarán en ella errores de cálculo y de apreciación, omisiones importantes, faltas de lenguaje ni defectos de toda clase, quizás nacidos de involuntarios descuidos y de la precipitación con que habremos de escribir, calcular y corregir por la proximidad del nuevo curso; hijos tal vez de nuestra insuficiencia; puede ser que engendrados por la pobreza y cortedad de nuestro entendimiento.

Señalarnos estos defectos, hacernos notar esas omisiones y faltas y rectificar aquellos errores, ayudándonos á ser útiles en cuanto de nosotros pueda depender á la juventud estudiosa, es el mayor servicio que podrían prestarnos los alumnos y Profesores, á quienes principalmente nos dirigimos, y sobre todo los últimos, de cuya ilustración, bondad y amor á la ciencia y la enseñanza esperamos se sirvan acceder á nuestro ruego, tomándose la molestia de dispensarnos tan especiales y señalados favores, en la seguridad de que siempre será poco, aun siendo tan grande, el agradecimiento que por ello les profese su afectísimo compañero

J. Angulo Morales.

Madrid, 1.° de Julio de 1889.

RESUMEN DE LAS MATERIAS

QUE ABRAZA EL

PROGRAMA DE ARITMÉTICA

EXIGIDO POR REAL ORDEN DE 4 DE SEPTIEMBRE DE 1887

PARA EL INGRESO EN LAS ESCUELAS DE COMERCIO (*)

Pregunta 1.ª

DEFINICIÓN DE LAS MATEMÁTICAS.—CANTIDAD, UNIDAD, NÚMERO Y EXTENSIÓN.—DIVISIÓN DE LAS MATEMÁTICAS.

1. MATEMÁTICAS, son las *ciencias que se ocupan del estudio de la cantidad* (**).

2. CANTIDAD, *todo lo que puede considerarse como susceptible de aumento y disminución.*

3. UNIDAD, *la cantidad que sirve de término de comparación, respecto á las demás de su misma naturaleza,* para apreciar su magnitud relativa.

4. NÚMERO, un *conjunto de unidades ó partes de la misma.*

5. EXTENSIÓN, una *parte limitada del Espacio indefinido.*

6. Las Matemáticas se DIVIDEN en PURAS y APLICADAS ó MIX-

(*) Los números colocados entre paréntesis en el curso de las explicaciones, corresponden á los párrafos que deben consultarse, si no se recuerda bien el fundamento de las mismas.

(**) Esta definición, que es la más generalizada y comprensible, aunque tiene sus defectos, es completamente absurda no habiendo definido antes la cantidad; pero el orden de redacción de las preguntas obliga á cometer este absurdo, á no ser que se definan las Matemáticas diciendo que son las *ciencias que se ocupan de las leyes del Tiempo y del Espacio.*

TAS, según estudien *la cantidad en sí misma,* prescindiendo de la naturaleza que pueda tener, ó *la consideren en relación á un objeto determinado.*

2.ª

DEFINICIÓN DE LA ARITMÉTICA, UNIDAD Y NÚMERO ENTERO.—VARIAS CLASES DE NÚMEROS.—OBJETO Y DIVISIÓN DE LA NUMERACIÓN.

7. ARITMÉTICA, es la *ciencia que se ocupa del estudio de los números.*

8. UNIDAD numérica, el *resultado de comparar una cantidad con ella misma,* para ver las veces que se contiene (*).

9. NÚMERO ENTERO, el *conjunto de varias unidades.*

10. Número FRACCIONARIO ó QUEBRADO, el *conjunto de varias partes de la unidad.*

11. MIXTO, el *compuesto de entero y quebrado* (**).

12. Todos estos son CONMENSURABLES, ó lo que es lo mismo, *pueden expresarse exactamente por medio de la unidad elegida* (8) para formarnos idea de su magnitud.

13. INCONMENSURABLE, es *el que no puede expresarse exactamente* por medio de la unidad elegida.

14. APROXIMADO ó INEXACTO, *el que se considera en lugar de otro,* cuya magnitud no es muy diferente, y EXACTO *el que representa la magnitud verdadera.*

15. Todos los números son además ABSTRACTOS, cuando *no se refieren á ninguna unidad de naturaleza determinada,* y

16. CONCRETOS, cuando *á continuación del número abstracto se expresa el nombre de la unidad á que se refiere* (***).

17. El objeto de la NUMERACIÓN es *la expresión y representación de todos los números.*

18. Se DIVIDE en dos partes: *hablada* ú *oral* y *escrita.*

(*) Como la unidad en general ya está definida en la pregunta anterior, suponemos que ésta se referirá á la numérica.

(**) En realidad no hay tal número, pues el conjunto de un entero y un quebrado es una adición indicada; pero lo definimos así por la precisión de sujetarnos al lenguaje del Programa, que en las preguntas 37 y 40, y por cierto únicamente en éstas, habla de extraer la raíz de los números mixtos, cuya suma, diferencia producto, cociente y potencia, no interesan por lo visto.

(***) No sabemos si estará bien contestada la pregunta, pues á excepción de los abstractos y concretos, que en todo caso serían dos clases de números y no varias, todos los demás son idénticos en su esencia, y por lo tanto, no constituyen tampoco varias *clases*, sino varias *formas* de números.

3.ª

NUMERACIÓN HABLADA Ú ORAL Y NUMERACIÓN ESCRITA.—UNIDADES SIMPLES DE PRIMER ORDEN, DECENAS, CENTENAS, MILLARES, ETC. (*).

19. La NUMERACIÓN HABLADA ú ORAL, tiene por objeto *expresar todos los números por medio de pocas palabras*, y la ESCRITA, *representarlos con pocos signos*.

20. Para conseguirlo se llama *uno, á la unidad numérica* (8) considerada como número, y *dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho* y *nueve*, *á los primeros conjuntos que van resultando de añadir una unidad más al número últimamente considerado*.

Estas son las unidades de PRIMER ORDEN ó SIMPLES.

21. En la numeración más usual se ha convenido en llamar DIEZ al *conjunto de nueve y uno*, considerándolo como una nueva unidad de SEGUNDO ORDEN, expresando las reuniones de *dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve y diez de éstas*, por las palabras: VEINTE, TREINTA, CUARENTA, CINCUENTA, SESENTA, SETENTA, OCHENTA, NOVENTA y CIEN.

DECENAS, son las *unidades de segundo orden* que equivalen á diez de primero y los nueve números comprendidos entre cada conjunto de ellas, se expresarán por medio de las decenas y unidades que contienen, diciendo *veintiuno, veintidos,..... noventa y nueve*, á excepción de diez y *uno, dos, tres, cuatro* ó *cinco*, que se expresan por las palabras *once, doce, trece, catorce* y *quince*.

22. CENTENAS son las *unidades de tercer orden* de la numeración usual, que se componen de *diez decenas* ó CIEN unidades de primer orden.

Para contar por centenas basta decir cien ó *ciento, doscientos, trescientos,..... nuevecientos*, anteponiendo los nombres de los nueve primeros números enteros y haciendo constar después las decenas y unidades que además pueda contener un número, con lo cual quedan expresados desde *ciento uno* hasta *nuevecientos noventa y nueve*, necesitando nuevo nombre para *el*

(*) Aunque la pregunta, por su redacción, parece no exigir más que las definiciones, entramos en algunos detalles de la numeración por ser éstos indispensables para contestar á las siguientes.

siguiente, que se ha convenido en llamar *mil*, y por componerse de *diez* centenas se considera como una unidad de *cuarto* orden.

23. MILLARES, son las *unidades de cuarto orden* de la numeración usual, con cuyo auxilio y de un modo análogo al expuesto, pueden expresarse desde el conjunto de *mil una* unidades hasta el de *nuevecientos noventa y nueve mil nuevecientos noventa y nueve*, sin que se necesiten nombres nuevos para las unidades de *quinto* y *sexto* orden, que habrán quedado expresadas por *diez mil* y *cien mil*.

A la *unidad de séptimo orden* se le llama MILLÓN, y para contar por millones bastan las palabras ya conocidas, considerando á las unidades de los órdenes inmediatamente superiores que contienen diez del inferior, como decenas, centenas, millares, decenas de millar y centenas de millar *de millón*.

Luego, á *diez de estas últimas* ó sea *un millón de millones*, se le llama BILLÓN, á *un millón de billones* TRILLÓN, á *uno de trillones* CUATRILLÓN, y así sucesivamente, con lo cual puede expresarse cualquier entero, de igual manera y con pocas palabras.

4.ª

NUMERACIÓN DECIMAL ESCRITA.—CARACTÉRES, SIGNOS Ó CIFRAS QUE SE USAN.—VALOR ABSOLUTO Y RELATIVO DE CADA CIFRA.—REGLAS PARA ESCRIBIR Y LEER UN NÚMERO ENTERO CUALQUIERA.

24. LA NUMERACIÓN DECIMAL ESCRITA tendrá por objeto (19) *representar todos los números con pocos signos, en el supuesto de que diez unidades de un orden formen otra del superior*, sin cuya condición no sería decimal (*).

25. Los SIGNOS ó CARACTÉRES que se usan y se distinguen con el nombre de CIFRAS, son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, que representan: el *primero*, la *carencia de valor* ó CERO, y *los demás, los números enteros desde uno hasta nueve*, con cuyas palabras se les designa.

26. VALOR ABSOLUTO de una cifra, es el *conjunto de unidades que representa* por sí misma.

(*) Como es la tercera vez que se repite la pregunta y ahora se añade la palabra *decimal*, suponemos que aquí deberá exigirse la definición de este caso particular.

27. VALOR RELATIVO, el *conjunto de unidades que representa por su valor absoluto y por el lugar que ocupa* con respecto á las demás, pues para tener la representación de cualquier entero por medio de esas solas cifras, se ha convenido en que *una cifra colocada á la izquierda de otra represente unidades diez veces mayores que las representadas por esta otra.*

28. PARA ESCRIBIR UN NÚMERO ENTERO CUALQUIERA, *se escriben las cifras que representen el conjunto de unidades de cada orden que contenga, empezando por las superiores, poniendo* 0 *en los correspondientes á los órdenes que falten.*

29. PARA LEER UN ENTERO CUALQUIERA, *se divide en secciones de á seis cifras, empezando por la derecha, las cuales se subdividen en dos de á tres para marcar el sitio de los millares, y se leen empezando por la de la izquierda, que podrá tener sólo una ó dos, expresando al terminar cada una la denominación que le corresponda.*

5.ª

OBSERVACIONES ACERCA DE LOS DIFERENTES SISTEMAS DE NUMERACIÓN ESCRITA.—NUMERACIÓN ROMANA.

30. No siendo un SISTEMA DE NUMERACIÓN más que el *artificio que se emplea para expresar y representar todos los números por medio de pocas palabras y signos,* fácilmente se concibe que puede ser muy variado, aun conviniendo, como en el decimal (27), en que haya una BASE del sistema ó *número fijo de unidades que formen otra de orden superior;* nombres y signos para todos los números inferiores á esta base; y otra cifra que indique la carencia de valor, además de las restantes palabras que sean indispensables para la expresión de cualquier número.

Los que reunen estas condiciones, toman el nombre de su base, llamándose BINARIO, TERNARIO, ... DUODECIMAL, etc., según sea *dos, tres, ... doce*, etc., el valor de aquélla; y el objeto de la numeración (17), queda cumplido de un modo análogo al detallado en la decimal, conviniendo siempre para la escrita, en que *una cifra colocada á la izquierda de otra represente unidades tantas veces mayores que esta otra cuantas tenga la base.*

Aun sin ésta y sin el 0, cuya conveniencia es innegable, podrían existir sistemas de numeración, y de ellos, es el romano notable ejemplo; pues aunque en realidad tiene base, por ser en su parte hablada idéntico al decimal, difiere por completo en su parte escrita, que ni se funda en el convenio dicho, ni necesita para nada el cero (*).

31. Numeración romana. Los signos que se emplean y sus valores son los siguientes:

I	V	X	L	C	D	M
uno	*cinco*	*diez*	*cincuenta*	*cien*	*quinientos*	*mil*

y los convenios establecidos, que:

1.° *Toda letra que represente un conjunto de unidades menor que el representado por otra, colocada al lado de ésta, le aumenta ó disminuye su valor, según se halle á su derecha ó á su izquierda.*

2.° *Cada línea horizontal que se coloque encima de una ó varias letras, hace mil veces mayor al conjunto de las unidades que las mismas representan.*

3.° *Ninguna letra debe escribirse cuatro veces seguidas.*

Teniendo esto presente, los números enteros *se expresan en el sistema romano como los decimales,* y para leerlos y escribirlos *basta efectuarlo empezando por el orden superior, dando á cada letra ó grupo de ellas la denominación que le corresponda, según el valor absoluto que representen y el relativo que indique el número de líneas horizontales que tenga en la parte superior.*

Aun cuando esos convenios y esta regla, que no permiten escribir IIII en lugar de IV, como se ve en las esferas de casi todos los relojes, pueden ocurrir dudas con respecto á algunos números particulares, pues sin faltar á ellos, es evidente que, por ejemplo, XLV y VL representarán igualmente el número decimal 45.

Para evitarlo, convienen algunos, además, en que *todos los números se escriban con los menos signos posibles*, en cuyo caso la segunda representación sería la verdadera, aunque no la más frecuente.

(*) Es tan vaga la palabra *observaciones,* que hace imposible precisar cuáles son las que deben hacerse, ni cuál es, por lo tanto, el sentido y objeto de la pregunta. Hemos contestado, por consiguiente, lo que respecto á este punto nos parece más importante.

6.ª

PRINCIPALES OPERACIONES DE ARITMÉTICA CON LOS NÚMEROS ENTEROS.—ADICIÓN Y SU PRINCIPIO FUNDAMENTAL.—CASOS QUE PUEDEN OCURRIR.—PRUEBA DE LA ADICIÓN.

32. LAS PRINCIPALES OPERACIONES ó *procedimientos distintos que pueden emplearse para aumentar ó disminuir el valor de un número por su combinación con otros,* son las llamadas *Adición, Sustracción, Multiplicación* y *División* (*).

33. LA ADICIÓN tiene por objeto *reunir en un sólo número los valores de otros varios.*

Los *números conocidos* se llaman SUMANDOS, el *resultado* SUMA y la operación *se indica por medio del signo* + *colocado entre los sumandos,* signo que se lee: MÁS.

34. El PRINCIPIO FUNDAMENTAL de esta operación puede enunciarse así: *para reunir en un solo número los valores de los sumandos, bastará reunir los representados por las cifras de sus diversos órdenes* (**).

35. LOS CASOS QUE PUEDEN OCURRIR son tres: 1.° *adicionar* ó SUMAR *dos números de una sola cifra;* 2.° *sumar un número de varias con otro de una sola;* 3.° *sumar enteros cualesquiera.*

1.°—Para adicionar dos enteros de una sola cifra, *basta saber de memoria la tabla de sumar*, que contiene los resultados de reunir entre sí los valores representados por las diferentes cifras que se usan en la numeración (25), y puede formarse de varios modos, sin más que tener presente lo dicho en las dos partes en que se divide (19 á 30).

2.°—Para agregar á un entero de varias cifras el valor representado por una sola, *basta añadir este último á las unidades del primero, y si el resultado contiene alguna decena, escribir solo la cifra de las unidades, agregando la decena á las del primer sumando, operando lo mismo con ésta y las cifras su-*

(*) Hay quien considera como *principales* solamente las dos primeras, y quien agrega á las citadas la Elevación á potencias y Extracción de raíces y aun la Determinación de logaritmos. No es, pues, posible saber a cuáles se refiere la pregunta.

(**) Jamás hemos necesitado para el estudio completo de la Adición admitir ningún principio fundamental; creemos que la pregunta se referirá al que enunciamos.

cesivas en el caso en que por ser 9 aquéllas contuvieran las sumas parciales alguna unidad de orden superior, según el llamado principio fundamental.

3.°—Para sumar enteros cualesquiera, *basta sumar entre sí todas las unidades del mismo orden de los sumandos, agregando las que puedan resultar de orden superior en las distintas sumas parciales, á las correspondientes de los números dados,* en virtud del mismo.

36. Para hacer la PRUEBA de la Adición, ó *nueva operación que tiene por objeto cerciorarse de que el resultado obtenido es el verdadero,* basta *empezar la operación por otro orden de unidades* ó *cambiar el de los sumandos* antes de aplicar la regla, lo que evidentemente no alterará el valor del resultado (32).

7.ª

SUSTRACCIÓN, MINUENDO, SUSTRAENDO, RESTO.—PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE ESTA OPERACIÓN.—CASOS QUE PUEDEN OCURRIR.—PRUEBA DE LA SUSTRACCIÓN.

37. La SUSTRACCIÓN tiene por objeto, *dado un número que se considera como suma de otros dos y uno de éstos, hallar el otro.*

38. MINUENDO, es la suma conocida; SUSTRAENDO, *el sumando dado;* RESTO, ó *diferencia, el sumando que se busca,* y la operación se *indica* colocando *el signo* — *que se lee* MENOS, *entre el minuendo y el sustraendo.*

39. El PRINCIPIO FUNDAMENTAL de esta operación puede enunciarse así: *para sustraer ó restar de un número el valor de otro, bastará restar de los valores representados por cada una de las cifras del minuendo, los que tengan las correspondientes del sustraendo* (*).

40. Los casos que pueden ocurrir son tres: 1.° Que *el sustraendo y la diferencia solo tengan una cifra;* 2.°, *que el sustraendo tenga una y la diferencia varias;* 3.°, *que el sustraendo y la diferencia tengan varias cifras.*

El minuendo, en el primer caso, tendrá solo una ó dos ci-

(*) Damos por reproducida la nota del párrafo 34.

fras, puesto que deberá ser menor que 10 + 9, ó 19; en el segundo y tercero, tendrá varias forzosamente.

1.°—*Para restar de un entero menor que* 19 *otro de una sola cifra, cuando la diferencia ha de tener también una, basta saber de memoria las que se deducen* inmediatamente *de la tabla de sumar* (35, 1.°).

2.°—*Para restar de un número mayor que* 18 *otro de una sola cifra, basta restarlo de las unidades del minuendo, añadiéndoles, si es preciso, una de orden superior, ó lo que es igual,* 10 *del que se considera, unidad que se rebajará de la correspondiente cifra del minuendo ó de la primera que no sea* 0, *conservando lo mismo las superiores,* puesto que el minuendo no variará añadiéndole y quitándole un mismo número.

3.°—*Para restar dos enteros cualesquiera, basta restar del valor de cada cifra del minuendo el de la correspondiente del sustraendo, agregando á la primera, si es menor que la segunda,* 10 *unidades de aquel orden y rebajando* 1 *á la superior del minuendo, ó á la primera que no sea* 0, segun el principio fundamental (*).

41. La PRUEBA DE LA SUSTRACCIÓN, puede hacerse, *sumando el sustraendo con la diferencia y viendo si el resultado es igual al minuendo* (37).

8.ª

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS.—PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE LA MULTIPLICACIÓN.—ABREVIACIONES Y PRUEBA DE LA MULTIPLICACIÓN.

42. La MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS, tiene por objeto, *encontrar el resultado de hacer á un número tantas veces mayor como unidades tiene otro* (**).

Los números dados se llaman FACTORES; *el que se busca,*

(*) No es esta la regla que suele seguirse, pero sí la única que puede hacerse comprender cuando no se sabe cómo influyen en el resultado las alteraciones de los números conocidos, cuestión importantísima, pero de la cual el Programa no dice una palabra.

(**) No damos la definición general, porque la pregunta se refiere única y exclusivamente á los enteros, lo que parece indicar que se pide una particular que solo á ellos sea aplicable, aunque esto no conduzca á más resultado que confundir y fatigar la memoria inútilmente.

producto, y la operación *se indica* colocando entre los factores *el signo* $\times$ ó *un punto,* que se lee MULTIPLICADO POR; ó simplemente POR.

43. Como PRINCIPIO FUNDAMENTAL de la multiplicación, puede admitirse que: *para multiplicar dos enteros bastaria tomar por sumando á uno de ellos tantas veces como unidades tuviese el otro,* siendo *indiferente el orden en que se consideren*, en razón á que pudiendo descomponerse cada uno en el conjunto ó suma de las unidades simples que represente, el total de las contenidas en el producto sería siempre el mismo (*).

44. La operación se ABREVIA *por medio de los procedimientos que la constituyen*, y que expondremos en la pregunta siguiente, *omitiendo la multiplicación por 0 siempre que se presente* y en los dos casos particulares siguientes:

1.º—*Multiplicar un entero por la unidad seguida de ceros.*

Como según lo dicho en la numeración (27), por cada 0 que escribamos á la derecha del primero representarán todas las cifras, y por consiguiente el número, unidades 10 veces mayores,

Para multiplicar un entero por la unidad seguida de ceros, basta escribir á su derecha tantos ceros como tenga el segundo factor.

2.º—*Multiplicar un entero por otro que termine en ceros.*

Hacer á un número 3000 veces mayor, por ejemplo, será lo mismo que tomarlo 3000 veces por sumando, y como cada grupo de 3 sumandos sería el producto del otro entero por 3, y en totalidad habría 1000 de estos grupos,

Para multiplicar un entero por otro que termine en ceros, puede prescindirse de éstos y escribirlos á la derecha del producto que así resulte (**).

45. Para hacer la PRUEBA de la multiplicación, bastará *repetirla cambiando el orden de los factores,* lo que no deberá alterar el valor del resultado (43).

(*) Repetimos lo dicho en las notas correspondientes á los párrafos 34 y 39.

(**) Confesamos ingenuamente que no comprendemos bien qué clase de abreviaciones pueden exponerse antes de conocer los casos que ocurren en la multiplicación y las correspondientes reglas que constituyen parte de la pregunta siguiente al parecer. No estamos, pues, seguros de haber interpretado bien el sentido de la que nos ocupa.

9.ª

CASOS QUE PUEDEN OCURRIR EN LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS ABSTRACTOS.—PRODUCTOS DE VARIOS FACTORES.—MÚLTIPLO DE UN NÚMERO.

46. LOS CASOS QUE PUEDEN OCURRIR EN LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS ABSTRACTOS son tres: 1.° *multiplicar dos números de una sola cifra*; 2.°, *multiplicar un número de varias cifras por otro de una sola*; 3.°, *multiplicar dos números de varias cifras*.

1.°—*Para multiplicar dos números de una sola cifra basta saber de memoria la tabla de multiplicar*, que puede formarse de varios modos, tomando por sumando á los nueve primeros enteros tantas veces como unidades tiene cada uno de ellos.

2.°—*Para multiplicar un número de varias cifras por otro de una sola, se multiplica cada cifra del primero por el segundo y se suman los productos parciales, teniendo en cuenta el orden de unidades que cada uno representa*, lo que equivaldria á aplicar el método que se deduce del principio fundamental (43).

3.°—*Para multiplicar dos números enteros cualesquiera, se multiplica uno de ellos por cada una de las cifras del otro y se suman los productos parciales, teniendo en cuenta el orden de unidades que cada uno representa*, por la misma razón.

47. PRODUCTOS DE VARIOS FACTORES, son los *resultados de multiplicar el producto de dos por un tercero, el que resulte por otro y así sucesivamente.*

De lo dicho para dos (43) es fácil deducir que: *el orden en que se multipliquen los factores no alterará el valor del producto.*

48. MÚLTIPLO DE UN NÚMERO, es el *resultado de multiplicarle por cualquier entero*, ó lo que es lo mismo, *el que contiene á este número exactamente.*

10.

DEFINICIÓN DE LAS POTENCIAS Y MODO DE INDICARLAS.

49. POTENCIAS, son los *resultados de multiplicar un número por sí mismo una ó más veces.*

El *número dado* se llama BASE, y *el que indica cuántas ve-*

ces se ha de tomar por factor, EXPONENTE de la base, ó GRADO de la potencia.

50. Las potencias se INDICAN *escribiendo la base, y en la parte superior de su derecha el exponente, con carácter más pequeño.*

II.

DIVISIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS.—NOMBRES DE LOS NÚMEROS QUE ENTRAN EN ESTA OPERACIÓN.—CASOS QUE DEBEN DISTINGUIRSE EN LA DIVISIÓN.

51. La DIVISIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS, como la de todos los demás, tiene por objeto, *dado un número que se considera como producto de otros dos y uno de éstos, hallar el otro* (*).

LOS NOMBRES DE LOS NÚMEROS QUE ENTRAN EN ESTA OPERACIÓN, son los siguientes: DIVIDENDO y DIVISOR, *el producto y factor conocidos;* COCIENTE, *el factor buscado;* COCIENTE ENTERO, *el mayor número de veces que el dividendo contiene al divisor;* y RESTO, *la diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente entero.*

Cuando el verdadero cociente y el entero son uno mismo, el resto es 0 y la división se llama EXACTA; en *caso contrario* recibe el nombre de INEXACTA.

52. LOS CASOS QUE DEBEN DISTINGUIRSE EN LA DIVISIÓN no pueden precisarse, pues aunque todos los autores distinguen tres para facilitar la explicación, no están conformes sobre cuál *debe* ser el segundo.

Lo más conveniente es distinguir estos tres: 1.°, *que divisor y cociente solo tengan una cifra;* 2.°, *que el divisor tenga varias y el cociente una;* 3.°, *que divisor y cociente tengan varias.*

El dividendo, en el primer caso, tendrá una ó dos cifras, puesto que deberá ser menor que 10.9, ó 90; en el segundo y

---

(*) Aunque también en este caso, como en el del párrafo 42, parece pedirse una definición particular, damos la general, porque de otra manera es muy difícil formarse idea clara de las divisiones inexactas y de la diferencia que en ella existe entre el verdadero cociente y el entero, puesto que si se dice *averiguar las veces que un número contiene á otro,* ó algo parecido, los cocientes enteros resuelven perfectamente la cuestión, y no hay por qué considerarlos como inexactos.

tercero tendrá varias forzosamente, tratándose de la división de enteros.

1.°—*Para dividir un entero menor que* 90 *por otro de una sola cifra cuando el cociente ha de tener también una, basta saber de memoria los que se deducen* inmediatamente *de la tabla de multiplicar,* para escribir el que corresponda si el dividendo es alguno de los productos exactos del divisor contenidos en ella, ó para reemplazar el dividendo dado por el mayor de estos productos contenidos en él, en cuyo caso el cociente entero (51) seria solo aproximado (14).

2.°—*Para dividir dos números de varias cifras cuando el cociente ha de tener una sola, se prescinde de todas las cifras del divisor menos de la primera de la izquierda y de igual número de la derecha del dividendo, dividiendo el número formado por las que quedan del último, que podrán ser una ó dos, por la primera del divisor, multiplicando el resultado por éste y restando el producto del dividendo.*

Si la sustracción no puede efectuarse, se disminuye en una unidad la cifra hallada y si es preciso en otra, etc., hasta que sea posible; la diferencia será el resto.

Esta regla es consecuencia de la composición del producto, en el 2.° caso de la multiplicación (46).

3.°—*Para dividir dos enteros cualesquiera, se consideran de la izquierda del dividendo tantas cifras como sean necesarias para que el divisor esté contenido en el número que representen y se efectúa la división para obtener la primer cifra del cociente; se multiplica esta cifra por el divisor y se resta del número que ha servido de dividendo, escribiendo á la derecha de la diferencia la cifra siguiente, y considerando el número así formado como un nuevo dividendo, se continúa la operación del mismo modo, hasta haber operado con la última cifra de la derecha y hecho la sustracción correspondiente.*

Si alguna resta no pudiera efectuarse, se rebajan una á una del valor de la cifra encontrada todas las unidades necesarias; la última diferencia será el resto.

Esta regla se deduce de la composición del producto, en el tercer caso de la multiplicación (46).

12.

Casos particulares ó abreviación de la división.—Prueba de la división.

53. Los casos particulares más importantes que en la división de enteros pueden ocurrir, son aquellos *en que el divisor tiene una cifra, ó es la unidad seguida de ceros.*

1.°—*Para dividir un número de varias cifras por otro de una sola, basta ir dividiendo por ésta cada una de las cifras del dividendo empezando por la izquierda, considerando cada resto parcial como decenas del dividendo siguiente,* según la misma regla general.

2.°—*Para dividir un entero por la unidad seguida de ceros, basta separar de su derecha tantas cifras como unidades tenga el divisor;* las separadas formarán el resto y las de la izquierda el cociente, en virtud de lo dicho en los párrafos 51 y 44, 1.°

54. La abreviación de la división tiene lugar siempre que se aplica la regla general que hemos dado (52, 3.°) y *suprimiendo los ceros en que debía terminar cada producto del divisor por la cifra hallada del cociente* para indicar el orden de sus unidades, *así como la escritura en cada resto de las cifras del dividendo, con las cuales no hay aún necesidad de operar en la división siguiente.*

También se abrevia en los casos particulares en que pueden aplicarse reglas más sencillas que la general (*).

55. La prueba de la división, puede hacerse *multiplicando el divisor por el cociente y agregando el resto al producto*, para ver si la suma es igual al dividendo (51).

13.

Quebrados comunes.—Su numeración.—Propiedad de los quebrados.

56. Quebrados ó *fracciones comunes, vulgares* ú *ordinarios*, son *los que se representan por medio de otros dos núme-*

(*) Los casos particulares y la abreviación de la división, son para nosotros cosas muy distintas, aunque en la pregunta aparezcan como sinónimas, á pesar de hallarse en plural la primer frase y en singular la segunda. La mayoría de los primeros no pueden tampoco exponerse sin otros conocimientos que el programa no exige, por lo menos explícitamente; tememos, pues, no haber acertado en la contestación por no tener costumbre de descifrar enigmas.

ros, que se llaman TÉRMINOS de los mismos; el NUMERADOR, que *indica cuántas partes de la unidad contiene*, y el DENOMINADOR, que *expresa en cuántas partes se considera dividida esa unidad* (10).

57. SU NUMERACIÓN queda reducida, por consiguiente, á *expresar y representar sus dos términos, de modo que se distingan bien uno de otro*, para lo cual se ha *convenido* en *escribir el denominador debajo del numerador*, separándolos por una línea horizontal ó algo inclinada, y en *expresarlo, añadiendo á su nombre la terminación* AVOS, á excepción de los *casos en que sea uno de los diez primeros enteros*, en los cuales se dan á las partes en que la unidad se considera dividida los nombres de *medios, tercios, cuartos, quintos, sextos, séptimos, octavos, novenos* y *décimos*. Así, pues:

1.º—*Para leer una fracción ordinaria, se lee el numerador y después el denominador, agregando la terminación* AVOS *si este es mayor que* 10, *ó dándole el nombre convenido si es menor*.

2.º—*Para escribir una fracción ordinaria se escribe el numerador y debajo el denominador, separados por una recta horizontal ó inclinada*.

58. La PROPIEDAD DE LOS QUEBRADOS más importante es que *numerador y denominador pueden multiplicarse ó dividirse exactamente por un mismo número sin que su valor se altere*; porque si, por ejemplo, hacemos por una parte *tres* veces más pequeñas aquellas en que la unidad se ha dividido, y por otra consideramos *tres* veces más partes, es evidente que el nuevo número y el primitivo serán iguales, ya que cada *tres* de las segundas equivaldrán á *una* de las primeras (*).

14.

REDUCCIÓN DE LOS QUEBRADOS Á UN COMÚN DENOMINADOR.

59. La REDUCCIÓN DE LOS QUEBRADOS Á UN COMÚN DENOMINADOR tiene por objeto *encontrar otros equivalentes ó de igual valor que los dados y cuyo denominador sea el mismo*.

(*) ¿A cuál querrá referirse la pregunta *propiedad de los quebrados*, cuando tantos tienen éstos? No creemos posible adivinarlo, y de entre las muchísimas de que gozan hemos escogido para contestar la que sirve de base á las dos preguntas siguientes.

Este denominador común puede ser el producto de todos, en cuyo caso, y en virtud de la última propiedad enunciada, bastará, para que las fracciones no cambien de valor, multiplicar sus respectivos numeradores por los denominadores de las restantes; luego,

Para reducir fracciones á un común denominador, puede multiplicarse cada numerador por el producto de los denominadores de las demás, poniendo á los resultados por denominador el producto de todos los denominadores (*).

15.

SIMPLIFICACIÓN DE LOS QUEBRADOS.—REGLA PARA VERIFICARLO (**).

60. La SIMPLIFICACIÓN DE LOS QUEBRADOS tiene por objeto *encontrar otros equivalentes á los dados, pero de términos menores.*

En virtud de la propiedad enunciada para esta clase de números (58), es evidente que:

Para simplificar una fracción, bastará dividir exactamente sus dos términos por los factores comunes que tengan ó por algunos de ellos (***).

16.

ADICIÓN DE LOS QUEBRADOS.—CASOS QUE SE DISTINGUEN EN ELLA.

61. La ADICIÓN DE LOS QUEBRADOS, como la de todos los números (33), tiene por objeto *reunir en uno solo los valores de varios.*

62. Los CASOS QUE SE DISTINGUEN EN ELLA *son cuatro,* según que los sumandos *tengan ó no igual denominador* y *estén combinados con enteros ó mixtos* (11).

(*) Bien sabemos que esta regla ni es la más conveniente bajo el punto de vista práctico, ni la mejor bajo el punto de vista científico; pero como nada se habla del mínimo común múltiplo hasta la pregunta 31, no es posible dar otra en este sitio.

(**) ¿Para verificar-*lo* qué? ¿*La* simplificación? Suponemos que sí.

(***) No ignoramos que esta regla es completamente ilusoria, sin conocer los caractéres de divisibilidad de los enteros, ó el modo de encontrar el máximo común divisor de los términos; pero no tenemos la culpa de que el programa omita por completo el estudio de los primeros y no se ocupe del segundo hasta la pregunta 30.

Como en el primero se referirán todos á partes iguales de la unidad, es evidente que reuniremos sus valores, refiriendo á esas mismas partes la suma de los numeradores; por consiguiente:

1.°—*Para sumar fracciones de igual denominador, se suman los numeradores, y á la suma se pone por denominador el mismo de los sumandos.*

2.°—*Para sumar fracciones de distinto denominador, se reducen á un denominador común y se efectúa después la suma.*

3.°—*Para sumar un entero con una fracción, ó convertir en fracción un número mixto, basta suponer al entero la unidad por denominador y aplicar la regla anterior,* lo que equivale á *multiplicar el entero por el denominador, agregar al producto el numerador y poner á la suma el mismo denominador de la fracción.*

4.°—*Para sumar números fraccionarios cualesquiera, se convierten en fracciones los enteros y mixtos y se aplica después la regla del segundo caso* (*).

17.

Sustracción de quebrados y casos que conviene distinguir en ella.

63. La sustracción de quebrados, como la de los enteros, tiene por objeto *encontrar la diferencia entre el minuendo y el sustraendo* (38).

64. Los casos que conviene distinguir en ella son también *cuatro,* según *que minuendo y sustraendo sean fracciones de igual ó distinto denominador* y *que uno de ellos sea entero ó mixto,* pudiendo también tener ambos la última forma y por razones análogas á las indicadas en la adición:

1.°—*Para restar dos fracciones de igual denominador, se restan los numeradores y se pone por denominador de la diferencia el denominador común.*

2.°—*Para restar dos fracciones de distinto denominador, se*

(*) No es esta la regla más conveniente, pero sí la única que puede darse cuando no se saben extraer los enteros que una fracción pueda contener, pregunta que no hemos encontrado en todo el programa, aunque es indispensable para contestar á otras.

reducen á un denominador común y se efectúa luego la sustracción.

3.°—*Para restar de un entero una fracción,* ó de una fracción un entero, *se multiplica el entero por el denominador, se resta el producto del entero,* ó éste de aquél, *y se pone á la diferencia el mismo denominador de la fracción.*

4.°—*Para restar números fraccionarios, cuando alguno de ellos ó ambos tienen forma de números mixtos, se convierten éstos en fracciones y se aplican después las reglas anteriores.*

18.

Multiplicación de quebrados.—Productos de varios factores quebrados.—Determinación del quebrado equivalente á un quebrado de quebrado.

65. La multiplicación de quebrados tiene por objeto: *encontrar un número que esté formado con respecto á uno de los factores, del mismo modo que el otro lo esté con respecto á la unidad* (*).

Teniendo presente, pues, que al multiplicar el numerador de una fracción por un entero haremos á la fracción tantas veces mayor como unidades tenga el entero, y que una fracción se forma dividiendo la unidad en partes iguales y reuniendo tantas como indica el numerador, es fácil deducir que:

1.°—*Para multiplicar una fracción por un entero, ó un entero por una fracción, basta multiplicar el numerador conservando el mismo denominador.*

2.°—*Para multiplicar dos fracciones, se multiplican los numeradores entre sí y después los denominadores, poniendo los respectivos productos por numerador y denominador del resultado.*

3.°—*Para multiplicar números fraccionarios cualesquiera, se convierten los mixtos en fracciones y se aplican las reglas anteriores* (**).

(*) Esta es la definición general, que hace innecesaria la de la pregunta 8.ª

(**) Tampoco esta regla es la que se sigue generalmente ni conviene seguir; pero no sabiendo combinar operaciones indicadas, cuestión de que no puede prescindirse, pero de la que para nada se ocupa el programa, es la única que puede aprenderse.

66. PRODUCTOS DE VARIOS FACTORES QUEBRADOS, son *los que resultan de multiplicar el de dos por un tercer factor, el resultado por otro, y así sucesivamente.*

67. No siendo una FRACCIÓN DE FRACCIÓN, más que el *resultado de reunir varias partes iguales de la segunda,* resultado que podrá representarse por un solo número encontrando el producto de ambas, según la definición que hemos dado de multiplicar (65),

La DETERMINACIÓN DEL QUEBRADO EQUIVALENTE Á UN QUEBRADO DE QUEBRADO, *se obtendrá* aun cuando el segundo lo sea á su vez de otro y así sucesivamente, *escribiendo por numerador el producto de todos los numeradores y por denominador el de los denominadores respectivos,* ó lo que es lo mismo, *efectuando el producto de todas las fracciones que lo compongan.*

19.

DIVISIÓN DE QUEBRADOS Y CASOS QUE TIENEN LUGAR EN ELLA. VALUACIÓN DE LOS QUEBRADOS ORDINARIOS.

68. La DIVISIÓN DE QUEBRADOS tiene por objeto, á semejanza de la de los enteros (50), *encontrar un número que multiplicado por el divisor produzca el dividendo* (51).

69. Respecto á los CASOS QUE TIENEN LUGAR EN ELLA, pueden reducirse á *cuatro*, según se trate de *dividir una fracción por un entero, dos fracciones, un entero por una fracción y cualesquiera de estos números ó un mixto por otro mixto y viceversa.*

70. Basta recordar el objeto de la División, así como las reglas dadas para la multiplicación de fracciones, considerando además que al multiplicar el denominador de una fracción por un entero, haremos á esta fracción tantas veces menor como unidades tenga el entero, para comprender que:

1.°—*Para dividir una fracción por un entero, será suficiente multiplicar el denominador por el entero conservando el mismo numerador.*

2.°—*Para dividir dos fracciones se multiplicará el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y el numerador de éste por el denominador de aquél, poniendo por nu-*

merador del resultado el primer producto y por denominador el segundo.

3.°—*Para dividir un entero por una fracción, se supondrá al primero la unidad por denominador* y se aplicará la regla anterior, lo que equivale á *multiplicar el entero por el denominador de la fracción y poner por denominador del producto el numerador de la misma.*

4.°—*Para dividir números fraccionarios cualesquiera, se convierten los mixtos en fracciones y se aplican las reglas anteriores.*

71. La VALUACIÓN DE LOS QUEBRADOS ORDINARIOS, debe tener por objeto *formarse idea clara del valor de estos quebrados,* cuando por tener sus términos varias cifras no es fácil apreciarlo con la exactitud ó aproximación deseada, y *para ello* debe ante todo *dividirse, si es posible, el numerador por el denominador, para ver las unidades enteras que contiene el quebrado,* siendo entonces evidente que EL VALOR DE ÉSTE será el mismo que *el del número mixto que resulte de escribir el cociente entero, seguido de una fracción cuyo numerador sea el resto de la división y que tenga por denominador el que ha servido de divisor.*

72. Si esta fracción no nos da todavía clara idea de su valor, ó si en la propuesta no ha podido efectuarse la división por ser el numerador más pequeño que el denominador, lo único que puede hacerse es *descomponer aquél en sumandos que sean divisores exactos del denominador, poner éste á cada uno de los sumandos y simplificar las fracciones en que la primera se habrá descompuesto,* con lo cual obtendremos otras cuyos numeradores serán iguales á la unidad y los denominadores relativamente pequeños, por cuyo medio comprenderemos con facilidad los *medios, tercios, cuartos,* etc., que estaban contenidos en la primitiva (*).

(*) No obstante el desuso en que la frase ha caido, sabemos lo que antiguamente se entendía por *valuar un quebrado concreto,* pero ignoramos en absoluto lo que quiere decir valuar un quebrado abstracto, si es que quiere decir algo; y de números abstractos hemos tratado hasta aquí, sin que en las preguntas del Programa se haya advertido otra cosa, ni empiecen á considerarse los concretos hasta la que lleva el núm. 24.

Contestamos, por consiguiente, lo único que sobre este punto se nos ha podido ocurrir, aprovechando la ocasión para enseñar á extraer los enteros de los que-

20.

Quebrados decimales.—Su numeración.—Propiedades de los números decimales.

73. Llámanse QUEBRADOS DECIMALES, á *los que tienen por denominador la unidad seguida de ceros y se expresan y representan de un modo análogo al de los enteros.*

74. SU NUMERACIÓN, en efecto, *puede ser idéntica*, ya que según el convenio establecido en la de los enteros (27), una cifra colocada á la derecha de otra representará unidades diez veces menores que las representadas por esta otra; por lo cual, dando á las partes decimales de la unidad la terminación *ésimas*, para distinguirlas de las ordinarias, así como las cifras de la izquierda de las unidades representan decenas, centenas, millares, decenas de millar, etc., las de la derecha representarán *décimas, centésimas, milésimas, diezmilésimas* y así sucesivamente, bastando emplear en la escritura un signo cualquiera que marque el lugar de las unidades simples, para poder representar las fracciones decimales de la misma manera que los números enteros y expresarlas y leerlas de un modo análogo.

Este SIGNO se ha convenido en que sea *una coma, colocada á la derecha de las unidades, en la parte superior ó inferior*, y en virtud de este convenio:

1.°—*Para escribir una fracción decimal cualquiera, bastará escribir las cifras que representen el número de unidades de cada orden que contenga, empezando por las superiores, colocando* 0 *en los lugares correspondientes á los órdenes que falten y una coma después de la cifra de las unidades.*

2.°—*Para leer una fracción decimal cualquiera, se divide en secciones de á seis cifras empezando por la derecha, subdividiendo cada una de éstas en dos para marcar el lugar de los millares, y en seguida se leen de izquierda á derecha como si el número fuese entero, añadiendo al final la denominación que correspondería á las unidades si se leyesen las últimas, seguida de la palabra ésimas.*

---

brados que los contengan; cuestión indispensable para contestar á la 24, aunque para nada se haya hecho mención de ella, y dar una ligerísima idea de la descomposición de los mismos en partes alícuotas.

También pueden leerse por separado, y es lo más frecuente, la parte entera y la fraccionaria.

75. Las PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS DECIMALES más importantes y que se deducen inmediatamente de su numeración, son las siguientes (*):

1.º—*Una fracción decimal no varia aunque á su derecha se escriba cualquier número de ceros,* puesto que seguirá conteniendo igual número de unidades de cada orden.

2.º—*Si se corre la coma en una fracción decimal hacia la derecha ó hacia la izquierda, la fracción quedará multiplicada ó dividida por la unidad seguida de tantos ceros como lugares se haya corrido*, según el convenio de la numeración decimal (27).

21.

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE LOS NÚMEROS DECIMALES.

76. Siendo el principio fundamental de la Adición (34) independiente del orden que representen las diferentes cifras, las reglas dadas para hallar la suma y diferencia de números enteros, serán también aplicables á los fraccionarios decimales.

La ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE LOS NÚMEROS DECIMALES, cualesquiera que sean, se efectuarán, por tanto, *como la de los enteros,* pero teniendo en general los sumandos fraccionarios distinto número de cifras después de la coma, es muy fácil equivocarse al sumar ó restar las cifras correspondientes á iguales órdenes de unidades, inconveniente que puede evitarse escribiendo los números dados unos debajo de otros de manera que las comas se correspondan en columna vertical; y como por otra parte es conveniente empezar las operaciones por la derecha, para facilitar el aumento ó disminución de las cifras cuando sea preciso, las reglas que en la práctica conviene seguir son las siguientes:

1.º—*Para sumar números decimales cualesquiera, se colocan los sumandos unos debajo de otros de manera que se co-*

(*) Los *números decimales*, es decir, todos los expresados y representados con arreglo al sistema de numeración decimal, tienen tantas *propiedades*, que su sola enunciación podría ocupar extensos y numerosos volúmenes, que harían inútiles todas las preguntas siguientes; renunciamos, pues, á contestar ésta, limitándonos á dejar consignadas las dos más sencillas y fundamentales.

rrespondan las cifras de las unidades y se suman todas las que se refieren á iguales órdenes, empezando por la derecha, sin escribir más que las que correspondan en cada suma parcial al orden considerado, reteniendo en la memoria las que puedan resultar del superior, que se añaden á la columna siguiente.

2.° —*Para restar números decimales cualesquiera, se coloca el minuendo encima del sustraendo, de manera que se correspondan las cifras de las unidades, y del valor de cada una de las del minuendo se resta el de las correspondientes del sustraendo, empezando por la derecha para poder agregar de memoria diez unidades á las últimas cuando alguna sustracción parcial no pudiera efectuarse y disminuir una unidad á la de orden superior del minuendo* (*).

En ambas operaciones es también costumbre separar del resultado los números conocidos, por medio de una recta.

22.

Multiplicación de números decimales.—Casos que pueden ocurrir y regla para cada uno de ellos.

77. La multiplicación de números decimales, es una consecuencia inmediata de la propiedad que estos números tienen cuando se corre la coma hacia la derecha (75, 2.ª), puesto que en virtud de la misma (**),

Para multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros, bastará correr la coma hacia la derecha tantos lugares como ceros acompañen á la unidad, escribiendo los que sean necesarios para que la última cifra ocupe el lugar correspondiente á las unidades, si no hubiese bastantes después de la coma.

78. Los casos que se distinguen generalmente, además de éste, son aquellos en que *un factor es entero y otro fraccionario decimal*, en que *todos tienen esta última forma*, y *en que hay factores de ambas clases*.

Fácil sería deducir una regla para cada uno de ellos; pero

(*) Damos por reproducida la nota del párrafo 40.

(**) Juzgamos inútil definir por tercera vez la multiplicación (42 y 65).

si se tiene en cuenta que al suprimir la coma en los fraccionarios decimales quedan multiplicados por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tengan después de aquélla, y que, por tanto, el producto que resulte de aplicarles la regla de los enteros (46), será tantas veces mayor que el verdadero como indique la unidad seguida de tantos ceros como cifras posteriores á las comas haya entre todos los factores bastando para restablecer el valor de aquél, colocar la coma en el lugar necesario para que las unidades ocupen el que les corresponda, se comprenderá que todas pueden reducirse á la siguiente:

Para multiplicar números decimales cualesquiera, se efectúa el producto por la regla de los enteros, prescindiendo de las comas, y después se separan de su derecha tantas cifras cuantas tengan después de aquéllas entre todos los factores (*).

79. También en este caso es costumbre, para facilitar la práctica, escribir un factor debajo del otro, empezar la multiplicación por la derecha para escribir de memoria cada producto parcial, colocar la primer cifra de éste debajo de aquella por la cual se ha multiplicado para que se correspondan en columna las que representan iguales órdenes, y separar los factores de los productos parciales por medio de una recta.

23.

DIVISIÓN DE NÚMEROS DECIMALES Y CASOS QUE SE DISTINGUEN.— VALUACIÓN DE LOS QUEBRADOS DECIMALES.

80. La DIVISIÓN DE NÚMEROS DECIMALES, se funda también en la propiedad que tienen cuando se corre la coma hacia la izquierda (75, 2.º), pues en virtud de ella (**),

Para dividir un número decimal por la unidad seguida de ceros, bastará correr la coma hacia la izquierda tantos lugares como ceros acompañen á la unidad, escribiendo á la izquierda del dividendo los que sean necesarios, si no tuviese bastantes cifras.

(*) Damos esta sola regla en vez de contestar al texto literal de la pregunta, porque el distinguir varios casos y enunciar diferentes *reglas para cada uno de ellos*, sólo puede obedecer á la idea preconcebida de dificultar el estudio, idea de la que no queremos hacernos cómplices una vez más.

(**) Reproducimos la nota del núm. 77.

81. Los casos que se distinguen además de éste, ó por lo menos los que conviene distinguir, son dos, según *que el divisor sea entero, ó fraccionario decimal* (*).

Las reglas correspondientes á cada uno de ellos son consecuencia inmediata de la dada en la multiplicación (78) y de la propiedad de todas las fracciones (58), pudiendo enunciarse así:

1.°—*Para dividir cualquier número decimal por un entero, se efectúa la división prescindiendo de la coma, y de la derecha del cociente, se separan tantas cifras cuantas después de la coma tuviese el dividendo;*

2.°—*Para dividir cualquier número decimal por un fraccionario, también decimal, se suprime la coma en el divisor, se corre hacia la derecha en el dividendo tantos lugares como cifras posteriores á ella tenía el divisor, escribiendo si es preciso los ceros necesarios y luego se efectúa la división* por la regla de los enteros ó por la anterior, según que el dividendo haya resultado entero ó fraccionario decimal.

82. La valuación de los quebrados decimales, puede hacerse separando la parte entera y después una á una las cifras que sigan á la coma, con lo cual se verán claramente las unidades enteras y las décimas, centésimas, milésimas, etc., que el número contiene (**).

24.

Números complejos.—Reducción de un número complejo ó incomplejo de una especie cualquiera distinta de la inferior (***).—Adición y sustracción de números complejos.

83. Son números complejos, los *concretos* (16) *que se refieren á diferentes unidades de una misma naturaleza.*

(*) Hay quien distingue además el caso de dividir un entero por un decimal, comprendido en el segundo de los que nosotros enunciamos, y no estando conformes los autores, no es tampoco posible contestar con precisión á la pregunta tal como está redactada.

(**) Repetimos lo dicho en la nota del párrafo 72

(***) ¿Reducción á qué? ¿Cómo puede un número complejo ser de una especie distinta de la inferior? Confesamos que nos es absolutamente imposible entender la pregunta, por lo que renunciamos á contestarla, incluyendo en su lugar todas aquellas reglas que juzgamos indispensables para comprender las siguientes, aun cuando ya sabemos que cuanto se diga en las 24, 25 y 26 ha de ser perfectamente incomprensible para quien no tenga idea de lo que es un sistema de unidades concretas, cuestión que no empieza á tratarse hasta la 27.

Los que se refieren á una sola, se llaman INCOMPLEJOS.

84. Como los números concretos no son sino abstractos acompañados del nombre de la unidad concreta á que se refieren, bastan los conocimientos hasta aquí adquiridos para que puedan con facilidad deducirse las siguientes reglas:

1.ª—*Para convertir un número incomplejo en otro equivalente que se refiera á unidad inferior, se multiplica dicho número por el que indica las veces que una de las propuestas contiene á la que se pide.*

2.ª—*Para convertir un número incomplejo en otro equivalente que se refiera á unidad superior, se divide dicho número por el que indica las veces que una de las propuestas está contenida en la que se pide.*

3.ª—*Para reducir un complejo á incomplejo de unidad determinada, se convierten las de orden superior en las equivalentes de la inmediata, agregando al producto las que contenga de ésta; se repite con la suma la misma operación, y así sucesivamente hasta haber añadido las últimas, y luego se convierte el resultado incomplejo en el equivalente que se refiera á la unidad pedida* (1.ª y 2.ª).

4.ª—*Para convertir un incomplejo en complejo que se refiera á unidades superiores, se refiere á la inmediata* (2.ª), *haciendo lo mismo con el cociente entero y los demás que vayan resultando, hasta que se llegue á uno menor que el divisor que le corresponda; el último cociente entero y los restos que se hayan obtenido con las denominaciones respectivas, formarán el complejo pedido.*

5.ª—*Para convertir un incomplejo* (que forzosamente tendrá que ser fraccionario) *en complejo equivalente referido á unidades inferiores, se efectúa la división del numerador por el denominador, y así sucesivamente, hasta obtener un cociente exacto ó haber llegado á la unidad inferior.* El complejo formado con todos los cocientes parciales seguidos de las denominaciones que les correspondan, será el pedido.

A esta transformación es á la que antiguamente se llamaba, *valuar un quebrado.*

85. La ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS, que solo es posible cuando son de igual naturaleza, puede efectuarse *convirtiéndolos en incomplejos que se refieran á la misma unidad,*

siendo evidente que *éstos podrán sumarse y restarse como si fueran abstractos*, prescindiendo de su denominación, que también corresponderá al resultado; pero de los mismos principios fundamentales (34 y 39) de estas operaciones, se desprenden las siguientes reglas más sencillas (*):

1.ª—*Para sumar números concretos, cuando entre los sumandos haya algún complejo, se escriben unos debajo de otros, de modo que las denominaciones se correspondan, y se empiezan á sumar por la derecha las unidades del mismo nombre, agregando á la suma de las superiores las que de ellas puedan resultar, sin escribir más que las restantes.*

2.ª—*Para restar dos números concretos, cuando uno por lo menos sea complejo, se restan de cada grupo de unidades del minuendo los correspondientes del sustraendo,* que se escribe debajo, de manera que las denominaciones se correspondan, *añadiendo á los primeros una unidad superior referida á la que se considera, la cual se quita después, si alguna de las restas no pudiera efectuarse* (**).

25.

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS.—CASOS QUE SE DISTINGUEN.

86. La MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS, como la de todos los concretos (***), tiene generalmente por objeto, *encontrar la equivalencia de varias unidades cuando se conoce la de una,* y puede efectuarse convirtiendo en incomplejos los factores que no lo sean, en cuyo caso *podrían multiplicarse como abstractos* dando al producto la denominación que le correspondiese, según el enunciado de la cuestión, y convirtiéndolo luego en incomplejo que se refiriese á la pedida, si fuera otra diferente, aunque entonces sería preferible hacer esta transformación auxiliar con el correspondiente factor, antes de efectuar la operación (****).

(*) Respetamos, como hay que respetar siempre lo inconcebible, las razones que el autor del Programa habrá tenido para suprimir por completo, no sólo la definición, sino cuantas reglas se refieren á incomplejos; pero como sin conocerlas es de todo punto imposible operar con complejos, nos vemos en la absoluta precisión de indicarlas cuando menos.

(**) Véanse las notas de los párrafos 40 y 76.

(***) ¿Se habrá querido decir esto?

(****) Repetimos lo dicho en la antepenúltima nota.

87. Los casos que se distinguen en la multiplicación de complejos, no pueden ser más que dos: *multiplicar un complejo por un incomplejo* y *multiplicar un incomplejo ó complejo, por un complejo.*

No reduciendo á incomplejos todos los factores de forma compleja, pueden seguirse las siguientes reglas para realizar la operación, cuya verdad se comprende desde luego:

1.ª—*Para multiplicar un número complejo por un incomplejo, se convierte éste en otro que se refiera á la misma unidad cuya equivalencia se dé en el enunciado de la cuestión, si no estaba ya referido á ella, y después se multiplica por cada uno de los que forman el complejo,* empezando por la derecha, para agregar con más facilidad las unidades superiores que puedan resultar de cada multiplicación parcial, convirtiendo si es necesario, el producto, en incomplejo que se refiera á la unidad pedida.

2.ª—*Para multiplicar un incomplejo ó complejo por un complejo, es suficiente convertir éste en incomplejo* que se refiera á la misma unidad cuya equivalencia se dé en el enunciado de la cuestión, y efectuar luego la multiplicación por las reglas anteriores.

26.

División de números complejos.—Casos que ocurren cuando dividendo y divisor son de diferente género y modo de ejecutar la operación cuando son de igual género.

88. En la división de números complejos, como en la de todos los concretos, podemos proponernos dos objetos: 1.° *encontrar el equivalente de una unidad*, cuando se conozca el de varias y el número de ellas, y 2.°, *encontrar el número de unidades*, cuando se conozca lo que equivale á todas y á una de ellas.

En el primer caso, han de ser dividendo y divisor de naturaleza diferente; en el segundo, de la misma.

89. Los casos que ocurren cuando dividendo y divisor son de diferente género, tratándose de complejos, solo pueden ser dos análogos á los de la multiplicación: *dividir un complejo por un incomplejo y un incomplejo ó complejo, por un complejo.*

90. En ambos puede efectuarse la división reduciendo los

complejos á incomplejos, porque la de números que tuviesen esta última forma, es evidente que *podría efectuarse como la de los números abstractos,* después de convertir el divisor en incomplejo que se refiera á las mismas unidades que el enunciado de la cuestión, dando al cociente la denominación del dividendo y transformándolo luego, si fuera preciso, en complejo ó incomplejo referido á las unidades que se pidan (*).

91. En la práctica, no obstante, es preferible casi siempre seguir las siguientes reglas, que es fácil deducir de las dadas para la multiplicación:

1.ª—*Para dividir un número complejo por un incomplejo, se transforma éste en otro, si es preciso, que se refiera á las mismas unidades que el enunciado de la cuestión, y se divide por él cada uno de los que forman el dividendo,* empezando por los que expresen unidades superiores, para agregar los restos al inmediatamente inferior, después de referidos á igual unidad, *formando un complejo con todos los cocientes parciales, que llevarán igual denominación que los dividendos respectivos.*

2.ª—*Para dividir dos números concretos, siendo el divisor complejo, se reduce á incomplejo equivalente que se refiera á iguales unidades que el enunciado de la cuestión* y se efectúa luego la división por las reglas anteriores.

92. Respecto al MODO DE EFECTUAR LA OPERACIÓN CUANDO SON DE IGUAL GÉNERO dividendo y divisor, poco tenemos que decir, pues en este caso siempre *se han de convertir en incomplejos referidos á la misma unidad y dividirlos como si fueran abstractos,* dando al cociente la denominación que se deduzca del enunciado de la cuestión, y haciendo luego la necesaria transformación, si no fuera la que se pide.

27.

SISTEMAS DE PESAS Y MEDIDAS (**).—SISTEMA ANTIGUO DE MEDIDAS CUADRADAS Y CÚBICAS.—NOCIONES PARA SU INTELIGENCIA.

93. Llámanse SISTEMAS DE PESAS Y MEDIDAS, á los *conjuntos de unidades concretas adoptadas por las diferentes naciones,*

(*) Reproducimos lo dicho en las notas correspondientes á los párrafos 85 y 86.
(**) Puesto que así está escrito, hemos de respetar la impropiedad del nombre.

comarcas ó pueblos, *para determinar, por su comparación con ellas, las magnitudes de las cantidades.*

94. Sistema antiguo de medidas cuadradas y cúbicas, puede llamarse á *cualquiera de los innumerables que han usado los diferentes pueblos* y que ya no usan, por lo menos legalmente, para apreciar por medio de unidades de forma cuadrada ó cúbica, las áreas y volúmenes de las superficies y cuerpos (*).

Estas unidades han sido siempre los cuadrados y cubos de las de longitud, y por lo tanto, es imposible formarse idea de ellas, sin poseer antes las siguientes nociones para su inteligencia (**).

95. Medida de una cantidad, es la expresión numérica y concreta de su magnitud.

Cuerpo físico, todo *cuanto puede impresionar al sentido del tacto.*

Cuerpo matemático, *la parte del Espacio que puede considerarse extensa en tres sentidos.*

Volumen, *la medida de un cuerpo.*

Superficie, *la extensión considerada solo en dos sentidos.*

Área, *la medida de una superficie.*

Línea, *la extensión considerada solo en un sentido.*

Longitud, *la medida de una línea.*

Punto, *la línea cuya longitud se ha reducido á cero.*

Línea recta, *la que tiene todos sus puntos en la misma dirección.*

Ángulo rectilíneo, diedro ó poliedro, *la inclinación de dos rectas, de dos superficies ó de varias que concurren en un mismo punto.*

Figura, *la forma de una extensión.*

Lados, *las partes limitadas de líneas que determinan las figuras superficiales.*

Caras, *las partes limitadás de superficies que determinan las figuras de los cuerpos.*

(*) Prescindiendo de la incomprensible importancia que aquí se da á las llamadas, también impropiamente, cuadradas y cúbicas, suprimiendo todas las demás, incluso las de longitud de que se derivan, no detallamos ninguna, porque la palabra *antiguo* no precisa ningún sistema determinado.

(**) Siempre habíamos creído que las *nociones para la inteligencia* de una cosa cualquiera, debían tenerse antes de definirla y hablar de ella; pero segun parece, no es así.

Cuadrado, *la figura superficial cerrada por cuatro rectas de igual longitud, que al concurrir en un punto dos á dos, forman cuatro ángulos, también iguales entre sí.*

Cubo, *el cuerpo cerrado por seis cuadrados iguales.* Los ángulos rectilíneos, diedros y poliedros que determinan los lados de sus caras y ellas mismas, son también iguales entre sí respectivamente (*).

28.

Idea general del nuevo sistema de pesas y medidas.

96. El nuevo sistema de pesas y medidas, único que hoy es legal en España y otras naciones que igualmente lo han adoptado, se llama métrico decimal, porque *las unidades que lo constituyen se derivan de otra que se considera como* base *del sistema, llamada* metro, *y porque todas las de una misma naturaleza son* diez *veces mayores que la inmediatamente inferior,* á excepción de las de superficie y Espacio (cuadradas ó cúbicas), que lo son *cien* y *mil* veces respectivamente.

97. Además del *metro*, unidad de longitud, base del sistema, pueden considerarse como fundamentales del mismo el gramo y el litro, de *peso* la primera y de *capacidad* la segunda, porque las restantes no son sino múltiplos y divisores de éstas, cuyos nombres se forman de los suyos, anteponiendo las palabras tomadas del griego y del latín,

Miria, Kilo, Hecto, Deca, Deci, Centi, Milí,

que significan respectivamente,

Diezmil, Mil, Cien, Diez, Décima, Centésima, Milésima,

y que, por tanto, expresarán magnitudes iguales á las de aquéllas, multiplicadas respectivamente por

10000, 1000, 100, 10, 0'1, 0'01, 0'001.

98. De este modo se ha logrado constituir un sistema que, entre otras de menor importancia, presenta sobre todos los restantes las siguientes ventajas:

1.ª—Tener *una sola unidad base del sistema, de la cual de-*

(*) Como tampoco se indica ni remotamente el alcance y extensión que estas nociones deben tener, nos limitamos á las indispensables para que pueda comprenderse el sentido de las palabras que antes nos hemos visto obligados á emplear.

pendan todas las demás, con lo cual se evita la posible pérdida de éstas.

2.ª—Estar *tomada esta base de la misma Tierra* que todos habitamos, con lo cual se facilita su adopción por los diferentes pueblos.

3.ª—Ser *probablemente invariable,* por lo que en caso de pérdida podria obtenerse otra vez sin gran trabajo.

4.ª—Conocer *su relación de magnitud con otras longitudes que tampoco es fácil varíen,* lo que en el caso supuesto evitaría su determinación directa.

5.ª—*Formarse todas las unidades derivadas de las tres nombradas, multiplicando ó dividiendo las de igual naturaleza por una unidad decimal de cierto orden,* lo que facilita mucho todas las operaciones de transformación.

6.ª—*Formarse también de un modo idéntico y sencillo los nombres de todas esas unidades,* con lo cual, por su sólo enunciado, se comprende cuál será su magnitud, y se evita el tener que recordar la multitud de nombres diferentes y caprichosos que reciben las de los otros sistemas, así como sus respectivas relaciones (*).

29.

Propiedades de los números.—Números primos y compuestos.—Regla para averiguar si un número es ó no primo.—Números primos entre sí.

99. Propiedades de los números, son los *diferentes hechos particulares que á los mismos se refieren,* sea considerándolos en sí mismos, sea relacionándolos con otros, pero exclusivos de un número ó de una forma de números; es decir, no *comunes á todos ellos,* pues en este caso, el *hecho,* recibe el nombre de ley (**).

(*) Aunque estas solas nociones no conducen á ningún fin científico ni práctico, son las únicas que á lo más exige la pregunta, puesto que ni aun tantas serian necesarias para dar una *idea general* del sistema, que es lo pedido, suponiendo que con las palabras *nuevo sistema* quiera indicarse el métrico-decimal, de lo que tampoco podemos estar muy seguros.

(**) Esta pregunta, como la del párrafo 75, ó nada dice, en cuyo caso nada puede contestarse á ella, ó dice tanto, que el resultado es el mismo; pues por mucho que su sentido quiera limitarse, las *propiedades de los números* comprenden, por lo menos, el estudio de toda la Aritmética pura y aplicada, de toda el Algebra elemental y superior y de todo el Cálculo diferencial é integral.

100. Números primos, son los que *no tienen más divisores, ó factores enteros y exactos, que ellos mismos y la unidad.*

Compuestos, *los enteros que tienen algún factor exacto de la misma forma, distinto de ellos mismos y la unidad,* y que, por tanto, pueden siempre descomponerse en factores primos, ó lo que es lo mismo, pueden siempre considerarse como un producto de factores primos.

101. La regla para averiguar si un número es ó no primo más comunmente empleada, consiste *en dividirle por todos los enteros mayores que* 1, ó mejor, solamente por los que sean primos, *hasta llegar á un cociente exacto ó menor que el divisor.*

En el primer caso, es evidente que el número será compuesto, ya que podría obtenerse multiplicando el divisor por el cociente (50); en el segundo será primo, porque como el cociente iría disminuyendo á medida que aumentase el divisor, ninguno mayor que el último empleado podría dividirle exactamente, en razón á que entonces también le dividiría el cociente, que sería menor.

102. Números primos entre sí, son *los que no tienen más factor común entero que la unidad.*

30.

Máximo común divisor.—Regla para determinar el máximo común divisor de dos números.

103. El máximo común divisor, como indica su mismo nombre, no es más que *el mayor divisor común á varios números,* y suele representarse por las iniciales *m. c. d.*

104. Cuando solo se trate de *dos*, es evidente que *si el menor dividiera al mayor, aquél sería el máximo común divisor,* puesto que todo número se divide exactamente á sí mismo y ninguno mayor que él puede dividirle con exactitud.

Si esto no se verifica, *cuantos números estén contenidos exactamente en el dividendo y el divisor, lo estarán también en el resto,* diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente (51) y *cuantos lo estén en el resto y divisor lo estarán en el dividendo,* suma del resto y de dicho producto (55); luego si el resto dividiera al divisor, ese resto sería el máximo común divisor, y si no, podría continuarse el razonamiento de un modo análogo.

Lo dicho basta para comprender la verdad de la siguiente

REGLA PARA DETERMINAR EL MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE DOS NÚMEROS. *Se divide el mayor por el menor, el divisor por el resto, y si es preciso se continúa dividiendo ese primer resto por el nuevamente obtenido, este segundo por el tercero, el tercero por el cuarto, y así sucesivamente, hasta llegar á un resto cero.* El anterior, ó lo que es lo mismo, el último divisor empleado, será el máximo común divisor pedido (*).

31.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE VARIOS NÚMEROS.—REGLA PARA DETERMINAR EL DE DOS Ó MÁS NÚMEROS.

105. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE VARIOS NÚMEROS, según expresa también su nombre, será *el menor de todos los múltiplos* (48) *que sean comunes á dichos números*; suele indicarse por las iniciales *m. c. m.*

106. Ahora bien; todo múltiplo que sea común á dos números tendrá que contener por lo menos sus diferentes factores primos, por lo que *podrá considerarse como compuesto del producto de multiplicar uno de ellos por el cociente de dividir el otro por el m. c. d. de ambos y por otro entero cualquiera*; luego será el menor posible cuando este último sea la unidad, que es el menor de todos los enteros, de lo cual se deduce la siguiente

REGLA PARA DETERMINAR EL DE DOS NÚMEROS: *Se halla el m. c. d. de ambos y se multiplica cualquiera de ellos por el cociente que resulte de dividir el otro por ese m. c. d.*

107. Como en virtud de lo dicho, *todo múltiplo de dos números lo será también de su m. c. m.*, si después encontramos el de éste y otro número, el del que resulte y otro, y así sucesivamente, obtendremos el de todos los números considerados, lo que conduce á la siguiente

Regla para determinar el de MÁS *de dos números: Se halla*

(*) También hemos de respetar la razón, que sin duda existirá, para suprimir la regla referente al caso de varios números, exigida en la pregunta siguiente para el mínimo común múltiplo.

por la anterior el de dos de ellos, enseguida el de éste y otro de los números dados, después el de este último y otro, y así sucesivamente hasta llegar á obtener el pedido, que será el que haya entre el último de dichos números y el anteriormente hallado (*).

32.

Reducción de quebrados ordinarios á decimales y de quebrados decimales á ordinarios.—Casos que pueden ocurrir.

108. La reducción de quebrados ordinarios á decimales y de quebrados decimales á ordinarios, tiene por objeto *encontrar los decimales equivalentes á los primeros y el ordinario de igual valor que un decimal dado*, transformación con frecuencia indispensable para efectuar con ellos algunas operaciones.

109. Los casos que pueden ocurrir, están ya indicados en la misma pregunta, aun cuando *el segundo se subdivide en otros tres*, por la forma en que pueden presentarse los decimales (**).

110. Es suficiente considerar á éstos como complejos que se componen de unidades enteras, décimas, centésimas, etc., y recordar la regla por cuyo medio se convierte en complejo un incomplejo (84, 5.ª), para deducir que:

Una fracción ordinaria se convertirá en decimal, dividiendo el numerador por el denominador para obtener la parte entera, y continuando la división después de escribir un cero á la derecha de cada uno de los restos.

111. Si en lugar de una fracción se tratara de un número *mixto,* bastaría *escribir la parte entera y aplicar al quebrado que la acompañase la segunda parte de la regla.*

112. *Cuando el denominador de una fracción ordinaria no tenga más factores distintos de los que compongan el numerador que 2 y 5, la división terminará siempre con exactitud;* pero si *esto no se verifica* más ó menos pronto, *se repetirá necesariamente alguno de los restos anteriores,* ya que todos se-

---

(*) Tanto para contestar á esta pregunta como á la anterior, podrían enunciarse reglas mucho más sencillas y prácticas fundadas en la descomposición en factores primos; pero como nada dice el Programa de esta importantísima cuestión, indispensable además para la aplicación de muchas otras, nos vemos obligados á suprimirlas por ahora.

(**) Antes de conocer estas formas no creemos pueda contestarse otra cosa.

rán menores que el divisor, y se repetirá también la cifra del cociente y todas las sucesivas, por lo cual la división no terminará nunca y *la decimal resultante será* PERIÓDICA, nombre que se da á todas *aquellas en que á partir de una cifra se van repitiendo las siguientes en el mismo orden.*

El *número formado por las cifras que se repiten* después de la coma, se llama PERÍODO, y *el representado por las que no se repiten,* PARTE IRREGULAR, dividiéndose esta clase de fracciones en PURAS y MIXTAS, según que el período empiece ó no en la cifra de las décimas.

LA ORDINARIÁ EQUIVALENTE, que por la aplicación de la regla dada origina una decimal, recibe por esta causa el nombre de fracción GENERATRIZ, la cual engendra una periódica PURA, *cuando su denominador no contiene ningún factor* 2 *ni* 5 *que no contenga también su numerador,* y una periódica *mixta,* cuando contiene uno de estos factores, ó los dos, y algún otro primo distinto no contenidos en el numerador.

113. La misma definición de fracciones decimales (73) nos enseña que:

Para convertir una fracción decimal exacta en ordinaria, basta escribirla por numerador, prescindiendo de la coma, y poner por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras hubiese después de aquélla.

114. Si la propuesta es periódica pura, sería suficiente multiplicarla por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tuviese el período, y del resultado restar aquélla, para convencerse de que:

La generatriz de una periódica pura será equivalente á la ordinaria que tenga por numerador la diferencia entre la parte entera seguida del período y la parte entera, y por denominador el número representado por tantos nueves como cifras tenga el período.

115. Por último; si se tratase de una periódica mixta, correríamos la coma á la derecha de la parte irregular, y obtendríamos una pura, equivalente al producto de aquélla por la unidad seguida de tantos ceros como lugares se hubiese corrido, y aplicando primero la regla anterior y dividiendo la ordinaria resultante por esa unidad seguida de ceros, veríamos que:

Para hallar la generatriz de una decimal periódica mixta, *basta escribir por numerador la diferencia que haya entre la parte entera seguida de la irregular y del período y la parte entera seguida de la irregular, y por denominador el número representado por tantos nueves como cifras tenga el período, seguidos de tantos ceros como cifras tenga la parte irregular* (*).

33.

ELEVACIÓN Á POTENCIAS.—CONSECUENCIAS DE LA NATURALEZA DE ESTA OPERACIÓN.

116. ELEVACIÓN Á POTENCIAS, es la *operación que tiene por objeto encontrar la potencia de grado determinado de un número* (**).

Las de segundo y tercer grado, se distinguen con los nombres particulares de CUADRADO y CUBO.

117. Las CONSECUENCIAS DE LA NATURALEZA DE ESTA OPERACIÓN, ó por lo menos las más importantes, son las siguientes, relativas todas al caso en que el exponente sea entero:

1.ª—*Para determinar la potencia de un número, bastará encontrar el resultado de tomarlo por factor tantas veces como unidades tenga el exponente* (49).

2.ª—*Los cuadrados de los diez primeros enteros serán respectivamente:* 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 *y* 100.

3.ª—*Los cubos:* 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000.

4.ª—*Para elevar una fracción ordinaria á una potencia, bastará elevar su numerador y su denominador* (65, 2.º).

5.ª—*Para elevar un número mixto, se aplicará la regla anterior, después de hallar la fracción equivalente á él* (62, 3.º).

6.ª—*Para elevar una fracción decimal, será suficiente suprimir la coma elevando el entero que resulte y separar con otra de la derecha del resultado, tantas cifras como indique el producto del exponente por el número de cifras que después de la coma tuviese la fracción dada* (78).

(*) Suprimimos el caso en que la decimal tuviese un número ilimitado de cifras, sin ser periódica, porque ninguna idea puede tenerse de tales decimales, originándose como se originan únicamente por la Extracción de raíces, de que en el Programa no se habla hasta la pregunta 34.

(**) Como los lectores de este Resumen se habrán, de fijo, olvidado de que allá en la pregunta 10., se definieron las potencias, para no volver á ocuparse de ellas hasta aquí, nos permitimos recordárselo.

34.

Raíces y modo de indicarlas.—Raíz entera de un número.

118. Se da el nombre de RAÍCES de los números, á *otros números que, elevados á una cierta potencia, producen los primeros.*

119. El *número que se considera como potencia de la raíz buscada, se llama* RADICANDO; el *grado de dicha potencia,* ÍNDICE, y la operación se indica por medio del $\sqrt{}$, llamado RADICAL, escribiendo el índice dentro del ángulo que forman las dos primeras líneas de la izquierda y el radicando debajo de la tercera, á excepción del índice 2, que se suprime.

120. RAÍZ ENTERA DE UN NÚMERO también entero, es *la raíz de la mayor potencia, cuyo grado expresa el índice, contenida en el radicando.*

RESIDUO, es *la diferencia entre el radicando y la mayor potencia de grado igual al índice, contenida en él.*

Cuando la verdadera raíz y la entera son una misma, el residuo es 0 y dicha raíz, EXACTA; *en caso contrario* es INEXACTA.

35.

Extracción de la raíz cuadrada de los números enteros.—Prueba de esta operación.

121. En la EXTRACCIÓN DE LA RAÍZ CUADRADA DE LOS NÚMEROS ENTEROS, ó sea en la *determinación del número que elevado al cuadrado produce el radicando dado ó el mayor cuadrado contenido en él, es conveniente distinguir dos casos,* según *que dicho radicando no sea mayor que* 100, *ó exceda de este número.*

Para *extraer la raíz cuadrada, cuando el radicando no sea mayor que* 100, *basta saber de memoria los cuadrados de los diez primeros enteros* (117, 2.ª), puesto que si se trata de alguno de ellos, ya sabremos cuál es su raíz cuadrada exacta, y si no conoceremos la entera, que será la del mayor cuadrado contenido en él.

122. En el segundo caso, *pueden seguirse varios procedimientos* idénticos en su esencia, pero diferentes en algunos detalles.

Uno de los más conocidos es el que se desprende de la siguiente regla:

Para extraer la raíz cuadrada de un número entero mayor que 100, *se divide en secciones de á dos cifras, empezando por la derecha, y se extrae la raíz de la primera sección de la izquierda, que podrá tener una sola cifra. El cuadrado de la raíz extraida se resta de dicha sección y á la derecha de la diferencia se coloca la cifra siguiente, dividiendo el número así formado por el duplo de la raíz hallada; el cociente, que solo deberá tener una cifra, se escribe á la derecha de la primera; se eleva al cuadrado el representado por las dos y se resta este cuadrado del número que forman las dos primeras secciones del radicando, disminuyendo el cociente de unidad en unidad, si dicho cuadrado fuese mayor que el número que ha de servir de minuendo, hasta que la sustracción pueda efectuarse. A la derecha de la diferencia se coloca la cifra siguiente, y se continúa la operación del mismo modo hasta haber bajado la penúltima y hecho la división y sustracción correspondientes.* El número representado por la primera raíz y los cocientes sucesivos será la pedida, y la última diferencia el residuo.

Esta regla se deduce de la composición del cuadrado de cualquier número entero.

123. La PRUEBA DE ESTA OPERACIÓN podría hacerse, *elevando al cuadrado la raíz hallada, agregando el residuo y viendo si la suma es igual al radicando* (120).

36.

EXTRACCIÓN DE LA RAÍZ CUADRADA DE LOS NÚMEROS DECIMALES.— CASOS QUE DEBEN DISTINGUIRSE.

124. La EXTRACCIÓN DE LA RAÍZ CUADRADA DE LOS NÚMEROS DECIMALES que no sean enteros (*), tiene por objeto *encontrar otro fraccionario decimal, que elevado al cuadrado produzca el radicando, exacta ó aproximadamente.*

(*) Suponemos que la pregunta se referirá á este caso, como lo hemos supuesto en la anterior y lo supondremos en la 39, aun cuando tan decimales son los enteros como los fraccionarios que se escriben en igual forma, á no ser que al hablar en otras preguntas de números enteros, se exijan las reglas para los escritos en diferentes sistemas, cosa que no podemos creer.

Los casos que deben distinguirse son *dos, según que el radicando tenga después de la coma un número par ó impar de cifras*, es decir, múltiplo ó no, de 2, atendiendo á que el cuadrado de un fraccionario decimal, siempre tendrá un número par (117, 6.ª).

125. Si esto se verifica en el radicando, de la misma regla que hemos dado para elevar á una potencia una fracción decimal (117, 6.ª), puede deducirse que:

Para extraer la raíz cuadrada de un fraccionario decimal que tenga después de la coma un número par de cifras, puede prescindirse de ella, extraer la raíz del entero que así resulte y separar de su derecha tantas, como unidades tenga la mitad de dicho número.

126. En cuanto al caso en que lo supuesto hasta aquí no se verificase, puede referirse al que acabamos de examinar, escribiendo un 0 á la derecha del radicando (75, 1.ª); por consiguiente,

Para extraer la raíz cuadrada de un fraccionario decimal que tenga después de la coma un número impar de cifras, se escribe un cero á su derecha y se aplica la regla anterior.

37.

Raíz cuadrada de los quebrados ordinarios.—Casos que ocurren en su extracción.—Raíz cuadrada de los números mixtos.

127. Raíx cuadrada de los quebrados ordinarios, es *otro quebrado ó fracción, que elevado al cuadrado produce el radicando, exacta ó aproximadamente.*

128. Los casos que ocurren en su extracción, son tres: *que los dos términos del radicando tengan raíz cuadrada exacta; que sólo la tenga el denominador*, y *que la de éste sea inexacta.*

129. De la regla dada para elevar á cualquier potencia las fracciones ordinarias (117, 4.ª), se desprende inmediatamente que:

Para extraer la raíz cuadrada de una fracción ordinaria, cuando sus dos términos la tienen exacta, es suficiente extraer las de numerador y denominador, poniendo la primera por numerador del resultado y por denominador la segunda.

130. Si sólo éste la tuviera exacta, *la del radicando no po-*

dría serlo, y obtendríamos una aproximada y referida á iguales partes de la unidad que si fuera exacta, poniendo por numerador la entera de este término y por denominador aquélla; luego

Para extraer la raíz cuadrada de una fracción ordinaria, cuando sólo el denominador la tiene exacta, se extrae la entera del numerador y la exacta del denominador, poniendo la primera por numerador del resultado y por denominador la segunda.

131. Respecto al caso en que no fuera exacta la del denominador, puede referirse al que acabamos de examinar, multiplicando por él los dos términos del radicando (58), pues claro está que entonces el nuevo denominador sería el cuadrado del primitivo y éste la raíz exacta de aquél; por consiguiente,

Para extraer la raíz cuadrada de una fracción ordinaria cuando el denominador no la tiene exacta, puede conservarse éste, poniéndole por numerador la raíz cuadrada entera del producto de los dos términos del radicando (*).

132. La RAÍZ CUADRADA DE LOS NÚMEROS MIXTOS, podrá evidentemente extraerse *convirtiéndolos en fracciones* (62, 3.°) y aplicando después las reglas anteriores.

38.

CASOS QUE OCURREN EN LA EXTRACCIÓN DE LA RAÍZ CÚBICA DE LOS NÚMEROS ENTEROS.—PRUEBA DE ESTA OPERACIÓN.

133. LOS CASOS QUE OCURREN EN LA EXTRACCIÓN DE LA RAÍZ CÚBICA DE LOS NÚMEROS ENTEROS, ó sea, en la *determinación del número que elevado al cubo produce el radicando dado, ó el mayor cubo contenido en él*, son principalmente *dos*, según *que dicho radicando no sea mayor que* 1000, *ó exceda de este número.*

134. *Para extraer la raíz cúbica cuando el radicando no sea mayor que* 1000, *basta saber de memoria los cubos de los diez primeros enteros* (117, 3.ª), puesto que si es alguno de ellos, ya sabremos cuál es su raíz cúbica exacta, y si no, conoceremos la entera, que será la del mayor cubo contenido en él.

(*) No es esta la regla que conviene seguir en la práctica, pero la descomposición en factores primos es imposible por no ocuparse el Programa de ella, según dijimos en la nota del párrafo 107.

135. En el segundo caso, como en la raíz cuadrada, pueden seguirse varios procedimientos, idénticos en su esencia, aunque diferentes en algunos detalles, siendo el análogo al que expusimos al tratar de aquélla, el que se desprende de la regla siguiente, que es consecuencia de la composición del cubo de cualquier entero:

Para extraer la raíz cúbica de un número entero mayor que 1000, *se divide en secciones de á tres cifras, empezando por la derecha, y se extrae la raíz de la primera sección de la izquierda, que podrá tener solamente una ó dos cifras. El cubo de la raíz extraída se resta de dicha sección, y á la derecha de la diferencia se coloca la cifra siguiente, dividiendo el número así formado por el triplo del cuadrado de la raíz hallada; el cociente, que sólo deberá tener una cifra, se escribe á la derecha de la primera; se eleva al cubo el representado por las dos, y se resta este cubo del número que forman las dos primeras secciones del radicando, disminuyendo el cociente de unidad en unidad si dicho cubo fuese mayor que el número que ha de servir de minuendo, hasta que la sustracción pueda efectuarse. A la derecha de la diferencia se coloca la cifra siguiente, y se continúa la operación del mismo modo hasta haber bajado la antepenúltima y hecho la división y sustracción correspondientes.*

El número representado por la primera raíz y los cocientes sucesivos será la pedida, y la última diferencia, el residuo.

136. La PRUEBA DE ESTA OPERACIÓN podrá hacerse, *elevando al cubo la raíz hallada, agregando el residuo y viendo si la suma es igual al radicando* (120).

39.

RAÍZ CÚBICA DE LOS NÚMEROS DECIMALES.—OBSERVACIONES ACERCA DE ESTA OPERACIÓN (*).

137. RAÍZ CÚBICA DE LOS NÚMEROS DECIMALES que no son enteros, es *otro fraccionario decimal que elevado al cubo produce el radicando, exacta ó aproximadamente.*

138. Por razones análogas á las expuestas al contestar á la

(*) ¿Qué observaciones serán éstas?

pregunta 36, puede determinarse esta raíz por medio de la siguiente regla:

Para extraer la raíz cúbica de un fraccionario decimal, se hace que el número de cifras que haya después de la coma sea múltiplo de 3, escribiendo, si es preciso, uno ó dos ceros á la derecha; se prescinde después de la coma extrayendo la raíz del entero que así resulte, y se separan de su derecha tantas, como unidades tengan la tercera parte de dicho número.

139. Pueden hacerse muchas OBSERVACIONES ACERCA DE ESTA OPERACIÓN, como acerca de todas, y la más importante es, sin duda alguna, la gran analogía que guarda con la extracción de la raíz cuadrada, por la cual se comprende que en ésta, como en la cúbica, basta para saber efectuarla recordar una sola regla, no lográndose otro resultado, al distinguir varios casos y tener que enunciar varias distintas, que el de confundir y fatigar inútilmente la memoria de los que han de aprenderlas.

En cuanto á las demás, nos contentaremos con observar, que *si el número propuesto no tiene después de la coma un número de cifras múltiplo de 3,* desde luego puede asegurarse que *tampoco tendrá raíz exacta*, porque las potencias de los números que nos ocupan siempre han de cumplir aquella condición (117, 6.ª), y que la raíz *no puede ser entera* es evidente, en razón á que todas las potencias de los números enteros, tienen esta misma forma.

40.

EXTRACCIÓN DE LA RAÍZ CÚBICA DE LOS QUEBRADOS ORDINARIOS.— CASOS QUE OCURREN.—RAÍZ CÚBICA DE LOS NÚMEROS MIXTOS.

140. La EXTRACCIÓN DE LA RAÍZ CÚBICA DE LOS QUEBRADOS ORDINARIOS tiene por objeto, *encontrar otro quebrado ó fracción que elevado al cubo produzca el radicando, exacta ó aproximadamente.*

141. Los CASOS QUE OCURREN en dicha extracción son *tres: que los dos términos del radicando tengan raíz cúbica exacta; que solo la tenga el denominador,* y *que la de éste sea inexacta* (*).

(*) Aunque en esta pregunta, como en las 6.ª, 7.ª, 8.ª, 9.ª, 11, 12, 16, 17, 19, 23, 25, 32, 36, 37 y 38, solo se exige la indicación de los casos, pues cuando la pregunta

142. De la regla dada para elevar á cualquier potencia una fracción ordinaria (117, 4.ª) se desprende inmediatamente que:

Para extraer la raíz cúbica de una fracción ordinaria, cuando sus dos términos la tienen exacta, es suficiente extraerlas de numerador y denominador, poniendo la primera por numerador del resultado y por denominador la segunda.

143. Si solo éste la tuviera exacta, *la del radicando no podría serlo,* y obtendríamos una aproximada y referida á iguales partes de la unidad que si fuera exacta, poniendo por numerador la entera de este término, y por denominador aquélla; luego,

Para extraer la raíz cúbica de una fracción ordinaria, cuando sólo el denominador la tiene exacta, se extrae la entera del numerador y la exacta del denominador, poniendo la primera por numerador del resultado y por denominador la segunda.

144. Respecto al caso en que no fuera exacta la del denominador, puede referirse al que acabamos de examinar, multiplicando por su cuadrado los dos términos del radicando (58), pues claro está que entonces el nuevo denominador sería el cubo del primitivo y éste la raíz exacta de aquél; por consiguiente,

Para extraer la raíz cúbica de una fracción ordinaria, cuando el denominador no la tiene exacta, puede conservarse éste, poniéndole por numerador la raíz cúbica entera, del producto que resulte de multiplicar el primitivo por el cuadrado del denominador (*).

145. La RAÍZ CÚBICA DE LOS NÚMEROS MIXTOS podrá evidentemente extraerse, *convirtiéndolos en fracciones* y aplicando después las reglas anteriores.

41.

RAZONES Y PROPORCIONES.—CONCEPTO GENERAL DE UNAS Y OTRAS.

146. Llámanse RAZONES, á las *relaciones de magnitud* que

---

comprende algo más se expresa claramente como en la 22, y la segunda parte de la 26, atendiendo á que lo primero á nada conduce, ni nada probaría en un examen, hemos añadido á continuación las reglas referentes á cada uno de ellos, aunque ya sabemos no pueden deducirse con exactitud, sin poseer muchos conocimientos que el Programa no contiene.

(*) Repetimos lo dicho en la nota del párrafo 131.

hay entre las cantidades, ó sea, á los *resultados de la comparación de sus valores.*

PROPORCIONES, son las *igualdades de dos razones indicadas.*

147. *Las cantidades cuyas magnitudes se comparan,* se llaman TÉRMINOS de su razón, recibiendo el primero, es decir, *el que sirve de punto de partida* para la comparación, el nombre de ANTECEDENTE; y el segundo, ó lo que es lo mismo, *aquel con el cual se compara* el antecedente, el de CONSECUENTE.

Toda razón indicada consta, por consiguiente, de DOS términos: *un antecedente* y *un consecuente.*

Toda proporción de CUATRO: *dos antecedentes y dos consecuentes*, de los cuales se llaman EXTREMOS, *el antecedente de la primera razón y el consecuente de la segunda*; y MEDIOS, *el consecuente de aquélla y el antecedente de ésta.*

148. Para formarse con claridad un CONCEPTO GENERAL DE UNAS Y OTRAS, es preciso ante todo considerar que la comparación de dos números, sean concretos ó abstractos, siempre puede hacerse de DOS maneras distintas: viendo *el exceso del uno sobre el otro,* en cuyo caso la razón se llama ARITMÉTICA ó POR DIFERENCIA, ó viendo *las veces que éste se halla contenido en aquél.* Entonces *la razón que entre ambos existe,* recibe el nombre de GEOMÉTRICA ó POR COCIENTE, ó simplemente RAZÓN, pues cuando no se expresa lo contrario, se entiende siempre esto último, y muy rara vez se usa el de *razón por diferencia*, porque para evitar confusiones ha sancionado la costumbre que se conserve el nombre de *diferencia*, para indicar esta clase de razones.

La razón ARITMÉTICA no es, por consiguiente, más que *una diferencia* indicada ó no, y la razón *geométrica, un cociente* indicado ó calculado ya.

149. Existiendo dos clases de razones, es evidente que existirán también DOS clases de proporciones: las ARITMÉTICAS y las GEOMÉTRICAS; pero por razones análogas á las que acabamos de dar, siempre que se dice PROPORCIÓN, sin advertir lo contrario, se entiende que nos referimos á LAS SEGUNDAS, y aun para mayor claridad, se suele dar á *las primeras* el nombre de EQUIDIFERENCIAS.

Una *equidiferencia* no es, por lo tanto, más que *la igualdad de dos diferencias indicadas.*

Una *proporción*, *la igualdad de dos cocientes indicados.*

150. Finalmente, al ocuparnos de la mal llamada valuación de quebrados ordinarios (71), vimos que *una fracción* de esta clase, cuando el numerador es mayor que el denominador, *no es más que el cociente indicado del primero por el segundo*, cociente que quedará exactamente representado por un número mixto *compuesto del cociente entero, y de una fracción cuyo numerador sea el resto, y cuyo denominador sea el divisor.*

Ahora es ocasión de añadir que cualquiera que sea la fracción, puede siempre considerarse como el *verdadero cociente de dividir su numerador por su denominador*, puesto que si se multiplica por éste (65, 1.ª), y se simplifica la resultante (60), se obtendrá forzosamente el numerador, que es la condición impuesta á todo cociente por la definición de dividir.

Las palabras *quebrado* ó *fracción* y *cociente* son, pues, sinónimas ó equivalentes, y por lo tanto, no son tampoco otra cosa las proporciones que la *igualdad de dos quebrados*, por cuya razón algunos suelen también distinguirlas, con el nombre de *igualdades fraccionarias* (*).

42.

Exposición de las progresiones.—Sus propiedades y varias aplicaciones.

151. Llámase en general progresión, á una *serie de números tales, que la comparación de cada uno con el anterior da siempre un mismo resultado.*

Dichos números constituyen los términos de la progresión, que puede ser creciente ó decreciente, según *vayan aumentando ó disminuyendo.*

152. Existiendo como hemos visto dos clases de comparaciones (148), también existirán dos clases de progresiones: las progresiones aritméticas ó por diferencia, en que *cada término será igual al anterior más ó menos un cierto número constan-*

(*) ¿Habremos contestado bien á una pregunta tan vaga como *concepto general de unas y otras*? Por lo menos esta vaguedad nos ha dado ocasión de dejar establecida la composición del verdadero cociente de dos números y la identidad entre las palabras fracción y cociente, composición é identidad tan esenciales para el estudio de la Aritmética y para las cuales hasta ahora no habíamos encontrado cabida en ninguna pregunta del Programa.

te, que se llama DIFERENCIA de la progresión, y las GEOMÉTRICAS ó POR COCIENTE, en que *cada uno será igual al anterior multiplicado por un cierto número constante,* llamado RAZÓN de la progresión, que será mayor ó menor que la unidad, según que aquélla sea creciente ó decreciente.

153. De estas ideas generales, es consecuencia inmediata que:

1.°—*Un término cualquiera de una progresión por diferencia, será igual al primero más ó menos tantas veces la diferencia como términos le precedan*, según sea creciente ó decreciente, ó *al último, menos ó más tantas veces la diferencia como términos le sigan.*

2.°—*Un término cualquiera de una progresión por cociente será igual al primero multiplicado por la potencia de la razón cuyo grado sea igual al número de términos que le precedan, ó al último dividido por la potencia de la razón, cuyo grado sea igual al número de términos que le sigan.*

154. De los valores que para los últimos términos dan las proposiciones anteriores y de las definiciones de sumar, restar, multiplicar, dividir, elevar á potencias y extraer raíces, es también fácil deducir que:

1.°—*La diferencia de una progresión aritmética es igual á la que existe entre los dos términos extremos, dividida por el número total de términos menos uno.*

2.°—*La razón de una progresión geométrica es igual á la raíz cuyo índice sea el número total de términos menos uno, del cociente de dividir el último por el primero* (*).

155. En cuanto á SUS PROPIEDADES, es decir, á *las de las progresiones* y no á las de sus términos ó razones, es consecuencia de su misma definición que:

1.°—*Tres términos consecutivos formarán siempre una equidiferencia ó una proporción, cuyos medios serán iguales,*
y de los valores de la diferencia ó razón respectivas, que:

2.°—*Si entre cada dos términos de una progresión se interpola igual número de términos, las progresiones parciales que resulten podrán formar una sola.*

(*) ¿Será lo dicho hasta aquí lo que quiere preguntarse al decir *exposición de las progresiones*?

156. Además, si sumásemos los valores (153, 1.°) de dos términos equidistantes de los extremos de una progresión por diferencia, veríamos que *su suma era igual á la de estos extremos*, por lo que el doble de la de todos los términos que la componen habrá de ser igual, al número total de ellos multiplicado por dicha suma, y por lo tanto,

1.°—*La suma de todos los términos de una progresión por diferencia, será igual á la mitad del producto que resulte de multiplicar la del primero y último, por el número de términos.*

En cuanto á las progresiones por cociente, bastaria multiplicar por la razón todos sus términos y restar del conjunto la suma de los mismos, para poder deducir fácilmente que:

2.°—*La suma de todos los términos de una progresión por cociente, es igual á la diferencia entre el producto del último término por la razón y el primero, dividida por la que haya entre la razón y la unidad.*

157. Finalmente, prescindimos del inútil detalle de sus VARIAS APLICACIONES, porque todas ellas se desprenden inmediatamente de la sola lectura de las verdades que hemos enunciado, como la determinación del número que en la serie natural de los enteros, ó en la de los múltiplos de cualquier otro, ocuparia un lugar conocido; la de la suma de todos ellos; la de una progresión, cuyos términos se diferenciaran en tan poco como quisiéramos; la del número de objetos amontonados de modo que las diferentes capas constituyeran los términos de una progresión, como sucede con las pilas de balas, etc., etc. (*).

(*) Y prescindimos también por otra razón; porque la aplicación principal que algunos hacen de ellas, es deducir de su comparación la teoría de los Logaritmos, y quizás á esto se refiera la pregunta; pero esa idea de los Logarítmos es tan antigua, tan incompleta, tan oscura y tan inconveniente para la facilidad, claridad y sencillez de las demostraciones, que no quisiéramos la tuvieran ya preconcebida los que después hayan de ser alumnos nuestros. Bajo este punto de vista nos alegramos de que en el Programa de ingreso se hayan omitido tales números á pesar de la imprescindible necesidad de su estudio y de ser éste tan fundamental é indispensable para el de los Cálculos mercantiles.

FIN DEL RESUMEN

PROGRAMA DE UN CURSO

DE

ARITMÉTICA Y CÁLCULOS MERCANTILES

LECCIÓN 1.ª

158. Definición de Cálculo y objeto de la asignatura; carácter, importancia y necesidad de la misma.

159. Conveniencia y origen de su subdivisión; objeto, contenido é importancia de cada parte.

160. Origen de las diversas formas de números; corolario que se desprende de su unidad de esencia.

161. Representación de números en general; expresiones literales y numéricas, valor numérico, uso de los paréntesis y términos de aquéllas.

162. Modo de conocer el orden de unidades superiores que contendrá un entero decimal y las cifras necesarias para representarlo; regla práctica para su lectura.

163. Aplicación á los números fraccionarios; representación exacta de los inconmensurables.

LECCIÓN 2.ª

164. Definición de error; errores y aproximaciones por defecto y por exceso.

165. Cantidades variables y constantes; límites superiores é inferiores.

166. Relación entre los números conmensurables y los inconmensurables; representación abreviada de las fracciones periódicas.

167. Límites superior é inferior de los valores numéricos; modo de considerarlos en el Cálculo.

168. Signos de relación; igualdades, desigualdades, miembros de las mismas y consecuencias de la definición de las primeras.

Lección 3.ª

169. Operaciones fundamentales y derivadas, simples y compuestas; consecuencias de la definición de sumar, referentes á la adición de los números y sus límites, á las variaciones de la suma por el aumento ó disminución de los sumandos, y á su aplicación á las igualdades y desigualdades.

170. Objeto é importancia de las operaciones compuestas; reglas para agregar una suma ó diferencia indicadas.

171. Unico caso en que podrán sumarse los productos y potencias indicadas; modo de efectuarlo.

172. Abreviaciones generales de la Adición de enteros; modo de encontrar la suma con toda la rapidez posible.

173. Inconveniente del procedimiento común; medios de evitarlo.

174. Caso en que los sumandos sean numerosos; disposiciones prácticas.

Lección 4.ª

175. Consecuencias de la definición de restar, relativas al aumento ó disminución de la diferencia, por el aumento ó disminución de minuendo y sustraendo; ídem referentes á la sustracción de los números y sus límites.

176. Números positivos y negativos; cualidad y consideraciones científica y práctica sobre estos conceptos.

177. Consecuencias de los mismos; ventaja de su introducción en el Cálculo.

178. Convenios necesarios; combinación por suma y resta de números positivos y negativos.

179. Reglas para sumarlos y restarlos; escolio referente á las ideas de aumento y disminución.

Lección 5.ª

180. Combinaciones por resta de las igualdades y desigualdades; regla para pasar los términos de un miembro al otro.

181. Regla para restar una suma indicada; ídem para restar una diferencia.

182. Reglas para sumar y restar una combinación cualquiera de números aditivos y sustractivos; modo de cambiar los signos á los términos de una expresión.

183. Abreviaciones generales de la Sustracción de enteros; razonamientos y disposiciones prácticas distintas.

Lección 6.ª

184. Procedimientos distintos que pueden seguirse para restar un entero de una suma indicada; disposiciones prácticas.

185. Procedimientos distintos para restar de un entero una suma indicada; disposiciones prácticas.

186. Procedimientos distintos para las combinaciones de varios enteros por adición y sustracción; disposiciones prácticas.

187. Complementos; regla práctica para encontrar el complemento á 0 de un entero y aplicación á los casos anteriores.

Lección 7.ª

188. Concepto y objeto general de la Multiplicación; consecuencias inmediatas del mismo, relativas al valor del producto de dos números y de un número y sus límites.

189. Signo del producto; consecuencias referentes á las igualdades y desigualdades.

190. Regla para multiplicar una combinación cualquiera de números aditivos y sustractivos por un entero positivo ó negativo; modo de sacar un factor común.

191. Regla para multiplicar dicha combinación por otra de términos enteros; multiplicación de la suma por la diferencia indicada de dos enteros y de un producto indicado por un entero.

192. Signo del producto de varios factores; producto de potencias de igual base ó de igual grado.

Lección 8.ª

193. Abreviaciones generales en la Multiplicación de enteros; casos en que es fácil encontrar el producto de memoria.

194. Multiplicación de dos enteros menores que 20; producto por 5, 25, 125 y por un entero cuyas cifras sean todas 1.

195. Producto por un entero cuyas cifras sean todas 9, ó todas menos la última; disposiciones prácticas.

196. Unica condición esencial de la regla comunmente seguida; regla y disposición práctica para cuando alguna cifra de un factor sea 1.

197. Regla para la multiplicación mental; reducción del número de productos parciales cuando los factores tienen muchas cifras.

198. Método de los múltiplos y divisores; número de cifras del producto de dos enteros.

Lección 9.ª

199. Consecuencias inmediatas de la definición de Dividir, relativas á los valores del dividendo y cociente, y aumento ó disminución del último; ídem referentes á las combinaciones de los números y sus límites.

200. Signo del cociente; consecuencias referentes á las igualdades y desigualdades.

201. Regla para dividir una combinación cualquiera de términos aditivos y sustractivos, y un producto indicado por un número entero; alteraciones del cociente exacto por la multiplicación ó división del dividendo ó divisor y del entero y resto por la de ambos.

202. División de un entero por un producto indicado de factores también enteros; cociente de dos potencias de grado entero, de una misma base ó de grado igual.

Lección 10.

203. Abreviaciones generales en la División de enteros; casos en que es fácil encontrar el cociente de memoria.

204. División por un producto; reglas abreviadas para dividir un entero por 5, 25 y 125.

205. Casos en que dividendo y divisor, ó sólo éste, terminen en ceros; supresión de factores en las divisiones exactas é inexactas.

206. Divisiones que más conviene abreviar; modo de facilitar la comprobación de las cifras.

207. Aproximación del cociente entero y caso en que conviene aumentarle una unidad; carácter y valor del resto en dicho caso.

LECCIÓN 11.

208. Números divisibles y submúltiplos de otros; representación de los primeros y objeto de la Divisibilidad.

209. Principios fundamentales; divisibilidad por 2, 5, 4, 25, 8 y 125.

210. Divisibilidad por 3 y 9; divisibilidad por 11.

211. Fundamento y regla práctica para conocer si un entero es divisible por 7; divisibilidad por la unidad seguida de ceros y por 6 y 12.

LECCIÓN 12.

212. Formación de una tabla de números primos; regla práctica.

213. Regla y disposición práctica para encontrar todos los factores primos de un número; caso en que podrán hallarse con más facilidad.

214. Condiciones necesarias y suficientes para que un entero divida, ó sea divisible por otro; determinación del *m. c. d.* y *m. c. m.* por medio de sus factores primos.

215. Método abreviado para la investigación del *m. c. d.*, cuando no se necesite conservar las descomposiciones de los números; procedimiento análogo que en igual caso podría seguirse para encontrar el *m. c. m.*

LECCIÓN 13.

216. Consecuencias inmediatas de la naturaleza de las fracciones; fracciones propias é impropias.

217. Fracciones irreducibles; regla y procedimientos distintos para reducir las que no lo sean á su más simple expresión.

218. Construcción mental de la irreducible cuando se halla el *m. c. d.* por el método general; regla que debe seguirse en la práctica.

219. Método general para reducir fracciones á un denominador común; regla preferible en la práctica.

220. Procedimientos diversos que pueden seguirse; disposiciones prácticas más convenientes.

Lección 14.

221. Regla práctica para conocer si una fracción ordinaria se podrá transformar en decimal exactamente; procedimiento más sencillo para escribir en forma ordinaria las decimales exactas y periódicas.

222. Transformación de una decimal ilimitada no periódica en menos de una unidad de cualquier orden y de una ordinaria en otra de denominador dado; condiciones necesarias y suficientes para que esta transformación sea exacta; error en caso contrario y cociente de dos enteros en menos de una parte cualquiera de la unidad.

223. Reglas abreviadas para cuando entran números mixtos en las adiciones y sustracciones; métodos y disposiciones prácticas para las mismas.

224. Caso en que los resultados pueden encontrarse mentalmente; aplicación á aquel en que los sumandos sean numerosos y modo de conocer si una fracción es mayor que otra.

Lección 15.

225. Consecuencias inmediatas de las definiciones de Multiplicar y Dividir, referentes á los números fraccionarios; regla general para multiplicar por una fracción y generalidad de las relativas á una combinación cualquiera.

226. Examen de los diferentes casos particulares en que puede abreviarse la multiplicación de enteros y fracciones; procedimientos generales cuando entren en ella números mixtos.

227. Partes alícuotas de la unidad y condición para que lo sean; exposición del método que toma su nombre de ellas y aplicación práctica del mismo á los distintos casos que pueden ocurrir.

Lección 16.

228. Reglas para los casos en que puede abreviarse la división de un número fraccionario por un entero; equivalencia entre dividir por una fracción y multiplicar por su inversa.

229. Examen de los casos particulares en que puede simplificarse la división por fracciones; regla para operar siempre con un divisor entero.

230. Valor del resto en la división de fraccionarios decimales; casos en que deben transformarse los decimales en ordinarios, ó éstos en aquéllos.

231. Transformación de las potencias indicadas en fracciones; extensión á las potencias de grado negativo de las reglas para multiplicar ó dividir las de igual base ó las del mismo grado, y escritura en forma entera de cualquier expresión fraccionaria.

Lección 17.

232. Necesidad de operar con números aproximados; errores absoluto y relativo, é importancia y objeto de su estudio; regla para encontrar éste cuando aquél es conocido.

233. Modo de aproximar el cociente de dos enteros, ó el valor de un fraccionario decimal, en menos de una y de media unidad de cualquier orden; caso en que el decimal provenga de operar con números aproximados.

234. Procedimiento práctico para encontrar una fracción de términos pequeños aproximada á otra; comparación con el seguido generalmente.

235. Objeto del estudio de las operaciones aproximadas y modo de referir á decimales todos los errores; método general que debe seguirse para averiguar cuál debe ser el límite del error en los datos de las operaciones, conocido el del resultado.

236. Error máximo de una suma y regla para obtenerla en menos de una unidad decimal de cualquier orden; error y regla en la sustracción.

Lección 18.

237. Principio fundamental para la multiplicación de números aproximados y regla para obtener el producto en menos de una unidad decimal de cualquier orden, cuando sólo lo sea un factor; caso en que el exacto tenga una sola cifra significativa.

238 Modo de referir al mismo orden decimal, los errores

de todos los productos parciales; condición para que el del total sea menor que el pedido.

239. Regla de Oughtred; disposiciones prácticas distintas.

240. Factor que conviene escribir debajo y caso particular en que tenga á la derecha mayor número de cifras que el otro; extensión de la regla al producto de varios factores.

Lección 19.

241. Error del cociente al dividir un número aproximado por otro exacto; división de dos enteros simplificando el dividendo.

242. Error al dividir un exacto por un aproximado; división de enteros simplificando el divisor.

243. Combinación de ambas simplificaciones, aproximando el resto todo lo posible; influencia de los errores de los restos en el resultado final.

244. Modo de disminuir estos errores y límite máximo de cada uno; error del último é influencia en el cociente.

245. Regla de Guy; examen de cada uno de los casos particulares que pueden ocurrir.

246. Cociente abreviado de dos enteros en menos de una unidad de cualquier orden decimal; extensión de la regla á la división de fraccionarios decimales exactos ó aproximados.

Lección 20.

247. Nombres y objeto general de la Potenciación; representación de los números pares é impares y signo que corresponderá á las potencias de grado entero y positivo, según el que afecte á la base.

248. Consecuencias de la definición referentes á las variaciones del resultado, según las que sufran los datos; ídem relativas á las combinaciones de los números con sus límites.

249. Cuadrado de la suma y de la diferencia de dos números; cubo de ambas.

250. Potencias de un producto y de un cociente indicados; potencia de otra ú otras potencias indicadas.

Lección 21.

251. Abreviaciones generales en la Potenciación: regla fundada en la descomposición en sumandos del exponente.

252. Conveniencia y formación de una tabla de elevar á potencias; regla fundada en la descomposición en factores del exponente.

253. Regla fundada en la descomposición de la base en factores; potencias de los números terminados en cero.

254. Potencias que se pueden calcular mentalmente y reglas para elevar un número mixto; potencias aproximadas en menos de una unidad decimal de cualquier orden.

Lección 22.

255. Nombres y objeto de la Radicación; cualidad y nombre de las raíces de índice entero y positivo, según el signo del radicando y el valor del índice.

256. Consecuencias referentes al valor numérico de la raíz y á las combinaciones de los números con sus límites; potencias y raíces de las igualdades y desigualdades y raíces de índice negativo.

257. Forma de las raíces inexactas y raíz de índice entero de un producto y de una potencia indicada; potencias de grado fraccionario, consecuencias de su equivalencia y extensión para ellas, de las reglas relativas á la potencia y raíz de productos indicados.

Lección 23.

258. Raíces de radicando ó índice fraccionario, y extensión de la regla para elevar un cociente indicado á cualquier potencia; deducción de la correspondiente á la raíz, cualquiera que sea el índice.

259. Definición de Radical y proposiciones fundamentales para su simplificación y reducción á un índice común; reglas prácticas para verificarlas y modo de introducir cualquier factor bajo el signo, y de reducir los radicales al menor índice común.

260. Radicales semejantes; reducción y regla para simplificar las combinaciones aditivas y sustractivas de los radicales.

261. Multiplicación y División de radicales; generalidad para los exponentes fraccionarios, de las reglas referentes á la multiplicación y división de potencias de igual base.

LECCIÓN 24.

262. Potenciación de un radical siendo el exponente entero, y extensión á los exponentes é índices fraccionarios de las reglas para potenciar una potencia ó raíz indicada y extraer la raíz de aquélla; radicación de un radical y raíces cuyo índice sea un producto ó una potencia indicada.

263. Aproximación de una raíz cualquiera en menos de una parte alícuota de la unidad y carácter de las combinaciones en que entran radicales; teorema de los límites y generalidad para los números inconmensurables de todas las reglas referentes á las combinaciones aritméticas.

264. Signo que distingue á los números imaginarios y modo de considerarlo en el Cálculo; regla para operar con ellos y potencias de $\sqrt{-1}$.

LECCIÓN 25.

265. Fundamento de la extracción de la raíz cuadrada de los enteros y procedimientos distintos que pueden seguirse para determinarla; abreviaciones generales, comparación de los mismos, error y valor máximo del residuo.

266. Fundamento, procedimientos distintos y abreviaciones generales en la raíz cúbica; valor máximo del residuo.

267. Casos particulares en que puede abreviarse la extracción de las raíces cuadrada y cúbica de los enteros; raíces de mayor grado que por medio de éstas pueden extraerse.

LECCIÓN 26.

268. Regla de Wantzel para las radicaciones largas; abreviaciones de que aún es susceptible, modo de conocer el número de cifras de la raíz y observación relativa al residuo.

269. Error que podrá cometerse al aplicarla al cálculo de la raíz cuadrada; límite del mismo.

270. Consecuencias que de su expresión se deducen; regla modificada.

LECCIÓN 27.

271. Error al aplicar la regla de Wantzel al cálculo de la raíz cúbica; límite del mismo.

272. Caso en que es falsa; modo de conocer cuando ocurre y de hacerla aplicable á él.

273. Límite del error en todos los demás casos; consecuencias que de su expresión se deducen y modificación de la regla.

Lección 28.

274. Condición para que un entero tenga raíz cuadrada ó cúbica exacta y reglas prácticas para la extracción de estas raíces de las fracciones ordinarias; error de los resultados inexactos, raíces de los números mixtos en menos de una unidad y caso en que deben transformarse en fracciones.

275. Aproximación de las raíces fraccionario-decimales y unidades que expresará el residuo; regla general para extraer la raíz en menos de una unidad decimal de cualquier orden.

276. Caso en que el radicando sea decimal; cifras con que deberán calcularse los aproximados, según el procedimiento que se emplee para la radicación, aplicación de las reglas abreviadas, medios de obtener los residuos verdaderos y combinación con la de Guy.

Lección 29.

277. Logaritmo, objeto de su determinación, base, antilogaritmo, modo de indicarlos y definición de Sistema; principales consecuencias y condiciones que debe reunir la base.

278. Logaritmos positivos, negativos y de valor indefinido, si la base es mayor que la unidad; valor, forma y partes de que constan los correspondientes á bases enteras.

279. Posibilidad de calcularlos y marcha que para ello debería seguirse; fracciones continuas.

Lección 30.

280. Logaritmo de un producto, de un cociente, de una potencia y de una raíz indicada; módulo y pase de un sistema á otro.

281. Logaritmos usuales y neperianos, bases, modo de indicarlos, valores y propiedad de sus módulos; números inversos.

282. Valores de la característica de los logaritmos correspondientes á números decimales en el sistema usual, y opera-

ción que con éstos podrá hacerse sin que varíe la mantisa; forma de los logaritmos correspondientes á números decimales menores que la unidad.

Lección 31.

283. Transformación de logaritmos en parte positivos y negativos, en otros negativos totalmente, y de éstos en aquéllos; operaciones prácticas con los primeros.

284. Diferencias entre los logaritmos de los números á medida que éstos aumentan; contenido y forma de las Tablas de logaritmos, diferencia tabular, errores de las mantisas y tablas más usadas.

285. Tablas logarítmicas de simple y doble entrada; modo de buscar los logaritmos y antilogaritmos, cuando la mantisa se encuentra en ellas.

Lección 32.

286. Reglas para determinar el logaritmo ó antilogaritmo en cuantos casos no se encuentre en las tablas la mantisa; obtención directa del logaritmo todo negativo ó no de las fracciones, y de los antilogaritmos fraccionarios, decimales ú ordinarios.

287. Cologaritmos y cálculo abreviado de un producto, cociente, potencia y raíz; casos en que convendrá escribir las mantisas con mayor ó menor número de cifras.

288. Logaritmos de los números negativos; reglas general y práctica para el cálculo logarítmico de una expresión cualquiera, é imposibilidad de que existan más de siete operaciones fundamentales.

Fin de la parte de Programa relativa al Complemento de Aritmética.

APÉNDICE

289. Composición de las fracciones continuas; fracciones integrantes y cocientes incompletos.

290. Reducidas; nombre que también toman y regla para formarlas.

291. Propiedades referentes á la diferencia entre dos consecutivas, valor de la fracción continua y aproximación de aquéllas á ésta; consecuencia de cada una de ellas.

292. Principales aplicaciones de las fracciones continuas; reglas para desarrollar una ordinaria ó decimal exacta, y encontrar la irreducible equivalente.

293. Desarrollo de una decimal inexacta; fracciones irreducibles aproximadas á su valor.

294. Forma de la continua equivalente á un valor inconmensurable y método para desarrollar cualquier expresión de esta clase.

295. Límites superiores del error al detenerse en una reducida; límite inferior.

296. Límite superior más aproximado; regla para calcular el valor de cualquier fracción continua, en menos de una parte alícuota de la unidad.

COMPLEMENTO DE ARITMÉTICA

NOCIONES PRELIMINARES

I.—Ideas generales sobre la asignatura.

158. Entre las muchas ciencias que tienen por base el CÁLCULO, ó *conjunto de operaciones* (32) *que con los números* (4) *pueden hacerse*, merece ocupar sin duda un lugar de preferencia la ARITMÉTICA Y CÁLCULOS MERCANTILES, que tiene por objeto *resolver cuantas cuestiones dependientes del mismo puede originar la práctica del Comercio y de las múltiples profesiones que con él se relacionan.*

Forma, por consiguiente, parte de las Matemáticas mixtas ó aplicadas (6), y hasta les sirve de principal fundamento, puesto que al tratarse de las aplicaciones de esta ciencia (1) á las variadas necesidades de la vida y de la sociedad, siempre encontramos representadas las cantidades por los números concretos (16) que expresan su magnitud, por lo que es importantísimo estudiar en detalle sus diferentes combinaciones y los más convenientes medios de realizarlas, así como las propiedades que les sirven de base, entrando en pormenores y minuciosidades que en su gran mayoría serían impropios de un estudio meramente especulativo bajo el punto de vista científico.

159. De aquí su imprescindible necesidad y la natural sub-

división de la misma, originada por las tres clases de conocimientos que exigen las operaciones mercantiles que del Cálculo dependen y la diferencia entre las que pueden verse obligadas á efectuar las personas que en ellas intervengan:

1.ª—El Complemento de Aritmética, *detalla los diferentes procedimientos más usuales, por cuyo medio se efectúan y disponen los principales cálculos numéricos, completando los conocimientos que previamente se hayan adquirido*, con todos los que pueden ser necesarios, ó á lo menos convenientes, á la mayoría de los calculistas, sin lo cual, ni podría obtenerse, como siempre se debe procurar, la mayor economía de trabajo y tiempo, aprendiendo á llegar á los resultados con toda la brevedad y rapidez compatibles con la debida claridad y exactitud, ni comprobar, según frecuentemente es indispensable, las que otros hayan llevado á cabo tal vez por métodos que serían desconocidos, ni menos aún combinarlos de la manera que exigen determinadas cuestiones.

2.ª—Los Cálculos mercantiles elementales, son aquellos *que directamente se relacionan con la venta, compra y cambio de objetos y valores*, que son los casos que con mayor frecuencia se presentan en la práctica del Comercio, y sólo necesitan el auxilio de los conocimientos más elementales y la previa descripción de las unidades concretas más usuales, de sus relaciones y del modo de precisar todas las magnitudes, sin el cual ni nos formaríamos idea clara de las cantidades (2) con las cuales tendríamos que operar, ni nos sería posible resolver ninguna cuestión práctica.

3.ª—Llamaremos, por último, Cálculos mercantiles superiores, á *los que se aplican á la resolución de todos los problemas en que interviene alguna cantidad de dinero, á la que se renuncia en ciertas condiciones, con la esperanza de obtener un beneficio*; problemas que, si no ocurren tan amenudo como los anteriores, no dejan de tener su importancia, por el desarrollo que en nuestra sociedad han tomado esta clase de negocios, fundados en conocimientos especiales íntimamente relacionados con ellos y de alguna mayor dificultad, considerados bajo el punto de vista científico.

Estas son las tres partes en que, por las razones indicadas, la consideraremos dividida, precisados como estamos por su extensión relativa á dividirla de algun modo, para la mejor claridad y enlace de los diversos puntos que ha de abrazar y de los fundamentos sobre los cuales deben apoyarse.

II.—Formas de los números.

160. En todo nuestro estudio sabemos ya que los números se nos presentarán bajo diversas FORMAS (9 á 17), que *provienen de elegir la unidad* (3) *arbitrariamente*, sin más limitación que la de ser de igual naturaleza que la cantidad cuya magnitud quiere expresarse ó representarse, pues claro está que el conmensurable (12) se convertirá en inconmensurable (13), ó éste en aquél; el entero (7) en fraccionario (10) ó mixto (11); éstos en enteros, y aun el exacto en aproximado (14), ó al contrario, cambiando convenientemente la unidad.

Así, por ejemplo, si nos queremos formar idea de la cantidad total de papel contenida en este tomo, y expresar ó representar su magnitud, eligiendo como unidad la hoja de otro libro cualquiera, lo más probable será que resulte un número inconmensurable, que deberemos sustituir por otro aproximado á su valor, ó bien un entero, fraccionario ó mixto; y no obstante, es evidente que ese número aproximado será exacto con relación al número de unidades ó partes de la unidad que contenga, y que el inconmensurable, fraccionario ó mixto, se convertirá en otro conmensurable y entero desde el momento en que, abandonando la unidad elegida arbitrariamente, consideremos como tal una de las hojas que lo componen.

Conviene, pues, no olvidar que *la esencia* ó naturaleza de los números abstractos *es una*; es decir, que en realidad no existen distintas clases de números, sino diversas formas de expresión y representación, por lo cual,

Las propiedades y reglas que sean independientes de su forma, á todos ellos serán comunes y á todos por igual se podrán aplicar, constituyendo verdaderas leyes (99).

161. Esta identidad de esencia nos obligará frecuentemente á representar, no un número de valor determinado, sino cualquiera de los muchos que casi siempre reunen ciertas condiciones, en cuyo caso es costumbre *designarlos por una letra* del alfabeto español, y á veces del griego, al lado de las cuales

suelen colocarse acentos y sub-índices, escribiéndose y leyéndose entonces del siguiente modo:

A' ,	a' ,	ó A_1,	a_1,.....	A, a, *prima*,	ó A, a, *sub-uno*.
B'' ,	b'' ,	ó B_2,	b_2,.....	B, b, *segunda*,	ó B, b, *sub-dos*.
C''' ,	c''' ,	ó C_3,	c_3,.....	C, c, *tercera*,	ó C, c, *sub-tres*.
......	.....	....	....	....	... ...
......	.....	....	....	....	... ...
$Z^{(n)}$,	$z^{(n)}$,	ó Z_n,	z_n,.....	Z, z, *con n acentos*,	ó Z, z, *sub-ene*.

Las expresiones en que entran una ó varias letras se llaman LITERALES, para distinguirlas de las NUMÉRICAS, ó *que sólo contienen números de valor determinado,* teniendo las primeras un VALOR NUMÉRICO en cada caso especial, que no es sino el *resultado de sustituir en lugar de cada letra un valor particular y efectuar las operaciones indicadas*, que se acostumbra encerrar dentro de un PARÉNTESIS, *cuando han de servir de datos para otra operación,* suprimiendo entonces el signo de multiplicar, como se suprime entre las letras.

Así $3a^2b-\sqrt[3]{a^2}+(a-b):4$, sería una expresión *literal*, que para los valores particulares 27 y 15 de a y b, se convertiría en la *numérica* $3.27^2.15-\sqrt[3]{27^2}+(27-15):4$, adquiriendo, por consiguiente, el *valor numérico* 32799; puesto que calculando por las reglas conocidas el cuadrado (117) 729 de 27, el producto (47) 32805 de $3.27^2.15$, la diferencia 32796 entre este producto y la raíz cúbica (134) 9 de 27^2, y agregando á esa diferencia el cociente (52, 1.°) 3 de dividir por 4, la que existe entre 27 y 15, que es 12, obtendríamos por resultado final 32799.

Para llegar á esos valores numéricos, conviene, por consiguiente, distinguir bien los TÉRMINOS ó *partes de la expresión, precedidas de los signos + y —.*

162. Respecto á los números de valor particular, claro está que nos valdremos para expresarlos y representarlos, como acabamos de hacerlo, de las reglas de la numeración decimal (28 y 29) y de los signos convenidos en la misma (26), recordando, cuando queramos formarnos clara idea de la magnitud

de un número entero por el de las cifras que su representación exija, que las correspondientes á las principales unidades que sirven para expresarlo, es decir, las simples, millones, billones, etc., forman grupos de á seis á partir de la derecha, y que las componentes de estos grupos representan, partiendo del mismo punto, unidades, decenas, centenas, millares, decenas de millar y centenas de millar, del orden á que en su totalidad corresponden, por lo cual basta tener presentes los nombres, definiciones y conceptos de los números que entran en la operación de dividir (51) para comprender que:

1.°—*Si el número de cifras de cualquier entero se divide por 6, el cociente indicará el orden de las unidades principales que contenga y el resto el de las que se refieren á este orden, rebajando una unidad al primero si el resto fuese cero.*

Para saber, por ejemplo, la magnitud aproximada de un entero que previamente sepamos debe tener 35 cifras, nos bastaría efectuar de memoria (52, 1.°) la sencillísima operación siguiente: 35 dividido por 6, da 5 por cociente y 5 por resto; luego el número representará *decenas de millar* (quinto lugar), *de quillón* (quinto orden principal). Es evidente que el resto 0 indicaría grupos completos ó *centenas de millar* del orden inferior.

2.°—Por el contrario, si queremos saber las cifras que serán necesarias para representar un orden conocido de unidades, claro está que deberemos

Multiplicar por 6 el número de unidades indicadas por el nombre de la principal que contenga y agregar las necesarias para llegar al superior de todos (55).

Así, cuando sepamos que un número no contiene más que decenas de millar de quillón, diremos: 6 multiplicado por 5 (indicado por la palabra *quillón*), son 30, y 5 (necesarias para representar *decenas de millar*) 35 cifras de que constará el número.

Estas consideraciones permiten leer un número de muchas cifras sin necesidad de dividirlo en secciones (29), ni menos emborronarlo con las comas y sub-índices, con que es costumbre separarlas y que nunca deben figurar en los cálculos, sin más que contar sus cifras, recordar la propiedad enunciada y empezar á leer por la izquierda de las secciones que mentalmente resulten.

Tratándose, por ejemplo, del número

$$40.962_{5}005.431_{4}706.840_{3}007.903_{2}426.083_{1}017.924,$$

nos bastaría contar sus 35 cifras y dividir por 6, como ya lo hemos hecho, teniendo presente que las *decenas*, sean del orden que sean, corresponden al segundo lugar, y las de millar al quinto (indicado ya por el resto), para poder leer:

Cuarenta mil nuevecientos sesenta y dos quillones, cinco mil cuatrocientos treinta y un cuatrillón, setecientos seis mil ochocientos cuarenta trillones, siete mil nuevecientos tres billones, cuatrocientos veintiseis mil ochenta y tres millones, diez y siete mil nuevecientos veinticuatro.

En la práctica conviene, por consiguiente, seguir esta regla:

3.°—*Para leer un entero de muchas cifras, basta dividir su número por 6, disminuyendo una unidad al cociente, si el resto fuera cero y 3 al resto si fuese mayor, empezando en seguida á leer el grupo de la izquierda indicada por la última diferencia, que se referirá á las unidades principales ó de millar que se deduzcan del cociente y resto, y continuar la lectura por grupos de á tres cifras, á los que alternativamente se hará seguir la palabra mil ó el nombre de la unidad principal que represente, en virtud de las ya nombradas.*

163. Inútil nos parece añadir que estas reglas

Son aplicables á cualquier número decimal y á los dos términos (56) *de las fracciones ordinarias,*

con tal que al tratarse de los primeros, si son fraccionarios, consideremos por separado la parte entera y la posterior á la coma (74) que va seguida de la terminación *ésimas*, ó teniendo esto en cuenta, lo leamos como un solo conjunto (74, 2.°).

Respecto á los números inconmensurables (13), que no tienen relación exacta con la unidad convenida (8), tendremos que expresar y representar sus valores *por medio de las operaciones indicadas* que permitan acercarse á ellos cuanto se quiera, y que jamás se acabarían de ejecutar, pues de acabarse, obtendríamos la exacta representación de los mismos, y por lo tanto, de su relación con la unidad.

Un ejemplo de números de esta clase nos lo ofrecen las representaciones decimales de las fracciones ordinarias, cuando sus denominadores tienen algún factor distinto de 2 ó 5 no contenido en su numerador (112).

III —Relaciones de magnitud.

164. Valiéndonos de la numeración adoptada, solo podremos, por consiguiente, obtener un entero ó fraccionario más ó menos aproximado al valor del inconmensurable, cometiendo un ERROR, nombre que se da á *la diferencia entre un valor aproximado y el exacto á quien reemplaza,* por DEFECTO, *si aquél es menor que éste,* y por EXCESO, *en caso contrario.*

165. Ahora bien; como en matemáticas se llama cantidad VARIABLE, *á aquella cuyo valor no siempre es el mismo;* CONSTANTE, á *todo lo que permanece invariable,* y LÍMITE de una variable, á *una constante á la cual puede aquélla aproximarse cuanto se quiera, sin que nunca llegue á igualarla,* límite que puede ser SUPERIOR, *cuando el valor de la variable tiene que ir aumentando* para acercarse á él, é INFERIOR, *cuando tiene que ir disminuyendo,* resulta que:

166. *Los números inconmensurables son los límites de los conmensurables, que se van acercando á ellos á medida que se hace el cálculo con menos error.*

Así, la fracción decimal periódica (112) 3'45678678678....., ó 3'45(678), pues

PARA REPRESENTARLA con brevedad *basta encerrar el período dentro de un paréntesis,*

debiendo constar de un número ilimitado de cifras, jamás podría quedar decimalmente expresada de un modo exacto por muchas que escribiésemos, porque todas ellas no compondrían más que un número *aproximado* á su valor por *defecto*, con un *error* tanto más pequeño cuantas más cifras se fueran escribiendo; pero sí lo estaría por su generatriz (115)

$$\frac{345768-345}{99900}, \text{ ó lo que es igual, por } \frac{345423}{99900},$$

que es una operación indicada, pues ya se sabe que una fracción no es otra cosa que el cociente indicado y exacto de dividir su numerador por su denominador (150).

167. Hasta aquí los verdaderos números, los que tienen un valor limitado, para cuya expresión y representación hemos ne-

cesitado la palabra CERO y el signo 0, que indicasen la *carencia de todo valor*, es decir, algo más pequeño que el menor de todos los que podemos imaginar, y desde luego es fácil comprender que siendo indefinida la serie de los números, no solo que van disminuyendo, sino también que van aumentando á partir de la unidad, necesitaremos con frecuencia otro signo y otra palabra que representen y expresen algo mayor que el más grande de los números imaginables.

El *signo* convenido para esto es ∞, que se lee INFINITO, aunque con bastante impropiedad, pues representa, como hemos dicho, lo *indefinidamente grande con relación á la idea de número*, mientras que la palabra convenida significa lo ilimitado en todos los sentidos y conceptos que á cuanto existe puedan aplicarse, y sólo corresponde, por lo tanto, á la totalidad de lo existente, considerada como un Sér único ó unidad absoluta.

De lo dicho se desprende que:

0 *é* ∞ *no son verdaderos números, sino los límites inferior y superior de los valores numéricos*,

y no siendo verdaderos números, es evidente que sin exponernos á cometer gravísimos errores, no podremos aplicarles las propiedades y leyes que para aquéllos demostremos en adelante; pero como esos signos aparecen con frecuencia en el Cálculo, deberemos considerarlos como *casos particulares y excepcionales* al tratar de las operaciones numéricas, deduciendo directamente de las definiciones, para que éstas sean generales, cuáles serán los resultados cuando uno de esos límites tenga que intervenir en ellas.

168. Finalmente; al comparar entre sí dos magnitudes, tendremos que expresar y representar la relación de sus valores, como ya nos ha ocurrido, diciendo que la una es *mayor, igual* ó *menor* que la otra, palabras que en Matemáticas se reemplazan por los signos $>$, $=$ y $<$, distinguiendo con los nombres de IGUALDADES y DESIGUALDADES, á *las expresiones en que entran el signo* $=$, ó *alguno de los signos* $>$ *ó* $<$, que en realidad son uno mismo, y llamando PRIMER MIEMBRO y SEGUNDO MIEMBRO, á *todo lo que está á la izquierda y á la derecha de dichos signos.*

Así $15+20-8$, $mn:p$, y $\sqrt[6]{64}$, serían respectivamente los *primeros miembros*, y 27, 30 y 5, los *segundos*, de la igualdad y desigualdades:

$$15+20-8=27;\ mn:p>30;\ \sqrt[6]{64}<5,$$

siendo evidente que,

Si valores numéricos iguales se someten á iguales operaciones, los de los resultados serán, ó por lo menos podrán ser, *iguales*,

y que, por lo tanto,

1.° *Una igualdad subsistirá aunque sus dos miembros se aumenten, disminuyan, multipliquen ó dividan por un mismo número, se eleven á una potencia de igual grado, ó se extraiga de ellos la raíz de igual índice.*

2.° *Los resultados de sumar, restar, multiplicar ó dividir dos ó más igualdades miembro á miembro, serán también iguales.*

De la igualdad anterior, podrían, pues, deducirse, por ejemplo:

$$(15+20-8)+3=27+3;\quad (15+20-8)3=27.3;$$
$$(15+20-8)^3=27^3$$
$$(15+20-8)-3=27-3;\quad (15+20-8):3=27:3;$$
$$\sqrt[3]{15+20-8}=\sqrt[3]{27},$$

y combinándola, con la $z=3$,

$$(15+20-8)+z=30;\quad (15+20-8)\times z=81;$$
$$(15+20-8)^z=27^3$$
$$(15+20-8)-z=24;\quad (15+20-8):z=9;$$
$$\sqrt[z]{15+20-8}=\sqrt[3]{27}.$$

Escolio.—Hemos dicho *serán* ó *podrán ser* iguales los resultados, porque pudiera ocurrir que al someter dos valores á ciertas operaciones, se obtuviera más de uno; pero como entonces los del primer miembro y los del segundo deberían ser evidentemente en igual número é iguales dos á dos, aunque no se verifique que todos *serán* iguales, lo *podrán ser* si se escogen convenientemente, y la igualdad final no dejará de ser cierta en este sentido.

LIBRO PRIMERO

NÚMEROS ENTEROS

CAPÍTULO PRIMERO

ADICIÓN

I.—Generalidades.

169. La Adición es la más sencilla de las operaciones (32) FUNDAMENTALES ó SIMPLES, es decir, de *aquellas en que basta conocer dos números para poder determinar un tercero*, pues *aquellas en que se combinan más de dos*, reciben el nombre de COMPUESTAS ó DERIVADAS de las primeras.

Es, además, una de las DIRECTAS ó de COMPOSICIÓN, que tienen por objeto general *construir un número por medio de otros dos*, mientras que las INVERSAS ó de DESCOMPOSICIÓN, se proponen *descomponer un número en otro conocido, y el que combinado directamente con él podría producirlo.*

De su misma definición (33) se deducen inmediatamente las consecuencias siguientes:

1.ª—*El orden de los sumandos no altera el valor de la suma*, puesto que el conjunto de sus unidades será el mismo.

$$3+4+5=5+3+4.$$

2.ª—*La suma de un número y 0, será el mismo número*, en razón á que careciendo 0 de valor (167), nada tendrá que aumentársele.

$$8+0=8.$$

3.ª—*La suma de 0 y 0, será 0,*
por igual razón.

$$0+0=0.$$

4.ª—*La suma de un número é ∞, será ∞,*
puesto que á ∞ nada puede aumentársele (167). Representando a un número cualquiera,

$$a+\infty=\infty.$$

5.ª—*La suma de ∞ é ∞, será ∞,*
por igual razón.

$$\infty+\infty=\infty.$$

6.ª—*La suma de 0 é ∞, será ∞,*
evidentemente.

$$0+\infty=\infty.$$

7.ª—*La suma aumentará ó disminuirá en todo lo que aumenten ó disminuyan los sumandos,*
porque deberá tener de más ó de menos el conjunto de cuantas unidades se añadan ó quiten á éstos.

Si $15+20+8=43$,
también $(15+12)+(20+6)+(8+7)=43+(12+6+7)$
y $(15-12)+(20-6)+(8-7)=43-(12+6+7)$.

8.ª—*La suma no se alterará si á unos sumandos se les añaden y á otros se les quitan los mismos números,*
en razón á que por una parte debería aumentar y por otra disminuir en la suma de éstos.

Si $15+20+8=43$, también $(15+7)+20+(8-7)=43$.

9.ª—*Si una igualdad y una desigualdad ó dos desigualdades de igual signo se suman ordenadamente, la desigualdad subsistirá con los resultados,*
ya que á mayoros sumandos corresponderá siempre mayor suma.

Si $a=10$ y $18>7$, también $a+18>10+7$.
Si $6>10$ y $18<40$, también $6+18<10+40$,

y lo propio se verificaría evidentemente si las igualdades ó desigualdades fuesen más de dos, con tal que en todas las últimas entrase el mismo signo, $>$ ó $<$, es decir, tuviesen lugar ó se verificasen, en el mismo sentido.

Escolio.—El último enunciado comprende el caso en que se añada un mismo número á los dos miembros de una desigualdad, puesto que todo número es igual á sí mismo.

II.—Operaciones derivadas.

170. El estudio de las operaciones compuestas tiene por objeto:

Averiguar el medio más ventajoso de llegar al resultado de una combinación cualquiera de operaciones fundamentales, para lo cual es necesario conocer los diferentes métodos de realizarlas, sean los datos numéricos ó literales; pues claro está que en este último caso no podremos aplicar las reglas referentes á los primeros, pero podremos transformar la expresión que indique la combinación de que se trate en otra más sencilla, que únicamente contenga las que sea indispensable ejecutar para llegar al resultado final, ya que, aun tratándose de valores numéricos, no siempre es lo más conveniente ir efectuando las operaciones simples en el orden y del modo que estén indicadas.

Para convencerse de ello y de la importancia de este estudio, basta recordar, por ejemplo, la igualdad demostrada (169, 7.ª)

$$(15+12)+(20+6)+(8+7)=43+(12+6+7),$$

cuyos dos miembros nos presentan claramente á la vista dos medios diferentes de adicionar tres sumas indicadas: el primero, *encontrando los valores de estas tres sumas, y adicionándolas luego entre sí,* lo que exigiría cuatro ó cinco operaciones; el segundo, *determinando las sumas* $43=15+20+8$ y $12+6+7$, que después adicionaríamos sin haber ejecutado más que tres operaciones, y aun podríamos obtener el resultado final por medio de una sola, como vamos á ver comenzando dicho estudio.

1.º—*Para agregar á un número ó expresión cualquiera una suma indicada, basta añadir sucesivamente cada uno de los sumandos.*

En efecto; si representamos por N dicho número ó expresión y por $6+7+8$ la suma indicada, es evidente por la misma definición (33) que conteniendo esta suma el conjunto de los valores de 6, 7 y 8, habremos añadido este conjunto á N, si primero le añadimos el de 6, luego el de 7 y después el de 8; por consiguiente:

$$N+(6+7+8)=N+6+7+8.$$

2.°—*Para agregar una diferencia indicada, basta añadir el minuendo y restar el sustraendo.*

Efectivamente; la diferencia deberá contener el valor del minuendo, *menos* el del sustraendo; luego agregando á un número ó expresión cualquiera el primero y restando el segundo, obtendremos el resultado pedido, es decir, que

$$N+(9-6)=N+9-6.$$

171. Los productos y potencias indicadas (47 y 49) sólo pueden en general agregarse, efectuándolos previamente, salvo el *caso en que sean iguales,* pues entonces, según el principio fundamental de la multiplicación, tendríamos, por ejemplo,

$$6.4.5+6.4.5+6.4.5=6.4.5.3 \quad \text{y} \quad 7^2+7^2+7^2=7^2.3,$$

por lo que *bastaría multiplicar uno, por el número de sumandos.*

Escolio.—Dedicando, como dedicamos, este primer libro al cálculo de los números enteros, y después otros dos al de los fraccionarios é inconmensurables, no nos ocuparemos en él de las combinaciones que puedan presentar los cocientes indicados ó fracciones (150), ni las raíces indicadas que generalmente representarán valores inconmensurables.

III.—Detalles prácticos.

172. La operación de sumar, que podría realizarse agregando sucesivamente á uno de los sumandos cada una de las unidades que contuvieran los otros, se abrevia desde luego *sabiendo de memoria la tabla de sumar* (35, 1.°), *aplicando la regla general* (35, 3.°), *empezando la suma por la derecha* (76, 1.ª), y *en los* numerosos *casos particulares en que es posi-*

ble hallar mentalmente el resultado, recordando el principio fundamental (34).

Las sumas de números de dos cifras y de otros que fácilmente se descompongan en dos ó tres órdenes de unidades, siempre pueden y deben hacerse de memoria, diciendo, por ejemplo,

$$34+62+98+15, \quad \text{serán: } 34 \text{ y } 62,\ 96,\ \text{y } 98,\ 194,\ \text{y } 15,\ 209,$$

ó sumando las cifras tal como están escritos, sin colocarlos en columna.

$$1200+46+18, \quad \text{será evidentemente } 1264, \text{ etc.}$$

En cuanto al procedimiento generalmente seguido, da origen á la siguiente disposición práctica:

$$\begin{array}{r} 2346 \\ 128 \\ 5123 \\ 79 \\ 834 \\ 5 \\ 6900 \\ \hline 15415 \end{array}$$

La suma se obtiene por este medio CON TODA LA RAPIDEZ POSIBLE, *no repitiendo las parciales de cada dos cifras al agregar la que sigue*, ó en otros términos: no diciendo mentalmente para sumar las columnas,

6 y 8, 14; 14 y 3, 17; 17 y 9, 26; 26 y 4, 30; 30 y 5, 35;
35 y 0, 3**5**, etc.

sino sencillamente

6 y 8, 14, y 3, 17, y 9, 26, y 4, 30, y 5, 3**5**;

ó mejor aún,

14, 17, 26, 30, 3**5**,

sumando de igual modo las restantes columnas.

173. El procedimiento no puede ser más breve, pero tiene el INCONVENIENTE de *no conservar á la vista las unidades de*

orden superior producidas por la suma de cada columna; por lo cual, cuando se nota un error en una cifra del resultado, y hay que repasar la operación, cosa muy frecuente si los sumandos son muchos, no hay más remedio que repetirla toda, en vez de limitarse á la columna en que el error se haya notado, lo que no sólo dificulta su hallazgo con frecuencia, sino que puede ocasionar pérdida de muchísimo tiempo.

Para evitarlo, adoptan algunos las siguientes disposiciones prácticas:

2346	2346	222
128	128	6234
5123	5123	128
79	79	5123
834	834	79
5	5	834
6900	6900	5
35	35	6900
18	21	15415
22	24	
13	15415	
15415		

En la primera se conservan las sumas parciales en su lugar respectivo, adicionándolas luego entre sí.

En la segunda se agregan á cada columna las decenas de la suma anterior, con lo cual se evita la adición de las parciales, bastando escribir á la derecha de la última las cifras que tiene encima de las unidades.

Lo más sencillo, no obstante, para conservar las cifras, es escribirlas en la parte superior de la columna que les corresponda, separadas del primer sumando y con caractéres más pequeños para evitar confusiones, como está indicado en la tercera.

174. También ocurre á veces que los sumandos son muy numerosos, y por lo tanto, fáciles las equivocaciones, en cuyo caso pueden dividirse en grupos que se suman separadamente, adicionando entre sí los resultados parciales en una de las dos formas indicadas á continuación, la segunda de las cuales es la única posible, cuando la operación ha de continuarse en otra página.

2346			2346	7676
128			128	834
5123	7597		5123	5
79			79	6900
834			7676	15415
5				
6900	7818			
	15415			

CAPÍTULO II

SUSTRACCIÓN

I —Generalidades.

175. Del objeto general que la Sustracción se propone, se desprende inmediatamente que:

1.°—*El minuendo ha de ser siempre igual á la suma del sustraendo y la diferencia,*
según la misma definición (37).

Si 10—6=4, también 10=6+4.

2.°—*Si el minuendo aumenta ó disminuye, la diferencia aumentará ó disminuirá en lo mismo,*
ya que el minuendo es una suma de dos números y el conocido suponemos no ha variado.

Si 10—6=4, también (10+7)—6=4+7,
y (10—2)—6=4—2.

3.°—*Si el sustraendo aumenta ó disminuye, la diferencia disminuirá ó aumentará en lo mismo,*
pues para que la suma no varíe al aumentar ó disminuir un sumando, es necesario que el otro disminuya ó aumente en el mismo número (169, 8.ª).

Si 30—8=22, también 30—(8+5)=22—5
y 30—(8—5)=22+5.

4.ª—*Si el minuendo y el sustraendo aumentan ó disminuyen en lo mismo, la diferencia no se alterará,* en razón á que por una parte debería aumentar y por otra disminuir en el mismo número.

$$\text{Si } 20-14=6, \quad \text{también} \quad (20\pm12)-(14\pm12)=6.$$

En cuanto á los resultados de combinar los números con sus límites, pueden deducirse con facilidad de los análogos de la Adición y del carácter inverso de la Sustracción.

Efectivamente:

5.º—*La diferencia entre dos números iguales será 0,*

6.º—*La diferencia entre un número y 0, será el mismo número,*

puesto que por la misma definición,

$$\text{Siendo } (169, 2.^a)\ 15+0=15, \quad \text{también}$$
$$15-15=0 \quad \text{y} \quad 15-0=15.$$

7.º—*La diferencia entre 0 y 0, será 0,*

ya que $0+0=0$ (169, 3.º).

8.º—*La diferencia entre ∞ y un número cualquiera será ∞.*

9.º—*La diferencia entre ∞ é ∞, podrá suponerse igual á cualquier número, á ∞, ó á 0,*

porque siendo (169, 4.ª) $a+\infty=\infty$, también

$$\infty-a=\infty, \quad \text{é} \quad \infty-\infty=a$$

representando a un número cualquiera y de (169, 5.ª y 6.ª)

$$\infty+\infty=\infty \quad \text{y} \quad 0+\infty=\infty, \quad \text{también}$$
$$\infty-\infty=\infty \quad \text{é} \quad \infty-\infty=0.$$

10.—*La diferencia entre ∞ y 0, será ∞,*

en virtud de la antepenúltima igualdad.

176. Siendo arbitrarios los datos de la operación, ó resultado de otras combinaciones, ocurre con frecuencia que el minuendo tiene un valor menor que el sustraendo.

En este caso, si el sustraendo fuera, por ejemplo,

$$5=1+1+1+1+1 \quad \text{y el minuendo } 3=1+1+1,$$

claro está que de las 3 unidades de éste solo podríamos restar otras tantas, y como aquél contiene 2 más, indicaríamos que aún debían restarse éstas, poniéndolas delante el signo — y escribiendo -2 por resultado de la operación, es decir, $3-5=-2$.

Este resultado parece absurdo; pero bajo el punto de vista científico debe considerarse que al restar del minuendo, 3 de las unidades del sustraendo, obtendremos por diferencia 0, faltándonos restar aún *dos* unidades, y que —2, por consiguiente, no es más que un modo abreviado de escribir la diferencia indicada 0—2, diferencia que muy bien podemos vernos obligados á combinar con otras operaciones, como combinaríamos la suma indicada 0+2, ó solamente +2.

Para distinguir estos resultados, se llaman números NEGATIVOS, *á los que van precedidos del signo* —, y POSITIVOS, *á los que van precedidos del signo* + ó de ninguno, pues en este caso es costumbre suprimirlo.

Bajo el punto de vista práctico, no es menos racional la introducción en el cálculo de los números negativos.

Los números, en efecto, no son sino representantes de una magnitud (3 y 4) y la cantidad cuya relación con la unidad se ha buscado, no solo tendrá esa magnitud, sino una CUALIDAD ó *modo de ser* concreto, que á veces será contrario al de la unidad elegida.

Dos duros que se *tengan* y 2 que se *deban*; 2 de *ganancia* y 2 de *pérdida*; 2 pasos andados hacia la *derecha* de un punto y 2 andados hacia la *izquierda*; 2 horas de *adelanto* en un reloj con respecto á la verdadera, y 2 de *atraso*, etc., son ejemplos de magnitudes iguales en valor numérico, pero que se refieren á cantidades cuyo modo de ser ó de existir es perfectamente contrario.

Si continuando con el segundo de esos ejemplos nos proponemos, pues, averiguar cuántos duros de *ganancia* ha obtenido una persona, eligiendo como unidad POSITIVA 1 duro, fijamos ya su cualidad de ganancia, y si esa persona ganó primero 5 y después perdió 3, es claro que al final se encontrará con 5—3=2 de ganancia; pero si primero ganó 3 y después perdió 5, con lo cual en definitiva saldría perdiendo 2, ó hemos de cambiar de unidad, diciendo que obtuvo 2 duros de *pérdida* y no de ganancia, ó hay que expresar de algún modo que los 2 duros resultantes tienen una cualidad opuesta á la de la unidad elegida, diciendo que esa persona obtendría 2 duros NEGATIVOS de *ganancia*.

Ahora bien; la Aritmética pura (5) solo estudia los números abstractos (11), en los que es imposible el cambio de unidad, y una de dos: ó sus combinaciones no serían aplicables más que á determinados casos, ó es preciso que los resultados negativos tengan también su representación numérica, que en el ejemplo que vamos siguiendo sería 3—5=—2, es decir, 2 unidades negativas ó de cualidad opuesta á la considerada como positiva.

177. De estas consideraciones se deduce que:

1.º—*En casi todas las cantidades pueden suponerse dos modos de existencia contrarios,*
el positivo y el negativo, cuyo sentido puede fijarse arbitrariamente.

2.º—*La unidad podrá ser igualmente positiva ó negativa* con relación á la cantidad.

3.º—*Los números negativos están formados con respecto á la unidad negativa, del mismo modo que los positivos lo están con respecto á la positiva, y representan la magnitud de una cantidad cuyo modo de existir es contrario al de la unidad elegida.*

La introducción en el cálculo de los números negativos tiene, por consiguiente, la VENTAJA de *generalizar los resultados*, permitiendo referir todos los números á la unidad positiva, sea cual sea el modo de ser de la cantidad que representan; pero para alcanzar tal generalización se hace preciso, al combinar y comparar unos con otros, tener también en cuenta su cualidad.

Sigamos con el ejemplo.

Es evidente que el número 2, positivo ó negativo, representa más que el 0 símbolo de la nada, y que 4 será mayor que 2, atendiendo únicamente á los valores numéricos representados por esas cifras, y sin embargo, no es menos evidente, que considerando como unidad positiva 1 duro de *ganancia*, el que ha *perdido* 2, ó lo que es igual, *ganado* —2, ha ganado *menos* que el que ha ganado 0 y por lo tanto nada ha perdido, y que el que haya *perdido* 4 ó *ganado* —4, ha ganado también *menos* que el que ganó —2 ó perdió 2 solamente.

178. Para que los resultados del cálculo sean verdaderos, atendiendo no solo á la magnitud sino también á la cualidad de las cantidades, es por tanto necesario convenir en que:

1.º—*Los números negativos deben considerarse como menores que* 0.

2.º—De dos números negativos, debe considerarse como mayor el de valor numérico más pequeño.

3.º—Todos los números negativos deben considerarse como menores que cualquier otro número positivo,
puesto que éste siempre será mayor que 0.

En otros términos: para los efectos del cálculo debemos admitir que:

$$+2>0, \quad +2<+4, \quad -2<0, \quad -2>-4,$$
$$+2>-2, \quad +2>-4.$$

Observemos ahora que:

8 unidades de *ganancia* $(+8)$, agregadas á 7 también de *ganancia* $(+7)$, producirán $8+7=15$, de *ganancia* $(+15)$;

8 unidades de *pérdida* (-8), añadidas á 7 también de *pérdida* (-7), compondrán $8+7=15$, de *pérdida* (-15);

8 de *ganancia* $(+8)$, reunidas á 7 de *pérdida* (-7), darán un resultado final de $8-7=1$, de *ganancia* $(+1)$;

8 unidades de *pérdida* (-8), juntas con 7 de *ganancia* $(+7)$, dejarán $8-7=1$, de *pérdida* (-1).

179. Resumiendo, tendríamos por consiguiente:

$$(+8)+(+7)=+(8+7)=+15$$
$$(-8)+(-7)=-(8+7)=-15$$
$$(+8)+(-7)=+(8-7)=+1$$
$$(-8)+(+7)=-(8-7)=-1$$

lo cual nos enseña que:

1.º—*Para sumar dos números positivos ó negativos, se suman sus valores numéricos, poniendo al resultado el mismo signo de los sumandos.*

2.º—*Para sumar un número positivo con otro negativo, se resta del mayor valor numérico el menor, poniendo al resultado el signo del mayor.*

Considerando, por último, que *restar* una ganancia equivaldría á *añadir* una pérdida, y *restar* una pérdida á *agregar* una ganancia, tendremos que:

$$(+8)-(+6)=(+8)+(-6)=+(8-6)=+2$$
$$(-8)-(-6)=(-8)+(+6)=-(8-6)=-2$$
$$(+8)-(-6)=(+8)+(+6)=+(8+6)=+14$$
$$(-8)-(+6)=(-8)+(-6)=-(8+6)=-14$$

lo que traducido en regla, se expresaría de este modo:

3.°—*Para restar dos números positivos ó negativos, se cambia el signo del sustraendo y se suma con el minuendo.*

Escolio.—Los resultados á que hemos llegado por la consideración de las cantidades negativas y positivas demuestra además, que desde el momento en que se considera la cualidad ó modo de existencia, los conceptos de suma y diferencia no implican los de aumento y disminución, puesto que los números representantes de cualidades opuestas se destruirán en todo ó parte al sumarse y se reunirán al restarse, por lo mismo que es contraria su manera de existir.

180. Sea, sin embargo, cual sea, es evidente que:

Si $a=10$ y $7>4$, también $a-7<10-4$, por tener la primer diferencia igual minuendo y mayor sustraendo que la segunda (175, 3.°) y $7-a>4-10$, por ser los sustraendos iguales y el minuendo 7 mayor que el 4 (175, 2.°), luego:

1.°—*Si una igualdad y una desigualdad se restan ordenadamente, el resultado será otra desigualdad, que se verificará en el mismo ó contrario sentido, según que la primera sirva de minuendo ó de sustraendo.*

Además, aunque restando dos desigualdades de igual sentido, ignoramos cuál será el resultado, puesto que, por ejemplo, de $10>6$ y $3>2$, $10-3=7>6-2=4$; de $10>6$ y $8>4$, $10-8=2=6-4=2$; y de $10>6$ y $8>1$, $10-8=2<6-1=5$; si las desigualdades son contrarias se verificará forzosamente, de $10>8$ y $6<14$, $10-6>8-14$, por el doble motivo de tener la primera mayor minuendo y menor sustraendo que la segunda (175, 2.° y 3.°),

y también $6-10<14-8$, por análoga razón; luego:

2.°—*Si dos desigualdades que se verifiquen en sentido contrario se restan ordenadamente, el resultado será otra desigualdad que se verificará en el mismo sentido que la que haya servido de minuendo.*

Escolio.—Siendo todo número igual á sí mismo, el primer enunciado comprende el caso en que se reste un mismo valor de los dos miembros de una desigualdad.

De estas proposiciones y de las enunciadas como consecuencia de la definición de igualdad (168), se deduce una consecuencia de gran importancia.

En efecto, si tenemos

$$8+6=18-4, \quad \text{ú} \quad 8+6>10-4,$$

agregando á los dos miembros la diferencia indicada $4-6$ (170, 2.°), tendríamos:

$$8+6+4-6=18-4+4-6, \quad \text{y} \quad 8+6+4-6>10-4+4-6$$

y como los valores positivo y negativo de 6 en los primeros miembros y de 4 en los segundos, se destruirían al combinarse por suma,

$$8+4=18-6, \quad \text{y} \quad 8+4>10-6$$

expresiones que comparadas con las primeras demuestran que:

3.°—*Para pasar un término cualquiera de un miembro al otro en una igualdad ó desigualdad, basta cambiarlo de signo.*

II.—Operaciones derivadas.

181. 1.°—*Para restar de un número ó expresión cualquiera una suma indicada, bastará restar uno á uno los valores de todos los sumandos,*
puesto que el conjunto de estos valores constituye el de la suma; de modo que si N representa el minuendo y $4+6+2$ el sustraendo,

$$N-(4+6+2)=N-4-6-2.$$

Como esta consideración es aplicable al caso en que alguno de los sumandos sea negativo, y ya sabemos (179, 3.°) que $8-3=8+(-3)$, también

$$N-(8-3)=N-8-(-3)=N-8+3;$$

por consiguiente:

2.°—*Para restar una diferencia indicada, se resta el minuendo, y al resultado se le añade el sustraendo.*

Tampoco en la Sustracción como en la Adición (171) pueden en general restarse productos ni potencias indicadas más que en el caso en que fuesen iguales, sin efectuarlas antes.

182. Siendo substancialmente iguales los conceptos de Adición y Sustracción, desde el momento en que se admite que los sumandos puedan ser negativos, de aquí en adelante no consideraremos por separado las sumas y diferencias sin efectuar, más que cuando sea conveniente ó indispensable, sino que las estudiaremos casi siempre para abreviar bajo el concepto general de combinaciones de números aditivos y sustractivos, de cuyos términos formarán parte los signos determinativos de su cualidad.

De este modo las cuatro reglas que hemos dado para sumar y restar adiciones y sustracciones indicadas (170 y 181) quedarían comprendidas en las dos siguientes de carácter y aplicación más general:

1.ª—*Para agregar una combinación cualquiera de números aditivos y sustractivos, basta escribir sus términos con los mismos signos que tengan.*

Porque recordando cómo deben combinarse por suma los números positivos y negativos (179), tendríamos, por ejemplo, siendo N un número ó expresión cualquiera (170, 1.º):

$$N+(8-3-2+7-5)=N+(+8)+(-3)+(-2)+(-7)+(-5)$$
$$=N+8-3-2+7-5.$$

2.ª—*Para restar una combinación cualquiera de números aditivos y sustractivos, basta escribir sus términos con signos contrarios.*

En efecto; representando por D, la diferencia entre N y $8-3-2+7-5$, se deberá tener (175, 1.º)

$$N=D+(8-3-2+7-5)=D+8-3-2+7-5$$

y pasando al primer miembro todos los términos del segundo, menos D (180, 3.º),

$$N-8+3+2-7+5=D,$$

ó, $$D=N-(8-3-2+7-5)=N-8+3+2-7+5.$$

También se deduce de la última igualdad, ó del mismo enunciado de esta regla, que:

3.ª—*Para cambiar los signos de varios términos de una expresión, basta encerrarlos dentro de un paréntesis, poniéndole delante el signo —.*

III.—Detalles prácticos.

183. La Sustracción de números enteros pudiera efectuarse como la Adición, restando del minuendo una á una todas las unidades del sustraendo, y *la regla generalmente seguida* (40, 3.°), fundada en el conocimiento de la tabla de sumar, constituye ya una abreviación.

La operación mental que esa regla exige cuando alguna de las cifras del minuendo es menor que la correspondiente del sustraendo, puede modificarse, y se acostumbra modificar en la práctica, recordando que *se pueden añadir* 10 *unidades á cualquier orden del minuendo, con tal que esas mismas* 10, ó lo que es igual, 1 *del orden superior, se agregue también al sustraendo* (175, 4.°), lo que guarda más analogía con lo que se practica en la Adición.

En cuanto á la disposición más frecuente y ventajosa (76, 2.°) de los datos, conviene también variarla algunas veces, *escribiendo primero el sustraendo, dejando un espacio en blanco para la diferencia y colocando el minuendo debajo de la línea que es costumbre trazar,* con cuya disposición se indica claramente que el minuendo es la suma del sustraendo y la diferencia, lo que facilita con frecuencia las comprobaciones, sobre todo si el resultado se escribe con otra tinta ó carácter que lo haga resaltar, de modo que no haya duda sobre la operación que se efectuó.

Lo mismo en este caso que en los anteriores, puede también *buscarse mentalmente, las cifras que sumadas con las del sustraendo, originarían las del propio orden del minuendo,* en vez de rebajar del valor de éstas el de aquéllas.

Por último, *los números de dos ó tres cifras y aquellos que por las circunstancias especiales de su expresión y representación puedan descomponerse fácilmente*, se restan siempre de memoria.

Así, para restar de 4300, 640, restaríamos mentalmente 600 de 1300, lo que daría 700, rebajaríamos 40 y el resultado 660 lo agregaríamos á las 3000 unidades de que habíamos prescindido en el minuendo, llegando al final 3660, fundados en las reglas que acabamos de dar, puesto que

$$4300-640=(3000+1300)-(600+40)=3000+1300-600-40$$
$$=3000+700-40=3000+660=3660.$$

Cuando esto no fuera fácil, posible ó conveniente, dispondríamos la operación de una de estas dos maneras:

$$\begin{array}{r} 72408 \\ 59316 \\ \hline 13092 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 59316 \\ \mathbf{13092} \\ \hline 72408 \end{array}$$

haciendo uno de los tres razonamientos que siguen:

1.°—De 6 á 8, **2**; de 1 á 10, **9**; de 3 á 3, **0**; de 9 á 12, **3**; de 5 á 6, **1**.

2.°—De 6 á 8, **2**; de 1 á 10, **9**; 3 y 1, 4, á 4, **0**; de 9 á 12, **3**; 5 y 1, 6, á 7, **1**.

3.°—6 y **2**, 8; 1 y **9**, 10; 1 y 3, 4 y **0**, 4; 9 y **3**, 12; 1 y 5, 6, y **1**, 7.

184. Hasta aquí la operación fundamental; pero si han de combinarse varios números por adición y sustracción, puede encontrarse de varios modos el resultado final, bien se trate de *restar de una suma indicada un número entero; de éste aquélla,* ó de *sumar y restar varios enteros*, caso que comprende el de restar una diferencia indicada.

Efectivamente; de las reglas deducidas por estas operaciones compuestas (181 y 182), se desprende que un entero podrá restarse de una Adición indicada:

Efectuando ésta y restando aquél, ó restando el sustraendo de cualquiera de los sumandos ó de la suma de varios y sumando la diferencia con las demás,

según está indicado en el siguiente ejemplo, suponiendo que de la suma de los números 34028, 24207 y 5893 se ha de restar 26480.

$$\begin{array}{r} 34028 \\ +24207 \\ +5893 \\ \hline 54128 \\ -26480 \\ \hline 37648 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 34028 \\ -26480 \\ \hline 7548 \\ +24207 \\ +5893 \\ \hline 37648 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24207 \\ +5893 \\ \hline 30100 \\ -26480 \\ \hline 3620 \\ +34028 \\ \hline 37648 \end{array}$$

185. Tres procedimientos pueden seguirse igualmente en el caso contrario:

Restar del número y diferencias sucesivas cada uno de los otros; sumar éstos y restar la suma, ó efectuar de una vez la Adición y Sustracción,

que es cuando la diferencia suele colocarse en el lugar del último sumando, que previamente se deja en blanco.

Hé aquí la aplicación de los tres, á la diferencia entre 85214 y la suma de 17609, 3856 y 92.

85214	17609	17609
17609	3856	3856
67605	92	92
3856	21557	**63657**
63749	85214	85214
92	63657	
63657		

En la segunda operación hemos escrito el minuendo 85214 debajo del sustraendo 21557 para evitar la repetición de éste.

En la tercera hemos razonado así: 9 y 6, 15, y 2, 17, á 24, **7**, llevando 2 á la siguiente columna; estas 2 y 5, 7, y 9, 16, á 21, **5**, llevando 2; 2 y 6, 8, y 8, 16, á 22, **6**, llevando 2; 2 y 7, 9, y 3, 12, á 15, **3**, llevando 1; 1 y 1, 2, á 8, **6**.

186. Cuando son varias las adiciones y sustracciones que deben efectuarse, pueden hacerse

En el orden que están indicadas, ó sumar por una parte cuantos números deban aumentar el resultado y por otra cuantos deban disminuirlo, restando luego ambas sumas,

pues aunque también se podrían *hallar sumas* y *diferencias parciales*, cuya reunión total conduciría al mismo resultado, como este método complicaría las operaciones, nunca suele emplearse; no obstante lo cual, y con el sólo objeto de ofrecer de él un ejemplo, lo aplicaremos también á la siguiente combinación:

140697—22658—19015—24+1887—324+11023.

$$\begin{array}{r} 140697 \\ 22658 \\ \hline 118039 \\ 19015 \\ \hline 99024 \\ 24 \\ \hline 99000 \\ 1887 \\ \hline 100887 \\ 324 \\ \hline 100563 \\ 11023 \\ \hline 111586 \end{array}
\qquad
\begin{array}{rr} 140697 & \\ 1887 & \\ 11023 & 153607 \\ \hline 22658 & \\ 19015 & \\ 24 & \\ 324 & 42021 \\ \hline & 111586 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 140697 \\ 22658 \\ \hline 118039 \end{array}
\quad
\begin{array}{r} 19015 \\ 24 \\ \hline 19039 \end{array}
\quad
\begin{array}{r} 1887 \\ 324 \\ \hline 1563 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 118039 \\ 1563 \\ 11023 \\ \hline 130625 \\ 19039 \\ \hline 111586 \end{array}$$

Escolio.—Al efectuar todas las operaciones en el orden que están indicadas en el primer cálculo, podría suceder que algún resultado fuese negativo; pero esto no sería inconveniente para aplicarlo, recordando las reglas demostradas para operar con esta clase de números (179).

Así sucedería, por ejemplo, en la combinación

34206—27805—9387+4517—8609—12420+20000,

$$\begin{array}{r} 34206 \\ -27805 \\ \hline 6401 \\ -9387 \\ \hline -2986 \\ +4517 \\ \hline 1531 \\ -8609 \\ \hline -7078 \\ -12420 \\ \hline -19498 \\ +20000 \\ \hline 502 \end{array}$$

en la que atendiendo á la cualidad de los resultados, hemos restado 6401 de 9387, la diferencia de 4517, la nueva diferencia de 8609, sumando la que resulta con 12420 y restando la suma de 20000.

En la segunda de las disposiciones prácticas anteriores, hemos dado al cálculo de las dos sumas parciales una disposición análoga á la primera del párrafo 174, para que fuese fácil su sustracción.

En la tercera hemos calculado aparte 140697—22658, 19015+24 y 1887—324, sumando la primera y última diferencia con 11023, que debe aumentar el resultado, y restando de esta suma la de 19015 y 24, que debe disminuirlo.

187. Todos estos distintos casos, reglas y métodos, pueden, sin embargo, reducirse á una sola Adición por medio de los COMPLEMENTOS, ó *diferencias de los números á otro fijo*, cuya importancia no será necesario encarecer, una vez demostrado lo que acabamos de afirmar.

Los complementos más usados son los tomados á la unidad de orden superior y á 0, que es el más conveniente y único que por esta razón usaremos.

El complemento á 0 de un número 6758, no será más que *el mismo número considerado negativamente*, puesto que 0—6758=—6758, al que conviene dar otra forma para que su aplicación al cálculo ofrezca todas las ventajas posibles.

Para ello, agreguémosle y restémosle la unidad de orden superior, con lo cual no se alterará su valor, y tendremos

$$-6758=10000-6758-10000=3242-10000=\bar{1}3242$$

según el convenio de la numeración decimal escrita (27) poniendo el signo — en la parte superior de la unidad de quinto orden, para que no afecte á las demás cifras que representan un valor aditivo.

Ahora basta fijarse en cómo se encuentra el número 3242 por las reglas de la sustracción, para convencerse de que:

Para encontrar el complemento á cero de un número entero, es suficiente restar su primer cifra significativa de la derecha de 10 *y las demás de* 9, *colocando delante del resultado una unidad negativa de orden superior.*

La sencillez de esta regla permite, cuando conviene, escribir los complementos con la misma facilidad con que se copiarían los números para cualquier operación y *convertir en sumandos cuantos tengan el carácter de sustraendos.*

En efecto; si de 46214 hemos de restar 5296, tendremos:

$$46214-5296=46214+(-5296)=46214+\bar{1}4704$$

operación que puede efectuarse por la regla de sumar, disponiéndola también en igual forma, lo que si no presenta tal vez ventaja cuando solo se trata de dos números, la ofrece muy grande cuando se combinan varios por adición y sustracción, *agregando á los que han de sumarse los complementos de los que se debían restar*.

Hé aquí los cuatro ejemplos de los casos anteriores, resueltos por este procedimiento:

$$\begin{array}{rrrr}
34028 & 85214 & 140697 & 34206 \\
24207 & \bar{1}82391 & \bar{1}77342 & \bar{1}72195 \\
5893 & \bar{1}6144 & \bar{1}80985 & \bar{1}0613 \\
\underline{\bar{1}73520} & \underline{\bar{1}08} & \bar{1}76 & 4517 \\
37648 & 63657 & 1887 & \bar{1}1391 \\
 & & \bar{1}676 & \bar{1}87580 \\
 & & \underline{11023} & \underline{20000} \\
 & & 111586 & 00502
\end{array}$$

CAPÍTULO III

MULTIPLICACIÓN

I.—Generalidades.

188. Al verdadero concepto de la Multiplicación se llega, suponiendo que en una Adición son iguales todos los sumandos como en $3+3+3+3$, en cuyo caso el resultado estará formado de *cuatro* veces 3, ó de *tres* veces 4, ya que descompuesto en todas sus unidades sería:

$$\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{c} 1+1+1 \\ 1+1+1 \\ 1+1+1 \\ \underline{1+1+1} \end{array}\right\}=3.4 \\
\;\;4+4+4 \quad =4.3
\end{array}$$

por lo que su objeto es:

Dados dos números, determinar un tercero que esté forma-

do por adición con respecto á uno cualquiera de ellos, del mismo modo que lo está el otro con respecto á la unidad positiva; de cuya definición se deduce inmediatamente que:

1.º—*El orden de los factores no altera el valor del producto.*

$$3.4=4.3.$$

2.º—*El producto de dos enteros será igual ó mayor que uno de los factores, según que el otro sea igual ó mayor que la unidad.*

$$8.1=8 \qquad 8.7>8.$$

3.º—*El producto aumentará ó disminuirá, si aumentan ó disminuyen los factores.*

$$8.7<(8+3)7 \quad \text{y} \quad 8.7>(8-3)7.$$

Además, si combinamos un valor determinado con sus límites, tendremos que:

4.º—*El producto de un número por* 0, *será* 0,
ya que siendo 0 todos los sumandos, la suma también lo será (169, 3.ª).

$$a.0=0$$

representando a un número cualquiera.

5.º—*El producto de* 0 *por* 0, *será* 0,
evidentemente.

$$0.0=0.$$

6.º—*El producto de un número por* ∞, *será* ∞,
por una razón análoga (169, 5.ª).

$$a.\infty=\infty$$

siendo a un número cualquiera.

7.º—*El producto de* ∞ *por* ∞ *será* ∞,
evidentemente.

$$\infty.\infty=\infty.$$

Escolio.—Más adelante sabremos cuál es el producto de 0 por ∞, que no puede deducirse de la sola definición.

189. Veamos ahora qué signo corresponderá al producto, según los que afecten á los factores.

Si uno de ellos es positivo, tendrá igual signo que la unidad con la cual ha de compararse; luego al producto corresponderá el mismo signo que tenga el otro factor, y si uno de ellos es negativo, el producto tendrá signo contrario al del otro, puesto que contrario es el de aquél, comparado con el de la unidad positiva, es decir, que

$$(+3)(+2)=+6$$
$$(+3)(-2)=-6$$
$$(-3)(+2)=-6$$
$$(-3)(-2)=+6$$

ó lo que es lo mismo:

1.°—*El producto de dos números será positivo ó negativo, según que los factores tengan igual ó distinto signo.*

De aquí se deduce, que si bien al multiplicar por un mismo número un factor mayor que otro, el valor numérico del primer producto será mayor que el del segundo (189, 3.°), cuando aquel número sea negativo, dichos productos tendrán signo contrario del que tendrían si fuera positivo, por lo que cambiará su relación de magnitud (178, 2.°); luego

2.°—*Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican por un mismo número, la desigualdad subsistirá en igual ó contrario sentido, según que dicho número sea positivo ó negativo.*

$$\text{Si} \quad 10>8,$$
$$10.3>8.3 \quad \text{y} \quad 10(-3)=-10.3<8(-3)=-8.3$$

Corolario.—*Las desigualdades numéricas de igual signo, podrán multiplicarse ordenadamente atendiendo al de los resultados para deducir el sentido de la desigualdad, pero no las literales,* por ignorarse si algún factor será negativo, hasta que se hayan puesto en lugar de las letras los valores particulares que deban tener y ejecutado todas las operaciones indicadas.

II.—Operaciones derivadas.

190. *Para multiplicar una combinación cualquiera de números aditivos y sustractivos por un entero, ó éste por aquélla, basta multiplicar cada término y sumar los productos parciales con los signos que les correspondan.*

En efecto; si el entero es positivo, tendremos, por ejemplo (43),

$$(10-4+7)3=10-4+7+10-4+7+10-4+7$$
$$=10+10+10-4-4-4+7+7+7=10.3-4.3+7.3$$

y como el producto cambia de signo al cambiar uno de los factores (189, 1.º), se verificará también si el entero es negativo

$$(10-4+7)(-3)=-(10-4+7)3=-(10.3-4.3+7.3)$$
$$=-10.3+4.3-7.3=10(-3)-4(-3)+7(-3).$$

Escolio.—Las expresiones $10.3-4.3+7.3=(10-4+7)3$ y $-10.3+4.3-7.3=(10-4+7)(-3)$ demuestran además que cualquier factor común, ó *que entre en varios términos de una expresión, puede escribirse fuera de un paréntesis, encerrando dentro los demás factores de cada uno á quienes multiplique, con el mismo ó contrario signo, según que dicho factor sea positivo ó negativo.*

1.º—*Para multiplicar una combinación cualquiera de números aditivos y sustractivos por otra cuyos términos sean enteros, basta multiplicarla por cada uno de éstos y sumar los productos parciales.*

En efecto; representando en general por $a+b-c$ la primera combinación, y suponiendo sea la segunda $5-3+6$, como este factor estará formado con respecto á la unidad positiva de 5 veces $+1$, *menos* 3 veces $+1$, *más* 6 veces $+1$, el producto deberá ser 5 veces $a+b-c$, *menos* 3 veces $a+b-c$, *más* 6 veces $a+b-c$, es decir, que

$$(a+b-c)(5-3+6)=(a+b-c)5-(a+b-c)3+(a+b-c)6.$$

Corolario.—*La suma por la diferencia de dos números enteros, es igual á la diferencia de sus cuadrados.*

$$(a+b)(a-b)=(a+b)a-(a+b)b=aa+ab-ab-bb=a^2-b^2$$
$$(7+5)(7-5)=7^2-5^2=49-25=24.$$

2.º—*Para multiplicar un producto indicado por un número entero, ó éste por aquél, basta multiplicar uno de los factores, conservando lo mismo los restantes.*

Puesto que no debiéndose alterar el valor del resultado, aunque se cambie el orden de los factores (188),

$$3.4.5.6(\pm7)=3.4.5(\pm7)6=3.4(\pm7)5.6$$
$$=3(\pm7)4.5.6=(\pm7)3.4.5.6$$

192. Para *multiplicar productos indicados,* claro está que *bastará formar uno solo con todos los factores que los compongan*; pero con objeto de no tener que escribir más que sus valores numéricos, precedidos del solo signo que corresponde al producto cuando algunos sean negativos, conviene recordar (189) que todos los factores positivos, lo mismo que cada dos negativos, darán un producto positivo, y que éste, multiplicado por uno negativo, producirá otro también negativo; por consiguiente:

1.°—*Un producto de varios factores será positivo ó negativo, según que el número de los negativos sea par ó impar.*

Respecto á *las potencias*, no es posible multiplicarlas sin determinar antes su valor, cuando nada tienen común; pero si las bases ó los exponentes fuesen iguales, tendríamos, representando por a, b, c, números cualesquiera positivos ó negativos,

$$a^3.a^4.a^5=aaa.aaaa.aaaaa=a^{3+4+5}$$
$$a^3b^3c^3=aaa.bbb.ccc=abc.abc.abc=(abc)^3,$$

lo cual demuestra que:

2.°—*Para multiplicar potencias de grado entero de una misma base, basta elevar ésta á la suma de los exponentes.*

3.°—*Para multiplicar potencias de igual grado, basta elevar al mismo el producto de las bases.*

III.—Detalles prácticos.

193. Por más que á la determinación del producto de dos enteros pudiera llegarse tomando á uno por sumando tantas veces como unidades tuviera el otro (43), sabido es que en la práctica se efectúa la operación por medio de una *regla general* (46, 2.°) sin más que recordar la tabla referente á esta operación (46, 1.°), y que *se omite* en todos los casos el *multiplicar por las cifras* 0, tanto si se hallan entre otras significativas (44), como si son las únicas que siguen á la unidad (44, 1.°) ó á otras

cualesquiera, todo lo cual da origen á las siguientes disposiciones prácticas, en las que debe tenerse cuidado, para no equivocarse, de colocar cada producto parcial debajo de la cifra por la cual se multiplica.

$$\begin{array}{r} 938 \\ 246 \\ \hline 5628 \\ 3752 \\ 1876 \\ \hline 230748 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4076 \\ 300080900 \\ \hline 36684 \\ 32608 \\ 12228 \\ \hline 1223129748400 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 70860.10000=708600000 \\ \\ 69200 \\ 57000 \\ \hline 4844 \\ 3460 \\ \hline 3944400000 \end{array}$$

pues en la última se tendría

$$69200=692.100 \text{ y } 57000=57.1000,$$

de donde

$$\begin{aligned} 69200.57000 &= 692.100.57.1000=692.57.100000 \\ &=40644.100000=3944400000, \end{aligned}$$

lo cual demuestra que:

1.° —*Para multiplicar enteros que terminen en ceros puede prescindirse de ellos escribiendo á la derecha del producto que resulte, todos los que tuviesen los factores,*

abreviación que debe incluirse entre las más conocidas.

Estas son, no obstante, muy pocas, en relación á las varias que permite realizar la índole de la operación, tanto en casos particulares como en los generales.

Basta, por ejemplo, recordar las reglas que hemos dado para multiplicar por una suma ó diferencia indicadas (190) y por un producto (191, 2.°, y 192), ó para encontrar el de potencias de una misma base ó de igual grado (192, 2.° y 3.°) y fijarse algo en las siguientes igualdades que se deducen de las mismas,

$$\begin{array}{l} 34.23=34(20+3)=680+102=782; \\ 34.28=34(30-2)=1020-68=942 \\ 75.36=25.3.4.9=25.4.3.9=100.27=2700; \\ 64.8=8^2.8=8^3=512; \quad 8.27=2^3.3^3=6^3=216, \end{array}$$

para comprender que:

2.° —*Siempre que los enteros tengan pocas cifras y uno de ellos ó ambos puedan descomponerse en sumandos positivos ó* *negativos, factores, ó potencias indicadas, cuyos valores sea fácil combinar mentalmente, se podrá efectuar de memoria la operación.*

194. Prescindiendo de estos casos especiales y sin salir de los particulares, son de verdadera importancia para la brevedad del cálculo, aquellos en que *los dos factores son menores que* 20, en *que uno es* 5, 25 *ó* 125, y en *que todas las cifras de uno de ellos son* 1 *ó* 9.

El primero, en que siempre es posible encontrar el producto por medio de una sencillísima operación mental, permite extender hasta 20.20 = 400 la tabla de multiplicar.

En efecto; tratándose de multiplicar 18 por 16, tendríamos:

$$\begin{aligned} 18.16 &= 18(10+6) = 18.10+18.6 = 18.10+(10+8)6 \\ &= 18.10+10.6+8.6, \end{aligned}$$

y sacando 10, factor común (190 Esc.)

$$18.16 = (18+6)10+6.8$$

de cuya igualdad se deduce que:

1.°—*Para multiplicar dos enteros menores que* 20, *basta agregar á uno de ellos las unidades del otro y añadir á la suma seguida de un* 0, *el producto de las cifras de las unidades*, por lo cual, en este caso bastaría decir mentalmente, aun cuando lo primero no es verdad: 18 y 6, 240, y 48, 288.

Si uno de los factores fuera 5, 25 ó 125, multiplicando el otro por 10=5.2, 100=25.4, ó 1000=125.8, se obtendría el producto buscado, multiplicado por 2, 4 ú 8 (191, 2.°); luego bastaría dividirlo respectivamente por ellos, lo que puede hacerse mentalmente (53, 1.°), para obtener el verdadero; por consiguiente:

2.°—*Para multiplicar un entero por* 5, 25 *ó* 125, *puede dividirse por* 2, 4 *ú* 8, *el resultado de considerar uno, dos ó tres ceros á su derecha.*

$$\left.\begin{array}{r} 5.28937\mathbf{0} \\ 144685 \end{array}\right\} \text{ó mejor} \left\{\begin{array}{l} 28937.5 \\ 144685 \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{r} 25.28937\mathbf{00} \\ 723425 \end{array}\right\} \text{ó mejor} \left\{\begin{array}{r} 28937.25 \\ 723425 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} 125.28937\mathbf{000} \\ 3617225 \end{array}\right\} \text{ó mejor} \left\{\begin{array}{r} 28937.125 \\ 3677125 \end{array}\right. .$$

Supongamos ahora que aplicamos la regla general á los números 28937 y 111, en cuyo caso tendremos:

$$\begin{array}{r} 28937 \\ 111 \\ \hline 28937 \\ 28937 \\ 28937 \\ \hline 3212007 \end{array}$$

y como todos los productos parciales han de ser iguales á 28937, y habrá tantos como cifras tenga el otro factor, basta observar de qué manera aparecen dispuestos para poder efectuar la suma de memoria, deduciendo que:

3.º—*El producto de un entero por otro cuyas cifras sean todas 1, puede formarse escribiendo la cifra de las unidades, sumándola con la de la izquierda, volviéndola á sumar con las dos de su izquierda y las decenas que antes hayan podido resultar y así sucesivamente, hasta sumar tantas cifras como tenga el segundo factor; y continuar del mismo modo empezando por las decenas, centenas, etc., hasta haber considerado solo la de orden superior, no escribiendo para representar el producto más que las unidades de cada suma parcial.*

La operación entonces se dispondría así:

28937.111
3212007

quedando efectuada sin más que este sencillo razonamiento:

7; 7 y 3, 10, de cuya suma se escribe sólo el **0**;
1 y 7, 8, y 3, 11 y 9, 20, ó mejor, 1 y 7, 8, 11, 20, escribiendo el **0**; 2 y 3, 5, 14, 2**2**; 2 y 9, 11, 19, 2**1**;
2 y 8, 10, 1**2**; 1 y 2, **3**.

195. En cuanto á la multiplicación, por ejemplo, por 999= 1000—1 equivaldría (190) á multiplicarle por 1000, escribiendo ó suponiendo escritos tres ceros á su derecha y restarlo una vez del resultado; por consiguiente:

1.º—*Para multiplicar un entero por otro cuyas cifras sean todas 9, basta restarlo del que resulte escribiendo á su derecha tantos ceros, como cifras tenga el otro.*

La operación suele disponerse así:

$$\left.\begin{array}{r}999.28937\mathbf{000}\\ 28937\\ \hline 28908063\end{array}\right\}\text{ ó mejor }\left\{\begin{array}{r}28937.999\\ 28937\\ \hline 28908063\end{array}\right.$$

Esta abreviación es aplicable aún, modificándola ligeramente, al caso en que sean 9 todas las cifras de un factor, menos la última; porque si éste fuera 996=1000—4, bastaría restar del otro factor seguido de tres ceros, su producto por 4, para hallar el resultado, y como el segundo puede formarse de memoria al escribirlo,

2.°—*Para multiplicar un entero por otro cuyas cifras, á excepción de la última, sean todas 9, se restan del que resulte, escribiendo á su derecha tantos ceros como cifras tenga el otro, el producto del primero por las unidades que falten al segundo para componer la de orden superior.*

Dicho producto se hallaría, pues, de este modo:

$$\left.\begin{array}{r}996.28937\mathbf{000}\\ 115748\\ \hline 28821252\end{array}\right\}\text{ ó mejor }\left\{\begin{array}{r}28937.996\\ 115748\\ \hline 28821252\end{array}\right.$$

196. Ocupándonos ya de los casos más generales, observaremos que lo ESENCIAL de la regla más comunmente seguida, es *que cada producto parcial ocupe para la suma el lugar que corresponde al orden que debe representar*, pero no el comenzar por la derecha, por lo que para ciertas abreviaciones conviene acostumbrarse á escribirlos en cualquier orden, á cuyo fin presentamos á continuación el producto del propio número 28937 por 72812, empezando por la derecha, por la izquierda, y por la cifra 8 del centro del segundo factor, á cuyo producto parcial siguen los correspondientes á la cifra 2 de la izquierda, 2 de la derecha, 7, y 1.

28937	28937	28937
72812	72812	72812
57874	202559	231496
28937	57874	57874
231496	231496	57874
57874	28937	202559
202559	57874	28937
2106960844	2106960844	2106960844

No siendo tampoco indispensable la colocación de los factores, uno debajo de otro, desde luego se observa que:

Cuando alguna cifra de uno de los factores sea 1, *puede tomarse al otro como primer producto parcial, multiplicándolo sólo por las demás y haciendo que los restantes ocupen el lugar que les corresponda.*

Así, en la multiplicación anterior, puede suprimirse la copia del primer factor, disponiéndola como sigue:

```
     28937.72812
      57874
    231496
    57874
  202559
  ----------------
  2106960844
```

Por lo demás, siempre es posible encontrar el producto por un procedimiento completamente mental, sin que se tenga que escribir ninguno de los productos parciales, procedimiento que si exige alguna práctica y es expuesto á fáciles equivocaciones cuando los números son muy grandes, es, en cambio, rapidísimo y no ofrece inconveniente ninguno para enteros de dos, tres y aun cuatro cifras, que son aquellos con los cuales se opera con más frecuencia.

Para que este método se comprenda bien, recordaremos que la regla ordinaria es ya abreviada, como hemos dicho (193), en razón á que cada sumando está compuesto á su vez de los varios productos parciales de cada cifra del primer factor por la que se está considerando en el segundo, los cuales se adicionan de memoria, por lo cual el producto del mismo 28937 por 456, por ejemplo, descompuesto en todos los productos de las cifras que realmente lo constituyen, colocado cada uno en el lugar correspondiente al orden de unidades que debe representar, sería el siguiente:

$$\begin{array}{cccccccc}
&&&2&8&9&3&7\\
&&&&&4&5&6\\
\hline
&&&&&&4&2\\
&&&&&1&8&\\
&&&&5&4&&\\
&&&4&8&&&\\
&&1&2&&3&5&\\
&&&&1&5&&\\
&&&4&5&&&\\
&&4&0&&&&\\
&1&0&&2&8&&\\
&&&1&2&&&\\
&&3&6&&&&\\
&3&2&&&&&\\
&8&&&&&&\\
\hline
1&3&1&9&5&2&7&2
\end{array}$$

Ahora bien; no hay ninguna razón, más que la costumbre, para sumar de memoria 42, 18, 54, 48 y 12, que componen el primer producto parcial; 35. 15, 45, 40 y 10 enseguida, que forman el segundo; y, por último, 28, 12, 36, 32 y 8 después, para obtener el tercero por el procedimiento ordinario, en lugar de sumar también de memoria, á excepción de 42, único que representa *unidades*; 18 y 35 que son *decenas*; 54, 15 y 28 que son *centenas*; 48, 45 y 12 que son *millares*; 12, 40 y 36 que son *decenas de millar*; 10 y 32 que son *centenas de millar*, y 8 que son *millones*, en cuyo caso podría escribirse tan sólo la cifra que en cada suma representara unidades del orden correspondiente, agregando las decenas á la que sigue, según se hace en la adición común, y formar desde luego el producto total, que se coloca, como siempre, debajo de los factores, sin necesidad de ninguno de los parciales.

Al principio ofrece este método la dificultad de no saber determinar bien cuáles serán los productos que representarán iguales órdenes de unidades; pero sabiendo que unidades por unidades, son *unidades*; unidades por decenas y decenas por unidades, *decenas* (193, 1.°); unidades por centenas, decenas por decenas y centenas por unidades, *centenas*, etc., queda reducido á la siguiente regla:

Para encontrar mentalmente el producto de dos enteros se multiplican las cifras de las unidades, escribiendo sólo las *del producto y sumando las decenas con las del segundo factor por las unidades del primero, y las unidades de aquél por las decenas de éste; se escriben sólo las unidades de la suma y se agregan las decenas á las centenas del segundo por las unidades del primero, las decenas del uno por las del otro, y las centenas de éste por las unidades de aquél; se continúa así la operación hasta haber multiplicado la primera de la izquierda del segundo factor, que se va después combinando con la segunda, tercera, etc., de la derecha del primero, y no se da por terminada hasta llegar al producto único de las dos de orden superior.*

La aplicación de esta regla á los anteriores números, sería la siguiente:

$$\begin{array}{r} 28937 \\ 456 \\ \hline 13195272 \end{array}$$

6 por 7, 4**2**; 4, y 5 por 7, 35, 39 y 6 por 3, 18, 5**7**; 5, y 4 por 7, 28, 33 y 5 por 3, 15, 48, y 6 por 9, 54, 10**2**; 10, y 4 por 3, 12, 22, y 5 por 9, 45, 67 y 6 por 8, 48, 11**5**; 11, y 4 por 9, 36, 47 y 5 por 8, 40, 87 y 6 por 2, 12, 9**9**; 9, y 4 por 8, 32, 41, y 5 por 2, 10, 5**1**; 5, y 4 por 2, 8, **13**.

En la práctica, sin embargo, no deben pronunciarse ni aun con la imaginación los productos de las cifras, sino recordarlos á la simple vista de ellas, pues es mucho menos fácil equivocarse fijándose en los números y diciendo únicamente: 6 por 7, 4**2**; 4 y 35, 39 y 18, 5**7**; 5 y 28, 33 y 15, 48 y 54, 10**2**; 10 y 12, 22 y 45, 67 y 48, 11**5**; 11 y 36, 47 y 40, 87 y 12, 9**9**; 9 y 32, 41 y 10, 5**1**; 5 y 8, **13**.

Aunque para enteros de muchas cifras se hace este método casi impractible, es útil conocerlo de todos modos y acostumbrarse á él, porque su aplicación es sencilla, siempre que uno de los factores tiene sólo dos cifras, como sucedería en

$$\begin{array}{r} 28937 \\ 54 \\ \hline 1562598 \end{array}$$

razón por la que en todo caso, y no siendo posible otra abreviación, puede reducirse mucho el número de productos parciales de las multiplicaciones largas, operando con dos ó tres cifras en lugar de una.

Así el producto de 28937 por 64192, se podría obtener sin escribir más que dos ó tres productos parciales, efectuando mentalmente las multiplicaciones por 192 y 64, ó por 92, 41 y 6, como está indicado á continuación:

$$\begin{array}{r} 28937 \\ 64192 \\ \hline 5555904 \\ 1851968 \\ \hline 1857523904 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 28937 \\ 64192 \\ \hline 2662204 \\ 1186417 \\ 173622 \\ \hline 1857523904 \end{array}$$

198. La facilidad con que se divide un entero por otro de una sola cifra (53, 1.°), proporciona también un medio para reducir el número de productos parciales, cuando los factores tienen muchas cifras, que consiste en

Dividir las cifras del factor que se escribe debajo en grupos que representen números múltiplos (48) *unos de otros, empezando la operación por la cifra conveniente para que los demás productos parciales, correspondientes á los diversos grupos, puedan determinarse multiplicando ó dividiendo por una cifra los ya encontrados.*

En el ejemplo general (196) podría aplicarse este MÉTODO DE LOS MÚLTIPLOS Y DIVISORES y calcular el producto de 28937 por 72812, separando en el segundo factor los grupos 72, 8 y 12, en los cuales se verifica $72=8.9$ y $12=72:6$, por lo que una vez encontrado el de 28937 por 8, puede multiplicarse por 9 para tener el que corresponde á 72, y encontrado ya éste, bastará dividirlo por 6, para escribir el correspondiente á 12, con lo cual la operación quedaría reducida á

$$\begin{array}{r} 28937 \\ 72812 \\ \hline 231496 \\ 2083464 \\ 347244 \\ \hline 2106960844 \end{array}$$

y si no hubiera en los factores ninguna cifra conveniente para empezar la multiplicación, podria combinarse este procedimiento con el de la mental por dos ó tres cifras.

Esto es lo que sucederia al encontrar el producto del mismo 28937 por 64192, calculado ya de otras dos maneras distintas en el párrafo anterior, y que también podría serlo multiplicando mentalmente el primer factor por 64 y el resultado por 3, en razón á que $192=64.3$, como hacemos á continuación:

$$\begin{array}{r} 28937 \\ 64192 \\ \hline 1851968 \\ 5555904 \\ \hline 1857523904 \end{array}$$

Teorema.—*El producto de dos enteros constará de tantas cifras como tengan ambos factores, ó de una menos.*

En efecto; si los factores son, por ejemplo, 4237 y 569, se tendría (188, 3.ª):

$$\left.\begin{array}{l} 569>100 \\ 569<1000 \end{array}\right\} \text{y por lo tanto} \left\{\begin{array}{l} 4237.569>4237.100\ =423700 \\ 4237.569<4237.1000=4237000 \end{array}\right.$$

y como el primer producto tiene $6=4+3-1$ cifras, es decir, una menos que ambos factores, y el segundo $7=4+3$, cualquier entero mayor que 423700 y menor que 4237000, tendrá también 6 ó 7 cifras.

CAPÍTULO IV

DIVISIÓN

I.—Generalidades.

199. Las consecuencias que se deducen inmediatamente del objeto general de la División, son:

1.ª—*El dividendo ha de ser siempre igual al producto del divisor por el cociente exacto,*
según la misma definición (51).

Si $12:3=4$, también $12=4.3$.

2.ª—*El dividendo ha de ser siempre igual al producto del divisor por el cociente entero, más el resto,*
en virtud de la definición de éste (51).

$$\text{Si } 12:3=4, \qquad \text{también} \quad 12=4.3+0,$$

$$\text{y si } 14:3=4\tfrac{2}{3} \ (150), \qquad \text{también} \quad 14=4.3+2.$$

3.ª—*El cociente exacto será igual ó menor que el dividendo, según que el divisor sea igual ó mayor que 1,*
puesto que el dividendo ha de estar formado, con respecto al cociente, del mismo modo que el divisor lo esté con respecto á 1 (188).

$$15:15=1, \qquad 15:3>1.$$

5.ª- *Si el divisor aumenta ó disminuye, el cociente exacto disminuirá ó aumentará*, en razón á que aumentando ó disminuyendo un factor, el producto aumentaría ó disminuiría forzosamente si al otro factor no le sucediera lo contrario (188, 3.º)

$$\text{Si} \quad 28:4=7, \qquad 28:(4\pm2)\lesseqgtr 7.$$

6.ª—*Si el dividendo aumenta ó disminuye, al cociente exacto le sucederá lo mismo;* porque para aumentar ó disminuir el producto, permaneciendo igual el divisor, tiene que aumentar ó disminuir el otro factor que lo compone.

$$\text{Si} \quad 28:4=7, \qquad (28:\pm2):4\gtreqless 7.$$

Respecto á los resultados de combinar los números con sus límites, se deducen fácilmente de los análogos de la Multiplicación, de las consecuencias que acabamos de exponer y del caracter inverso de la División.

En efecto; recordando unos y otras, veremos que:

1.º—*Los cocientes de dividir* 0 *por* 0, *ó* ∞ *por* ∞, *podrán suponerse iguales á cualquier número, á* 0 *ó á* ∞,
porque de $a.0=0$ (188, 4.º), $0.0=0$ (188, 5.º) y $0.\infty=0$ (188, Esc.) resulta

$$0:0=a, \quad 0:0=0 \quad \text{y} \quad 0:0=\infty,$$

siendo a un valor cualquiera; y de $a.\infty=\infty$ (188, 6.ª) é $\infty.\infty=\infty$,

$$\infty:\infty=a, \quad \text{é} \quad \infty:\infty=\infty.$$

En cuanto á la posibilidad de escribir $\infty:\infty=0$, que también autoriza el enunciado, se desprende de la siguiente consideración:

A medida que el divisor va disminuyendo, el cociente aumenta según la 5.ª consecuencia; pero por muy grande que lo supongamos, jamás multiplicado por un divisor 0 producirá un dividendo a de valor limitado (188, 4.º); luego no podrá ser más que indefinidamente grande, es decir, ∞, y si representando a un valor cualquiera, $a:0=\infty$, con mayor razón $\infty:0=\infty$, puesto que el cociente aumenta al aumentar el dividendo, y como de esta igualdad se deduce, en virtud de la consecuencia 1.ª, $0.\infty=\infty$, también deberá ser $\infty:\infty=0$, según la definición de dividir.

Corolario.—*El producto de* 0 *por* ∞, *podrá suponerse* también (188, Esc.) *igual á* ∞ *y á cualquier número.*

$$0.\infty=\infty \quad \text{y} \quad 0.\infty=a.$$

2.º—*El cociente de dividir por* 0, *cualquier número ó* ∞, *será* ∞, según acabamos de demostrar.

3.º—*El cociente de dividir* 0 *por cualquier número ó por* ∞, *será* 0,

porque de $a.0=0$ (188, 4.º) resulta $0:a=0$, y de una consideración análoga á la anteriormente hecha, la segunda parte del enunciado.

En efecto; á medida que aumente el divisor debe disminuir el cociente, según la 5.ª consecuencia; pero por muy pequeño que lo supongamos, jamás multiplicado por un divisor ∞, producirá un dividendo a de valor limitado (188, 6.º); luego no podrá ser más que indefinidamente pequeño, es decir, 0, y si representando a un valor cualquiera, $a:\infty=0$, con mayor razón $0:\infty=0$, puesto que el cociente disminuye al disminuir el dividendo.

Corolario.—*El producto de* 0 *por* ∞ también *se podrá suponer igual á* 0.

$$0.\infty=0.$$

4.°—*El cociente de dividir por ∞ un número cualquiera, será* 0,

según se acaba de demostrar.

5.°—*El cociente de dividir ∞ por cualquier número, será ∞,* ya que $a.\infty=\infty$ (188, 6.°).

200. Investiguemos ahora el signo que al cociente deberá corresponder, lo que también es consecuencia inmediata de lo dicho en la Multiplicación (189), en virtud de lo cual,

$$\begin{aligned}(+6):(+3)&=+2\\(-6):(+3)&=-2\\(-6):(-3)&=+2\\(+6):(-3)&=-2\end{aligned}$$

ó en otros términos:

1.°—*El cociente de dos números será positivo ó negativo, según que dividendo y divisor tengan signos iguales ó contrarios.*

De aqui se deduce, que si bien al dividir por un mismo número un dividendo mayor que otro, el valor numérico del primer cociente será mayor que el del segundo (199, 6.ª), cuando aquel número sea negativo, dichos cocientes tendrán signo contrario del que tendrían si fuera positivo, por lo que cambiará su relación de magnitud (178, 2.°); luego:

2.°—*Si los dos miembros de una desigualdad se dividen por un mismo número, la desigualdad subsistirá en igual ó contrario sentido, según que dicho número sea positivo ó negativo.*

Si $20>15$, $20:5>15:5$ y $20:(-5)=-4<15:(-5)=-3$.

Corolario.—Considerando sólo el valor numérico de ambos miembros, es evidente que el cociente que tenga mayor dividendo, menor divisor, ó ambas cosas, será mayor; por consiguiente:

Las desigualdades numéricas de sentido contrario podrán dividirse ordenadamente, atendiendo á los valores y signos de los resultados, para deducir el sentido de la desigualdad resultante, pero no las literales, por ignorarse si algún cociente será negativo, hasta que se hayan puesto en lugar de las letras los valores particulares que deban tener y ejecutado todas las operaciones indicadas.

II.—Operaciones derivadas.

201. 1.°—*Para dividir una combinación cualquiera de números aditivos y sustractivos por un entero, basta dividir exactamente cada término y sumar los cocientes parciales con los signos que les correspondan.*

En efecto; sea el entero positivo ó negativo, siempre tendremos

$$(10-4+7):(\pm 3)=10:(\pm 3)-4:(\pm 3)+7:(\pm 3)=c+c'+c''$$

llamando c, c' y c'' á los cocientes, puesto que esta última expresión, multiplicada por el divisor ± 3, nos daría (190)

$$(c+c'+c'')(\pm 3)=c(\pm 3)+c'(\pm 3)+c''(\pm 3)=10+(-7)+7$$
$$=10-4+7;$$

porque siendo c, c' y c'' los cocientes exactos de dividir 10, —4 y 7, por 3, multiplicados por el divisor ± 3, producirán forzosamente los respectivos dividendos 10, —4 y 7; luego la citada expresión será el cociente buscado, ya que multiplicada por el divisor ± 3, produce el dividendo primitivo.

Escolio.—La división por sumas y diferencias indicadas no puede, en general, realizarse sin efectuarlas antes.

2.°—*Para dividir un producto indicado por un número entero, basta dividir exactamente uno de los factores, conservando lo mismo los restantes,*
puesto que el nuevo producto así obtenido, multiplicado por el divisor, producirá el dividendo, porque para multiplicar por un entero dicho producto indicado, bastaría multiplicar el cociente parcial (191, 2.°) hallado, que volvería á producir el primitivo factor elegido por dividendo.

$$(45.20.15):5=\left\{\begin{array}{l}(45:5)20.15=9.20.15=2700\\ 45(20:5)15=45.4.15=2700\\ 45.20(15:5)=45.20.3=2700\end{array}\right.$$

Corolario.—De estas dos reglas y de sus análogas de la Multiplicación, se deduce que:

1.°—*Si el dividendo se multiplica ó divide exactamente por un entero, el cociente exacto quedará multiplicado ó dividido por el mismo número.*

2.°—*Si el divisor se multiplica ó divide exactamente por un entero, el cociente exacto quedará dividido ó multiplicado por el mismo número.*

3.°—*Si dividendo y divisor se multiplican ó dividen exactamente por un entero, el cociente no variará, pero el resto quedará multiplicado ó dividido por el mismo número.*

En efecto; supongamos que hemos efectuado la división siguiente:

$$\begin{array}{c|c} D & d \\ \cline{2-2} r & c \end{array}$$

ó en otros términos, sea D el dividendo, d el divisor, c el cociente y r el resto, que será ó no 0, según que la división sea exacta ó inexacta (51).

Debiéndose verificar (199, 2.ª) $D=dc+r$, si multiplicamos ó dividimos exactamente el dividendo D por cualquier entero 4, por ejemplo, en el caso de ser $r=0$, su igual dc deberá también quedar multiplicado ó dividido, es decir, que según la última regla,

$$D.4=dc.4=d(c.4)$$
$$D:4=dc:4=d(c:4),$$

lo que demuestra el corolario 1.°, ya que si los nuevos dividendos $D.4$ y $D:4$ los dividimos por el mismo divisor d, obtendremos respectivamente los cocientes $c.4$ y $c:4$.

Como también se tendría, en el mismo supuesto de ser $r=0$,

$$D=(d.4)(c:4)$$
$$D=(d:4)(c.4),$$

porque multiplicando y dividiendo por 4 el producto dc, es evidente que no variará, si el dividendo D lo dividiéramos por $d.4$ ó $d:4$, el cociente sería $c:4$, ó $c.4$, conforme al enunciado del 2.°

Por último, en cualquier caso,

$$D.4=(dc+r)4=(d.4)c+r.4$$
$$D:4=(dc+r):4=(d:4)c+r:4;$$

luego si dividiéramos $D.4$, ó $D:4$, por $d.4$ ó $d:4$, respectivamente, el cociente c no variaría, pero los restos serían $r.4$, ó $r:4$, lo que demuestra el 3.°

202. Supongamos ahora que un producto indicado de factores enteros 2.3.4.5, por ejemplo, haya de servir de divisor y que el dividendo fuese otro entero, tal como 2400.

Representando por c el cociente exacto de dividir 2400 por 2.3.4.5, se verificaría (199, 1.ª) $2400=2.3.4.5.c$, de donde dividiendo por 2 ambos miembros de esta igualdad (168, 1.°), los de la que resulte por 3, por 4 los de la última, y así sucesivamente, tendremos:

$$1200=3.4.5.c;\quad 400=4.5.c;\quad 100=5.c;\quad 20=c;$$

ya que para dividir los segundos miembros, bastará suprimir el factor correspondiente (201, 2.°, y 199, 4.ª).

La última igualdad nos enseña que el valor del cociente se obtendrá verificando las operaciones que hemos indicado, y que por lo tanto,

1.°—*Para dividir un número entero por un producto de factores también enteros, se dividen sucesiva y exactamente el número y los cocientes que se obtengan, por cada uno de los factores del producto.*

Finalmente; si se trata de dividir dos potencias indicadas de una misma base ó del mismo grado, pues en otro caso no es fácil efectuar la operación sin encontrar antes sus valores, tendremos, por ejemplo, $7^5:7^3=7^{5-3}=7^2$ ó $6^5:3^5=(6:3)^5=2^5$ en razón á que estos números multiplicados por el divisor 7^3 ó 3^5 producirán forzosamente los dividendos, bastando como basta (192, 2.°) para multiplicar 7^2 por 7^3 elevar 7 á la potencia $2+3=5$; para multiplicar 2^5 por 3^5 hallar el producto de las bases (192, 2.° y 3.°); y habiéndose obtenido el 2, por diferencia entre 5 y 3, que sumada con el sustraendo, siempre dará el minuendo (175, 1.°), ó por cociente de dividir 6 por 3, que multiplicado por el divisor producirá el dividendo.

Así, pues,

2.°—*Para dividir dos potencias de grado entero de una misma base, basta elevar ésta á la diferencia entre el exponente del dividendo y el del divisor.*

3.°—*Para dividir dos potencias de igual grado entero, basta elevar á igual grado el cociente de las bases de dividendo y divisor.*

III —Detalles prácticos.

203. El cociente de una división pudiera encontrarse restando el divisor del dividendo cuantas veces fuera posible; pero *la regla general* que en la práctica suele seguirse, abrevia la operación (52, 3.°) cuanto es posible, no solo *enseñando un procedimiento rápido para ejecutarla*, sino también dando origen á otros más breves aun para los casos particulares en que el *divisor tenga una sola cifra ó sea la unidad seguida de ceros* (53), que son los incluidos á continuación.

En la división primera que corresponde al caso general, detallamos dos procedimientos para que se vea cuánto abrevia también el restar de memoria los productos del divisor por las cifras del cociente á medida que se van hallando, en lugar de escribirlos debajo de los respectivos minuendos.

$$
\begin{array}{r|l}
86417 & 325 \\ \cline{2-2}
650 & 265 \\ \cline{1-1}
2141 & \\
1950 & \\ \cline{1-1}
1917 & \\
1625 & \\ \cline{1-1}
292 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
86417 & 325 \\ \cline{2-2}
2141 & 265 \\
1917 & \\
292 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
325015 & 5 \\
65003 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
24376 & 1000 \\
\text{Resto... } 376 & 24\text{... Cociente.}
\end{array}
$$

Aunque las empleadas en los anteriores ejemplos sean las abreviaciones más conocidas, se comprende que los resultados obtenidos al estudiar las operaciones derivadas originarán varias otras y hasta permitirán encontrar el cociente de memoria en *los mismos casos indicados en la Multiplicación* (193, 2.°) como por ejemplo:

$$120:24=(96+24):24=96:24+24:24=4+1=5;$$
$$192:24=(240-48):24=240:24-48:24=10-2=8$$
$$540:12=(9.60):12=9(60:12)=9.5=45;$$
$$512:64=8^3:8^2=8, \quad \text{ó bien,} \quad 512:64=8^3:4^3=(8:4)^3=2^3,$$

para cuyas operaciones mentales sería suficiente recordar las reglas dadas para dividir por un entero una combinación aditiva ó sustractiva (201, 1.°) ó un producto (201, 2.°) y dos potencias indicadas (202, 2.° y 3.°).

204. También la regla para dividir por un producto indicado (202, 1.°) y las propiedades particulares de los números 5=10:2, 25=100:4 y 125=1000:8, pueden facilitar la práctica de la división.

Supongamos, en efecto, que 13818, se deba dividir por 42=6.7, ó por 5, 25, ó 125.

En el primer caso, bastará dividir exactamente por 6 el dividendo y por 7 el cociente que resulte; en los restantes, dividiendo dicho número por 10, 100 ó 1000, multiplicamos el divisor por 2, 4 ú 8, luego el cociente exacto quedará dividido por los mismos, y como este cociente exacto siempre podemos hallarlo de memoria (80), será suficiente multiplicar los que se obtengan por 2, 4 ú 8, para determinar los verdaderos, por lo cual,

1.°—*Para dividir un entero por otro, cuando el divisor sea, ó pueda dercomponerse fácilmente en un producto de factores enteros, que dividan exactamente al primero y cocientes sucesivos, bastará efectuar las divisiones por cada uno de dichos factores.*

2.°—*Para dividir un número por* 5, 25 *ó* 125, *se multiplica por* 2, 4 *ú* 8 *el cociente de dividirlo por* 10, 100 *ó* 1000.

	13818	6	13818	5	13818	25	13818	125
	2303	7	2763'6		552'72		110'544	
Cociente....	329							

suponiendo en los tres últimos ejemplos que las cifras 8, 18 y 818, tenían delante la coma con que en los fraccionarios decimales se marca el lugar de las unidades (74), que es lo que resultaría de dividir exactamente el dividendo por 10, 100 ó 1000 (80).

205. La misma propiedad en que nos hemos fundado para dividir abreviadamente por 5, 25 y 125 (201, Cor. 2.°) permitirá suprimir cualquier factor que tuviese el divisor, así como en virtud de su análoga (201, Cor. 3.°), se podrían suprimir los del dividendo; pero pudiendo en el primer caso contener el primitivo resto al nuevo divisor una ó más veces y quedando en el segundo dividido por los mismos factores dicho resto, que es

uno de los sumandos que componen el dividendo (199, 2.ª), cuando la división fuera inexacta, las determinaciones de los verdaderos valores del cociente entero y resto, junto con las divisiones parciales que se habrían hecho para suprimir los factores, complicarían la división en vez de abreviarla, por lo que esas propiedades no tienen verdadera aplicación práctica más que á los casos en que el dividendo y el divisor, ó éste solo, terminen en ceros.

Terminando en ceros dividendo y divisor, basta, en efecto, recordar la propiedad del cociente y resto cuando ambos se dividen por un factor común (201, Cor. 3.º), para deducir que:

1.º—*Si dividendo y divisor terminan en ceros, pueden suprimirse de ambos igual número de ellos, escribiéndolos después á la derecha del resto que se obtenga.*

Si sólo el divisor terminara en ceros, podrían también suprimirse, prescindiendo de igual número de cifras en la derecha del dividendo; porque el producto del divisor por el cociente terminaría en otros tantos (193), por lo cual las cifras separadas en el dividendo provendrían evidentemente de la agregación del resto á ese producto, luego

2.º—*Cuando el divisor termine en ceros, pueden suprimirse, prescindiendo de igual número de cifras á la derecha del dividendo, las cuales se escribirán á continuación del resto.*

En los ejemplos siguientes puede verse la aplicación de estas reglas:

5329000	16000	7513818	16000
52	333	111	469
49		153	
1000		9818	

Escolio.—Por más que, en general, como hemos dicho, no convenga suprimir otra clase de factores en los datos de la división, podría haber casos excepcionales en que supiéramos de antemano que la división había de ser exacta, en los cuales bastaría para obtener el verdadero cociente, multiplicar el que se obtuviese por los factores suprimidos en el dividendo ó dividirlo por los suprimidos en el divisor (201, Cor.), y aun podrá convenir la supresión de los comunes á ambos en las divisiones exactas ó inexactas, con lo que el cociente, sea el que sea, no se alterará, por cuya razón presentamos los siguientes ejemplos, para que se vea la disposición práctica que podría adoptarse y la necesaria modificación del resto, en el último.

	13440	672	
Cociente por 10...	1344	2	Cociente inexacto.
	000	20	Idem verdadero.

	13440	672	
	384	96	Cociente por 7.
	000	140	7
Cociente verdadero............		20	

	13440	672
Cocientes por 4...	3360	168
	000	20

	13818	672	
	6909	336	Cocientes por 2.
	2303	112	Idem por 3.
	329	16	Id. por 7.
Resto inexacto.......	9	20	Id. verdadero.
2.3.7=	42		
	378	Resto verdadero.	

206. Las divisiones que más conviene abreviar por la pesadez de la operación y por la facilidad de equivocarse al comprobar las cifras del cociente, son aquellas en que éste *ha de constar de muchas cifras, teniendo varias el divisor.*

Entonces puede evitarse la comprobación formando previamente una pequeña *tabla de los productos del divisor por los nueve primeros enteros*, en la que puede verse desde luego cuál será la verdadera cifra del cociente y el producto de la misma por el divisor, que ha de restarse del dividendo parcial, producto que, si tiene muchas cifras, conviene copiar debajo de ese dividendo, en vez de hacer la resta de memoria para evitar equivocaciones.

También debe tenerse formada dicha tabla *siempre que un divisor se tenga que emplear con frecuencia*, aun cuando los cocientes no hayan de tener muchas cifras.

Hé aquí la aplicación de este método en ambos casos:

```
  298    56347091837245183609647 | 298
 596|2   2654                    |--------------------
 894|3    2707                   | 189084200796124777213
1192|4     2509
1490|5      1251
1788|6        598
2086|7         2372
2384|8          2864
2682|9           1825
    |              371
                    738
                    1423
                     2316
                      2300
                       2149
                         636
                          404
                          1067
                           173
```

```
 92872054361 | 3709
 7418        |----------
 -----       | 25039647
 18692
 18545
 -----
  14705                         3709
  11127                         7418|2
  -----                        11127|3
   35784                       14836|4
   33381                       18545|5
   -----                       22254|6
    24033                      25963|7
    22254                      29672|8
    -----                      33381|9
     17796                          |
     14836
     -----
      29601
      25963
      -----
       3638
```

207. *El cociente entero inexacto está siempre aproximado por defecto* (164) *al verdadero, en menos de una unidad,* en razón á que si le aumentamos 1, dará un producto por el divisor, mayor en valor numérico que el dividéndo, resultando, por lo tanto, *aproximado por exceso en menos de una unidad* también; y como el resto es lo que quedaría después de restar

el divisor del dividendo cuantas veces fuese posible, es evidente que:

La aproximación del cociente entero en las divisiones inexactas, será menor, igual ó mayor que media unidad, según que el resto sea menor, igual ó mayor que la mitad del divisor,

por lo que es conveniente, en el último caso, *aumentarle una unidad*, siempre que no sea preciso obtenerlo por defecto, en razón á que de ese modo se obtendrá el aproximado al verdadero por exceso en menos de media unidad.

El número entero que más se aproximaría al pedido en la última división, sería, por consiguiente, 25039648, y el resto correspondiente á este cociente sería *negativo é igual á la diferencia entre el divisor y el anteriormente hallado,* es decir, —71, puesto que estas serán las unidades que al dividendo faltan para contener al divisor una vez más.

CAPÍTULO V

PROPIEDADES MÁS IMPORTANTES

I.—Divisibilidad.

208. Acabamos de ver que la mayoría de los cocientes son aproximados, aunque es sabido (150) que completándolos con una fracción, pueden representarse con exactitud, por lo que en adelante tendremos que operar frecuentemente con números fraccionarios, lo cual nos obliga á estudiar las operaciones en que intervengan y, como consecuencia, á interrumpir el de las referentes á los enteros, para exponer algunas de sus propiedades, que han de servir de base al Cálculo de aquéllos.

Los números enteros, como hemos visto, pueden ser unos MÚLTIPLOS de otros (48) ó *divisibles* por otros, que, por lo tanto, serán *factores, divisores, sub-múltiplos* ó PARTES ALÍCUOTAS de aquéllos, y para indicar un múltiplo cualquiera de un número se coloca encima de éste el signo $\dot{-}$; así $\dot{\overline{5}}$, se leería: *múltiplo de* 5.

El estudio de la DIVISIBILIDAD de los números tiene por objeto *encontrar reglas sencillas para conocer si un número será divisible por otro.*

209. Atendiendo á que los resultados de combinar por Adición y Sustracción los números enteros siempre serán enteros, y recordando la regla demostrada para dividir por cualquier entero una combinación de dicha clase (201, 1.°), deduciremos que:

1.° *Todo entero que divida exactamente á otros varios, dividirá también á todas sus sumas y diferencias.*

Corolario. 1.°—*Si un número divide á otro, dividirá á todos sus múltiplos*, porque si 4 divide á cualquier número a, como dicho múltiplo sería el producto de a por un entero (48) 5, por ejemplo, se tendría:

$$\dot{\overline{a}}=a.5=a+a+a+a+a$$

y como divide á a por supuesto, dividirá á todos los sumandos de que se compone $a.5=\dot{\overline{a}}$, y por consiguiente, á éste.

2.°—*Si un número divide exactamente á todos los sumandos en que otro pueda descomponerse menos á uno sólo, no podrá dividir á este otro.*

Sea 2 el número que divide exactamente á 12, 16 y 20, pero no divide á 9; como evidentemente sería

$$(12+16+20+9)-(12+16+20)=9,$$

si 2 dividiera al número $12+16+20+9=55$, como también divide á $12+16+20=48$ por dividir exactamente á los tres sumandos, tendría que dividir igualmente á la diferencia 9, á la que estamos suponiendo no divide.

Apliquemos ahora estos *principios fundamentales* á investigar los caractéres de divisibilidad por los 12 primeros enteros, únicos cuyos productos por los de una cifra suelen saberse de memoria, y á 25 y 125, por los cuales es también muy fácil dividir mentalmente (204, 2.°).

Cualquier número entero 456789, por ejemplo, podrá siempre descomponerse en dos sumandos análogos á

$$456780+9,\ 456700+89 \text{ y } 456000+789,$$

y como los primeros siempre serán múltiplos de 10, 100 y 1000 respectivamente (53, 2.°), los cuales á su vez lo son de 2 y 5, 4 y 25, 8 y 125, resulta de las proposiciones anteriores que:

2.°—*Un número será divisible por 2 ó 5, sólo en el caso de que lo sea la cifra de sus unidades.*

3.°—*Un número será divisible por 4 ó 25, sólo en el caso de que lo sea el representado por las dos cifras de su derecha.*

4.°—*Un número será divisible por 8 ó 125, sólo en el caso de que lo sea el representado por las tres cifras de su derecha.*

Escolio.—Para aplicar con facilidad las reglas anteriores, conviene recordar que como $4=2.2$ y $8=2.2.2$ para que un número sea divisible por 4 ú 8, lo ha de ser *dos* ó *tres* veces por 2 (202); que no hay más cifras divisibles por 5, que 0 y 5; que entre los números de dos cifras sólo 00, 25, 50 y 75 son múltiplos de 25, y que entre los de tres, lo son únicamente de 125, además de él mismo y de 000: 250, 375, 500, 625, 750 y 875.

210. Según sabemos por la numeración:

$$10000.....=9999.....+1$$

ó lo que es lo mismo, puesto que un número formado por cifras 9, siempre será exactamente divisible por éste (53, 1.°)

$$10000.....=\overset{\cdot}{\overline{9}}+1,$$

y multiplicando ambos miembros por cualquier otra cifra, 5, por ejemplo (190),

$$50000.....=\overset{\cdot}{\overline{9}}.5+5=\overset{\cdot}{\overline{9}}+5$$

por lo que descomponiendo un número tal como 54678 en sus diversos órdenes de unidades, se tendría

$$\begin{aligned} 50000&=\overset{\cdot}{\overline{9}}+5\\ 4000&=\overset{\cdot}{\overline{9}}+4\\ 600&=\overset{\cdot}{\overline{9}}+6\\ 70&=\overset{\cdot}{\overline{9}}+7\\ 8&=\phantom{\overset{\cdot}{\overline{9}}+}8 \end{aligned}$$

y sumando ordenadamente (169, 9.ª)

$$54678=\dot{\overline{9}}+(5+4+6+7+8),$$

ya que, según el teorema fundamental (209, 1.°), la suma $\dot{\overline{9}}+\dot{\overline{9}}+\dot{\overline{9}}+\dot{\overline{9}}$ sería también $\dot{\overline{9}}$.

Observemos, además, que todo $\dot{\overline{9}}$ lo ha de ser igualmente de 3 (209, Cor. 1.°), y que, por consiguiente, se verificará también que:

$$54678=\dot{\overline{3}}+(5+4+6+7+8);$$

es decir, que todo número se podrá descomponer siempre en un múltiplo de 3 ó 9, más la suma de sus cifras, y que, por tanto,

1.°—*Un entero cualquiera será divisible por* 3 *ó por* 9, *sólo en el caso de que lo sea la suma de los valores de sus cifras.*

El mismo número, descompuesto en sus diversos órdenes, nos daría

$$54678=50000+4000+600+70+8=5.10000+6.100+7.10+8,$$

y como dividiendo por 11 la unidad seguida de ceros encontraríamos:

$$\begin{array}{r|l} 10000\ldots\ldots & 11 \\ \hline 100 & 909 \\ 1 & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \end{array}$$

por lo que

$$100=9.11+1=\dot{\overline{11}}+1$$

$$1000=90.11+10=\dot{\overline{11}}+10$$

$$10000=909.11+1=\dot{\overline{11}}+1$$

. . . .

$$6.100=6(\dot{\overline{11}}+1)=6.\dot{\overline{11}}+6=\dot{\overline{11}}+6$$

$$4.1000=4(\dot{\overline{11}}+10)=4.\dot{\overline{11}}+4.10=\dot{\overline{11}}+4(\dot{\overline{11}}-1)$$

$$=\dot{\overline{11}}+4.11-4=\dot{\overline{11}}-4$$

$$5.10000=5(\dot{\overline{11}}+1)=5.\dot{\overline{11}}+5=\dot{\overline{11}}+5$$

. . . .

así como $7.10=7(11-1)=7.11-7=\dot{\overline{11}}-7$, resultará sustituyendo en la primera igualdad,

$$54678=\dot{\overline{11}}+5+\dot{\overline{11}}-4+\dot{\overline{11}}+6+\dot{\overline{11}}-7+8$$

ó cambiando el orden de los diversos sumandos, lo que evidentemente no alterará el conjunto de unidades de que el resultado final se componga,

$$54678=\dot{\overline{11}}+\dot{\overline{11}}+\dot{\overline{11}}+\dot{\overline{11}}+8+6+5-7-4$$

$$=\dot{\overline{11}}+(8+6+5)-(7+4).$$

Ahora bien; 8, 6 y 5 son las cifras de lugar impar del número, empezando á contar por la derecha, y 5 y 6, las de lugar par, luego

2.º—*Un número entero cualquiera será divisible por* 11, *solo en el caso de que lo sea la diferencia entre las sumas de los valores absolutos de las cifras de lugar impar y de lugar par.*

211. *Si á la izquierda de una cifra cualquiera se escribe su producto por* 2, *el número que resulte será múltiplo de* 7.

En efecto; sea c una cifra cualquiera, y escribamos á su izquierda $2c$.

El número N así formado tendrá $2c$ por decenas y c por unidades; luego,

$$N=2c.10+c=20.c+c=21.c=7.3.c=\dot{\overline{7}}.$$

Demostrado este teorema, supongamos que de un número dado restamos el representado por el duplo de sus unidades y estas unidades; de la diferencia, el representado por el duplo de su primer cifra significativa seguido de esta misma cifra y un cero, y así sucesivamente, tal como está indicado á continuación, para el número 4376:

$$\begin{array}{r} 4376 \\ -126 \\ \hline 4250 \\ -1050 \\ \hline 3200 \end{array}$$

Cada minuendo será igual á la suma del sustraendo y la diferencia; luego en virtud de las operaciones efectuadas, tendremos:

$$4376=126+4250=126+1050+3200=126+105.10+32.100,$$

y como 126 y 105 están formados del modo dicho en el teorema, serán múltiplos de 7, por consiguiente:

$$4376=\dot{\overline{7}}+\dot{\overline{7}}+32.100=\dot{\overline{7}}+32.100=\dot{\overline{7}}+3200.$$

Resulta, pues, el número descompuesto en dos sumandos, de los cuales uno es múltiplo de 7; luego el que dicho número lo sea, dependerá del otro sumando (209, Cor. 2.°) 3200; pero éste no podrá ser divisible por 7, si 32 no lo es, porque el cociente de la división, si fuese exacta, debería terminar en dos ceros, ya que no hay ninguna cifra significativa, cuyo producto por 7 termine en cero, y para esto habría sido neccsario que la división anterior de 32 por 7 hubiese sido exacta también.

Observemos ahora que, para encontrar el resultado, basta restar de las decenas del número y de las diferencias sucesivas el duplo de las unidades, pues para nada se necesitan los ceros, lo cual permite en la mayor parte de los casos hacer de memoria las operaciones, que se reducen á lo siguiente:

$$\begin{array}{r} 4376 \\ -12 \\ \hline 425 \\ -10 \\ \hline 32 \end{array}$$

De donde se deduce que:

Para conocer si un número es divisible por 7, basta restar de sus decenas el duplo de sus unidades, repitiendo la operación con la diferencia hallada y todas las sucesivas, hasta llegar á una que sepamos de memoria si es ó no divisible por 7. El número propuesto lo será solo en el caso de que lo sea esta última diferencia.

Ejemplo.—Aplicando las reglas dadas veríamos que el número 17052, es divisible por 2 por terminar en cifra par, y por 4, porque 52 lo es, pero no por 8, por no serlo 052.

No es divisible por 5, 25 ni 125, porque no lo son respectivamente 2, 52 ni 052.

Siendo $15=3.5=\dot{3}$ la suma de sus cifras, es divisible por 3, pero no lo es por 9, en razón á no serlo esa suma.

La diferencia $(5+7)-(2+0+1)$ entre la suma de las cifras de lugar par y de lugar impar, es $12-3=9$, y como 9 no es divisible por 11, el número tampoco lo será.

Finalmente, aplicándole la última regla, hallaremos:

$$\begin{array}{r}
17052 \\
4 \\
\hline
1701 \\
2 \\
\hline
168 \\
16 \\
\hline
0
\end{array}$$

luego 7 le dividirá exactamente.

Escolio.—*Para que un número sea divisible por la unidad seguida de ceros, deberá terminar en tantos como acompañen á esa unidad* (53, 2.°), *y para serlo por* $6=2.3$, *ó* $12=3.4$, *tendrá que serlo por 2 y 3 ó por 3 y 4* (202), luego 17052 no podría dividirse exactamente por 10, pero sí por 6 y por 12.

II.—Números primos.

212. La frecuente aplicación que á las cuestiones prácticas se hace de los enteros que solo son divisibles por la unidad y por sí mismos, hace que en muchos casos sea conveniente tener á mano tablas, que hasta un cierto límite contengan la serie de los números primos y la descomposición en factores de los que no lo sean.

Veamos, pues, si será posible, por procedimientos fáciles, construir cuando convenga dicha tabla y efectuar la referida descomposición.

Para conseguir lo primero sin apelar á la regla general (101), observaremos que 2 es el único número par que puede ser primo, porque los demás serán divisibles por él, no teniendo que ocuparnos, por consiguiente, más que de los impares, que escribiremos formando la serie 1, 2, 3, 5, 7, 9..... hasta 999.

Como cada número, á excepción de los tres primeros, se diferencia del anterior en dos unidades, el que esté tres lugares después de un múltiplo cualquiera de 3 será igual á $\dot{3}+2.3$; luego será también múltiplo de 3 (209, 1.º), y por lo tanto, si á partir de 3, contamos de 3 en 3 lugares, tachando los números que estén en el tercer lugar, habremos tachado todos los múltiplos de 3, ya que los demás se compondrán de un sumando múltiplo de 3 y otro que no lo será.

Lo mismo sucederá con los múltiplos de 5, que estarían á partir de éste de 5 en 5 lugares, con los de 7, y así sucesivamente; de donde se deduce, que no teniendo ningún factor primo los números que queden siu tachar, serán primos, y por consiguiente:

Para formar una tabla de números primos, se escriben los números 1, 2 y todos los impares hasta el límite que se desea. Enseguida, á partir de 3, se van tachando los números que estén de tres en tres lugares; á partir de 5, los que estén de cinco en cinco, y así sucesivamente.

Los números que queden sin tachar serán los primos.

Escolio.—Para facilitar este procedimiento en la práctica, *no se empieza á contar desde cada número primo, sino desde el producto que resulta de multiplicarle por sí mismo*, en razón á que todos los menores que éste estarán ya tachados, por ser forzosamente múltiplos de los números primos más pequeños que el que ha de servir de punto de partida.

La tabla I, impresa al final del tomo, contiene todos los números primos menores que 5000.

213. Tratemos ahora de descomponer un número en todos sus factores primos, y para ello dividamos, por ejemplo, 21168 y los cocientes que vayan resultando tantas veces como sea posible por los factores primos más pequeños que los dividan con exactitud, hasta llegar á un cociente que no teniendo ningún divisor primo, tenga que dividirse por sí mismo; con lo cual, encabezando también con el factor 1 la serie de los primos, aunque suprimiendo la división por él, que daría el mismo número, y disponiendo las operaciones de la manera más cómoda para la práctica, tendremos:

$$\begin{array}{r|l} 21168 & 1 \\ 10584 & 2 \\ 5292 & 2 \\ 2646 & 2 \\ 1323 & 2 \\ 441 & 3 \\ 147 & 3 \\ 49 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & 7 \end{array}$$

$2^4 x\ 3^3 x\ 7^2 = 21168$

y por lo tanto, $21168=2.2.2.2.3.3.3.7.7$, ya que cada dividendo sería igual al producto del divisor por el cociente, ó recordando la definición de potencia (49) y el modo de indicarla:

$$21168=2^4.3^3.7^2.$$

De todo lo cual se deduce que:

Para encontrar todos los factores primos de un número, bastará dividirle á él y á los cocientes sucesivos tantas veces como sea posible, por los que componen la serie de los números primos hasta llegar á un cociente igual á 1. El número propuesto será entonces igual al producto de las potencias de todos los factores distintos, cuyo grado sea para cada uno el número de veces que se haya podido tomar por divisor.

Corolario.—*En el caso particular de que á primera vista pueda descomponerse el número en factores, cuyos divisores primos sean fáciles de hallar*, puede simplificarse la operación, *multiplicando entre sí estos factores primos*, como sucedería, por ejemplo, con el número

$$96000=32.3.1000=2^5.3.2^3.5^3=2^8.3.5^3.$$

La tabla II, colocada á continuación de la I, contiene las descomposiciones de todos los enteros compuestos hasta 2000 inclusive, que, como la anterior, puede ser de gran utilidad para la simplificación de las fracciones.

III.—Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

214. Descompuesto un número 21168 en un producto de las mayores potencias $2^4.3^3.7^2$ de sus factores primos 2, 3 y 7 contenidas en él, es evidente que cuantas combinaciones facto-

riales puedan hacerse con esos números primos y las potencias que dividan á 21168, serán también divisores de éste (202), y hasta puede admitirse que serán los únicos, teniendo en cuenta que si otro número que contuviera alguna potencia mayor que las indicadas, ó algún factor primo distinto, dividiera exactamente á 21168, podríamos descomponerlo de otra manera en factores primos, lo que es imposible atendiendo á que así, como cualquier entero, puede descomponerse por Adición de varios modos, sumando diversos números compuestos de unidades enteras, pero de uno solo en unidades de esta clase; también puede ser descompuesto por Multiplicación en diferentes números compuestos de números primos, pero en factores de esta clase no admitirá más que una sola descomposición.

De estas consideraciones se deduce que:

1.º—*Para que un número divida á otro es necesario y suficiente que no contenga más que factores primos de este otro y á lo más elevados á igual potencia.*

Así $252=2^2.3^2.7$ dividiría á 21168, pero no $96=2^5.3$, ni $20=2^2.5$, que contienen respectivamente un factor 2 ó 5, no contenido en 21168.

2.º—*Para que un número sea divisible por otro es necesario y suficiente que contenga todos los factores de este otro, elevados por lo menos á igual potencia.*

21168 sería divisible por 252, pero no por 96 ni 20.

Estas proposiciones dan un medio de encontrar el *m.c.d.* y *m.c.m.* de dos ó más enteros en la mayoría de los casos, mucho más rápido y sencillo que el que se desprende de los procedimientos generales.

Efectivamente; todo divisor de los números dados deberá contener únicamente, según lo dicho en la primera de ellas, factores primos comunes á todos, y elevados á lo más á una potencia igual á la menor que tengan en las descomposiciones, luego obtendremos el mayor, multiplicando entre sí todos los factores comunes á los diversos números, elevados á un exponente igual al menor con que entren en los mismos.

Por otra parte, un número divisible por otros varios, deberá tener por precisión todos los factores primos de éstos, por lo dicho en la segunda, con un exponente por lo menos igual al mayor que tengan en las descomposiciones, luego obtendremos el menor posible, multiplicando todos los factores primos de los números, elevados á una potencia igual al mayor con que entren en los mismos.

Vemos, por consiguiente, que:

3.º—*Para hallar el* m. c. d. *de varios números se descomponen en sus factores primos y se multiplican las menores potencias de los comunes á todos ellos.*

4.º—*Para hallar el* m. c. m. *de varios números se descomponen en sus factores primos y se multiplican las mayores potencias de todos estos factores.*

Ejemplo.—Hallar el *m.c.d.* y *m.c.m.* de los números 840, 3240 y 4200.

$$\begin{array}{r|l} 840 & 1 \\ 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 2 \\ 35 & 3 \\ 7 & 5 \\ 1 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3240 & 1 \\ 1620 & 2 \\ 810 & 2 \\ 405 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 3 \\ 1 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4200 & 1 \\ 2100 & 2 \\ 1050 & 2 \\ 525 & 2 \\ 175 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 5 \\ 1 & 7 \end{array}$$

$$840=2^3.3.5.7; \qquad 3240=2^3.3^4.5; \qquad 4200=2^3.3.5^2.7.$$

$$m.c.d.\left\{\begin{array}{r} 840 \\ 3240 \\ 4200 \end{array}\right\}=2^3.3.5.=120;$$

$$m.c.m.\left\{\begin{array}{r} 840 \\ 3240 \\ 4200 \end{array}\right\}=2^3.3^4.5^2.7=113400.$$

215. Cuando no es necesario conservar las disposiciones de los números, es inútil para el *m.c.d.* buscar los factores diferentes, siendo suficiente ir anotando los comunes á medida que se van dividiendo por ellos todos los números; así es que en el ejemplo anterior podríamos desde luego, por medio de los caractéres de divisibilidad, *observar qué factores primos son divisores de todos los números y de los cocientes sucesivos,* dividiéndolos primero por 2, los cocientes otra vez por 2, los que

resultan también, los siguientes por 3 y los que se obtengan por 5, *hasta llegar,* como sucedería entonces, á *cocientes que ya no tengan ningún factor común,* bastando haber escrito esos divisores para formar con su producto el *m.c.d.*, con lo cual las operaciones quedarían reducidas á las siguientes:

840	3240	4200	2	
420	1620	2100	2	
210	810	1050	2	*m.c.d.*=120.
105	405	525	3	
35	135	175	5	
7	27	35		

También para la investigación del *m.c.m*, puede seguirse un procedimiento análogo, *dividiendo por* 2, 3, 5 y *los* restantes *primos que sea posible cuantos números se pueda* y continuar así con los resultados que se vayan encontrando, *hasta llegar en todos á obtener el cociente* 1.

La abreviación, sin embargo, no es en este caso de tanta consideración, pues teniendo que hallar los mismos cocientes que por el método general, sólo se ahorra la repetición de los factores primos comunes, que basta escribir una sola vez.

LIBRO SEGUNDO

NÚMEROS ENTEROS Y FRACCIONARIOS

CAPÍTULO PRIMERO

PRELIMINARES

1. — Generalidades.

216. Sabido es que las fracciones (10), llámense ordinarias (56) ó decimales (73), por su forma de expresión y representación, no *son* más que *cocientes indicados* de su numerador por su denominador (150), por lo cual, desde luego les serán aplicables todas las propiedades de los cocientes con solo dar los nombres de sus términos al dividendo y al divisor.

Así, pues:

1.°—*Una fracción será menor, igual ó mayor que la unidad, según que el numerador sea menor, igual ó mayor que el denominador,*
pues en el primer caso sólo contendrá algunas de las partes en que la unidad se considera dividida (56), y los otros dos están demostrados (199, 4.ª).

$$6/8<1; \quad \frac{8}{8}=1; \quad \frac{12}{8}>1.$$

2.°—*Si el numerador de una fracción aumenta ó disminuye, la fracción aumentará ó disminuirá* (199, 6.ª)
y por consiguiente:

3.º—*De dos fracciones que tengan igual* ~~*numerador*~~ denominador*, será mayor la que tenga mayor numerador.*

$$\frac{5}{12}<\frac{5+2}{12}=\frac{7}{12} \text{ y } \frac{5}{12}>\frac{5-2}{12}=\frac{3}{12}.$$

4.º—*Si el denominador aumenta ó disminuye, la fracción disminuirá ó aumentará* (199, 5.ª)

y por lo tanto,

5.º—*De dos fracciones que tengan igual numerador, será mayor la que tenga menor denominador.*

$$\frac{5}{12}<\frac{5}{12-2}=\frac{5}{10} \text{ y } \frac{5}{12}>\frac{5}{12+2}=\frac{5}{14}.$$

6.º—*Para escribir un entero en forma fraccionaria bastará ponerle por denominador la unidad* (191, 3.ª)

$$9=\frac{9}{1}.$$

7.º—*Para escribir un entero en forma fraccionaria de denominador conocido, será suficiente multiplicarle por dicho denominador y poner el producto por numerador* (201, 3.º)

$$9=\frac{9.13}{13}=\frac{117}{13}$$

Escolio.—A causa de lo dicho en la primera de estas consecuencias, llaman algunos fracciones propias, á *las que tienen el numerador menor que el denominador*, é impropias, á *las que lo tienen igual ó mayor*, aunque otros creen, y entre ellos nosotros, que la impropiedad está en hacer tal distinción.

II.—Simplificación.

217. La propiedad que tienen las fracciones de no cambiar de valor aunque sus dos términos se multipliquen ó dividan por un mismo número (58), permite además simplificarlas (60) si no son irreducibles, por tener *sus dos términos primos entre si* (102), y claro es que en la práctica no solo convendrá simplificarlas, sino reducirlas á su más simple expresión, ó sea *transformarlas en otras equivalentes é irreducibles* para que sus términos sean lo más pequeños posible, lo que es fácil conseguir

dividiéndolos no por un factor cualquiera, sino por todos los que tengan comunes, lo cual nos enseña que (214, 3.°)

Para reducir una fracción á su más simple expresión, habrá que dividir sus dos términos por su m.c.d.

Como éste puede hallarse por dos procedimientos (104 y 214, 3.°), resultan para la reducción, en cuanto á la forma del Cálculo, los tres distintos que vamos á aplicar á $\frac{3948}{5712}$.

1.°—Dividiendo sucesivamente sus dos términos por 2, 2, 3 y 7, que conoceremos son divisores de ambos por lo dicho en la Divisibilidad (209, 2.°; 210, 1.°, y 211).

$$\frac{3948}{5712}=\frac{1974}{2856}=\frac{987}{1428}=\frac{329}{476}=\frac{47}{68}.$$

2.°—Dividiéndolos por su *m.c.d.* determinado por sus factores primos que, empleando el método abreviado (215), exige las mismas operaciones que el anterior, pues no hay necesidad de escribir dicho *m.c.d.*

3948	5712
1974	2856
987	1428
329	476
47	68

$$\frac{3948}{5712}=\frac{47}{68}.$$

3.°—Encontrando el *m.c.d.* por divisiones sucesivas (104).

5712	3948	1764	420	84
	1	2	4	5
1764	420	84	0	

$$\begin{array}{r|l} 5712 & 84 \\ \cline{2-2} 672 & 68 \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3948 & 84 \\ \cline{2-2} 588 & 47 \\ 0 & \end{array} \qquad \frac{3948}{5712}=\frac{47}{68}.$$

Este último procedimiento es indudablemente el más pesado; pero como también es el único aplicable á todos los números, por lo que ha de emplearse en muchos casos, conviene abreviarlo aprendiendo á suprimir las dos divisiones de los términos por el *m.c.d.*, que á veces pueden ser dificultosas, construyendo mentalmente la fracción irreducible equivalente á la propuesta, lo cual casi siempre puede conseguirse por un método bastante rápido.

Basta, en efecto, recordar la composición de todo dividendo (199, 2.ª) para deducir que:

$$
\begin{aligned}
420&=84.5=84(1.5)\\
1764&=420.4+84=84.5.4+84=84(5.4+1)=84.21\\
3948&=1764.2+420=84.21.2+84.5=84(21.2+5)=84.47\\
5712&=3948.1+1764=84.47.1+84.21=84(47.1+21)=84.68,
\end{aligned}
$$

y atendiendo á la formación de los números encerrados entre paréntesis, es fácil ver que para encontrar las veces que cada dividendo contiene al *m.c.d.* 84, basta multiplicar el último cociente 5 por el anterior 4 y agregar 1; multiplicar la suma 21 por el cociente anterior 2 y agregar el precedente 5, continuando así hasta haber multiplicado por el primer cociente 1 y hecho la suma correspondiente del resultado anterior, por lo que en la práctica puede seguirse la siguiente regla:

Escribir los cocientes sucesivos en la parte superior de los divisores y encima del último de aquéllos la unidad; multiplicar ésta por el cociente que tiene debajo, escribiendo el producto encima del anterior; multiplicar también este producto por el cociente que tiene debajo y agregar el número obtenido anteriormente; escribir el resultado encima del cociente que precede y continuar así hasta haber multiplicado por el último, y hecho la adición que corresponda. Las dos últimas sumas calculadas serán los términos de la fracción buscada.

La disposición del cálculo sería entonces la siguiente:

68	47	21	5	1
	1	2	4	5
5712	3948	1764	420	84
1764	420	84	0	

y para aplicar la regla se diría: 1 por 5, 5; por 4, 20, y 1, 21; por 2, 42, y 5, 47; por 1, 47, y 21, 68. La irreducible equivalente sería, por tanto, $\frac{47}{68}$.

Escolio.—Con objeto de encontrar el *m.c.d.* entre los números más pequeños que sea posible, lo que se hace casi siempre es *dividir los dos términos de la fracción y de las que vayan resultando por la serie de los números primos que les dividan exactamente, no aplicando las operaciones del* m.c.d. *hasta lle-*

gar á una cuyos dos términos no tengan, á simple vista, ningún factor primo común.

De este modo no es necesario muchas veces encontrar este *m.c.d.*

Quien no conociera la regla sencilla (211), por cuyo medio se sabe inmediatamente si un número entero es ó no divisible por 7, debería, por lo tanto, efectuar las siguientes operaciones:

$$\frac{3948}{5712} = \frac{1974}{2856} = \frac{987}{1428} = \frac{329}{476}$$

476	329	147	35	7
	1	2	4	5
147	35	7	0	

$$\frac{3948}{5712} = \frac{329:7}{476:7} = \frac{47}{68}$$

III.—Reducción á un denominador común.

219. El método más comunmente seguido para efectuar esta reducción (59) no es sino un caso particular del GENERAL, que consiste en

Hallar un múltiplo cualquiera de los denominadores y multiplicar el numerador de cada fracción por el cociente de dividir por su denominador ese múltiplo, que será el común.

Si se trata, por ejemplo, de $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$ y $\frac{17}{25}$, bastará observar que 100 es múltiplo de todos los denominadores para deducir que (58):

$$\frac{3}{4} = \frac{3.25}{4.25} = \frac{75}{100};$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2.20}{5.20} = \frac{40}{100} \text{ y } \frac{17}{25} = \frac{17.4}{25.4} = \frac{68}{100},$$

lo cual daría fracciones más sencillas que

$$\frac{3}{4} = \frac{3.5.25}{4.5.25} = \frac{375}{500};$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2.4.25}{5.4.25} = \frac{200}{500} \text{ y } \frac{17}{25} = \frac{17.4.5}{25.4.5} = \frac{340}{500}.$$

En la práctica, sin embargo, no conviene en general seguir ninguna de las dos reglas anteriores, porque debe buscarse siempre que los números con los cuales se ha de operar sean lo más pequeños que se pueda, lo cual se conseguirá en este caso poniendo por denominador, no un múltiplo cualquiera, sino el *m.c.m.*

La regla, pues, más conveniente en la práctica será la siguiente:

Para reducir varias fracciones á un común denominador, se halla el m.c.m. *de los denominadores, y se multiplica cada numerador por el cociente que resulte de dividir por el denominador respectivo este* m.c.m., *que será el denominador común.*

$$\frac{7}{10},\ \frac{3}{5},\ \frac{1}{2},\ \frac{5}{4};\ m.c.m.\left\{\begin{matrix}10\\5\\2\\4\end{matrix}\right\}=2^2.5=20;$$

$$\frac{7}{10}=\frac{14}{20};\ \frac{3}{5}=\frac{12}{20};\ \frac{1}{2}=\frac{10}{20};\ \frac{5}{4}=\frac{25}{20};$$

Si el *m.c.m.* se halla por la descomposición en factores primos, el cociente dicho se compondrá de los que falten al denominador para componer el *m.c.m.*

Por último, en el caso de que los denominadores fuesen primos entre sí, el *m.c.m.* sería el producto de todos ellos, y entonces tendríamos que multiplicar el numerador de cada fracción por el producto de los denominadores de las demás, como se hace generalmente.

$$\frac{2}{3},\ \frac{4}{5},\ \frac{6}{7};\ m.c.m.\left\{\begin{matrix}3\\5\\7\end{matrix}\right\}=3.5.7=105;$$

$$\frac{2}{5}=\frac{70}{105};\ \frac{4}{5}=\frac{84}{105};\ \frac{6}{7}=\frac{90}{105}.$$

220. No siempre son las operaciones tan fáciles, sobre todo si el menor múltiplo común ha de buscarse por el procedimiento del *m.c.d.* (107), como puede verse en el ejemplo que sigue, en el que están detalladas todas las que hay que hacer por ambos métodos, para la reducción de $\frac{7}{1500}$, $\frac{11}{336}$, $\frac{23}{504}$ y $\frac{9}{750}$.

	4	2	6	2
1500	336	156	24	12
156	24	12	0	

$$\begin{array}{r|l} 1500 & 12 \\ \hline 30 & 125 \\ 60 & 336 \\ \hline 0 & 750 \\ & 375 \\ & 375 \\ \hline & 42000 \end{array}$$

	83	3
42000	504	168
1680	0	
168		

$$\begin{array}{r} 42000 \\ 3 \\ \hline 126000 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 126000 & 750 \\ \hline 5100 & 168 \\ 6000 & \\ 0 & \end{array}$$

$$m.c.m.\left\{\begin{array}{r} 1500 \\ 336 \\ 504 \\ 750 \end{array}\right\}=126000$$

$$\begin{array}{r|l} 126000 & 1500 \\ \hline 6000 & 84 \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 126000 & 336 \\ \hline 2520 & 375 \\ 1680 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 126000 & 504 \\ \hline 2520 & 250 \\ 0 & \end{array}$$

$$\frac{7}{1500}=\frac{7.84}{126000}=\frac{588}{126000};\quad \frac{11}{336}=\frac{11.375}{126000}=\frac{4125}{126000};$$
$$\frac{23}{504}=\frac{23.250}{126000}=\frac{5750}{126000};\quad \frac{9}{750}=\frac{9.168}{126000}=\frac{1512}{126000}.$$

$$\begin{array}{r|l} 1500 & 1 \\ 750 & 2 \\ 375 & 2 \\ 125 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 336 & 1 \\ 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 2 \\ 7 & 3 \\ 1 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 504 & 1 \\ 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 3 \\ 1 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 750 & 1 \\ 375 & 2 \\ 125 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & 5 \end{array}$$

$$m.c.m.\left\{\begin{array}{r} 1500=2^2.3.5^4 \\ 336=2^4.3.7 \\ 504=2^3.3^2.7 \\ 750=2.3.5^3 \end{array}\right\}=2^4.3^2.5^3.7=126000$$

$$\frac{7}{1500} = \frac{7.2^2.3.7}{126000} = \frac{588}{126000}; \quad \frac{11}{336} = \frac{11.3.5^3}{126000} = \frac{4125}{126000};$$

$$\frac{23}{504} = \frac{23.2.5^3}{126000} = \frac{5750}{126000}; \quad \frac{9}{750} = \frac{9.2^3.3.7}{126000} = \frac{1512}{126000}.$$

La pesadez y poca claridad del primero para el que no está muy versado en los conocimientos aritméticos, es causa de que casi nunca se empiee, prefiriendo el último y aun el primero de los expuestos antes, si los denominadores no pueden descomponerse fácilmente en factores primos.

Pueden combinarse ambos *hallando el* m.c.m. *por los métodos abreviados* (214 y 215) *y efectuando por separado las divisiones* del mismo por los denominadores; pero esto complicaría el último procedimiento en vez de abreviarlo, en razón á que es mucho más fácil determinar esos cocientes, *viendo qué factores faltan á cada denominador para componer el mínimo común múltiplo.*

Si no se pueden obtener de memoria, como sucede en muchos casos, hay, por consiguiente, que buscarlos, comparando los denominadores y el mínimo común múltiplo descompuestos en sus factores, y para no repetir aquél, que basta escribir una vez y hacer que los numeradores resulten en columna, lo cual facilita las adiciones y sustracciones, se coloca á la izquierda de una línea vertical ó en la superior de una horizontal, disponiendo las operaciones en una de estas dos formas:

$\frac{7}{1500}$	$2^2.3.5^3$		$7.2^2.3.7$	588
$\frac{11}{336}$	$2^4.3.7$	$2^4.3^2.5^3.7$	$11.3.5^3$	4125
$\frac{23}{504}$	$2^3.3^2.7$	126000	$23.2.5^3$	5760
$\frac{9}{750}$	$2.3.5^3$		$9.2^3.3.7$	1512

		$2^4.3^2.5^3.7$	126000
$\frac{7}{1500}$	$2^2.3.5^3$	$7.2^2.3.7$	588
$\frac{11}{336}$	$2^4.3.7$	$11.3.5^3$	4125
$\frac{23}{504}$	$2^3.3^2.7$	$23.2.5^3$	5760
$\frac{9}{750}$	$2.3.5^3$	$9.2^3.3.7$	1512

CAPÍTULO II

OPERACIONES

I.—Transformación de fracciones.

221. La frecuencia con que en la práctica suelen combinarse las formas ordinaria y decimal, hace que la transformación de unas en otras sea en muchos casos indispensable, y que á veces convenga conocer antes de efectuarla si la ordinaria dará origen ó no á una decimal exacta, puesto que aplicando la regla conocida (110) á las fracciones $\frac{246}{75}$, $\frac{427}{123}$ y $\frac{637}{108}$, hallaríamos las tres formas decimales (166)

$$\begin{array}{r|l} 246 & 75 \\ \hline 210 & 3‘28 \\ 600 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 427 & 123 \\ \hline 580 & 3‘47154... \\ 880 & \\ 190 & \\ 670 & \\ 550 & \\ 58 & \\ ... & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 637 & 108 \\ \hline 970 & 5‘89814... \\ 1060 & \\ 880 & \\ 160 & \\ 520 & \\ 88 & \\ ... & \end{array}$$

$$\frac{246}{75}=3‘28 \qquad \frac{427}{123}=3‘(47154) \qquad \frac{637}{108}=5‘89(814),$$

que hubiéramos podido predecir de antemano (112) descomponiendo los términos en sus factores primos (213), para ver cuáles eran los contenidos en el denominador qué no lo estuvieran en el numerador.

Las transformaciones anteriores no están, sin embargo, hechas como deben hacerse en la práctica, pues hubiéramos debido *empezar por reducir á su más simple expresión dichas fracciones*, observando, por ejemplo, que 246 y 75 son divisibles por 3 (210, 1.°), y como si hacemos esto desaparecerán los factores comunes á ambos términos, basta recordar las reglas generales (112) para deducir que:

Una fracción irreducible sólo podrá transformarse en decimal exacta, cuando su denominador no tenga más factores primos que 2 y 5, ó uno solo de ellos.

Respecto á la transformación inversa, es sabido que, por ejemplo (113, 114, 115 y 150),

$$4'325 = \frac{4325}{1000} = \frac{865}{200} = \frac{173}{40} = 4\,\frac{13}{40}.$$

$$4'(729) = \frac{4729-4}{999} = \frac{4725}{999} = \frac{525}{111} = \frac{175}{37} = 4\,\frac{27}{37}$$

$$3'57(263) = \frac{357263-357}{99900} = \frac{356906}{99900} = \frac{178453}{49950} = 3\,\frac{28603}{49950},$$

cuyos resultados hemos simplificado y puesto en forma de números mixtos, porque es la que casi siempre conviene usar en los cálculos, y esto precisamente es causa de que para la conversión de decimales en ordinarias puedan seguirse reglas más sencillas, *considerando como 0 la parte entera, y escribiéndola, si no lo es, delante de la fracción que resulte*, con lo cual es verdad que no se obtiene la generatriz de la decimal, sino el número mixto equivalente, que es lo más ventajoso bajo el punto de vista práctico.

Las reglas, pues, que hay que tener presentes y que se desprenden inmediatamente de las generales para el caso en que sea ó se suponga 0 la parte entera, son las siguientes:

1.ª—*Para encontrar la fracción ordinaria equivalente á una decimal exacta, se pone por numerador la parte fraccionaria y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga.*

2.ª—*Para hallar la equivalente á una periódica pura, se pone por numerador el período y por denominador el número representado por tantos nueves como cifras tenga.*

3.ª—*Para escribir la equivalente á una periódica mixta, se* *pone por numerador la diferencia entre el número representado por la parte irregular seguida del período y la parte irregular, y por denominador tantos nueves como cifras tenga el período, seguidos de tantos ceros como cifras la parte no periódica.*

Las anteriores operaciones quedarían por estas reglas reducidas á

$$4'325=4\,\frac{325}{1000}=4\,\frac{65}{200}=4\,\frac{13}{40}$$

$$4'(729)=4\,\frac{729}{999}=4\,\frac{81}{111}=4\,\frac{27}{37}$$

$$3'57(263)=3\,\frac{57263-57}{99900}=3\,\frac{57206}{99900}=3\,\frac{28603}{49950}.$$

222. Pudiera suceder también que una decimal, sin ser periódica, constase de un número ilimitado de cifras, como, por ejemplo, si con la serie natural de los números enteros formábamos la fracción

$$0'1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11\,12\,13\,14\,15.....$$

que no podría expresarse exactamente por ninguna fracción ordinaria.

Si en este caso tomásemos por valores aproximados (14):

$$0'1=\frac{1}{10},\ 0'12=\frac{12}{100},\ 0'123=\frac{123}{1000},\ 0'1234=\frac{1234}{10000},\ \text{etc.},$$

como el de la decimal está comprendido entre 0'1 y 0'2, 0'12 y 0'13, 0'123 y 0'124, 0'1234 y 0'1235, etc , cada una de las ordinarias representaría el verdadero, con un error (164) más pequeño que 0'1, 0'01, 0'001, 0'0001, etc., y por lo tanto,

1.°—*Para dar forma ordinaria á una fracción decimal que, sin ser periódica, conste de un número ilimitado de cifras, con menos error que una unidad decimal de cualquier orden, se toman de la propuesta tantas cifras posteriores á la coma como indique dicho orden, y se halla la equivalente de la fracción exacta que resulte.*

Ejemplo.—Representar en forma ordinaria, con menos error que una millonésima, el valor de la decimal 3'14159265358979...

$$3'141592=3\,\frac{141592}{1000000}=3\,\frac{35398}{250000}=3\,\frac{17699}{125000}.$$

Por último, puede convenirnos expresar el valor de una fracción ordinaria, por medio de otra cuyo denominador sea conocido sin ser la unidad seguida de ceros.

Supongamos, por ejemplo, que la fracción $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ quisiéramos expresarla en *octavas* ó *séptimas* partes de la unidad.

Entonces tendríamos, multiplicándola y dividiéndola por 8 y 7 (65, 1.°)

$$\frac{15}{20} = \frac{3}{4} = \frac{\frac{3}{4} . 8}{8} = \frac{\frac{3.8}{4}}{8} = \frac{\frac{24}{4}}{8} = \frac{6}{8} \text{ exactamente,}$$

$$\frac{15}{20} = \frac{3}{4} = \frac{\frac{3}{4} . 7}{7} = \frac{\frac{3.7}{4}}{7} = \frac{\frac{21}{4}}{7} = \frac{5}{7} \text{ aproximadamente.}$$

En el último caso, el cociente $\frac{21}{4}$ estará comprendido entre 5 y 6 y el valor de la fracción propuesta entre $\frac{5}{7}$ y $\frac{6}{7}$, pero más cerca del primero que del segundo (207); luego recordando las condiciones necesarias y suficientes para que un entero divida á otro (214, 1.°), podemos deducir que:

2.°—*Para convertir una fracción en otra de denominador dado, se multiplica por éste el numerador y se divide el producto por el denominador de la fracción, poniendo al cociente entero el que se pide:*

3.°—*Para que la conversión pueda efectuarse con exactitud, es necesario y suficiente que el nuevo denominador contenga todos los factores primos del de la fracción,* si ésta se ha reducido previamente á su expresión más sencilla, como siempre debe hacerse.

4.°—*Si la reducción sólo es aproximada, el error cometido por defecto ó por exceso, será siempre menor que la unidad dividida por el nuevo denominador.*

Corolario.—*Para encontrar el cociente de dos enteros en menos de una parte cualquiera de la unidad, se multiplica el dividendo por el denominador que indica dicha parte, se divide el producto por el divisor y se pone al cociente entero el denominador referido.*

Ejemplo.—Hallar en menos de $\frac{1}{5}$ el cociente de dividir 26 por 3;
como $26=\frac{26}{1}$ (216, 6.ª), no tendremos más que aplicar así la regla demostrada:

$$\begin{array}{lr|l} & 26.5=130 & 3 \\ \text{Cociente....} & 43 & 1 \text{ Resto.} \end{array} \qquad 26:3=\frac{43}{5} \text{ en menos de } \frac{1}{5}$$

II —Adición y Sustracción.

223. Nada hemos de decir, ni diremos en adelante sobre las combinaciones fundamentales de los números con sus límites, cualquiera que sea la forma en que se presenten, de las alteraciones de los resultados por la variación de los datos, ni de cuantas consecuencias se hayan deducido para los enteros, de la definición de las operaciones, porque definiendo éstas de un modo general que abrace todos los casos y formas de los números, claro es que á todos serán aplicables dichas consecuencias y las reglas que hayan originado, á excepción de aquellas para cuya demostración haya sido indispensable suponer enteros los datos, únicas que investigaremos si son aplicables á los fraccionarios, ó las que sea imposible practicar con números de otra forma, únicas que modificaremos, limitándonos en lo restante, y principalmente, á exponer los métodos, procedimientos y disposiciones más convenientes en la práctica.

Tampoco hemos de ocuparnos de los fraccionarios decimales, cuyo Cálculo se refiere siempre al de los enteros (76 á 82), ni de sus combinaciones con los de forma ordinaria, que evidentemente se realizarán *cambiando antes la de los unos ó la de los otros*.

Conocidas son las reglas para la Adición y Sustracción de los últimos (62 y 64), transformando en fracciones los mixtos (62, 3.°) que en ellas deban intervenir, pero que en la práctica conviene considerar *son* realmente *sumas indicadas*, así como también *extraer ante todo los enteros que una fracción pueda contener* (71), con objeto de *adicionar ó sustraer separadamente las fracciones y los enteros*, empezando por aquéllas para poder agregar á éstos en el primer caso las unidades que resulten, ó convertir en el segundo algunas en fracción (216, 7.ª), si la del minuendo fuera menor que la del sustraendo.

De este modo están efectuados los ejemplos siguientes:

$$7\frac{3}{4}+5=12\frac{3}{4};\ 7\frac{3}{4}-5=2\frac{3}{4};\ 7\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=8\frac{5}{12};\ 7\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=7\frac{9}{12};$$

$$8+3\frac{5}{6}=11\frac{5}{6};\ 8-3\frac{5}{6}=4\frac{1}{6};\ \frac{44}{3}+2\frac{1}{4}=14\frac{2}{3}+2\frac{1}{4}=16\frac{11}{12};$$

$$\frac{44}{3}-2\frac{1}{4}=14\frac{2}{3}-2\frac{1}{4}=12\frac{5}{12};\ 6\frac{3}{7}+2\frac{4}{5}=9\frac{8}{35};$$

$$6\frac{3}{7}-2\frac{4}{5}=3\frac{22}{35},$$

en los cuales, por su sencillez, hemos efectuado de memoria las operaciones

$$\frac{3}{4}\pm\frac{2}{3}=\frac{3.3\pm2.4}{3.4}=\frac{9\pm8}{12};\quad 1-\frac{5}{6}=\frac{6}{6}-\frac{5}{6}=\frac{1}{6};$$

$$\frac{2}{3}\pm\frac{1}{4}=\frac{2.4\pm1.3}{3.4}=\frac{8\pm3}{12};\ \text{y}\ \frac{3}{7}\pm\frac{4}{5}=\frac{3.5\pm4.7}{7.5}=\frac{15\pm28}{35}$$

extrayendo la unidad entera que contienen $\frac{9+8}{12}=\frac{17}{12}=1\frac{5}{12}$ y $\frac{15+28}{35}=\frac{43}{35}=1\frac{8}{35}$ y agregando á 15 los 35 *treinta y cinco avos* que contiene la unidad, para del resultado 50 poder restar 28.

Para seguir este procedimiento abreviando cuanto sea posible, *se disponen en columna los sumandos, ó minuendo y sustraendo*, cualquiera que sea la combinación, lo que facilita el reducir las fracciones á un denominador común (220) y permite casi siempre calcular de memoria los enteros que resulten de la suma de fracciones y el resto correspondiente, escribiendo el resultado debajo de los sumandos, como en la siguiente adición de los números 35, $24\frac{13}{16}$, $\frac{7}{12}$ y $\frac{89}{40}$, cuya suma está calculada por el procedimiento general de reducir los mixtos á fracciones y por el abreviado, para que puedan compararse.

35			$35.2^4.3.5$	8400
$24\,\frac{13}{16} = \frac{397}{16}$	2^4	$2^4.3.5$	$397.3.5$	5955
$\frac{7}{12}$	$2^2.3$	240	$7.2^2.5$	140
$\frac{89}{40}$	$2^3.5$		$89.2.3$	534
$62\,\frac{149}{240}$				$15029 \mid 240$
				$629 \quad 62$
				149

35				
$24\,\frac{13}{16}$	2^4	$2^4.35$	$13.3.5$	195
$\frac{7}{12}$	$2^2.3$	240	$7.2^2.5$	140
$\frac{89}{40} = 2\,\frac{9}{40}$	$2^3.5$		$9.2.3$	54
$62\,\frac{149}{240}$				389

La fracción $\frac{149}{240}$ se ha escrito en el segundo, diciendo: 389 dividido por 240, 1; 1 por 0, 0, á 9, 9; 1 por 4, 4, á 8, 4; 1 por 2, 2, á 3, 1; y el entero se ha sumado con 35, 24 y 2.

Hé aquí ahora tres ejemplos de Sustracción, en el primero de los cuales adoptamos la otra disposición práctica de la reducción á un común denominador (222), indicando el segundo y tercero las abreviaciones que aún pueden hacerse *no escribiendo los factores primos*, por ser fácil efectuar de memoria las multiplicaciones y divisiones necesarias.

	$2^3.3^2.5$	360
$\frac{27}{40}$	$2^3.5$	243
$\frac{21}{36}$	$2^2.3^2$	210
$\frac{33}{360} = \frac{11}{120}$		33

$77\,\frac{14}{36}$	165	70
$\frac{24}{55}$		72
$76\,\frac{163}{165}$		163

$$\begin{array}{r|c|r}
\frac{2473}{15} = 164\,\frac{13}{15} & & 52 \\
 & 60 & \\
65\,\frac{19}{20} & & 57 \\
\hline
98\,\frac{11}{12} & & 55
\end{array}$$

En el penúltimo ejemplo ha de añadirse á $\frac{70}{165}$ la unidad $\frac{165}{165}$, por resultar el numerador 72 del sustraendo mayor que el 70 del minuendo, lo que puede efectuarse (184) sumando 165 con 70, para restar 72 de la suma 235; restando 72 de 165, para añadir 70 á la diferencia 93; ó restando de 70 otra parte igual, ó sean otras 70 unidades de las que contiene el sustraendo, y de 165 las 2 que falta restar, que es lo más sencillo.

Por los mismos métodos puede hallarse la diferencia final en el tercero, sin que haya necesidad, como tampoco la hay en el anterior, de escribir los factores primos de los denominadores que se descubren á simple vista, lo mismo que los del *m.c.m.*, que es respectivamente 3.5.11=165 y 3.4.5=60, y se puede escribir desde luego hallándolo de memoria.

224. Entre los casos particulares existe uno en que la suma y diferencia pueden calcularse mentalmente: *aquel en que los denominadores de las fracciones son unos múltiplos de otros* (48), en el cual basta:

1.°—*Escribirlas en el orden conveniente para poder hacer de memoria la reducción de cada una al denominador de la que sigue y sumarlas sucesivamente*,

si de adicionarlas se trata, pues en el caso de la Sustracción ni escribirlas se necesita; siendo evidente que, estuvieran ó no acompañadas de enteros, la diferencia entre $\frac{17}{18}$ y $\frac{25}{54}$ se hallaría de memoria, diciendo:

$$\frac{17}{18} = \frac{51}{54} \text{ menos } \frac{25}{54},\ \frac{26}{54} = \frac{13}{27}.$$

Esto suele ocurrir con gran frecuencia al operar con números concretos (16), y aunque no todos los denominadores cumplan con la condición exigida, pocas veces si son numerosos, que es cuando la operación se hace más larga y pesada, dejará de ser posible:

2.° — Dividirlos en grupos de fracciones cuyos denominadores vayan siendo múltiplos unos de otros, efectuar mentalmente la Adición de cada grupo y sumar luego los resultados parciales.

Supongamos que los sumandos sean

$$\frac{2}{3},\ 4\frac{5}{6},\ 7\frac{1}{2},\ 36,\ \frac{11}{48},\ \frac{3}{8},\ 15,\ \frac{9}{32}\ \text{y}\ \frac{7}{12},$$

en los cuales puede observarse que por una parte van siendo múltiplos 3, 6=3.2, 12=6.2 y 48=12.4, y por otra 2, 8=2.4 y 32=8.4, pudiéndose en consecuencia descomponer la operación en dos sumas parciales, que podrán obtenerse mentalmente, y la adición de ambos resultados á los enteros 36 y 15, disponiéndola por ser más cómodo y para mayor claridad de la manera que sigue:

$\frac{2}{3}$			$2^5.3$	96
$4\frac{5}{6}$	1	$\frac{15}{48}$	$2^4.3$	30
$\frac{7}{12}$	1			
$\frac{11}{48}$				
$7\frac{1}{2}$				
$\frac{3}{8}$		$\frac{5}{32}$	2^5	15
				45
$\frac{9}{32}$	1			
15				
36				

$$65\ \frac{45}{96} = 65\frac{15}{32}$$

Las cifras 1, colocadas á la derecha de las fracciones

$$\frac{5}{6}, \frac{7}{12} \text{ y } \frac{9}{32},$$

son las unidades enteras que van resultando y se escriben á medida que se obtienen.

Los productos de los numeradores por los factores primos correspondientes no están indicados, por ser fácil obtener igualmente de memoria $15.2=30$ y $5.3=15$.

También hemos simplificado, como siempre debe hacerse, la fracción resultante $\frac{45}{96}$, después de escribirla en el lugar de la suma.

Escolio.—Para el más rápido cálculo de las combinaciones en que hay que efectuar alguna sustracción, suele ocurrir á veces que antes de escoger un procedimiento convenga saber si una fracción numérica es mayor ó menor que otra, lo que es evidente se conseguirá

3.°—*Reduciéndolas á un común denominador para ver cuál resulta con mayor numerador* (216, 3.°).

III.—Multiplicación y División.

225. Las siguientes consecuencias que se deducen de las definiciones generales (188 y 51), completan las referentes á los números enteros:

1.ª—*El producto de cualquier número por otro menor que* 1, *será menor que dicho número,*
puesto que deberá estar formado con respecto á éste del mismo modo que lo está el otro con respecto á 1.

$$a. \frac{3}{4} < a,$$

siendo a un número cualquiera.

2.ª—*El cociente será mayor que el dividendo, si el divisor es menor que* 1,
en razón á que el dividendo ha de estar formado con respecto al cociente, del mismo modo que lo esté el divisor con respec-

to á 1:

$$a : \frac{3}{4} > a.$$

3.ª—*El cociente será menor que 1, si el dividendo es menor que el divisor,*
ya que aquél ha de estar formado con respecto á 1, del mismo modo que el dividendo lo esté con respecto al divisor.

$$3:4<1.$$

Las demás proposiciones relativas á la combinación de un número con sus límites, variaciones del resultado, signo del producto y operaciones con las igualdades y desigualdades, serán como hemos dicho (223), igualmente ciertas para los números fraccionarios, así como las referentes á las operaciones derivadas cuyas demostraciones no hayan exigido la forma entera.

Entre estas últimas se encuentra la regla para multiplicar una combinación de números aditivos y sustractivos, que hemos de ver si es aplicable ó no á los fraccionarios.

Para ello supongamos que un número ó expresión cualquiera N, ha de multiplicarse por una fracción $\frac{3}{4}$.

Componiéndose $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, el producto deberá ser:

$$\frac{N}{4}+\frac{N}{4}+\frac{N}{4}=\frac{N+N+N}{4}=\frac{N.3}{4},$$

de donde puede deducirse la siguiente regla general, que abraza todas las referentes á cuantos particulares sea posible considerar (65):

4.ª—*Para multiplicar una expresión ó número cualquiera por una fracción, se multiplica por el numerador y se divide el producto por el denominador.*

Aplicándola ahora á una combinación cualquiera, $a-b+c$, tendríamos, por consiguiente (190 y 201, 1.º),

$$(a-b+c):\frac{3}{4}=\frac{(a-b+c)3}{4}=\frac{a.3-b.3+c.3}{4}$$
$$=\frac{a.3}{4}-\frac{b.3}{4}+\frac{c.3}{4}=a.\frac{3}{4}-b.\frac{3}{4}+c.\frac{3}{4}$$

resultado conforme con la regla dada para los enteros (190).

Ahora bien; las demostradas para multiplicar una combinación por otra (191, 1.°) y dividirlas por un número (201, 1.°) son consecuencias de la anterior y todas las restantes que hemos dado, ó se fundan en que el orden de los factores no altera el valor del producto, lo que también es cierto para los números fraccionarios (66 y 67), ó se han demostrado en general; luego

COROLARIO.—*Todas las combinaciones por multiplicación y división, se calcularán por las reglas aplicables á los enteros, aun cuando en ellas entren números fraccionarios.*

226. Podemos, por consiguiente, ocuparnos ya de los detalles prácticos, para lo cual estudiaremos separadamente ambas operaciones.

Empezando por el más sencillo de los casos particulares en que uno de los factores sea entero y el otro una fracción (65, 1.°), observaremos que:

1.°—*Si el entero y el denominador de la fracción tienen algún factor común, puede suprimirse antes de multiplicar por el numerador,* abreviando la regla general,

puesto que si se trata, por ejemplo, de $28.\frac{5}{12}$, tendremos:

$$28.\frac{5}{12}=4.7.\frac{5}{3.4}=\frac{4.7.5}{3.4}=\frac{7.5}{3}=\frac{35}{3}=11\frac{2}{3}$$

y podremos efectuar la segunda, en lugar de la primera de estas multiplicaciones:

$$28.\frac{5}{12}=\frac{140}{12}=\frac{70}{6}=\frac{35}{3}=11\frac{2}{3} \qquad 28.\frac{5}{12}=\frac{35}{3}=11\frac{2}{3}$$

suprimiendo mentalmente el factor común 4 de 28 y 12, con lo que estos números quedan reducidos á 7 y 3, y diciendo: 7 por 5, 35 *tercios*.

De esta regla se deduce que si el factor común es el propio entero, ó el denominador, se podrá prescindir de ellos, y por lo tanto que además de la abreviación que da el segundo medio indicado en el párrafo 157, 1.°

2.°—*Para multiplicar un entero por una fracción cuyo denominador es divisor de aquél, se efectúa la división y el cociente se multiplica por el numerador.*

Así, en lugar de escribir

$$324.\frac{59}{108}=\frac{19116}{108}=177,$$

que exige por lo menos hacer aparte una multiplicación y una división, cuando no varias simplificaciones, escribiríamos tan solo,

$$324.\frac{59}{108}=3.59=177$$

diciendo sencillamente: 324 dividido por 108, 3, multiplicado por 59, 177.

COROLARIO.—*Toda fracción multiplicada por su denominador, dará de producto su numerador,*
como debe suceder siendo la fracción equivalente á un cociente indicado.

Estas abreviaciones son extensivas al caso en que se trate de dos fracciones, cuyos términos opuestos tengan factores comunes, porque si son, por ejemplo, $\frac{77}{90}$ y $\frac{65}{84}$ tendremos (65, 2.º):

$$\frac{77}{90}\cdot\frac{65}{84}=\frac{77.65}{90.84}=\frac{7.11.5.13}{5.18.7.12}=\frac{11.13}{18.12}=\frac{143}{216}$$

y podría también efectuarse desde luego el último producto en lugar del primero, que haría precisas aparte dos multiplicaciones y una simplificación; por consiguiente,

3.º—*Para multiplicar fracciones cuando los términos de distinto nombre tienen factores comunes, puede prescindirse de ellos.*

Si entre los factores comunes se hallase alguno de los términos, la abreviación sería aún mayor, como puede verse en los siguientes ejemplos:

$$\frac{7}{90}\cdot\frac{65}{84}=\frac{13}{216};\quad\frac{11}{13}\cdot\frac{65}{84}=\frac{55}{84};$$
$$\frac{77}{90}\cdot\frac{4}{11}=\frac{14}{45};\quad\frac{77}{90}\cdot\frac{9}{32}=\frac{77}{320};$$

todos los cuales pueden efectuarse de memoria, teniendo presente la regla anterior, y en el caso particular en que los términos opuestos fuesen exactamente divisibles uno por otro,

4.º—*Para multiplicar dos fracciones cuando dos términos de distinto nombre sean múltiplos de los que se hallan en igual caso, basta efectuar las dos divisiones, escribiendo los cocientes en el término que corresponda á los dividendos.*

$$\frac{7}{11}\cdot\frac{55}{63}=\frac{5}{9};\ \frac{7}{55}\cdot\frac{11}{63}=\frac{1}{45};\ \frac{55}{7}\cdot\frac{63}{11}=45;\ \frac{63}{55}\cdot\frac{11}{7}=\frac{9}{5}=1\frac{4}{5}.$$

5.º — Estas abreviaciones son evidentemente aplicables al caso en que los factores sean más de dos; pero las que interesa conocer sobre todo son las que se refieren á la multiplicación de enteros seguidos de fracciones, aun cuando se opere con ellos *como sumas indicadas,* pues la *aplicación de los métodos más generalizados* (65, 3.º) suele casi siempre dar lugar á operaciones largas y penosas.

Así, las multiplicaciones de los números 324, $\frac{35}{48}$ y 324 $\frac{35}{48}$, por 567 $\frac{29}{36}$, realizadas por el procedimiento más común de reducir los mixtos á fracciones, y aun valiéndose para las operaciones auxiliares de los métodos más rápidos expuestos en los enteros, exigirían las siguientes:

$$\begin{array}{r} 567 \\ 36 \\ \hline 20412 \\ 29 \\ \hline 20441 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 20441 \\ 324 \\ \hline 81764 \\ 654112 \\ \hline 6622884 \\ 302 \\ 142 \\ 348 \\ 248 \\ 324 \\ 0 \end{array}
\begin{array}{|l} 36 \\ \hline 183969 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 20441 \\ 35 \\ \hline 715435 \\ 2423 \\ 6955 \\ 43 \end{array}
\begin{array}{|l} 1728 \\ \hline 414 \end{array}$$

$$324 . 567\frac{29}{36}=183969 \qquad \frac{35}{48} . 567\frac{29}{36}=414\frac{43}{1728}$$

```
        324
         48
      -----
      15552
         35
      -----
      15587.20441
     62348
    62348
   31174
  ----------------
   318613867 | 1728
             |--------
   14581     | 184383
     7573
      6618
      14346
        5227
          43
```

$$324 \frac{35}{48} \cdot 567 \frac{29}{36} = 184383 \frac{43}{1728}$$

En la primera hemos dado á $567 \frac{29}{36}$ la forma de fracción (62, 3.º) multiplicando mentalmente (197) 567 por 36 y agregando al producto 29; después hemos hallado el producto del numerador por 324, multiplicándole por 4 y el producto resultante por 8 (198), efectuando, por último, la división por el deminador 36.

En el segundo hemos utilizado la primer transformación, multiplicando desde luego mentalmente 20441 y 35, así como los denominadores 36 y 48, para extraer los enteros dividiendo uno por otro.

En el tercero hemos dado igualmente la forma de fracción á $324 \frac{35}{48}$, multiplicando mentalmente 324 por 48, y añadiendo al producto 35, cuya suma 15587, multiplicada por el otro numerador 20441 calculado ya antes, utilizando aquél como primer producto parcial (196), nos ha dado el numerador del total, que hemos dividido por el de los denominadores, encontrado también antes, para extraer los enteros.

Si ahora consideramos los mixtos como sumas indicadas, tendremos para esos ejemplos:

$$
\begin{array}{r}
567\,\frac{29}{36} \\
324 \\
\hline
261 \\
183708 \\
\hline
183969
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{c}{567\,\frac{29}{36}} \\
\multicolumn{2}{c}{\frac{35}{48}} \\
\hline
19845 & 48 \\
\cline{2-2}
64 & 413\,\frac{21}{48} \\
165 & \\
21 & \frac{1015}{1728} \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{414\,\frac{43}{1728}}
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|r}
1728 & 756 \\
 & 1015 \\
\hline
 & 1771
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
324\,\frac{35}{48} \\
567\,\frac{29}{36} \\
\hline
413\,\frac{21}{48} \\
261 \\
183708 \\
\frac{1015}{1728} \\
\hline
184383\,\frac{43}{1728}
\end{array}
$$

En el primero hemos multiplicado 324 por $\frac{29}{36}$, cuyo denominador le divide exactamente, y el producto 261, lo hemos sumado con el de 567 por 324, hallado mentalmente.

En el segundo hemos multiplicado, también mentalmente, 567 por 35, dividiendo el producto por 48 y escribiendo el cociente exacto (150) para sumarlo (190 y 225, cor.) con el producto de las fracciones $\frac{1015}{1728}$, cuyo numerador y denominador se han determinado igualmente por multiplicación mental.

En el tercero hemos aprovechado las operaciones ya efectuadas para escribir los productos de 567 por $\frac{35}{48}$, 324 por $\frac{29}{36}$, $\frac{35}{48}$ por $\frac{29}{36}$; aplicar sólo la multiplicación mental á 324 por 567, y omitir la indicación de la suma anterior.

Si no hubiéramos, pues, acudido á los más rápidos medios de abreviación, y los ejemplos hubieran sido perfectamente distintos, los cálculos hubiesen resultado mucho más largos á pesar de no tener más que dos cifras los términos de las fracciones.

227. Cualquiera que sea el caso que se presente en la multiplicación de números fraccionarios, puede, sin embargo, resolverse de un modo claro, fácil y breve, por el *método* llamado *de las partes alícuotas* (208).

Antes de exponerlo, observemos que si una fracción $\frac{a}{b}$ ha de dividir exactamente á la unidad, como $1 : \frac{a}{b} = \frac{b}{a}$ (70, 3.º), ha de ser $b = \dot{a}$, por ejemplo, $b = am$, en cuyo caso $\frac{a}{b} = \frac{a}{am} = \frac{1}{m}$, es decir, que:

Toda parte alícuota de la unidad ha de tener 1 por numerador y un número entero por denominador, después de reducida á su más simple expresión,
y claro está que también,

Toda fracción cuyo numerador sea 1 y tenga por denominador un número entero, después de reducida á su más simple expresión, será parte alícuota de la unidad,
pues cualquiera que sea el número entero n, siempre $1 : \frac{1}{n} = n$.

El referido método consiste en

Descomponer por adición las fracciones que han de multiplicarse en otras que sean partes alícuotas de la unidad, multiplicar por cada una de estas partes y sumar los productos parciales.

Así, por ejemplo, si un número cualquiera se ha de multiplicar por $\frac{5}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, claro está que para hallar el producto bastaría sumar su *mitad* con su *tercera* parte.

Para que esta descomposición sea siempre posible y fácil, y cada cociente parcial pueda utilizarse para el cálculo de alguno de los siguientes, es conveniente en la práctica:

1.º—*Procurar que las partes alícuotas, sean unas múltiplas de otras,*
como sucedería descomponiendo

$$\frac{5}{6} \text{ en } \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6},$$

y aun si los submúltiplos (208) no permiten operar con facilidad,

2.º—*Valerse de alguna parte alícuota auxiliar,*
de cuyo producto se prescinde al hacer la adición.

Si la fracción fuera, por ejemplo,

$$\frac{38}{105} = \frac{35}{105} + \frac{3}{35} = \frac{1}{3} + \frac{1}{35} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7},$$

nos valdríamos de la parte alícuota $\frac{1}{5}$ para encontrar luego su *séptima* parte, evitando la división directa por 35, que probablemente no podría realizarse de memoria.

Aun cuando pueden formarse y existen tablas en que se halla la descomposición en partes alícuotas de los números fraccionarios más usuales, nosotros prescindiremos de ellas por completo; porque estas descomposiciones pueden ser evidentemente muy distintas en la mayoría de los casos, y sólo la mucha práctica puede hacer ver á primera vista cuál será la más conveniente en cada uno de los particulares, según el valor y divisores del otro factor.

Aplicando este método á las anteriores multiplicaciones para que puedan apreciarse bien sus ventajas, descompondremos

$$\frac{29}{36} \text{ en } \frac{18}{36}+\frac{9}{36}+\frac{2}{36}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{18}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2} \text{ y } \frac{35}{48} \text{ en } \frac{24}{48}+\frac{8}{48}+\frac{3}{48}+\frac{1}{48}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{24},$$

en cuyas últimas expresiones están ya detalladas las operaciones que han de hacerse y que dispondríamos del siguiente modo (152):

			$567\ \frac{29}{36}$
			324
			183708
18	36	$\frac{1}{2}$	. . . 162
9		$\frac{1}{4}$	 81
2		$\frac{1}{18}$	 18
			183969

			$567\ \frac{29}{36}$	
			$\frac{35}{48}$	1728
24	48	$\frac{1}{2}$	$283\ \frac{1}{2}$	864
8		$\frac{1}{6}$	$94\ \frac{1}{2}$	864
2		$\frac{1}{24}$	$23\ \frac{5}{8}$	1080
1		$\frac{1}{48}$	$11\ \frac{13}{16}$	1404
			$\frac{1015}{1728}$	1015
			$414\ \frac{43}{1728}$	5227

$$
\begin{array}{r|r|lr|r}
 & & & 567\ \frac{29}{36} & \\
 & & & 324\ \frac{35}{48} & \\
\hline
 & & & 183708 & \\
18 & & \frac{1}{2} \ldots\ldots\ldots & 162 & \\
9 & 29 & \frac{1}{4} \ldots\ldots\ldots & 81 & \\
2 & & \frac{1}{18} \ldots\ldots\ldots & 18 & 1728 \\
\hline
24 & & \frac{1}{2} \ldots\ldots\ldots & 283\ \frac{1}{2} & 864 \\
 & & \frac{1}{6} \ldots\ldots\ldots & 94\ \frac{1}{2} & 864 \\
8 & 35 & \frac{1}{24} \ldots\ldots\ldots & 23\ \frac{5}{8} & 1080 \\
2 & & \frac{1}{18} \ldots\ldots\ldots & 11\ \frac{13}{16} & 1404 \\
 & & & \frac{1015}{1728} & 1015 \\
\hline
 & & & 184383\ \frac{43}{1728} & 5227
\end{array}
$$

En el primer ejemplo, hemos empezado por multiplicar mentalmente 567 por 324, y después hemos tomado $\frac{1}{2}$ de 324, $\frac{1}{2}$ de 162 y $\frac{1}{9}$ del mismo 162, estando incluído en él la multiplicación de un entero por un quebrado, sin más que suprimir el primer producto parcial.

En el segundo se ha calculado sucesivamente $\frac{1}{2}$ de $567\ \frac{29}{36}$ considerando éste como una suma indicada $\frac{1}{3}$ de $283\ \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ de $94\ \frac{1}{2}$, y $\frac{1}{2}$ de $23\ \frac{5}{8}$, no siendo el tercero más que una reunión de ambos, en el cual, como en el anterior, se han multiplicado las dos fracciones $\frac{29}{36}$ y $\frac{35}{48}$ directamente (65, 2.º), para mayor sencillez, ya que la aplicación á este caso del método de las partes alicuotas, exigiría una de estas dos series de operaciones:

$$
\begin{array}{r|r|lr|r}
 & & & \frac{29}{36} & \\
 & & & \frac{35}{48} & 1728 \\
\hline
24 & & \frac{1}{2}\ldots & \frac{29}{72} & 696 \\
8 & & \frac{1}{6}\ldots & \frac{29}{216} & 232 \\
 & 48 & & & \\
2 & & \frac{1}{24}\ldots & \frac{29}{864} & 58 \\
1 & & \frac{1}{48}\ldots & \frac{29}{1728} & 29 \\
\hline
 & & & \frac{1015}{1728} & 1015
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|r|lr|r|r}
 & & & \frac{35}{48} & & \\
 & & & \frac{29}{36} & 2^6.3^3. & 1728 \\
\hline
18 & & \frac{1}{2}\ldots & \frac{35}{96} & 2^5.3 & 630 \\
9 & 36 & \frac{1}{4}\ldots & \frac{35}{192} & 2^6.3 & 315 \\
2 & & \frac{1}{18}\ldots & \frac{35}{864} & 2^5.3^3 & 70 \\
\hline
 & & & \frac{1015}{1728} & & 1015
\end{array}
$$

Como en la primer multiplicación cada parte alícuota es múltipla de la siguiente, los numeradores finales han podido escribirse de memoria, empezando por el último.

Escolio.—Siempre que los números mixtos se consideren como sumas indicadas para multiplicar separadamente la parte entera y la fraccionaria, *debe empezarse por ésta*, como hemos hecho en todos los ejemplos, *para facilitar la agregación al producto del entero, de las unidades que puedan resultar del primero.*

228. Pasando á considerar los procedimientos abreviados que pueden practicarse en la división de los números fraccionarios, empezaremos por observar que siendo una fracción un cociente indicado y quedando dividido el cociente, si el dividendo se divide por cualquier número (201, Cor. 1.º):

1.º—*Para dividir una fracción por un entero, se podrá dividir su numerador*, si es posible, *conservando el mismo denominador*,

lo cual dará un resultado más sencillo que el de la regla general (70, 1.º).

$\frac{24}{35}:6=\frac{24:6}{35}=\frac{4}{35}$, mejor que $\frac{24}{35}:6=\frac{24}{35.6}=\frac{24}{210}=\frac{12}{105}=\frac{4}{35}$

2.°—*Para dividir un mixto por un entero puede dividirse la parte entera y la fraccionaria*, considerando al dividendo como una suma indicada, lo cual en algunos casos, como los siguientes, podrá facilitar la operación:

$$12\frac{8}{9}:4=3\frac{2}{9} \text{ mejor que } 12\frac{8}{9}:4=\frac{116}{9}:4=\frac{29}{9}=3\frac{2}{9};$$

$$12\frac{7}{9}:4=3\frac{7}{36} \text{ mejor que } 12\frac{7}{9}:4=\frac{115}{9}:4=\frac{115}{36}=3\frac{7}{36}$$

Escolio.—Cuando el entero del dividendo no es divisible por el divisor, no suele presentar este método gran ventaja, por tener que efectuar la suma de dos fracciones y la consiguiente reducción á un denominador común, como en

$$10\frac{8}{9}:4=2\frac{2}{4}+\frac{2}{9}=2\frac{26}{36}=2\frac{13}{18}$$

$$\text{en vez de } 10\frac{8}{9}:4=\frac{98}{9}:4=\frac{98}{36}=2\frac{26}{36}=2\frac{13}{18};$$

$$10\frac{7}{9}:4=2\frac{2}{4}+\frac{7}{36}=2\frac{18}{36}+\frac{7}{36}=2\frac{25}{36}$$

$$\text{en vez de } 10\frac{8}{9}:4=\frac{97}{9}:4=\frac{97}{36}=2\frac{25}{36}$$

Respecto á los casos en que el divisor sea una fracción, tendremos en general representando por N una expresión ó número cualquiera y por c el cociente; si el divisor es $\frac{3}{4}$

$$c.\frac{3}{4}=N,$$

de donde multiplicando ambos miembros por $\frac{4}{3}$ y simplificando

$$c.\frac{3}{4}.\frac{4}{3}=c.\frac{3.4}{4.3}=c=N.\frac{4}{3}=\frac{N.4}{3}$$

lo cual nos enseña que:

3.°—*Para dividir un número ó expresión cualquiera por una fracción, basta multiplicarle por el denominador y dividir el producto por el numerador, ó multiplicar el dividendo por la fracción divisor invertida*,

lo cual permite referir todos los casos de la división por fracciones á los de la multiplicación y poder abreviar la operación en muchos particulares.

229. Empezando por el más sencillo, es fácil comprender que al dividir un entero por una fracción,

1.º—*Si el entero y el numerador de la fracción tienen algún factor común, puede suprimirse desde luego, multiplicando los que queden en el entero por el denominador y dividiendo por los del numerador,*

puesto que si se trata, por ejemplo, de $28 : \frac{12}{25}$ tendremos:

$$28 : \frac{12}{25} = 28 . \frac{25}{12} = \frac{4.7.25}{3.4} = \frac{7.25}{3} = \frac{175}{3} = 58\frac{1}{3}$$

y podremos efectuar la segunda, en lugar de la primera de estas divisiones:

$$28 : \frac{12}{25} = \frac{28.25}{12} = \frac{700}{12} = \frac{175}{3} = 58\frac{1}{3}; \; 28 : \frac{12}{25} = \frac{7.25}{3} = \frac{175}{12} = 58\frac{1}{3}$$

suprimiendo mentalmente el factor común 4, de 28 y 12, con lo que estos números quedan reducidos á 7 y 3, y diciendo 7.25, 175 *tercios*, ó $58\frac{1}{3}$.

De esta regla se deduce que si el factor común es el propio entero ó el numerador, se podrá prescindir de ellos, y por consiguiente, que:

2.º—*Para dividir un entero por una fracción cuyo numerador es múltiplo de aquél, se divide éste por el entero, poniendo el cociente por denominador del que tuviera la fracción.*

3.º—*Para dividir un entero por una fracción cuyo numerador es divisor de aquél, se efectúa la división, y el cociente se multiplica por el denominador del divisor.*

Así, en lugar de escribir

$$108 : \frac{324}{659} = \frac{71172}{324} = \frac{17793}{81} = \frac{1977}{9} = 219\frac{2}{3}, \text{ ó } 324 : \frac{108}{659} = 3.659 = 1977,$$

que exige hacer aparte, por lo menos, una multiplicación y una división, cuando no varias simplificaciones, escribiríamos tan sólo

$$108 : \frac{324}{659} = \frac{659}{3} = 219\frac{2}{3} \quad \text{ó} \quad 324 : \frac{108}{659} = 3.659 = 1977.$$

diciendo sencillamente: 324, dividido por 108, 3; y *tercio* de 659, $219\frac{2}{3}$ en el primer ejemplo; y 324, dividido por 108, 3, multiplicado 659, 1977, en el segundo.

Estas abreviaciones son extensivas al caso en que se trate de dos fracciones cuyos términos análogos tengan factores comunes, porque si son, por ejemplo, $\frac{77}{90}$ el dividendo y $\frac{84}{85}$ el divisor, tendremos:

$$\frac{77}{90} : \frac{84}{85} = \frac{77.85}{90.84} = \frac{7.11.17.5}{5.18.7.12} = \frac{11.17}{18.12} = \frac{187}{216}$$

y podría también efectuarse el último producto desde luego, en lugar del primero, que haría precisas aparte dos multiplicaciones y una simplificación, por lo que:

4.°—*Para dividir dos fracciones cuando los términos del mismo nombre tienen factores comunes, puede prescindirse de ellos, multiplicando la fracción que resulte en el dividendo por la que quede en el divisor invertida.*

Si entre los factores comunes se hallase alguno de los términos, la abreviación sería aún mayor, como puede verse en los siguientes ejemplos:

$$\frac{7}{90} : \frac{84}{91} = \frac{91}{90.12} = \frac{91}{1080}; \quad \frac{11}{13} : \frac{15}{26} = \frac{22}{15} = 1\,\frac{7}{15};$$

$$\frac{84}{91} : \frac{7}{90} = \frac{12.90}{91} = \frac{1080}{91} = 11\,\frac{79}{91}; \quad \frac{15}{26} : \frac{11}{13} = \frac{15}{22}$$

y en el caso particular en que los términos de una fracción dividieran á los del mismo nombre de la otra, se tendría:

$$\frac{22}{39} : \frac{11}{13} = \frac{2}{3} \quad \text{ó bien,} \quad \frac{11}{13} : \frac{22}{39} = \frac{3}{2} = 1\,\frac{1}{2}$$

por consiguiente,

5.°—*Para dividir dos fracciones, cuando los términos del divisor dividen á los del mismo nombre del dividendo, pueden dividirse término á término.*

6.°—*Para dividir dos fracciones cuando los términos del dividendo dividen á los del mismo nombre del divisor, pueden dividirse término á término, invirtiendo los cocientes al escribir el resultado.*

En cuanto á los casos de mayor dificultad, que son aquellos en que el divisor es un número mixto, ó en que hay que dividir un número de esta clase por una fracción, pueden siempre referirse á la división de un entero, fracción ó mixto, por un divisor entero, recordando que el cociente no se altera aunque dividendo y divisor se multipliquen por un mismo número (201, 3.°), y que por lo tanto, si se multiplican por el denominador del divisor, éste resultará entero (226, 2.°. Cor.), luego:

7.°—*Para operar siempre con un divisor entero, en la división de números fraccionarios, basta multiplicar dividendo y divisor, por el denominador que tenga este último.*

Así $324:\frac{5}{7}=(324.7):5=2268:5;$

$324:8\frac{5}{7}=(324.7):\left(8\frac{5}{7}\right).7=2268:61;\ \frac{10}{11}:\frac{3}{7}=\left(\frac{10}{11}.7\right):3=\frac{70}{11}:3;$

$\frac{10}{11}:8\frac{3}{7}=\frac{70}{11}:59;\ 12\frac{10}{11}:\frac{6}{7}=\left(12\frac{10}{11}\right)7:6=90\frac{4}{11}:6;$

$12\frac{10}{11}:8\frac{3}{7}=90\frac{4}{11}:59.$

230. De las fracciones decimales no nos hemos ocupado, según dijimos (223), porque refiriéndose siempre su cálculo al de los números enteros, serán á ellas aplicables cuantas abreviaciones se dedujeron para éstos y se combinarán con las de forma ordinaria transformando unas en otras.

No obstante, antes de dar por terminado el estudio de las cuatro primeras operaciones fundamentales, hemos de hacer algunas observaciones de gran interés práctico.

1.ª—*Cuando al dividir fraccionarios decimales se corre la coma en el dividendo ó divisor, el resto deberá referirse siempre al último orden de unidades que éstos contuviesen* (201, 3.°).

El cociente de la división de 21=21'0 por 0'8, será, pues, 26, pero el resto no será 2, sino 0'2, y el de dividir 0'0089 por 0'09, sería 0'0008.

2.ª—*Operando con números conmensurables y estando combinados fraccionarios decimales y ordinarios, deben transformarse aquéllos en éstos, ó éstos en aquéllos, según se necesite el resultado exacto, ó sea suficiente obtenerlo aproximado;* en razón á que lo segundo, que es lo que se hace generalmente, conducirá á operaciones más breves y sencillas; pero como la transformación originará frecuentemente fracciones periódicas (221), de cuyo número ilimitado de cifras sólo podrán considerarse algunas, se ocasionarán errores de más ó menos importancia, que únicamente se evitarán dando forma ordinaria á los decimales, aun cuando las operaciones se compliquen.

A continuación presentamos un ejemplo que sirva de resumen á todo lo dicho, combinando por suma, resta, multiplicación y división un entero, fracción ordinaria, mixto, decimal exacta, periódica pura y periódica mixta, y aplicando al cálculo los procedimientos y disposiciones prácticas más convenientes y abreviadas.

Ejemplo.—Calcular con exactitud y por el método más sencillo, cuál sería el producto de multiplicar por $\frac{1}{13}$ el cociente de dividir la suma

$$5'(75)+3'2(18)+\frac{3}{20}+8\frac{7}{24}$$

por la diferencia 5—4'95.

La expresión aritmética del cálculo, sería:

$$\frac{1}{13}\cdot\frac{5'(75)+3'2(18)+\frac{3}{20}+8\frac{7}{24}}{5-4'95}.$$

1.º—Reduciendo las decimales á ordinarias.

		$2^3.3^2.5.11$	3960
$5\frac{75}{99}$	$3^2.11$	$75.2^3.5$	3000
$3\frac{216}{990}$	$2.3^2.5.11$	216.2^2	864
$\frac{3}{20}$	$2^2.5$	$3.2.3^2.11$	594
$8\frac{7}{24}$	$2^3.3$	$7.3.5.11$	1155
$17\frac{1653}{3960}=17\frac{551}{1320}$.			5613

$$5-4\frac{95}{100}=\frac{5}{100}$$

$$\begin{array}{l|l} 1700\ \frac{55100}{1320} & 5 \\ 340\ \ \frac{1102}{132} & =348\frac{46}{132} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 348\frac{46}{132} \\ \frac{1}{13} \\ \hline 26\frac{1366}{1716} \end{array} \text{ exacto.}$$

2.°—Reduciendo las ordinarias á decimales.

```
100   | 13
      |------------
 90   | 0'076923.....
120
  30        70   | 24
   40            |---------
    1       220  | 0'2916.....
             40
            160
             16

30  | 20
    |------
100 | 0'15
  0

      5'757575.....
      3'218181 ....
      0'15
      8'291666.....
   ------------------
     17'417422.....  | 0'05
                     |------
      348'3488.....  |
      0'076923.....  |
   ------------------
       80120224.....
    240360672.....
   24384416.....
  ------------------
  26'7960347424.....  aproximado.
```

Fácil es ver que sólo son exactas las siete primeras cifras, transformando en decimal la fracción $\frac{1366}{1716}$.

```
13660   | 1716
        |------------
 16480  | 0'796037...
  10360
    6400
    12520
      508
      ...
```

IV.—Exponentes negativos.

231. Sabemos ya que todas las reglas de los enteros aplicables á los fraccionarios, son ciertas para éstos (222 y 225), y por lo tanto, la deducida para dividir potencias de igual base (202); pero si aplicamos esta regla al caso en que el exponente del dividendo sea más pequeño que el del divisor, tendremos,

por ejemplo, representando por a la base:

$$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2} \text{ y como por otra parte } (192, 2.^\circ) \; \frac{a^3}{a^5} = \frac{a^3}{a^2.a^3} = \frac{1}{a^2}$$

y dos valores iguales á un tercero, deben ser iguales entre sí, resulta que:

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}, \text{ de donde, } a^2.a^{-2} = 1, \text{ y } a^2 = \frac{1}{a^{-2}}$$

luego:

1.º—*Toda potencia indicada de grado negativo es igual á una fracción cuyo numerador es la unidad y cuyo denominador es la misma potencia de grado positivo.*

2.º—*Toda potencia de grado positivo, puede transformarse en una fracción, poniendo por denominador de la unidad la misma potencia de grado negativo.*

Hé aquí la razón por la cual, al combinar potencias indicadas por multiplicación y división, hicimos la salvedad de que los exponentes fuesen positivos, al tratar de los números enteros, por ser en realidad las potencias de grado negativo números fraccionarios, y el por qué estamos ahora obligados á estudiar si esta clase de potencias indicadas se multiplicarán y dividirán por las mismas reglas que las de grado positivo (192, 2.º y 202), prescindiendo de las que se refieren á las demás combinaciones, que desde luego les podremos aplicar, por haberse deducido todas independientemente de la naturaleza que pudieran tener los exponentes de los números que en ellas intervengan.

Para convencerse de que las potencias indicadas se han de combinar por las mismas reglas, sean positivas ó negativas, basta recordarlas y pasar la vista por las igualdades siguientes:

$$a^{-2}.a^3.a^{-4} = \frac{1}{a^2}.a^3.\frac{1}{a^4} = \frac{a^3}{a^2.a^4} = \frac{a^3}{a^{2+4}} = a^{3-(2+4)}$$

$$= a^{3-2-4} = a^{-2+3+(-4)} \; (182, 1.^\circ \text{ y } 2.^\circ);$$

$$a^{-2}.b^{-2}.c^{-2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2.b^2.c^2} = \frac{1}{(abc)^2} = (abc)^{-2}$$

$$\frac{a^{-2}}{a^3} = a^{-2}.\frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^2.a^3} = \frac{1}{a^{2+3}}$$

$$= a^{-(2+3)} = a^{-2-3} \; (182, 3.^\circ)$$

$$\frac{a^2}{a^{-3}}=a^2.\frac{1}{a^{-3}}=a^2.a^3=a^{2+3}=a^{2-(-3)} \text{ (179, 3.°)}$$

$$\frac{a^{-2}}{a^{-3}}=a^{-2}.\frac{1}{a^{-3}}=a^{-2}.a^{-3}=a^{2+3}=a^{-2-(-3)}$$

Ejemplos:

$$7^6.7^{-3}.7^{-3}.7^4=7^{6-3-3+4}=7^2=49$$

$$\frac{7^{-6}}{7^{-4}}:7=7^{-6+4}:7=7^{-2}:7=7^{-3}=\frac{1}{7^3}=\frac{1}{343}$$

Corolario.—*Todo factor de uno de los términos de una fracción, puede pasarse al otro, cambiando el signo de su exponente,*
lo que permite escribir en forma entera cualquier expresión fraccionaria.

$$N+\frac{3a^2bm}{+5c^3n}=N+3.5^{-1}a^2bc^{-3}mn^{-1}$$

CAPÍTULO III

OPERACIONES APROXIMADAS

I.—Generalidades.

232. Aun prescindiendo de la conveniencia de operar á veces, como en el último ejemplo, con números aproximados al valor de otros, por defecto ó por exceso (164), para la mayor facilidad de los cálculos, hay una multitud de casos en que estas operaciones son absolutamente indispensables

Por no ser posible representar numéricamente ciertas magnitudes, sin cometer un error de más ó menos consideración, el cual puede referirse á la totalidad de la magnitud representada, ó á la unidad elegida para dicha representación.

Si á dos personas hemos de entregar, por ejemplo, 100 y 1000 pesetas respectivamente, y sólo damos 90 á la primera y 990 á la segunda, cometemos en ambos casos un error por defecto igual á 10 unidades, que es lo que dejan de recibir; pero como esto es lo mismo que entregar al primero en vez de cada peseta $0'90 = \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$ y al segundo $0'990 = \frac{990}{1000} = \frac{99}{100}$ (224, 1.ª), aquél dejará de percibir $\frac{1}{10} = 0'1$ y éste $\frac{1}{100} = 0'01$ de lo que les corresponde, por lo que el error será muy diferente considerado bajo este punto de vista.

Para distinguir ambos errores, se da el nombre de ABSOLUTO, á la *diferencia entre el valor exacto y el aproximado,* llamando RELATIVO, *al que se comete en cada unidad.*

Desde luego se comprende, por consiguiente, cuánto interesará saber la *influencia que estos errores ejercerán en los resultados finales*, y sobre todo *cuáles serán las reglas que podremos seguir, para reemplazar los números con los cuales no convenga ó no se pueda operar, por otros que reunan las necesarias condiciones, para que el cometido en totalidad, al terminar cualquier combinación de números, no sobrepuje á un límite fijado de antemano.*

Cuestión es esta de la mayor importancia para evitar funestos y grandes errores prácticos, aunque obligados á tratarla ligeramente, sólo procuraremos aprender á calcular los resultados con un error tan pequeño como se desee, por los medios más rápidos que puedan emplearse, usando siempre la palabra *error* en su sentido absoluto, ya que del relativo podemos prescindir, siendo además muy fácil determinarlo inmediatamente si conviniera, una vez conocido aquél, pues de su misma definición y del razonamiento hecho en el ejemplo que hemos citado para facilitar su comprensión, se desprende que:

El error relativo, será siempre igual al cociente de dividir el absoluto, por el valor exacto.

Claro es que si en 30 unidades se comete el error e, el cometido en cada una, será $\frac{e}{30}$.

233. Como preliminares en que habrá de fundarse nuestro estudio, fijaremos algunas reglas por cuyo medio se hace posible reemplazar unos números por otros, cometiendo un error muy pequeño, ó menor que un límite prefijado.

Propongámonos, por ejemplo, encontrar el valor del cociente de dividir 324 por 49, en menos de 0'001, lo cual equivaldrá á convertir en decimal la fracción $\frac{324}{49}$ (110) y tomar las cifras necesarias.

$$\begin{array}{r|l}
324 & 49 \\ \cline{2-2}
300 & 6‘61224489..... \\
60 & \\
110 & \\
120 & \\
220 & \\
240 & \\
440 & \\
480 & \\
39 & \\
... & \\
... &
\end{array}$$

Claro está que para conseguir lo propuesto, bastará escribir por cociente 6‘612, en razón á que valiendo cada cifra 10 unidades de orden inferior, jamás el error, ó sea la parte despreciada 0‘00024489..... llegará á valer 0‘001, aun cuando fuesen 9 todas esas cifras significativas, luego:

1.º—*Para encontrar el cociente inexacto de dos enteros, en menos de una unidad decimal de cualquier orden, bastará efectuar la división poniendo una coma después del cociente entero y continuarla por la regla general escribiendo un cero á la derecha de cada resto hasta tener tantas cifras después de la coma, como se necesiten para expresar dicha unidad.*

2.º—*Si en cualquier número decimal se desprecian las últimas cifras, el error cometido será menor que la unidad del orden indicado por la última cifra que se conserve.*

Pero el error de tomar por el valor verdadero 6‘612, no sólo es menor que 1 *milésima*, sino menor que *media*, porque $\frac{1}{2} \cdot 0‘001 = 0‘0005 > 0‘00024489$, mientras que si tomáramos 6‘612244, el error, ó parte despreciada, sería mayor que $\frac{1}{2}$ *millonésima*, en razón á que $\frac{1}{2} \cdot 0‘000001 = 0‘0000005 < 0‘00000089$, que es lo que se desprecia, si bien podríamos conseguir que también fuese menor que $\frac{1}{2} \cdot 0‘000001$ tomando sólo seis cifras decimales, expresando por exceso el valor aproximado, es decir, escribiendo 6'612245, ya que entonces

$$0'612245-0'61224489.....=0'00000011....$$

siempre sería menor que 0'0000005, por consiguiente,

3.º—*Para aproximar un número decimal cualquiera, en menos de media unidad de un orden, se desprecian todas las cifras de los inferiores, aumentando una unidad á la última conservada, siempre que la primera despreciada sea mayor que 4.*

Escolio.—Es de suma importancia fijarse bien en que estas reglas sólo pueden aplicarse á la aproximación de decimales cuyas cifras sean todas exactas, aunque consten de un número ilimitado de ellas, pero no como se hace generalmente á los resultados de operar con números que ya son aproximados solamente y que se desea expresar con las cifras precisas, porque entonces nos exponemos á cometer un error mayor.

Efectivamente; si la fracción 0'123456789..... proviene de cualquier cálculo y sabemos está aproximada en menos de 0'001, el error podrá ser, por ejemplo, de 0'0007, y como al escribir únicamente 0'123 cometemos otro nuevo por defecto de 0'00045678....., si el anterior tenía lugar en el mismo sentido, lo aumentamos en esta cantidad, por lo que el cometido en definitiva sería:

$$0'0007+0'00045678.....=0'00115678>0'001.$$

Esto no sucederá si el primer error es por exceso, porque dos errores contrarios se compensarían en parte, y siendo ambos menores que 0'001 no podrían dar como final resultado de su diferencia uno mayor que esa unidad decimal, ni por igual razón ocurrirá tampoco si siendo por defecto, como lo son casi siempre en la práctica, aumentamos una unidad á la última cifra conservada, escribiendo 0'124 aunque la siguiente no llegue á 5, por lo cual,

En todo resultado obtenido en menos de una unidad decimal de cualquier orden, con mayor número de cifras que las necesarias para expresarlo, pueden despreciarse todas las de orden inferior, probablemente erróneas, conservando las restantes si la aproximación es por exceso, y aumentando en 1 la última que se conserve, si fuese por defecto.

234. Si por cualquier circunstancia nos viésemos obligados á operar con fracciones ordinarias, aun cuando el resultado no se exigiera con exactitud y quisiéramos sustituir á las de términos de muchas cifras, otras aproximadas con las cuales fuese fácil operar, siempre las podríamos transformar en las que tuviesen por denominador el número que más nos conviniese (222, 2.°); pero es preferible para estos casos, generalmente, emplear otro medio muy rápido de efectuar esa sustitución, fundado en el que puede seguirse para construir de memoria la irreducible equivalente, después de haber hallado el *m.c.d.* de sus dos términos (218).

Si, por ejemplo, aplicamos dicha regla á la fracción $\frac{3948}{5712}$ que es la misma considerada allí, efectuando sólo las dos primeras divisiones, tendremos, á pesar de lo desfavorable de este ejemplo, en que los dos cocientes despreciados son mucho mayores que los conservados,

3	2 1	1 2
5712	3948	1764
1764	420	

1 por 2, 2; por 1, 2, más 1, 3, diferenciándose la fracción $\frac{2}{3}$ de la verdadera en

$$\frac{47}{68}-\frac{2}{3}=\frac{141}{204}-\frac{136}{204}=\frac{5}{204},$$

es decir, que el error cometido sería aún menor (216, 5.°) que $\frac{5}{200}=\frac{1}{40}$ de la unidad entera.

Escolio.—Dada la necesidad de sustituir fracciones de pequeños términos en lugar de las que tengan muchas cifras en numerador y denominador y no se puedan simplificar ó no convenga hacerlo por la pesadez de los cálculos requeridos, algunos operadores se contentan con *suprimir igual número de cifras de la derecha de ambos términos*, lo que equivale á dividirlos *inexactamente* por la unidad seguida de igual número de ceros, con lo cual la fracción varía y puede ser errónea en cantidades de bastante consideración.

Si en la $\frac{3948}{5712}$, que es una de las más favorables para prescindir de las tres cifras de la derecha, por ser mucho menor que la unidad y relativamente pequeña la diferencia entre 948 y 712, tomamos la $\frac{3}{5}$ como aproximada, cometeremos un error de

$$\frac{47}{68}-\frac{3}{5}=\frac{235}{340}-\frac{204}{340}=\frac{31}{340}$$

que casi es de $\frac{1}{10}$ de unidad, mientras el anterior no llegaba á $\frac{1}{40}$.

Esto solo basta para comprender la importancia de la precedente regla práctica y la conveniencia de no exponerse á cometer jamás el gran error que puede dar la última, aunque indudablemente es más sencilla.

II.—Adición y Sustracción.

235. Teniendo que afectar los números aproximados alguna de las formas hasta aquí consideradas, su cálculo se hará y dispondrá conforme á las reglas dadas para los enteros y fraccionarios, por lo que ahora debemos limitarnos á

Estudiar la manera de que los resultados de las operaciones sean erróneos en menos de una parte alícuota de la unidad, tan pequeña como se desee,

parte que siempre podrá referirse á una unidad decimal, puesto que si se han de encontrar con un error menor, por ejemplo, que $\frac{1}{27}$, esta condición quedará satisfecha,

Tomando como límite del error la unidad decimal inferior,

y determinándolos con uno menor que $\frac{1}{100}$ =0'01, cantidad más pequeña que $\frac{1}{27}$ (216, 5.º).

Esta consideración, el ser exactos todos los números enteros y el poder transformar en decimales los fraccionarios (233) con tan pequeño error como se quiera, permite operar siempre con números expresados decimalmente, lo que es mucho más cómodo y sencillo y á los cuales nos referiremos únicamente.

Para determinar, en general, con qué error convendrá calcular cada uno de los números que hayan de intervenir en una operación para que el resultado sea erróneo en menos de una unidad del orden decimal deseado, puede seguirse un método sencillo, que consiste en

Averiguar cuál será el error máximo que podrá tener según la aproximación de aquéllos, y suponiendo después que todos se aproximen en menos del mismo orden decimal, deducir cuál deberá ser éste para que aquél no pase del límite fijado.

En cuanto al error final, podremos deducirlo siempre

Efectuando la operación con números cualesquiera y con su descomposición en valores aproximados, aumentados ó disminuidos en sus respectivos errores, según consideremos éstos por defecto ó por exceso, y *restando después la operación exacta y la aproximada.*

236. Apliquemos este método al caso de la Adición representando por a, b, c,..... sumandos aproximados por defecto á los valores exactos A, B, C,..... y por e, e', e''..... los errores que se cometan tomando aquéllos por éstos, con lo cual tendremos:

$$\begin{array}{l} A=a+e \\ B=b+e' \\ C=c+e'' \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

ó sumando ordenadamente (168, 2.°)

$$A+B+C+.....=a+b+c+.....+e+e'+e''+.....$$

y restando de ambos miembros $a+b+c+.....$(40)

$$(A+B+C+.....)-(a+b+c+.....)=e+e'+e''+.....$$

ó como la diferencia indicada en el primer miembro es la que habría entre la suma exacta y la aproximada, es decir, el error del resultado, que podemos representar por E,

$$E=e+e'+e''+.....$$

á cuya igualdad se llegaría del mismo modo suponiendo que todos los errores fuesen por exceso, casos de máximo error, en razón á que si hubiera sumandos aproximados por defecto, mientras otros lo estuvieran por exceso, los errores se destruirían en parte (169, 7.ª); luego,

1.º—*El error máximo que puede cometerse al sumar varios números aproximados, es igual á la suma de los errores de los sumandos.*

Supongamos ahora que todos estos errores se refieren al mismo orden decimal, que el mayor sea e y que haya m sumandos.

Si en vez de cada sumando de la última igualdad ponemos e, que es el valor mayor, aumentaremos el del segundo miembro, y por lo tanto, se verificará:

$$E<e+e+e+\ldots..(m \text{ veces}), \text{ ó bien } E<me,$$

ya que tomar á un número m veces por sumando, equivale á multiplicarlo por m (43).

Haremos, por consiguiente, que el error E sea más pequeño que una unidad decimal de cualquier orden, que representaremos por U, haciendo $me<U$, para lo cual es suficiente que $e<\frac{U}{m}$, en razón á que siendo m forzosamente entero, el producto me será m veces mayor que e y un error más pequeño que $\frac{U}{m}$, hecho m veces mayor, jamás llegará á valer U.

Esto nos enseña que:

2.º—*Para calcular una suma en menos de una unidad de cualquier orden decimal, basta calcular cada sumando con un error menor que el cociente de dividirla por el número de sumandos.*

Propongámonos, como ejemplo, averiguar cuántos millares contendría la suma de los números 87'91423604, 45'1087, 9'1467258 y 436752'19.

Debiendo ser $E<1000$ y $e<1000:4=250$, bastará hacer $e<100$, es decir, calcular cada sumando en menos de una centena, despreciando todas las cifras de orden inferior (233, 2.º).

A continuación copiamos la operación que se debería hacer, no teniendo en cuenta lo demostrado, y la que debe hacerse para que se puedan comparar:

$$\begin{array}{r} 87914'23604 \\ 45'1087 \\ 9'1467258 \\ 436752'19 \\ \hline 524720'6814658 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 879 \\ 4367 \\ \hline 524'6 \end{array}$$

Aun no habiendo, pues, más que cuatro sumandos, quien empleara el primer método es probable contestase que 524, cometiendo un error de más de medio millar; quien empleara el segundo, prescindiendo del gran ahorro que haría de trabajo y tiempo, que 525 (234, Esc.); y en cuanto al que sin tener presentes las aproximaciones y los errores, se contentara para abreviar, como de seguro harían algunos, con no considerar más que los millares de los sumandos, agregaría 436 á 87, y obtendría un resultado 523, erróneo en más de millar y medio.

Sustracción.—En esta operación tendrá lugar el error máximo, cuando los de minuendo y sustraendo sean contrarios, puesto que si ambos estuvieran calculados por defecto ó por exceso, se compensarían, por lo menos en parte, al efectuar la resta (175, 2.ª y 3.ª).

Suponiendo, por consiguiente, que a sea el valor aproximado por defecto al minuendo exacto A, y que b lo esté por exceso al sustraendo B, siendo e y e' los respectivos errores, tendremos:

$$A=a+e$$
$$B=b-e',$$

ó restando ordenamente (168, 2.º),

$$A-B=a-b+e+e',$$

y quitando de ambos miembros $a-b$

$$(A-B)-(a-b)=e+e',$$

ó bien

$$E=e+e'$$

si representamos por E la diferencia entre la operación exacta y la aproximada, que será el error total; y como á la misma conclusión se llegaría suponiendo aproximado el minuendo por exceso y el sustraendo por defecto, podemos afirmar que:

3.º—*El error máximo que puede cometerse al restar dos números aproximados, es igual á la suma de los errores de minuendo y sustraendo.*

Si ahora suponemos que ambos se refieran á la misma unidad decimal y que el mayor sea e, el segundo miembro de la última igualdad aumentará al poner e en vez de e' (43, 6.ª), y por lo tanto,

$$E < e + e, \text{ ó bien } E < 2e,$$

y conseguiremos sea más pequeño que una unidad decimal U de cualquier orden, haciendo que $2e < U$, para lo cual es suficiente que $e < \frac{1}{2} U$; luego

4.º—*Para calcular una diferencia en menos de una unidad de cualquier orden decimal, basta que se calculen minuendo y sustraendo con un error menor que la mitad de dicha unidad.*

En el siguiente ejemplo está calculada en menos de 0'01 la diferencia entre los números 35'8783012 y 11'93251768 por el método ordinario y por la regla que se acaba de demostrar, para aplicar la cual hay que tener presente lo dicho en el párrafo 233.

35'8783012	35'88
11'93251768	11'95
23'94578352	23'95

El primer resultado sería también 23'95 al despreciar las cifras que se refieren á órdenes inferiores, si se aumentaba en 1 la última conservada.

III.—Multiplicación.

237. Aunque apelando al método general (235), determinaríamos el error del producto de dos factores aproximados y la regla para obtenerlo en menos de una parte alícuota decimal, de un modo análogo al detallado en la Adición y Sustracción, en el presente caso, puede deducirse dicha regla más fácilmente, fundándose en el siguiente principio:

1.º—*El error del producto de un número aproximado por otro exacto, es igual al valor del exacto, multiplicado por el error del aproximado.*

En efecto; si A es un valor exacto, b el aproximado á B y e el cometido por defecto ó exceso, tendremos

$$B=b\pm e;$$

ó multiplicando ambos miembros por A (168, 1.º),

$$AB=A(b\pm e),$$

que efectuando la multiplicación indicada, se convierte en (190 y 225, 4.ª, Cor.)

$$AB=Ab\pm Ae;$$

y restando de ambos miembros Ab,

$$AB-Ab=\pm Ae, \quad \text{que equivale á} \quad E=\pm Ae$$

si como hemos hecho siempre, representamos por E la diferencia entre el resultado de la operación exacta y la aproximada, ó sea el error del producto, que resulta, conforme al enunciado, ser siempre Ae en valor numérico, indicando los signos $+$ y $-$ que le preceden, que será por defecto ó por exceso, lo mismo que el del factor aproximado.

Si queremos, por consiguiente, que el error final no llegue á valer una unidad decimal U de cualquier orden, deberemos tener

$$Ae<U, \text{ ó } e<\frac{U}{A};$$

puesto que un número menor que el cociente $\frac{U}{A}$, multiplicado por el divisor A, siempre dará un producto menor que el dividendo (188, 3.º);

De todo lo cual se deduce que:

2.º—*Para obtener el producto de un número exacto por otro aproximado en menos de una parte alícuota decimal cualquiera, basta calcular el aproximado con un error más pequeño que el cociente de dividir la unidad decimal por el factor exacto.*

Así, por ejemplo, si quisiéramos determinar en menos de 0'001 el producto de 328'146739028 por $\frac{5}{8}$, bastaría aproximar el primer factor en menos de 0'001: $\frac{5}{8}$ =0'008:5=0'0016, lo cual se conseguiría calculándolo también en menos de 0'001<0'0016, reduciéndose á la segunda la primer operación efectuada por la regla general,

$$\begin{array}{r|l} 328'146739028 & \\ 5 & \\ \hline 1640'733695140 & 8 \\ 205'0917118925 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 328'146 & \\ 5 & \\ \hline 1640'730 & 8 \\ 205'091 & \end{array}$$

en la que se pueden despreciar las demás cifras, siempre que se tome por producto aproximado 205'092 (233, 2.º).

En el caso particular de que el factor aproximado fuera un entero de una cifra, el cociente de dividir por él la unidad decimal de cualquier orden, será igual ó mayor que la unidad de orden inferior; luego

Bastará tomar en el aproximado una cifra más que la indicada por dicha unidad decimal,

de modo que el producto del mismo número 328'146739028 por 5, se obtendría en menos de 0'001 multiplicando 8'1467 por 5, puesto que el error con que se calcule aquél ha de ser menor que 0'001:5=0'0002, y la operación podría disponerse así:

$$\begin{array}{r} 328'146739028 \\ 5 \quad\quad \\ \hline 1640'7335 \quad\quad \end{array}$$

colocando el 5 *debajo de la cifra por la cual se ha de empezar la multiplicación.*

Una cosa análoga puede hacerse aun cuando la cifra no represente unidades simples, siendo, por ejemplo, el factor exacto 600, ó 0'07, en lugar de 5, porque en el primer caso se verificaría

$$328'146739028.600=328'146739028.100.6=32814'6739028.6,$$

y en el segundo

$$328'146739028.0'07=328'146739028 \cdot \frac{7}{100}=3'28146739028.7$$

por lo cual tendríamos seguridad de que ambos productos serian erróneos en menos de 0'001 disponiendo las operaciones como están indicadas á continuación:

$$\begin{array}{r} \text{32814'6739028} \\ 6 \\ \hline \text{196888'0434} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{3'28146739028} \\ \quad\;\; 7 \\ \hline \text{22'9698} \end{array}$$

ó más sencillamente, si no queremos correr la coma en el primer factor,

$$\begin{array}{r} \text{328'146739028} \\ 600 \\ \hline \text{196888'0434} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{328'146739028} \\ \quad\text{0'07} \\ \hline \text{22'9698} \end{array}$$

es decir, que

Puede prescindirse del orden de unidades que la cifra represente, siempre que se la escriba tantos lugares más hacia la derecha ó la izquierda, como indique dicho orden y sólo se separe del producto una decimal más que la pedida en la aproximación.

238. Encontrados ya en menos de 0'001 los productos de 328'146739028, por 5, 600 y 0'07, si los consideramos como parciales, reuniéndolos en una sola multiplicación, tendremos el producto del primer número por 600+5+0'07=605'07, en esta forma:

$$\begin{array}{l} \text{3281'46739028} \\ \qquad\;\; 70506 \\ \hline \text{196888'0434} \\ \quad\;\text{1640'7335} \\ \qquad\;\;\text{22'9698} \\ \hline \text{198551'7467} \end{array}$$

por lo cual, para hallarlo bastaría escribir las unidades del segundo factor debajo de la cifra que en el primero representase el orden inferior al pedido y las restantes en sentido inverso, empezando las multiplicaciones por las cifras que cada una tuviese inmediatamente encima, y colocar en columna los productos parciales para su adición, ya que todos se refieren al mismo orden de unidades.

Pero de esta manera el producto total sería erróneo *en la suma de los errores de los parciales* (236, 1.°), por lo que tendríamos llamando á éstos e, e', e'' y observando que siempre hemos tomado el primer factor en menos de 0'0001 (233, 2.°)

$$\begin{array}{l} e\ < 0'0001 \cdot 6 = 0'0006 \\ e' < 0'0001 \cdot 5 = 0'0005 \\ e'' < 0'0001 \cdot 7 = 0'0007 \\ \hline E < 0'0001(6+5+7) = 0'0018 \end{array}$$

representando por E el error total, pues es evidente que la suma de los primeros miembros sería menor que la de los segundos (169, 7.ª).

El error, por consiguiente,

Será mayor que el pedido, siempre que la suma de las cifras del factor por el cual se multiplica, sea mayor que 9, pero *no lo sería si los productos parciales tuvieran una cifra decimal más, mientras la suma de las del otro no excediese de* 99, para lo cual bastaría escribir la cifra de las unidades, no uno, sino dos lugares hacia la derecha de la que represente el orden pedido en la aproximación.

Si la referida suma excediese á 99, 999, etc., *deberían*, por lo dicho, *tomarse en el primer factor, tres, cuatro, etc., cifras más;*

pero como este caso nunca ocurre, porque aunque las cifras fueran en número indefinido, esas sumas, como hemos visto, solo se refieren á aquellas de que sea preciso hacer uso, puede establecerse como regla general la siguiente, debida á Oughtred:

239. *Para multiplicar dos números con un error menor que una unidad decimal de cualquier orden, se escriben las unidades de uno de los factores debajo de la cifra que represente unidades inferiores en dos órdenes al que se pide, colocando las demás de aquél en sentido inverso; después se efectúa la multiplicación empezando por la cifra que tenga encima aquélla por la cual se multiplica cada vez y se suman los productos parciales escritos en columna, despreciando las dos últimas cifras de la suma, aumentando una unidad á la primera de la derecha que se conserve y separando las decimales indicadas en la aproximación pedida.*

Ejemplo.—Hallar en menos de 0'001 el producto de
328'146739028 por 65'749231852647.....

$$
\begin{array}{r}
328'146739028 \\
\underline{74625813294756} \\
1968880434 \\
164073365 \\
22970269 \\
1312584 \\
295326 \\
6562 \\
984 \\
32 \\
24 \\
\hline
2157539580
\end{array}
$$

Producto =21575'396 en menos de 0'001

Escolio.—Algunos aplican la anterior regla dejando los dos factores en su forma natural, en cuyo caso hay que ver previamente cuál es la cifra del primero que corresponde multiplicar por la de orden superior del segundo, si se empieza por la izquierda, ó cuál del segundo corresponde multiplicar por la superior del primero, si se empieza la operación por la derecha, considerando respectivamente una cifra menos ó más en cada multiplicación parcial, como está indicado á continuación.

$$
\begin{array}{l}
328'146739\overline{028} \\
65'749231852647.....
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
\hline
1968880434 \\
164073365 \\
22970269 \\
1312584 \\
295326 \\
6562 \\
984 \\
32 \\
24 \\
\hline
2157539580
\end{array}
$$

Producto =21575'396

```
      328'146739028
       65'749231852647
   ————————————————————
                  24
                  32
                 984
                6562
              295326
             1312584
            22970269
           164073365
          1968880434
          ——————————
          2157539580
```

Producto =21575'396

En la primera operación hubiéramos tenido que decir previamente: para que las 6 decenas del segundo factor produzcan *cien milésimas*, que son dos órdenes inferiores al pedido, hay que empezar la multiplicación por las 9 *millonésimas* del primero.

En la segunda: para que las 3 centenas del primero cumplan igual condición, hay que empezar por las 8 *diezmillonésimas* del segundo.

La disposición práctica de Oughtred, es, pues, la más ventajosa, tanto por evitar este cálculo previo, cuanto por ser menos fácil equivocarse en las multiplicaciones parciales.

240. De la misma manera que en la multiplicación común, claro es que deberán suprimirse las multiplicaciones por las *cifras* 0 que pueda tener el segundo factor, por lo que

Convendrá escribir debajo el que tenga varias de estas cifras, siendo también *evidente que como á tales deberán considerarse,* aunque se omita su escritura en la práctica, *las que á la derecha del primer factor puedan faltar para empezar las multiplicaciones,* colocando los productos parciales en el lugar que les correspondería si se hubieran escrito.

Ejemplos.—Hallar en menos de 0'001 el producto de multiplicar 6004'075021 por 0'896537423.....y 756'89182 por 36'4798.

	0'896537423		756'8918
	1205704006		897463
	537922452		22706754
	358612		45413508
	6272		30275972
	445		5298237
			605601
	537287781		2760990290
Producto...	5372'878	Producto...	27609'903

En el caso de varios factores, y suponiendo que en cada multiplicación debieran despreciarse dos cifras, tendríamos que efectuar $n-1$ operaciones, si n indica su número; luego en total habríamos despreciado $2(n-1)$, y para que la última perteneciese al orden deseado, deberíamos

Escribir en la primer multiplicación la cifra de las unidades del segundo factor, debajo de la del orden inferior al pedido en tantos lugares como expresase el duplo del número de factores menos uno, y dos lugares más hacia la izquierda, en cada nueva multiplicación.

Ejemplo.—Calcular en menos de 0'001 el producto

36'457132.0'9805.72.0'06.

	36'457132
	5089
	328114188
	291656056
	18228565
	35746207925
	27
	25022345544
	6
	15013424
Producto....	150'135

IV.—División.

241. También en esta operación, como en la anterior, es mucho más sencillo que valerse del método general para en-

contrar el cociente de dos números aproximados en menos de cualquier parte alícuota decimal, prescindir del error máximo que al resultado pueda corresponder en todos los casos y hacer extensiva á esa clase de números una regla abreviada, que es muy conveniente conocer para dividir dos números enteros de muchas cifras de un modo fácil y muy rápido, la cual se funda en los dos teoremas siguientes:

El error del cociente de dividir un número aproximado por otro exacto, es igual al error del dividendo, partido por el valor exacto del divisor.

En efecto; si, como siempre, representamos por A el verdadero valor del dividendo, por a el aproximado, por e el error por defecto y por B el divisor exacto, tendremos:

$$A=a+e$$

ó dividiendo por B (168, 1.°)

$$\frac{A}{B}=\frac{a}{B}+\frac{e}{B}$$

y restando $\frac{a}{B}$ de ambos miembros

$$\frac{A}{B}-\frac{a}{B}=\frac{e}{B}, \quad \text{ó bien,} \quad E=\frac{e}{B}$$

siendo E el error del resultado conforme al enunciado de la proposición.

Corolario.—*Para obtener el cociente de dos enteros aproximado en menos de una unidad, podrá tomarse por dividendo el número que resulte de reemplazar por ceros tantas cifras de su derecha como tenga el divisor, menos una;*

Porque el error cometido será entonces menor que el divisor, y siendo $e<B$, necesariamente $\frac{e}{B}=E<1$.

Así, el cociente entero de la división de 734866 por 26378, por ejemplo, sería el mismo que el de dividir también por 26378 el número 730000, que reemplazaría al dividendo con un error de $4866<26378$.

242. *El error de dividir un número exacto por otro apro-*

ximado, será igual al cociente verdadero multiplicado por el error del divisor y partido por el divisor aproximado.

Empecemos por observar que si el divisor $B=b+e$ está aproximado por defecto, como indica esa igualdad en que B representa el valor exacto, b el aproximado y e el error, $\frac{A}{B}<\frac{A}{b}$ (216, 5.º), de modo que el cociente, en este caso, será erróneo por exceso y no por defecto como en el anterior, teniendo por expresión:

$$E=\frac{A}{b}-\frac{A}{B}=\frac{AB-Ab}{bB}=\frac{A(b+e)-Ab}{bB}$$

$$=\frac{Ab+Ae-Ab}{bB}=\frac{Ae}{bB}=\frac{\frac{Ae}{B}}{b}=\frac{\frac{A}{B}.e}{b}$$

según queríamos demostrar.

Corolario.—*Para obtener el cociente de dos enteros, aproximado en menos de una unidad, podrá tomarse por divisor el número que resulte de reemplazar por ceros las cifras de su derecha suficientes, para que el error sea menor, que la unidad del orden indicado por la diferencia entre el número de sus cifras y las que debe tener el cociente entero.*

Efectivamente; supongamos que B y b tengan n cifras, ya que su número no se alterará aunque las últimas significativas se reemplacen por ceros y que el cociente deba tener m, lo que es fácil conocer sin efectuar la división, en virtud de la misma regla general (52, 3.º).

Expresando el divisor en menos de una unidad del orden $n-m$, deberemos conservar hasta la cifra de ese orden inclusive y el error e tendrá, por consiguiente, $n-m-1$, y $\frac{A}{B}.e$, tendrá (198, Teorema) $m+n-m-1=n-1$, ó, $n-1-1=n-2$, y como b tiene n y todos los números enteros de $n-1$, ó $n-2$ cifras son forzosamente menores que cualquiera de n,

$$\frac{A}{B}.e<b, \quad \text{y por lo tanto,} \quad \frac{\frac{A}{B}.e}{b}<1, \quad \text{ó bien} \quad E<1.$$

Así, en la misma división de los números 734866 y 26378, cuyo cociente ha de tener dos cifras; puesto que necesitaremos tomar por dividendo 73486 en la primera división parcial, $n=5$, $m=2$, $n-m=5-2=3$, y bastando para calcular el cociente aproximar 26378 en menos de una unidad de tercer orden, podríamos prescindir de 78 unidades y tomar por divisor 26300.

243. En los dos corolarios anteriores se funda el método de la división abreviada, para comprender el cual con claridad, conviene tener á la vista la división de los números que hasta aquí venimos considerando, hecha por el método ordinario y aun su descomposición en las dos operaciones parciales que exige.

$$\begin{array}{r|l} 734866 & 26378 \\ \cline{2-2} 207306 & 27 \\ 22660 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 73486 & 26378 \\ \cline{2-2} 20730 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 207306 & 26378 \\ \cline{2-2} 22660 & 7 \end{array}$$

Si en la primera de las divisiones parciales reemplazamos por ceros las últimas cifras de dividendo y divisor indicadas en los corolarios, podremos dividir 73000 por 26300, suprimiendo dos ceros de su derecha (205, 1.º), con lo que la operación quedará reducida á

$$\begin{array}{r|l} 730 & 263 \\ \cline{2-2} 204 & 2 \end{array}$$

siendo el resto de esta división 20400 (230, 1.º) decenas, puesto que el dividendo son decenas, ó 204000 unidades.

Sustituyendo, pues, por este número el dividendo de la segunda y reemplazando por ceros las tres últimas cifras del divisor para aproximarlo en menos de una unidad de cuarto orden, conforme á lo dicho en el último corolario, podremos prescindir análogamente de estos ceros (205, 1.º), reduciendo la operación á

$$\begin{array}{r|l} 204 & 26 \\ \cline{2-2} 22 & 7 \end{array}$$

y la total que resulta del conjunto de las dos, marcando las cifras de que puede prescindirse en lugar de reemplazarlas por ceros, á

$$\begin{array}{r|l} 734\overline{866} & \underline{26\dot{3}\overline{78}} \\ 208 & 27 \\ 26 & \end{array}$$

operando con la cifra 4, lo que en nada complica la división y *aproxima más el resto.*

Parece á primera vista que cometiendo así en el cociente dos errores menores que la unidad, uno por defecto y otro por exceso, que, por tanto, se compensarán en parte y hasta podrán anularse, sin que jamás su diferencia llegue á valer 1, deberemos obtener siempre el mismo cociente que por la regla ordinaria, y así sucederá indudablemente con la primer cifra; pero hay que tener presente que nosotros no nos hemos contentado con hacer la abreviación en el dividendo y divisor primitivos, sino que vamos suprimiendo cifras como el 3, aplicándola á cada división parcial; que *los dividendos son erróneos y generalmente mayores que los exactos* por la supresión de esas cifras; y que como en cada momento podría agregarse al cociente por defecto la fracción que lo completaría referida á unidades del orden correspondiente (150), *sería muy posible* que aun sin producir las divisiones auxiliares errores de una unidad de aquel orden, *se obtuvieran por exceso algunas cifras*, que serían las inmediatamente superiores á las verdaderas y originarían un cociente final completamente defectuoso.

244. Los teoremas fundamentales nos suministran sólo, por consiguiente, la idea de cómo podrá abreviarse la división; pero para tener seguridad de que hallaremos el verdadero cociente, se hace preciso buscar un medio de que la acumulación de errores en los restos no llegue jamás á influir en una unidad simple del cociente, para lo que se comprende desde luego deberemos empezar por calcular esos restos tan aproximados á los exactos como permita la esencia de la abreviación, lo que ya hemos conseguido en parte para el primero, operando con la cifra 4 del dividendo, pues 208000 es mucho más aproximado á 207306 que 204000.

La consideración de esa cifra ha producido, sin embargo, un gran error por exceso en el segundo resto, error debido principalmente á que hemos operado con los millares del dividendo y no con todos los del producto del cociente por el divisor, ya que las 2 decenas del cociente, ó 20 unidades, multiplicadas por las 7, ó 70 del divisor que se han despreciado, producirían 1400, en las que hay contenido *un* millar que no hemos tenido en cuenta.

Disminuiremos, pues, el error de los restos,

Multiplicando de memoria la cifra del cociente por la primera que se desprecie en el divisor y agregando las decenas del producto que resulte, si las hay, al de la cifra siguiente, antes de restar del dividendo,

diciendo: 2 por 7, 14; 1 y 2.3, 6, 7; á 14, 7; lo que repetido igualmente en la multiplicación de la siguiente cifra, por el divisor 26, convertiría la total en

$$\begin{array}{l|l} 734\overline{866} & 26\dot{3}\overline{78} \\ \hline 207 & 27 \\ 23 & \end{array}$$

De este modo despreciamos la cifra de las centenas del producto 2 decenas, ó 20, por 7 decenas, ó 70, que no pudiendo pasar de 9, no excederá de 900 unidades, y además todo el producto de 2 decenas ó 20, por 8 unidades, que jamás llegará tampoco á 900, en razón á que aun suponiendo 9 las dos cifras, ese producto resultaría igual á 90.9=810.

El error cometido en ese resto por la acumulación de ambos, nunca podrá llegar, en virtud de lo dicho, á

$$900+900=2.900=2\ 9.100=2.0'9.1000$$

En cuanto al segundo resto, se ha encontrado despreciando la cifra de las centenas del producto 7 por 3 centenas, ó 300, que no pudiendo del mismo modo pasar de 9, tampoco excederá de 900 unidades, y además todo el producto 7.78, siempre inferior también á 900, ya que el primer factor será 9 á lo más, y el segundo no puede llegar á 100.

El error cometido en el siguiente resto, por la acumulación de ambos, será, por tanto, como el del primero, menor que

$$900+900=2.900=2.9.100=2.0'9.1000;$$

y es evidente que lo mismo se demostraría para todos los restos si la división fuera más larga, porque el orden de los productos despreciados siempre será el mismo, avanzando como se avanza un lugar hacia la derecha en el cociente por cada cifra que se suprime hacia la izquierda del divisor, por lo cual puede afirmarse que:

El error cometido en cada resto será menor que 2.0'9 unidades, del orden á que pertenezca el último divisor empleado.

Si el cociente tuviera, pues, m cifras, y la división diera origen á m restos, el error total del último sería menor que la reunión de m sumandos, iguales á 2.0'9, ó sea 2 0'9. m, *unidades del orden que corresponda al último divisor*;
y mientras 2.0'9. m sea menor que este divisor, claro es que *no podrá contenerle,* y que

El error del cociente no llegará á una unidad,
por lo que encontraremos las mismas cifras que si aplicáramos la regla ordinaria, en el caso de que la división debiera ser exacta, y únicamente cuando no lo fuese, podría suceder que ese conjunto de errores menor que el divisor, sumado con el resto natural de la división, que también ha de ser menor, llegara á *contenerle una vez, resultando el cociente por exceso*; aunque no más inexacto que el hallado por la regla general, puesto que su error tampoco llegará á valer 1, componiéndose, como entonces se compondría el verdadero, del cociente entero por defecto, mas una fracción determinada por los valores del resto y el divisor (150).

245. De lo dicho se deduce que la división podrá hacerse del modo indicado siempre que se empiece por calcular el valor que, atendiendo á la condición de ser mayor que 2.0'9.m, deba tener el último divisor que se deba emplear, del cual habrá que partir para fijar *el primero* ó DE ENTRADA y las cifras que pueden despreciarse en el dividendo, lo cual es fácil siguiendo esta regla, debida á Guy:

Para determinar abreviadamente el cociente de dos enteros en menos de una unidad, se marcan á la izquierda del divisor las cifras suficientes para expresar un valor mayor que el duplo de las que ha de tener el cociente, multiplicado por 0'9, y se cuentan hacia la derecha tantas como éste deba tener, menos una, con lo que se obtendrá el divisor de entrada, *despreciando todas las restantes, y tantas del dividendo como tenga á su derecha el último divisor. En seguida se efectúa la división por la regla ordinaria, despreciando en cada una de las parciales la última cifra del divisor anterior en vez de bajar la del dividendo, pero teniendo en cuenta para hallar los restos las decenas de su producto por la cifra del cociente.*

EJEMPLO.—Dividir abreviadamente 54867031254964780923 por 26587420256981.

2.7.0'9=14.0'9=12'6	54867031254964780923	26587420256981
	1692191	2063646
	96946	
	17184	
	1232	
	169	
	10	

Hemos dicho que el cociente puede resultar por exceso, si el conjunto de errores de los dividendos parciales, agregado al resto natural de la división, llegara á contener una vez al divisor, y es claro que, en general, el exceso sólo podrá afectar á la última cifra del cociente, no pudiendo ser éste erróneo en una unidad; pero si esta última cifra, ó las últimas, fuesen *nueves*, evidentemente se manifestaría este exceso en alguna de las anteriores.

Si el cociente por defecto debiera ser, por ejemplo, 56999, al resultar por exceso sería $56999+1=57000$, y en las divisiones parciales debería ocurrir para ello una de estas dos cosas: ó que desde luego *el primer resto nos diera la cifra* 7 en lugar de 6, *resultando ceros las restantes, ó que el exceso no se hiciera visible hasta llegar á alguna de las siguientes* cifras, en cuyo caso *el dividendo parcial contendría* 10 *veces al divisor respectivo*.

Cuando esto ocurra podremos, por lo tanto,

Dar por concluída la división, escribiendo 9 *en los lugares correspondientes á las cifras que falte calcular.*

Hé aquí ejemplos de los tres casos, á los que primero hemos aplicado la regla ordinaria y enseguida la abreviada, para que pueda comprenderse mejor lo que antecede.

738321	26378
210761	27
26115	

738321	26378
211	28
1	

1503571063014	26378452
184648463	56999
263777510	
263704421	
262983534	
25577366	

1503571063014	26378452
184649	57000
0001	

1503565442462	26378452
184642842	56999
263721304	
263153366	
257468982	
20052914	

1503565442462	26378452
184643	56999
26373	

Vemos que estos casos, como es natural, sólo ocurren cuando, diferenciándose relativamente poco el valor del resto y el del divisor, el cociente por exceso que da, ó puede dar, la regla abreviada, es mucho más aproximado que el de la división ordinaria.

Por último, es evidente que

Si alguna cifra produjera un resto 0, también *la división podría darse por terminada*,

pues las restantes cifras también serían 0, y que:

Si á la derecha del divisor propuesto no hubiera bastantes para formar desde luego el de entrada, debería empezarse la operación por la regla ordinaria,

no aplicando la abreviada hasta llegar á las cifras que en el dividendo pudieran despreciarse, como sucedería en los siguientes ejemplos:

1477192312689	26378452	1503565442462	26378
158270		184665	57000737
0000		19442	
		978	
		187	
		3	

246. Resumiendo el análisis hecho para deducir la regla de Guy, vemos que su fundamento reside principalmente en el número de cifras que deban calcularse, y en que el resto natural, junto con los errores de los dividendos parciales que se empleen, jamás puede producir el error de una unidad del orden de la cifra calculada últimamente, y que el razonamiento es independiente por completo del orden que esta cifra represente.

Si en cualquiera de los ejemplos anteriores calculáramos, por consiguiente, tres cifras más, separándolas como decimales, el error del cociente no llegaría á 0'001, y por lo tanto,

Para hallar el cociente de dos enteros en menos de una parte alícuota decimal, puede seguirse la regla de Guy, considerando el número total de cifras que el cociente deba tener, después de escribir como decimales á la derecha del dividendo tantos ceros como indique el orden de la parte alícuota,

lo que equivale, si hay bastantes cifras, á

Despreciar de su derecha tantas cifras menos de las permitidas por la regla, cuantas sean las decimales que en el cociente se necesiten,

con lo cual, en la mayoría de los casos, se hace innecesaria la escritura de todos ó de parte de los ceros.

Corolario.—Tratándose de la división de un *número decimal fraccionario*, sea exacto, sea aproximado, *por un entero*, nos hallaremos en el caso de poderles aplicar igualmente *la regla anterior*, por lo que, si es inexacto, deberemos calcularlo con las necesarias cifras decimales.

Finalmente, si el *divisor fuera aproximado* ó *fraccionario decimal exacto, la misma regla* nos serviría también para hallar el cociente con la aproximación que se quisiera, *transformándolo* en entero (173), ó *calculándolo con bastantes cifras*, para que no fuese errónea ninguna de las que han de intervenir en la operación.

Los tres cocientes que siguen se hallan todos calculados en menos de 0'001.

1498765201273	26378452147
179843	56'817
21573	
471	
204	
21	

1498765201'273	26378452
179843	56'817
21573	
471	
204	
21	

149'8765201273	2'637845.....
179843	56'817
21573	
471	
204	
21	

CAPÍTULO IV

POTENCIACIÓN

I.—Generalidades.

247. Aunque el concepto de la Potenciación, *Graduación* ó *Elevación á potencias* (116) se forme suponiendo un producto de factores iguales $4.4.4=4^3$ al que puede llegarse con sólo conocer su valor y su número, la definición común no puede ser general, aun abrazando como abrazaría el caso en que el factor fuese negativo $(-4)(-4)(-4)=(-4)^3$, porque exige que el exponente sea no sólo entero, sino positivo, lo cual sabemos (231) no se verificará siempre, por lo que se hace preciso modificarla de manera que los comprenda todos, diciendo tiene por objeto:

Dados dos números, determinar un tercero, que esté formado por multiplicación con respecto á uno de ellos, del mismo modo que lo esté el otro por adición con respecto á la unidad positiva,

siendo evidente que los resultados 4^3 y 3^4 serán distintos, y que, por tanto, debe precisarse cuál de los números se ha de considerar como base y cuál como exponente.

Después de haber demostrado la necesidad de modificar la definición, seguiremos, no obstante, suponiendo que el exponente es entero y positivo para facilitar el estudio, y á semejanza de lo que hicimos en la Multiplicación y División, veremos luego si las reglas deducidas en tal supuesto, son aplicables también á los casos en que los exponentes sean negativos.

Empecemos por investigar cuál será el signo de la potencia, según el que tenga la base, recordando que un producto de factores positivos, siempre será positivo (189, 1.°), y que si son negativos, el signo del producto depende de que su número sea par ó impar (192, 1.°), es decir, que si representamos por n un entero cualquiera, en cuyo caso $2n$ y $2n+1$ *serán* evidentemente *un número par y uno impar*, tendremos, por ejemplo:

$$\begin{array}{ll|l} (+5)^{2n} & =+5^{2n} & 5^2=25 \\ (+5)^{2n+1} & =+5^{2n+1} & 5^3=125 \\ (-5)^{2n} & =+5^{2n} & (-5)^2=25 \\ (-5)^{2n+1} & =-5^{2n+1} & (-5)^3=-125 \end{array}$$

ó en otros términos, que:

1.°—*Todas las potencias de los números positivos, serán positivas.*

2.°—*Las potencias de los números negativos serán positivas ó negativas, según que su grado sea par ó impar.*

248. Fijados ya los signos que tendrán los resultados, podemos deducir de la definición las demás consecuencias que se desprenden de ella, sin atender más que á los valores numéricos; pues en el caso de que la índole de una cuestión cualquiera exija que se atienda también á los signos, ya sabemos que las positivas siempre serán mayores que las negativas, y que de éstas será mayor la de menor valor numérico (178, 2.° y 3.°).

1.ª—*Si el exponente es igual á 1, la potencia será igual á la base.*

$$b^1=b,$$

cualquiera que sea el valor de b, porque deberá tomarse una sola vez por factor.

2.ª—*Las potencias de grado mayor que 1, serán mayores, iguales ó menores que la base, según sea aquél mayor, igual ó menor que 1.*

$$5^3=5.5.5>5;\quad 1^3=1.1.1=1;\quad \left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}<\frac{2}{5};$$

según lo dicho en la Multiplicación (188, 3.° y 2.°, y 225, 1.ª)

3.ª—*Las potencias de grado mayor que 1 aumentarán ó disminuirán á medida que aumente ó disminuya la base.*

$$a^3<(a+3)^3 \quad y \quad a^3>\left(a-\frac{2}{3}\right)^3$$

cualquiera que sea el valor de a, puesto que un producto aumenta ó disminuye, al aumentar ó disminuir los factores (188, 3.°).

4.ª—*Las potencias aumentarán ó disminuirán á medida que aumente el exponente, según que sea la base mayor ó menor que* 1.

$$3^3<3^{3+2} \quad y \quad \left(\frac{4}{7}\right)^3>\left(\frac{4}{7}\right)^{3+2}$$

ya que al aumentar el número de factores, aumentará el producto en el primer caso y disminuirá en el segundo (188, 2.°).

Combinemos ahora, como hemos hecho en las demás operaciones, los números con sus límites.

1.°—*Todas las potencias de* 0, *serán iguales á* 0 (188, 4.°).

$$0^a=0$$

cualquiera que sea a.

2.°—*Todas las potencias de* ∞, *serán iguales á* ∞ (188, 7.°).

$$\infty^a=\infty.$$

3.°—*Las potencias de grado* 0 *de cualquier número, serán iguales á* 1,

en razón á que por una parte $a^m:a^m=1$, cualesquiera que sean a y m (199, 4.ª), y por otra $a^m:a^m=a^{m-m}=a^0$ (202, 2.ª), de donde,

$$a^0=1.$$

4.°—*La potencia de grado* ∞ *de un número será* ∞ *ó* 0, *según que el número sea mayor ó menor que la unidad,*

porque ya hemos visto que en el primer caso irán aumentando las potencias y en el segundo disminuyendo, y es claro que pudiéndose obtener un número tan grande ó tan pequeño como se quiera, aumentando convenientemente el número de factores, cuando este número sea indefinidamente grande, los valores de dichas potencias tendrán que ser, respectivamente, indefinidamente grande é indefinidamente pequeño, luego

$$3^{\infty}=\infty \quad \text{y} \quad \left(\frac{4}{5}\right)^{\infty}=0.$$

5.º—*La potencia de grado 0 de 0 ó ∞, podrá suponerse igual á un número cualquiera, á 0, ó á ∞.*

En efecto; el exponente 0 no puede formarse por adición de la unidad positiva, más que considerándola como sumando y haciendo luego con ella la operación contraria, $(+1)-(+1)=0$; luego según la definición general (247), la potencia se formará tomando 0 ó ∞ por factor y haciendo luego con esas mismas bases la operación contraria, que es la de dividir, y como $0:0=\infty:\infty=a$, y también $=0$, é $=\infty$ (199, 1.º), resulta:

$$0^0=a,\ 0^0=0,\ 0^0=\infty \quad \text{é} \quad \infty^0=a,\ \infty^0=0, \quad \text{é} \quad \infty^0=\infty.$$

6.º—*La potencia de grado ∞ de 0, será 0,*
ya que un producto de factores 0 siempre será 0, aunque se supongan en número indefinido.

$$0^{\infty}=0.$$

7.º—*La potencia ∞ de ∞, será ∞*
evidentemente.

$$\infty^{\infty}=\infty$$

II.—Operaciones derivadas.

249. Cuando una combinación de números aditivos y sustractivos ha de elevarse á una potencia, siempre conviene en la práctica efectuarla previamente, á no ser en los casos más sencillos en que se trate de calcular el cuadrado ó el cubo (116) de la suma ó diferencia indicada de dos números, únicos que por esta razón estudiaremos ahora.

Siendo a y b dos números cualesquiera, tendremos (191, 1.°, y 225, Cor.):

$$\begin{aligned}(a\pm b)^2&=(a\pm b)(a\pm b)=(a\pm b)a\pm(a\pm b)b\\&=a.a\pm ab\pm ab\pm b.b=a^2\pm 2ab+b^2,\end{aligned}$$

puesto que $+(ab+b^2)=+ab+b^2$ y $-(ab-b^2)=-ab+b^2$ (182, 3.°); luego,

1.°—*El cuadrado de la suma ó diferencia indicada de dos números, es igual al cuadrado del primero, más ó menos el duplo del primero por el segundo, más el cuadro del segundo.*

$$(3+5)^2=3^2+2.3.5+5^2=9+30+25=64;$$

$$\left(3-\frac{2}{5}\right)^2=3^2-2.3\cdot\frac{2}{5}+\frac{2^2}{5^2}=9-\frac{12}{5}+\frac{4}{25}=6\,\frac{3}{5}+\frac{4}{25}=6\,\frac{19}{25}.$$

En cuanto al cubo, se verificará:

$$\begin{aligned}(a\pm b)^3&=(a\pm b)^2(a\pm b)=(a^2\pm 2ab+b^2)(a\pm b)\\&=a^2.a\pm 2ab.a+ab^2\pm a^2b+2ab.b\pm b^2.b,\end{aligned}$$

ya que $(\pm 2ab)(\pm b)=+b^2$ (189, 1.°); por consiguiente (191, 2.°, y 192, 2.°):

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 2a^2b+ab^2\pm a^2b+2ab^2\pm b^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$

lo cual nos dice que:

2.°—*El cubo de la suma ó diferencia indicada de dos números es igual al cubo del primero, más ó menos el triplo del cuadrado del primero por el segundo, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, más ó menos el cubo del segundo.*

$$\begin{aligned}&(2+5)^3=2^3+3.2^2.5+3.2.5^2+5^3=8+60+150+125=343\\&(9-2)^3=9^3-3.9^2.2+3.9.2^2-2^3=729-486+108-8\\&\qquad=243+100=343.\end{aligned}$$

250. 1.°—*La potencia de un producto indicado, es igual al producto de las potencias del mismo grado de cada uno de los factores.*

Si el exponente es positivo, está ya demostrado (192, 3.°) sabiendo multiplicar potencias del mismo grado, y si fuese negativo, tendríamos, llamando a, b y c á los factores,

$$(abc)^{-3}=\frac{1}{(abc)^3}=\frac{1}{a^3.b^3.c^3}=\frac{1}{a^3}\cdot\frac{1}{b^3}\cdot\frac{1}{c^3}=a^{-3}.b^{-3}.c^{-3}.$$

Ejemplo:

$$(2.4.5)^{-3}=2^{-3}.4^{-3}.5^{-3}=\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{4^3}\cdot\frac{1}{5^3}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{125}=\frac{1}{64000}.$$

2.°—*La potencia de un cociente indicado es igual al cociente de las potencias del mismo grado de dividendo y divisor.*

Demostrado también para el exponente positivo (202, 3.°), tendríamos, suponiéndole negativo:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}=1:\left(\frac{a}{b}\right)^{3}=1:\frac{a^3}{b^3}=\frac{b^3}{a^3}=b^3\cdot\frac{1}{a^3}=\frac{1}{b^{-3}}\cdot a^{-3}=\frac{a^{-3}}{b^{-3}}$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}=\frac{2^{-3}}{5^{-3}}=\frac{1}{2^3}:\frac{1}{5^3}=\frac{1}{8}:\frac{1}{125}=\frac{125}{8}=15{,}625.$$

3.°—*La potencia de otra potencia indicada es igual á la potencia de igual base, cuyo grado sea el producto de los exponentes.*

En efecto; si el nuevo exponente es positivo, se tendrá, cualquiera que sea el signo del primero, que representaremos por n (192, 2.°, y 231):

$$(a^n)^4=a^n.a^n.a^n.a^n=a^{n+n+n+n}=a^{4n};$$

y si fuera negativo,

$$(a^n)^{-4}=\frac{1}{(a^n)^4}=\frac{1}{a^{4n}}=a^{-4n}=a^{n(-4)}.$$

Ejemplos:

$$(4^2)^3=4^6=(4^3)^2=64^2=4096$$

$$(4^2)^{-3}=4^{-6}=\frac{1}{4^6}=\frac{1}{4096}$$

$$(4^{-2})^{-3}=4^6$$

$$(4^{-2})^3=4^{-6}$$

Escolio.—Demostrado para dos exponentes, es evidente que siguiendo una marcha análoga se podría demostrar para cualquier número de ellos y que, por lo tanto,

$$\left[(a^n)^m\right]^p=a^{nmp\ldots\ldots}$$

Ejemplo:

$$\left((4^2)^{-3}\right)^5=4^{-30}=\frac{1}{4^{30}}=\frac{1}{64^{10}}=\frac{1}{4096^5}$$

III.—Detalles prácticos.

251. Cada una de las reglas demostradas puede originar en la práctica diferentes abreviaciones, y desde luego vemos que obteniéndose la potencia de grado entero y positivo de cualquier número según la regla general (117, 1.ª, 4.ª, 5.ª y 6.ª) por medio de varias multiplicaciones,

Cuantos métodos y disposiciones prácticas hemos estudiado en la multiplicación de enteros, fracciones ordinarias ó decimales y números aproximados, serán aplicables al cálculo de las potencias, en armonía con el valor que la base tenga.

También de la multiplicación de potencias de igual base (192, 2.º), se deduce que:

Para elevar un número á una potencia de grado entero, pueden multiplicarse potencias de la base cuyos exponentes sumados compongan el primitivo,

lo que frecuentemente será mucho más fácil que efectuar todas las multiplicaciones indicadas por la regla general, dándonos al mismo tiempo un medio seguro de hacer la prueba de la operación (36), sea cual fuere la base.

Ejemplo.—Calcular la novena potencia de 7.

Procediendo de acuerdo con la regla general, se debería hacer el cálculo siguiente:

$$\begin{array}{r}
7 \\
7 \\
\hline
49 \\
7 \\
\hline
343 \\
7 \\
\hline
2401 \\
7 \\
\hline
16807 \\
7 \\
\hline
117649 \\
7 \\
\hline
823543 \\
7 \\
\hline
5764801 \\
7 \\
\hline
40353607
\end{array}$$

pero teniendo en cuenta que $9=2+2+4+1$, y que, por consiguiente, $7^9=7^2.7^2.7^4.7$ podría reducirse al que sigue:

$$
\begin{array}{rl}
49 \ldots\ldots. & 7^2 \\
49 \ldots\ldots. & 7^2 \\
\hline
2401 \ldots\ldots. & 7^4 \text{ (197)} \\
9604 \ldots & \text{producto del anterior por 4 (196)} \\
4802 \ldots. & \text{mitad del anterior (198)} \\
\hline
5764801 \ldots\ldots. & 7^8 \\
\hline
40353607 \ldots\ldots. & 7^9
\end{array}
$$

Si el grado de las potencias tuviese más de una cifra, las operaciones siempre serían pesadas, por lo que es muy ventajoso tener una tabla análoga á la de la Adición y Multiplicación (35, 1.°, y 46, 1.°) que por lo menos contenga las potencias cuya base y exponente estén representados por una sola cifra, que puede ser de utilidad grandísima para abreviar la operación en este y otros muchos casos, por cuya razón la hemos formado con objeto de poder utilizarla y referirnos á ella en lo sucesivo, escribiendo en columna los nueve primeros enteros y multiplicándolos por sí mismos, así como los resultados que se van obteniendo, hasta haberlos tomado por factor nueve veces, según está indicado en la primer línea horizontal, en la que en vez de repetir la unidad se escriben los respectivos exponentes, con lo que resulta la siguiente

TABLA DE ELEVAR Á POTENCIAS

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2167	6581	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489

Según esta tabla, 7^9 sería, pues, igual al resultado anterior 40353607, y en ella pueden buscarse un gran número de potencias que á primera vista no aparecen, recordando la regla (250, 3.°) para elevar una potencia á otra, en virtud de la cual,

Si el exponente puede descomponerse en factores, puede hallarse la potencia verificando las potenciaciones parciales que ellos indiquen.

Así, en la tabla estarían

$$2^{27}=2^{3.9}=(2^3)^9=8^9=134217728; \quad 25^4=(5^2)^4=5^8=390625,$$

y otras análogas.

La regla que acabamos de dar, también puede abreviar las operaciones generales, como se ve en el siguiente

Ejemplo.—Calcular la doceava potencia de $\frac{2}{3}$.

En vez de efectuar con $\frac{2}{3}$ once multiplicaciones, diríamos:

$$12=2.2.3, \text{ luego } \left(\frac{2}{3}\right)^{12}=\left(\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^2\right)^2=\left(\left(\frac{8}{27}\right)^2\right)^2=\left(\frac{64}{729}\right)^2$$

$$=\frac{64}{729}\cdot\frac{64}{729}=\frac{4096}{531441},$$

y usando la tabla

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{12}=\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^6=\left(\frac{4}{9}\right)^6=\frac{4096}{531441}.$$

253. Igualmente se deduce de la regla para elevar un producto indicado (250, 1.°) que:

1.° *Si la base puede descomponerse en factores, se podrá encontrar la potencia, multiplicando las de igual grado de cada uno de ellos.*

Ejemplo.—Elevar 504 á la sexta potencia.

$$\begin{array}{r|l} 504 & 1 \\ 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 3 \\ 1 & 7 \end{array} \qquad \text{ó mejor} \qquad \begin{array}{r|l} 504 & 1 \\ 72 & 7 \\ 9 & 8 \\ 1 & 9 \end{array}$$

$$(504)^6=7^6.8^6.9^6$$

262144	.....	8^6
117649	.....	7^6
1572864	.....	producto por 6
1835008	.....	id. por 7
12845056	.....	id. por 49 = anterior por 7
2883584	.....	id. por 11 (194, 3.°)
30840979456		
531441	.....	9^6
30840979456		
123363917824		
123363917824		
30840979456		
1634571911168	.....	producto por 53 (197)
16390160963076096	.....	504^6

Por otra parte, es evidente que:

2.°—*Para elevar á una potencia de grado entero la unidad seguida de ceros, bastará escribir á la derecha de ésta tantos ceros como indique el producto del exponente, por el número de éstos que contenga la base, puesto que, por ejemplo:*

$$1000^4 = 1000.1000.1000.1000 = 1000000000000$$

=1 seguido de 4.3=12 ceros,
luego también se verificará,

$$36000^4 = 36^4.1000^4 = 1679616.1000^4$$

=1679616 seguido de 4.3=12 ceros;
y por lo tanto:

3.°—*Para elevar á una potencia de grado entero un número terminado en ceros, puede prescindirse de ellos, escribiendo á la derecha de la potencia que así resulte, tantos como indique el producto del exponente por el número de los que se ha prescindido.*

254. Tratándose de hallar las potencias más frecuentes, que son el *cuadrado y cubo de números representados por pocas cifras*, es también fácil calcularlas de memoria en muchas ocasiones, recordando la composición de dichas potencias (249), y *descomponiendo la base en decenas y unidades.*

Ejemplo 1.°—Encontrar el cuadrado de 308.

Cuadrado de 300, 90000; y 2.300.8=4800, 94800; y 64, 94864.

2.°—Determinar el cubo de 24.

Cubo de 20, 8000; y 3.400.4=4800, 12800; y 3.20.16=960,
13760; y 64, 13824.

Por lo demás, no necesita demostrarse que:

1.°—*Para elevar un número mixto á una potencia de grado entero, bastará darle forma de fracción y elevar los dos términos de ésta,*

y si se trata del cuadrado ó cubo.

Se le podrá descomponer en la adición de la parte entera y la fraccionaria,

para hallar el resultado mentalmente, cuando sea posible.

Respecto á las potencias aproximadas, cuando la base no pueda calcularse con exactitud, claro está que deberán hallarse por la regla general, y que:

2.°—*Para encontrar la potencia de un número aproximado en menos de una unidad de cualquier orden decimal, se aplicará la regla de Oughtred, teniendo presente el número de factores que el exponente indique.*

Ejemplos:

1.°—Encontrar el cuadrado de $6\frac{3}{4}$.

$$\left(6\frac{3}{4}\right)^2=\left(\frac{27}{4}\right)^2=\frac{27^2}{4^2}=\frac{729}{16}=45\frac{9}{16}$$

ó mejor,

Cuadrado de 6, 36, y 2.3.6=36 *cuartos* =9, 45; y $\frac{9}{16}$, $45\frac{9}{16}$.

2.°—Hallar en menos de 0'01 el cubo de 6'125 (239 y 240).

```
 6'125
   5216
--------
 36750
   6125
   12250
    30625
--------
 37'515625
    5216
--------
 2250936
   37515
    7502
    1875
--------
 229'7828
```

$(6'125)^3=$ 229'79 en menos de 0'01.

LIBRO TERCERO

NÚMEROS ENTEROS, FRACCIONARIOS

É INCONMENSURABLES

CAPÍTULO PRIMERO

RADICACIÓN

I.—Generalidades.

255. No siendo en la Potenciación indiferente el orden de los datos (247), como lo son en las otras operaciones directas, puesto que b^a y a^b, darían, en general, resultados muy distintos, aquella originará dos operaciones inversas (189), según se den la potencia y su grado, para conocer la base, ó ésta y el resultado, para determinar el exponente.

La que tiene por objeto,

Encontrar un número que elevado á determinada potencia produzca otro dado,

se llama Radicación ó *Extracción de raíces* (118, 119 y 120).

Si para seguir la misma marcha que en la operación directa, empezamos por investigar el signo que corresponderá á la raiz según el que tengan el radicando y el índice, que por ahora supondremos entero y positivo, observaremos que según las reglas deducidas en la Potenciación (247), si el índice es impar, la raiz deberá tener el mismo signo del radicando, porque solo $(+5)^3$, por ejemplo, producirá $+125$, y sólo $(-5)^3$, dará por resultado -125; que si es par y la base positiva, tanto

$(+5)^4$, como $(-5)^4$ producirán $+625$; y que si es par y la base negativa, no habrá ningún valor numérico que cumpla con la condición impuesta, ya que ni $(+5)^4$ ni $(-5)^4$ podrán dar por resultado -625.

Por esta razón,

Las raíces de índice par de los números negativos,
han recibido el nombre de IMAGINARIAS, y las *demás* el de REALES.

Expresando estas consecuencias por medio de igualdades y traduciéndolas en reglas, tendremos, por consiguiente:

$$\sqrt[2n+1]{+a} = +\sqrt[2n+1]{a} \qquad \sqrt[3]{125} = 5$$

$$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \qquad \sqrt[3]{-125} = -5$$

$$\sqrt[2n]{+a} = \pm\sqrt[2n]{a} \qquad \sqrt{25} = \pm 5$$

$$\sqrt[2n]{-a} = \textit{imaginaria} \qquad \sqrt{-25} = \textit{imaginaria}$$

1.º—*Las raíces de índice impar serán positivas ó negativas, según que el radicando sea positivo ó negativo.*

2.º—*Las raíces de índice par de los números positivos, podrán ser positivas ó negativas, por lo que deberán llevar el doble signo* $\pm$.

3.º—*Las raíces de índice par de los números negativos, serán imaginarias.*

256. Atendiendo ahora á su valor numérico solamente, deduciremos que:

1.º—*La raíz primera ó de índice* 1 *de cualquier número, será el mismo número,*

porque de $b^1=b$ (248, 1.ª), $\sqrt[1]{b}=b$.

2.º—*Las raíces de índice mayor que* 1, *serán menores, iguales ó mayores que la base, según sea ésta mayor, igual ó menor que* 1,

ya que al elevar esas raíces á la potencia indicada por el índice para producir el radicando, aumentarán en el primer caso, no variarán en el segundo y disminuirán en el tercero (248, 2.ª).

$$\sqrt[3]{125}<125;\quad \sqrt[3]{1}=1;\quad \sqrt[3]{\frac{8}{27}}>\frac{8}{27}.$$

3.º—*Las raíces de índice mayor que 1, aumentarán ó disminuirán á medida que aumente ó disminuya el radicando*, puesto que deberán producir por potenciación, un número mayor ó menor (248, 3.ª).

$$\sqrt[5]{6}<\sqrt[5]{6+2};\quad \sqrt[5]{6}>\sqrt[5]{6-2}.$$

4.º *Las raíces disminuirán ó aumentarán, á medida que aumente el índice, según que el radicando sea mayor ó menor que 1,*
en razón á que la potencia aumenta ó disminuye en estos casos (248, 4.º).

$$\sqrt[5]{6}>\sqrt[7]{6};\quad \sqrt[5]{\frac{2}{3}}<\sqrt[7]{\frac{2}{3}}.$$

Hé aqui ahora las consecuencias que relativamente á la combinación de los números con sus límites se desprenden de sus análogas de la operación directa y del objeto de la Radicación:

1.ª—*Todas las raíces de 0, serán iguales á 0.*

$$\text{De } 0^a=0 \ (248,\ 1.^{\text{o}})\ \sqrt[a]{0}=0$$

siendo a un número cualquiera.

2.ª—*Todas las raíces de ∞, serán iguales á ∞.*

$$\text{De } \infty^a=\infty \ (248,\ 2.^{\text{o}})\ \sqrt[a]{\infty}=\infty.$$

3.ª—*Las raíces de índice 0 de 1, podrán suponerse iguales á cualquier número.*

$$\text{De } a^0=1 \ (248,\ 3.^{\text{o}})\ \sqrt[0]{1}=a$$

representando a cualquier valor.

4.ª—*Las raíces de índice ∞ de ∞, ó de 0, se podrán suponer respectivamente iguales á cualquier número mayor ó menor que* 1.

$$\text{De } 3^{\infty}=\infty, \sqrt[\infty]{\infty}=3 \text{ y de } \left(\tfrac{4}{5}\right)^{\infty}=0, \sqrt[\infty]{0}=\tfrac{4}{5}\ (248,\ 4.^{\circ}).$$

5.ª—*La raíz de índice* 0 *de cualquier número, de* 0, *ó de* ∞, *podrá suponerse igual á* 0, *ó á* ∞.

$$\text{De } 0^{0}=a,\ 0^{0}=0 \text{ y } 0^{0}=\infty;\ \sqrt[0]{a}=0, \sqrt[0]{0}=0, \sqrt[0]{\infty}=0\ (248,\ 5.^{\circ}).$$

$$\text{De } \infty^{0}=a,\ \infty^{0}=0, \text{ é } \infty^{0}=\infty;\ \sqrt[0]{a}=\infty, \sqrt[0]{0}=\infty, \sqrt[0]{\infty}=\infty.$$

6.ª—*La raíz de índice* ∞ *de* 0, *ó* ∞, *será también* 0 *ó* ∞.

$$\text{De } 0^{\infty}=0, \sqrt[\infty]{0}=0 \text{ y de } \infty^{\infty}=\infty, \sqrt[\infty]{\infty}=\infty.$$

Escolio.—No nos ocupamos de las raíces que pudieran extraerse de ambos miembros de una igualdad ó desigualdad, como no lo hicimos tampoco al hablar de las potencias, porque el que sean los resultados iguales, mayores ó menores, dependerá no sólo de sus valores numéricos, sino también del signo que les corresponda, y en la práctica deberá dárseles el sentido que de ambas consideraciones se deduzca, siendo evidente, en virtud de las consecuencias deducidas, que:

Si los dos miembros de una igualdad ó desigualdad se elevan á igual potencia, ó se extrae de ellos la raíz de un mismo índice, los valores numéricos de los resultados conservarán la misma relación de magnitud.

$$\text{Si } 14=8+6,\ 14^{3}=(8+6)^{3} \text{ y } \sqrt[3]{14}=\sqrt[3]{8+6}$$

$$\text{Si } 14>5+6,\ 14^{3}>(5+6)^{3} \text{ y } \sqrt[3]{14}>\sqrt[3]{5+6}$$

$$\text{Si } 14<8+9,\ 14^{3}<(8+9)^{3} \text{ y } \sqrt[3]{14}<\sqrt[3]{8+9}$$

Corolario.—Cuando el índice sea negativo, bastará recordar las consecuencias anteriores y que $1:\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$ será mayor ó menor que 1, según que b sea mayor ó menor que a, para deducir cuál será el resultado ó la variación que sufrirá, puesto que en virtud de la misma definición deberemos tener cualesquiera que sean a y n,

$$a=\left(\sqrt[-n]{a}\right)^{-n} \quad \text{ó bien (231, 1.º)} \quad a=\frac{1}{\left(\sqrt[-n]{a}\right)^{n}}$$

de donde extrayendo la raíz n de ambos miembros, sin atender más que á su valor numérico,

$$\sqrt[n]{a}=\frac{1}{\sqrt[-n]{a}}, \quad \text{y por consiguiente,} \quad \sqrt[-n]{a}=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}; \quad \text{luego}$$

Una raíz de índice negativo, equivale á una fracción cuyo numerador sea 1 y que tenga por denominador la misma raíz, de índice positivo.

$$\sqrt[-3]{125}=\frac{1}{\sqrt[3]{125}}=\frac{1}{5}.$$

II.—Operaciones derivadas.

257. Como la mayoría de las raíces son INCONMENSURABLES (13), porque, según sabemos (139), si la raíz de un número fraccionario no tiene esta forma, tampoco podrá ser entera, y la de un entero que no la tenga exacta no podrá ser evidentemente fraccionaria, puesto que estos números elevados á cualquier potencia siempre producirán otros de igual forma, no nos hemos ocupado hasta aquí de la *combinación de raíces indicadas*, por lo cual nos vemos ahora obligados á estudiar dos diferentes clases de operaciones derivadas: las que realmente se derivan de tener que extraer la *raíz de otra combinación indicada* y las que se refieren á las *combinaciones de raíces por extraer*.

Pueden tener entre las primeras, forma de operación indicada, el radicando ó el exponente; y debemos advertir desde luego, que si se trata de combinaciones numéricas aditivas ó sustractivas, siempre debe empezarse en la práctica por efectuarlas, ya que en cualquiera de estos casos no es en general posible transformarlas en expresiones más sencillas.

Respecto á aquellos en que se trate de un producto, cociente, potencia ó raíz indicada, tendremos que:

1.°—*La raíz de índice entero de un producto indicado es igual al producto de las raíces del mismo índice de cada uno de los factores.*

En efecto; la raíz de índice ± 5 de abc, por ejemplo, cualquiera que sea, elevada á la potencia ± 5, debe producirnos el radicando abc según la definición de raíz; pero la potencia de grado ± 5 de un producto, sean cuales sean los factores, es igual al producto de las potencias del mismo grado de éstos (250, 1.°); luego habremos encontrado la raíz pedida, calculando tres números que elevados á la potencia ± 5 produzcan respectivamente a, b y c, y multiplicándolos entre sí, y como esos números sólo podrán ser

$$\sqrt[\pm 5]{a},\ \sqrt[\pm 5]{b},\ \sqrt[\pm 5]{c},\quad \text{resultará que:}$$

$$\sqrt[\pm 5]{abc}=\sqrt[\pm 5]{a}\ .\sqrt[\pm 5]{b}\ .\ \sqrt[\pm 5]{c}$$

conforme al enunciado.

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{8.27.64}=\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{27}\sqrt[3]{64}=2.3.4=24$$

$$\sqrt[-2]{25.64.9}=\sqrt[-2]{25}\sqrt[-2]{64}\sqrt[-2]{9}=\frac{1}{\sqrt{25}}\cdot\frac{1}{\sqrt{64}}\cdot\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{120}.$$

2.°—*La raíz de índice entero de una potencia indicada de grado también entero, es igual á la que resulta de elevar la base al cociente de dividir el exponente por el índice.*

Efectivamente; si a es un número cualquiera y m y n dos enteros $\sqrt[n]{a^m}$, deberá ser un número que elevado á la potencia n produzca a^m, según la definición de raíz; y como para elevar una potencia indicada á otra (250, 3.°) hay que multiplicar los exponentes, si queremos escribir esa raíz en forma de potencia cuya base sea a y cuyo grado multiplicado por n, produzca m, claro está que ese grado no podrá ser otro que $m:n$, según la definición de cociente; luego

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$$

lo cual, además, nos enseña que:

3.°—*La potencia de grado fraccionario de cualquier número, es igual á la raíz cuyo índice sea el denominador de la base elevada á la potencia del grado que indique su numerador.*

Ejemplo:

$$\sqrt{7^6}=7^{\frac{6}{2}}=7^3=343.$$

De esta equivalencia de los números afectados de exponentes fraccionarios, se desprenden dos consecuencias relativas á la combinación de la unidad con el límite superior de los números, que completan las enunciadas anteriormente (248 y 256).

En efecto; siendo $\frac{1}{\infty}=0$ (199, 4.°) $\sqrt[\infty]{a}=a^{\frac{1}{\infty}}=a^0=1$, para lo cual es preciso admitir que si bien todas las potencias numéricas de 1 son iguales á la unidad, $1^\infty=a$; luego

4.°—*La potencia de grado* ∞ *de* 1, *podrá suponerse igual á un número cualquiera.*

5.°—*La raíz de índice* ∞ *de cualquier número será igual á* 1.

Escolio.—Por no ser las potencias de grado fraccionario más que raíces indicadas escritas en otra forma, es por lo que hasta aquí hemos supuesto enteros los exponentes.

Corolario.—De las proposiciones demostradas se deduce también que:

$$(abc)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(abc)^m}=\sqrt[n]{a^m.b^m.c^m}=\sqrt[n]{a^m}.\sqrt[n]{b^m}.\sqrt[n]{c^m}=a^{\frac{m}{n}}.b^{\frac{m}{n}}.c^{\frac{m}{n}};$$

luego la regla dada para elevar un producto á una potencia de grado entero (250, 1.°) es igualmente aplicable al caso en que el exponente sea fraccionario, y también lo será, por consiguiente, la que de un modo directo hemos deducido de ella referente á la raíz de un producto, es decir, que:

$$\sqrt[\frac{m}{n}]{abc}=\sqrt[\frac{m}{n}]{a}.\sqrt[\frac{m}{n}]{b}.\sqrt[\frac{m}{n}]{c}$$

sean todos estos números positivos ó negativos.

EJEMPLOS:

$$(4.6.5)^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{2}{3}}.6^{\frac{2}{3}}.5^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{4^2}.\sqrt[3]{6^2}.\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[3]{16}\sqrt[3]{36}\sqrt[3]{25}$$

$$\sqrt[\frac{2}{3}]{4.6.5}=\sqrt[\frac{2}{3}]{4}\ \sqrt[\frac{2}{3}]{6}\ \sqrt[\frac{2}{3}]{5}$$

258.—Consideremos ahora los cocientes indicados, ó fracciones.

Si tratamos de extraer la raíz $\pm n$ de $\frac{a}{b}$, siendo n entero y a y b números cualesquiera, tendremos que buscar un número que elevado á $\pm n$ produzca $\frac{a}{b}$, y como para elevar una fracción á $\pm n$ (250, 2.°) deberemos elevar sus dos términos, claro está que éstos no podrán ser más que $\sqrt[\pm n]{a}$ y $\sqrt[\pm n]{b}$, luego

$$\sqrt[\pm n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[\pm n]{a}}{\sqrt[\pm n]{b}}$$

EJEMPLO:

$$\sqrt[-3]{\frac{8}{125}}=\frac{\sqrt[-3]{8}}{\sqrt[-3]{125}}=\frac{1}{\sqrt[3]{8}}:\frac{1}{\sqrt[3]{125}}=\frac{1}{2}:\frac{1}{5}=\frac{5}{2}=2'5.$$

En el caso de ser fraccionario el índice, se verificará (257, 2.°):

$\left(\sqrt[\frac{m}{n}]{\frac{a}{b}}\right)^{\frac{m}{n}}=\frac{a}{b}$, de donde elevando ambos miembros á la potencia de grado entero n (250, 3.°),

$\left(\sqrt[\frac{m}{n}]{\frac{a}{b}}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ y extrayendo la raíz de índice m,

$$\sqrt[\frac{m}{n}]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{\left(\frac{b}{a}\right)^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{m}},$$ lo cual nos enseña que:

1.º—*La raíz de índice fraccionario de un número, es igual á la potencia cuyo grado sea la fracción invertida y recíprocamente,*

y como por otra parte, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, también

$$\sqrt[\frac{m}{n}]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{a^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}} = \frac{\sqrt[\frac{m}{n}]{a}}{\sqrt[\frac{m}{n}]{b}}$$

por consiguiente, la regla por la cual se eleva un cociente indicado á una potencia (250, 2.º) es completamente general y además queda demostrado que:

2.º—*Para extrar la raíz de un cociente indicado ó fracción, se extrae la del numerador y la del denominador, cualquiera que sea el índice.*

Ocupémonos ya de la combinación de raíces indicadas.

Ejemplos:

$$\sqrt[\frac{2}{3}]{-7} = (-7)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(-7)^3} = \sqrt{-343}$$

$$\sqrt[-\frac{2}{3}]{\frac{4}{5}} = \frac{\sqrt[-\frac{2}{3}]{4}}{\sqrt[\frac{2}{3}]{5}} = \frac{1}{\sqrt[\frac{2}{3}]{4}} : \frac{1}{\sqrt[\frac{2}{3}]{5}} = \frac{1}{\sqrt{4^3}} : \frac{1}{\sqrt{5^3}} = \frac{1}{\sqrt{64}} : \frac{1}{\sqrt{125}} = \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{64}}$$

III.—Cálculo de radicales.

259. Todas las raíces indicadas reciben el nombre de RADICALES, y los conocimientos hasta aquí adquiridos proporcionan medios de simplificarlos cuando es posible y reducirlos siempre á un índice común, á semejanza de lo que se hace con las fracciones, porque de la regla dada para extraer la raíz de un producto indicado (257) es consecuencia inmediata que:

1.º—*Si el radicando puede descomponerse en factores de modo que alguno de ellos sea potencia exacta de un grado por lo menos igual al índice del radical, podrán sacarse fuera del signo las raíces de las potencias cuyo grado sea igual al índice.*

Supongamos, en efecto, que se tenga $\sqrt[n]{A}$, y que descompuesto A en factores, resulte $A=a^n b^{n+p} c^{nq} d$. Entonces se verificará (250, 3.º, y 257, 2.º):

$$\sqrt[n]{A}=\sqrt[n]{a^n b^{n+p} c^{nq} d}=\sqrt[n]{a^n b^n b^p (c^q)^n d}=\sqrt[n]{a^n b^n (c^q)^n b^p d}$$

$$=\sqrt[n]{(abc^q)^n b^p d}\ .\ \sqrt[n]{(abc^q)^n}\ .\ \sqrt[n]{b^p d}=abc^q\sqrt[n]{b^p d}$$

lo cual demuestra la verdad de la proposición.

COROLARIO.—Puesto que según acabamos de demostrar,

$$abc^q\sqrt[n]{b^p d}=\sqrt[n]{(abc^q)^n b^p d}$$

Todo número que multiplique á un radical puede ponerse bajo el signo, con tal que se eleve á la potencia cuyo grado sea igual al índice.

EJEMPLOS:

$$\sqrt[4]{2^4.3^5.7^8.9}=2.3.7^2\sqrt{3.9}=294\sqrt{27}$$

$$294\sqrt[4]{27}=6.49\sqrt[4]{27}=49\sqrt[4]{6^4.27}=49\sqrt[4]{1296.27}=49\sqrt[4]{34992}.$$

Además, si se recuerda la propiedad más conocida de las fracciones (58), se verá que:

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}=\begin{cases} a^{\frac{mp}{np}}=\sqrt[np]{a^{mp}} \\ a^{\frac{m:p}{n:p}}=\sqrt[n:p]{a^{m:p}} \end{cases} \qquad \sqrt[4]{7^6}=7^{\frac{6}{4}}=\begin{cases} 7^{\frac{6.2}{4.2}}=7^{\frac{12}{8}}=\sqrt[8]{7^{12}} \\ 7^{\frac{6:2}{4:2}}=7^{\frac{3}{2}}=\sqrt{7^3} \end{cases}$$

por consiguiente:

2.°—*El valor de un radical no varía, aunque el índice y el exponente del radicando se multipliquen ó dividan por un mismo número.*

Corolario 1.°—Combinando las dos simplificaciones indicadas por ambos teoremas, podemos deducir que:

Para simplificar un radical se descomponen en sus factores primos el índice y el radicando, se suprimen los que sean comunes á aquél y á los exponentes y se sacan fuera del signo las raíces de los que las tengan exactas y de cuantas potencias de esta clase estén contenidas en los restantes.

2.°—*Para reducir radicales á un mismo índice bastará encontrar un múltiplo cualquiera de todos los índices, que será el común, y podrá formarse con el producto de ellos, multiplicando el exponente ó exponentes de cada radicando por el cociente de dividir ese múltiplo por el índice correspondiente*, ó por los índices de los demás si el común se ha formado con el producto de todos ellos;

Pues de este modo el índice y exponentes de cada radical se multiplican por el mismo número, con lo que no se alteran sus valores.

3.°—*Para reducir radicales al menor índice común posible, se tomará por índice común el* m.c.m. *de todos los índices, después de simplificarlos.*

Ejemplo 1.°—Simplificar el radical $\sqrt[12]{6914599245877248}$.

Descomponiendo el radicando en sus factores primos, hallaremos:

6914599245877248	1
3457299622938624	2
1728649811469312	2
864324905734656	2
432162452867328	2
216081226433664	2
108040613216832	2
54020306608416	2
27010153304208	2
13505076652104	2
6752538326052	2
3376269163026	2
1688134581513	2
562711527171	3
187570509057	3
62523503019	3
20841167673	3
6947055891	3
2315685297	3
771895099	3
257298363	3
85766121	3
28588707	3
9529569	3
3176523	3
1058841	3
352947	3
117649	3
16807	7
2401	7
343	7
49	7
7	7
1	7

$$6914599245877248=2^{12}.3^{15}.7^{6}$$

y como el índice $12=2^2.3$ y los exponentes, son divisibles por 3, resultará simplificando:

$$\sqrt[12]{6914599245877248}=\sqrt[12]{2^{12}.3^{15}.7^{6}}=\sqrt[4]{2^{4}.3^{5}.7^{2}}$$
$$=2.3\sqrt[4]{3.7^{2}}=6\sqrt[4]{147}.$$

2.°—Reducir á un común índice los radicales

$$\sqrt[5]{11},\ \sqrt[4]{7^{3}}\ \text{y}\ \sqrt[25]{3^{2}}.$$

$$\sqrt[5]{11}=\sqrt[5.4.25]{11^{4.25}}=\sqrt[500]{11^{100}};\quad \sqrt[4]{7^3}=\sqrt[4.5.25]{7^{3.5.25}}=\sqrt[500]{7^{375}};$$

$$\sqrt[25]{3^2}=\sqrt[25.5.4]{3^{2.5.4}}=\sqrt[500]{3^{40}}.$$

3.°—Reducir los mismos radicales al menor índice común.

$$m.c.m.\left\{\begin{array}{l|l}5 & 5\\ 4 & 2^2\\ 25 & 5^2\end{array}\right\}=2^2.5^2=100;\quad \sqrt[5]{11}=\sqrt[100]{11^{4.5}}=\sqrt[100]{11^{20}};$$

$$\sqrt[4]{7^3}=\sqrt[100]{7^{3.25}}=\sqrt[100]{7^{75}};\quad \sqrt[25]{3^2}=\sqrt[100]{3^{2.4}}=\sqrt[100]{3^8}.$$

4.°—Reducir al menor índice común los radicales

$$\sqrt[6]{250047}\ \text{ y }\ \sqrt[4]{30625}.$$

Como éstos pueden simplificarse empezaremos por reducirlos á su expresión más sencilla, con lo que en este caso se evitará la transformación pedida.

250047	1
83349	3
27783	3
9261	3
3087	3
1029	3
343	3
49	7
7	7
1	7

30625	1
6125	5
1225	5
245	5
49	5
7	7
1	7

$$\sqrt[6]{250047}=\sqrt[6]{3^6.7^3}=3\sqrt{7}$$

$$\sqrt[4]{30625}=\sqrt[4]{5^4 7^2}=5\sqrt{7}.$$

260. *Los radicales que después de simplificados tienen el mismo índice y radicando,* aunque estén multiplicados por diferentes factores y tengan distinto signo, son SEMEJANTES, y al combinarse por suma ó resta puede hacerse sufrir á la expresión total una

Transformación por cuyo medio se expresa el resultado por un solo término, llamada REDUCCIÓN.

En efecto; sabemos que, por ejemplo (190, Esc.),

$$3\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{a}-7\sqrt[n]{a}=(3+1-7)\sqrt[n]{a}=-3\sqrt[n]{a},$$

ó lo que es lo mismo, que:

Para reducir radicales semejantes combinados por adición y sustracción, se sacan factor común y se efectúan las operaciones indicadas en la combinación que los multiplique.

COROLARIO.—*Para simplificar una expresión cualquiera en que entren radicales, se simplifican éstos y se hace la reducción de los que resulten semejantes.*

EJEMPLO.—Simplificar la expresión

$$\sqrt{5}+\sqrt[3]{56}-\sqrt[4]{2025}+\sqrt[6]{35721}-\sqrt[6]{117649}$$

$$\begin{array}{r|l} 56 & 1 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 2 \\ 1 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2025 & 1 \\ 675 & 3 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 35721 & 1 \\ 11907 & 3 \\ 3969 & 3 \\ 1323 & 3 \\ 441 & 3 \\ 147 & 3 \\ 49 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 117649 & 1 \\ 16807 & 7 \\ 2401 & 7 \\ 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & 7 \end{array}$$

$$\sqrt{5}+\sqrt[3]{56}-\sqrt[4]{2025}+\sqrt[6]{35721}-\sqrt[6]{117649}$$

$$=\sqrt{5}+\sqrt[3]{2^3.7}-\sqrt[4]{3^4.5^2}+\sqrt[6]{3^6.7^2}-\sqrt[6]{7^6}$$

$$=\sqrt{5}+2\sqrt[3]{7}-3\sqrt{5}+3\sqrt[3]{7}-7=-7-2\sqrt{5}+5\sqrt[3]{7}$$

261. Tratemos ahora de multiplicar los radicales:

$$\sqrt[m]{a},\ \sqrt[p]{b},\ \sqrt[r]{c}.$$

Indicando el producto y reduciendo los radicales á un común índice, tendremos:

$$\sqrt[m]{a}\,.\sqrt[p]{b}\,.\sqrt[r]{c}=\sqrt[mpr]{a^{pr}}\,.\sqrt[mpr]{b^{mr}}\,.\sqrt[mpr]{c^{mp}}=\sqrt[mpr]{a^{pr}.b^{mr}.c^{mp}}.$$

por consiguiente:

1.°—*Para multiplicar varios radicales, basta reducirlos á un común índice, si no lo tienen, y extraer la raíz de dicho índice del producto de los radicandos.*

Ejemplo.—Multiplicar las radicales $\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{5}$ y $\sqrt[6]{7}$.

$$\sqrt{6}.\sqrt[3]{5}.\sqrt[6]{7}=\sqrt[6]{216}.\sqrt[6]{25}.\sqrt[6]{7}=\sqrt[6]{216.25.7}=\sqrt[6]{37800}.$$

Corolario.—Transformando en radicales las potencias fraccionarias de una misma base, se tendría:

$$a^{\frac{m}{n}}.a^{\frac{p}{q}}.a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[n]{a^m}.\sqrt[q]{a^p}.\sqrt[s]{a^r}=\sqrt[nqs]{a^{mqs}}.\sqrt[qns]{a^{pns}}.\sqrt[snq]{a^{rnq}}$$

$$=\sqrt[nqs]{a^{mqs}.a^{pns}.a^{rnq}}=\sqrt[nqs]{a^{mqs+pns+rnq}}$$

$$=a^{\frac{mqs+pns+rnq}{nqs}}=a^{\frac{mqs}{nqs}+\frac{pns}{nqs}+\frac{rnq}{nqs}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$$

lo mismo que cuando los exponentes son enteros (192, 2.°, y 231, 2.°).

Una cosa análoga deberá hacerse en la División.

Efectivamente; si el dividendo fuese, por ejemplo, $\sqrt[m]{a}$ y el divisor $\sqrt[p]{b}$, indicando la operación y reduciéndolos á un común índice, resultaría,

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[p]{b}}=\frac{\sqrt[mp]{a^p}}{\sqrt[mp]{b^m}}=\sqrt[mp]{\frac{a^p}{b^m}}$$

de donde se deduce que:

2.°—*Para dividir dos radicales, basta reducirlos á un común* *indice, si no lo tienen, y extraer la raíz de dicho indice del cociente de los radicandos.*

EJEMPLO.—Dividir $3\sqrt{2}$, por $5\sqrt[5]{4}$.

$$\frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt[5]{4}}=\frac{3\sqrt[10]{32}}{5\sqrt[10]{16}}=\frac{3}{5}\sqrt[10]{\frac{32}{16}}=\frac{3}{5}\sqrt[10]{2}$$

COROLARIO.—De la misma manera que en el caso anterior, tendremos:

$$1.^{\circ}\quad \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}}=\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}}=\frac{\sqrt[nq]{a^{mq}}}{\sqrt[nq]{a^{pn}}}=\sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{pn}}}=\sqrt[nq]{a^{mq-pn}}$$

$$=a^{\frac{mq-pn}{nq}}=a^{\frac{mq}{nq}-\frac{pn}{nq}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}};$$

luego también las reglas para dividir potencias de una misma base (202, 3.°, y 231, 2.°) son aplicables á las de grado fraccionario.

$$\frac{7^{\frac{2}{3}}}{7^{\frac{4}{9}}}=7^{\frac{2}{3}-\frac{4}{9}}=7^{\frac{2}{9}}=\sqrt[9]{49}.$$

262. Supongamos ahora que $\sqrt[n]{a}$ deba elevarse á la potencia de grado entero m.

Si m es entero y positivo (117, 1.ª, y 192, 2.°):

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a}\ldots m \text{ veces}=\sqrt[n]{a.a.a\ldots m \text{ veces}}=\sqrt[n]{a^m}$$

Si es entero y negativo (231, 1.°, y Cor.):

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^{m}}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{-m}{n}} = \sqrt[n]{a^{-m}};$$

luego en cualquier caso:

1.°—*Para elevar un radical á una potencia, se eleva el radicando, conservando el mismo índice.*

Ejemplos:

$$\left(\sqrt[-4]{8}\right)^{2} = \sqrt[-4]{8^{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{64}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\left(\sqrt[\frac{2}{3}]{8}\right)^{-4} = \sqrt[\frac{2}{3}]{8^{-4}} = \sqrt{(8^{-4})^{3}} = \sqrt{8^{-12}} = \frac{1}{\sqrt{8^{12}}}$$

Corolario.—Las reglas para elevar á una potencia ó extraer la raíz de otra potencia indicada, así como la anterior, serán también aplicables á los casos en que el exponente ó índice (250, 3.°, y 257, 2.°) sean fraccionarios, puesto que:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{p}} = \sqrt[q]{a^{\frac{mp}{n}}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$$

(258, (1.°) $\sqrt[\frac{m}{n}]{a^{\frac{p}{q}}} = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{pn}{qm}} = a^{\frac{p}{q}:\frac{m}{n}}$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{\frac{m}{p}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{m}{p}} = a^{\frac{1}{n}\cdot\frac{m}{p}} = a^{\frac{m}{p}\cdot\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{m}{p}}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^{\frac{m}{p}}}$$

Ejemplos:

$$\left(6^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{5}} = 6^{\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}} = 6^{\frac{8}{15}} = \sqrt[15]{6^{8}}$$

$$\sqrt[\frac{2}{3}]{6^{\frac{4}{5}}}=6^{\frac{4}{5}:\frac{2}{3}}=6^{\frac{6}{5}}=\sqrt[5]{6^6}$$

$$\left(\sqrt[-3]{6}\right)^{\frac{4}{5}}=\sqrt[-3]{6^{\frac{4}{5}}}=6^{\frac{4}{5}:-3}=6^{-\frac{4}{15}}=\frac{1}{6^{\frac{4}{15}}}=\frac{1}{\sqrt[15]{6^4}}$$

Réstanos estudiar la raíz de otra raíz indicada.

Cualesquiera que sean los índices m y n y el número a, deberemos tener por la definición de raíz,

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^n=\sqrt[m]{a}$$

de donde elevando ambos miembros á la potencia m, sin atender más que á sus valores numéricos (256, Esc.)

$$\left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^n\right)^m=\left(\sqrt[m]{a}\right)^m$$

ó lo que es lo mismo (250, 3.°, y Cor. último)

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{nm}=a$$

y extrayendo la raíz mn de ambos miembros,

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$$

y como demostrado para dos, resultaría para mayor número de índices,

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}}}=\sqrt[n]{\sqrt[mp]{a}}=\sqrt[nmp]{a}$$

2.°—*La raiz de otra raiz indicada es igual, á la que resulta de extraer del radicando la expresada por el producto de los índices,*

ó en otros términos,

3.°—*La raiz cuyo índice sea un producto indicado, es igual á las raíces sucesivas del mismo radicando, expresadas por cada uno de los factores.*

Corolario.—*Si el índice fuera una potencia indicada, la raiz sería igual, á tantas sucesivas del radicando cuyo índice fuera igual á la base, como expresara el exponente,* puesto que, por ejemplo:

$$\sqrt[n^3]{a} = \sqrt[n.n.n]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}}}$$

(En el párrafo 267, Esc., pueden verse ejemplos).

263. Demostradas para los exponentes é índices negativos ó fraccionarios, pero siempre conmensurables, todas las reglas que se pueden aplicar á los casos en que sean enteros y positivos, fáltanos todavía saber, para estar seguros de su completa generalidad, si serán ó no ciertas, aun cuando aquéllos sean radicales cuyo resultado final se ignore, ó se sepa ha de ser inconmensurable.

Para convencernos de que lo son efectivamente, recordaremos que los números inconmensurables no son más que los límites de los conmensurables (166), que se irán acercando á ellos á medida que se haga el cálculo con menos error, siempre que éste pueda ser tan pequeño como se quiera.

Veamos, pues, si una raíz cualquiera que deba ser, podrá aproximarse á la verdadera en menos de una parte alícuota de la unidad $\frac{1}{n}$, que decrecerá indefinidamente á medida que aumentemos el arbitrario valor de n hasta aproximarnos cuanto queramos á $\frac{1}{\infty}=0$ (199, 4.°).

Es evidente que:

$$\sqrt[m]{a}=\frac{n\sqrt[m]{a}}{n}=\frac{\sqrt[m]{a.n^m}}{n} \quad (259,\ 1.^{\circ},\ \text{Cor.}),$$

de modo que llamando r al mayor número entero que elevado á la potencia de grado n resulte contenido en el producto $a.n^m$, cuya raíz exacta, si r no lo es, estará comprendida entre r y $r+1$, tendremos que el verdadero valor de $\sqrt[m]{a}$ lo estará entre $\frac{r}{n}$ y $\frac{r+1}{n}$ que se diferencian en $\frac{1}{n}$, por lo que el error que se cometa al tomar por raíz esas fracciones, no llegará al límite fijado.

Por consiguiente:

1.° *La raíz de cualquier índice de un número puede extraerse en menos de una parte alícuota de la unidad, multiplicando dicho número por la potencia del denominador expresada por el índice, extrayendo la raíz del producto en menos de una unidad entera, y poniéndole por denominador el de la parte alícuota.*

Ejemplo.—Extraer en menos de $\frac{1}{5}$ la $\sqrt{2}$.

$$2.25=50 \quad \sqrt{50}=7 \text{ en menos de } 1.$$

$$\sqrt{2}=\frac{7}{5}=1\tfrac{2}{5}=1'4 \text{ en menos de } \frac{1}{5}=0'2.$$

No siendo, pues, los inconmensurables que provienen de las radicaciones inexactas, más que límites de los conmensurables que se irán acercando á ellos á medida que los calculemos con más aproximación para obtener un resultado menos erróneo,

Cualquier combinación indicada con radicales, será el límite de las que se obtengan poniendo en su lugar valores cada vez más aproximados.

Si, por ejemplo, tuviésemos $(abc)^{\sqrt[n]{m}}$ y m', m'', m''', etcétera, fueran valores cada vez más aproximados á $\sqrt[n]{m}$, se verificaría según sabemos:

$$(abc)^{m'} = a^{m'} . b^{m'} . c^{m'}$$

$$(abc)^{m''} = a^{m''} . b^{m''} . c^{m''}$$

$$(abc)^{m'''} = a^{m'''} . b^{m'''} . c^{m'''}$$

. . . .

. . . .

y, por lo tanto, $$(abc)^{\sqrt[n]{m}} = a^{\sqrt[n]{m}} . b^{\sqrt[n]{m}} . c^{\sqrt[n]{m}}$$

siempre que demostremos el siguiente

TEOREMA DE LOS LÍMITES.—*Si dos cantidades variables, en sus distintas variaciones permanecen constantemente iguales, sus límites también lo serán,*

el cual es casi evidente, porque si continuando con el ejemplo, llamamos L al límite de $(abc)^{m'}$ y l al de $a^{m'}.b^{m'}.c^{m'}$, tendremos $L=l$, ya que si uno de ellos L pudiera ser mayor que el otro l suponiendo son límites superiores, como el segundo miembro de las igualdades nunca llegará á valer l, el primero, que permanece constantemente igual á él, no podría acercarse al valor de $L>l$ tanto como se quisiera, y L no sería tal límite.

Si observamos ahora que la demostración anterior sería igualmente aplicable á todas las demás combinaciones, y aunque en lugar de radicales se tratara de números inconmensurables cualesquiera, podemos deducir que:

2.°—*Todas las reglas de carácter general demostradas para las combinaciones de números conmensurables, serán igualmente ciertas para operar con inconmensurables.*

EJEMPLOS:

$$7^{0'5} . 7^{-3} . 7^{\sqrt{2}} = 7^{0'5-3+\sqrt{2}} = 7^{2'5+\sqrt{2}}$$

$$\frac{7^{\sqrt{2}}}{7^{-3}} = 7^{\sqrt{2}-(-3)} = 7^{3+\sqrt{2}}$$

$$\left(7^{-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt[4]{3}}=7^{-\sqrt{2}\,\sqrt[4]{3}}=7^{-\sqrt[4]{12}}=\frac{1}{7^{\sqrt[4]{12}}}$$

264. Antes de entrar en los detalles prácticos y para que en el Cálculo no pueda presentarse ninguna duda, haremos aún notar que si bien como resultado final aritmético, no se puede asignar ningún valor á las raíces de índice par de los números negativos (255, 3.°), podemos, no obstante, antes de llegar á ese resultado, vernos obligados á operar con raíces indicadas de la forma

$$\sqrt[2n]{-a}=\sqrt[2n]{(+a)(-1)}=\sqrt[2n]{a}\,.\,\sqrt[2n]{-1}=\sqrt[2n]{a}\,\sqrt[n]{\sqrt{-1}},$$

aplicándoles *las mismas reglas que á las cantidades reales*, pero teniendo presente que $\sqrt{-1}$ no es un verdadero radical, en razón á que representa una imposibilidad numérica, sino

Un signo que indica es imaginaria la expresión en que entra,

y que sólo podrá desaparecer cuando con él se verifiquen dos operaciones contrarias; pues en este caso, sea lo que sea un símbolo cualquiera, y represente lo que represente, ó las operaciones directas no llenarían su objeto y las inversas dejarían de serlo, ó es preciso que siempre, sin excepción, minuendo y sustraendo iguales den por resultado 0; dividendo y divisor iguales, cociente 1; y grado de la potencia é índice de la raiz iguales, resultado igual al radicando.

Así, pues, para los efectos del Cálculo deberán ser

$$\sqrt{-1}-\sqrt{-1}=0;\quad \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}=1 \quad \text{y} \quad \left(\sqrt{-1}\right)^2=-1;$$

siendo evidente que la suma ó diferencia de valores imaginarios en su totalidad serán imaginarias, á no ser iguales minuendo y sustraendo; pero siempre igual al conjunto de unidades imaginarias que representen, ó al exceso de las unas sobre las otras, por lo que

$$a\sqrt{-1}-b\sqrt{-1}+c\sqrt{-1}=(a-b+c)\sqrt{-1};$$

por consiguiente,

El signo $\sqrt{-1}$, *y en general todas las raices pares de números negativos, cuando entren en alguna combinación aritmética, podrán sacarse factor común y suprimirse por diferencia, ó por entrar como factor en los dos términos de un cociente indicado, pudiendo también desaparecer por potenciación, pero nunca deberán considerarse como radicales,*
porque el aplicarle las reglas deducidas para éstos, podría conducir á graves errores, como sucedería si escribiésemos

$$(\sqrt{-a})^2=\sqrt{-a}.\sqrt{-a}=\sqrt{(-a)(-a)}=\sqrt{+a^2}=+a,$$

cuando sabemos, por la misma definición de raíz, que forzosamente $(\sqrt{-a})^2=-a$.

Para no exponernos á ellos, deberemos, por lo tanto, poner siempre de manifiesto el signo $\sqrt{-1}$, según hemos hecho en la primera igualdad, y recordar que en virtud de la definición de Elevar á potencias y de Dividir (248, 3.°)

$$(\sqrt{-1})^0=+1$$
$$(\sqrt{-1})^1=+\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^2=-1$$
$$(\sqrt{-1})^3=(\sqrt{-1})^2\sqrt{-1}=-1.\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^4=(\sqrt{-1})^3\sqrt{-1}=(-\sqrt{-1})(\sqrt{-1})=-(\sqrt{-1})^2=-(-1)=+1,$$

etc.

potencias que evidentemente se irán repitiendo, lo cual puede expresarse en términos generales, recordando que cualquier número se podrá representar por $4n$, $4n+1$, $4n+2$, ó $4n+3$, si llamamos n al cociente de dividirlo por 4, que sólo producirá los restos 0, 1, 2 y 3, siendo siempre el dividendo igual al producto del divisor por el cociente, más el resto, y escribiendo

$$(\sqrt{-1})^{4n} \quad = +1$$

$$(\sqrt{-1})^{4n+1} = +\sqrt{-1}$$

$$(\sqrt{-1})^{4n+2} = -1$$

$$(\sqrt{-1})^{4n+3} = -\sqrt{-1}$$

Ejemplos. 1.°—Sumar los números 3, $\sqrt{-64}$ y $-2\sqrt{-9}$.

$$3+\sqrt{-64}-2\sqrt{-9}=3+8\sqrt{-1}-2.3\sqrt{-1}$$
$$=3+(8-6)\sqrt{-1}=3+2\sqrt{-1}$$

2.°—Multiplicar las expresiones $3+2\sqrt{-1}$ y $4-5\sqrt{-1}$. (191, 1.°)

$$(3+2\sqrt{-1})\,(4-5\sqrt{-1})$$

$$=3.4+2.4\sqrt{-1}-3.5\sqrt{-1}-2.5(\sqrt{-1})^2$$

$$=12+(8-15)\sqrt{-1}-10(-1)^2=12-7\sqrt{-1}+10=22-7\sqrt{-1}.$$

3.°—Dividir $4-5\sqrt{-1}$ por $-2\sqrt{-1}$, expresando el cociente en forma entera (201, 1.°).

$$\frac{4-5\sqrt{-1}}{-2\sqrt{-1}}=\frac{4}{-2\sqrt{-1}}-\frac{5\sqrt{-1}}{-2\sqrt{-1}}=-\frac{2}{\sqrt{-1}}-\frac{5}{-2}$$

$$=-\frac{2\sqrt{-1}}{(\sqrt{-1})^2}-\left(-2\tfrac{1}{2}\right)=-\frac{2\sqrt{-1}}{-1}+2\tfrac{1}{2}$$

$$=2\tfrac{1}{2}-(-2\sqrt{-1})=2\tfrac{1}{2}.+2\sqrt{-1}.$$

4.°—Elevar al cubo $3+2\sqrt{-1}$. (249, 2.°)

$$(3+2\sqrt{-1})^3=3^3+3.3^2.2\sqrt{-1}+3.3(2\sqrt{-1})^2+(2\sqrt{-1})^3$$
$$=27+54\sqrt{-1}+36(-1)+(-8\sqrt{-1})=-9+46\sqrt{-1}.$$

5.°—Extraer la raíz cúbica de $\sqrt{-64}$. (255, 1.°, y 262, 2.°)

$$\sqrt[3]{-\sqrt{-64}}=\sqrt[3]{-\sqrt{-8^2}}=-\sqrt[3]{8\sqrt{-1}}=-2\sqrt[3]{\sqrt{-1}}$$

CAPÍTULO II

RAÍCES CUADRADA Y CÚBICA.

I.—Raíces enteras.

265. Pronto conoceremos un medio muy sencillo de extraer toda clase de raíces numéricas, por lo que solo consideraremos ahora los casos particulares en que tengan por índice 2 ó 3, únicas que en las cuestiones prácticas concretas pueden conducir á resultados directos, es decir, para obtener los cuales no haya necesidad de otras operaciones, y únicas que por esta razón y por la dificultad de las reglas que en otros casos se deberían emplear, es costumbre obtener directamente.

Una sola es en su esencia la que se acostumbra seguir en la práctica para determinar la raíz cuadrada de los enteros (122); pero la disposición del cálculo da origen á tres procedimientos distintos.

En efecto; dicha regla se funda en que, según la definición de raíz cuadrada (121),

El radicando debe ser siempre igual al cuadrado de su raíz entera más el residuo,

por lo que suponiendo á la raíz descompuesta en sus decenas $a.10$, más sus unidades b, si llamamos a y b á sus respectivos valores, tendremos, representando por N y R el radicando y residuo,

$$N=(a.10+b)^2+R=a^2.100+2a.10.b+b^2+R$$

según las reglas para elevar al cuadrado una suma y un producto indicados (249, 1.°, y 250, 1.°).

Determinadas, pues, las decenas a de la raíz, extrayendo la raíz cuadrada de las centenas del número N y restado su cuadrado de esas centenas después de suponer dos ceros á su derecha, se obtiene por diferencia, que llamaremos D,

$$D=2a.10.b+b^2+R,$$

cuyo primer término dividido por $2a$, después de prescindir de su última cifra, lo que equivale á dividir por 10 los dos términos de la división (201, 3.º), produce la cifra *b*, ó una mayor, si el número de decenas contenidas en b^2+R forman un número mayor que el divisor.

Hasta aquí lo que tienen común los tres procedimientos, que sólo se diferencian en la marcha que puede seguirse para comprobar el valor del cociente y encontrar el del residuo.

Esta comprobación puede hacerse:

1.º—*Restando del radicando* N *el cuadrado de la raíz* a.10+b.

2.º—*Restando del dividendo* D:10 *el producto* 2ab *de divisor por el cociente, escribiendo á la derecha de la diferencia la siguiente cifra, de que se había prescindido al dividir por* 10 *el verdadero y restando* b^2 *del resultado*, ó,

3.º—*Restando del dividendo junto con la cifra de que se prescindió,* $2a.10.b+b^2=(2a.10+b)b$,

es decir, *el valor que resulta de escribir el cociente* b *á la derecha del divisor y multiplicar por el cociente* el número así representado.

Vemos, por consiguiente, que en su parte común son ya abreviados los tres procedimientos:

Por la supresión de los dos ceros de 100 *á la derecha del cuadrado* a^2 *de las decenas; por la no escritura de las cifras de la verdadera diferencia innecesarias en la división,* y *por la supresión del* 0 *de* 10 en el divisor,

y que en su parte distinta,

El primer método es el más pesado; el segundo el más fácil, y *el tercero el más breve,*

teniendo, en cambio, la ventaja el primero de que:

El error que pueda cometerse por equivocación en alguna cifra de los dividendos, no se transmite á las siguientes.

El segundo que:

Las operaciones son más sencillas y guardan una gran analogía con las de la división.

Y el tercero:

La desventaja de hacer más posibles las equivocaciones,

no obstante lo cual, es el que siempre debe emplearse en la práctica por la mayor rapidez del cálculo.

A continuación están aplicados los tres métodos al número 1257908281, para que puedan compararse mejor:

$\sqrt{1\,2{,}5\,7{,}9\,0{,}8\,2{,}8\,1}$	35467
9	
3 5	6
1 2 2 5	
3 2 9	70
1 2 5 3 1 6	
4 7 4 8	708
1 2 5 7 4 1 1 6	
4 9 6 6 8	7092
1 2 5 7 9 0 8 0 8 9	
1 9 2	

$\sqrt{1\,2{,}5\,7{,}9\,0{,}8\,2{,}8\,1}$	35467
3 5	6
5 7	
3 2 9	70
4 9 0	
4 7 4 8	708
5 0 0 2	
4 9 6 6 8	7092
2 4 1	
1 9 2	

$\sqrt{1\,2{,}5\,7{,}9\,0{,}8\,2{,}8\,1}$	35467
3 5 7	65
3 2 9 0	704
4 7 4 8 2	7086
4 9 6 6 8 1	70927
1 9 2	

Las operaciones indicadas en el segundo y tercero pueden efectuarse mentalmente, diciendo en aquél: $\sqrt{12}$, **3**; 3^2, 9, á 12, **3**; 2 por 3, **6**; 35:6, **5**, por 6, 30, á 35, **5**; 5^2, 25, á 57, **32**; 2 por 35, **70**, etc.; y en éste: $\sqrt{12}$, **3**; 3^2, 9, á 12, **3**; 2 por 3, **6**; 35:6, **5**; 5 por 5, 25, á 27, **2**; 5 por 6, 30 y 2, 32, á 35, **3**; 2 por 35, **70**, etc.; pero el primero exigiría efectuar aparte los siguientes cuadrados:

35	354	3546	35467	
35	354	3546	35467	
1225	125316	163116	248269	
		124110	1241345. . .	anterior por 5.
		12574116	212802	
			141868	
			1257908089	

Cualquiera que sea la marcha seguida, es evidente que la raíz inexacta 35467 será errónea:

En menos de una unidad,

puesto que el cuadrado de 35468 sería ya mayor que el radicando, y algunas veces puede comprenderse á simple vista, sin necesidad de hacer la prueba, que la operación está equivocada, atendiendo á que,

4.°—*El residuo ha de ser siempre menor que el duplo de la raíz entera más* 1.

En efecto, si representamos por r la raíz entera, se tendrá $(r+1)^2>N$ y (175, 2.ª)

$$R=N-r^2<(r+1)^2-r^2=r^2+2r+1-r^2=2r+1$$

conforme al enunciado de la proposición.

Escolio.—El mayor valor que el residuo podrá tener, será, por lo tanto, igual:

Al duplo de la raíz.

266. Una cosa análoga ocurre en la extracción de la raíz cúbica, fundada en que según su definición,

El radicando debe ser igual al cubo de su raíz entera, más el residuo,

por lo que descompuesta en decenas y unidades, se tendrá (249, 2.°, y 250, 1.°)

$$N=(a.10+b)^3+R=a^3.1000+3a^2.100.b+3a.b^2.10+b^3+R;$$

y una vez determinadas la raíz cúbica a de los millares de N, y el cociente de dividir por $3a^2$, las centenas de la diferencia (135),

$$D=N-a^3.1000=3a^2.100.b+3ab^2.10+b^3+R$$

después de hacer las *abreviaciones análogas de suprimir los ceros y cifras innecesarias,* la comprobación del cociente puede también hacerse de tres modos, también análogos, y que presentan,

Los mismos inconvenientes y ventajas:

1.°—*Restar del radicando* N *el cubo de la raíz* a.10+b.

2.°—*Restar del dividendo* D:100, *el producto* $3a^2b$ *del divisor por el cociente; escribir á la derecha de la diferencia la cifra* *siguiente y restar el triplo* 3ab², *de la raíz ya encontrada, por el cuadrado del cociente; escribir á la derecha del resultado la siguiente cifra y restar el cubo* b^3 *del cociente.*

3.°—*Escribir las dos cifras á la derecha del dividendo y restar de una vez* $3a^2b+3ab^2+b^3$, *colocando debajo de las centenas el primer sumando, que debía estar multiplicado por* 100, *y debajo de las decenas el segundo, que lo debía estar por* 10.

Hé aquí los tres procedimientos, aplicados á la extracción de la raíz cúbica de 44614226192755 con el detalle de las operaciones auxiliares que exige cada uno de ellos y no pueden hacerse de memoria.

$\sqrt[3]{44,614,226,192,755}$	35467
176	27
43925	
17392	3675
44361864	
2523621	375948
44587815336	
264108567	37722348
44614226192563	
192	

35
35
1255 . 3=3675
35
43925

354
354
125316 . 3=375948
354
44361864

3546
3546
163116
124410
12574116 . 3=37722348
3546
578409336
440094060
44587815336

35467
35467
248269
1241345
1631482
1257908089
35467
8805356623
44026783115
57863772094
44614226192563

$\sqrt[3]{4\ 4{,}6\ 1\ 4{,}2\ 2\ 6{,}1\ 9\ 2{,}7\ 5\ 5}$	35467
1 7 6	27
4 1 1	
2 2 5	
1 8 6 4	
1 2 5	
1 7 3 9 2	3675
2 6 9 2 2	
1 6 8 0	
2 5 2 4 2 6	
6 4	
2 5 2 3 6 2 1	375948
2 6 7 9 3 3 9	
3 8 2 3 2	
2 6 4 1 1 0 7 2	
2 1 6	
2 6 4 1 0 8 5 6 7	37722348
0 0 5 2 1 3 1 5	
5 2 1 2 6 2	
5 3 5	
3 4 3	
1 9 2	

Las nuevas operaciones auxiliares serían:

$$\begin{array}{r} 3.3 = 9 \\ 5^2 = 25 \\ \hline 225 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 35.3 = 105 \\ 4^2 = 16 \\ \hline 1618 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 354.3 = 1062 \\ 6^2 = 36 \\ \hline 38232 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3546.3 = 10638 \\ 7^2 = 49 \\ \hline 521262 \end{array}$$

$\sqrt[3]{44{,}614{,}226{,}192{,}755}$	35467
176,14	27
135	
225	
125	
17392,26	3675
14700	
1680	
64	
2523621,92	375948
2255688	
38232	
216	
264108567,55	37722348
264056436	
521262	
343	
192	

35	354
35	354
1255	125316
3	3
3675	375948

3546
3546
163116
124110
12574116
3
37722348

4.º—*El residuo ha de ser siempre menor que el triplo del cuadrado de la raíz entera, más el triplo de la misma, más* 1.

Efectivamente; si r es la raiz entera, $(r+1)^3>N$ y (175, 2.ª)

$$R=N-r^3<(r+1)^3-r^3=r^3+3r^2+3r+1-r^3=3r^2+3r+1$$

conforme al enunciado.

Escolio.—El mayor valor que el residuo podrá alcanzar, será

El triplo del cuadrado de la raíz, más el triplo de la misma.

267. Las propiedades demostradas al tratar las raíces, en general, proporcionan también, como en todas las operaciones, medios sencillos de efectuar las radicaciones en algunos casos particulares.

1.º—*La raíz cuadrada de la unidad seguida de un número par de ceros, será igual á la unidad seguida de la mitad de los que tenga el radicando.*

$$\sqrt{100000000}=10000$$

puesto que $10000^2=100000000$ (253).

2.°—*Si un número que tiene raíz cuadrada exacta está seguido de un número par de ceros, podrá prescindirse de ellos, escribiendo la mitad á la derecha de dicha raíz.*

$$\sqrt{1440000}=1200,$$

ya que $\sqrt{1440000}=\sqrt{144.10000}=\sqrt{144}.\sqrt{10000}$
$=12.100=1200$ (257, Cor.)

3.°—*Si los exponentes de los factores primos que componen un número son divisibles por 2, su raíz cuadrada será igual al producto de las potencias que resulten de dividir por 2 todos los exponentes.*

1016064	1
508032	2
254016	2
127008	2
63504	2
31752	2
15876	2
7938	2
3969	2
1323	3
441	3
147	3
49	3
7	7
1	7

$\sqrt{1016064}=\sqrt{2^8.3^4.7^2}=2^4.3^2.7$
$=16.9.7=1008$ (259, Cor. 1.°).

y por las mismas razones:

4.°—*La raíz cúbica de la unidad seguida de un número de ceros múltiplo de 3, será igual á la unidad seguida de la tercera parte de los que tenga el radicando.*

$$\sqrt[3]{1000000000}=1000.$$

5.°—*Si un número que tiene raíz cúbica exacta está seguido de un número de ceros múltiplo de 3, podrá prescindirse de ellos, escribiendo la tercera parte á la derecha de dicha raíz.*

$$\sqrt[3]{512000000}=800$$

6.°—*Si los exponentes de los factores primos que componen un número, son divisibles por 3, su raíz cúbica será igual al producto de las potencias que resulten de dividir por 3 todos los exponentes.*

$$\begin{array}{r|l} 46656 & 1 \\ 23328 & 2 \\ 11664 & 2 \\ 5832 & 2 \\ 2916 & 2 \\ 1458 & 2 \\ 729 & 2 \\ 1 & 3^6 \end{array} \qquad \sqrt[3]{46656}=2^3.3^2=8.9=72.$$

Escolio.—También la propiedad de la raíz, cuando el índice es un producto (262, 3.°), permite extraer por medio de raíces cuadradas y cúbicas,

Aquellas cuyo índice sea un producto de potencias de 2 y 3, siempre que las operaciones puedan verificarse con exactitud, como en los siguientes ejemplos:

$$\sqrt[8]{390625}=\sqrt[2^3]{390625}=\sqrt[2.2.2]{390625}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{390625}}}$$

$$=\sqrt{\sqrt{625}}=\sqrt{25}=5.$$

$$\sqrt[9]{262144}=\sqrt[3^2]{262144}=\sqrt[3.3]{262144}$$

$$=\sqrt[3]{\sqrt[3]{262144}}=\sqrt[3]{64}=4.$$

$$\sqrt[12]{4096}=\sqrt[3.4]{4096}=\sqrt[3.2^2]{4096}=\sqrt[3.2.2]{4096}=\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{4096}}}$$

$$=\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[3]{8}=2.$$

268. Según se ha visto en los anteriores ejemplos, la extracción de las raíces en los casos generales constituye la operación práctica más pesada y difícil, y por lo tanto, más susceptible de equivocación, sobre todo cuando el resultado ha de tener muchas

cifras, ya que las primeras siempre se calculan con facilidad.

Por esto, entre las reglas abreviadas de que los calculistas hacen uso para llegar con prontitud y rapidez al fin que se proponen, merecen sin duda alguna un lugar de preferencia las que Lorenzo Wantzel dió á conocer por vez primera en la página 568 de la 8.ª edición de los *Elements d'Algebre* de M. Reynand, según las cuales,

Siempre que las raíces cuadrada y cúbica de los números enteros han de tener varias cifras, y por cualquiera de los procedimientos generales se han calculado más de la mitad, pueden determinarse las restantes dividiendo el residuo parcial que se obtenga, seguido de las cifras del radicando con las cuales no se ha operado aún, por el duplo ó por el triplo del cuadrado de la parte de raíz hallada.

De la demostración que dió Wantzel de esta regla y que después han modificado más ó menos algunos autores en lo que se refiere á ciertos detalles, pero no á su fondo, se desprende que la parte de raíz hallada seguida de las cifras con las cuales no se hubiese operado, debe dividirse por el duplo ó triplo del cuadrado de dicha parte, atendiendo al orden de unidades que deba representar, es decir, seguida de tantos ceros como cifras falte calcular aún; pero como el suprimir los ceros en el divisor (205, 2.°) no altera el valor del cociente, siempre que se escriban á la derecha del resto las cifras de que en número igual se habrá prescindido en el dividendo, y por otra parte, tampoco es necesario operar en las divisiones con todas las cifras del radicando, que por lo tanto, es inútil escribir á la derecha del residuo para formar el dividendo, en la práctica se abrevia aún más la operación,

prescindiendo del orden de unidades que el divisor represente y escribiendo una á una á la derecha de los restos las cifras necesarias para obtener por cociente las que falten en la raíz, cuyo número total se conocerá por

El número de grupos de á dos ó tres cifras en que haya quedado dividido el radicando

al aplicarle los procedimientos generales.

De este modo, la raíz cuadrada del número

550221377104163G1

exigiría respectivamente, para ser determinada por el más rápido de los métodos usuales y por la regla abreviada de Wantzel, las siguientes operaciones:

$\sqrt{5{,}5\ 0{,}2\ 2{,}1\ 3{,}7\ 7{,}1\ 0{,}4\ 1{,}6\ 3{,}6\ 1}$	234567981
1 5,0	43
2 1 2,2	464
2 6 6 1,3	4685
3 1 8 8 7,7	46906
3 7 4 4 1 1,0	469127
4 6 0 2 2 1 4,1	4691349
3 8 0 0 0 0 0 6,3	46913588
4 6 9 1 3 5 9 6,1	469135961
0	

$\sqrt{5{,}5\ 0{,}2\ 2{,}1\ 3{,}7\ 7{,}1\ 0{,}4\ 1{,}6\ 3{,}6\ 1}$		234567981
1 5,0		43
2 1 2,2		464
2 6 6 1,3		4685
3 1 8 8 7,7		46906
3 7 4 4 1,1	46912	
4 6 0 2 7 0	7981	
3 8 0 6 2 4		
5 3 2 8 1		
6 3 6 9		

y en cuanto á la raíz cúbica del cubo del propio número, haría necesarias entre principales y auxiliares todas las detalladas á continuación, siguiendo el más breve de los procedimientos generales:

$\sqrt[3]{12,906,431,753,036,328,469,137,141}$	234567981
49,06	12
36	
54	
27	
7394,31	1587
6348	
1104	
64	
935277,53	164268
821340	
17550	
125	
11218128 0,36	16497075
98982450	
253260	
216	
13173502203,28	1650551808
11553862656	
3448032	
343	
16192947406 54,69	165065032467
1485585292203	
56999781	
729	
1337037484763 01,37	16506629913123
1320530393049 84	
450370368	
512	
1650664124275451,41	1650664117238412
1650664117238412	
70370394	
1	
0	

Operaciones auxiliares.

```
  23
  23
 ---
  69
 46
 ---
 529
   3
 ---
1587
```

```
  69
  16
 ---
 414
 69
----
1104
```

```
   234
   234
   ---
   936
  702
 468
 -----
 54756
     3
------
164268
```

```
  234
    3
  ---
  702
   25
 ----
 3510
1404
-----
17550
```

```
    2345
    2345
    ----
   17725
   9380
  7035
 4690
 -------
 5499025
       3
--------
16497075
```

```
  2345
     3
  ----
  7035
    36
 -----
 42210
21105
------
253260
```

```
     23456
     23456
     -----
    140736
   117280
   93824
  70368
 46912
 ---------
 550183936
         3
----------
1650551808
```

```
  23456
      3
  -----
  70368
     49
 ------
 633312
281472
-------
3448032
```

```
      234567
      234567
      ------
     1641969
    1407402
   1172835
   938268
  703701
 469134
 -----------
 55021677489
           3
------------
165065032467
```

```
  234567
       3
  ------
  703701
      81
 -------
  703701
5629608
--------
56999781
```

```
       2345679
       2345679
       -------
      21111111
     16419753
    14074074
   11728395
   9382716
  7037037
 4691358
 -------------
 5502209971041
             3
--------------
16506629913123
```

2345679
3
7037037
64
28148148
42222222
450370368

23456798
23456798
187654384
211111182
164197586
140740788
117283990
93827192
70370394
46913596
550221372412804
3
1650664117238412

23456798
3
70370394

mientras que el abreviado las reduciría á

$\sqrt[3]{1\,2{,}9\,0\,6{,}4\,3\,1{,}7\,5\,3{,}0\,3\,6{,}3\,2\,8{,}4\,6\,9{,}1\,3\,7{,}1\,4\,1}$ | 234567981

4 9,0 6 | 12
3 6
5 4
2 7

7 3 9 4,3 1 | 1587
6 3 4 8
1 1 0 4
6 4

9 3 5 2 7 7,5 3 | 164268
8 2 1 3 4 0
1 7 5 5 0
1 2 5

1 1 2 1 8 1 2 8 0,3 6 | 16497075
9 8 9 8 2 4 5 0
2 5 3 2 6 0
2 1 6

1 3 1 7 3 5 0 2 2 0 3 | 1650551808
1 6 1 9 6 3 9 4 3 7 2 | 7981
1 3 4 1 4 2 8 1 0 0 8
2 0 9 8 6 6 5 4 4 4
4 4 8 1 1 3 6 3 6

Operaciones auxiliares.

```
   23
   23
 ----
   69
  46
 ----
  529
    3
 ----
 1587
```

```
   69
   16
 ----
  414
  69
 ----
 1104
```

```
    234
    234
 ------
    936
   702
  468
 ------
  54756
      3
 ------
 164268
```

```
   234
     3
 -----
   702
    25
 -----
  3510
 1404
 -----
 17550
```

```
     2345
     2345
 --------
    17725
    9380
   7035
  4690
 --------
  5499025
        3
 --------
 16497075
```

```
   2345
      3
 ------
   7035
     36
 ------
  42210
 21105
 ------
 253260
```

```
      23456
      23456
 ----------
     140736
    117280
    93824
   70368
  46912
 ----------
  550183936
          3
 ----------
 1650551808
```

La abreviación, según se ve, tiene verdadera importancia, sobre todo cuando se trata de extraer una raíz cúbica, en que las dificultades aumentan mucho, y las equivocaciones, por consiguiente, son más posibles á medida que va siendo mayor el número de cifras determinadas.

Verdad es que

El residuo no se halla con exactitud;

pero debe tenerse presente que dicho residuo no sirve, como en la división, para terminar el cálculo exactamente, porque todas las raíces de números decimales que dejan resto son inconmensurables, y por lo tanto, hay que despreciarlo siempre, sin que por esta razón pueda servir de obstáculo para aplicar la regla.

269. Esta indudable importancia y el no convencernos de la verdad de la regla, ninguna de las tres diferentes demostraciones que hemos encontrado en cuantos autores nos ha sido posi-

ble hojear, no obstante la indiscutible autoridad y competencia de la mayoría de ellos, han sido causa de que estudiásemos el asunto á fondo; de que lejos de convencernos de su verdad absoluta, nos hayamos convencido de su falsedad en determinados casos, así como de su posible aplicación á todos, modificándola ligeramente; y de que, por lo tanto, insertemos á continuación los resultados de nuestras propias investigaciones.

RAÍZ CUADRADA.—Si continuamos como hasta aquí llamando N al radicando, R al residuo y suponemos encontradas las $n+1$ primeras cifras que nos habrán dado un resultado a, y que nos falte calcular el número b formado por n cifras desconocidas, como, por ejemplo, $3456789=3456000+789=3456.10^3+789$, tendremos, en general (265),

$$N=(a.10^n+b)^2+R=a^2.10^{2n}+2ab.10^n+b^2+R$$

y en el momento de haber hallado la diferencia $D=N-a^2.10^{2n}$

$$D=2ab.10^n+b^2+R;$$

por lo cual el cociente de dividir D por $2a.10^n$, sería (201, 1.°)

$$\frac{D}{2a.10^n}=\frac{2ab.10^n}{2a10^n}+\frac{b^2}{2a.10^n}+\frac{R}{2a10^n}=b+\frac{b^2+R}{2a.10^n}$$

simplificando el primer sumando y efectuando la adición de los otros dos.

El cociente que hallaremos será, por consiguiente, la parte b de raíz entera que falte calcular, siempre que la fracción que la acompaña no llegue á valer 1, como sucederá si $R=0$, pues entonces, siendo

$$b<a \text{ y } b<10^n, \text{ también } b^2<a\,10^n \text{ y } \frac{b^2}{2a.10^n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{a.10^n}<\frac{1}{2}$$

(225, 1.°).

Ahora bien; el residuo R puede llegar á ser igual al duplo de la raíz (265, 4.°), $2(a.10^n+b)=2a.10^n+2b$, por lo cual para expresión del error E que cometeremos al tomar el cociente por valor de b, tendremos

$$E \lesseqgtr \frac{b^2+2a.10^n+2b}{2a.10^n} = \frac{2a.10^n+b^2+2b}{2a.10^n} = 1 + \frac{b^2+2b}{2a.10^n}$$

luego en determinados casos,

El error podrá ser mayor que 1,

siendo evidente que alcanzará su valor máximo cuando el numerador de la última fracción tenga el mayor y el denominador el más pequeño que sea posible (216, 3.° y 5.°).

Pero cualquiera que sea el total de cifras n que falte determinar, el mayor valor de b, única variable que entra en el numerador, será $10^n—1$, es decir, el número representado por n *nueves;* mientras el menor de a de que depende el del denominador, por no ser n en realidad variable una vez fijado el número de cifras que han de calcularse por división, será la unidad seguida de n ceros, ó 10^n, ya que por supuesto debe constar de $n+1$ cifras, sin que pueda ser 0 la primera; luego suponiendo $a=10^n$ y $b=10^n—1$, resultará para valor máximo del error

$$E=1+\frac{(10^n-1)^2+2(10^n-1)}{2.10^n.10^n}=1+\frac{10^{2n}-2.10^n+1+2.10^n-2}{2.10^{2n}}$$

$$=1+\frac{10^{2n}-1}{2.10^n}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{10^{2n}-1}{10^{2n}}$$

y siendo forzosamente $10^{2n}—1<10^{2n}$, también será

$$\frac{10^{2n}-1}{2\,10^{2n}}<1 \text{ y } (225,1.°)\ \frac{1}{2}\cdot\frac{10^{2n}-1}{10^{2n}}<\frac{1}{2},$$

por lo que

$$E<1+\frac{1}{2}.$$

270. Queda, por consiguiente, demostrado, que:

1.°—*La aplicación de la regla de Wantzel al cálculo de la raíz cuadrada, conducirá con frecuencia á un resultado cuya última cifra será mayor, en una unidad, que la que se obtendría por los métodos generales,*
según puede comprobarse con el ejemplo siguiente:

√5,5 0,2 2,1 3,8 1,1 8,4 2,6 7,3 1	234567981
1 5,0	43
2 1 2,2	464
2 6 6 1,3	4685
3 1 8 8 8,1	46906
3 7 4 4 5 1,8	469127
4 6 0 6 2 9 4,2	4691349
3 8 4 0 8 7 1 6,7	46913568
8 7 7 8 6 2 3 3,1	469135961
4 0 8 7 2 6 3 7 0	

√5,5 0,2 2,1 3,8 1,1 8,4 2,6 7,3 1		234567982
1 5,0		43
2 1 2,2		464
2 6 6 1,3		4685
3 1 8 8 8,1		46906
3 7 4 4 5 1	46912	
4 6 0 6 7 8	7982	
3 8 4 7 0 4		
9 4 0 8 2		
2 5 8		

2.°—*En el caso de terminar la raíz entera en uno ó más nueves, podrían ser distintas varias y hasta todas las cifras calculadas abreviadamente,*
como sucedería en la raíz extraida á continuación:

$\sqrt{5,5\ 0,2\ 2,1\ 4,6\ 6,1\ 8,4\ 2,6\ 7,3\ 1}$	234567999
1 5,0	43
2 1 2,2	464
2 6 6 1,4	4685
3 1 8 9 6,6	46906
3 7 5 3 0 1,8	469127
4 6 9 1 2 9 4,2	4691349
4 6 9 0 8 0 1 6,7	46913589
4 6 8 5 7 8 6 6 3,1	469135989
4 6 3 5 6 2 7 3 0	

$\sqrt{5,5\ 0,2\ 2,1\ 4,6\ 6,1\ 8,4\ 2,6\ 7,3\ 1}$		234568000
1 5,0		43
2 1 2,2		464
2 6 6 1,4		4685
3 1 8 9 6,6		46906
3 7 5 3 0 1	46912	
5 8 4 2	8000	

El error, sin embargo, de la raíz por exceso que en estos y otros casos resulta, no llegará, como hemos demostrado, á valer $1\frac{1}{2}$ unidades, por lo que en la extracción de la raíz cuadrada, pues ya veremos que en la cúbica no sucede así, siempre hallaremos ó la raíz exacta, si el radicando la tuviese, ó la aproximada por defecto ó exceso en menos de una unidad; luego no hay inconveniente en aplicar en la práctica la referida regla, si es indiferente obtener una ú otra, modificándola de este modo:

3.° *Para calcular la raíz cuadrada exacta de un número entero, ó la aproximada por defecto ó exceso en menos de una unidad, basta determinar por cualquiera de los procedimientos generales más de la mitad de las cifras que deba tener y dividir la diferencia que resulte después de comprobar la última, seguida de la mitad de las cifras del radicando con las* *cuales no se haya operado aún, que se irán bajando una á una*, según se hace en la práctica de toda división, *por el duplo de la parte de raíz hallada, considerada como unidades simples.*

271. Raíz cúbica.—Siguiendo la notación hasta aquí empleada, deberá verificarse:

$$N=(a.10^n+b)^3+R=a^3.10^{3n}+3a^2.10^{2n}.b+3a10^n.b^2+b^3+R$$

$$D=N-a^3.10^{3n}=3a^2b.10^{2n}+3ab^2.10^n+b^3+R$$

$$\frac{D}{3a^2.10^{2n}}=\frac{3a^2b.10^{2n}}{3a^2.10^{2n}}+\frac{3ab^2.10^n}{3a^2.10^{2n}}+\frac{b^3}{3a^2.10^{2n}}+\frac{R}{3a^2.10^{2n}}$$

$$=b+\frac{3ab^2.10^n+b^3+R}{3a^2.10^{2n}}$$

$$E=\frac{3ab^2.10^n+b^3+R}{3a^2.10^{2n}},$$

y como el residuo R puede llegar á ser igual (266, 4.°) al triplo del cuadrado de la raíz, más el triplo de la misma, es decir, á

$$3(a.10^n+b)^2+3(a.10^n+b)=3a^2.10^{2n}+6a10^n.b+3b^2+3a10^n+3b$$

resultará sustituyendo:

$$E \leqq \frac{3ab^2.10^n+b^3+3a^2.10^{2n}+6a.10^n.b+3b^2+3a.10^n+3b}{3a^2.10^{2n}}$$

$$=\frac{3a^2.10^{2n}+3ab^2.10^n+6a.10^n.b+3a.10^n+b^3+3b^2+3b}{3a^2.10^{2n}}$$

$$=1+\frac{3b^2+6b+3}{3a.10^n}+\frac{b^3+3b^2+3b}{3a^2.10^{2n}},$$

y ese error alcanzará su valor máximo, cuando los numeradores de las dos fracciones tengan el mayor y los denominadores el menor posible (216, 3.° y 5.°).

Pero cualquiera que sea el total de cifras n que falte determinar, el mayor valor de b, única variable que entra en los numeradores, será 10^n-1, es decir, el número representado por n *nueves*, mientras el menor de a, de que dependen los denominadores, por no ser n en realidad variable una vez fijado el número de cifras que han de calcularse por división, será la unidad seguida de n ceros, ó 10^n, ya que por supuesto debe constar de $n+1$ cifras sin que pueda ser 0 la primera; luego suponiendo $a=10^n$ y $b=10^{n-1}$, resultará para valor máximo del error (249, 2.°):

$$E=1+\frac{3(10^n-1)^2+6(10^n-1)+3}{3.10^n.10^n}$$

$$+\frac{(10^n-1)^3+3(10^n-1)^2+3(10^n-1)}{3.10^{2n}.10^{2n}}$$

$$=1+\frac{3(10^{2n}-2.10^n+1)+6.10^n-6+3}{3.10^{2n}}$$

$$+\frac{10^{3n}-3.10^{2n}+3.10^n-1+3(10^{2n}-2.10^n+1)+3.10^n-3}{3.10^{4n}}$$

$$=1+\frac{3.10^{2n}-6.10^n+3+6.10^n-3}{3.10^{2n}}$$

$$+\frac{10^{3n}-3.10^{2n}+6.10^n-4+3.10^{2n}-6.10^n+3}{3.10^{4n}}$$

$$=1+1+\frac{10^{3n}-1}{3.10^{4n}}=2+\frac{10^{3n}-1}{3.10^{4n}}=2+\frac{1}{3.10^n}\cdot\frac{10^{3n}-1}{10^{3n}}$$

y siendo forzosamente $10^{3n}-1<10^{3n}$, también será

$$\frac{10^{3n}-1}{10^{3n}}<1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{3.10^n}\cdot\frac{10^{3n}-1}{10^{3n}}<\frac{1}{3.10^n}$$

por lo que

$$E<2+\frac{1}{3.10^n}.$$

272. De aquí se deduce que si la raíz fuera, por ejemplo, 100009999, y el residuo suficientemente grande, deberíamos encontrar por cociente entero 9999+2=1001, en lugar de 9999; y que por lo tanto,

La regla de Wantzel no es cierta en el caso en que las cifras calculadas por los métodos generales sean la unidad seguida de ceros, nueves las restantes y el residuo suficientemente grande.

Su aplicación á este caso nos conduciría en virtud de lo dicho á uno de los dos absurdos indicados en el siguiente ejemplo, según considerásemos en los dividendos la tercera parte de las cifras con las cuales no se ha operado aún, ó solamente las indispensables para obtener por cociente las cuatro que faltarían en la raíz; absurdos que resultan á pesar de que, como veremos aplicando á continuación el método usual, el residuo verdadero no llega á alcanzar con mucho su máximo valor.

$\sqrt[3]{1,000,300,030,000,987,654,321,000}$		1000010001
0,00		3
3,00		300
3000,30		30000
3000,300,00		3000000
3000300009876	300000000	
300009876	10001	
9876		

$\sqrt[3]{1,000,300,030,000,987,654,321,000}$		100001000
0,00		3
3,00		300
3000,30		30000
3000300,00		3000000
300030000987	300000000	
30000987	1000	

$\sqrt[3]{1,000,300,030,000,987,654,321,000}$	100009999
0,00	3
3,00	300
3000,30	30000
3000,300,00	3000000
3000300009,87	300000000
2700000000	
2430000	
729	
300057002586,54	30005400243
270048602187	
24302187	
729	
30005970173553,21	3000594029403
27005346264627	
243024057	
729	
3000599606513220,00	300059942994003
2700539486946027	
2430242757	
729	
30005987654291001	

Operaciones auxiliares.

30000	100009	100009	1000099
81	100009	3	1000099
2430000	900081	300027	9000891
	100009	81	9000891
	10001800081	300027	1000099
	3	2400216	1000198009801
	30005400243	24302187	3
			3000594029403

1000099	10000999	10000999
3	10000999	3
3000297	90008991	30002997
81	90008991	81
3000297	90008991	30002997
24002376	10000999	240023976
243024057	100019980998001	2430242757
	3	
	300059942994003	

Ahora bien; para que en vez de esta verdadera raíz, nos de la regla abreviada la primera de las anteriores, es necesario que como allí sucede, *el dividendo contenga* 10 *veces al divisor,* ya que el cociente sólo debe tener 4 cifras, ó bien, si escribiéramos 9 en lugar de 10, haciendo lo mismo en las dos divisiones siguientes, *que el último dividendo contuviera al divisor* 11 *veces,* lo que vamos á indicar, para mayor claridad:

$\sqrt[3]{1,000,300,030,000,987,654,321,000}$ | 10000(10)001

0,00 | 3

3,00 | 300

3000,30 | 30000

300030000 | 3000000

3000300009 | 300000000

300009876 | (10)001

9876

$\sqrt[3]{1,000,300,030,000,987,654,321,000}$ | 10000999(11)

0,00 | 3

3,00 | 300

3000,30 | 30000

3000300,00 | 3000000

3 0 0 0 3 0 0 0 0 9 | 300000000

3 0 0 3 0 0 0 0 9 8 | 999(11)

3 0 3 0 0 0 0 9 8 7

3 3 0 0 0 0 9 8 7 6

9 8 7 6

Vemos, por consiguiente, que si la regla de Wantzel es falsa para este caso bajo el punto de vista científico, podría, no obstante, ser aplicable á él,

No escribiendo en los cocientes más que la mayor cifra posible 9, *aunque algún dividendo contuviese al divisor* 10 *ú* 11 *veces, después de bajar una cifra del radicando para cada división parcial,*

ó mejor aún:

Siempre que al suceder esto, demos por terminada la operación, escribiendo nueves en lugar de todas las cifras que falte calcular,

con lo cual la radicación anterior, prescindiendo de las repeticiones de diferencias hechas sólo para la mejor comprensión de lo expuesto, quedaría reducida á

$\sqrt[3]{1,000,300,030,000,987,654,321,000}$ | 100009999

0,0 0 3,0 0 0,3 0 0,0 0 9 | 300000000 | 3000000

| 10

Si este caso, por tanto, fuera excepcional y la regla de Wantzel cierta para todos los restantes, en el mismo sentido por lo menos que para la raíz cuadrada, es decir, admitiendo que sea indiferente obtener el resultado por defecto ó por exceso, con tal que no llegue á ser erróneo en una unidad con respecto al verdadero, podría aplicarse en la práctica con la modificación que acabamos de indicar.

273. Para ver si es ó no excepcional, volvamos á la expresión del error

$$E \leqq 1+\frac{3b^2+3b+3}{3a.10^n}+\frac{b^3+3b^2+3b}{3a^2.10^{2n}},$$

que prescindiendo del caso considerado alcanzará su máximo valor, independientemente del de n, cuando siendo también los denominadores lo más pequeños posible, para lo cual es indispensable que a sea igual á 10^n, los numeradores alcancen el que resulte de hacer $b=10^n-2$, en razón á que no se puede suponer $b=10^n-1$ para dar á los numeradores el mayor valor, y $a=10^n-1$, que sería inmediatamente inferior á 10^n, porque entonces no tendría a más que $n-1$ cifras, y estamos suponiendo tiene n.

Pues bien; en la hipótesis $a=10^n$, $b=10^n-2$, se tendría sustituyendo:

$$E=1+\frac{3(10^n-2)^2+6(10^n-2)+3}{3.10^n.10^n}$$

$$+\frac{(10^n-2)^3+3(10^n-2)^2+3(10^n-2)}{3.10^{2n}.10^{2n}}$$

$$=1+\frac{3(10^{2n}-4.10^n+4)+6.10^n-12+3}{3.10^{2n}}$$

$$+\frac{10^{3n}-6.10^{2n}+12.10^n-8+3(10^{2n}-4.10^n+4)+3.10^n-6}{3.10^{4n}}$$

$$=1+\frac{3.10^{2n}-12.10^n+12+6.10^n-9}{3.10^{2n}}$$

$$+\frac{10^{3n}-6.10^n+15.10^n-14+3.10^{2n}-12.10^n+12}{3.10^{4n}}$$

$$=1+\frac{3.10^{4n}-6.10^{3n}+3.10^{2n}+10^{3n}-3.10^{2n}+3.10^{n}-2}{3.10^{4n}}$$

$$=1+\frac{3.10^{4n}-5.10^{3n}+3.10^{n}-2}{3.10^{4n}}=1+1+\frac{-5.10^{3n}+3.10^{n}-2}{3.10^{4n}}$$

$$=2-\frac{5.10^{3n}+2-3.10^{n}}{3.10^{4n}}<2;$$

porque siendo evidentemente $5.10^{3n}+2>3.10^{n}$, el numerador será positivo y el resultado final de la expresión del error menor que 2 unidades del último orden, pues claro está que, á pesar de haber considerado hasta aquí números enteros,

Los razonamientos hechos serían igualmente ciertos si el radicando fuera fraccionario decimal.

De aquí se deduce que si $a.10^{n}+b=r$ es la raiz cúbica entera del número N, la verdadera estará comprendida entre r y $r+1$, y en cualquier caso, menos en aquel en que $a=10^{n}$ y $b=10^{n}-1$, el resultado que hallaremos por la aplicación de la regla abreviada, no pudiendo ser erróneo en 2 unidades, será r, ó $r+1$, y estará aproximado, bien por defecto, bien por exceso, al verdadero en menos de 1 unidad del último orden, como puede comprobarse con el ejemplo siguiente del caso más desfavorable después del citado, en que $a=10^{n}$ y $b=10^{n}-2$, alcanzando además el residuo verdadero su valor máximo,

$$\begin{aligned}R&=3(a.10^{n}+b)^{2}+3(a.10^{n}+b)\\&=3(a^{2}.10^{2n}+2a.10^{n}.b+b^{2})+3a.10^{n}+3b\\&=3a^{2}.10^{2n}+6a.10^{n}.b+3b^{2}+3a.10^{n}+3b\end{aligned}$$

que para $n=4$, en que $a=10000$ y $b=9998$, corresponde al residuo

$$\begin{aligned}R=&3.100000000.100000000+6.10000.10000.9998+3.99960004\\&+3.10000.10000+3.9998\\=&30000000000000000+5998800000000+299880012\\&+300000000+29994=30005999399910006\end{aligned}$$

y al radicando

$$N=(10000.10000+9998)^2 + \cdot 300059993999910006$$
$$=10002999999995000000029998$$

```
3
√1,0 0 0,2 9 9,9 9 9,9 9 5,0 0 0.0 0 0,0 2 9,9 9 8 | 100009998
   0,0 0 2,9 9 9,9 9 9,9 5 0,0 0                  | 300000000
       2 7 0 0 0 0 0 0 0 0                        |
                 2 4 3 0 0 0 0                    |
                         7 2 9                    |
         2 9 9 7 5 6 9 4 2 7 1 0,0 0              | 30005400243
         2 7 0 0 4 8 6 0 2 1 8 7                  |
                   2 4 3 0 2 1 8 7                |
                               7 2 9              |
           2 9 7 0 5 9 1 0 2 9 7 0 1 0,2 9        | 3000594029403
           2 7 0 0 5 3 4 6 2 6 4 6 2 7            |
                     2 4 3 0 2 4 0 5 7            |
                                   7 2 9          |
             2 7 0 0 5 3 9 7 2 9 9 7 0 3 0 9,9 8  | 30005942994003
             2 4 0 0 4 7 9 5 4 3 9 5 2 0 2 4      |
                           1 9 2 0 1 9 1 8 0 8    |
                                           5 1 2  |
               3 0 0 0 5 9 9 9 3 9 9 9 1 0 0 0 6  |

                    10000999
                           3
                    30002997
                          64
                   120011988
                  180017982
                  1920191808
```

Las demás operaciones auxiliares están efectuadas en el último ejemplo.

```
3
√1,0 0 0,2 9 9,9 9 9,9 9 5,0 0 0,0 0 0,0 2 9,9 9 8 | 100009999
   0,0 0 2,9 9 9,9 9 9,9 5 0       | 300000000      | 3000000
                                   | 9999
       2 9 9 9 9 9 9 5 0 0
         2 9 9 9 9 9 5 0 0 0
           2 9 9 9 9 5 0 0 0 0
             2 9 9 9 5 0 0 0 0
```

Resumiendo cuanto hasta aquí se ha dicho, podemos, por consiguiente, afirmar que:

1.°—*La aplicación de la regla de Wantzel al cálculo de la raíz cúbica conducirá con frecuencia á un resultado cuya última cifra será mayor en una unidad que la que se obtendría por los métodos generales,*

según puede comprobarse con el ejemplo siguiente, en que el residuo está muy distante de su valor máximo:

```
3
√12,906,431,893,036,328,469,137,141 | 234567981
  49,06                             | 12
  36
   54
    27
   7394,31                          | 1587
   6348
    1104
       64
    935278,93                       | 164268
    821340
      17550
         125
     112182680,36                   | 16497075
      98982450
         253260
            216
      13174902203,28                | 1650551808
      11553862656
           3448032
               343
       1620694740654,69             | 165065032467
       1485585292203
             56999781
                  729
        135103748476301,37          | 16506629913123
        132053039304984
               450370368
                     512
          3050664124275451,41       | 1650664117238412
          1650664117238412
                  70370394
                         1
          140000000000000000
```

$\sqrt[3]{1\,2{,}9\,0\,6{,}4\,3\,1{,}8\,9\,3{,}0\,3\,6{,}3\,2\,8{,}4\,6\,9{,}1\,3\,7{,}1\,4\,1}$	234567982
49,06	12
36	
54	
27	
7394,31	1587
6348	
1104	
64	
935278,93	164268
821340	
17550	
125	
1121826 80,36	16497075
98982450	
253260	
216	
13174902203	1650551808
16210394372	7982
13554281008	
3498665444	
197561828	

Las operaciones auxiliares serían las mismas detalladas en el segundo ejemplo del párrafo 268, por lo cual las suprimimos aquí.

2.º—*En el caso de terminar la raíz entera en uno ó más nueves, podrían llegar á ser distintas varias y hasta todas las cifras calculadas abreviadamente,*
como sucedería en la raíz extraída á continuación:

$\sqrt[3]{1\,2{,}9\,0\,6{,}4\,3\,4{,}8\,7\,3{,}0\,3\,6{,}3\,2\,8{,}4\,6\,9{,}1\,3\,7{,}1\,4\,1}$	234567999
49,06	12
36	
54	
27	
7394,34	1587
6348	
1104	
64	
935308,73	164268
821340	
17550	
125	
112212480,36	16497075
98982450	
253260	
216	
132047022203,28	1650551808
115538626 56	
3448032	
343	
165049474065 4,69	165065032467
1485585292203	
56999781	
729	
16490374847630 1,37	16506629913123
148559669218107	
569999997	
729	
1634403225818738 1,41	1650664257979203
14855978321812827	
5700002157	
729	
14880533663743314 2	

$\sqrt[3]{1\ 2{,}9\ 0\ 6{,}4\ 3\ 4{,}8\ 7\ 3{,}0\ 3\ 6{,}3\ 2\ 8{,}4\ 6\ 9{,}1\ 3\ 7{,}1\ 4\ 1}$	234568000
4 9,0 6	12
3 6	
5 4	
2 7	
7 3 9 4,3 4	1587
6 3 4 8	
1 1 0 4	
6 4	
9 3 5 3 0 8,7 3	164268
8 2 1 3 4 0	
1 7 5 5 0	
1 2 5	
1 1 2 2 1 2 4 8 0,3 6	16497075
9 8 9 8 2 4 5 0	
2 5 3 2 6 0	
2 1 6	
1 3 2 0 4 7 0 2 2 0 3	1650551808
0 0 2 8 7 7 3 9 2 8 4	8000

Operaciones auxiliares distintas de las ya efectuadas.

7037037	23456799
81	23456799
7037037	211111191
56296296	211111191
569999997	164197593
	140740794
	117283995
	93827196
70370397	70370397
81	46913598
70370397	550221419326401
562963176	3
5700002157	1650664257979203

Si además de ser nueves las últimas cifras de la raíz, fueran las primeras la unidad seguida de ceros, la regla dejaría de ser cierta en algunos casos, según hemos demostrado; pero puede ser aplicable á todos, modificándola de este modo:

3.º—*Para calcular la raíz cúbica exacta de un número decimal, ó la aproximada por defecto ó exceso en menos de una unidad del último orden, basta determinar por cualquiera de los procedimientos generales más de la mitad de las cifras que deba tener, y dividir la diferencia que resulte después de comprobar la última, seguida de la tercera parte de las cifras del radicando con las cuales no se haya operado aún, que se irán bajando una á una*, según se hace en la práctica de toda división, *por el triplo del cuadrado de la parte de raíz hallada considerada como unidades simples; y si el primer dividendo contuviera diez veces al divisor, se da la operación por terminada, escribiendo* 9 *en los lugares correspondientes á las cifras que falte calcular.*

II.—Raíces fraccionarias.

274. Ocurriendo pocas veces que los dos términos de una fracción ordinaria tengan raíz cuadrada ó cúbica exacta (130), es de sumo interés conocer los métodos más breves que pueden seguirse para la radicación de las fracciones, cuando sólo puedan encontrarse las raíces aproximadas.

De los procedimientos generalmente seguidos se desprende (131 y 144) que cuando el denominador tenga raíz exacta, nada será más rápido que seguir el usual, y que esto se verificará siempre

Que los exponentes de los factores primos en que pueda descomponerse sean pares, si se trata de raíz cuadrada (267, 3.º), y *múltiplos de* 3, *si es la cúbica la que debe extraerse* (267, 50);

Por lo cual, si no lo son, bastará multiplicar ambos términos por los estrictamente indispensables para que esa condición se cumpla; luego en la práctica deberán siempre seguirse las siguientes reglas, que abrazan todos los casos:

1.ª—*Para extraer la raíz cuadrada de una fracción, se multiplican sus dos términos por los factores primos de su denominador, cuyos exponentes sean impares, y se divide la raíz del numerador por la del denominador.*

2.ª—*Para extraer la raíz cúbica de una fracción, se multiplican sus dos términos por los factores primos del denominador necesarios para que todos los exponentes sean múltiplos* *de 3, y se divide la raíz del numerador por la del denominador..*

Si la raíz del numerador es a, y b la exacta del denominador, es evidente que en el caso en que la fracción $\frac{a}{b}$ sea solo aproximada, la verdadera raíz estará comprendida entre $\frac{a}{b}$ y $\frac{a+1}{b}$, ó $\frac{a-1}{b}$ y $\frac{a}{b}$, según que a se haya aproximado en menos de una unidad por defecto ó por exceso, y por lo tanto, que:

3.ª—*El error será siempre más pequeño que la unidad partida por la raíz del denominador.*

Ejemplos:

$$\sqrt{\frac{49}{900}}=\sqrt{\frac{49}{2^2.3^2.5^2}}=\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{2^2.3^2.5^2}}=\frac{7}{2.3.5}=\frac{7}{30} \text{ exacta.}$$

$$\sqrt{\frac{43}{900}}=\sqrt{\frac{43}{2^2.3^2.5^2}}=\frac{\sqrt{43}}{\sqrt{2^2.3^2.5^2}}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5} \text{ en menos de } \frac{1}{30},$$

por defecto.

$$\sqrt{\frac{49}{360}}=\sqrt{\frac{49}{2^3.3^2.5}}=\sqrt{\frac{49.2.5}{2^4.3^2.5^2}}=\frac{\sqrt{490}}{\sqrt{2^4.3^2.5^2}}=\frac{22}{60}=\frac{11}{30} \text{ en}$$

menos de $\frac{1}{60}$, íd.

$$\sqrt[3]{\frac{343}{27000}}=\sqrt{\frac{343}{2^3.3^3.5^3}}=\frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt{2^3.3^3.5^3}}=\frac{7}{30}, \text{ exacta.}$$

$$\sqrt[3]{\frac{323}{27000}}=\sqrt[3]{\frac{323}{2^3.3^3.5^3}}=\frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt{2^3.3^3.5^3}}=\frac{7}{30} \text{ en menos de } \frac{1}{30}, \text{ por}$$

exceso.

$$\sqrt[3]{\frac{49}{360}}=\sqrt[3]{\frac{49}{2^3.3^2.5}}=\sqrt[3]{\frac{49.3.5^2}{2^3.3^3.5^3}}=\frac{\sqrt[3]{3675}}{2.3.5}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15} \text{ en menos}$$

de $\frac{1}{30}$, íd.

Si se tratara de un número mixto, claro está que transformándolo en fracción, le serían aplicables estas reglas; pero como es posible que en la mayoría de los casos baste obtener su raíz en menos de una unidad y los cuadrados y cubos de los números enteros siempre se diferencian en más de 1 (265, 4.° y 266, 4.°) valor superior al de la fracción que del mismo forme parte, es evidente que:

4.°—*Para extraer la raíz cuadrada ó cúbica de un número mixto en menos de 1 unidad, será suficiente extraer la de su parte entera.*

Ejemplos:

$$\sqrt{90\tfrac{4}{5}} = 9 \text{ por defecto, en menos de una unidad.}$$

$$\sqrt[3]{90\tfrac{4}{5}} = 5 \text{ por exceso, en menos de una unidad.}$$

Escolio.—*Cuando el denominador de la fracción tenga raíz cuadrada ó cúbica exacta,*

convendrá, sin embargo, seguir la regla más generalizada (132 y 145), porque de este modo se podrá obtener la raíz con exactitud, en algunos casos.

Ejemplos:

$$\sqrt{6\tfrac{1}{4}} = \sqrt{\tfrac{25}{4}} = \tfrac{5}{4} = 1\,\tfrac{1}{4} \text{ exacta.}$$

$$\sqrt[3]{3\tfrac{3}{8}} = \sqrt[3]{\tfrac{27}{8}} = 1\,\tfrac{1}{2} \text{ exacta.}$$

275. En cuanto á las raíces de los números fraccionarios decimales (125, 126 y 138), se deduce de los razonamientos hechos al tratar de las enteras y del mismo que acabamos de hacer en las fracciones ordinarias, que las inexactas,

1.°—*Estarán aproximadas en menos de una unidad de su último orden,*

y que,

2.º—*El residuo expresará unidades del último orden con que se opere en el radicando.*

Esta sola consideración bastaría para poder extraer la raíz cuadrada ó cúbica de cualquier número en menos de una parte alícuota decimal, aun desconociendo la regla general (263, 1.º), puesto que para realizar dicho fin, bastará evidentemente,

3.º—*Convertir en decimal el radicando, si no lo fuese, con las necesarias cifras, para que la raíz pueda tener tantas después de la coma, como la parte alícuota,* fijada de antemano.

276. Si el radicando es decimal, se conseguirá el objeto:

Suponiéndole á su derecha tantos ceros como sea preciso, al lado de los sucesivos residuos,

á medida que se vaya verificando la operación, sin necesidad de escribirlos en el radicando.

En los restantes casos, es decir, tratándose de fracciones ordinarias, ó de números aproximados á los que deba darse previamente forma decimal, deberán calcularse

Con doble ó triple número de cifras después de la coma,

de las que exija la raíz cuadrada ó cúbica, si se emplean los procedimientos generales, pero aplicando la regla abreviada (270, 3.º, y 273, 3.º), no se necesita operar con las últimas, y por lo tanto, bastará determinar con exactitud:

1.º—*En la raíz cuadrada, el duplo de la mitad más una, más la mitad de las cifras significativas que haya de tener el resultado,*

para la verdadera radicación y para la división.

2.º—*En la raíz cúbica, el triplo de la mitad más una, más la tercera parte.*

Ejemplo.—Extraer en menos de 0'000000001 y empleando para el cálculo las menos cifras que sea posible, las raíces cuadradas de 239, 0'00239 y $\frac{47}{239}$.

2,3 9	1 5'4 5 9 6 2 4 8 3 4
1 3,9	2 5
1 4 0,0	3 0 4
1 8 4 0,0	3 0 8 5
2 9 7 5 0,0	3 0 9 0 9
1 9 3 1 9 0,0	3 0 9 1 8 6
7 6 7 8 4 0	3 0 9 1 9 2
1 4 9 4 5 6 0	2 4 8 3 4
2 5 7 9 7 2 0	
1 0 7 9 8 4 0	
1 5 2 2 6 4 0	
2 8 5 8 7 2	

0'0 0,2 3,9 0	0'0 4 8 8 8 7 6 1 6
7 9,0	8 8
8 6 0,0	9 6 8
8 5 6 0,0	9 7 6 8
7 4 5 6 0,0	9 7 7 6 7
6 1 2 3 1 0	9 7 7 7 4
1 5 6 6 6 0	6 1 6
5 8 8 8 6 0	
2 2 1 6	

4 7 0	239	
2 3 1 0	0'1 9,6 6,5 2,7 1,9 6,6 5,2 7	0'4 4 3 4 5 5 4 3 2
1 5 9 0	3 6,6	8 4
1 5 6 0	3 0 5,2	8 8 3
1 2 6 0	4 0 3 7,1	8 8 6 4
6 5 0	4 9 1 5 9,6	8 8 6 8 5
1 7 2 0	4 8 1 8 1 6	8 8 6 9 0
4 7 0	3 8 3 6 6 5	5 4 3 2
......	2 8 9 0 5 2	
......	2 2 9 8 2 7	
......	5 2 4 4 7	
......		

Esta misma regla, tan abreviada ya, proporciona el medio de abreviar la radicación muchísimo más aún, obteniendo el resultado en poco tiempo y sin gran trabajo con cuantas cifras decimales se desee, y aproximándose, por consiguiente, al valor de los números inconmensurables cuanto sea preciso, cosa que por los procedimientos ordinarios y aun por la regla abreviada seguida al pie de la letra, sería impracticable, si el número de cifras necesarias en la raíz fuese verdaderamente considerable.

Recordemos, en efecto, que el error de la raíz cuadrada ó cúbica obtenida de este modo (269 y 272) es siempre menor que una unidad del último orden, exceptuando un solo caso de la cúbica, en que sin necesidad de continuar la operación poco después de empezada, se conoce ya el resultado.

La única cifra que puede no ser exacta, es, por lo tanto, la última, á la que jamás se llega cuando se determina el valor de un inconmensurable, que debería tener un número indefinido de cifras; por consiguiente, *si los residuos fuesen exactos*, calculadas por el método ordinario las tres primeras cifras, se podrían calcular por división las dos siguientes: encontradas ya cinco, cuatro más; halladas estas nueve, otras ocho, y así sucesivamente, dividiendo siempre por el duplo ó triplo del cuadrado de la parte de raíz obtenida anteriormente.

Pero aunque los restos de las divisiones sean defectuosos, los residuos verdaderos pueden determinarse al fin de cada división

Elevando al cuadrado ó al cubo la parte de raíz hallada, y restando estas potencias del número hasta allí considerado, ó mejor, puesto que estos residuos serán las diferencias entre dicho número y el cuadrado ó cubo de la última parte de raiz calculada

Restando siempre del anterior residuo considerado con las necesarias cifras, el doble de esa parte seguido de tantos ceros como cifras tenga el cociente, multiplicado por este cociente, más el cuadrado del mismo, si se trata de raíz cuadrada, ó *el triplo del cuadrado de aquella parte por el cociente, más el triplo de la misma por el cuadrado de éste, más su cubo, después de escribir á la derecha del sumando tantos ceros como cifras tenga el cociente y doble número á la derecha del primero*, si es cúbica la raíz que se está extrayendo.

Si la raiz ha de ser cuadrada, el duplo del divisor por el cociente, más el cuadrado del cociente, ya sabemos también que puede hallarse

Escribiendo ó suponiendo escrito el último á la derecha del primero (265, 3.°), *y efectuando una sola multiplicación*, que en este caso tendrá varios productos parciales.

Compréndese desde luego la relativa rapidez de estas operaciones comparadas con las comunes y aun con las de la regla abreviada, rapidez que aún puede aumentarse considerablemente si se emplea la de *Guy* (245) en las divisiones, teniendo presente entonces que *la última cifra del cociente pudiera ser errónea*, por lo que no debe considerarse como perteneciente á la raíz, ni siquiera, por tanto, calcularse.

Como aplicación final de esta combinación de abreviaciones, y con objeto de que se comprenda bien su importancia y se aclare lo antedicho, nos propondremos calcular con la mayor rapidez posible el valor que aproximadamente corresponde á $\sqrt{2}$, á cuyo radicando, considerado como parte entera, supondremos seguido de cuantos ceros sean precisos para verificar las operaciones y restar los productos parciales convenientemente escritos.

$\sqrt{2}$

1 0,0

4 0,0

Residuo dividendo. **1 9 9,0 0,0 0**

Restos.. . . . . . . 6 2 0
5 6

Productos parciales. 5 6 4 8 4
1 1 2 9 6 8

Residuo dividendo.. . . **3 8 3 6,0 0,0 0,0 0**

Restos.. . . . . 1 0 0 7 6
1 5 9 1
1 7 7

Productos parciales. . . 1 4 1 4 2 0 6 7 5
8 4 8 5 2 4 0 5
2 8 2 8 4 1 3 5

Residuo dividendo. **1 7 6 4 1 7 7 5,0 0,0 0,0 0,0 0,0 0**

Restos.. . . . . 6 7 1 2 1 3 0
1 0 5 5 2 7 6
2 0 6 7 4 8
8 7 6 0
2 7 5

Productos parciales.. . . . . 8 4 8 5 2 8 1 1 8 7 1 1 9
1 9 7 9 8 9 8 9 4 3 6 6 1 1
8 4 8 5 2 8 1 1 8 7 1 1 9
5 6 5 6 8 5 4 1 2 4 7 4 6
1 6 9 7 0 5 6 2 3 7 4 2 3 8

Residuo dividendo. . . . . . **2 6 8 8 3 8 6 0 8 8 7 1,0 0,0 0.....**

Restos. 1 4 2 8 0 1 6 7 6 4 3 8 6 0
1 3 8 0 3 2 0 2 0 1 3 0
2 4 8 9 4 9 3 5 1 4 1
2 2 6 7 5 1 8 1 4 4
4 7 7 6 4 4 5
1 9 4 8 0 1 8
2 5 0 9 6 2
2 4 6 8 9
2 0 6 2
8 3

. . . .

. . . .

. . . .

1'4 1 4 2 1 3 5 6 2 3 7 3 0 9 5 0 4 8 8 0 1 6 8 8 7.....

2 4

2 8 1

2 8 2

4 2..... cociente.

2 8 2 8 4

1 3 5..... cociente.

2 8 2 8 4 2 7 0

6 2 3 7 3 0..... cociente.

2 8 2 8 4 2 7 1 2 4 7 4 6 0

9 5 0 4 8 8 0 1 6 8 8 7..... cociente.

En menos de 0 0000000000000000000000001; con otra división la tendriamos en menos de una unidad del orden 48.º; con otra en menos de una del 94.º, etc.

CAPÍTULO III

DETERMINACIÓN DE LOGARITMOS

I.—Generalidades.

277. Estudiada en sus detalles más importantes la primera de las dos operaciones inversas (255) que la Potenciación origina, fáltanos considerar el caso en que se conozcan el resultado y la base para hallar

El grado de la potencia á que debe elevarse un número para producir otro,
ó sea el LOGARITMO de dicho número.

La operación tendrá, pues, por objeto,

Dados dos números, encontrar el exponente á que debe elevarse uno de ellos para obtener por resultado el otro.

El que se considera como base de la potencia sigue llamándose BASE del logaritmo: el *número á que corresponde un logaritmo de determinada base*, ANTILOGARITMO de aquél, y la operación, *se* INDICA *escribiendo delante del número la abreviación* LOG. *con el valor de la base por sub-índice* (161), que también se coloca en igual forma cuando por la abreviación ANTLOG. se expresa la palabra *antilogaritmo*.

Así, $\mathrm{Log}_b c = a$, indica que el logaritmo de c en la base b es a, ó que $b^a = c$, lo mismo que $\mathrm{Antlog}_b a = c$.

$$\text{De } 3^4 = 81; \quad \mathrm{Log}_3 81 = 4 \text{ y } \mathrm{Antlog}_3 4 = 81.$$

Como la operación por sí misma no tiene ningún interés práctico más que por sus derivadas, cuando se ha calculado un SISTEMA, ó *conjunto de los logaritmos correspondientes á una misma base de todos los valores numéricos*, nos limitaremos á deducir las consecuencias inmediatas de las definiciones que con dichos sistemas se relacionan.

1.ª—*La base elevada al logaritmo ha de producir siempre el antilogaritmo*,
en virtud de la definición.

Si $\mathrm{Log}_3 81 = 4$, ó lo que es igual, $81 = \mathrm{Antlog}_3 4$, también $3^4 = 81$.

2.ª—*El logaritmo de la base siempre será igual á la unidad positiva*,

pues sólo la primera potencia de un número, podrá ser igual al mismo.

$$\text{De } 3^4 > 3 \ (248,\ 2.^a),\ 3^1 = 3 \ (248,\ 1.^a) \text{ y } 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} < 3 \ (256,\ 2.^o)$$

$$\text{Log}_3 3 = 1.$$

3.ª—*Si la base fuera la unidad, sólo ella misma tendría por logaritmo un valor cualquiera, careciendo de logaritmo todos los demás números*,

ya que todas las potencias de 1 serán iguales á 1 en valor numérico:

$$1^4 = 1 \ (248,\ 2.^o),\ 1^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1 \ (256,\ 2.^o) \text{ y de } 1^a = 1,\ \text{Log}_1 1 = a;$$

siendo a un valor cualquiera, que podría llegar hasta sus límites 0 é ∞.

4.ª—*Si la base es distinta de la unidad, el logaritmo de* 1 *siempre será* 0,

en razón á que sólo la potencia de este grado podrá ser igual á la unidad.

$$\text{De } a^0 = 1 \ (248,\ 3.^o),\ \ \text{Log}_a 1 = 0.$$

5.ª—*Si la base fuera* 0 *ó* ∞, *sólo estos límites tendrían por logaritmo un valor cualquiera, siendo* 0 *el de todos los números.*

$$\text{De } 0^a = 0 \ (248,1.^o),\ 0^0 = a \ (\text{id. } 5.^o),\ \infty^a = \infty \ (\text{id. } 2.^o),\ \text{é } \infty^a = a \ (\text{id. } 5.^o)$$

$$\text{Log}_0 0 = a, \qquad \text{Log}_0 a = 0, \qquad \text{Log}_\infty \infty = a \ \text{ y } \ \text{Log}_\infty a = 0.$$

6.ª—*Si la base fuera negativa, solo parte de los números podrían tener logaritmos*,

porque los que fuesen, por ejemplo, potencias de grado impar y positivas del valor numérico de la base, carecerían de ellos, ya que no hay ningún número negativo que elevado á una potencia de grado impar produzca un resultado positivo (247).

De las anteriores consecuencias se deduce el siguiente importante

Corolario.—*La base de un sistema de logaritmos ha de ser un número constante, positivo y diferente de la unidad.* (3.ª, 5.ª y 6.ª)

278 1.º—*Si la base es mayor que la unidad, los logaritmos de los números mayores que 1 serán positivos y los de los menores negativos, aumentando ó disminuyendo á medida que aumenten ó disminuyan sus respectivos antilogaritmos,*
puesto que $\text{Log}_a 1=0$ (277, 4.ª), y para que las potencias de igual base vayan aumentando ó disminuyendo, será necesario que aumenten ó disminuyan los exponentes (248, 4.ª), no habiendo más números que los negativos que puedan y deban considerarse como menores que 0 (178, 1.º), y tanto más pequeños, cuanto mayor sea su valor numérico (178, 2.º)

$$\text{Log}_5 7 > 0,\ \text{Log}_5 \tfrac{1}{7} < 0,$$

$$\text{Log}_5 (7-2) < \text{Log}_5 7,\ \text{Log}_5 \tfrac{2}{7} > \text{Log}_5 \tfrac{1}{7}$$

Corolario.—*Si dos números son iguales ó desiguales sus logaritmos conservarán la misma relación.*

2.º—*Si la base es mayor que la unidad, el logaritmo de* ∞ *será* ∞ *y el de* 0 *será* $-\infty$,
ya que un valor numérico cualquiera elevado á una potencia de grado limitado, por muy grande que lo supongamos, produciría otro valor limitado, pero nunca indefinidamente grande ni indefinidamente pequeño.

3.º—*Si la base es entera, los logaritmos serán ó enteros ó inconmensurables,*
porque si suponemos $b^{\frac{m}{n}}=c$, siendo b entero y c un valor cualquiera, como $b^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{b^m}$ (257, 2.º), si esa raíz es exacta, $\frac{m}{n}$ será un número entero, y si es inexacta será inconmensurable (257).

De esta última consecuencia se deduce que la mayoría de los logaritmos expresados en forma decimal, constará de una *parte entera* llamada característica, y de otra fraccionaria, que se distingue con el nombre de mantisa.

279. Claro es que siendo la Determinación de logaritmos una operación inversa de la Potenciación, la característica podremos siempre hallarla, dividiendo por la base el número dado, cuantas veces sea posible.

Así, por ejemplo, si se tratara de hallar el logaritmo de 6 en la base 2, tendríamos

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \;\big|\; 2 \\ & 1 \;\big|\; 1 \end{array}$$

y como hemos podido hacer dos divisiones, esa sería la característica del $\mathrm{Log}_2 6$.

Para encontrar la parte fraccionaria, supondríamos el logaritmo igual á $2+\frac{1}{x}$ llamando x al denominador de la fracción desconocida que ha de aumentarse á 2, y como ha de ser $2^{\mathrm{Log}_2 6}=6$ (275, 1.ª), tendríamos sustituyendo

$$2^{2+\frac{1}{x}}=6, \quad \text{ó bien} \quad 2^2 . 2^{\frac{1}{x}}=6 \text{ (192, 2.°, y 261, 1.° Cor.)}$$

y dividiendo ambos miembros por $2^2=4$ (201, 2.°)

$$2^{\frac{1}{x}}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}, \quad \text{de donde} \quad \left(2^{\frac{1}{x}}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^x, \text{ ó } \left(\frac{3}{2}\right)^x=2.$$

Dando ahora á x los valores 1, 2, 3..... hallaríamos

$$\left(\frac{3}{2}\right)^1=\frac{3}{2}<2 \quad \text{y} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}>2;$$

luego el valor de x, estaría comprendido entre 1 y 2 y podríamos suponerlo igual á $1+\frac{1}{y}$, por lo que debería verificarse

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{1+\frac{1}{y}}=2, \quad \text{ó} \quad \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{y}}=2, \quad \text{de donde} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{y}}=\frac{4}{3}$$

y elevando análogamente, á la potencia y

$$\left(\frac{4}{3}\right)^y=\frac{3}{2}$$

y como $\left(\frac{4}{3}\right)^1=\frac{4}{3}<\frac{3}{2}$ y $\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}>\frac{3}{2}$,

el valor de y estaría también comprendido entre 1 y 2 y lo supondríamos igual á $1+\frac{1}{z}$ en cuyo caso

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{1+\frac{1}{z}}=\frac{3}{2}, \quad \text{ó} \quad \frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{z}}=\frac{3}{2}, \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{z}}=\frac{9}{8} \text{ y } \left(\frac{9}{8}\right)^z=\frac{4}{3}$$

y como $\left(\frac{9}{8}\right)^1=\frac{9}{8}<\frac{4}{3}$, $\left(\frac{9}{8}\right)^2=\frac{81}{64}<\frac{4}{3}$, y $\left(\frac{9}{8}\right)^3=\frac{729}{512}>\frac{4}{3}$

el valor de z estaría comprendido entre 2 y 3, podríamos suponerlo igual á $2+\frac{1}{u}$ y así sucesivamente.

Habiendo supuesto, pues,

$$\text{Log}_2 6=2+\frac{1}{x};\ x=1+\frac{1}{y};\ y=1+\frac{1}{z};\ z=2+\frac{1}{u}$$

y pudiendo continuar así indefinidamente, se hallaría

$$\text{Log}_2 6=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cdots}}} = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{3}{2}+\cdots}}$$

$$=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{3..}}=2+\cfrac{1}{\cfrac{5}{3..}}=2+\frac{3}{5}\cdots=2{,}6.....$$

siendo evidente, que siguiendo la misma marcha y haciendo un número suficiente de sustituciones, nos podríamos aproximar cuanto quisiéramos al verdadero valor de $\text{Log}_2 6$, aunque las operaciones serían muy pesadas, por lo que aquí nos hemos detenido en el valor de z, pues sólo hemos tratado de hacer ver la *posibilidad* de efectuar la operación, y por lo tanto, de calcular, cuántos logaritmos se desee constituyan parte de un sistema.

Escolio.—*Las fracciones* de la forma que ha resultado para $\mathrm{Log}_2 6$, *que se componen de un entero, más una fracción cuyo numerador es* 1, *y cuyo denominador es otro entero más una fracción cuyo numerador es* 1, *y así sucesivamente*, reciben el nombre de CONTINUAS.

II.—Operaciones derivadas.

280. Con los logaritmos indicados no pueden hacerse más transformaciones ó reducciones que las comunes á todos los signos generales que representan un valor cualquiera, y en cuanto al logaritmo de una combinación aditiva ó sustractiva, no se acostumbra calcular en la práctica hasta haber encontrado su valor numérico (161); pero los logaritmos de las demás operaciones indicadas son de importancia grandísima, tanto bajo el punto de vista teórico, como práctico.

1.°—*El logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de los factores.*

Sea b la base del sistema, n, n', n'' el producto indicado y a, a' y a'' los respectivos logaritmos de n, n' y n''.

Debiendo verificarse (275, 1.°):

$$b^{a} = n$$
$$b^{a'} = n'$$
$$b^{a''} = n''$$

tendremos multiplicando ordenadamente (192, 2.°):

$$b.^{a} b.^{a'}\, b.^{a''} = b^{a+a'+a''} = nn'n'',$$

ó lo que es lo mismo,

$$\mathrm{Log}_b n\, n'n'' = a + a' + a'' = \mathrm{Log}_b\, n + \mathrm{Log}_b\, n' + \mathrm{Log}_b\, n''$$

según la hipótesis y conforme al enunciado.

$$\mathrm{Log}_b\, 2 \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \sqrt{5} = \mathrm{Log}_b 2 + \mathrm{Log}_b\, \tfrac{3}{4} + \mathrm{Log}_b \sqrt{5}.$$

2.°—*El logaritmo de un cociente, es igual al logaritmo del dividendo, menos el del divisor.*

En el mismo supuesto,

$$b^{a}=n$$
$$b^{a'}=n',$$

y dividiendo ordenadamente (202, 2.°),

$$b^{a-a'}=\frac{n}{n'}$$

de donde

$$\text{Log}_b \frac{n}{n'}=a-a'=\text{Log}.n-\text{Log}.n'.$$

$$\text{Log}. \frac{7^3}{\sqrt[-2]{5}}=\text{Log}.7^3-\text{Log}.\sqrt[-2]{5}$$

3.°—*El logaritmo de una potencia, es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base.*

De la igualdad

$$b^{a}=n$$

deduciremos, elevando ambos miembros á la potencia de cualquier grado p (250, 3.°),

$$(b^{a})^{p}=b^{pa}=n^{p},$$

y por consiguiente,

$$\text{Log}.n^{p}=pa=p.\text{Log}.n.$$

$$\text{Log}.7^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}\cdot\text{Log}.7.$$

4.°—*El logaritmo de una raíz, es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice.*

Porque de

$$b^a=n$$

extrayendo la raíz de cualquier índice q (257, 2.º)

$$\sqrt[q]{b^a}=b^{\frac{a}{q}}=\sqrt[q]{n}$$

y por lo tanto,

$$\text{Log.}\sqrt[q]{n}=\frac{a}{q}=\frac{\text{Log.}n}{q}$$

$$\text{Log.}\sqrt[5]{\frac{6}{7}}=\frac{\text{Log.}\frac{6}{7}}{5}=\frac{1}{5}\text{Log.}\frac{6}{7}$$

Corolario.—De la penúltima proposición se deduce, que calculados los logaritmos en un sistema de base b, es muy fácil hallar los que corresponden á los mismos números en otra base B, porque de la igualdad que debería verificarse para uno cualquiera n

$$B^{\text{Log.}_B n}=n$$

se desprende tomando logaritmos en la base b,

$$(\text{Log}_B n)\ (\text{Log}_b B)=\text{Log}_b n$$

y dividiendo por $\text{Log}_b B$,

$$\text{Log}_B n=\frac{\text{Log}_b n}{\text{Log}_b B}=(\text{Log}_b n)\frac{1}{\text{Log}_b B}$$

luego,

Para encontrar los logaritmos de los números en una cierta base, cuando son conocidos en otra diferente, basta multiplicar éstos por el cociente de dividir la unidad por el logaritmo de la nueva base tomado en el sistema primitivo.

Este *cociente constante*, recibe el nombre de MÓDULO del sistema.

$$\mathrm{Log}_2 7 = \frac{\mathrm{Log}_{10} 7}{\mathrm{Log}_{10} 2} = \mathrm{Log}_{10} 7 \cdot \frac{1}{\mathrm{Log}_{10} 2}.$$

III.—Logaritmos usuales.

281. El sistema de logaritmos de que en la práctica se hace uso, casi exclusivamente, es el DECIMAL, ó *cuya base es* 10, y alguna vez el que tiene por base el número inconmensurable que siempre se representa por la letra e para abreviar, cuyo valor es:

$$e = 2'718281828459045235360287471352662498.....$$

Los logaritmos decimales se llaman también USUALES, VULGARES ó de BRIGGS, que fué quien primero los calculó, y *los que tienen por base e,* HIPERBÓLICOS ó NEPERIANOS, por haber sido Neper quien vulgarizó sus propiedades, estudiando las de la curva llamada *hipérbola.*

Los primeros se indican abreviadamente por la supresión del sub-índice, y los segundos escribiendo solamente la inicial L.

$$Log.\mathrm{N} = Log_{10}\mathrm{N}; \quad \mathrm{L.N} = Log_e\mathrm{N}.$$

De aquí en adelante nos referiremos siempre á los decimales, no solo por ser los que se usan comunmente, sino porque una vez conocidos, ya sabemos por el último corolario, que si necesitásemos operar en algún cálculo con el logaritmo neperiano de un número, podriamos obtenerlo inmediatamente, sin más que dividir el decimal por

$$\mathrm{Log.}\ e = 0'4342944819032518276511289189166050 82.....$$

ó multiplicarlo por

$$\frac{1}{\mathrm{Log.}\ e} = 2'302585092994045684017991454684364208.....$$

números que también nos servirían para pasar de los neperianos á los decimales, puesto que de la igualdad demostrada (278, Cor.)

$$\left(\mathrm{Log}_B n\right)\left(\mathrm{Log}_b B\right)=\mathrm{Log}_b n,$$

se deduce, haciendo $b=n=10$ y $B=e$ (275, 2.ª),

$$(L.10)\ (\mathrm{Log}.e)=1,\ \mathrm{Log}.e=\frac{1}{\mathrm{L.\ 10}}\ \text{y}\ \mathrm{L.10}=\frac{1}{\mathrm{Log}\ e}$$

es decir, que los módulos de ambos sistemas son números INVERSOS, ó *que dan de producto la unidad*, como

$$\frac{2}{3}\ \text{y}\ \frac{3}{2},\ 7\ \text{y}\ \frac{1}{7},\ 2^3\ \text{y}\ 2^{-3},\ \sqrt[-2]{5}\ \text{y}\ \sqrt{5},\ \text{etc.}$$

282. De la sola inspección de la igualdad fundamental de los logaritmos usuales,

$$10^{\pm a}=n,$$

en la que suponemos n un número cualquiera, mayor ó menor que 1, y a, ó $-a$, su logaritmo (276, 3.°), se deduce que:

1.°—*Sólo las potencias de* 10, ó en otros términos, *las unidades decimales de cualquier orden, tendrán por logaritmo un número entero, compuesto de tantas unidades positivas ó negativas como indique el grado de la potencia*, ó bien *el orden de la unidad á la izquierda ó derecha de las simples.*

$$\mathrm{Log.}\ 10^3=\mathrm{Log.}\ 1000=3,$$

$$\mathrm{Log.}\ 10^{-3}=\mathrm{Log.}\ \frac{1}{10^3}=\mathrm{Log.}\ \frac{1}{1000}=\mathrm{Log.}\ 0{'}001=-3.$$

Si el antilogaritmo no es potencia exacta de 10, siendo mayor que 1, estará comprendido, por ejemplo, entre 10^n y 10^{n+1}, teniendo su parte entera n cifras, y su logaritmo será, por consiguiente, mayor que Log. $10^n=n$ y menor que Log. $10^{n+1}=n+1$; luego constará de n unidades enteras y una parte decimal, por lo que:

2.ª—*La característica del logaritmo de un número mayor* *que 1, constará de tantas unidades positivas, menos una, como cifras tenga la parte entera de dicho número.*

$$\text{Log}.35826\tfrac{5}{8}=\text{Log}.\ 35826{,}625=4{,}.....$$

Además sabemos que (278, 1.°, 2.° y 3.°) siendo N un número cualquiera,

$$\text{Log}.(N.10^n)=\text{Log}.N+\text{Log}.10^n=\text{Log}.N+n,$$

$$\text{Log}.(N:10^n)=\text{Log}.N-\text{Log}.10^n=\text{Log}.N-n,$$

y para efectuar la adición ó sustracción indicadas, si n es entero, se agregará ó quitará de la parte entera de Log.N, quedando lo mismo la fraccionaria; luego

3.°—*Si un número se multiplica ó divide por una potencia entera y positiva de* 10, ó en otros términos, *si se corre la coma á la derecha ó izquierda de un número decimal, la mantisa de su logaritmo no variará y la característica quedará aumentada ó disminuida, en tantas unidades como tenga el grado de la potencia,* ó bien *como lugares se haya corrido la coma.*

Si $\text{Log}.35826=4{,}...$, $\text{Log}.3582600=6{,}...$ y $\text{Log}.358{,}26=2{,}...$

siendo iguales en los tres casos las cifras que hubiese después de la coma.

Corolario.—*La característica del logaritmo de un número decimal menor que 1, constará de tantas unidades negativas como indique el lugar ocupado después de la coma por su primer cifra significativa,*

porque si esta cifra ocupa el lugar n, multiplicando el número por 10^n pasaría al de las unidades, y la característica del nuevo número sería 0 (2.°); pero como habría quedado aumentada en n unidades, la verdadera sería $-n$, permaneciendo igual la mantisa.

Escolio.—El logaritmo entonces se compondría de *una parte entera negativa y una fraccionaria positiva,* por lo que no podría llevar el signo — delante, que indicaría era todo él negativo, sino encima de la parte entera, como los complementos de igual forma, de que hicimos uso en la Sustracción (187).

$$\text{Log. } 0‘00035826=-4+0‘\ldots\ldots=\bar{4}‘\ldots\ldots$$

283. Vemos, por lo dicho, que en el cálculo logarítmico se combinarán muchas veces, no sólo números positivos y negativos, sino también mixtos de ambas formas, por lo que conviene con frecuencia saber transformar unos en otros, lo que nunca podría ofrecer dificultad teniendo en cuenta que los últimos, $\bar{4}$‘3749526, por ejemplo, son diferencias indicadas 0‘3749526—4, escritas abreviadamente, y que puede realizarse por medio de dos reglas muy sencillas.

En efecto; para efectuar esa operación indicada, diríamos (179, 2.º):

$$\begin{array}{r} 4 \\ 0‘3749526 \\ \hline 3‘6250474 \end{array}$$

de 6 á 10, **4**; de 2 á 9, **7**; de 5 á 9, **4**; de 9 á 9, **0**; de 4 á 9, **5**; de 7 á 9, **2**; de 3 á 9, **6**; y de 0 á 3, **3** (40, 3.º), de donde deduciríamos

$$0‘3749526-4=\bar{4}‘374926=-3‘6250474$$

por lo que:

1.º—*Para transformar un logaritmo de característica negativa y mantisa positiva en otro todo negativo, ó éste en aquél, se resta la primer cifra de la derecha de la mantisa, de* 10, *todas las demás de* 9, *y se disminuye en el primer caso y aumenta en el segundo una unidad, al valor numérico de la característica.*

Hé aquí ahora una suma, tres diferencias y el producto por un entero de números de esta clase, para encontrar las cuales, basta tener presentes las que hemos dado para operar con números positivos y negativos:

$$\begin{array}{r} \bar{3}‘8496512 \\ \bar{1}‘9657068 \\ 0‘7594236 \\ 2‘2003427 \\ \hline 0‘7751243 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2‘2003427 \\ \bar{1}‘9657068 \\ \hline 2‘2346359 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \bar{1}‘9657068 \\ 2‘2003427 \\ \hline \bar{3}‘7653641 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \bar{3}‘8496512 \\ \bar{2}‘9657068 \\ \hline \bar{2}‘8839444 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \bar{3}‘8496512 \\ 7 \\ \hline \overline{16}‘9475584 \end{array}$$

En la Adición ha resultado 27 de la suma de las décimas, por lo que hemos escrito el **7**, y dicho después: 2 y -3, -1, más -1, -2, más 2, **0**.

En la primer sustracción hemos restado, en las décimas, de 10 á 12, diciendo luego: 1 y -1, 0, á 2, **2**.

En la segunda, de 2 á 9 y enseguida de 2 á -1, -3, puesto que $-1-2=-3$.

En la tercera, de 10 á 18 y de $1+(-2)=-1$, á -3, $\mathbf{-2}$, porque $-3-(-1)=-3+1=-2$.

La multiplicación no puede ofrecer duda; pero si en vez de multiplicar por 7, lo hubiéramos tenido que hacer por $\frac{7}{11}$, tendríamos ahora que dividir por 11 el producto hallado, lo que nos daría un conjunto de dos números fraccionarios de distinto signo, que originarían nuevas operaciones; pero esto puede evitarse añadiendo á la característica -16, las -6 unidades que le faltan para componer un $\overline{11}$ y $+6=60$ *décimas* á la mantisa, con lo cual es evidente no se alterará el valor de dicho producto, y tendremos

$$\begin{array}{r|l} \overline{16}'9475584 & 11 \\ \overline{2}'6588689 & 0'00000005 \text{ de resto.} \end{array}$$

$-16-6=22$ dividido por 11, $\mathbf{-2}$; $60+9=69$, dividido por 11, **6**;
$6.11=66$ á 69, 3, etc.

luego:

2.º—*Para dividir por un entero un número de característica negativa y mantisa positiva, se añaden á la primera las unidades negativas necesarias, para componer un múltiplo del divisor, se divide por éste, se agregan otras tantas positivas reducidas á décimas á la cifra de este orden, se vuelve á dividir y se continúa la operación por la regla ordinaria.*

Escolios.—Este caso comprende el de dividir por una fracción, que equivale á multiplicar por su inversa (228, 3.º).

La potenciación y radicación de logaritmos no es frecuente; pero si tuviéramos que efectuarlas con alguno de dicha forma, lo transformaríamos antes en otro todo negativo y le aplicaríamos las reglas demostradas.

284. Para conocer, por último, otra interesante propiedad

de los logaritmos, llamemos D á la diferencia entre dos números N y $N+D$, y tendremos para la diferencia de sus logaritmos (278, 2.°)

$$\text{Log.}\ (N+D)-\text{Log.}N=\text{Log.}\ \frac{N+D}{N}=\text{Log.}\ \left(1+\frac{D}{N}\right)$$

La última fracción disminuirá á medida que disminuya el numerador y aumente el denominador y en el límite, es decir, cuando esta fracción llegase á ser 0, también
$\text{Log.}(N+D)-\text{Log.}N=\text{Log.}\ 1=0$, luego:

1.°—*La diferencia entre los logaritmos de dos números va disminuyendo y tiende á anularse, á medida que los números son mayores y sus diferencias más pequeñas.*

Demostrada esta verdad, claro es que si $\text{Log.}N=n$ y $\text{Log.}(N+1)=n+d$, el $\text{Log.}\left(N+\frac{p}{q}\right)$ no será igual á $d\frac{p}{q}$, porque el aumento d que corresponde á aquellos logaritmos, no se repartirá por igual entre las q partes en que suponemos dividida la unidad, ya que irá siendo menor á medida que aumenten los números; pero siendo N bastante grande, serán tan insignificantes las diferencias de esos pequeños aumentos, que en la inmensa mayoría de los casos no afectarán á los valores aproximados de los logaritmos, por lo que á pesar de no ser rigurosamente cierto, puede admitirse bajo el punto de vista práctico que:

2.°—*Cuando los números son bastante grandes y no se diferencian en más de una unidad, á igual aumento en los números, corresponde igual aumento en sus logaritmos.*

La admisión de este principio permite, como vamos á ver, encontrar con facilidad y rapidez el logaritmo de cualquier número, por muy grande ó pequeño que sea, cuando pueden tenerse á la vista *los de todos los números enteros comprendidos entre* 0 *y cualquier otro arbitrario*, cuyo valor debe ser bastante grande y nunca inferior á 10000, si por virtud de lo dicho se quiere que el error cometido al calcular los demás sea verdaderamente insignificante.

La reunión de esos números y de sus respectivos logaritmos, dispuestos de manera que conocido uno se pueda fácilmente hallar el otro, constituye las TABLAS DE LOGARITMOS, que generalmente tienen forma de

Libro dividido en columnas y no suelen contener más que las mantisas,

en razón á que las características se pueden escribir á la simple vista del número (280, 2.° y 3.°, Cor.); pero en cambio todas las modernas llevan al lado de las mantisas su *diferencia con la siguiente*, llamada TABULAR, expresada para abreviar en unidades enteras, aunque se refiere al *último orden decimal* de los logaritmos, que por lo menos son *diez milésimas*, siendo lo más frecuente que tengan después de la coma 5, 6, ó 7 cifras decimales, en cuyo caso, como

Siempre son erróneos en menos de media unidad del último orden,

se hallan aproximados por defecto ó exceso en menos de media *cienmilésima*, *millonésima* ó *diezmillonésima*.

Las de Lalande, que llegan hasta 10000, con mantisas de cinco cifras, por su sencillez; las de Vázquez Queipo hasta 20000, con seis, por su claridad, elegancia y fácil manejo, y las de Callet hasta 108000, con siete, por su mayor aproximación, suelen ser *las más usadas.*

IV.—Tablas de logaritmos.

285. Las tablas más sencillas contienen los números enteros por orden de magnitud en una columna, casi siempre encabezada con una *N*; otra á su derecha con los respectivos logaritmos ó sus mantisas, y una tercera con las diferencias tabulares.

Como *todas las cifras de los números se encuentran en una sola columna,* lo que no sucede en otras, éstas se llaman de SIMPLE ENTRADA, y basta

Buscar en sus columnas, cuando en ellas deben hallarse, el número ó mantisa conocidos, para poder *leer á su derecha ó izquierda la correspondiente mantisa ó número*, á los que ya no faltará más que *ponerle la debida característica* (280, 2.° y 3.°, Cor.) *ó correr la coma para separar la parte entera que le corresponda* y conocer el respectivo logaritmo ó antilogaritmo.

En la tabla III pueden encontrarse todos los enteros hasta

10000 y las mantisas de sus logaritmos, expresados con siete decimales, con objeto de que puedan servir para los cálculos en que se necesite mucha aproximación; pero debemos advertir á los que las usen, para facilitar la práctica, que en la mayoría de las operaciones, y especialmente cuando no haya que calcular potencias, es suficiente considerar las cuatro ó cinco primeras cifras, aumentando la última que se conserve en una unidad, si la primera despreciada es 5 ó mayor (233, 3.°).

Inútil nos parece añadir que si se suprimen cifras de la derecha de las mantisas para facilitar los cálculos, deben suprimirse igual número de la derecha de las diferencias cuando se tenga que operar con ellas.

Las columnas marcadas con una *N* contienen los números; las siguientes, encabezadas con *M*. Log., las mantisas de los logaritmos, y las terceras, que llevan una *D*, las diferencias tabulares correspondientes á los de los números mayores que 1000.

Con dicha tabla, á la que de aquí en adelante nos referiremos, y en la que hemos omitido la repetición de las cifras comunes á las decenas de los números mayores que 1000, á las milésimas de las mantisas, á las cienmilésimas de las diferencias, y aun todas éstas cuando se repiten, por lo que siempre deben buscarse ó escribirse las que haya encima de los lugares que aparezcan en blanco, sería fácil ver que:

$$\text{Log. } 2453 = 3'3896975$$
$$\text{Log. } 245300 = 5'3896975$$
$$\text{Log. } 0'02453 = \overline{2}'3896975$$
$$\text{Antlog. } 3'3907585 = 2459$$
$$\text{Antlog. } 6'3907585 = 2459000$$
$$\text{Antlog. } \overline{4}'3907585 = 0'0002459$$

sin más que recordar las relaciones entre la característica y el número de cifras de la parte entera ó significativa (280, 2.°, 3.° y Cor.), buscando en el primer caso, en la columna *N*, las 245 decenas del número y la cifra 3 de las unidades, á la derecha de la cual se encontrarán las 6975 diezmillonésimas de la mantisa, que deben ir precedidas de las 389 milésimas que se hallan encima y son comunes á todas las de los números comprendidos entre 2450 y 2455.

De un modo análogo se buscarían en el segundo, en la columna *M.* Log., las milésimas 390 de la mantisa, hallando cuatro lugares más abajo las 7585 diezmillonésimas, cuyo conjunto corresponderá, por tanto, al número 2459, representado por las 9 unidades de la izquierda y las 245 decenas cuya repetición se ha omitido.

Las diferencias entre cada mantisa y la siguiente, serían 1761 y 1766 diezmillonésimas.

Las de DOBLE ENTRADA se llaman así, porque *al buscar las cifras de los números hay que atender á dos columnas*, la marcada con una *N*, que contiene las decenas, y una de las diez situadas á la derecha, que se hallan encabezadas por las cifras de las unidades desde 0 hasta 9.

MODELO DE UNAS TABLAS DE DOBLE ENTRADA

SIN LAS DIFERENCIAS QUE SUELEN ESCRIBIRSE Á LA DERECHA DE CADA COLUMNNA Ó DE TODA LA PÁGINA.

N	0	1	2	3	4	.....	9
240	3802112	03922	05730	07538	09345	....	18368
41	20170	21972	23773	25573	27373	....	36359
42	38154	39948	41741	43534	45326	....	54275
43	56063	57859	59636	61421	63206	....	72118
44	73898	75678	77457	79235	81012	....	89888
45	91661	93433	95205	96975	98746	....	
	39						07585
46	09351	11116	12880	14644	16407	....	25211
47	26970	28727	30485	32241	33997	....	42765
48	44517	46268	48018	49767	51516	....	60249
49	61993	63737	65480	67223	68964	....	77673
N	0	1	2	3	4	....	9

Así para encontrar en ellas el Log.2453

Se buscaría en la columna N, 245 y *en la parte superior ó inferior de la página el 3, siendo entonces la mantisa buscada la común* ó que pertenece á la línea de números que empieza por 245 y á la columna 3, es decir, 3896975, por pertenecer las cifras 38 á todas las que tiene enfrente y debajo, hasta llegar á las 39.

Por el contrario, para buscar el número correspondiente á un logaritmo $\overline{4}$‘3907585, cuya mantisa estuviera en las tablas, bastaría

Tomar por decenas las que en la columna N tenga á la izquierda y escribirle á la derecha las unidades que se encuentren en la parte superior, multiplicando ó dividiendo el número así representado, por la unidad seguida de tantos ceros como indique la diferencia entre la característica dada y el número de cifras menos una del obtenido, ó entre éste y aquélla.

Así tendríamos Antlog.$\overline{4}$‘3907585=0‘0002459.

286. Si el número, siendo decimal, no puede buscarse en las tablas, será porque el valor representado por sus cifras significativas, considerando siempre la última como unidades simples, será mayor que los contenidos en ellas, como, por ejemplo, 485679, 48‘5679, ó 0‘0485679.

En este caso, ya sabemos que la respectiva característica será 5, 1, ó $\overline{2}$; pudiendo, por lo tanto, prescindir del lugar que ocupe la coma y suponerla siempre colocada después del valor que en las tablas podamos buscar, puesto que la mantisa de los logaritmos de esos números y la del correspondiente á 4854‘79 serán iguales (280, 3.°).

Propongámonos, pues, encontrar ésta.

En las tablas hallaremos, para valor de la mantisa de 4856, el número 6862787 *diezmillonésimas*, y á su lado la diferencia tabular D=894 *diezmillonésimas* entre esa mantisa y la siguiente 6863681, que corresponde al número 4856+1=4857, y que si no se encontrase en ellas, se podría determinar de memoria.

Ahora bien; admitiendo, como hemos admitido (282, 2.°), que ese aumento de 894 diezmillonésimas se reparta por igual entre las mantisas de los números fraccionarios mayores que 4856 y menores que 4857, al aumento de 0‘01 corresponderá en los logaritmos el de 0‘01.894=8‘94 *diezmillonésimas*, y á las 79 centésimas del número, el de 8‘94.79=894.0‘79=706‘26 *diezmillonésimas;* luego agregando 706 á la inmediata inferior de las tablas 6862787, obtendremos la pedida 6862787+706=6863413, y

Log. 485679 =5‘6863413

Log. 48‘5679 =1‘6863413

Log. 0‘0485679=$\overline{2}$‘6863413

es decir, que:

1.°—*Para determinar el logaritmo de un número decimal cuya mantisa no se pueda hallar en las tablas, se encuentra la correspondiente al representado por tantas cifras de la izquierda de su parte significativa como sea posible buscar en ellas, y se le añade la entera del producto que resulte de multiplicar por la diferencia tabular, la de la derecha, con la cual no se haya operado, considerada como fraccionaria decimal, poniendo á la suma la característica que le corresponda.*

Dándosenos la mantisa 6863413, y no hallando en las tablas más que las 6862787 y 6863681 que la comprenden, ó la primera y la diferencia tabular 894, el antilogaritmo de aquélla, si tuviera por característica 3, que sería 4856, debería sufrir el aumento que correspondiese al de las mantisas

6863413—6862787=694 *diezmillonésimas,*

y claro está que, según el principio admitido como cierto, si á 824 corresponde 1 de aumento, á 694 corresponderá

$$\begin{array}{r|l} 6940 & 894 \\ \cline{2-2} 6820 & 0‘79..... \\ 374 & \end{array}$$

luego *Antlog.* 3‘6863413=4856‘79, y por lo tanto,

Antlog. 5‘6863413=485679

Antlog. 1‘6863413=48‘5679

Antlog. $\overline{2}$‘6863413=0‘0485679

de donde se deduce que:

2.°—*Para determinar el número que corresponde á un logaritmo cuya mantisa no se halle en las tablas, se busca la inmediata inferior, y la diferencia entre ambas se divide por la tabular, escribiendo la parte fraccionaria del cociente considerada como entera, á la derecha del antilogaritmo correspondiente á* *la mantisa de las tablas y separando del número así representado la parte entera que indique la característica.*

Escolio.—El error del principio admitido, por más que sea despreciable, ocasiona un resultado algo menor que el verdadero en el primer caso y algo mayor en el segundo, por lo cual en aquél *nunca debe dejar de aumentarse una unidad á la parte entera del producto si la primer cifra despreciada es mayor que* 4, y en éste deben *conservarse las cifras del cociente*, aun cuando el último resto sea mayor que la mitad del divisor.

Por último; la determinación del logaritmo de un número mixto, al que se daría previamente forma fraccionaria ó el de una fracción, no puede ofrecer dificultad si se recuerda cuál es el de un cociente indicado (278, 2.ª), resultando, si el numerador fuera menor que el denominador, un logaritmo de característica negativa y mantisa positiva, ó todo negativo, según se restase del logaritmo del primero el del segundo ó de éste aquél,

$$\text{Log.}\frac{a}{b}=\text{Log.}a-\text{Log.}b=-(\text{Log.}b-\text{Log.}a),$$

y como si $a<b$, $\text{Log.}a<\text{Log.}b$, la primera operación ejecutada por la regla ordinaria daría un resultado en parte positivo y en parte negativo, mientras el de la segunda seria todo negativo.

Así, pues,

3.º—*Para determinar el logaritmo de un número mixto se le transforma en fracción, y para hallar el de ésta, se resta del del logaritmo del numerador el del denominador.*

4.º—*Para determinar el logaritmo de una fracción menor que* 1, *se resta del logaritmo del numerador el del denominador, ó de éste á aquél, según se desee obtener con mantisa positiva ó negativa.*

$$\begin{aligned}\text{Log.}7\tfrac{2}{3}&=\text{Log.}\tfrac{23}{3}=\text{Log.}23-\text{Log.}3\\&=1'3617278-0'4771213=0'8846065\end{aligned}$$

$$\text{Log}\,\frac{15}{1249}=\left\{\begin{array}{l}\text{Log.}15-\text{Log.}1249=1'1760913-3'0965624\\ \qquad\qquad\qquad\quad=\bar{2}'0795289\\ -(\text{Log.}1249-\text{Log }15)=-(3'0965624-1'1760913)\\ \qquad\qquad\qquad\quad=-1'9204711\end{array}\right.$$

puede, por consiguiente, suceder que se deba encontrar en algún caso el número correspondiente á un logaritmo todo negativo, y aunque esto podría hacerse transformándolo en otro de mantisa positiva para aplicarle la regla general (2.º), puede evitarse esta transformación si el resultado se desea en forma ordinaria, atendiendo á que:

$$-\text{Log.}N=0-\text{Log.}N=\text{Log.}1-\text{Log.}N=\text{Log.}\frac{1}{N}$$

por lo cual,

5.º—*Para determinar el número que corresponde á un logaritmo todo negativo, se transforma en otro de mantisa positiva, al que se aplica la regla general, si el resultado se quiere en forma decimal, ó se considera como positivo poniendo el antilogaritmo correspondiente por denominador de 1, si se desea en forma ordinaria.*

$$\text{Antlog.}(-1{`}9204711)=\begin{cases}\text{Antlog.}\overline{2}{`}0795289=0{`}012\\[2ex] \dfrac{1}{\text{Antlog.}1{`}9204711}=\dfrac{1}{83{`}26}=\dfrac{50}{4163}\end{cases}$$

V.—Cálculo logarítmico.

287. Lo dicho es suficiente para comprender las importantes abreviaciones á que dará origen el empleo de los logaritmos para encontrar el resultado de una combinación numérica cualquiera, por complicada que parezca, y hasta la posibilidad de obtener fácil, aunque aproximadamente, pero con pequeñísimo error, algunos que sin su auxilio sería imposible calcular.

Del resultado de las operaciones derivadas (278) se deduce, en efecto, que:

1.º—*Para calcular un producto, bastará encontrar el antilogaritmo de la suma de los logaritmos de sus factores.*

Así tendríamos, por ejemplo, haciendo uso de los *complementos logarítmicos* (187) ó COLOGARITMOS que se expresan por la abreviación *Colog.*:

$$5394\cdot\frac{27}{8762}\cdot 0{`}436=\text{Antlog.}\left\{\begin{array}{ll}\text{Log.} & 5324=3{`}7262380\\ +\text{Log.} & 27\ \ =1{`}4313638\\ +\text{Log.} & 0{`}436=\overline{1}{`}6394865\\ +\text{Colog.} & 8762=\overline{4}{`}0573968\\ \hline & \qquad 0{`}8544851\end{array}\right\}=7{`}152\ \text{aproximadamente.}$$

2.° —*Para calcular un cociente, bastará encontrar el antilogaritmo de la diferencia que haya entre los logaritmos de dividendo y divisor.*

$$0'436 : \frac{27}{8762} = \text{Antlog.}\left\{\begin{array}{lll} \text{Log.} & 0'436 & = \bar{1}'6394865 \\ +\text{Colog.} & 27 & = \bar{2}'5686362 \\ +\text{Log.} & 8762 & = \bar{3}'9426032 \end{array}\right\} = 14'149 \text{ aproximadamente.}$$

$$\begin{array}{r} 2'1507259 \\ 4494 \\ \hline 27650 \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{|l} 3070 \\ \hline 0'9 \end{array}$$

3.° —*Para calcular una potencia bastará encontrar el antilogaritmo del producto del exponente por el logaritmo de la base.*

$$\left(\frac{27}{8762}\right)^{0'436} = \text{Antlog.}\left(0'436 . \text{Log.}\frac{27}{8762}\right)$$

$$= \text{Antlog.}\left[0'436 . \left\{\begin{array}{ll} \text{Log. } 27 & = 1'4313638 \\ \text{Colog. } 8762 & = \bar{4}'0573968 \end{array}\right\}\right] =$$

$$\begin{array}{r} \bar{3}'4887606 = -2'5112394 \\ 0'436 \\ \hline 20449576 \\ 184046184 \\ \hline -0'2229003784 \end{array}$$

$$= \text{Antlog.}(-0'2229004) = \frac{1}{1'67} = \frac{100}{167} \text{ aproximadamente.}$$

4.° —*Para calcular una raíz bastará encontrar el antilogaritmo del cociente de dividir el radicando por el índice.*

$$\sqrt[\frac{4}{5}]{0'436} = \text{Antlog.}\left[(\text{Log.} 0'436) : \frac{4}{5}\right] = \text{Antlog.}\left(\bar{1}'6394865 : \frac{4}{5}\right)$$

$$= \text{Antlog.}\ (\bar{2}'1974325 : 4) = \text{Antlog.}\ \bar{1}'5493581 = 0'354$$

aproximadamente.

Escolio. —Estando todos los logaritmos aproximados en menos de media unidad de su último orden, y unos por defecto y otros por exceso, al sumar logaritmos y cologaritmos esos errores se compensarán en parte, y los de los resultados serán completamente despreciables por lo insignificantes en los productos y cocientes, con tanta más razón, cuanto que también es por defecto el que generalmente se comete al buscar el logaritmo, y por exceso el que resulta de calcular después el antilogaritmo.

Esos errores de los logaritmos se hacen también más pequeños al dividir por un entero, y por lo tanto, *al determinar las potencias ó raíces de exponentes menores que la unidad ó índices mayores*, por lo que repetimos qué en todos estos casos *es más que suficiente* en la práctica *operar con cuatro ó cinco cifras después de las comas*; pero si el índice de una raíz fuera mucho menor que la unidad, ó lo que es lo mismo, mayor el exponente de una potencia, al multiplicar por él, multiplicamos el error (237, 1.°), por lo que

Siempre que en una combinación entren potencias de esta clase, debemos operar con logaritmos que después de la coma tengan seis ó siete cifras, las que todavía no serán suficientes, para estar seguros de que obtendremos un antilogaritmo aproximadamente igual al resultado pedido, si dicho exponente fuese bastante grande.

288. Siendo positivas todas las potencias de 10, sea cual sea el exponente, aunque en el solo caso particular de suponerle fraccionario y de denominador par (255, 2.°), se le podría asignar también un valor negativo, es evidente que:

1.°—*Los números negativos no tendrán, en general, logaritmos*,

considerados aisladamente.

Al realizar ciertas combinaciones nos veremos, sin embargo, obligados á tomar logaritmos de los números negativos que en ellas puedan entrar, y aun cuando no entrasen, ignoraríamos si serían aplicables á las expresiones literales cuyo valor y cualidad final desconoceremos la mayor parte de las veces, á no estar convencidos de que para los efectos del cálculo,

2.°—*Los logaritmos de los números negativos, deben considerarse iguales á los de los positivos.*

En efecto; los resultados numéricos de cualquier combinación, exceptuando las adiciones y sustracciones indicadas, á las que no se aplican los logaritmos, son exactamente iguales mientras se conserven los signos de los exponentes é índices, y sólo se diferencian en la cualidad, que puede deducirse desde luego de las reglas conocidas (189, 1.º; 200, 1.º; 247, 1.º y 2.º, y 255, 1.º, 2.º y 3.º), prescindiendo después de los signos.

Así, por ejemplo,

$2(-3)4=-2.3.4=-\text{Antlog.}\,(\text{Log.}2+\text{Log.}3+\text{Log.}4)$

$2(-3)(-4)=2.3.4=\text{Antlog.}\,(\text{Log.}2+\text{Log.}3+\text{Log.}4)$

$\frac{2}{-3}=\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}=-\,\text{Antlog.}\,(\text{Log.}2-\text{Log.}3)$

$\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}=\text{Antlog.}\,(\text{Log.}2-\text{Log.}3)$

$(-2)^3=-2^3=-\text{Antlog.}\,(3.\text{Log.}2)$

$(-3)^2=3^2=\text{Antlog.}\,(2.\,\text{Log.}3)$

$\sqrt[3]{-2}=-\sqrt[3]{2}=-\,\text{Antlog.}\,\frac{\text{Log.}\,2}{3}$

y aun $\sqrt{-3}=\sqrt{3}\,\sqrt{-1}$ (264) y $\sqrt{3}=\pm\,\text{Antlog.}\,\frac{\text{Log.}\,3}{2}$

De todo lo cual se deduce que:

3.º—*Para calcular por logaritmos una expresión cualquiera, se efectúan las sumas y diferencias indicadas, se prescinde de los signos que puedan tener los factores, dividendos, divisores, bases y radicandos, y después se pone al resultado el que le corresponda, según las operaciones que hubiesen quedado indicadas antes de aplicar los logaritmos.*

Escolio.—En la práctica conviene siempre, para evitar equivocaciones fáciles, aunque no sea indispensable, *reducir ante todo el número de signos negativos al menor posible* para poner de manifiesto el final que deba llevar el resultado y *evitar la multiplicación y división por exponentes é índices de esta clase, efectuando algunas transformaciones previas, que además hagan ver claramente cuáles son los verdaderos factores y divisores.*

Ejemplo:

Operaciones mentales auxiliares.

$$\frac{4}{7}-\frac{20}{21}=\frac{12}{21}-\frac{20}{21}=-\frac{8}{21}$$

$$-3\sqrt[3]{-4}+9\sqrt[6]{16}=(-3)\left(-\sqrt[3]{4}\right)+9\sqrt[2.3]{4^2}=3\sqrt[3]{4}+9\sqrt[3]{4}$$

$$=12\sqrt[3]{4};\ \ 25\,\frac{2}{7}=\frac{25.7+2}{7}=\frac{177}{7}$$

$$\sqrt[4]{\sqrt[-0'3]{\frac{(-0'25)^{2/3} : \left(\frac{4}{7} - \frac{20}{21}\right)^{-6}}{\left(-3\sqrt[3]{-4}+9\sqrt[6]{16}\right)25\frac{2}{7}}}} = \sqrt[4]{\sqrt[-0'3]{\frac{(-0'25)^{2/3} : \left(-\frac{8}{21}\right)^{-6}}{12\sqrt[3]{4}\cdot\frac{177}{7}}}}$$

$$=\pm\text{Antlog.}\,\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{0'3}\left\{\begin{array}{l} \frac{2}{3}\ \text{Log.}\quad 0'25=\frac{2}{3}\cdot\overline{1}'3979400=\frac{1}{3}\cdot\ \overline{2}'7958800.=\ldots\ldots\ldots=\overline{1}'5986267 \\ -6\left\{\begin{array}{l}\text{Colog.}\quad 8=\overline{1}'0969100\\ \text{Log.}\quad 21=1'3222193\end{array}\right\}=-6\ 0'4191293=-2\ 5147758=\overline{3}'4852242 \\ \quad\ \text{Colog.}\quad 12=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\overline{2}'9208187 \\ \frac{1}{3}\ \text{Colog.}\quad 4=\frac{1}{3}\cdot\overline{1}'3979400=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\overline{1}'7993133 \\ \quad\ \text{Colog.}\quad 177=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\overline{3}'7520267 \\ \quad\ \text{Log.}\quad 7=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0'8450980 \end{array}\right\}=\pm 46317'558$$

$$\begin{array}{r|l} \overline{6}'4011076= & -0'3 \\ -5'5988924 & 4 \\ 18'662975 & \\ 4'6657437 & \end{array}$$

Mantisa inferior de las tablas 6748

$$\begin{array}{r|l} 6890 & 938.\ \ldots\ \text{Diferencia.} \\ \hline 5240 & 0'7558\ldots \\ 5500 & \\ 8100 & \\ 596 & \\ \ldots & \end{array}$$

ó de otro modo más práctico, que puede servir de comprobación:

$$\sqrt[4]{\sqrt[-0'3]{\frac{(-0'25)^{2/5}:\left(\frac{4}{7}-\frac{20}{21}\right)^{-6}}{(-3\sqrt[3]{-4}+9\sqrt[6]{16})25\,\frac{2}{7}}}}=\sqrt[-1'2]{\frac{-0'25^{2/5}:\left(-\frac{8}{21}\right)^{-6}}{12\sqrt[3]{4}.\frac{177}{7}}}=\sqrt[-1'2]{\frac{0'25^{2/5}\,21^{-6}.7}{12\sqrt[3]{4}.177(-8)^{-6}}}$$

$$=1:\frac{\sqrt[1'2]{0'25^{2/5}.7.8^{6}}}{\sqrt[1'2]{12\sqrt[3]{4}.177.21^{6}}}=\sqrt[1'2]{\frac{12\sqrt[3]{4}.177.21^{6}}{0'25^{2/5}.7.8^{6}}}$$

$$=\pm\text{Antlog}.\frac{1}{1'2}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}\left\{\begin{array}{lrl}
\text{Log.} & 12= & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=1'0791813\\
\frac{1}{3}\,\text{Log.} & 4= & \frac{1}{3}.0'6020600=\ldots\ldots\ldots=0'2006867\\
\text{Log.} & 117= & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=2'2479733\\
6.\text{Log.} & 21= & 6.1'3222193=\ldots\ldots\ldots=7'9333158\\
\frac{2}{3}\,\text{Colog.} & 0'25= & \frac{2}{3}.0'6020600=\frac{1}{3}.1'2041200=0'4013733\\
\text{Colog.} & 7= & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\overline{1}'1549020\\
6.\text{Colog.} & 8= & 6.\overline{1}'0969100=\ldots\ldots\ldots=\overline{6}'6814600
\end{array}\right\}=\pm 46317'558\ldots\ldots$$

$$\begin{array}{r|l}
5'5988924 & \\
5 & \\
\hline
27'9944620 & 6\\
4'6657437 &
\end{array}$$

Este método no es más que el desarrollo práctico del razonamiento mental que debería hacerse para deducir el signo del resultado diciendo: $(-0'25)^{2/3} = \sqrt[3]{(-0'25)^2} = \sqrt[3]{0'25^2}$, *positivo;* $\left(-\frac{8}{2}\right)^{-6} = \frac{1}{\left(-\frac{8}{2}\right)^6}$, *positivo;* y el cociente de dos números positivos, *positivo* también. El denominador es del mismo signo después de efectuada la reducción de los radicales; luego el resultado de las operaciones indicadas en el radicando es *positivo*, y como el signo del índice solo influye en el valor numérico y la raíz de índice impar deba llevar el mismo signo del radicando, mientras que la de índice par lo mismo puede ser positiva que negativa, el final deberá estar afectado del doble signo $\pm$.

Demostrada del todo la ventajosa aplicación que de los logaritmos ya calculados puede hacerse para la determinación de productos, cocientes, potencias, raíces, y combinaciones que, sin su auxilio, sería más difícil y hasta imposible obtener en ocasiones, y sabiendo que también son aplicables á la misma operación de que provienen, pues conocido el logaritmo decimal de un número puede hallarse fácilmente el que le correspondería en cualquier otra base (278, Cor.), recordaremos que en la Potenciación no es indiferente, como en la Adición y Multiplicación, cambiar el orden de los datos, por lo cual, aunque supiéramos que una potencia indicada se había de elevar á otra, ésta á otra, y así sucesivamente, siendo iguales los grados de todas, tendríamos, por ejemplo:

$$\left(\left(\left((3^4)^4\right)^4\right)^4\right)^4 = 3^{4.4.4.4.4} = 3^{4^5}$$

no pudiéndose derivar de aquí nuevo concepto de operación fundamental (169) por necesitarse conocer los valores de los *tres* números 3, 4 y 5 para poder llegar al resultado que indica el primer miembro, cuya última expresión no es más que una combinación derivada de la misma elevación á potencias, que calcularíamos directamente elevando 4 á la potencia de *quinto* grado y 3 á la que indicase el nuevo exponente 1024, ó bien por medio de los logaritmos, diciendo:

$$3^{4^5}=\text{Antlog.}(4^5.\text{Log.}3)=\text{Antlog.}[\text{Antlog.}(5\text{Log.}4+\text{Log.Log.}3)].$$

Siendo, por consiguiente, imposible que existan más de las siete operaciones fundamentales que hemos considerado, y conociendo los medios de realizar en cualquier caso todas sus combinaciones, hemos terminado el estudio de los Cálculos numéricos y debemos pasar al de sus importantes aplicaciones mercantiles.

Fin del Complemento de Aritmética.

APÉNDICE

FRACCIONES CONTÍNUAS

I.—Teoría.

289. Sabemos que algunos cálculos pueden originar números fraccionarios de la forma

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\ddots}}}$$

$$\ddots+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{s+\ddots}}}}$$

que se llaman *fracciones continuas* (277, Esc.), y es natural que veamos si, como las restantes formas de números, tienen propiedades particulares que en la práctica de las operaciones puedan utilizarse con ventaja.

Toda fracción continua está, según vemos, compuesta de una parte entera a, que puede ser 0, en cuyo caso se suprime su escritura, y de varias *fracciones integrantes* $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, $\frac{1}{e}$....., cuyo numerador es la unidad, y que tienen por denominador enteros cualesquiera b,c,d,e....., que juntos con el primero a, se distinguen con el nombre de *cocientes incompletos*, por no ser más que la parte entera del número representado por ellos mismos, más las fracciones que les siguen.

290. Considerando dos de los cocientes incompletos que la constituyen, y encontrando la ordinaria equivalente (62, 3.°), tendremos:

$$a+\frac{1}{b}=\frac{ab+1}{b}$$

considerando tres:

$$a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}=a+\frac{1}{\frac{bc+1}{c}}=a+\frac{c}{bc+1}=\frac{abc+a+c}{bc+1}=\frac{(ab+1)c}{bc+1}$$

considerando cuatro:

$$a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}}}=a+\frac{1}{b+\frac{1}{\frac{cd+1}{d}}}=a+\frac{1}{b+\frac{d}{cd+1}}=a+\frac{1}{\frac{bcd+b+d}{cd+1}}$$

$$=a+\frac{cd+1}{bcd+b+d}=\frac{abcd+ab+ad+cd+1}{bcd+b+d}$$

$$=\frac{(abc+c+a)d+ab+1}{(bc+1)d+b}=\frac{\left[(ab+1)c+a\right]d+(ab+1)}{(bc+1)d+b}$$

y así podríamos continuar formando las REDUCIDAS ó *fracciones ordinarias equivalentes á una parte de la continua contada desde su origen,* cuyo valor se aproximaría cada vez más al de la total, por lo que también se llaman CONVERGENTES.

Si partiendo de la primer reducida $\frac{a}{1}$ observamos la forma de los valores que han resultado para las otras, veremos que:

Para formar una reducida, basta multiplicar los dos términos de la anterior por el cociente incompleto correspondiente, *y añadir á los productos que resulten los dos términos de la que antecede.*

Veamos ahora si este hecho, observado en la tercera y cuarta, será una ley general, suponiendo que $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{R}{R'}$ son tres reducidas consecutivas, para la última de las cuales se verifica el hecho de ser $R=Qr+P$ y $R'=Q'r+P'$, siendo r el cociente incompleto, é investiguemos si también será cierto para la siguiente $\frac{S}{S'}$ que resultaría de considerar un cociente más s.

Puesto que $\frac{1}{r}$ y $\frac{1}{s}$ suponemos que son las dos últimas fracciones integrantes, la reducida $\frac{S}{S'}$ se deducirá de la $\frac{R}{R'}$ sustituyendo en esta $r+\frac{1}{s}$ en lugar de r, y como $\frac{R}{R'}=\frac{Qr+P}{Q'r+P'}$, se verificará

$$\frac{S}{S'}=\frac{Q\left(r+\frac{1}{s}\right)+P}{Q'\left(r+\frac{1}{s}\right)+P'}=\frac{Q.\frac{rs+1}{s}+P}{Q'.\frac{rs+1}{s}+P'}=\frac{Qrs+Q+Ps}{Q'rs+Q'+P's}$$

$$=\frac{(Qr+P)s+Q}{(Q'r+P')s+Q'}=\frac{Rs+Q}{R's+Q'}$$

Cuando el hecho se verifica para la última de tres reducidas consecuencias, es también cierto, por consiguiente, para la cuarta, y como lo hemos observado en las cuatro primeras, cierto será para la quinta, para la sexta, y por lo tanto, por igual razón para todas las siguientes.

La proposición enunciada es, pues, una ley general.

Ejemplo.—Calcular las reducidas correspondientes á la fracción $\frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{9+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}}}}$.

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1.4+0}{2.4+1}=\frac{4}{9},\ \frac{4.9+1}{9.9+2}=\frac{37}{83},$$
$$\frac{37.2+4}{83.2+9}=\frac{78}{175},\ \frac{78.3+37}{175.3+83}=\frac{271}{608}.$$

Las operaciones, según se ve, son muy fáciles de ejecutar.

291. Hé aquí ahora las propiedades más importantes de estas fracciones:

1.ª—*La diferencia entre dos reducidas consecutivas es una fracción que tiene por numerador la unidad positiva ó negativa, según que la que sirve de minuendo sea de lugar par ó impar con relación á la parte entera y por denominador el producto de los dos denominadores.*

En efecto; si seguimos representando por $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ y $\frac{R}{R'}$, tres reducidas consecutivas, por r el cociente incompleto que á la última corresponde, y hallamos la diferencia de cada una con la anterior, resultará (288):

$$\frac{Q}{Q'}-\frac{P}{P'}=\frac{QP'-PQ'}{P'Q'}$$

$$\frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{RQ'-QR'}{R'Q'}=\frac{(Qr+P)Q'-Q(Q'r+P')}{R'Q'}$$

$$=\frac{QQ'r+PQ'-QQ'r-QP'}{R'Q'}=\frac{PQ'-QP'}{R'Q'}=\frac{-(QP'-PQ')}{R'Q'}$$

Queda, por consiguiente, demostrada la parte del enunciado referente á los denominadores, y en cuanto á los numeradores, vemos que son iguales y de signo contrario los de cada dos diferencias consecutivas.

Pero si de $a+\frac{1}{b}=\frac{ab+1}{b}$ restamos $\frac{a}{1}$, el numerador del resultado $\frac{1}{b}$ será la unidad positiva; luego el siguiente sería la negativa, etc.

Corolario.—*Todas las reducidas son fracciones irreducibles* (217),

en razón á que, según acabamos de demostrar,

$$QP'-PQ'=\pm 1,$$

y si Q y Q' tuviesen algún factor común, lo tendría también la diferencia ± 1 (201, 2.º, y 209, 1.º).

2.ª—*El valor de una fracción continua es mayor que el de toda reducida de lugar impar y menor que el de las de lugar par.*

Efectivamente; siguiendo con la notación hasta aquí empleada, del valor

$$\frac{R}{R'}=\frac{Qr+P}{Q'r+P'},$$

podremos pasar al de la total, sustituyendo en lugar de r todo el resto de la fracción $r+\frac{1}{s+}$ que para abreviar representaremos por x, llamando V al de la fracción continua, con lo cual tendremos:

$$V=\frac{Qx+P}{Q'x+P} \text{ y } V-\frac{Q}{Q'}=\frac{Qx+P}{Q'x+P'}-\frac{Q}{Q'}$$

$$=\frac{QQ'x+PQ'-QQ'x-QP'}{(Q'x+P')Q'}=\frac{PQ'-QP'}{(Q'x+P')Q'}=\frac{\pm 1}{(Q'x+P')Q'},$$

puesto que $PQ'-QP'$ es el numerador de la diferencia

$$\frac{P}{P'}-\frac{Q}{Q'}=-\left(\frac{Q}{Q'}-\frac{P}{P'}\right)$$

es decir, que $V-\frac{Q}{Q'}$ será negativo ó positivo, según que $\frac{Q}{Q'}$ sea de lugar par ó impar, y, por lo tanto, tendremos en el primer caso $V<\frac{Q}{Q'}$, y en el segundo $V>\frac{Q}{Q'}$, conforme al enunciado.

Corolario.—*El valor total de la fracción continua estará siempre comprendido entre los de dos reducidas consecutivas de cualquier lugar.*

3.º—*Una reducida cualquiera se aproxima más al valor de la fracción continua que todas las precedentes.*

Acabamos de ver que

$$V-\frac{Q}{Q'}=\pm\frac{1}{(Q'x+P')Q'}, \text{ y que } V=\frac{Qx+P}{Q'x+P'},$$

por consiguiente,

$$V-\frac{P}{P'}=\frac{Qx+P}{Q'x+P'}-\frac{P}{P'}=\frac{QP'x+PP'-PQ'x-PP'}{(Q'x+P')P'}$$

$$=\frac{(QP'-PQ')x}{(Q'x+P')P'}=\pm\frac{x}{(Q'x+P')P'},$$

puesto que $QP'-PQ'=\pm 1$ (1.°, Cor.).

Ahora bien; como la primer fracción y la última tienen común el factor $Q'x+P'$ del denominador, pero $x>1$ y $P'<Q'$, aquélla será menor que ésta (216, 3.° y 5.°); luego,

$$V-\frac{Q}{Q'}<V-\frac{P}{P'}.$$

Corolario.—*Los valores de las reducidas de lugar impar irán aumentando á partir de la primera, y los de las de lugar par disminuyendo á partir de la segunda.*

4.ª—*Una reducida cualquiera se aproxima más al valor de la fracción continua que cualquiera otra fracción de menor denominador.*

Supongamos que $\frac{m}{n}$ sea una fracción irreducible, que se aproxime más al valor V, que $\frac{Q}{Q'}$; $\frac{m}{n}$ no podrá ser una reducida, porque entonces, según lo que se acaba de demostrar, tendría que ser posterior á $\frac{Q}{Q'}$ y sus términos serían mayores que los de ésta, según la ley de formación de las reducidas (288).

Colocando por orden de magnitud los cuatro valores, V, $\frac{m}{n}$, $\frac{Q}{Q'}$ y $\frac{P}{P'}$ reducida anterior esta última á $\frac{Q}{Q'}$ y debiendo siempre estar V comprendido entre ambas, no puede suceder ninguna de estas dos cosas suponiendo $\frac{P}{P'}<\frac{Q}{Q'}$,

$$\frac{m}{n}, \frac{P}{P'}, V, \frac{Q}{Q'}, \quad \text{ni} \quad \frac{P}{P'}, V, \frac{Q}{Q'}, \frac{m}{n}$$

porque en el primer caso, $\frac{m}{n}$ se diferenciaría de V más que $\frac{P}{P'}$ y por lo tanto, más que $\frac{Q}{Q'}$, y en el segundo es evidente que $\frac{Q}{Q'}$ sería más aproximada, por lo que forzosamente ha de verificarse

$$\frac{P}{P'} < \frac{m}{n} < \frac{Q}{Q'}, \text{ de donde } \frac{m}{n} - \frac{P}{P'} < \frac{Q}{Q'} - \frac{P}{P'}$$

ó lo que es lo mismo, atendiendo sólo á los valores numéricos (1.ª),

$$\frac{mP'-Pn}{nP'} < \frac{1}{Q'P'}.$$

Pero tampoco es posible que $mP'-Pn=0$, porque entonces

$$mP'=Pn \text{ y dividiendo por } nP', \ \frac{mP'}{nP'} = \frac{Pn}{nP'}, \text{ ó } \frac{m}{n} = \frac{P}{P'};$$

luego ese numerador, diferencia entre dos enteros, ha de ser por lo menos igual 1, y por consecuencia $nP'>Q'P'$, lo que exige $n>Q'$ (188, 3.º).

Corolario.—*El valor de una fracción continua, no podrá expresarse por ninguna otra de forma ordinaria, de términos más sencillos que los de las reducidas.*

II —Aplicaciones.

292. Basta leer los enunciados de las proposiciones que anteceden, para comprender que entre otras muchas é importantísimas aplicaciones de las fracciones continuas, podremos utilizar su cálculo y propiedades, para

Simplificar las ordinarias, reducirlas á su expresión más sencilla, encontrar valores aproximados á ellas con un error tan pequeño como queramos, transformar las decimales en ordinarias,

y sobre todo para resolver dos cuestiones que sin su auxilio serían casi irresolubles:

La determinación directa de los logaritmos en cualquier base, y la aproximación á un valor cualquiera, conmensurable ó inconmensurable,

no sólo con tan poco error como se quiera, sino también *por medio de la fracción de términos más sencillos*, de entre todas las capaces de expresarlo.

Claro está que para conseguir estos fines, necesitamos ante todo saber desarrollar esos valores en fracción continua.

Supongamos, primero, que se trate de una fracción exacta, representada en la forma general ordinaria, á la cual se podrán también referir las decimales, y escojamos la $\frac{3948}{5712}$ que en el párrafo 218, redujimos á su expresión más sencilla, encontrando en esta forma, el *m.c.d.* de sus dos términos.

5712	3948	1764	420	84
	1	2	4	5
1764	420	84	0	

Con sólo recordar la composición exacta de cada cociente (150) y la regla para dividir un entero por una fracción (70, 3.°, ó 228, 3.°) se deduciría fácilmente que:

$$\frac{3948}{5712}=\frac{1}{\frac{5712}{3948}}=\frac{1}{1+\frac{1764}{3948}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3948}{1764}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{420}{1764}}}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{1764}{420}}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{84}{420}}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{\frac{420}{84}}}}}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{5}}}}$$

por lo cual:

1.°—*Para desarrollar una fracción ordinaria en fracción continua, bastará efectuar con sus términos las operaciones necesarias para determinar su* m.c.d. *por el método de las divisiones sucesivas, siendo el primer cociente la parte entera y los demás por su orden, los denominadores de las sucesivas fracciones integrantes.*

Calculando ahora los valores de las diferentes reducidas, tendríamos (288):

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{2}{3},\ \frac{9}{13},\ \frac{47}{68};$$

de donde se deduce que:

2.º—*Para reducir una fracción ordinaria á su más simple expresión, puede desarrollarse en fracción continua y calcular la última reducida.*

Escolio.—La regla que en el párrafo 218 dimos para construir mentalmente la irreducible $\frac{47}{68}$, evitando las divisiones de los términos por el *m.c.d.*, no es otra cosa que la anterior aplicación de las fracciones continuas, lo mismo que la del 234, para determinar la $\frac{2}{3}$ aproximada á la propuesta con muy poco error, despreciando los últimos cocientes.

293. Si se tratase de una decimal aproximada como, por ejemplo, la 1'41421..... que en el 274 encontramos para valor de $\sqrt{2}$, considerando cinco cifras decimales, deberíamos, para no cometer error,

Desarrollar en fracción continua ese valor por defecto y el que por exceso resultaría de aumentar una unidad á su última cifra,

y escribir 1'41422, puesto que únicamente podríamos tener seguridad de que pertenecían á la verdadera fracción continua equivalente á $\sqrt{2}$, los cocientes incompletos que fueran comunes á ambos desarrollos.

$$1'41421 = \frac{141421}{100000}$$

141421	100000	41421	17158	7105	2948	1209	530	149
	1	2	2	2	2	2	2	3
41421	17158	7105	2948	1209	530	149	83	

$$1'41422 = \frac{141422}{100000}$$

141422	100000	41422	17156	7110	2936	1238	460	318
	1	2	2	2	2	2	2	1
41422	17156	7110	2936	1238	460	318	142	

Al llegar á los dos cocientes incompletos distintos 3 y 1, no deberemos continuar, ya que sólo estaremos autorizados para escribir:

$$1'41421.....=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}}}$$

cuyas reducidas aproximadamente equivalentes, serían:

$$\frac{1}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70}\ \text{y}\ \frac{239}{169}$$

lo que nos proporciona el medio de encontrar

La fracción irreducible que, exacta ó aproximadamente, equivalga á una decimal, y expresar el valor de ésta en forma ordinaria con los más sencillos términos que es posible.

294. Respecto al método que ha de seguirse para desarrollar en fracción continua el valor de cualquier expresión cuyo resultado deba ser inconmensurable, lo indicamos ya, al hacer ver en el párrafo 277 la *posibilidad* de calcular un logaritmo en cualquier base directamente, aplicándolo al del número 6 en la base 2, para el cual encontramos

$$\text{Log}_2 6=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ldots}}}$$

deteniéndonos al hacer $z=2+\frac{1}{u}$.

Si quisiéramos proseguir el cálculo, sustituiríamos ese valor de z en la igualdad $\left(\frac{9}{8}\right)^z=\frac{4}{3}$, en que nos detuvimos, obteniendo

$$\left(\frac{9}{8}\right)^{2+\frac{1}{u}}=\frac{4}{3},\ \left(\frac{9}{8}\right)^2\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{u}}=\frac{4}{3},\ \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{u}}=\frac{4}{3}:\frac{81}{64}=\frac{256}{243},$$

$$\left(\frac{256}{243}\right)^u=\frac{9}{8},$$

y como

$$\frac{9}{8}=\frac{2187}{1944}>\frac{256}{243}=\frac{2048}{1944},\ \text{y}\ \frac{9}{8}=\frac{531441}{472392}>\left(\frac{256}{243}\right)^2=\frac{524288}{472392};$$

pero

$$\frac{9}{8}=\frac{129140163}{14791256}<\left(\frac{256}{243}\right)^3=\frac{134217728}{14791256}$$

deduciríamos que $u=2+\frac{1}{v}$, y así podríamos continuar indefinidamente, en razón á que

La fracción continua equivalente á un número inconmensurable ha de ser indefinida, porque de ser limitada, la última reducida expresaría exactamente el valor de dicho número, y éste dejaría de ser inconmensurable.

Así, pues,

$$\mathrm{Log}_2 6=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}$$

cuyas reducidas serían $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{13}{5}, \frac{31}{12}$....., que podríamos transformar en decimales.

Vemos, por consiguiente, que el método consiste en:

Averiguar por las reglas generales cuál es el mayor entero contenido en el número que se busca; igualar éste á dicho entero, más una fracción cuyo numerador sea 1 y cuyo denominador será otra cantidad desconocida que se representa por una letra; efectuar las operaciones necesarias para poder determinar fácilmente el mayor entero contenido en la nueva incógnita, y una vez calculado, seguir la misma marcha hasta haber obtenido su valor en forma de fracción continua, tan aproximado al verdadero como se desee.

Aplicándolo al cálculo de $\sqrt{2}$, tendríamos:

$\sqrt{2}=1+\frac{1}{x}$, de donde multiplicando por x, $\frac{x\sqrt{2}}{x}=\frac{x+1}{x}$,

y, por lo tanto,

$$x\sqrt{2}=x+1, \text{ ó restando } x,\ x\sqrt{2}-x=1, \text{ ó } x(\sqrt{2}-1)=1,$$

ó dividiendo por $\sqrt{2}-1$, y multiplicando enseguida los dos términos de la fracción resultante (191, 1.° Cor.) por $\sqrt{2}+1$,

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{2+1}}{2-1}$$
$$=\sqrt{2}+1=2+\frac{1}{y},$$

de donde multiplicando por y y efectuando las operaciones análogas,

$$y\sqrt{2}+y=2y+1;\ y\sqrt{2}=2y-y+1;\ y\sqrt{2}=y+1;$$
$$y\sqrt{2}-y=1;\ y(\sqrt{2}-1)=1$$

y por último,

$$y=\frac{1}{\sqrt{2-1}}=\sqrt{2}+1=2+\frac{1}{z}$$

Resultando un valor para y, exactamente igual al obtenido antes para x, es evidente que se obtendría el mismo para z y para todas las incógnitas siguientes, por lo que es inútil proseguir, por tener ya seguridad de que el valor de $\sqrt{2}$, estaría representado por la fracción continua indefinida

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}$$

cuyas siete primeras reducidas hemos calculado ya (292) y cuyo carácter ilimitado nos demostraría, además, si ya no lo supiéramos, la inconmensurabilidad del valor de $\sqrt{2}$.

ESCOLIO.—Las fracciones continuas de esta forma,

En que las integrantes que las componen se van repitiendo indefinidamente á partir de una cualquiera,

se llaman PERIÓDICAS, como sus análogas las decimales (112);

PURAS, *si á partir de la primera empieza el período ó parte que se repite,* y

MIXTAS, *si principia en otra cualquiera*, habiendo antes una parte IRREGULAR ó *no periódica.*

La anterior es periódica pura y $\frac{1}{2}$ el período.

295. Sabiendo desarrollar en fracción continua cualquier número conmensurable, aproximado ó inconmensurable, fáltanos averiguar en qué reducida deberemos detenernos, para tener seguridad de que su diferencia con el valor verdadero será menor que cualquier parte alícuota prefijada.

Para ello volvamos á la expresión (289, 3.ª)

$$V-\frac{Q}{Q'}=\pm\frac{1}{(Q'x+P')Q'}<\pm\frac{1}{Q'(Q'+P')}<\pm\frac{1}{Q'.Q'}=\pm\frac{1}{Q'^2}$$

puesto que $x=r+\frac{1}{s}>1$, y al suprimir este factor disminuimos el denominador, como al suprimir después el numerador P'.

Esto nos demuestra que:

1.°—*El error que se comete por defecto ó exceso al tomar una reducida de lugar impar ó par, por valor de la fracción contínua, es menor que la unidad dividida por el producto del denominador de dicha reducida, por la suma del mismo y el de la anterior.*

2.°—*El error es también menor que la unidad dividida por el cuadrado del denominador.*

Además; $x=r+\frac{1}{s+}<r+1$, luego

$$Q'x+P'<Q'(r+1)+P'=Q'r+Q'+P'=Q'+R'$$

por ser, según sabemos, $R'=Q'x+P'$, si R' representa el denominador de la reducida siguiente, por lo tanto,

$$V-\frac{Q}{Q'}=\pm\frac{1}{(Q'x+P')Q'}>\pm\frac{1}{Q'(Q'+R')}$$

ya que la segunda fracción tiene mayor denominador que la primera, por lo cual:

3.°—*El error es mayor que la unidad dividida por el denominador de la reducida, multiplicado por la suma del mismo y el de la siguiente.*

296. Estas expresiones del error bastan para saber entre qué límites está comprendido el que se comete al detenerse en una reducida y para aproximarse á un valor en tan poco como se desee.

Si queremos saber, en efecto, los límites del error que cometemos al tomar la fracción $\frac{2}{3}$ de los párrafos 234 y 291, por valor de la exacta $\frac{3948}{5712}=\frac{47}{68}$ tendremos representándolo por E, en virtud de lo dicho (294, 1.°, 2.° y 3.°), y recordando (291, 1.°) que las reducidas anterior y siguiente son $\frac{1}{1}$ y $\frac{9}{13}$

$$E<\frac{1}{3(3+1)}=\frac{1}{12} \quad \text{ó} \quad E<\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9} \quad \text{y} \quad E>\frac{1}{3(3+13)}=\frac{1}{48}$$

por defecto.

En el párrafo 234 lo calculamos exactamente, deduciendo que era algo inferior á $\frac{1}{40}$ por lo que se ve que el límite superior suele ser bastante mayor que dicho error; pero puede obtenerse otro más próximo al verdadero conservando el factor x suprimido (294, 2.°) y reemplazándole por el cociente incompleto $r<x=r+\frac{1}{s+}$ en cuyo caso tendríamos:

$$V-\frac{Q}{Q'}=\pm\frac{1}{(Q'x+P')Q'}>\pm\frac{1}{Q'(Q'r+P')}=\pm\frac{1}{Q'R'}$$

es decir, que:

1.°—*El error es también menor que la unidad dividida por el denominador de la reducida, multiplicado por el de la siguiente,*

que en el anterior ejemplo, daría

$$E<\frac{1}{3.13}=\frac{1}{39}$$

siendo ya $\frac{1}{39}$ y $\frac{1}{48}$ límites bastantes cercanos para darnos aproximada idea del error cometido.

Finalmente; si nos proponemos que el error sea más pequeño que cualquier parte alícuota de la unidad $\frac{1}{n}$ deberá verificarse (295, 2.°)

$$E<\frac{1}{Q'^2}\overline{\overline{<}}\frac{1}{n}$$

para lo cual es preciso que:

$$Q'^2 \overline{\overline{>}} n \text{ ó extrayendo la raíz cuadrada, } Q' \overline{\overline{>}} \sqrt{n},$$

de donde se deduce que:

2.°—*Para obtener el valor de una fracción continua en menos de una parte alícuota de la unidad, es suficiente detenerse en la reducida cuyo denominador sea igual ó mayor que la raíz cuadrada del de la parte alícuota.*

Ejemplo.—Calcular el valor de $\sqrt{2}$, en menos de 0'000001.

Desarrollando $\sqrt{2}$ en fracción continua (293) y calculando las reducidas, veríamos que éstas eran (292),

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}$$

considerando seis cocientes incompletos iguales á 2, ninguna de las cuales es tan aproximada como se pide, por ser

$$0'000001 = \frac{1}{1000000} \text{ y } \sqrt{1000000} = 1000 \ (267, 1.^{\circ});$$

pero prosiguiendo el cálculo, que se puede efectuar de memoria por la regla conocida (288), se hallaría:

$$\frac{577}{408}, \frac{1393}{985}, \frac{3363}{2378}$$

```
3363 |2378
9850 |1'414213..... por defecto.
 3380
 10020
   5080
    3240
     8620
     1486
```

Muchas y muy importantes son aún las aplicaciones de las fracciones continuas, diferentes de las que anteceden y de las cuales tenemos que prescindir, pues por ahora sólo nos hemos propuesto dejar establecidos los fundamentos que quedan expuestos y cuanto se refiere al cálculo de las mismas.

Fin del Apéndice.

TABLA PRIMERA

NÚMEROS PRIMOS MENORES QUE 5000

1	199	467	769	1087	1429	1741	2089	2437	2791
2	211	479	773	1089	1433	1747	2099	2441	2797
3	223	487	787	1093	1439	1753	2111	2447	2801
5	227	491	797	1099	1447	1759	2113	2459	2803
11	229	499	809	1103	1451	1777	2129	2467	2819
13	233	503	811	1109	1453	1783	2131	2473	2833
17	239	509	821	1117	1459	1787	2137	2477	2837
19	241	521	823	1123	1471	1789	2141	2503	2843
23	251	523	827	1129	1481	1801	2143	2521	2851
29	257	541	829	1151	1483	1811	2153	2531	2857
31	263	547	839	1153	1487	1823	2161	2539	2861
37	269	557	853	1163	1489	1831	2179	2543	2879
41	271	563	857	1171	1493	1847	2203	2549	2887
43	277	569	859	1181	1499	1861	2207	2551	2897
47	281	571	863	1187	1511	1867	2213	2557	2903
53	283	577	877	1193	1523	1871	2221	2579	2909
59	293	587	881	1201	1531	1873	2237	2591	2917
61	307	593	883	1213	1543	1877	2239	2593	2927
67	311	599	887	1217	1549	1879	2243	2609	2939
71	313	601	907	1223	1553	1889	2251	2617	2953
73	317	607	911	1229	1559	1901	2267	2621	2957
79	331	613	919	1231	1567	1907	2269	2633	2963
83	337	617	929	1237	1571	1913	2273	2647	2969
89	347	619	937	1249	1579	1931	2281	2657	2971
97	349	631	941	1259	1583	1933	2287	2659	2999
101	353	641	947	1277	1597	1949	2293	2663	3001
103	359	643	953	1279	1601	1951	2297	2671	3011
107	367	647	967	1283	1607	1973	2309	2677	3019
109	373	653	971	1289	1609	1979	2311	2683	3023
113	379	659	977	1291	1613	1987	2333	2687	3037
127	383	661	983	1297	1619	1993	2339	2689	3041
131	389	673	991	1301	1621	1997	2341	2693	3049
137	397	677	997	1303	1627	1999	2347	2699	3061
139	401	683	1009	1307	1637	2003	2351	2707	3067
149	409	691	1013	1319	1657	2011	2357	2711	3079
151	419	701	1019	1321	1663	2017	2371	2713	3083
157	421	709	1021	1327	1667	2027	2377	2719	3089
163	431	719	1031	1361	1669	2029	2381	2729	3109
167	433	727	1033	1367	1693	2039	2383	2731	3119
173	439	733	1039	1373	1697	2053	2389	2741	3121
179	443	739	1049	1381	1699	2063	2393	2749	3137
181	449	743	1051	1399	1709	2069	2399	2753	3163
191	457	751	1061	1409	1721	2081	2411	2767	3167
193	461	757	1063	1423	1723	2083	2417	2777	3169
197	463	761	1069	1427	1733	2087	2423	2789	3181

3187	3359	3539	3701	3889	4073	4253	4451	4643	4817
3191	3361	3541	3709	3907	4079	4259	4457	4649	4831
3203	3371	3547	3719	3911	4091	4261	4463	4651	4861
3209	3373	3557	3727	3917	4093	4271	4481	4657	4871
3217	3389	3559	3733	3919	4099	4273	4483	4663	4877
3221	3391	3571	3739	3923	4111	4283	4493	4673	4889
3229	3407	3581	3761	3929	4127	4289	4507	4679	4903
3251	3413	3583	3767	3931	4129	4297	4513	4691	4909
3253	3433	3593	3769	3943	4133	4327	4517	4703	4919
3257	3449	3607	3779	3947	4139	4337	4519	4721	4931
3259	3457	3613	3793	3967	4153	4339	4523	4723	4933
3271	3461	3617	3797	3989	4157	4349	4547	4729	4937
3299	3463	3623	3803	4001	4159	4357	4549	4733	4943
3301	3467	3631	3821	4003	4177	4363	4561	4751	4951
3307	3469	3637	3823	4007	4201	4371	4567	4759	4957
3313	3491	3643	3833	4013	4211	4391	4583	4783	4967
3319	3499	3659	3847	4019	4217	4397	4591	4787	4969
3323	3511	3671	3851	4021	4219	4409	4597	4789	4973
3329	3517	3673	3853	4027	4229	4421	4603	4793	4987
3331	3527	3677	3863	4049	4231	4423	4621	4799	4993
3343	3529	3691	3877	4051	4241	4441	4637	4801	4999
3347	3533	3697	3881	4057	4243	4447	4639	4813	

TABLA II

DESCOMPOSICIONES EN FACTORES PRIMOS

DE TODOS LOS ENTEROS COMPUESTOS DESDE 4 Á 2000

4	2^2	65	5.13	122	2.61	177	3.59
6	2.3	66	2.3.11	123	3.41	178	2.89
8	2^3	68	$2^2.17$	124	$2^2.31$	180	$2^2.3^2.5$
9	3^2	69	3.23	125	5^3	182	2.7.13
10	2.5	70	2.5.7	126	$2.3^2.7$	183	3.61
12	$2^2.3$	72	$2^3.3^2$	128	2^7	184	$2^3.23$
14	2.7	74	2.37	129	3.43	185	5.37
15	3.5	75	3.5^2	130	2.5.13	186	2.3.31
16	2^4	76	$2^2.19$	132	$2^2.3.11$	187	11.17
18	2.3^2	77	7.11	133	7.19	188	$2^2.47$
20	$2^2.5$	78	2.3.13	134	2.67	189	$3^3.7$
21	3.7	80	$2^4.5$	135	$3^3.5$	190	2.5.19
22	2.11	81	3^4	136	$2^3.17$	192	$2^6.3$
24	$2^3.3$	82	2.41	138	2.3.23	194	2.97
25	5^2	84	$2^2.3.7$	140	$2^2.5.7$	195	3.5.13
26	2.13	85	5.17	141	3.47	196	$2^2.7^2$
27	3^3	86	2.43	142	2.71	198	$2.3^2.11$
28	$2^2.7$	87	3.29	143	11.13	200	$2^3.5^2$
30	2.3.5	88	$2^3.11$	144	$2^4.3^2$	201	3.67
32	2^5	90	$2.3^2.5$	145	5.29	202	2.101
33	3.11	91	7.13	146	2.73	203	7.29
34	2.17	92	$2^2.23$	147	3.7^2	204	$2^2.3.17$
35	5.7	93	3.31	148	$2^2.37$	205	5.41
36	$2^2.3^2$	94	2.47	150	$2.3.5^2$	206	2.103
38	2.19	95	5.19	152	$2^3.19$	207	$3^2.23$
39	3.13	96	$2^5.3$	153	$3^2.17$	208	$2^4.13$
40	$2^3.5$	98	2.7^2	154	2.7.11	209	11.19
42	2.3.7	99	$3^2.11$	155	5.31	210	2.3.5.7
44	$2^2.11$	100	$2^2.5^2$	156	$2^2.3.13$	212	$2^2.53$
45	$3^2.5$	102	2.3.17	158	2.79	213	3.71
46	2.23	104	$2^3.13$	159	3.53	214	2.107
48	$2^4.3$	105	3.5.7	160	$2^5.5$	215	5.43
49	7^2	106	2.53	161	7.23	216	$2^3.3^3$
50	2.5^2	108	$2^2.3^3$	162	2.3^4	217	7.31
51	3.17	110	2.5.11	164	$2^2.41$	218	2.109
52	$2^2.13$	111	3.37	165	3.5.11	219	3.73
54	2.3^3	112	$2^4.7$	166	2.83	220	$2^2.5.11$
55	5.11	114	2.3.19	168	$2^3.3.7$	221	13.17
56	$2^3.7$	115	5.23	169	13^2	222	2.3.37
57	3.19	116	$2^2.29$	170	2.5.17	224	$2^5.7$
58	2.29	117	$3^2.13$	171	$3^2.19$	225	$3^2.5^2$
60	$2^2.3.5$	118	2.59	172	$2^2.43$	226	2.113
62	2.31	119	7.17	174	2.3.29	228	$2^2.3.19$
63	$3^2.7$	120	$2^3.3.5$	175	$5^2.7$	230	2.5.23
64	2^6	121	11^2	176	$2^4.11$	231	3.7.11

232	$2^3.29$	288	$2^5.3^2$	340	$2^2.5.17$	394	2.197
234	$2.3^2.13$	289	17^2	341	11.31	395	5.79
235	5.47	290	2.5.29	342	$2.3^2.19$	396	$2^2.3^2.11$
236	$2^2.59$	291	3.97	343	7^3	398	2.199
237	3.79	292	$2^2.73$	344	$2^3.43$	399	3.7.19
238	2.7.17	294	$2.3.7^2$	345	3.5.23	400	$2^4.5^2$
240	$2^4.3.5$	295	5.59	346	2.173	402	2.3.67
242	2.11^2	296	$2^3.37$	348	$2^2.3.29$	403	13 31
243	3^5	297	$3^3.11$	350	$2.5^2.7$	404	$2^2.101$
244	$2^2.61$	298	2.149	351	$3^3.13$	405	$3^4.5$
245	5.7^2	299	13.23	352	$2^5.11$	406	2.7.29
246	2.3.41	300	$2^2.3.5^2$	354	2.3.59	407	11 37
247	13.19	301	7.43	355	5.71	408	$2^3.3.17$
248	$2^3.31$	302	2 151	356	$2^2.89$	410	2.5 41
249	3.83	303	3.101	357	3.7.17	411	3.137
250	2.5^3	304	$2^4.19$	358	2.179	412	$2^2.103$
252	$2^2.3^2.7$	305	5.61	360	$2^3.3^2.5$	413	7.59
253	11.23	306	$2.3^2.17$	361	19^2	414	$2.3^2.23$
254	2.127	308	$2^2.7.11$	362	2.181	415	5.83
255	3.5.17	309	3.103	363	3.11^2	416	$2^5.13$
256	2^8	310	2.5.31	364	2^2 7.13	417	3.139
258	2.3.43	312	$2^3.3.13$	365	5.73	418	2.11.19
259	7.37	314	2.157	366	2.3.61	420	$2^2.3.5.7$
260	$2^2.5.13$	315	$3^2.5.7$	368	$2^4.23$	422	2.211
261	$3^2.29$	316	$2^2.79$	369	$3^2.41$	423	$3^2.47$
262	2.131	318	2.3.53	370	2.5.37	424	$2^3.53$
264	$2^3.3.11$	319	11.29	371	7.53	425	$5^2.17$
265	5.53	320	$2^6.5$	372	$2^2.3.31$	426	2.3.71
266	2.7.19	321	3.107	374	2.11.17	427	7 61
267	3.89	322	2.7.23	375	3 5^3	428	$2^2.107$
268	$2^2.67$	323	17.19	376	$2^3.47$	429	3 11.13
270	$2.3^3.5$	324	$2^2.3^4$	377	13.29	430	2.5 43
272	$2^4.17$	325	$5^2.13$	378	$2.3^3.7$	432	$2^4.3^3$
273	3.7.13	326	2.163	380	$2^2.5.19$	434	2.7.31
274	2.137	327	3.109	381	3 127	435	3.5.29
275	$5^2.11$	328	$2^3.41$	382	2.191	436	$2^2.109$
276	$2^2.3.23$	329	3.109	384	2^7 3	437	19.23
278	2.139	330	2.3.5.11	385	5.7.11	438	2.3.73
279	$3^2.31$	332	$2^2.83$	386	2.193	440	$2^3.5.11$
280	$2^3.5.7$	333	$3^2.37$	387	$3^2.43$	441	$3^2.7^2$
282	2 3.47	334	2.167	388	$2^2.97$	442	2.13.17
284	$2^2.71$	335	5.67	390	2.3.5.13	444	$2^2.3.37$
285	3.5.19	336	$2^4.3.7$	391	17.23	445	5.89
286	2.11.13	338	2.13^2	392	$2^3.7^2$	446	2.223
287	7.41	339	3.113	393	3.131	447	3.149

448	$2^6.7$	502	2.251	553	7.79	608	$2^5.19$
450	$2.3^2.5^2$	504	$2^3.3^2.7$	554	2.277	609	3.7.29
451	11.41	505	5.101	555	3.5.37	610	2.5.61
452	$2^2.113$	506	2.11.23	556	$2^2.139$	611	13.47
453	3.151	507	3.13^2	558	$2\ 3^2.31$	612	$2^2.3^2.17$
454	2.227	508	$2^2.127$	559	13.43	614	2.307
455	5.7.13	510	2.3.5.17	560	$2^4.5.7$	615	3.5.41
456	$2^3.3.19$	511	7.73	561	3.11.17	616	$2^3.7.11$
458	2.229	512	2^9	562	2.281	618	2.3.103
459	$3^3.17$	513	$3^3.19$	564	$2^2.3.47$	620	$2^2.5.31$
460	$2^2.5.23$	514	2.257	565	5.113	621	$3^3.23$
462	2.3.7.11	515	5.103	566	2.283	622	2.311
464	$2^4.29$	516	$2^2.3.43$	567	$3^4.7$	623	7.89
465	3.5.31	517	11.47	568	$2^3.71$	624	$2^4.3.13$
466	$2^2.33$	518	2.7.37	570	2.3.5.19	625	5^4
468	$2^2.3^2.13$	519	3.173	572	$2^2.11.13$	626	2.313
469	7.67	520	$2^3.5.13$	573	3.191	627	3.11.19
470	2.5.47	522	$2.3^2.29$	574	2.7.41	628	$2^2.157$
471	3.157	524	$2^2.131$	575	$5^2.23$	629	17.37
472	$2^3.59$	525	$3.5^2.7$	576	$2^6.3^2$	630	$2.3^2.5.7$
473	11.43	526	2.263	578	2.17^2	632	$2^3.79$
474	2.3.79	527	17.31	579	3.193	633	3.211
475	$5^2.19$	528	$2^4.3.11$	580	$2^2.5.29$	634	2.317
476	$2^2.7.17$	529	23^2	581	7 83	635	5.127
477	$3^2.53$	530	2.5.53	582	2.3.97	636	$2^2.3.53$
478	2.239	531	$3^2.59$	583	11.53	637	7.91
480	$2^5.3.5$	532	$2^2.7.19$	584	$2^3.73$	638	2.11.29
481	13.37	533	13.41	585	$3^2.5.13$	639	$3^2.71$
482	2.241	534	2.3.89	586	2.293	640	$2^7.5$
483	3.7.23	535	5.107	588	$2^2.3.7^2$	642	2.3.107
484	$2^2.11^2$	536	$2^3.67$	589	19.31	644	$2^2.7.23$
485	5.97	537	3.179	590	2.5.59	645	3.5.43
486	2.3^5	538	2.269	591	3.197	646	2.17.19
488	$2^3.61$	539	$7^2.11$	592	$2^4.37$	648	$2^3.3^4$
489	3.163	540	$2^2.3^3.5$	594	$2.3^3.11$	649	11.59
490	$2.5.7^2$	542	2.271	595	5.7.17	650	$2.5^2.13$
492	$2^2.3.41$	543	3.181	596	$2^2.149$	651	3.7.31
493	17.29	544	$2^5.17$	597	3.199	652	$2^2.163$
494	2.13.19	545	5.109	598	2 13.23	654	2.3.109
495	$3^2\ 5.11$	546	2.3.7.13	600	$2^3.3.5^2$	655	5.131
496	$2^4.31$	548	$2^2.137$	602	2.7.43	656	$2^4.41$
497	7.71	549	$3^2.61$	603	$3^2.67$	657	$3^2.73$
498	2.3.83	550	$2\ 5^2.11$	604	$2^2.151$	658	2.7.47
500	$2^2.5^3$	551	19 29	605	5.11^2	660	$2^2.3.5.11$
501	3.167	552	$2^3.3.23$	606	2.3/101	662	2.331

663	3.13.17	714	2.3.7.17	767	13.59	818	2.409
664	$2^3.83$	715	5.11.13	768	$2^8.3$	819	$3^2.7.13$
665	5.7.19	716	$2^2.179$	770	2.5.7.11	820	$2^2.5.41$
666	$2.3^2.37$	717	3.239	771	3.257	822	2.3.137
667	23.29	718	2.359	772	$2^2.193$	824	$2^3.103$
668	$2^2.167$	720	$2^4.3^2.5$	774	$2.3^2.43$	825	$3.5^2.11$
669	3.223	721	7.103	775	$5^2.31$	826	2.7.59
670	2.5.67	722	2.19^2	776	$2^3.97$	828	$2^2.3^2.23$
671	11.61	723	3.241	777	3.7.37	830	2.5.83
672	$2^5.3.7$	724	$2^2.181$	778	2.389	831	3 277
674	2.337	725	$5^2.29$	779	19.41	832	$2^6.13$
675	$3^3.5^2$	726	$2.3.11^2$	780	$2^2.3.5.13$	833	$7^2.17$
676	$2^2.13^2$	728	$2^3.7.13$	781	11.71	834	2.3.139
678	2.3.113	729	3^6	782	2.17.23	835	5.167
679	7.97	730	2.5.73	783	$3^3.29$	836	$2^2.11.19$
680	$2^3.5.17$	731	17.43	784	$2^4.7^2$	837	$3^3.31$
681	3.227	732	$2^2.3.61$	785	5.157	838	2.419
682	2.11.31	734	2.367	786	2.3.131	840	$2^3.3.5.7$
684	$2^2.3^2.19$	735	$3.5.7^2$	788	$2^2.197$	841	29^2
685	5.137	736	$2^5.23$	789	3.263	842	2.421
686	2.7^3	737	11.67	790	2.5.79	843	3.281
687	3.229	738	$2.3^2.41$	791	7.113	844	$2^2.211$
688	$2^4.43$	740	$2^2.5.37$	792	$2^3.3^2.11$	845	5.13^2
689	13.53	741	3.13.19	793	13.61	846	$2.3^2.47$
690	2.3.5.23	742	2.7 53	794	2.397	847	7.11^2
692	$2^2.173$	744	$2^3.3$ 31	795	3.5.53	848	$2^4.53$
693	$3^2.7.11$	745	5.149	796	$2^2.199$	849	3,283
694	2.347	746	2.373	798	2.3.7.19	850	$2.5^2.17$
695	5.139	747	$3^2.83$	799	17.47	851	23.37
696	$2^3.3.29$	748	$2^2.11.17$	800	$2^5.5^2$	852	$2^2.3.71$
697	17.41	749	7.107	801	$3^2.89$	854	2.7.61
698	2.349	750	$2.3.5^3$	802	2.401	855	3^2 5.19
699	3.233	752	$2^4.47$	803	11.73	856	$2^3.107$
700	$2^2.5^2.7$	753	3.251	804	2^2 3.67	858	2.3.11.13
702	$2.3^3.13$	754	2.13.29	805	5.7.23	860	$2^2.5.43$
703	19.37	755	5.151	806	2.13.31	861	3.7.41
704	$2^6.11$	756	$2^2.3^3$ 7	807	3.269	862	2.431
705	3.5.47	758	2.379	808	$2^3.101$	864	$2^5.3^3$
706	2.353	759	3.11.23	810	$2.3^4.5$	865	5.173
707	7.101	760	$2^3.5.19$	812	$2^2.7.29$	866	2.433
708	$2^2.3.59$	762	2.3.127	813	3.271	867	3.17^2
710	2.5.71	763	7.109	814	2.11.37	868	$2^2.7.31$
711	$3^2.79$	764	$2^2.191$	815	5.163	869	11.79
712	$2^3.89$	765	$3^2.5.17$	816	$2^4.3.17$	870	2.3.5.29
713	23.31	766	2.383	817	19.43	871	13.67

872	$2^3.109$	924	$2^2.3.7.11$	976	$2^4.61$	1029	3.7^3
873	$3^2.97$	925	$5^2.37$	978	2.3.163	1030	2.5.103
874	2.19.23	926	2.463	979	11.89	1032	$2^3.3.43$
875	$5^3.7$	927	$3^2.103$	980	$2^2.5.7^2$	1034	2.11.47
876	$2^2.3.73$	928	$2^5.29$	981	$3^2.109$	1035	$3^2.5.23$
878	2.439	930	2.3.5.31	982	2.491	1036	$2^2.7.37$
879	3.293	931	$7^2.19$	984	$2^3.3.41$	1037	17.61
880	$2^4.5.11$	932	$2^2.233$	985	5.197	1038	2.3.173
882	$2.3^2.7^2$	933	3.311	986	2.17.29	1040	$2^4.5.13$
884	$2^2.13.17$	934	2.467	987	3.7.47	1041	3.347
885	3.5.59	935	5.11.17	988	$2^2.13.19$	1042	2.521
886	2.443	936	$2^3.3^2.13$	989	23.43	1043	7.149
888	$2^3.3.37$	938	2.7.67	990	$2.3^2.5.11$	1044	$2^2.3^2.29$
889	7.127	939	3 313	992	$2^5.31$	1045	5.11.19
890	2.5.89	940	$2^2.5.47$	993	3.331	1046	2.523
891	$3^4.11$	942	2.3.157	994	2.7.71	1047	3.349
892	$2^2.223$	943	23.41	995	5.199	1048	$2^3.131$
893	19.47	944	$2^4.59$	996	$2^2.3.83$	1050	$2.3.5^2.7$
894	2.3.149	945	$3^3.5.7$	998	2.499	1052	$2^2.263$
895	5 179	946	2.11.43	999	$3^3.37$	1053	$3^4.13$
896	$2^7.7$	948	$2^2.3.79$	1000	$2^3.5^3$	1054	2.17.31
897	3.13.23	949	13.73	1001	7.11.13	1055	5.211
898	2.449	950	$2.5^2.19$	1002	2 3.167	1056	$2^5.3.11$
899	29.31	951	3.317	1003	17.59	1057	7.151
900	$2^2.3^2.5^2$	952	$2^3.7.17$	1004	$2^2.251$	1058	2.23^2
901	17.53	954	$2.3^2.53$	1005	3.5.67	1059	3.353
902	2.11.41	955	5.191	1006	2 503	1060	$2^2.5.53$
903	3.7.43	956	$2^2.239$	1007	19.53	1062	$2.3^2.59$
904	$2^3.113$	957	3.11.29	1008	$2^4.3^2.7$	1064	$2^3.7.19$
905	5.181	958	2.479	1010	2.5.101	1065	3.5.71
906	2.3.151	959	7.137	1011	3.337	1066	2.13.41
908	$2^2.227$	960	$2^6.3.5$	1012	$2^2.11.23$	1067	11.97
909	$3^2.101$	961	31^2	1014	$2.3.13^2$	1068	$2^2.3.89$
910	2.5.7.13	962	2.13.37	1015	5.7.29	1070	2.5 107
912	$2^4.3.19$	963	$3^2.107$	1016	$2^3.127$	1071	$3^2.7.17$
913	11.83	964	$2^2.241$	1017	$3^2.113$	1072	$2^4.67$
914	2.457	965	5.193	1018	2.509	1073	19.37
915	3.5.61	966	2.3 7.23	1020	$2^2.3.5.17$	1074	2.3.179
916	$2^2.229$	968	$2^3.11^2$	1022	2.7.73	1075	$5^2.43$
917	7.131	969	3.17.19	1023	3.11.31	1076	$2^2.269$
918	$2.3^3.17$	970	2.5.97	1024	2^{10}	1077	3.359
920	$2^3.5.23$	972	$2^2.3^5$	1025	$5^2.41$	1078	$2.7^2.11$
921	3.307	973	7.139	1026	$2.3^3.19$	1079	13.83
922	2.461	974	2.487	1027	13.79	1080	$2^3.3^3.5$
923	13.71	975	$3.5^2.13$	1028	$2^2.257$	1081	23.47

1082	2.541	1136	$2^4.71$	1186	2.593	1240	$2^3.5.31$
1083	3.19^2	1137	3.379	1188	$2^2.3^3.11$	1241	17.73
1084	$2^2.271$	1138	2.569	1189	29.41	1242	$2.3^3.23$
1085	5.7.31	1139	17.67	1190	2.5.7.17	1243	11.113
1086	2.3.181	1140	$2^2.3.5.19$	1191	3.397	1244	$2^2.311$
1088	$2^6.17$	1141	7.163	1192	$2^3.149$	1245	3.5.83
1089	$3^2.11^2$	1142	2.571	1194	2.3.199	1246	2.7.89
1090	2.5.109	1143	$3^2.127$	1195	5.239	1247	29.43
1092	$2^2.3.7.13$	1144	$2^3.11.13$	1196	$2^2.13.23$	1248	$2^5.3.13$
1094	2.547	1145	5.229	1197	$3^2.7.19$	1250	2.5^4
1095	3.5.73	1146	2.3.191	1198	2.599	1251	$3^2.139$
1096	$2^3.137$	1147	31.37	1199	11.109	1252	$2^2.313$
1098	$2.3^2.61$	1148	$2^2.7.41$	1200	$2^4.3.5^2$	1253	7.179
1099	7.157	1149	3.383	1202	2.601	1254	2.3.11.19
1100	$2^2.5^2.11$	1150	$2.5^2.23$	1203	3.401	1255	5.251
1101	3.367	1152	$2^7.3^2$	1204	$2^2.7.43$	1256	$2^3.157$
1102	2.19.29	1154	2.577	1205	5.241	1257	3.419
1104	$2^4.3.23$	1155	3.5.7.11	1206	$2.3^2.67$	1258	2.17.37
1105	5.13.17	1156	$2^2.17^2$	1207	17.71	1260	$2^2.3^2.5.7$
1106	2.7.79	1157	13.89	1208	$2^3.151$	1261	13.97
1107	$3^3.41$	1158	2.3.193	1209	3.13.31	1262	2.631
1108	$2^2.277$	1159	19.61	1210	$2.5.11^2$	1263	3.431
1110	2.3.5.37	1160	$2^3.5.29$	1211	7.173	1264	$2^4.79$
1111	11.101	1161	$3^3.43$	1212	$2^2.3.101$	1265	5.11.23
1112	$2^3.139$	1162	2.7.83	1214	2.607	1266	2.3.211
1113	3.7.53	1164	$2^2.3.97$	1215	$3^5.5$	1267	7.181
1114	2.557	1165	5.233	1216	$2^6.19$	1268	$2^2.317$
1115	5.223	1166	2.11.53	1218	2.3.7.29	1269	$3^3.47$
1116	$2^2.3^2.31$	1167	3.389	1219	23.53	1270	2.5.127
1118	2.13.43	1168	$2^4.73$	1220	$2^2.5.61$	1271	31.41
1119	3.373	1169	7.167	1221	3.11.37	1272	$2^3.3.53$
1120	$2^5.5.7$	1170	$2.3^2.5.13$	1222	2.13.47	1273	19.67
1121	19.59	1172	$2^2.293$	1224	$2^3.3^2.17$	1274	2.7.91
1122	2.3.11.17	1173	3.17.23	1225	$5^2.7^2$	1275	$3.5^2.17$
1124	$2^2.281$	1174	2.587	1226	2.613	1276	$2^2.11.29$
1125	$3^2.5^3$	1175	$5^2.47$	1227	3.409	1278	$2.3^2.71$
1126	2.563	1176	$2^3.3.7^2$	1228	$2^2.307$	1280	$2^8.5$
1127	$7^2.23$	1177	11.107	1230	2.3.5.41	1281	3.7.61
1128	$2^3.3.47$	1178	2.19.31	1232	$2^4.7.11$	1282	2.641
1130	2.5.113	1179	$3^2.131$	1233	$3^2.137$	1284	$2^2.3.107$
1131	3.13.29	1180	$2^2.5.59$	1234	2.617	1285	5.257
1132	$2^2.283$	1182	2.3.197	1235	5.13.19	1286	2.643
1133	11.103	1183	7.13^2	1236	$2^2.3.103$	1287	$3^2.11.13$
1134	$2.3^4.7$	1184	$2^5.37$	1238	2.619	1288	$2^3.7.23$
1135	5.227	1185	3.5.79	1239	3.7.59	1290	2.3.5.43

1292	$2^2.17.19$	1344	$2^6.3.7$	1393	7.199	1445	5.17^2
1293	3.431	1345	5.269	1394	$2.17.41$	1446	$2.3.241$
1294	2.647	1346	2.673	1395	$3^2.5.31$	1448	$2^3.181$
1295	$5.7.37$	1347	3.449	1396	$2^2.349$	1449	$3^2.7.23$
1296	$2^4.3^4$	1348	$2^2.337$	1397	11.127	1450	$2.5^2.29$
1298	$2.11.59$	1349	19.71	1398	$2.3.233$	1452	$2^2.3.11^2$
1299	3.433	1350	$2.3^3.5^2$	1400	$2^3.5^2.7$	1454	2.727
1300	$2^2.5^2.13$	1351	7.193	1401	3.467	1455	$3.5.97$
1302	$2.3.7.31$	1352	$2^3.13^2$	1402	2.701	1456	$2^4.7.13$
1304	$2^3.163$	1353	$3.11.41$	1403	23.61	1457	31.47
1305	$3^2.5.29$	1354	2.677	1404	$2^2.3^3.13$	1458	2.3^6
1306	2.653	1355	5.271	1405	5.281	1460	$2^2.5.73$
1308	$2^2.3.109$	1356	$2^2.3.113$	1406	$2.19.37$	1461	3.487
1309	$7.11.17$	1357	23.59	1407	$3.7.67$	1462	$2.17.43$
1310	$2.5.131$	1358	$2.7.97$	1408	$2^7.11$	1463	$7.11.19$
1311	$3.19.23$	1359	$3^2.151$	1410	$2.3.5.47$	1464	$2^3.3.61$
1312	$2^5.41$	1360	$2^4.5.17$	1411	17.83	1465	5.293
1313	13.101	1362	$2.3.227$	1412	$2^2.353$	1466	2.733
1314	$2.3^2.73$	1363	29.47	1413	$3^2.157$	1467	$3^2.163$
1315	5.263	1364	$2^2.11.31$	1414	$2.7.101$	1468	$2^2.367$
1316	$2^2.7.47$	1365	$3.5.7.13$	1415	5.283	1469	13.113
1317	3.439	1366	2.683	1416	$2^3.3.59$	1470	$2.3.5.7^2$
1318	2.659	1368	$2^3.3^2.19$	1417	13.109	1472	$2^6.23$
1320	$2^3.3.5.11$	1369	37^2	1418	2.709	1473	3.491
1322	2.661	1370	$2.5.137$	1419	$3.11.43$	1474	$2.11.67$
1323	$3^3.7^2$	1371	3.457	1420	$2^2.5.71$	1475	$5^2.59$
1324	$2^2.331$	1372	$2^2.7^3$	1421	$7^2.29$	1476	$2^2.3^2.41$
1325	$5^2.53$	1374	$2.3.229$	1422	$2.3^2.79$	1477	7.211
1326	$2.3.13.17$	1375	$5^3.11$	1424	$2^4.89$	1478	2.739
1328	$2^4.83$	1376	$2^5.43$	1425	$3.5^2.19$	1479	$3.17.29$
1329	3.443	1377	$3^4.17$	1426	$2.23.31$	1480	$2^3.5.37$
1330	$2.5.7.19$	1378	$2.13.53$	1428	$2^2.3.7.17$	1482	$2.3.13.19$
1331	11^3	1379	7.197	1430	$2.5.11.13$	1484	$2^2.7.53$
1332	$2^2.3^2.37$	1380	$2^2.3.5.23$	1431	$3^3.53$	1485	$3^3.5.11$
1333	31.43	1382	2.691	1432	$2^3.179$	1486	2.743
1334	$2.23.29$	1383	3.461	1434	$2.3.239$	1488	$2^4.3.31$
1335	$3.5.89$	1384	$2^3.173$	1435	$5.13.19$	1490	$2.5.149$
1336	$2^3.167$	1385	5.277	1436	$2^2.359$	1491	$3.7.71$
1337	7.191	1386	$2.3^2.7.11$	1437	3.479	1492	$2^2.373$
1338	$2.3.223$	1387	19.73	1438	2.719	1494	$2.3^2.83$
1339	13.103	1388	$2^2.347$	1440	$2^5.3^2.5$	1495	$5.13.23$
1340	$2^2.5.67$	1389	3.463	1441	11.131	1496	$2^3.11.17$
1341	$3^2.149$	1390	$2.5.139$	1442	$2.7.103$	1497	3.499
1342	$2.11.61$	1391	13.107	1443	$3.13.37$	1498	$2.7.107$
1343	17.79	1392	$2^4.3.29$	1444	$2^2.19^2$	1500	$2^2.3.5^3$

1501	19.79	1551	3.11.47	1604	2^2.401	1656	$2^3.3^2$.23
1502	2.751	1552	2^4.97	1605	3.5.107	1658	2.821
1503	3^2.167	1554	2.3.7.37	1606	2.11:73	1659	3.7.79
1504	2^5.47	1555	5.311	1608	2^3.3.67	1660	2^2.5.83
1505	5.7.43	1556	2^2.389	1610	2.5.7.23	1661	11.151
1506	2.3.251	1557	3^2.173	1611	3^2.179	1662	2.3.277
1507	11.137	1558	2.19.41	1612	2^2.13.31	1664	2^7.13
1508	2^2.13.29	1560	2^3.3.5.13	1614	2.3.269	1665	3^2.5.37
1509	3.503	1561	7.223	1615	5.17.19	1666	2.7^2.17
1510	2.5.151	1562	2.11.71	1616	2^4.101	1668	2^2.3.139
1512	$2^3.3^3$.7	1563	3.521	1617	3.7^2.11	1670	2.5.167
1513	17 89	1564	2^2.17.23	1618	2.809	1671	3.557
1514	2.757	1565	5.313	1620	$2^2.3^4$.5	1672	2^3.11.19
1515	3.5.101	1566	2.3^3.29	1622	2.811	1673	7.239
1516	2^2.379	1568	$2^5.7^2$	1623	3.541	1674	2.3^3.31
1517	37.41	1569	3.523	1624	2^3:7.29	1675	5^2.67
1518	2.3.11.23	1570	2.5.157	1625	5^3.13	1676	2^2.419
1519	7^2.31	1572	2^2.3.131	1626	2.3.271	1677	3.13.43
1520	2^4.5.19	1573	11^2.13	1628	2^2.11.37	1678	2.839
1521	$3^2.13^2$	1574	2.787	1629	3^2.181	1679	23.73
1522	2.761	1575	3^2 5^2.7	1630	2.5.163	1680	2^4.3.5.7
1524	2^2.3.127	1576	2^3.197	1631	7.233	1681	41^2
1525	5^2.61	1577	19.83	1632	2^5.3.17	1682	2.29^2
1526	2.7.109	1578	2.3.263	1633	23.71	1683	3^2.11.17
1527	3.509	1580	2^2.5.79	1634	2.19.43	1684	2^2.421
1528	2^3.191	1581	3.17.31	1635	3.5.109	1685	5.337
1529	11.139	1582	2.7.113	1636	2^2.409	1686	2.3.281
1530	2 3^2.5.17	1584	$2^4.3^2$.11	1638	2.3^2.7.13	1687	7.241
1532	2^2.383	1585	5 317	1639	11.149	1688	2^3.211
1533	3.7.73	1586	2.13.61	1640	2^3.5.41	1689	3.563
1534	2.13.59	1587	3.23^2	1641	3.547	1690	2.5.13^2
1535	5.307	1588	2^2.397	1642	2.821	1691	19.89
1536	2^9.3	1589	7.227	1643	31.53	1692	$2^2.3^2$.47
1537	29.53	1590	2.3.5.53	1644	2^2.3.157	1694	2.7.11^2
1538	2.769	1591	37.43	1645	5 7.47	1695	3.5.113
1539	3^4.19	1592	2^3.199	1646	2.823	1696	2^5.53
1540	2^2.5.7.11	1593	3^3.59	1647	3^3.61	1698	2.3.283
1541	23.67	1594	2.797	1648	2^4.103	1700	$2^2.5^2$.17
1542	2.3.257	1595	5.11.29	1649	17.97	1701	3^5.7
1544	2^3.193	1596	2^2.3.7.19	1650	2.3.5^2.11	1702	2.23.37
1545	3.5.103	1598	2.17.47	1651	13.127	1703	13.131
1546	2.773	1599	3.13.41	1652	2^2.7.59	1704	2^3.3.71
1547	7.13.17	1600	$2^6.5^2$	1653	3.19.29	1705	5.11.31
1548	$2^2.3^2$.43	1602	2.3^2.89	1654	2.827	1706	2.853
1550	2.5^2.31	1603	7.229	1655	5.331	1708	2^2.7.61

1710	$2.3^2.5.19$	1762	2.881	1813	$7^2.37$	1862	$2.7^2.19$
1711	29.59	1763	41.43	1814	2.907	1863	$3^4.23$
1712	$2^4.107$	1764	$2^2.3^2.7^2$	1815	$3.5.11^2$	1864	$2^3.233$
1713	3.571	1765	5.853	1816	$2^3.227$	1865	5.373
1714	2.857	1766	2.883	1817	23.79	1866	2.3.311
1715	5.7^3	1767	3.19.31	1818	$2.3^2.101$	1868	$2^2.467$
1716	$2^2.3.11.13$	1768	$2^3.13.17$	1819	17.107	1869	3.7.89
1717	17.101	1769	29.61	1820	$2^2.5.7.13$	1870	2.5.11.17
1718	2.859	1770	2.3.5.59	1821	3.607	1872	$2^4.3^2.13$
1719	$3^2.191$	1771	7.11.23	1822	2.911	1874	2.937
1720	$2^3.5.43$	1772	$2^2.443$	1824	$2^5.3.19$	1875	3.5^4
1722	2.3.7.41	1773	$3^2.197$	1825	$5^2.73$	1876	$2^2.7.67$
1724	$2^2.431$	1774	2.887	1826	2.913	1878	2.3.313
1725	$3.5^2.23$	1775	$5^2.71$	1827	$3^2.7.29$	1880	$2^3.5.47$
1726	2.863	1776	$2^4.3.37$	1828	$2^2.457$	1881	$3^2.11.19$
1727	11.157	1778	2.7.127	1829	31.59	1882	2.941
1728	$2^6.3^3$	1779	3.593	1830	2.3.5.61	1883	7.269
1729	7.13.19	1780	$2^2.5.89$	1832	$2^3.229$	1884	$2^2.3.157$
1730	2.5.173	1781	13.137	1833	3.13.47	1885	5.13.29
1731	3.577	1782	$2.3^4.11$	1834	2.7.131	1886	2.23.41
1732	$2^2.433$	1784	$2^3.223$	1835	5.367	1887	3.17.37
1734	$2.3.17^2$	1785	3.5.7.17	1836	$2^2.3^3.17$	1888	$2^5.59$
1735	5.347	1786	2.19.47	1837	11.167	1890	$2.3^3.5.7$
1736	$2^3.7.31$	1788	$2^2.3.149$	1838	2.919	1891	31.61
1737	$3^2.193$	1790	2.5.179	1839	3.613	1892	$2^2.11.43$
1738	2.11.79	1791	$3^2.199$	1840	$2^4.5.23$	1893	3.631
1739	37.47	1792	$2^8.7$	1841	7.263	1894	2.947
1740	$2^2.3.5.29$	1793	11.163	1842	2.3.307	1895	5.379
1742	2.13.67	1794	2.3.13.23	1843	19.97	1896	2^3 3.79
1743	3.7.83	1795	5.359	1844	$2^2.461$	1897	7.271
1744	$2^4.109$	1796	$2^2.449$	1845	$3^2.5.41$	1898	2.13.73
1745	5.349	1797	3.599	1846	2.13.71	1899	$3^2.211$
1746	$2.3^2.97$	1798	2.29.31	1848	$2^3.3.7.11$	1900	$2^2.5^2.19$
1748	$2^2.19.23$	1799	7.257	1849	43^2	1902	2.3.317
1749	3.11.53	1800	$2^3.3^2.5^2$	1850	$2.5^2.37$	1903	11.173
1750	$2.5^3.7$	1802	2.17.53	1851	3.617	1904	$2^4.7.17$
1751	17.103	1803	3.601	1852	$2^2.463$	1905	3.5.127
1752	$2^3.3.73$	1804	$2^2.11.41$	1853	17 109	1906	2.953
1754	2.877	1805	5.19^2	1854	$2.3^2.103$	1908	$2^2.3^2.57$
1755	$3^3.5.13$	1806	2.3.7.43	1855	5.7.53	1909	23.83
1756	$2^2.439$	1807	13.139	1856	$2^6.29$	1910	2.5.191
1757	7.251	1808	$2^4.113$	1857	3.619	1911	3.7.91
1758	2.3.293	1809	$3^3.67$	1858	2.929	1912	$2^3.239$
1760	$2^5.5.11$	1810	2.5.181	1859	11.13^2	1914	2.3.11.29
1761	3.587	1812	$2^2.3.151$	1860	$2^2.3.5.31$	1915	5.383

1916	$2^2.479$	1937	13.149	1958	2.11.89	1978	2.23.43
1917	$3^3.71$	1938	2.3.17.19	1959	3.653	1980	$2^2.3^2.5.11$
1918	2.7.137	1939	7.277	1960	$2^3.5.7^2$	1981	7.283
1919	19.101	1940	$2^2.5.97$	1961	37.53	1982	2.991
1920	$2^7.3.5$	1941	3.647	1962	$2.3^2.109$	1983	3.661
1921	17.113	1942	2.971	1963	13.151	1984	$2^6.31$
1922	2.31^2	1943	29.67	1964	$2^2.491$	1985	5.397
1923	3.641	1944	$2^3.3^5$	1965	3.5.131	1986	2.3.331
1924	$2^2.13.37$	1945	5.389	1966	2.983	1988	$2^2.7.71$
1925	$5^2.7.11$	1946	2.7.139	1967	7.281	1989	$3^2.13.17$
1926	$2.3^2.107$	1947	3.11.59	1968	$2^4.3.41$	1990	2.5.199
1927	41.47	1948	$2^2.487$	1969	11 179	1991	11.181
1928	$2^3.241$	1950	$2.3.5^2.13$	1970	2.5.197	1992	$2^3.3.83$
1929	3.643	1952	$2^5.61$	1971	$3^3.73$	1994	2.997
1930	2.5.193	1953	$3^2.7.31$	1972	$2^2.17.29$	1995	$3^2.13.17$
1932	$2^2.3.7.23$	1954	2.977	1974	2 3.7.47	1996	$2^2.499$
1934	2.967	1955	5.17.23	1975	$5^2.79$	1998	$2.3^3.37$
1935	$3^2.5.43$	1956	$2^2.3.163$	1976	$2^3.13$ 19	2000	$2^4.5^3$
1936	$2^4.11^2$	1957	19.103	1977	3.659		

TABLA III

NÚMEROS ENTEROS HASTA 10000,

MANTISAS DE SUS LOGARITMOS CON SIETE CIFRAS Y DIFERENCIAS CORRESPONDIENTES Á LOS MAYORES QUE 1000.

N.	M. Log.	N	M. Log.	N.	M. Log.	N.	M. Log.
1	0000000	44	6434529	87	9395192	130	1139433
2	3010300	45	6532125	88	9444827	131	1172713
3	4771212	46	6627578	89	9493900	132	1205739
4	6020600	47	6720979	90	9542425	133	1238516
5	6989700	48	6812412	91	9590414	134	1271048
6	7781512	49	6901960	92	9637878	135	1303338
7	8450980	50	6989700	93	9684829	136	1335389
8	9030900	51	7075702	94	9731278	137	1367206
9	9542425	52	7160033	95	9777236	138	1398791
10	0000000	53	7242759	96	9822712	139	1430148
11	0413927	54	7323938	97	9867717	140	1461280
12	0791812	55	7403627	98	9912260	141	1492191
13	1139433	56	7481880	99	9956352	142	1522883
14	1461280	57	7558749	100	0000000	143	1553360
15	1760913	58	7634280	101	0043214	144	1583625
16	2041200	59	7708520	102	0086002	145	1613680
17	2304489	60	7781512	103	0128372	146	1643529
18	2552725	61	7853298	104	0170333	147	1673173
19	2787536	62	7923917	105	0211893	148	1702617
20	3010300	63	7993405	106	0253059	149	1731863
21	3222193	64	8061800	107	0293838	150	1760913
22	3424227	65	8129134	108	0334238	151	1789769
23	3617278	66	8195439	109	0374265	152	1818436
24	3802112	67	8260748	110	0413927	153	1846914
25	3979400	68	8325089	111	0453230	154	1875207
26	4149733	69	8388491	112	0492180	155	1903317
27	4313638	70	8450980	113	0530784	156	1931246
28	4471580	71	8512583	114	0569048	157	1958996
29	4623980	72	8573325	115	0606978	158	1986571
30	4771212	73	8633229	116	0644580	159	2013971
31	4913617	74	8692317	117	0681859	160	2041200
32	5051500	75	8750613	118	0718820	161	2068259
33	5185140	76	8808136	119	0755470	162	2095150
34	5314789	77	8864907	120	0791812	163	2121876
35	5440680	78	8920946	121	0827854	164	2148438
36	5563025	79	8976271	122	0863598	165	2174839
37	5682017	80	9030900	123	0899051	166	2201081
38	5797836	81	9084850	124	0934217	167	2227165
39	5910646	82	9138138	125	0969100	168	2253093
40	6020600	83	9190781	126	1003705	169	2278867
41	6127839	84	9242793	127	1038037	170	2304489
42	6232493	85	9294189	128	1072100	171	2329961
43	6334685	86	9344984	129	1105897	172	2355284

N.	M. Log.	N.	M. Log.	N.	M. Log.	N.	M. Log.
173	2380461	216	3344537	259	4132998	302	4800069
174	2405492	217	3364597	260	4149733	303	4814426
175	2430880	218	3384565	261	4166405	304	4828736
176	2455127	219	3404441	262	4183013	305	4842998
177	2479733	220	3424227	263	4199557	306	4857214
178	2504200	221	3443923	264	4216039	307	4871384
179	2528530	222	3463530	265	4232459	308	4885507
180	2552725	223	3483049	266	4248816	309	4899585
181	2576786	224	3502480	267	4265113	310	4913617
182	2600714	225	3521825	268	4281348	311	4927604
183	2624511	226	3541084	269	4297523	312	4941546
184	2648178	227	3560259	270	4313638	313	4955443
185	2671717	228	3579348	271	4329693	314	4969296
186	2695129	229	3598355	272	4345689	315	4983105
187	2718416	230	3617279	273	4361626	316	4996871
188	2741578	231	3636120	274	4377506	317	5010593
189	2764618	232	3654880	275	4393327	318	5024271
190	2787536	233	3673560	276	4409091	319	5037907
191	2810334	234	3692159	277	4424798	320	5051500
192	2833012	235	3710679	278	4440448	321	5065050
193	2855573	236	3729120	279	4456042	322	5078559
194	2878017	237	3747483	280	4471580	323	5092025
195	2900346	238	3765770	281	4487063	324	5105450
196	2922561	239	3783980	282	4502491	325	5118834
197	2944662	240	3802112	283	4517864	326	5132156
198	2966652	241	3820170	284	4533183	327	5145477
199	2988531	242	3838154	285	4548449	328	5158738
200	3010300	243	3856063	286	4563660	329	5171959
201	3031960	244	3873898	287	4578819	330	5185139
202	3053514	245	3891661	288	4593925	331	5198280
203	3074960	246	3909351	289	4608978	332	5211381
204	3096302	247	3926969	290	4623980	333	5224442
205	3117539	248	3944517	291	4638930	334	5237465
206	3138672	249	3961993	292	4653828	335	5250448
207	3159703	250	3979400	293	4668676	336	5263393
208	3180633	251	3996737	294	4683473	337	5276299
209	3201463	252	4014005	295	4698220	338	5289167
210	3222193	253	4031205	296	4712917	339	5301997
211	3242825	254	4048337	297	4727564	340	5314789
212	3263359	255	4065402	298	4742163	341	5327544
213	3283796	256	4082400	299	4756712	342	5340261
214	3304138	257	4099331	300	4771212	343	5352941
215	3324385	258	4116197	301	4785665	344	5365584

N.	M. Log.	N.	M. Log.	N.	M. Log.	N.	M. Log.
345	5378191	388	5888317	431	6344773	474	6757783
346	5390761	389	5899496	432	6354837	475	6766936
347	5403295	390	5910646	433	6364879	476	6776069
348	5415792	391	5921768	434	6374897	477	6785184
349	5428254	392	5932861	435	6384893	478	6794279
350	5440680	393	5943925	436	6394865	479	6803355
351	5453071	394	5954962	437	6404814	480	6812412
352	5465427	395	5965971	438	6414741	481	6821451
353	5477747	396	5976952	439	6424645	482	6830470
354	5490033	397	5987905	440	6434527	483	6839471
355	5502283	398	5998831	441	6444386	484	6848454
356	5514500	399	6009729	442	6454223	485	6857417
357	5526682	400	6020600	443	6464037	486	6866363
358	5538830	401	6031444	444	6473830	487	6875290
359	5550944	402	6042260	445	6483600	488	6884198
360	5563025	403	6053050	446	6493349	489	6893089
361	5575072	404	6063814	447	6503075	490	6901961
362	5587086	405	6074550	448	6512780	491	6910815
363	5599066	406	6085260	449	6522463	492	6919651
364	5611014	407	6095944	450	6532125	493	6928469
365	5622929	408	6106602	451	6541765	494	6937269
366	5634811	409	6117233	452	6551384	495	6946052
367	5646661	410	6127839	453	6560982	496	6954817
368	5658478	411	6138418	454	6570558	497	6963564
369	5670264	412	6148972	455	6580114	498	6972293
370	5682017	413	6159500	456	6589648	499	6981005
371	5693739	414	6170003	457	6599162	500	6989700
372	5705429	415	6180481	458	6608655	501	6998377
373	5717088	416	6190933	459	6618127	502	7007037
374	5728716	417	6201360	460	6627578	503	7015680
375	5740313	418	6211763	461	6637009	504	7024305
376	5751878	419	6222140	462	6646420	505	7032914
377	5763413	420	6232493	463	6655810	506	7041505
378	5774918	421	6242821	464	6665180	507	7050080
379	5786392	422	6253124	465	6674529	508	7058637
380	5797836	423	6263404	466	6683859	509	7067178
381	5809250	424	6273659	467	6693169	510	7075702
382	5820634	425	6283889	468	6702458	511	7084209
383	5831988	426	6294096	469	6711728	512	7092700
384	5843312	427	6304279	470	6720979	513	7101174
385	5854607	428	6314438	471	6730209	514	7109631
386	5865873	429	6324573	472	6739420	515	7118072
387	5877110	430	6334685	473	6748611	516	7126497

N.	M. Log.	N.	M. Log.	N.	M. Log.	N.	M. Log.
517	7134905	560	7481880	603	7803173	646	8102325
518	7143298	561	7489629	604	7810369	647	8109043
519	7151674	562	7497363	605	7817554	648	8115750
520	7160033	563	7505084	606	7824726	649	8122447
521	7168377	564	7512791	607	7831887	650	8129134
522	7176705	565	7520484	608	7839036	651	8135810
523	7185017	566	7528164	609	7846173	652	8142476
524	7193313	567	7535831	610	7853298	653	8149132
525	7201593	568	7543483	611	7860412	654	8155777
526	7209857	569	7551123	612	7867514	655	8162413
527	7218106	570	7558749	613	7874605	656	8169038
528	7226339	571	7566361	614	7881684	657	8175654
529	7234557	572	7573960	615	7888751	658	8182259
530	7242759	573	7581546	616	7895807	659	8188854
531	7250945	574	7589119	617	7902852	660	8195439
532	7259116	575	7596678	618	7909885	661	8202015
533	7267272	576	7604225	619	7916906	662	8208580
534	7275413	577	7611758	620	7923917	663	8215135
535	7283538	578	7619278	621	7930916	664	8221681
536	7291648	579	7626786	622	7937904	665	8228216
537	7299743	580	7634280	623	7944880	666	8234742
538	7307823	581	7641761	624	7951846	667	8241258
539	7315888	582	7649230	625	7958800	668	8247765
540	7323938	583	7656685	626	7965743	669	8254261
541	7331973	584	7664128	627	7972675	670	8260748
542	7339993	585	7671559	628	7979596	671	8267225
543	7347998	586	7678976	629	7986506	672	8273693
544	7355989	587	7686381	630	7993405	673	8280151
545	7363965	588	7693773	631	8000294	674	8286600
546	7371926	589	7701153	632	8007170	675	8293038
547	7379873	590	7708520	633	8014037	676	8299467
548	7387806	591	7715875	634	8020893	677	8305887
549	7395723	592	7723217	635	8027737	678	8312297
550	7403627	593	7730547	636	8034571	679	8318698
551	7411516	594	7737864	637	8041394	680	8325090
552	7419391	595	7745170	638	8048207	681	8331471
553	7427251	596	7752463	639	8055009	682	8337844
554	7435098	597	7759743	640	8061800	683	8344207
555	7442930	598	7767012	641	8068580	684	8350561
556	7450748	599	7774268	642	8075350	685	8356906
557	7458552	600	7781512	643	8082110	686	8363241
558	7466342	601	7788745	644	8088859	687	8369567
559	7474118	602	7795965	645	8095597	688	8375884

N.	M. Log.	N.	M. Log.	N.	M. Log.	N.	M. Log.
689	8382192	732	8645111	775	8893017	818	9127533
690	8388491	733	8651040	776	8898617	819	9132839
691	8394780	734	8656961	777	8904210	820	9138138
692	8401061	735	8662873	778	8909796	821	9143432
693	8407332	736	8668778	779	8915375	822	9148718
694	8413595	737	8674675	780	8920946	823	9153998
695	8419848	738	8680554	781	8926510	824	9159272
696	8426092	739	8686444	782	8932067	825	9164539
697	8432328	740	8692317	783	8937618	826	9169800
698	8438554	741	8698182	784	8943161	827	9175055
699	8444772	742	8704039	785	8948697	828	9180303
700	8450980	743	8709888	786	8954225	829	9185545
701	8457180	744	8715729	787	8959747	830	9190781
702	8463371	745	8721563	788	8965262	831	9196010
703	8469553	746	8727388	789	8970770	832	9201233
704	8475727	747	8733206	790	8976271	833	9206450
705	8481891	748	8739016	791	8981765	834	9211660
706	8488047	749	8744818	792	8987252	835	9216865
707	8494194	750	8750613	793	8992732	836	9222063
708	8500333	751	8756399	794	8998205	837	9227255
709	8506462	752	8762178	795	9003671	838	9232440
710	8512583	753	8767950	796	9009131	839	9237620
711	8518696	754	8773713	797	9014583	840	9242793
712	8524800	755	8779469	798	9020029	841	9247960
713	8530895	756	8785218	799	9025468	842	9253121
714	8536982	757	8790959	800	9030900	843	9258276
715	8543060	758	8796692	801	9036325	844	9263424
716	8549130	759	8802418	802	9041744	845	9268567
717	8555192	760	8808136	803	9047155	846	9273704
718	8561244	761	8813847	804	9052560	847	9278834
719	8567289	762	8819550	805	9057959	848	9283958
720	8573325	763	8825245	806	9063350	849	9289077
721	8579353	764	8830934	807	9068735	850	9294189
722	8585372	765	8836614	808	9074114	851	9299296
723	8591383	766	8842288	809	9079485	852	9304396
724	8597386	767	8847954	810	9084850	853	9309490
725	8603380	768	8853612	811	9090208	854	9314579
726	8609366	769	8859263	812	9095560	855	9319661
727	8615344	770	8864907	813	9100905	856	9324738
728	8621314	771	8870544	814	9106244	857	9329808
729	8627275	772	8876173	815	9111576	858	9334873
730	8633229	773	8881795	816	9116902	859	9339932
731	8639174	774	8887410	817	9122221	860	9344984

N.	M. Log.	N.	M. Log.	N.	M. Log.	N.	M. Log.
861	9350031	896	9523080	931	9689497	966	9849771
862	9355073	897	9527924	932	9694159	967	9854265
863	9360108	898	9532763	933	9698816	968	9858754
864	9365137	899	9537597	934	9703469	969	9863238
865	9370161	900	9542425	935	9708116	970	9867717
866	9375179	901	9547298	936	9712758	971	9872192
867	9380191	902	9552065	937	9717396	972	9876663
868	9385197	903	9556877	938	9722028	973	9881128
869	9390198	904	9561684	939	9726656	974	9885590
870	9395192	905	9566486	940	9731278	975	9890046
871	9400182	906	9571282	941	9735896	976	9894498
872	9405165	907	9576073	942	9740509	977	9898946
873	9410142	908	9580858	943	9745117	978	9903388
874	9415114	909	9585639	944	9749720	979	9907827
875	9420080	910	9590414	945	9754318	980	9912261
876	9425041	911	9595184	946	9758911	981	9916690
877	9429996	912	9599948	947	9763500	982	9921115
878	9434945	913	9604708	948	9768083	983	9925535
879	9439889	914	9609462	949	9772662	984	9929951
880	9444827	915	9614211	950	9777236	985	9934362
881	9449759	916	9618955	951	9781805	986	9938769
882	9454686	917	9623693	952	9786369	987	9943171
883	9459607	918	9628427	953	9790929	988	9947569
884	9464523	919	9633155	954	9795484	989	9951963
885	9469433	920	9637878	955	9800034	990	9956352
886	9474337	921	9642596	956	9804579	991	9960736
887	9479236	922	9647309	957	9809119	992	9965117
888	9484130	923	9652017	958	9813655	993	9969492
889	9489018	924	9656720	959	9818186	994	9973864
890	9493900	925	9661417	960	9822712	995	9978231
891	9498777	926	9666110	961	9827234	996	9982593
892	9503648	927	9670797	962	9831751	997	9986952
893	9508515	928	9675480	963	9836263	998	9991305
894	9513375	929	9680157	964	9840770	999	9995655
895	9518230	930	9684829	965	9845273	1000	0000000

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
1001	0004341	4336	1041	0174507	4170	1081	0338257	4016
2	8677	32	2	8677	66	2	0342273	12
3	0013009	28	3	0182843	62	3	6285	08
4	7337	24	4	7005	58	4	0350293	04
5	0021661	19	5	0191163	54	5	4297	01
6	5980	15	6	5317	50	6	8298	3997
7	0030295	10	7	9467	46	7	0362295	94
8	4605	07	8	0203613	42	8	6289	90
9	8912	02	9	7755	38	9	0370279	86
1010	0043214	4298	1050	0211893	34	1090	4265	83
1	7512	93	1	6027	30	1	8248	78
2	0051805	89	2	0220157	27	2	0382226	76
3	6094	86	3	4284	22	3	6202	71
4	0060380	80	4	8406	19	4	0390173	68
5	4660	77	5	0232525	14	5	4141	65
6	8937	73	6	6639	11	6	8106	60
7	0073210	68	7	0240750	07	7	0402066	57
8	7478	64	8	4857	03	8	6023	54
9	0081742	60	9	8960	4099	9	9977	50
1020	6002	55	1060	0253059	95	1100	0413927	46
1	0090257	52	1	7154	91	1	7873	43
2	4509	47	2	0261245	88	2	0421816	39
3	8756	44	3	5333	83	3	5755	36
4	0103000	39	4	9416	80	4	9691	32
5	7239	35	5	0273496	76	5	0433623	28
6	0111474	30	6	7572	72	6	7551	25
7	5704	27	7	0281644	69	7	0441476	22
8	9931	23	8	5713	64	8	5398	17
9	0124154	18	9	9777	61	9	9315	15
1030	8372	15	1070	0293838	57	1110	0453230	11
1	0132587	10	1	7895	53	1	7141	07
2	6797	06	2	0301948	49	2	0461048	04
3	0141003	02	3	5997	46	3	4952	00
4	5205	4198	4	0310043	42	4	8852	3897
5	9403	95	5	4085	38	5	0472749	93
6	0153598	90	6	8123	34	6	6642	90
7	7788	86	7	0322157	31	7	0480532	86
8	0161974	81	8	6188	26	8	4418	83
9	6155	78	9	0330214	24	9	8301	79
1040	0170333	74	1080	4238	19	1120	0492180	76

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
1121	0496056	3873	1161	0648322	3739	1201	0795430	3615
2	9929	69	2	0652061	36	2	9045	11
3	0503798	65	3	5797	33	3	0802656	09
4	7663	62	4	9530	29	4	6265	05
5	0511525	59	5	0663259	27	5	9870	03
6	5384	55	6	6986	23	6	0813473	00
7	9239	52	7	0670709	19	7	7073	3596
8	0523091	48	8	4428	17	8	0820669	94
9	6939	45	9	8145	14	9	4263	91
1130	0530784	42	1170	0681859	10	1210	7854	87
1	4626	38	1	5569	07	1	0831441	85
2	8464	35	2	9270	04	2	5026	82
3	0542299	32	3	0692980	01	3	8608	79
4	6131	28	4	6681	3698	4	0842187	76
5	9959	24	5	0700389	94	5	5763	73
6	0553783	22	6	4073	92	6	9336	70
7	7605	18	7	7765	88	7	0852906	67
8	0561423	14	8	0711453	85	8	6473	64
9	5237	12	9	5138	82	9	0860037	61
1140	9049	07	1180	8820	79	1220	3598	59
1	0572856	05	1	0722499	76	1	7157	55
2	6661	01	2	6175	72	2	0870712	53
3	0580462	3798	3	9847	70	3	4265	49
4	4260	95	4	0733517	67	4	7814	47
5	8055	91	5	7184	63	5	0881361	44
6	0591846	88	6	0740847	60	6	4905	41
7	5634	85	7	4507	57	7	8446	38
8	9419	81	8	8164	55	8	0891984	35
9	0603200	78	9	0751819	51	9	5519	32
1150	6978	75	1190	5470	48	1230	9051	30
1	0610753	72	1	9118	45	1	0902581	26
2	4525	68	2	0762763	41	2	6107	24
3	8293	65	3	6404	39	3	9631	21
4	0622058	62	4	0770043	36	4	0913152	18
5	5820	58	5	3679	33	5	6670	15
6	9578	56	6	7312	30	6	0920185	12
7	0633334	52	7	0780942	26	7	3697	09
8	7086	48	8	4568	24	8	7206	07
9	0640834	46	9	8192	20	9	0930713	04
1160	4580	42	1200	0791812	18	1240	4217	01

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
1241	0937718	3498	1281	1075491	3389	1321	1209028	3287
2	0941216	95	2	8880	87	2	1212315	83
3	4711	93	3	1082267	83	3	5599	82
4	8204	90	4	5650	81	4	8880	79
5	0951694	86	5	9031	79	5	1222159	76
6	5180	85	6	1092410	75	6	5435	74
7	8665	81	7	5785	74	7	8709	72
8	0962146	78	8	9159	70	8	1231981	69
9	5624	76	9	1102529	68	9	5250	66
1250	9100	73	1290	5897	65	1330	8516	65
1	0972573	70	1	9262	63	1	1241781	61
2	6043	68	2	1112625	60	2	5042	59
3	9511	64	3	5985	58	3	8301	57
4	0982975	62	4	9343	55	4	1251558	55
5	6437	59	5	1122698	52	5	4813	52
6	9896	57	6	6050	50	6	8065	49
7	0993353	53	7	9400	47	7	1261314	47
8	6806	51	8	1132747	45	8	4561	45
9	1000257	48	9	6092	42	9	7806	42
1260	3705	46	1300	9434	39	1340	1271048	40
1	7151	43	1	1142773	37	1	4288	37
2	1010594	40	2	6110	34	2	7525	35
3	4034	37	3	9444	32	3	1280760	33
4	7471	34	4	1152776	29	4	3993	30
5	1020905	32	5	6105	27	5	7223	28
6	4337	29	6	9432	24	6	1290451	25
7	7766	27	7	1162756	21	7	3676	23
8	1031193	23	8	6077	19	8	6899	20
9	4616	21	9	9396	17	9	1300119	19
1270	8037	19	1310	1172713	14	1350	3338	15
1	1041456	15	1	6027	11	1	6553	14
2	4871	13	2	9338	09	2	9767	11
3	8284	10	3	1182647	07	3	1312978	09
4	1051694	08	4	5954	04	4	6187	06
5	5102	05	5	9258	01	5	9393	04
6	8507	02	6	1192559	3299	6	1322597	01
7	1061909	00	7	5858	96	7	5798	00
8	5309	3396	8	9154	94	8	8998	3197
9	8705	95	9	1202448	91	9	1332195	94
1280	1072100	91	1320	5739	89	1360	5389	92

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
1361	1338581	3190	1401	1464381	3099	1441	1586640	3013
2	1341771	88	2	7480	97	2	9653	10
3	4959	85	3	1470577	94	3	1592663	09
4	8144	83	4	3671	92	4	5672	06
5	1351327	80	5	6763	90	5	8678	05
6	4507	78	6	9853	88	6	1601683	02
7	7685	76	7	1482941	86	7	4685	01
8	1360861	73	8	6027	83	8	7686	2998
9	4034	72	9	9110	81	9	1610684	96
1370	7206	69	1410	1492191	79	1450	3680	94
1	1370375	66	1	5270	77	1	6674	92
2	3541	64	2	8347	75	2	9666	90
3	6705	62	3	1501422	72	3	1622656	88
4	9867	60	4	4494	70	4	5644	86
5	1383027	57	5	7564	69	5	8630	84
6	6184	55	6	1510633	66	6	1631614	82
7	9339	53	7	3699	63	7	4596	79
8	1392492	51	8	6762	62	8	7575	78
9	5643	48	9	9824	59	9	1640553	76
1380	8791	46	1420	1522883	58	1460	3529	73
1	1401937	43	1	5941	55	1	6502	72
2	5080	42	2	8996	53	2	9474	69
3	8222	39	3	1532049	51	3	1652443	68
4	1411361	37	4	5100	49	4	5411	65
5	4498	34	5	8149	46	5	8376	64
6	7632	33	6	1541195	45	6	1661340	61
7	1420765	30	7	4240	42	7	4301	60
8	3895	27	8	7282	40	8	7261	57
9	7022	26	9	1550322	38	9	1670218	55
1390	1430148	23	1430	3360	36	1470	3173	54
1	3271	21	1	6396	34	1	6127	51
2	6392	19	2	9430	32	2	9078	49
3	9511	17	3	1562462	30	3	1682027	48
4	1442628	14	4	5492	27	4	4975	45
5	5742	12	5	8519	25	5	7920	44
6	8854	10	6	1571544	24	6	1690864	41
7	1451964	08	7	4568	21	7	3805	39
8	5072	05	8	7589	19	8	6744	38
9	8177	03	9	1580608	17	9	9682	35
1400	1461280	01	1440	3625	15	1480	1702617	34

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D	N.	M. Log.	D.
1481	1705551	2931	1521	1821292	2855	1561	1934029	2781
2	8482	30	2	4147	52	2	6810	80
3	1711412	27	3	6999	51	3	9590	77
4	4339	26	4	9850	48	4	1942367	76
5	7265	23	5	1832698	47	5	5143	75
6	1720188	22	6	5545	45	6	7918	72
7	3110	19	7	8390	44	7	1950690	71
8	6029	18	8	1841234	41	8	3461	68
9	8947	16	9	4075	39	9	6229	67
1490	1731863	13	1530	6914	38	1570	8996	66
1	4776	12	1	9752	36	1	1961762	63
2	7688	10	2	1852588	34	2	4525	62
3	1740598	08	3	5422	32	3	7287	60
4	3506	06	4	8254	30	4	1970047	59
5	6412	04	5	1861084	28	5	2806	56
6	9316	02	6	3912	27	6	5562	55
7	1752218	00	7	6739	24	7	8317	53
8	5118	2898	8	9563	23	8	1981070	51
9	8016	97	9	1872386	21	9	3821	50
1500	1760913	94	1540	5207	19	1580	6571	48
1	3807	92	1	8026	18	1	9319	46
2	6699	91	2	1880844	15	2	1992065	44
3	9590	88	3	3659	14	3	4809	43
4	1772478	87	4	6473	12	4	7552	41
5	5365	85	5	9285	10	5	2000293	39
6	8250	83	6	1892095	08	6	3032	37
7	1781133	80	7	4903	07	7	5769	36
8	4013	79	8	7710	04	8	8505	34
9	6892	77	9	1900514	03	9	2011239	32
1510	9769	76	1550	3317	01	1590	3971	31
1	1792645	73	1	6118	2799	1	6702	29
2	5518	71	2	8917	98	2	9431	27
3	8389	70	3	1911715	95	3	2022158	25
4	1801259	67	4	4510	94	4	4883	24
5	4126	66	5	7304	92	5	7607	22
6	6992	64	6	1920096	90	6	2030329	20
7	9856	62	7	2886	89	7	3049	19
8	1812718	60	8	5675	86	8	5768	17
9	5578	58	9	8461	85	9	8485	15
1520	8436	56	1560	1931246	83	1600	2041200	13

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
1601	2043913	2712	1641	2151086	2646	1681	2255677	2583
2	6625	10	2	3782	44	2	8260	81
3	9335	09	3	6376	42	3	2260841	80
4	2052044	06	4	9018	41	4	3421	78
5	4750	05	5	2161659	39	5	5999	77
6	7455	04	6	4298	38	6	8576	75
7	2060159	01	7	6936	36	7	2271151	73
8	2860	00	8	9572	35	8	3724	72
9	5560	2699	9	2172207	32	9	6296	71
1610	8259	96	1650	4839		1690	8867	69
1	2070955	95	1	7471	29	1	2281436	68
2	3650	94	2	2180100		2	4004	66
3	6344	91	3	2729	26	3	6570	64
4	9035	90	4	5355	25	4	9134	63
5	2081725	89	5	7980	23	5	2291697	61
6	4414	86	6	2190603	22	6	4258	60
7	7100	85	7	3225	20	7	6818	59
8	9785	83	8	5845	19	8	9377	57
9	2092468	82	9	8464	17	9	2301934	55
1620	5150	80	1660	2201081	15	1700	4489	54
1	7830	78	1	3696	14	1	7043	53
2	2100508	77	2	6310	12	2	9596	50
3	3185	75	3	8922	11	3	2312146	
4	5860	74	4	2211533	09	4	4696	48
5	8534	71	5	4142	08	5	7244	46
6	2111205		6	6750	06	6	9790	45
7	3876	68	7	9356	04	7	2322335	44
8	6544	67	8	2221960	03	8	4879	42
9	9211	65	9	4563	02	9	7421	40
1630	2121876	64	1670	7165	2599	1710	9961	39
1	4540	62	1	9764		1	2332500	38
2	7202	60	2	2232363	96	2	5038	36
3	9862	59	3	4959		3	7574	34
4	2132521	57	4	7555	93	4	2340108	33
5	5178	55	5	2240148	92	5	2641	32
6	7833	54	6	2740	91	6	5173	30
7	2140487	52	7	5331	89	7	7703	29
8	3139	51	8	7920	87	8	2350232	27
9	5790	48	9	2250507	86	9	2759	25
1640	8438		1680	3093	84	1720	5284	

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
1721	2357809	2522	1761	2457594	2465	1801	2555137	2411
2	2360331		2	2460059	64	2	7548	09
3	2853	20	3	2523	63	3	9957	08
4	5373	18	4	4986	61	4	2562365	07
5	7891	17	5	7447	60	5	4772	05
6	2370408	15	6	9907	58	6	7177	
7	2923	14	7	2472365		7	9582	02
8	5437	13	8	4823	55	8	2571984	
9	7950	11	9	7278		9	4386	00
1730	2380461	10	1770	9733	53	1810	6786	2399
1	2971	08	1	2482186	51	1	9185	97
2	5479	07	2	4637	50	2	2581582	96
3	7986	05	3	7087	49	3	3978	95
4	2390491	04	4	9536	48	4	6373	93
5	2995	02	5	2491984	46	5	8766	92
6	5497	01	6	4430	44	6	2591168	91
7	7998	00	7	6874		7	3549	90
8	2400498	2498	8	9318	41	8	5939	88
9	2996	96	9	2501759		9	8327	87
1740	5492		1780	4200	39	1820	2600714	85
1	7988	94	1	6639	38	1	3099	
2	2410482	92	2	9077	36	2	5484	83
3	2974	91	3	2511513		3	7867	81
4	5465	89	4	3949	33	4	2610248	
5	7954	88	5	6382		5	2629	79
6	2420452	87	6	8815	31	6	5008	77
7	2929	85	7	2521246	29	7	7385	
8	5414	84	8	3675	28	8	9762	75
9	7898	82	9	6103	27	9	2622137	74
1750	2430380	81	1790	8530	26	1830	4511	72
1	2861	80	1	2530956	24	1	6883	
2	5341	78	2	3380	23	2	9255	70
3	7819	77	3	5803	21	3	2631625	68
4	2440296	75	4	8224		4	3993	
5	2771	74	5	2540645	18	5	6361	66
6	5245	73	6	3063		6	8727	65
7	7718	71	7	5481	16	7	2641092	63
8	2450189	69	8	7897	15	8	3455	62
9	2658		9	2550312	13	9	5817	61
1760	5127	67	1800	2725	12	1840	8178	60

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
1841	2650538	2358	1881	2743888	2308	1921	2835274	2260
2	2896	57	2	6196	07	2	7534	59
3	5253	56	3	8503	06	3	9793	58
4	7609	55	4	2750809	05	4	2842051	56
5	9964	53	5	3114	03	5	4307	
6	2662317	52	6	5417	02	6	6563	54
7	4669	51	7	7719	01	7	8817	53
8	7020	49	8	2760020	00	8	2851070	52
9	9369	48	9	2320	2298	9	3322	51
1850	2671717	47	1890	4618	97	1930	5573	50
1	4064	46	1	6915	96	1	7823	48
2	6410	44	2	9211	95	2	2860071	
3	8754	43	3	2771506	94	3	2319	46
4	2681097	42	4	3800	92	4	4565	45
5	3439	41	5	6092	91	5	6810	44
6	5780	39	6	8383	90	6	9054	42
7	8119	38	7	2780673	89	7	2871296	
8	2690457	37	8	2962	88	8	3538	40
9	2794	35	9	5250	86	9	5778	39
1860	5129		1900	7536	85	1940	8017	38
1	7464	33	1	9821	84	1	2880255	37
2	9797	32	2	2792105	83	2	2492	36
3	2702129	30	3	4388	81	3	4728	35
4	4459	29	4	6669		4	6963	33
5	6788	28	5	8950	79	5	9196	32
6	9116	27	6	2801229	78	6	2891428	
7	2711443	26	7	3507	77	7	3660	30
8	3769	24	8	5784	75	8	5890	28
9	6093	23	9	8059		9	8118	
1870	8416	22	1910	2810334	73	1950	2900346	27
1	2720738	20	1	2607	72	1	2573	25
2	3058		2	4879	71	2	4798	24
3	5378	18	3	7150	69	3	7022	
4	7696	17	4	9419		4	9246	22
5	2730013	15	5	2821688	67	5	2911468	21
6	2328		6	3955	66	6	3689	19
7	4643	13	7	6221	65	7	5908	
8	6956	12	8	8486	64	8	8127	17
9	9268	10	9	2830750	62	9	2920344	
1880	2741578		1920	3012		1960	2561	15

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M Log.	D.
1961	2924776	2214	2001	3012471	2170	2041	3098430	2127
2	6990	13	2	4641	68	2	3100557	
3	9203	12	3	6809		3	2684	25
4	2931415	11	4	8977	67	4	4809	24
5	3626	09	5	3021144	65	5	6933	23
6	5835		6	3309		6	9056	22
7	8044	07	7	5474	63	7	3111178	
8	2940251	06	8	7637	62	8	3300	20
9	2457	05	9	9799		9	5420	19
1970	4662	04	2010	3031961	60	2050	7539	18
1	6866	03	1	4121	59	1	9657	17
2	9069	02	2	6280	58	2	3121774	15
3	2951271	00	3	8438	57	3	3889	
4	3471		4	3040595	56	4	6004	14
5	5671	2198	5	2751	54	5	8118	13
6	7869		6	4905		6	3130231	12
7	2960067	96	7	7059	53	7	2343	11
8	2263	95	8	9212	51	8	4454	09
9	4458	94	9	3051363		9	6563	
1980	6652	93	2020	3514	49	2060	8672	08
1	8845	92	1	5663		1	3140780	07
2	2971037	90	2	7812	47	2	2887	05
3	3227		3	9959	46	3	4992	
4	5417	88	4	3062105	45	4	7097	04
5	7605	87	5	4250	44	5	9201	02
6	9792		6	6394	43	6	3151303	
7	2981979	85	7	8537		7	3405	00
8	4164	84	8	3070680	40	8	5505	
9	6348	83	9	2820		9	7605	2098
1990	8531	82	2030	4960	39	2070	9703	
1	2990713	80	1	7099	38	1	3161801	97
2	2893		2	9237	37	2	3898	95
3	5073	79	3	3081374	35	3	5993	
4	7252	77	4	3509		4	8088	93
5	9429	76	5	5644	34	5	3170181	92
6	3001605		6	7778	32	6	2273	
7	3781	74	7	9910		7	4365	90
8	5955	73	8	3092042	30	8	6455	
9	8128	72	9	4172		9	8545	88
2000	3010300	71	2040	6302	28	2080	3180633	

N.	M Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M Log.	D.
2081	3182721	2086	2121	3265407	2047	2161	3346548	2009
2	4807		2	7454	46	2	8557	08
3	6893	84	3	9500	45	3	3350565	
4	8977		4	3271545	44	4	2573	06
5	3191061	82	5	3589		5	4579	
6	3143	81	6	5633	42	6	6585	04
7	5224		7	7675	41	7	8589	
8	7305	79	8	9716		8	3360593	03
9	9384		9	3281757	39	9	2596	01
2090	3201463	77	2130	3796	38	2170	4597	
1	3540		1	5834		1	6598	00
2	5617	75	2	7872	37	2	8598	1999
3	7692		3	9909	35	3	3370597	98
4	9767	73	4	3291944		4	2595	
5	3211840		5	3979	33	5	4593	96
6	3913	71	6	6012		6	6589	95
7	5984		7	8045	32	7	8584	
8	8055	69	8	3300077	31	8	3380579	93
9	3220124		9	2108	30	9	2572	
2100	2193	68	2140	4138	29	2180	4565	92
1	4261	66	1	6167	28	1	6557	90
2	6327		2	8195	27	2	8547	
3	8393	64	3	3310222	26	3	3390537	89
4	3230457		4	2248	25	4	2526	88
5	2521	63	5	4273	24	5	4514	
6	4584	61	6	6297	23	6	6502	86
7	6645		7	8320		7	8488	85
8	8706	60	8	3320343	21	8	3400473	
9	3240766	59	9	2364		9	2458	83
2110	2825	57	2150	4385	19	2190	4441	
1	4882		1	6404		1	6424	81
2	6939	56	2	8423	17	2	8405	
3	8995	55	3	3330440		3	3410386	80
4	3251050	54	4	2457	16	4	2366	79
5	3104	53	5	4473	15	5	4345	78
6	5157	52	6	6488	13	6	6323	
7	7209	51	7	8501		7	8301	76
8	9260	50	8	3340514	12	8	3420277	75
9	3261310	49	9	2526		9	2252	
2120	3359	48	2160	4538	10	2200	4227	73

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
2201	3426200	1973	2241	3504419	1937	2281	3581253	1903
2	8173	72	2	6356		2	3156	
3	3430145	71	3	8293	36	3	5059	02
4	2116	70	4	3510229	34	4	6961	01
5	4086	69	5	2163	35	5	8862	00
6	6055	68	6	4098	33	6	3590762	
7	8023		7	6031	32	7	2662	1898
8	9991	66	8	7963		8	4560	
9	3441957		9	9895	30	9	6458	97
2210	3923	64	2250	3521825		2290	8355	96
1	5887		1	3755	29	1	3600251	95
2	7851	63	2	5684	28	2	2146	
3	9814	62	3	7612	27	3	4041	93
4	3451776	61	4	9539	26	4	5934	
5	3737		5	3531465		5	7827	92
6	5698	59	6	3391	25	6	9719	91
7	7657	58	7	5316	23	7	3611610	90
8	9615		8	7239		8	3500	
9	3461573	57	9	9162	22	9	5390	88
2220	3530	56	2260	3541084		2300	7278	
1	5486	55	1	3006	20	1	9166	87
2	7441	54	2	4926		2	3621053	86
3	9395	53	3	6846	18	3	2939	
4	3471348	52	4	8764		4	4825	84
5	3300		5	3550682	17	5	6709	
6	5252	50	6	2599	16	6	8593	83
7	7202		7	4515		7	3630476	82
8	9152	49	8	6431	14	8	2358	81
9	3481101	48	9	8345		9	4239	
2230	3049	47	2270	3560259	12	2310	6120	79
1	4996	46	1	2171		1	7999	
2	6942	45	2	4083	11	2	9878	78
3	8887		3	5994		3	3641756	
4	3490832	43	4	7905	09	4	3634	76
5	2775		5	9814		5	5510	
6	4718	42	6	3571723	07	6	7386	74
7	6660	41	7	3630		7	9260	
8	8601	40	8	5537	06	8	3651134	73
9	3500541	39	9	7443	05	9	3007	
2240	2480		2280	9348		2320	4880	71

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
2321	3656751	1871	2361	3730960	1839	2401	3803922	1808
2	8622	70	2	2799	38	2	5730	
3	3660492	69	3	4637		3	7538	07
4	2361		4	6475	36	4	9345	06
5	4230	67	5	8311		5	3811151	05
6	6097		6	3740147		6	2956	
7	7964	66	7	1983	34	7	4761	04
8	9830	65	8	3817		8	6565	03
9	3671695	64	9	5651	32	9	8368	02
2330	3559		2370	7483	33	2410	3820170	
1	5423	62	1	9316	31	1	1972	01
2	7285		2	3751147	30	2	3773	00
3	9147		3	2977		3	5573	
4	3681009	60	4	4807	29	4	7373	1798
5	2869	59	5	6636	28	5	9171	
6	4728		6	8464		6	3830969	
7	6587	58	7	3760292	27	7	2767	96
8	8445	57	8	2119	25	8	4563	
9	3690302		9	3944	26	9	6359	95
2340	2159	55	2380	5770	24	2420	8154	94
1	4014		1	7594		1	9948	93
2	5869	54	2	9418	22	2	3841741	
3	7723	53	3	3771240	23	3	3534	92
4	9576	52	4	3063	21	4	5326	91
5	3701428		5	4884	20	5	7117	
6	3280	51	6	6704		6	8908	90
7	5131	50	7	8524	19	7	3850698	89
8	6981	49	8	3780343	18	8	2487	88
9	8830		9	2161		9	4275	
2350	3710679	47	2390	3979	17	2430	6063	87
1	2526		1	5796	16	1	7850	86
2	4373	46	2	7612	15	2	9636	85
3	6219		3	9427	14	3	3861421	
4	8065	44	4	3791241		4	3206	84
5	9909		5	3055	13	5	4990	83
6	3721753	43	6	4868	12	6	6773	82
7	3596	42	7	6680		7	8555	
8	5438	41	8	8492	10	8	3870337	81
9	7279		9	3800302		9	2118	80
2360	9120	40	2400	2112		2440	3898	

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
2441	3875678	1779	2481	3946268	1750	2521	4015728	1723
2	7457	78	2	8018	49	2	7451	22
3	9235	77	3	9767		3	9173	21
4	3881012		4	3951516	48	4	4020894	20
5	2789	76	5	3264	47	5	2614	19
6	4565	75	6	5011		6	4333	
7	6340	74	7	6758	46	7	6052	
8	8114		8	8504	45	8	7771	17
9	9888	73	9	3960249	44	9	9488	
2450	3891661	72	2490	1993		2530	4031205	16
1	3433		1	3737	43	1	2921	
2	5205	70	2	5480		2	4637	15
3	6975	71	3	7223	41	3	6352	14
4	8746	69	4	8964		4	8066	
5	3900515		5	3970705		5	9780	12
6	2284	68	6	2446	39	6	4041492	13
7	4052	67	7	4185		7	3205	11
8	5819	66	8	5924		8	4916	
9	7585		9	7663	37	9	6627	10
2460	9351	65	2500	9400		2540	8337	
1	3911116	64	1	3981137	36	1	4050047	08
2	2880		2	2873	35	2	1755	09
3	4644	63	3	4608		3	3464	07
4	6407	62	4	6343	34	4	5171	
5	8169		5	8077		5	6878	06
6	9931	60	6	9811	32	6	8584	05
7	3921691	61	7	3991543		7	4060289	
8	3452	59	8	3275		8	1994	04
9	5211		9	5007	30	9	3698	
2470	6970	57	2510	6737		2550	5402	03
1	8727	58	1	8467	29	1	7105	02
2	3930485	56	2	4000196		2	8807	01
3	2241		3	1925	28	3	4070508	
4	3997	55	4	3653	27	4	2209	00
5	5752	54	5	5380	26	5	3909	1699
6	7506		6	7106		6	5608	
7	9260	53	7	8832	25	7	7307	98
8	3941013	52	8	4010557		8	9005	
9	2765		9	2282	23	9	4080703	97
2480	4517	51	2520	4005		2560	2400	96

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
2561	4084096	1695	2601	4151404	1669	2641	4217684	1644
2	5791		2	3073		2	9328	
3	7486	94	3	4742	68	3	4220972	43
4	9180		4	6410	67	4	2615	42
5	4090874	93	5	8077		5	4257	41
6	2567	92	6	9744	66	6	5898	
7	4259	91	7	4161410		7	7539	
8	5950		8	3076	65	8	9180	40
9	7641	90	9	4741	64	9	4230820	39
2570	9331		2610	6405		2650	2459	38
1	4101021	89	1	8069	63	1	4097	
2	2710	88	2	9732	62	2	5735	37
3	4398	87	3	4171394		3	7372	
4	6085		4	3056	61	4	9009	36
5	7772		5	4717	60	5	4240645	
6	9459	85	6	6377		6	2281	35
7	4111144		7	8037	59	7	3916	34
8	2829	84	8	9696		8	5550	33
9	4513		9	4181355	58	9	7183	
2580	6197	83	2620	3013	57	2660	8816	
1	7880	82	1	4670		1	4250449	32
2	9562		2	6327	56	2	2081	31
3	4121244	81	3	7983	55	3	3712	30
4	2925	80	4	9638		4	5342	
5	4605		5	4191293	54	5	6972	29
6	6285	79	6	2947		6	8601	
7	7964		7	4601	53	7	4260230	28
8	9643	78	8	6254	52	8	1858	
9	4131321	77	9	7906	51	9	3486	27
2590	2998	76	2630	9557		2670	5113	26
1	4674		1	4201208		1	6739	
2	6350	75	2	2859	50	2	8365	25
3	8025		3	4509	49	3	9990	24
4	9700	74	4	6158	48	4	4271614	
5	4141374	73	5	7806		5	3238	23
6	3047	72	6	9454	47	6	4861	
7	4719		7	4211101		7	6484	22
8	6391		8	2748	46	8	8106	21
9	8063	70	9	4394	45	9	9727	
2600	9733	71	2640	6039		2680	4281348	20

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
2681	4282968	1620	2721	4347285	1596	2761	4410664	1573
2	4588	19	2	8881	95	2	2237	72
3	6207	18	3	4350476		3	3809	71
4	7825		4	2071	94	4	5380	
5	9443	17	5	3665		5	6951	
6	4291060		6	5259	92	6	8522	70
7	2677	16	7	6851	93	7	4420092	69
8	4293	15	8	8444	91	8	1661	
9	5908		9	4360035		9	3230	68
2690	7523	14	2730	1626		2770	4798	67
1	9137		1	3217	90	1	6365	
2	4300751	13	2	4807	89	2	7932	
3	2364	12	3	6396		3	9499	66
4	3976		4	7985	88	4	4431065	65
5	5588	11	5	9573		5	2630	
6	7199	10	6	4371161	87	6	4195	64
7	8809		7	2748	86	7	5759	63
8	4310419		8	4334		8	7322	
9	2029	09	9	5920		9	8885	
2700	3638	08	2740	7506	84	2780	4440448	62
1	5246	07	1	9090	85	1	2010	61
2	6853		2	4380675	83	2	3571	
3	8460		3	2258		3	5132	60
4	4320067	06	4	3841	82	4	6692	
5	1673	05	5	5423		5	8252	59
6	3278		6	7005		6	9811	
7	4883	04	7	8587	80	7	4451370	58
8	6487	03	8	4390167		8	2928	57
9	8090		9	1747		9	4485	
2710	9693	02	2750	3327	79	2790	6042	56
1	4331295		1	4906	78	1	7598	
2	2897	01	2	6484		2	9154	55
3	4498	00	3	8062	77	3	4460709	
4	6098		4	9639		4	2264	54
5	7698		5	4401216	76	5	3818	
6	9298	1598	6	2792		6	5372	53
7	4340896	99	7	4368	75	7	6925	52
8	2495	97	8	5943	74	8	8477	
9	4092		9	7517		9	4470029	51
2720	5689	96	2760	9091	73	2800	1580	

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
2801	4473131	1550	2841	4534712	1529	2881	4595433	1507
2	4681		2	6241	28	2	6940	06
3	6231	49	3	7769	27	3	8446	07
4	7780		4	9296		4	9953	05
5	9329	48	5	4540823	26	5	4601458	
6	4480877	47	6	2349		6	2963	
7	2424		7	3875	25	7	4468	04
8	3971	46	8	5400	24	8	5972	03
9	5517		9	6924	25	9	7475	
2810	7063	45	2850	8449	23	2890	8978	
1	8608		1	9972		1	4610481	02
2	4490153	44	2	4551495		2	1983	01
3	1697		3	3018	22	3	3484	
4	3241	43	4	4540	21	4	4985	
5	4784		5	6061		5	6486	00
6	6327	41	6	7582	20	6	7986	1499
7	7868	42	7	9102		7	9485	
8	9410	41	8	4560622		8	4620984	98
9	4500951	40	9	2142	18	9	2482	
2820	2491		2860	3660	19	2900	3980	97
1	4031	39	1	5179	17	1	5477	
2	5570		2	6696		2	6974	96
3	7109	38	3	8213		3	8470	
4	8647		4	9730	16	4	9966	95
5	4510185	37	5	4571246		5	4631461	
6	1722	36	6	2762	15	6	2956	94
7	3258		7	4277	14	7	4450	
8	4794	35	8	5791		8	5944	93
9	6329		9	7305		9	7437	
2830	7864		2870	8819	13	2910	8930	92
1	9399	33	1	4580332	12	1	4640422	
2	4520932	34	2	1844		2	1914	91
3	2466	32	3	3356		3	3405	90
4	3998	33	4	4868	10	4	4895	91
5	5531	31	5	6378	11	5	6386	89
6	7062		6	7889	10	6	7875	
7	8593		7	9399	09	7	9364	
8	4530124	30	8	4590908		8	4650853	88
9	1654	29	9	2417	08	9	2341	
2840	3183		2880	3925		2920	3829	87

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
2921	4655316	1486	2961	4714384	1467	3001	4772660	1447
2	6802		2	5851	66	2	4107	46
3	8288		3	7317	65	3	5553	
4	9774	85	4	8782		4	6999	
5	4661259	84	5	4720247	64	5	8445	45
6	2743		6	1711		6	9890	44
7	4227		7	3175		7	4781334	
8	5711	83	8	4639	63	8	2778	
9	7194	82	9	6102	62	9	4222	43
2930	8676		2970	7564	63	3010	5665	
1	4670158		1	9027	61	1	7108	42
2	1640	81	2	4730488		2	8550	41
3	3121	80	3	1949		3	9991	
4	4601		4	3410	60	4	4791432	
5	6081		5	4870	59	5	2873	40
6	7561	78	6	6329		6	4313	
7	9039	79	7	7788		7	5753	39
8	4680518	78	8	9247	58	8	7192	
9	1996	77	9	4740705		9	8631	38
2940	3473		2980	2163	57	3020	4800069	
1	4950		1	3620	56	1	1507	
2	6427	76	2	5076	57	2	2945	36
3	7903	75	3	6533	55	3	4381	37
4	9378		4	7988		4	5818	36
5	4690853	74	5	9443		5	7254	35
6	2327		6	4750898	54	6	8689	
7	3801		7	2352		7	4810124	
8	5275	73	8	3806	53	8	1559	34
9	6748	72	9	5259		9	2993	33
2950	8220		2990	6712	52	3030	4426	
1	9692		1	8164		1	5859	
2	4701164	70	2	9616	51	2	7292	32
3	2634	71	3	4761067		3	8724	
4	4105	70	4	2518	50	4	4820156	31
5	5575	69	5	3968		5	1587	
6	7044		6	5418	49	6	3018	30
7	8513		7	6867		7	4448	
8	9982	68	8	8316		8	5878	29
9	4711450	67	9	9765	48	9	7307	
2960	2917		3000	4771213	47	3040	8736	28

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
3041	4830164	1428	3081	4886917	1409	3121	4942938	1391
2	1592		2	8326		2	4329	
3	3020	26	3	9735		3	5720	90
4	4446	27	4	4891144	08	4	7110	
5	5873	26	5	2552	07	5	8500	
6	7299		6	3959		6	9890	89
7	8725	25	7	5366		7	4951279	88
8	4840150	24	8	6773	06	8	2667	89
9	1574		9	8179		9	4056	87
3050	2998		3090	9585	05	3130	5443	88
1	4422	23	1	4900990		1	6831	87
2	5845		2	2395	04	2	8218	86
3	7268	22	3	3799		3	9604	
4	8690		4	5203		4	4960990	85
5	4850112	21	5	6607	03	5	2375	86
6	1533		6	8010	02	6	3761	84
7	2954		7	9412		7	5145	
8	4375	20	8	4910814		8	6529	
9	5795	19	9	2216	01	9	7913	83
3060	7214		3100	3617		3140	9296	
1	8633		1	5018	00	1	4970679	
2	4860052	18	2	6418		2	2062	82
3	1470		3	7818	1399	3	3444	81
4	2888	17	4	9217		4	4825	
5	4305		5	4920616		5	6206	
6	5722	16	6	2015	98	6	7587	80
7	7138		7	3413	97	7	8967	
8	8554	15	8	4810		8	4980347	
9	9969		9	6207		9	1727	79
3070	4871384	14	3110	7604	96	3150	3106	78
1	2798		1	9000		1	4484	
2	4212		2	4930396	95	2	5862	
3	5626	13	3	1791		3	7240	77
4	7039	12	4	3186		4	8617	
5	8451		5	4581	93	5	9994	76
6	9863		6	5974	94	6	4991370	
7	4881275	11	7	7368	93	7	2746	75
8	2686		8	8761		8	4121	
9	4097	10	9	4940154	92	9	5496	
3080	5507		3120	1546		3160	6871	74

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
3161	4998245	1374	3201	5052857	1356	3241	5106790	1340
2	9619	73	2	4213		2	8130	39
3	5000992		3	5569		3	9469	
4	2365	72	4	6925	55	4	5110808	
5	3737		5	8280		5	2147	38
6	5109		6	9635		6	3485	
7	6481	71	7	5060990	54	7	4823	37
8	7852	70	8	2344	53	8	6160	
9	9222	71	9	3697		9	7497	
3170	5010593	69	3210	5050		3250	8834	36
1	1962	70	1	6403	52	1	5120170	35
2	3332	69	2	7755		2	1505	36
3	4701	68	3	9107		3	2841	34
4	6069		4	5070459	51	4	4175	35
5	7437		5	1810	50	5	5510	34
6	8805	67	6	3160	51	6	6844	
7	5020172		7	4511	49	7	8178	33
8	1539	66	8	5860	50	8	9511	
9	2905		9	7210	49	9	5130844	32
3180	4271		3220	8559	48	3260	2176	
1	5637	65	1	9907		1	3508	
2	7002	64	2	5081255		2	4840	31
3	8366	65	3	2603	47	3	6171	
4	9731	63	4	3950		4	7502	30
5	5031094	64	5	5297		5	8832	
6	2458	63	6	6644	46	6	5140162	29
7	3821	62	7	7990	45	7	1491	
8	5183		8	9335		8	2820	
9	6545		9	5090680		9	4149	
3190	7907	61	3230	2025		3270	5478	27
1	9268		1	3370	44	1	6805	28
2	5040629	60	2	4714	43	2	8133	27
3	1989		3	6057		3	9460	
4	3349		4	7400		4	5150787	26
5	4709	59	5	8743	42	5	2113	
6	6068	58	6	5100085		6	3439	25
7	7426	59	7	1427	41	7	4764	
8	8785	57	8	2768		8	6089	
9	5050142	58	9	4109		9	7414	24
3200	1500	57	3240	5450	40	3280	8738	

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
3281	5160062	1324	3321	5212689	1307	3361	5264685	1292
2	1386	23	2	3996		2	5977	
3	2709	22	3	5303		3	7269	91
4	4031	23	4	6610	06	4	8560	
5	5354	22	5	7916		5	9851	90
6	6676	21	6	9222		6	5271141	
7	7997		7	5220528	05	7	2431	
8	9318		8	1833		8	3721	89
9	5170639	20	9	3138	04	9	5010	
3290	1959		3330	4442		3370	6299	
1	3279	19	1	5746		1	7588	88
2	4598		2	7050	03	2	8876	87
3	5917		3	8353		3	5280163	88
4	7236	18	4	9656	02	4	1451	87
5	8554		5	5230958		5	2738	86
6	9872	17	6	2260		6	4024	87
7	5181189	18	7	3562	01	7	5311	85
8	2507	16	8	4863		8	6596	86
9	3823		9	6164		9	7882	85
3300	5139		3340	7465	00	3380	9167	
1	6455		1	8765	1299	1	5290452	84
2	7771	15	2	5240064	1300	2	1736	
3	9086	14	3	1364	1299	3	3020	
4	5190400	15	4	2663	98	4	4304	83
5	1715	13	5	3961		5	5587	
6	3028	14	6	5259		6	6870	82
7	4342	13	7	6557	97	7	8152	
8	5655		8	7854		8	9434	
9	6968	12	9	9151		9	5300716	81
3310	8280		3350	5250448	96	3390	1997	
1	9592	11	1	1744		1	3278	80
2	5200903		2	3040		2	4558	81
3	2214		3	4336	95	3	5839	79
4	3525	10	4	5631	94	4	7118	80
5	4835		5	6925	95	5	8398	79
6	6145		6	8220	93	6	9677	78
7	7455	09	7	9513	94	7	5310955	79
8	8764		8	5260807	93	8	2234	78
9	5210073	08	9	2100		9	3512	77
3320	1381		3360	3393	92	3400	4789	

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
3401	5316066	1277	3441	5366847	1262	3481	5417040	1248
2	7343	76	2	8109	61	2	8288	47
3	8619	77	3	9370		3	9535	46
4	9896	75	4	5370631		4	5420781	47
5	5321171		5	1892		5	2028	46
6	2446		6	3153	60	6	3274	45
7	3721		7	4413		7	4519	46
8	4996	74	8	5673	59	8	5765	45
9	6270		9	6932		9	7010	44
3410	7544	73	3450	8191		3490	8254	
1	8817		1	9450	58	1	9498	
2	5330090		2	5380708		2	5430742	
3	1363	72	3	1966	57	3	1986	43
4	2635		4	3223	58	4	3229	
5	3907		5	4481	56	5	4472	42
6	5179	71	6	5737	57	6	5714	
7	6450		7	6994	56	7	6956	
8	7721	70	8	8250		8	8198	41
9	8991		9	9506	55	9	9439	
3420	5340261		3460	5390761		3500	5440680	
1	1531	69	1	2016		1	1921	40
2	2800		2	3271	54	2	3161	
3	4069		3	4525		3	4401	
4	5338	68	4	5779	53	4	5641	39
5	6606		5	7032	54	5	6880	
6	7874	67	6	8286	52	6	8119	
7	9141		7	9538	53	7	9358	38
8	5350408		8	5400791	52	8	5450596	
9	1675	66	9	2043		9	1834	37
3430	2941		3470	3295	51	3510	3071	
1	4207		1	4546		1	4308	
2	5473	65	2	5797		2	5545	36
3	6738		3	7048	50	3	6781	37
4	8003	64	4	8298		4	8018	35
5	9267	65	5	9548		5	9253	36
6	5360532	63	6	5410798	49	6	5460489	35
7	1795	64	7	2047		7	1724	34
8	3059	63	8	3296	48	8	2958	35
9	4322	62	9	4544		9	4193	34
3440	5584	63	3480	5792		3520	5427	33

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
3521	5466660	1234	3561	5515720	1219	3601	5564231	1206
2	7894	32	2	6939		2	5437	
3	9126	33	3	8158		3	6643	05
4	5470359	32	4	9377	18	4	7848	
5	1591		5	5520595		5	9053	04
6	2823		6	1813		6	5570257	
7	4055	31	7	3031	17	7	1461	
8	5286		8	4248		8	2665	
9	6517	30	9	5465		9	3869	03
3530	7747		3570	6682		3610	5072	
1	8977		1	7899	16	1	6275	02
2	5480207	29	2	9115	15	2	7477	03
3	1436		3	5530330		3	8680	01
4	2625		4	1545		4	9881	02
5	3894		5	2760		5	5581083	01
6	5123	28	6	3975	14	6	2284	
7	6351	27	7	5189		7	3485	
8	7578	28	8	6403		8	4686	00
9	8806	27	9	7617	13	9	5886	
3540	5490033	26	3580	8830		3620	7086	1199
1	1259	27	1	5540043		1	8285	
2	2486	26	2	1256	12	2	9484	
3	3712	25	3	2468		3	5590683	
4	4937		4	3680		4	1882	98
5	6162		5	4892	11	5	3080	
6	7387		6	6103		6	4278	
7	8612	24	7	7314	10	7	5476	97
8	9836		8	8524	11	8	6673	
9	5501060		9	9735	09	9	7870	96
3550	2284	23	3590	5550944	10	3630	9066	
1	3507		1	2154	09	1	5600262	
2	4730	22	2	3363		2	1458	
3	5952		3	4572		3	2654	95
4	7174		4	5781	08	4	3849	
5	8396		5	6989		5	5044	
6	9618	21	6	8197	07	6	6239	94
7	5510839	20	7	9404	08	7	7433	
8	2059	21	8	5560612	06	8	8627	
9	3280	20	9	1818	07	9	9821	93
3560	4500		3600	3025	06	3640	5611014	

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
3641	5612207	1192	3681	5659658	1180	3721	5706597	1167
2	3399	93	2	5660838	79	2	7764	66
3	4592	92	3	2017		3	8930	67
4	5784	91	4	3196		4	5710097	66
5	6975	92	5	4375	78	5	1263	
6	8167	91	6	5553		6	2429	65
7	9358	90	7	6731		7	3594	
8	5620548	91	8	7909		8	4759	
9	1739	90	9	9087	77	9	5924	64
3650	2929	89	3690	5670264	76	3730	7088	
1	4118	90	1	1440	77	1	8252	
2	5308	89	2	2617	76	2	9416	
3	6497	88	3	3793		3	5720580	63
4	7685	89	4	4969	75	4	1743	
5	8874	88	5	6144	76	5	2906	
6	5630062		6	7320	75	6	4069	62
7	1250	87	7	8495	74	7	5231	
8	2437		8	9669		8	6393	
9	3624		9	5680843		9	7555	61
3660	4811	86	3700	2017		3740	8716	
1	5997		1	3191	73	1	9877	
2	7183		2	4364		2	5731038	60
3	8369		3	5537		3	2198	
4	9555	85	4	6710	72	4	3358	
5	5640740		5	7882		5	4518	
6	1925	84	6	9054		6	5678	59
7	3109		7	5690226	71	7	6837	
8	4293		8	1397		8	7996	58
9	5477		9	2568		9	9154	59
3670	6661	83	3710	3739		3750	5740313	58
1	7844		1	4910	70	1	1471	57
2	9027	82	2	6080	69	2	2628	58
3	5650209	83	3	7249	70	3	3786	57
4	1392	81	4	8419	69	4	4943	56
5	2573	82	5	9588		5	6099	57
6	3755	81	6	5700757		6	7256	56
7	4936		7	1926	68	7	8412	
8	6117		8	3094		8	9568	55
9	7298	80	9	4262	67	9	5750723	
3680	8478		3720	5429	68	3760	1878	

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
3761	5753033	1155	3801	5798979	1142	3841	5844443	1131
2	4188	54	2	5800121		2	5574	30
3	5342		3	1263		3	6704	
4	6496		4	2405		4	7834	29
5	7650	53	5	3547	41	5	8963	30
6	8803		6	4688		6	5850093	29
7	9956		7	5829	40	7	1222	
8	5761109	52	8	6969	41	8	2351	28
9	2261	53	9	8110	40	9	3479	
3770	3414	51	3810	9250	39	3850	4607	
1	4565	52	1	5810389	40	1	5735	
2	5717	51	2	1529	39	2	6863	27
3	6868		3	2668		3	7990	
4	8019	50	4	3807	38	4	9117	
5	9170		5	4945	39	5	5860244	26
6	5770320		6	6084	38	6	1370	
7	1470		7	7222	37	7	2496	
8	2620	49	8	8359	38	8	3622	
9	3769		9	9497	37	9	4748	25
3780	4918		3820	5820634	36	3860	5873	
1	6067	48	1	1770	37	1	6998	
2	7215		2	2907	36	2	8123	24
3	8363		3	4043		3	9247	
4	9511		4	5179	35	4	5870371	
5	5780659	47	5	6314	36	5	1495	23
6	1806		6	7450	35	6	2618	24
7	2953		7	8585	34	7	3742	23
8	4100	46	8	9719	35	8	4865	22
9	5246		9	5830854	34	9	5987	23
3790	6392		3830	1988		3870	7110	22
1	7538	45	1	3122	33	1	8232	21
2	8683		2	4255		2	9353	22
3	9828		3	5388		3	5880475	21
4	5790973		4	6521		4	1596	
5	2118	44	5	7654	32	5	2717	
6	3262		6	8786		6	3838	20
7	4406		7	9918		7	4958	
8	5550	43	8	5841050	31	8	6078	
9	6693		9	2181		9	7198	19
3800	7836		3840	3312		3880	8317	

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
3881	5889436	1119	3921	5933968	1108	3961	5978048	1097
2	5890555		2	5076	07	2	9145	96
3	1674	18	3	6183		3	5980241	95
4	2792		4	7290		4	1336	96
5	3910		5	8397	06	5	2432	95
6	5028	17	6	9503		6	3527	
7	6145	18	7	5940609		7	4622	
8	7263	16	8	1715	05	8	5717	94
9	8379	17	9	2820	06	9	6811	
3890	9496	16	3930	3926	04	3970	7905	
1	5900612		1	5030	05	1	8999	93
2	1728		2	6135	04	2	5990092	94
3	2844	15	3	7239	05	3	1186	93
4	3959	16	4	8344	03	4	2279	92
5	5075	14	5	9447	04	5	3371	93
6	6189	15	6	5950551	03	6	4464	92
7	7304	14	7	1654		7	5556	
8	8418		8	2757		8	6648	91
9	9532		9	3860	02	9	7739	92
3900	5910646		3940	4962		3980	8831	91
1	1760	13	1	6064		1	9922	
2	2873		2	7166		2	6001013	90
3	3986	12	3	8268	01	3	2103	
4	5098		4	9369		4	3193	
5	6210		5	5960470		5	4283	
6	7322		6	1571	00	6	5373	89
7	8434		7	2671		7	6462	
8	9546	11	8	3771		8	7551	
9	5920657		9	4871		9	8640	
3910	1768	10	3950	5971	1099	3990	9729	88
1	2878		1	7070		1	6010817	
2	3988		2	8169		2	1905	
3	5098		3	9268		3	2993	
4	6208		4	5970367	98	4	4081	87
5	7318	09	5	1465		5	5168	
6	8427		6	2563		6	6255	86
7	9536	08	7	3661	97	7	7341	87
8	5930644	09	8	4758		8	8428	86
9	1753	08	9	5855		9	9514	
3920	2861	07	3960	6952	96	4000	6020600	

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
4001	6021686	1085	4041	6064889	1074	4081	6107666	1064
2	2771		2	5963		2	8730	
3	3856		3	7037		3	9794	63
4	4941	84	4	8111		4	6110857	64
5	6025		5	9185		5	1921	63
6	7109		6	6070259	73	6	2984	62
7	8193		7	1332		7	4046	63
8	9277		8	2405		8	5109	62
9	6030361	83	9	3478	72	9	6171	
4010	1444		4050	4550		4090	7233	
1	2527	82	1	5622		1	8295	61
2	3609	83	2	6694		2	9356	
3	4692	82	3	7766	71	3	6120417	
4	5774	81	4	8837	72	4	1478	
5	6855	82	5	9909	70	5	2539	60
6	7937	81	6	6080979	71	6	3599	61
7	9018		7	2050	70	7	4660	60
8	6040099		8	3120	71	8	5720	59
9	1180		9	4191	69	9	6779	60
4020	2261	80	4060	5260	70	4100	7839	59
1	3341		1	6330	69	1	8898	
2	4421	79	2	7399		2	9957	58
3	5500	80	3	8468		3	6131015	59
4	6580	79	4	9537	68	4	2074	58
5	7659		5	6090605	69	5	3132	57
6	8738	78	6	1674	68	6	4189	58
7	9816	79	7	2742	67	7	5247	57
8	6050895	78	8	3809	68	8	6304	
9	1973	77	9	4877	67	9	7361	
4030	3050	78	4070	5944		4110	8418	
1	4128	77	1	7011		1	9475	56
2	5205		2	8078	66	2	6140531	
3	6282		3	9144		3	1587	
4	7359	76	4	6100210		4	2643	55
5	8435	77	5	1276		5	3698	56
6	9512	75	6	2342	65	6	4754	55
7	6060587	76	7	3407		7	5809	54
8	1663		8	4472		8	6863	55
9	2739	75	9	5537		9	7918	54
4040	3814		4080	6602	64	4120	8972	

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
4121	6150026	1054	4161	6191977	1044	4201	6233527	1033
2	1080	53	2	3021	43	2	4560	34
3	2133	54	3	4064		3	5594	33
4	3187	53	4	5107		4	6627	
5	4240	52	5	6150		5	7660	
6	5292	53	6	7193	42	6	8693	32
7	6345	52	7	8235		7	9725	
8	7397		8	9277		8	6240757	
9	8449		9	6200319		9	1789	
4130	9501	51	4170	1361	41	4210	2821	31
1	6160552		1	2402		1	3852	32
2	1603		2	3443		2	4884	31
3	2654		3	4484	40	3	5915	30
4	3705	50	4	5524	41	4	6945	31
5	4755		5	6565	40	5	7976	30
6	5805		6	7605		6	9006	
7	6855		7	8645	39	7	6250036	
8	7905	49	8	9684	40	8	1066	29
9	8954		9	6210724	39	9	2095	30
4140	6170003		4180	1763		4220	3125	29
1	1052		1	2802	38	1	4154	28
2	2101	48	2	3840	39	2	5182	29
3	3149		3	4879	38	3	6211	28
4	4197		4	5917		4	7239	
5	5245		5	6955	37	5	8267	
6	6293	47	6	7992	38	6	9295	27
7	7340		7	9030	37	7	6260322	28
8	8387		8	6220067		8	1350	27
9	9434		9	1104	36	9	2377	
4150	6180481	46	4190	2140	37	4230	3404	26
1	1527		1	3177	36	1	4430	27
2	2573		2	4213		2	5457	26
3	3619		3	5249	35	3	6483	
4	4665	45	4	6284	36	4	7509	25
5	5710		5	7320	35	5	8534	26
6	6755		6	8355		6	9560	25
7	7800		7	9390	34	7	6270585	
8	8845	44	8	6230424	35	8	1610	24
9	9889		9	1459	34	9	2634	25
4160	6190933		4200	2493		4240	3659	24

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
4241	6274683	1024	4281	6315452	1015	4321	6355843	1005
2	5707	23	2	6467	14	2	6848	04
3	6730	24	3	7481		3	7852	05
4	7754	23	4	8495	13	4	8857	04
5	8777		5	9508	14	5	9861	
6	9800		6	6320522	13	6	6360865	
7	6280823	22	7	1535		7	1869	
8	1845		8	2548	12	8	2873	03
9	2867		9	3560	13	9	3876	
4250	3889		4290	4573	12	4330	4879	
1	4911		1	5585		1	5882	02
2	5933	21	2	6597		2	6884	03
3	6954		3	7609	11	3	7887	02
4	7975		4	8620	12	4	8889	
5	8996	20	5	9632	11	5	9891	
6	6290016	21	6	6330643		6	6370893	01
7	1037	20	7	1654	10	7	1894	
8	2057	19	8	2664		8	2895	02
9	3076	20	9	3674	11	9	3897	00
4260	4096	19	4300	4685	09	4340	4897	01
1	5115		1	5694	10	1	5898	00
2	6134		2	6704	09	2	6898	
3	7153		3	7713	10	3	7898	
4	8172	18	4	8723	09	4	8898	
5	9190	19	5	9732	08	5	9898	999
6	6300209	17	6	6340740	09	6	6380897	
7	1226	18	7	1749	08	7	1896	
8	2244		8	2757		8	2895	
9	3262	17	9	3765		9	3894	
4270	4279		4310	4773	07	4350	4893	98
1	5296	16	1	5780	08	1	5891	
2	6312	17	2	6788	07	2	6889	
3	7329	16	3	7795	06	3	7887	97
4	8345		4	8801	07	4	8884	98
5	9361		5	9808	06	5	9882	97
6	6310377		6	6350814		6	6390879	
7	1393	15	7	1820		7	1876	96
8	2408		8	2826		8	2872	97
9	3423		9	3832	05	9	3869	96
4280	4438	14	4320	4837	06	4360	4865	

N.	M. Log.	D.	N.	M Log.	D.	N.	M. Log.	D.
4361	6395861	996	4401	6435514	986	4441	6474808	978
2	6857	95	2	6500	87	2	5786	77
3	7852		3	7487	86	3	6763	78
4	8847		4	8473		4	7741	77
5	9842		5	9459		5	8718	
6	6400837		6	6440445		6	9695	76
7	1832	94	7	1431	85	7	6480671	77
8	2826		8	2416		8	1648	76
9	3820		9	3401		9	2624	
4370	4814		4410	4386		4450	3600	
1	5808		1	5371	84	1	4576	
2	6802	93	2	6355		2	5552	75
3	7795		3	7339		3	6527	
4	8788		4	8323		4	7502	
5	9781	92	5	9307		5	8477	
6	6410773		6	6450291	83	6	9452	74
7	1765	93	7	1274		7	6490426	75
8	2758	91	8	2257		8	1401	74
9	3749	92	9	3240		9	2375	
4380	4741		4420	4223	82	4460	3349	73
1	5733	91	1	5205		1	4322	74
2	6724		2	6187		2	5296	73
3	7715	90	3	7169		3	6269	
4	8705	91	4	8151		4	7242	
5	9696	90	5	9133	81	5	8215	72
6	6420686		6	6460114		6	9187	73
7	1676		7	1095		7	6500160	72
8	2666		8	2076		8	1132	
9	3656	89	9	3057	80	9	2104	71
4390	4645		4430	4037	81	4470	3075	72
1	5634		1	5018	80	1	4047	71
2	6623		2	5998	79	2	5018	
3	7612		3	6977	80	3	5989	
4	8601	88	4	7957	79	4	6960	70
5	9589		5	8936		5	7930	71
6	6430577		6	9915		6	8901	70
7	1565	87	7	6470894		7	9871	
8	2552	88	8	1873	78	8	6510841	
9	3540	87	9	2851	79	9	1811	69
4400	4527		4440	3830	78	4480	2780	

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
4481	6513749	970	4521	6552345	961	4561	6590601	952
2	4719	68	2	3306	60	2	1553	
3	5687	69	3	4266		3	2505	51
4	6656	68	4	5226		4	3456	52
5	7624	69	5	6186	59	5	4408	51
6	8593	68	6	7145	60	6	5359	
7	9561	67	7	8105	59	7	6310	
8	6520528	68	8	9064		8	7261	
9	1496	67	9	6560023		9	8212	50
4490	2463	68	4530	0982		4570	9162	
1	3431	66	1	1941	58	1	6600112	
2	4397	67	2	2899		2	1062	
3	5364		3	3857		3	2012	
4	6331	66	4	4815		4	2962	49
5	7297		5	5773	57	5	3911	
6	8263		6	6730	58	6	4860	
7	9229		7	7688	57	7	5809	
8	6530195	65	8	8645		8	6758	48
9	1160		9	9602		9	7706	49
4500	2125		4540	6570559	56	4580	8655	48
1	3090		1	1515		1	9603	
2	4055	64	2	2471		2	6610551	
3	5019	65	3	3427		3	1499	47
4	5984	64	4	4383		4	2446	
5	6948		5	5339	55	5	3393	48
6	7912		6	6294	56	6	4341	46
7	8876	63	7	7250	55	7	5287	47
8	9839		8	8205	54	8	6234	
9	6540802		9	9159	55	9	7181	46
4510	1765		4550	6580114	54	4590	8127	
1	2728		1	1068	55	1	9073	
2	3691	62	2	2023	54	2	6620019	45
3	4653	63	3	2977	53	3	0964	46
4	5616	62	4	3930	54	4	1910	45
5	6578	61	5	4884	53	5	2855	
6	7539	62	6	5837		6	3800	
7	8501	61	7	6790		7	4745	
8	9462		8	7743		8	5690	44
9	6550423		9	8696	52	9	6634	
4520	1384		4560	9648	53	4600	7578	

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
4601	6628522	944	4641	6666116	935	4681	6703386	928
2	9466		2	7051	36	2	4314	
3	6630410	43	3	7987	35	3	5242	27
4	1353		4	8922		4	6169	
5	2296		5	9857		5	7096	
6	3239		6	6670792		6	8023	
7	4182		7	1727	34	7	8950	26
8	5125	42	8	2661		8	9876	
9	6067		9	3595	35	9	6710802	
4610	7009		4650	4530	33	4690	1728	
1	7951		1	5463	34	1	2654	
2	8893		2	6397		2	3580	
3	9835	41	3	7331	33	3	4506	25
4	6640776		4	8264		4	5431	
5	1717		5	9197		5	6356	
6	2658		6	6680130	32	6	7281	
7	3599	40	7	1062	33	7	8206	24
8	4539	41	8	1995	32	8	9130	
9	5480	40	9	2927		9	6720054	25
4620	6420		4660	3859		4700	0979	24
1	7360	39	1	4791		1	1903	23
2	8299	40	2	5723	31	2	2826	24
3	9239	39	3	6654		3	3750	23
4	6650178		4	7585		4	4673	
5	1117		5	8516		5	5596	
6	2056		6	9447		6	6519	
7	2995		7	6690378	30	7	7442	
8	3934	38	8	1308	31	8	8365	22
9	4872		9	2239	30	9	9287	
4630	5810		4670	3169		4710	6730209	
1	6748		1	4099	29	1	1131	
2	7686	37	2	5028	30	2	2053	21
3	8623		3	5958	29	3	2974	22
4	9560		4	6887		4	3896	21
5	6660497		5	7816		5	4817	
6	1434		6	8745		6	5738	
7	2371	36	7	9674	28	7	6659	20
8	3307	37	8	6700602		8	7579	21
9	4244	36	9	1530	29	9	8500	20
4640	5180		4680	2459	27	4720	9420	

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
4721	6740340	920	4761	6776982	912	4801	6813317	905
2	1260	19	2	7894		2	4222	04
3	2179	20	3	8806		3	5126	
4	3099	19	4	9718	11	4	6030	
5	4018		5	6780629		5	6934	
6	4937		6	1540	12	6	7838	03
7	5856		7	2452	10	7	8741	04
8	6775	18	8	3362	11	8	9645	03
9	7693		9	4273		9	6820548	
4730	8611		4770	5184	10	4810	1451	
1	9529		1	6094		1	2354	02
2	6750447		2	7004		2	3256	03
3	1365		3	7914		3	4159	02
4	2283	17	4	8824		4	5061	
5	3200		5	9734	09	5	5963	
6	4117		6	6790643		6	6865	01
7	5034		7	1552		7	7766	02
8	5951	16	8	2461		8	8668	01
9	6867		9	3370		9	9569	
4740	7783	17	4780	4279	08	4820	6830470	
1	8700	15	1	5187	09	1	1371	
2	9615	16	2	6096	08	2	2272	
3	6760531		3	7004		3	3173	00
4	1447	15	4	7912	07	4	4073	
5	2362		5	8819	08	5	4973	
6	3277		6	9727	07	6	5873	
7	4192		7	6800634		7	6773	
8	5107		8	1541		8	7673	899
9	6022	14	9	2448		9	8572	
4750	6936		4790	3355		4830	9471	
1	7850		1	4262	06	1	6840370	
2	8764		2	5168		2	1269	
3	9678		3	6074		3	2168	98
4	6770592	13	4	6980		4	3066	99
5	1505		5	7886		5	3965	98
6	2418	14	6	8792	05	6	4863	
7	3332	12	7	9697		7	5761	
8	4244	13	8	6810602		8	6659	97
9	5157		9	1507		9	7556	98
4760	6070	12	4800	2412		4840	8454	97

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
4841	6849351	897	4881	6885088	890	4921	6920534	882
2	6850248		2	5978	89	2	1416	
3	1145	96	3	6867	90	3	2298	
4	2041	97	4	7757	89	4	3180	
5	2938	96	5	8646		5	4062	
6	3834		6	9535	88	6	4944	
7	4730		7	6890423	89	7	5826	81
8	5626		8	1312	88	8	6707	
9	6522	95	9	2200	89	9	7588	
4850	7417	96	4890	3089	88	4930	8469	
1	8313	95	1	3977	87	1	9350	
2	9208		2	4864	88	2	6930231	80
3	6860103		3	5752		3	1111	
4	0998	94	4	6640	87	4	1991	81
5	1892	95	5	7527		5	2872	80
6	2787	94	6	8414		6	3752	79
7	3681		7	9301		7	4631	80
8	4575		8	6900188	86	8	5511	79
9	5469		9	1074	87	9	6390	
4860	6363	93	4900	1961	86	4940	7269	80
1	7256	94	1	2847		1	8149	78
2	8150	93	2	3733		2	9027	79
3	9043		3	4619		3	9906	
4	9936	92	4	5505	85	4	6940785	78
5	6870828	93	5	6390		5	1663	
6	1721	92	6	7275	86	6	2541	
7	2613	93	7	8161	85	7	3419	
8	3506	92	8	9046	84	8	4297	
9	4398		9	9930	85	9	5175	77
4870	5290	91	4910	6910815	84	4950	6052	
1	6181	92	1	1699	85	1	6929	
2	7073	91	2	2584	84	2	7806	
3	7964		3	3468		3	8683	
4	8855		4	4352	83	4	9560	
5	9746		5	5235	84	5	6950437	76
6	6880637		6	6119	83	6	1313	
7	1528	90	7	7002		7	2189	
8	2418		8	7885		8	3065	
9	3308		9	8768		9	3941	
4880	4198		4920	9651		4960	4817	75

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
4961	6955692	876	5001	6990569	868	5041	7025167	861
2	6568	75	2	1437		2	6028	62
3	7443		3	2305		3	6890	61
4	8318		4	3173		4	7751	
5	9193	74	5	4041	67	5	8612	60
6	6960067	75	6	4908	68	6	9472	61
7	0942	74	7	5776	67	7	7030333	60
8	1816		8	6643		8	1193	61
9	2690		9	7510		9	2054	60
4970	3564		5010	8377		5050	2914	
1	4438	73	1	9244		1	3774	59
2	5311	74	2	7000111	66	2	4633	60
3	6185	73	3	0977		3	5493	59
4	7058		4	1843		4	6352	60
5	7931		5	2709		5	7212	59
6	8804	72	6	3575		6	8071	
7	9676	73	7	4441		7	8930	58
8	6970549	72	8	5307	65	8	9788	59
9	1421		9	6172		9	7040647	58
4980	2293		5020	7037		5060	1505	
1	3165		1	7902		1	2363	
2	4037		2	8767		2	3221	
3	4909	71	3	9632	64	3	4079	
4	5780	72	4	7010496	65	4	4937	57
5	6652	71	5	1361	64	5	5794	58
6	7523		6	2225		6	6652	57
7	8394	70	7	3089		7	7509	
8	9264	71	8	3953	63	8	8366	
9	6980135	70	9	4816	64	9	9223	
4990	1005	71	5030	5680	63	5070	7050080	56
1	1876	70	1	6543		1	0936	
2	2746		2	7406		2	1792	57
3	3616	69	3	8269		3	2649	56
4	4485	70	4	9132		4	3505	55
5	5355	69	5	9995	62	5	4360	56
6	6224		6	7020857	63	6	5216	
7	7093	70	7	1720	62	7	6072	55
8	7963	68	8	2582		8	6927	
9	8831	69	9	3444	61	9	7782	
5000	9700		5040	4305	62	5080	8637	

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
5081	7059492	855	5121	7093548	848	5161	7127339	841
2	7060347	54	2	4396		2	8180	
3	1201		3	5244	47	3	9021	
4	2055	55	4	6091	48	4	9862	
5	2910	54	5	6939	47	5	7130703	
6	3764	53	6	7786		6	1544	
7	4617	54	7	8633		7	2385	40
8	5471		8	9480		8	3225	
9	6325	53	9	7100327		9	4065	
5090	7178		5130	1174	46	5170	4905	
1	8031		1	2020		1	5745	
2	8884		2	2866	47	2	6585	
3	9737	52	3	3713	46	3	7425	39
4	7070589	53	4	4559	45	4	8264	40
5	1442	52	5	5404	46	5	9104	39
6	2294		6	6250		6	9943	
7	3146		7	7096	45	7	7140782	38
8	3998		8	7941		8	1620	39
9	4850		9	8786		9	2459	
5100	5702	51	5140	9631		5180	3298	38
1	6553	52	1	7110476		1	4136	
2	7405	51	2	1321	44	2	4974	
3	8256		3	2165	45	3	5812	
4	9107	50	4	3010	44	4	6650	
5	9957	51	5	3854		5	7488	37
6	7080808		6	4698		6	8325	
7	1659	50	7	5542	43	7	9162	38
8	2509		8	6385	44	8	7150000	37
9	3359		9	7229	43	9	0837	
5110	4209		5150	8072		5190	1674	36
1	5059	49	1	8915	44	1	2510	37
2	5908	50	2	9759	42	2	3347	36
3	6758	49	3	7120601	43	3	4183	
4	7607		4	1444		4	5019	37
5	8456		5	2287	42	5	5856	35
6	9305		6	3129		6	6691	36
7	7090154		7	3971		7	7527	
8	1003	48	8	4813		8	8363	35
9	1851	49	9	5655		9	9198	
5120	2700	48	5160	6497		5200	7160033	36

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
5201	7160869	834	5241	7194142	828	5281	7227162	822
2	1703	35	2	4970	29	2	7984	
3	2538		3	5799	28	3	8806	
4	3373	34	4	6627		4	9628	
5	4207	35	5	7455		5	7230450	
6	5042	34	6	8283		6	1272	21
7	5876		7	9111	27	7	2093	
8	6710		8	9938	28	8	2914	22
9	7544	33	9	7200766	27	9	3736	21
5210	8377	34	5250	1593		5290	4557	
1	9211	33	1	2420		1	5378	20
2	7170044		2	3247		2	6198	21
3	0877		3	4074		3	7019	20
4	1710		4	4901	26	4	7839	21
5	2543		5	5727	27	5	8660	20
6	3376	32	6	6554	26	6	9480	
7	4208	33	7	7380		7	7240300	
8	5041	32	8	8206		8	1120	19
9	5873		9	9032	25	9	1939	20
5220	6705		5260	9857	26	5300	2759	19
1	7537		1	7210683	25	1	3578	
2	8369	31	2	1508	26	2	4397	
3	9200	32	3	2334	25	3	5216	
4	7180032	31	4	3159		4	6035	
5	0863		5	3984		5	6854	18
6	1694		6	4809	24	6	7672	19
7	2525		7	5633	25	7	8491	18
8	3356	30	8	6458	24	8	9309	
9	4186	31	9	7282		9	7250127	
5230	5017	30	5270	8106		5310	0945	
1	5847		1	8930		1	1763	
2	6677		2	9754		2	2581	17
3	7507		3	7220578	23	3	3398	18
4	8337		4	1401	24	4	4216	17
5	9167	29	5	2225	23	5	5033	
6	9996	30	6	3048		6	5850	
7	7190826	29	7	3871		7	6667	16
8	1655		8	4694		8	7483	17
9	2484		9	5517	22	9	8300	16
5240	3313		5280	6339	23	5320	9116	17

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
5321	7259933	816	5361	7292458	810	5401	7324742	804
2	7260749		2	3268		2	5546	
3	1565	15	3	4078		3	6350	03
4	2380	16	4	4888	09	4	7153	04
5	3196		5	5697	10	5	7957	03
6	4012	15	6	6507	09	6	8760	04
7	4827		7	7316		7	9564	03
8	5642		8	8125		8	7330367	
9	6457		9	8934		9	1170	
5330	7272		5370	9743		5410	1973	02
1	8087	14	1	7300552	08	1	2775	03
2	8901	15	2	1360		2	3578	02
3	9716	14	3	2168	09	3	4380	03
4	7270530		4	2977	08	4	5183	02
5	1344		5	3785		5	5985	
6	2158		6	4593	07	6	6787	01
7	2972		7	5400	08	7	7588	02
8	3786	13	8	6208	07	8	8390	
9	4599	14	9	7015	08	9	9192	01
5340	5413	13	5380	7823	07	5420	9993	
1	6226		1	8630		1	7340794	
2	7039		2	9437		2	1595	
3	7852	12	3	7310244		3	2396	
4	8664	13	4	1051	06	4	3197	00
5	9477		5	1857		5	3997	01
6	7280290	12	6	2663	07	6	4798	00
7	1102		7	3470	06	7	5598	
8	1914		8	4276		8	6398	
9	2726		9	5082		9	7198	
5350	3538		5390	5888	05	5430	7998	
1	4350	11	1	6693	06	1	8798	
2	5161		2	7499	05	2	9598	799
3	5972	12	3	8304		3	7350397	
4	6784	11	4	9109		4	1196	
5	7595		5	9914		5	1995	
6	8406	10	6	7320719		6	2794	
7	9216	11	7	1524		7	3593	
8	7290027		8	2329	04	8	4392	
9	0838	10	9	3133	05	9	5191	98
5360	1648		5400	3938	04	5440	5989	

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
5441	7356787	798	5481	7388598	792	5521	7420177	787
2	7585		2	9390		2	0964	86
3	8383		3	7390182		3	1750	87
4	9181		4	0974		4	2537	86
5	9979	97	5	1766		5	3323	
6	7360776	98	6	2558		6	4109	
7	1574	97	7	3350	91	7	4895	85
8	2371		8	4141		8	5680	86
9	3168		9	4932		9	6466	85
5450	3965		5490	5723		5530	7251	86
1	4762	96	1	6514		1	8037	85
2	5558	97	2	7305		2	8822	
3	6355	96	3	8096		3	9607	
4	7151	97	4	8887	90	4	7430392	84
5	7948	96	5	9677		5	1176	85
6	8744		6	7400467		6	1961	84
7	9540	95	7	1257		7	2745	85
8	7370335	96	8	2047		8	3530	84
9	1131	95	9	2837		9	4314	
5460	1926	96	5500	3627	89	5540	5098	
1	2722	95	1	4416	90	1	5882	83
2	3517		2	5206	89	2	6665	84
3	4312		3	5995		3	7449	83
4	5107		4	6784		4	8232	84
5	5902	94	5	7573		5	9016	83
6	6696	95	6	8362		6	9799	
7	7491	94	7	9151	88	7	7440582	
8	8285		8	9939	89	8	1365	82
9	9079		9	7410728	88	9	2147	83
5470	9873		5510	1516		5550	2930	82
1	7380667		1	2304		1	3712	83
2	1461	93	2	3092		2	4495	82
3	2254	94	3	3880		3	5277	
4	3048	93	4	4668	87	4	6059	
5	3841		5	5455	88	5	6841	81
6	4634		6	6243	87	6	7622	82
7	5427		7	7030		7	8404	81
8	6220		8	7817		8	9185	82
9	7013		9	8604		9	9967	81
5480	7806	92	5520	9391	86	5560	7450748	

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
5561	7451529	781	5601	7482656	775	5641	7513561	770
2	2310		2	3431		2	4331	
3	3091	80	3	4206		3	5101	69
4	3871	81	4	4981		4	5870	
5	4652	80	5	5756		5	6639	70
6	5432		6	6531		6	7409	69
7	6212		7	7306	74	7	8178	
8	6992		8	8080		8	8947	
9	7772		9	8854	75	9	9716	68
5570	8552		5610	9629	74	5650	7520484	69
1	9332	79	1	7490403		1	1253	
2	7460111		2	1177	73	2	2022	68
3	0890	80	3	1950	74	3	2790	
4	1670	79	4	2724		4	3558	
5	2449		5	3498	73	5	4326	
6	3228	78	6	4271		6	5094	
7	4006	79	7	5044		7	5862	67
8	4785		8	5817		8	6629	68
9	5564	78	9	6590		9	7397	67
5580	6342		5620	7363		5660	8164	68
1	7120		1	8136	72	1	8932	67
2	7898		2	8908	73	2	9699	
3	8676		3	9681	72	3	7530466	66
4	9454		4	7500453		4	1232	67
5	7470232	77	5	1225		5	1999	
6	1009	78	6	1997		6	2766	66
7	1787	77	7	2769		7	3532	
8	2564		8	3541	71	8	4298	67
9	3341		9	4312	72	9	5065	66
5590	4118		5630	5084	71	5670	5831	65
1	4895		1	5855		1	6596	66
2	5672	76	2	6626	72	2	7362	
3	6448	77	3	7398	70	3	8128	65
4	7225	76	4	8168	71	4	8893	66
5	8001		5	8939		5	9659	65
6	8777		6	9710	70	6	7540424	
7	9553		7	7510480	71	7	1189	
8	7480329		8	1251	70	8	1954	
9	1105	75	9	2021		9	2719	64
5600	1880	76	5640	2791		5680	3483	65

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
5681	7544248	764	5721	7574719	760	5761	7604979	754
2	5012	65	2	5479	58	2	5733	53
3	5777	64	3	6237	59	3	6486	54
4	6541		4	6996		4	7240	53
5	7305		5	7755	58	5	7993	
6	8069	63	6	8513	59	6	8746	54
7	8832	64	7	9272	58	7	9500	53
8	9596	63	8	7580030		8	7610253	52
9	7550359	64	9	0788		9	1005	53
5690	1123	63	5730	1546		5770	1758	
1	1886		1	2304		1	2511	52
2	2649		2	3062	57	2	3263	53
3	3412		3	3819	58	3	4016	52
4	4175	62	4	4577	57	4	4768	
5	4937	63	5	5334		5	5520	
6	5700	62	6	6091		6	6272	
7	6462		7	6848		7	7024	51
8	7224	63	8	7605		8	7775	52
9	7987	62	9	8362		9	8527	51
5700	8749	61	5740	9119	56	5780	9278	52
1	9510	62	1	9875	57	1	7620030	51
2	7560272		2	7590632	56	2	0781	
3	1034	61	3	1388		3	1532	
4	1795		4	2144		4	2283	
5	2556	62	5	2900		5	3034	50
6	3318	61	6	3656		6	3784	51
7	4079		7	4412		7	4535	50
8	4840	60	8	5168	55	8	5285	
9	5600	61	9	5923		9	6035	51
5710	6361		5750	6678	56	5790	6786	50
1	7122	60	1	7434	55	1	7536	
2	7882		2	8189		2	8286	49
3	8642		3	8944		3	9035	50
4	9402		4	9699	54	4	9785	49
5	7570162		5	7600453	55	5	7630534	50
6	0922		6	1208	54	6	1284	49
7	1682		7	1962	55	7	2033	
8	2442	59	8	2717	54	8	2782	
9	3201		9	3471		9	3531	
5720	3960		5760	4225		5800	4280	

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
5801	7635029	748	5841	7664872	744	5881	7694512	738
2	5777	49	2	5616	43	2	5250	
3	6526	48	3	6359		3	5988	39
4	7274		4	7102		4	6727	38
5	8022		5	7845		5	7465	
6	8770		6	8588		6	8203	37
7	9518		7	9331		7	8940	38
8	7640266		8	7670074	42	8	9678	
9	1014	47	9	0816	43	9	7700416	37
5810	1761	48	5850	1559	42	5890	1153	
1	2509	47	1	2301		1	1890	
2	3256		2	3043		2	2627	
3	4003		3	3785		3	3364	
4	4750		4	4527		4	4101	
5	5497		5	5269		5	4838	
6	6244		6	6011	41	6	5575	36
7	6991	46	7	6752	42	7	6311	37
8	7737	47	8	7494	41	8	7048	36
9	8484	46	9	8235		9	7784	
5820	9230		5860	8976		5900	8520	
1	9976		1	9717		1	9256	
2	7650722		2	7680458		2	9992	
3	1468		3	1199		3	7710728	35
4	2214	45	4	1940	40	4	1463	36
5	2959	46	5	2680	41	5	2199	35
6	3705	45	6	3421	40	6	2934	36
7	4450		7	4161		7	3670	35
8	5195	46	8	4901		8	4405	
9	5941	45	9	5641		9	5140	
5830	6686	44	5870	6381		5910	5875	
1	7430	45	1	7121	39	1	6610	34
2	8175		2	7860	40	2	7344	35
3	8920	44	3	8600	39	3	8079	34
4	9664	45	4	9339	40	4	8813	
5	7660409	44	5	7690079	39	5	9547	35
6	1153		6	0818		6	7720282	34
7	1897		7	1557		7	1016	
8	2641		8	2296		8	1750	33
9	3385	43	9	3035	38	9	2483	34
5840	4128	44	5880	3773	39	5920	3217	

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
5921	7723951	733	5961	7753191	729	6001	7782236	724
2	4684		2	3920	28	2	2960	23
3	5417		3	4648		3	3683	24
4	6150	34	4	5376		4	4407	23
5	6884	32	5	6104		5	5130	
6	7616	33	6	6832		6	5853	
7	8349		7	7560		7	6576	
8	9082		8	8288		8	7299	
9	9815	32	9	9016	27	9	8022	
5930	7730547		5970	9743	28	6010	8745	22
1	1279		1	7760471	27	1	9467	23
2	2011		2	1198		2	7790190	22
3	2743		3	1925		3	0912	
4	3475		4	2652		4	1634	
5	4207		5	3379		5	2356	
6	4939	31	6	4106		6	3078	
7	5670	32	7	4833	26	7	3800	
8	6402	31	8	5559	27	8	4522	21
9	7133		9	6286	26	9	5243	22
5940	7864	32	5980	7012		6020	5965	21
1	8596	30	1	7738		1	6686	22
2	9326	31	2	8464		2	7408	21
3	7740057		3	9190		3	8129	
4	0788		4	9916		4	8850	
5	1519	30	5	7770642	25	5	9571	20
6	2249		6	1367	26	6	7800291	21
7	2979	31	7	2093	25	7	1012	20
8	3710	30	8	2818		8	1732	21
9	4440		9	3543		9	2453	20
5950	5170		5990	4268		6030	3173	
1	5900	29	1	4993		1	3893	
2	6629	30	2	5718		2	4613	
3	7359	29	3	6443	24	3	5333	
4	8088	30	4	7167	25	4	6053	
5	8818	29	5	7892	24	5	6773	19
6	9547		6	8616		6	7492	20
7	7750276		7	9340	25	7	8212	19
8	1005		8	7780065	24	8	8931	
9	1734		9	0789		9	9650	
5960	2463	28	6000	1513	23	6040	7810369	

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
6041	7811088	719	6081	7839750	714	6121	7868224	709
2	1807		2	7840464		2	8933	10
3	2526		3	1178		3	9643	09
4	3245	18	4	1892		4	7870352	
5	3963		5	2606	13	5	1061	
6	4681	19	6	3319	14	6	1770	
7	5400	18	7	4033	13	7	2479	
8	6118		8	4746	14	8	3188	08
9	6836		9	5460	13	9	3896	09
6050	7554		6090	6173		6130	4605	08
1	8272	17	1	6886		1	5313	
2	8989	18	2	7599		2	6021	09
3	9707	17	3	8312	12	3	6730	08
4	7820424		4	9024	13	4	7438	
5	1141	18	5	9737		5	8146	
6	1859	17	6	7850450	12	6	8854	07
7	2576		7	1162		7	9561	08
8	3293		8	1874		8	7880269	07
9	4010	16	9	2586		9	0976	08
6060	4726	17	6100	3298		6140	1684	07
1	5443	16	1	4010		1	2391	
2	6159	17	2	4722		2	3098	
3	6876	16	3	5434	11	3	3805	
4	7592		4	6145	12	4	4512	
5	8308		5	6857	11	5	5219	
6	9024		6	7568		6	5926	06
7	9740		7	8279		7	6632	07
8	7830456	15	8	8990		8	7339	06
9	1171	16	9	9701		9	8045	
6070	1887	15	6110	7860412		6150	8751	
1	2602	16	1	1123	10	1	9457	
2	3318	15	2	1833	11	2	7890163	
3	4033		3	2544	10	3	0869	
4	4748		4	3254	11	4	1575	
5	5463		5	3965	10	5	2281	05
6	6178	14	6	4675		6	2986	06
7	6892	15	7	5385		7	3692	05
8	7607	14	8	6095		8	4397	
9	8321	15	9	6805	09	9	5102	
6080	9036	14	6120	7514	10	6160	5807	

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
6161	7896512	705	6201	7924617	701	6241	7952542	696
2	7217		2	5318	00	2	3238	95
3	7922	04	3	6018		3	3933	96
4	8626	05	4	6718		4	4629	95
5	9331	04	5	7418		5	5324	96
6	7900035		6	8118	699	6	6020	95
7	0739	05	7	8817	700	7	6715	
8	1444	04	8	9517		8	7410	
9	2148		9	7930217	699	9	8105	
6170	2852	03	6210	0916		6250	8800	
1	3555	04	1	1615		1	9495	
2	4259		2	2314	700	2	7960190	94
3	4963	03	3	3014	698	3	0884	95
4	5666	04	4	3712	99	4	1579	94
5	6370	03	5	4411		5	2223	
6	7073		6	5110		6	2967	95
7	7776		7	5809	98	7	3662	94
8	8479		8	6507	99	8	4356	
9	9182		9	7206	98	9	5050	93
6180	9885	02	6220	7904		6260	5743	94
1	7910587	03	1	8602		1	6437	
2	1290	02	2	9300		2	7131	93
3	1992	03	3	9998		3	7824	
4	2695	02	4	7940696		4	8517	94
5	3397		5	1394	97	5	9211	93
6	4099		6	2091	98	6	9904	
7	4801		7	2789	97	7	7970597	
8	5503		8	3486		8	1290	
9	6205	01	9	4183		9	1983	92
6190	6906	02	6230	4880	98	6270	2675	93
1	7608	01	1	5578	96	1	3368	92
2	8309	02	2	6274	97	2	4060	93
3	9011	01	3	6971		3	4753	92
4	9712		4	7668		4	5445	
5	7920413		5	8365	96	5	6137	
6	1114		6	9061		6	6829	
7	1815		7	9757	97	7	7521	
8	2516	00	8	7950454	96	8	8213	
9	3216	01	9	1150		9	8905	91
6200	3917	00	6240	1846		6280	9596	92

N.	M. Log.	D.	N.	M Log.	D.	N.	M. Log.	D.
6281	7980288	691	6321	8007858	687	6361	8035254	683
2	0979	92	2	8545		2	5937	82
3	1671	91	3	9232		3	6619	83
4	2362		4	9919	86	4	7302	82
5	3053		5	8010605	87	5	7984	
6	3744		6	1292	86	6	8666	
7	4435	90	7	1978	87	7	9348	83
8	5125	91	8	2665	86	8	8040031	81
9	5816	90	9	3351		9	0712	82
6290	6506	91	6330	4037		6370	1394	
1	7197	90	1	4723		1	2076	
2	7887		2	5409		2	2758	81
3	8577		3	6095		3	3439	82
4	9267		4	6781	85	4	4121	81
5	9957		5	7466	86	5	4802	
6	7990647		6	8152	85	6	5483	
7	1337		7	8837		7	6164	
8	2027	89	8	9522	86	8	6845	
9	2716		9	8020208	85	9	7526	
6300	3405	90	6340	0893		6380	8207	80
1	4095	89	1	1578	84	1	8887	81
2	4784		2	2262	85	2	9568	80
3	5473		3	2947		3	8050248	81
4	6162		4	3632	84	4	0929	80
5	6851		5	4316	85	5	1609	
6	7540	88	6	5001	84	6	2289	
7	8228	89	7	5685		7	2969	
8	8917	88	8	6369		8	3649	
9	9605	89	9	7053		9	4329	
6310	8000294	88	6350	7737		6390	5009	79
1	0982		1	8421		1	5688	80
2	1670		2	9105		2	6368	79
3	2358		3	9789	83	3	7047	
4	3046		4	8030472	84	4	7726	
5	3734	87	5	1156	83	5	8405	80
6	4421	88	6	1839		6	9085	79
7	5109	87	7	2522		7	9764	78
8	5796	88	8	3205		8	8060442	79
9	6484	87	9	3888		9	1121	
6320	7171		6360	4571		6400	1800	78

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
6401	8062478	679	6441	8089533	674	6481	8116420	670
2	3157	78	2	8090207		2	7090	
3	3835		3	0881		3	7760	
4	4513		4	1555		4	8430	
5	5191		5	2229		5	9100	69
6	5869		6	2903		6	9769	70
7	6547		7	3577	73	7	8120439	69
8	7225		8	4250	74	8	1108	70
9	7903	77	9	4924	73	9	1778	69
6410	8580	78	6450	5597		6490	2447	
1	9258	77	1	6270	74	1	3116	
2	9935		2	6944	73	2	3785	
3	8070612	78	3	7617		3	4454	
4	1290	77	4	8290	72	4	5123	
5	1967		5	8962	73	5	5792	68
6	2644	76	6	9635		6	6460	69
7	3320	77	7	8100308	72	7	7129	68
8	3997		8	0980	73	8	7797	
9	4674	76	9	1653	72	9	8465	69
6420	5350	77	6460	2325		6500	9134	68
1	6027	76	1	2997	73	1	9802	
2	6703		2	3670	72	2	8130470	
3	7379		3	4342	71	3	1138	67
4	8055		4	5013	72	4	1805	68
5	8731		5	5685		5	2473	
6	9407		6	6357		6	3141	67
7	8080083		7	7029	71	7	3808	
8	0759	75	8	7700	72	8	4475	68
9	1434	76	9	8372	71	9	5143	67
6430	2110	75	6470	9043		6510	5810	
1	2785		1	9714		1	6477	
2	3460	76	2	8110385		2	7144	
3	4136	75	3	1056		3	7811	
4	4811		4	1727		4	8478	66
5	5486	74	5	2398	70	5	9144	67
6	6160	75	6	3068	71	6	9811	66
7	6835		7	3739	70	7	8140477	67
8	7510	74	8	4409	71	8	1144	66
9	8184	75	9	5080	70	9	1810	
6440	8859	74	6480	5750		6520	2476	

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
6521	8143142	666	6561	8169700	662	6601	8196097	658
2	3808		2	8170362		2	6755	
3	4474		3	1024		3	7413	
4	5140	65	4	1686	61	4	8071	57
5	5805	66	5	2347	62	5	8728	58
6	6471	65	6	3009	61	6	9386	57
7	7136		7	3670		7	8200043	
8	7801	66	8	4331	62	8	0700	58
9	8467	65	9	4993	61	9	1358	57
6530	9132		6570	5654		6610	2015	
1	9797		1	6315		1	2672	56
2	8150462		2	6976	60	2	3328	57
3	1127	64	3	7636	61	3	3985	
4	1791	65	4	8297		4	4642	56
5	2456	64	5	8958	60	5	5298	57
6	3120	65	6	9618		6	5955	56
7	3785	64	7	8180278	61	7	6611	57
8	4449		8	0939	60	8	7268	56
9	5113		9	1599		9	7924	
6540	5777		6580	2259		6620	8580	
1	6441		1	2919		1	9236	
2	7105		2	3579		2	9892	
3	7769		3	4239	59	3	8210548	55
4	8433		4	4898	60	4	1203	56
5	9097	63	5	5558	59	5	1859	55
6	9760		6	6217	60	6	2514	56
7	8160423	64	7	6877	59	7	3170	55
8	1087	63	8	7536		8	3825	
9	1750		9	8195		9	4480	
6550	2413		6590	8854		6630	5135	
1	3076		1	9513		1	5790	
2	3739		2	8190172		2	6445	
3	4402	62	3	0831	58	3	7100	
4	5064	63	4	1489	59	4	7755	54
5	5727	62	5	2148	58	5	8409	55
6	6389	63	6	2806	59	6	9064	54
7	7052	62	7	3465	58	7	9718	
8	7714		8	4123		8	8220372	55
9	8376		9	4781		9	1027	54
6560	9038		6600	5439		6640	1681	

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
6641	8222335	654	6681	8248415	650	6721	8274339	646
2	2989		2	9065		2	4985	
3	3643	53	3	9715	49	3	5631	
4	4296	54	4	8250364	50	4	6277	
5	4950	53	5	1014		5	6923	
6	5603	54	6	1664	49	6	7569	45
7	6257	53	7	2313	50	7	8214	46
8	6910		8	2963	49	8	8860	45
9	7563		9	3612		9	9505	46
6650	8216		6690	4261		6730	8280151	45
1	8869		1	4910		1	0796	
2	9522		2	5559		2	1441	
3	8230175		3	6208		3	2086	
4	0828		4	6857		4	2731	
5	1481	52	5	7506	48	5	3376	
6	2133	53	6	8154	49	6	4021	44
7	2786	52	7	8803	48	7	4665	45
8	3438		8	9451	49	8	5310	
9	4090		9	8260100	48	9	5955	44
6660	4742		6700	0748		6740	6599	
1	5394		1	1396		1	7243	
2	6046		2	2044		2	7887	45
3	6698		3	2692		3	8532	44
4	7350		4	3340		4	9176	
5	8002	51	5	3988	47	5	9820	43
6	8653	52	6	4635	48	6	8290463	44
7	9305	51	7	5283		7	1107	
8	9956		8	5931	47	8	1751	43
9	8240607		9	6578		9	2394	44
6670	1258		6710	7225		6750	3038	43
1	1909		1	7872		1	3681	
2	2560		2	8519		2	4324	
3	3211		3	9166		3	4967	44
4	3862		4	9813		4	5611	43
5	4513	50	5	8270460		5	6254	42
6	5163	51	6	1107	46	6	6896	43
7	5814	50	7	1753	47	7	7539	
8	6464		8	2400	46	8	8182	42
9	7114	51	9	3046	47	9	8824	43
6680	7765	50	6720	3693	46	6760	9467	42

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
6761	8300109	643	6801	8325728	638	6841	8351196	635
2	0752	42	2	6366	39	2	1831	34
3	1394		3	7005	38	3	2465	35
4	2036		4	7643		4	3100	
5	2678		5	8281		5	3735	34
6	3320		6	8919	39	6	4369	
7	3962		7	9558	37	7	5003	35
8	4604	41	8	8330195	38	8	5638	34
9	5245	42	9	0833		9	6272	
6770	5887	41	6810	1471		6850	6906	
1	6528		1	2109	37	1	7540	
2	7169	42	2	2746	38	2	8174	33
3	7811	41	3	3384	37	3	8807	34
4	8452		4	4021	38	4	9441	
5	9093		5	4659	37	5	8360075	33
6	9734		6	5296		6	0708	
7	8310375		7	5933		7	1341	34
8	1016	40	8	6570		8	1975	33
9	1656	41	9	7207		9	2608	
6780	2297	40	6820	7844	36	6860	3241	
1	2937	41	1	8480	37	1	3874	
2	3578	40	2	9117		2	4507	
3	4218		3	9754	36	3	5140	
4	4858	41	4	8340390	37	4	5773	32
5	5499	40	5	1027	36	5	6405	33
6	6139	39	6	1663		6	7038	32
7	6778	40	7	2299		7	7670	33
8	7418		8	2935		8	8303	32
9	8058		9	3571		9	8935	
6790	8698	39	6830	4207		6870	9567	
1	9337	40	1	4843		1	8370199	33
2	9977	39	2	5479	35	2	0832	31
3	8320616		3	6114	36	3	1463	32
4	1255	40	4	6750	35	4	2095	
5	1895	39	5	7385	36	5	2727	
6	2534		6	8021	35	6	3359	31
7	3173		7	8656		7	3990	32
8	3812	38	8	9291		8	4622	31
9	4450	39	9	9926		9	5253	
6800	5089		6840	8350561		6880	5884	32

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
6881	8376516	631	6921	8401688	628	6961	8426716	624
2	7147		2	2316	27	2	7340	
3	7778		3	2943	28	3	7964	
4	8409	30	4	3571	27	4	8588	23
5	9039	31	5	4198		5	9211	24
6	9670		6	4825		6	9835	23
7	8380301	30	7	5452		7	8430458	
8	0931	31	8	6079		8	1081	24
9	1562	30	9	6706	26	9	1705	23
6890	2192		6930	7332	27	6970	2328	
1	2822	31	1	7959		1	2951	
2	3453	30	2	8586	26	2	3574	
3	4083		3	9212		3	4197	22
4	4713		4	9838	27	4	4819	23
5	5343		5	8410465	26	5	5442	
6	5973	29	6	1091		6	6065	22
7	6602	30	7	1717		7	6687	23
8	7232	29	8	2343		8	7310	22
9	7861	30	9	2969		9	7932	
6900	8491	29	6940	3595	25	6980	8554	
1	9120	30	1	4220	26	1	9176	
2	9750	29	2	4846		2	9798	
3	8390379		3	5472	25	3	8440420	
4	1008		4	6097	26	4	1042	
5	1637		5	6723	25	5	1664	
6	2266		6	7348		6	2286	21
7	2895	28	7	7973		7	2907	22
8	3523	29	8	8598		8	3529	21
9	4152	28	9	9223		9	4150	22
6910	4780	29	6950	9848		6990	4772	21
1	5409	28	1	8420473		1	5393	
2	6037	29	2	1098	24	2	6014	
3	6666	28	3	1722	25	3	6635	
4	7294		4	2347	24	4	7256	
5	7922		5	2971	25	5	7877	
6	8550		6	3596	24	6	8498	
7	9178		7	4220		7	9119	20
8	9806	27	8	4844		8	9739	21
9	8400433	28	9	5468		9	8450360	20
6920	1061	27	6960	6092		7000	0980	21

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
7001	8451601	620	7041	8476343	617	7081	8500946	613
2	2221		2	6960		2	1559	
3	2841		3	7577	16	3	2172	14
4	3461		4	8193	17	4	2786	13
5	4081		5	8810	16	5	3399	12
6	4701		6	9426	17	6	4011	13
7	5321		7	8480043	16	7	4624	
8	5941		8	0659		8	5237	
9	6561	19	9	1275		9	5850	12
7010	7180	20	7050	1891		7090	6462	13
1	7800	19	1	2507		1	7075	12
2	8419		2	3123		2	7687	13
3	9038	20	3	3739		3	8300	12
4	9658	19	4	4355	15	4	8912	
5	8460277		5	4970	16	5	9524	
6	0896		6	5586	15	6	8510136	
7	1515		7	6201	16	7	0748	
8	2134	18	8	6817	15	8	1360	
9	2752	19	9	7432		9	1972	11
7020	3371		7060	8047		7100	2583	12
1	3990	18	1	8662		1	3195	
2	4608	19	2	9277		2	3807	11
3	5227	18	3	9892		3	4418	12
4	5845		4	8490507		4	5030	11
5	6463		5	1122	14	5	5641	
6	7081	19	6	1736	15	6	6252	
7	7700	18	7	2351	14	7	6863	
8	8318	17	8	2965	15	8	7474	
9	8935	18	9	3580	14	9	8085	
7030	9553		7070	4194		7110	8696	
1	8470171		1	4808	15	1	9307	10
2	0789	17	2	5423	14	2	9917	11
3	1406	18	3	6037		3	8520528	
4	2024	17	4	6651	13	4	1139	10
5	2641		5	7264	14	5	1749	
6	3258	18	6	7878		6	2359	11
7	3876	17	7	8492		7	2970	10
8	4493		8	9106	13	8	3580	
9	5110		9	9719	14	9	4190	
7040	5727	16	7080	8500333	13	7120	4800	

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
7121	8525410	610	7161	8549737	606	7201	8573928	603
2	6020	09	2	8550343	07	2	4531	
3	6629	10	3	0950	06	3	5134	
4	7239		4	1556		4	5737	
5	7849	09	5	2162		5	6340	
6	8458	10	6	2768		6	6943	02
7	9068	09	7	3374		7	7545	03
8	9677		8	3980		8	8148	02
9	8530286		9	4586		9	8750	03
7130	0895		7170	5192	05	7210	9353	02
1	1504		1	5797	06	1	9955	
2	2113		2	6403	05	2	8580557	
3	2722		3	7008	06	3	1159	
4	3331		4	7614	05	4	1761	
5	3940	08	5	8219		5	2363	
6	4548	09	6	8824		6	2965	
7	5157	08	7	9429	06	7	3567	
8	5765	09	8	8560035	05	8	4169	01
9	6374	08	9	0640	04	9	4770	02
7140	6982		7180	1244	05	7220	5372	01
1	7590		1	1849		1	5973	02
2	8198	09	2	2454		2	6575	01
3	8807	07	3	3059	04	3	7176	
4	9414	08	4	3663	05	4	7777	02
5	8540022		5	4268	04	5	8379	01
6	0630		6	4872		6	8980	
7	1238	07	7	5476	05	7	9581	00
8	1845	08	8	6081	04	8	8590181	01
9	2453	07	9	6685		9	0782	
7150	3060	08	7190	7289		7230	1383	
1	3668	07	1	7893		1	1984	00
2	4275		2	8497		2	2584	01
3	4882		3	9101	03	3	3185	00
4	5489		4	9704	04	4	3785	
5	6096		5	8570308		5	4385	01
6	6703		6	0912	03	6	4986	00
7	7310		7	1515		7	5586	
8	7917		8	2118	04	8	6186	
9	8524	06	9	2722	03	9	6786	
7160	9130	07	7200	3325		7240	7386	599

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
7241	8597985	600	7281	8621910	597	7321	8645704	593
2	8585		2	2507	96	2	6297	
3	9185	599	3	3103		3	6890	
4	9784	600	4	3699	97	4	7483	
5	8600384	599	5	4296	96	5	8076	
6	0983	600	6	4892		6	8669	
7	1583	599	7	5488		7	9262	
8	2182		8	6084		8	9855	92
9	2781		9	6680	95	9	8650447	93
7250	3380		7290	7275	96	7330	1040	92
1	3979		1	7871		1	1632	93
2	4578		2	8467	95	2	2225	92
3	5177		3	9062	96	3	2817	
4	5776	98	4	9658	95	4	3409	
5	6374	99	5	8630253		5	4001	
6	6973	98	6	0848		6	4593	
7	7571	99	7	1443	96	7	5185	
8	8170	98	8	2039	95	8	5777	
9	8768		9	2634		9	6369	
7260	9366		7300	3229	94	7340	6961	91
1	9964		1	3823	95	1	7552	92
2	8610562		2	4418		2	8144	91
3	1160		3	5013		3	8735	92
4	1758		4	5608	94	4	9327	91
5	2356		5	6202	95	5	9918	
6	2954		6	6797	94	6	8660509	
7	3552	97	7	7391		7	1100	
8	4149	98	8	7985	95	8	1691	
9	4747	97	9	8580	94	9	2282	
7270	5344		7310	9174		7350	2873	
1	5941	98	1	9768		1	3464	
2	6539	97	2	8640362		2	4055	
3	7136		3	0956		3	4646	90
4	7733		4	1550	93	4	5236	91
5	8330		5	2143	94	5	5827	90
6	8927		6	2737		6	6417	91
7	9524		7	3331	93	7	7008	90
8	8620121	96	8	3924		8	7598	
9	0717	97	9	4517	94	9	8188	
7280	1314	96	7320	5111	93	7360	8778	

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
7361	8669368	590	7401	8692904	587	7441	8716313	584
2	9958		2	3491	86	2	6897	83
3	8670548		3	4077	87	3	7480	84
4	1138		4	4664		4	8064	83
5	1728	89	5	5251	86	5	8647	
6	2317	90	6	5837		6	9230	84
7	2907	89	7	6423	87	7	9814	83
8	3496	90	8	7010	86	8	8720397	
9	4086	89	9	7596		9	0980	
7370	4675		7410	8182		7450	1563	
1	5264		1	8768		1	2146	82
2	5853		2	9354		2	2728	83
3	6442		3	9940		3	3311	
4	7031		4	8700526		4	3894	82
5	7620		5	1112	85	5	4476	83
6	8209		6	1697	86	6	5059	82
7	8798		7	2283	85	7	5641	83
8	9387	88	8	2868	86	8	6224	82
9	9975	89	9	3454	85	9	6806	
7380	8680564	88	7420	4039		7460	7388	
1	1152		1	4624	86	1	7970	
2	1740	89	2	5210	85	2	8552	
3	2329	88	3	5795		3	9134	
4	2917		4	6380		4	9716	
5	3505		5	6965	84	5	8730298	
6	4093		6	7549	85	6	0880	
7	4681		7	8134		7	1462	81
8	5269		8	8719		8	2043	82
9	5857	87	9	9304	84	9	2625	81
7390	6444	88	7430	9888	85	7470	3206	
1	7032		1	8710473	84	1	3787	82
2	7620	87	2	1057		2	4369	81
3	8207		3	1641	85	3	4950	
4	8794	88	4	2226	84	4	5531	
5	9382	87	5	2810		5	6112	
6	9969		6	3394		6	6693	
7	8690556		7	3978		7	7274	
8	1143		8	4562		8	7855	80
9	1730		9	5146	83	9	8435	81
7400	2317		7440	5729	84	7480	9016	

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
7481	8739597	580	7521	8762756	577	7561	8785792	575
2	8740177		2	3333	78	2	6367	74
3	0757	81	3	3911	77	3	6941	
4	1338	80	4	4488		4	7515	
5	1918		5	5065		5	8089	
6	2498		6	5642		6	8663	
7	3078		7	6219		7	9237	
8	3658		8	6796		8	9811	
9	4238		9	7373		9	8790385	
7490	4818		7530	7950	76	7570	0959	73
1	5398		1	8526	77	1	1532	74
2	5978	79	2	9103		2	2106	
3	6557	80	3	9680	76	3	2680	73
4	7137	79	4	8770256	77	4	3253	
5	7716	80	5	0833	76	5	3826	74
6	8296	79	6	1409		6	4400	73
7	8875		7	1985		7	4973	
8	9454	80	8	2561		8	5546	
9	8750034	79	9	3137		9	6119	
7500	0613		7540	3713		7580	6692	
1	1192		1	4289		1	7265	
2	1771	78	2	4865		2	7838	
3	2349	79	3	5441		3	8411	72
4	2928		4	6017	75	4	8983	73
5	3507		5	6592	76	5	9556	72
6	4086	78	6	7168	75	6	8800128	73
7	4664	79	7	7743	76	7	0701	72
8	5243	78	8	8319	75	8	1273	73
9	5821		9	8894	76	9	1846	72
7510	6399	79	7550	9470	75	7590	2418	
1	6978	78	1	8780045		1	2990	
2	7556		2	0620		2	3562	
3	8134		3	1195		3	4134	
4	8712		4	1770		4	4706	
5	9290		5	2345	74	5	5278	
6	9868		6	2919	75	6	5850	71
7	8760446	77	7	3494		7	6421	72
8	1023	78	8	4069	74	8	6993	71
9	1601	77	9	4643	75	9	7564	72
7520	2178	78	7560	5218	74	7600	8136	71

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
7601	8808707	572	7641	8831502	568	7681	8854178	565
2	9279	71	2	2070	69	2	4743	
3	9850		3	2639	68	3	5308	66
4	8810421		4	3207		4	5874	65
5	0992		5	3775		5	6439	
6	1563		6	4343		6	7004	
7	2134		7	4911		7	7569	
8	2705		8	5479		8	8134	
9	3276		9	6047	67	9	8699	64
7610	3847	70	7650	6614	68	7690	9263	65
1	4417	71	1	7182		1	9828	
2	4988	70	2	7750	67	2	8860393	64
3	5558	71	3	8317	68	3	0957	65
4	6129	70	4	8885	67	4	1522	64
5	6699		5	9452		5	2086	65
6	7269	71	6	8840019		6	2651	64
7	7840	70	7	0586	68	7	3215	
8	8410		8	1154	67	8	3779	
9	8980		9	1721		9	4343	
7620	9550		7660	2288		7700	4907	
1	8820120	69	1	2855	66	1	5471	
2	0689	70	2	3421	67	2	6035	
3	1259		3	3988		3	6599	
4	1829	69	4	4555		4	7163	63
5	2398	70	5	5122	66	5	7726	64
6	2968	69	6	5688	67	6	8290	
7	3537	70	7	6255	66	7	8854	63
8	4107	69	8	6821		8	9417	
9	4676		9	7387	67	9	9980	64
7630	5245	70	7670	7954	66	7710	8870544	63
1	5815	69	1	8520		1	1107	
2	6384		2	9086		2	1670	
3	6953		3	9652		3	2233	
4	7522	68	4	8850218		4	2796	
5	8090	69	5	0784		5	3359	
6	8659		6	1350	65	6	3922	
7	9228		7	1915	66	7	4485	
8	9797	68	8	2481		8	5048	62
9	8830365	69	9	3047	65	9	5610	63
7640	0934	68	7680	3612	66	7720	6173	

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
7721	8876736	562	7761	8899177	559	7801	8921503	556
2	7298		2	9736	60	2	2059	57
3	7860	63	3	8900296	59	3	2616	
4	8423	62	4	0855	60	4	3173	56
5	8985		5	1415	59	5	3729	
6	9547		6	1974		6	4285	57
7	8880109		7	2533		7	4842	56
8	0671		8	3092		8	5398	
9	1233		9	3651		9	5954	
7730	1795		7770	4210		7810	6510	
1	2357	61	1	4769		1	7066	
2	2918	62	2	5328		2	7622	
3	3480		3	5887	58	3	8178	
4	4042	61	4	6445	59	4	8734	
5	4603	62	5	7004		5	9290	
6	5165	61	6	7563	58	6	9846	55
7	5726		7	8121		7	8930401	56
8	6287		8	8679	59	8	0957	55
9	6848	62	9	9238	58	9	1512	56
7740	7410	61	7780	9796		7820	2068	55
1	7971		1	8910354		1	2623	
2	8532		2	0912		2	3178	
3	9093	60	3	1470		3	3733	
4	9653	61	4	2028		4	4288	
5	8890214		5	2586		5	4843	
6	0775		6	3144		6	5398	
7	1336	60	7	3702	57	7	5953	
8	1896	61	8	4259	58	8	6508	
9	2457	60	9	4817		9	7063	
7750	3017		7790	5375	57	7830	7618	54
1	3577	61	1	5932		1	8172	55
2	4138	60	2	6489	58	2	8727	54
3	4698		3	7047	57	3	9281	55
4	5258		4	7604		4	9836	54
5	5818		5	8161		5	8940390	
6	6378		6	8718		6	0944	
7	6938		7	9275		7	1498	55
8	7498		8	9832		8	2053	54
9	8058	59	9	8920389		9	2607	
7760	8617	60	7800	0946		7840	3161	

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
7841	8943715	553	7881	8965813	551	7921	8987800	548
2	4268	54	2	6364		2	8348	49
3	4822		3	6915		3	8897	48
4	5376	53	4	7466		4	9445	
5	5929	54	5	8017		5	9993	
6	6483		6	8568	50	6	8990541	
7	7037	53	7	9118	51	7	1089	47
8	7590		8	9669		8	1636	48
9	8143	54	9	8970220	50	9	2184	
7850	8697	53	7890	0770		7930	2732	47
1	9250		1	1320	51	1	3279	48
2	9803		2	1871	50	2	3827	
3	8950356		3	2421		3	4375	47
4	0909		4	2971		4	4922	
5	1462		5	3521		5	5469	48
6	2015		6	4071		6	6017	47
7	2568	52	7	4621		7	6564	
8	3120	53	8	5171		8	7111	
9	3673	52	9	5721		9	7658	
7860	4225	53	7900	6271		7940	8295	
1	4778	52	1	6821	49	1	8752	
2	5330	53	2	7370	50	2	9299	
3	5883	52	3	7920	49	3	9846	46
4	6435		4	8469	50	4	9000392	47
5	6987		5	9019	49	5	0939	
6	7539	53	6	9568		6	1486	46
7	8092	52	7	8980117	50	7	2032	47
8	8644	51	8	0667	49	8	2579	46
9	9195	52	9	1216		9	3125	
7870	9747		7910	1765		7950	3671	47
1	8960299		1	2314		1	4218	46
2	0851		2	2863		2	4764	
3	1403	51	3	3412	48	3	5310	
4	1954	52	4	3960	49	4	5856	
5	2506	51	5	4509		5	6402	
6	3057		6	5058	48	6	6948	
7	3608	52	7	5606	49	7	7494	45
8	4160	51	8	6155	48	8	8039	46
9	4711		9	6703	49	9	8585	
7880	5262		7920	7252	48	7960	9131	45

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
7961	9009676	546	8001	9031443	542	8041	9053101	540
2	9010222	45	2	1985	43	2	3641	
3	0767	46	3	2528		3	4181	
4	1313	45	4	3071	42	4	4721	39
5	1858		5	3613	43	5	5260	40
6	2403		6	4156	42	6	5800	
7	2948		7	4698	43	7	6340	
8	3493		8	5241	42	8	6880	39
9	4038		9	5783		9	7419	40
7970	4583		8010	6325		8050	7959	39
1	5128		1	6867		1	8498	40
2	5673		2	7409		2	9038	39
3	6218	44	3	7951		3	9577	
4	6762	45	4	8493		4	9060116	
5	7307	44	5	9035		5	0655	40
6	7851	45	6	9577		6	1195	39
7	8396	44	7	9040119		7	1734	
8	8940	45	8	0661	41	8	2273	
9	9485	44	9	1202	42	9	2812	38
7980	9020029		8020	1744	41	8060	3350	39
1	0573		1	2285	42	1	3889	
2	1117		2	2827	41	2	4428	
3	1661		3	3368		3	4967	38
4	2205		4	3909		4	5505	39
5	2749		5	4450	42	5	6044	38
6	3293		6	4992	41	6	6582	39
7	3837		7	5533		7	7121	38
8	4381	43	8	6074		8	7659	
9	4924	44	9	6615	40	9	8197	
7990	5468	43	8030	7155	41	8070	8735	
1	6011	44	1	7696		1	9273	39
2	6555	43	2	8237		2	9812	38
3	7098		3	8778	40	3	9070350	37
4	7641	44	4	9318	41	4	0887	38
5	8185	43	5	9859	40	5	1425	
6	8728		6	9050399	41	6	1963	
7	9271		7	0940	40	7	2501	37
8	9814		8	1480		8	3038	38
9	9030357		9	2020		9	3576	
8000	0900		8040	2560	41	8080	4114	37

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
8081	9074651	537	8121	9096095	535	8161	9117434	532
2	5188	38	2	6630		2	7966	
3	5726	37	3	7165	34	3	8498	
4	6263		4	7699	35	4	9030	
5	6800		5	8234	34	5	9562	
6	7337		6	8768	35	6	9120094	
7	7874		7	9303	34	7	0626	31
8	8411		8	9837		8	1157	32
9	8948		9	9100371		9	1689	
8090	9485		8130	0905	35	8170	2221	31
1	9080022		1	1440	34	1	2752	32
2	0559	36	2	1974		2	3284	31
3	1095	37	3	2508		3	3815	
4	1632		4	3042		4	4346	32
5	2169	36	5	3576	33	5	4878	31
6	2705		6	4109	34	6	5409	
7	3241	37	7	4643		7	5940	
8	3778	36	8	5177	33	8	6471	
9	4314		9	5710	34	9	7002	
8100	4850		8140	6244		8180	7533	
1	5386		1	6778	33	1	8064	
2	5922		2	7311		2	8595	
3	6458		3	7844	34	3	9126	30
4	6994		4	8378	33	4	9656	31
5	7530		5	8911		5	9130187	30
6	8066		6	9444		6	0717	31
7	8602	35	7	9977		7	1248	30
8	9137	36	8	9110510		8	1778	31
9	9673		9	1043		9	2309	30
8110	9090209	35	8150	1576		8190	2839	
1	0744		1	2109		1	3369	
2	1279	36	2	2642	32	2	3899	31
3	1815	35	3	3174	33	3	4430	30
4	2350		4	3707		4	4960	
5	2885		5	4240	32	5	5490	29
6	3420		6	4772	33	6	6019	30
7	3955		7	5305	32	7	6549	
8	4490		8	5837		8	7079	
9	5025		9	6369	33	9	7609	
8120	5560		8160	6902	32	8200	8139	29

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
8201	9138668	530	8241	9159799	527	8281	9180828	524
2	9198	29	2	9160326		2	1352	25
3	9727	30	3	0853		3	1877	24
4	9140257	29	4	1380		4	2401	
5	0786		5	1907	26	5	2925	
6	1315		6	2433	27	6	3449	
7	1844		7	2960		7	3973	
8	2373	30	8	3487	26	8	4497	
9	2903	29	9	4013		9	5021	
8210	3432		8250	4539	27	8290	5545	
1	3961	28	1	5066	26	1	6069	
2	4489	29	2	5592		2	6593	
3	5018		3	6118	27	3	7117	23
4	5547		4	6645	26	4	7640	24
5	6076	28	5	7171		5	8164	23
6	6604	29	6	7697		6	8687	24
7	7133	28	7	8223		7	9211	23
8	7661	29	8	8749		8	9734	24
9	8190	28	9	9275	25	9	9190258	23
8220	8718		8260	9800	26	8300	0781	
1	9246	29	1	9170326		1	1304	
2	9775	28	2	0852		2	1827	
3	9150303		3	1378	25	3	2350	
4	0831		4	1903	26	4	2873	
5	1359		5	2429	25	5	3396	
6	1887		6	2954		6	3919	
7	2415		7	3479	26	7	4442	
8	2943		8	4005	25	8	4965	
9	3471	27	9	4530		9	5488	22
8230	3998	28	8270	5055		8310	6010	23
1	4526		1	5580		1	6533	22
2	5054	27	2	6105		2	7055	23
3	5581	28	3	6630		3	7578	22
4	6109	27	4	7155		4	8100	23
5	6636		5	7680		5	8623	22
6	7163	28	6	8205		6	9145	
7	7691	27	7	8730	24	7	9667	
8	8218		8	9254	25	8	9200189	
9	8745		9	9779	24	9	0711	
8240	9272		8280	9180303	25	8320	1233	

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
8321	9201755	522	8361	9222582	520	8401	9243310	517
2	2277		2	3102	19	2	3827	
3	2799		3	3621		3	4344	16
4	3321	21	4	4140		4	4860	17
5	3842	22	5	4659	20	5	5377	
6	4364		6	5179	19	6	5894	16
7	4886	21	7	5698		7	6410	17
8	5407	22	8	6217		8	6927	
9	5929	21	9	6736		9	7444	16
8330	6450		8370	7255	18	8410	7960	
1	6971	22	1	7773	19	1	8476	17
2	7493	21	2	8292		2	8993	16
3	8014		3	8811		3	9509	
4	8535		4	9330	18	4	9250025	
5	9056		5	9848	19	5	0541	
6	9577		6	9230367	18	6	1057	
7	9210098		7	0885	19	7	1573	
8	0619		8	1404	18	8	2089	
9	1140		9	1922		9	2605	
8340	1661	20	8380	2440		8420	3121	
1	2181	21	1	2958	19	1	3637	15
2	2702	20	2	3477	18	2	4152	16
3	3222	21	3	3995		3	4668	
4	3743	20	4	4513		4	5184	15
5	4263	21	5	5031		5	5699	16
6	4784	20	6	5549	17	6	6215	15
7	5304		7	6066	18	7	6730	
8	5824	21	8	6584		8	7245	16
9	6345	20	9	7102		9	7761	15
8350	6865		8390	7620	17	8430	8276	
1	7385		1	8137	18	1	8791	
2	7905		2	8655	17	2	9306	
3	8425		3	9172	18	3	9821	
4	8945		4	9690	17	4	9260336	
5	9465	19	5	9240207		5	0851	
6	9984	20	6	0724	18	6	1366	14
7	9220504		7	1242	17	7	1880	15
8	1024	19	8	1759		8	2395	
9	1543	20	9	2276		9	2910	14
8360	2063	19	8400	2793		8440	3424	15

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
8441	9263939	514	8481	9284471	512	8521	9304906	509
2	4453	15	2	4983		2	5415	10
3	4968	14	3	5495		3	5925	09
4	5482	15	4	6007	11	4	6434	10
5	5997	14	5	6518	12	5	6944	09
6	6511		6	7030		6	7453	10
7	7025		7	7542		7	7963	09
8	7539		8	8054	11	8	8472	
9	8053		9	8565	12	9	8981	
8450	8567		8490	9077	11	8530	9490	
1	9081		1	9588	12	1	9999	
2	9595		2	9290100	11	2	9310508	
3	9270109	13	3	0611	12	3	1017	
4	0622	14	4	1123	11	4	1526	
5	1136		5	1634		5	2035	
6	1650	13	6	2145		6	2544	
7	2163	14	7	2656		7	3053	
8	2677	13	8	3167		8	3562	08
9	3190	14	9	3678		9	4070	09
8460	3704	13	8500	4189		8540	4579	08
1	4217		1	4700		1	5087	09
2	4730		2	5211		2	5596	08
3	5243	14	3	5722		3	6104	
4	5757	13	4	6233	10	4	6612	09
5	6270		5	6743	11	5	7121	08
6	6783		6	7254	10	6	7629	
7	7296	12	7	7764	11	7	8137	
8	7808	13	8	8275	10	8	8645	
9	8321		9	8785	11	9	9153	
8470	8834		8510	9296	10	8550	9661	
1	9347	12	1	9806		1	9320169	
2	9859	13	2	9300316		2	0677	
3	9280372		3	0826		3	1185	07
4	0885	12	4	1336	11	4	1692	08
5	1397		5	1847	10	5	2200	
6	1909	13	6	2357	09	6	2708	07
7	2422	12	7	2866	10	7	3215	08
8	2934		8	3376		8	3723	07
9	3446	13	9	3886		9	4230	08
8480	3959	12	8520	4396		8560	4738	07

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
8561	9325245	507	8601	9345489	505	8641	9365640	503
2	5752		2	5994		2	6143	02
3	6259	08	3	6499		3	6645	03
4	6767	07	4	7004		4	7148	02
5	7274		5	7509	04	5	7650	
6	7781		6	8013	05	6	8152	03
7	8288		7	8518		7	8655	02
8	8795	06	8	9023	04	8	9157	
9	9301	07	9	9527	05	9	9659	
8570	9808		8610	9350032	04	8650	9370161	
1	9330315		1	0536		1	0663	
2	0822	06	2	1040		2	1165	
3	1328	07	3	1544	05	3	1667	
4	1835	06	4	2049	04	4	2169	
5	2341	07	5	2553		5	2671	01
6	2848	06	6	3057		6	3172	02
7	3354		7	3561		7	3674	
8	3860	07	8	4065		8	4176	01
9	4367	06	9	4569		9	4677	02
8580	4873		8620	5073	03	8660	5179	01
1	5379		1	5576	04	1	5680	02
2	5885		2	6080		2	6182	01
3	6391		3	6584	03	3	6683	
4	6897		4	7087	04	4	7184	02
5	7403		5	7591		5	7686	01
6	7909		6	8095	03	6	8187	
7	8415	05	7	8598		7	8688	
8	8920	06	8	9101	04	8	9189	
9	9426		9	9605	03	9	9690	
8590	9932	05	8630	9360108		8670	9380191	
1	9340437	06	1	0611		1	0692	
2	0943	05	2	1114		2	1193	00
3	1448		3	1617		3	1693	01
4	1953	06	4	2120		4	2194	
5	2459	05	5	2623		5	2695	00
6	2964		6	3126		6	3195	01
7	3469		7	3629		7	3696	00
8	3974		8	4132		8	4196	01
9	4479	06	9	4635	02	9	4697	00
8600	4985	04	8640	5137	03	8680	5197	01

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
8681	9385698	500	8721	9405663	498	8761	9425537	495
2	6198		2	6161		2	6032	96
3	6698		3	6659		3	6528	
4	7198		4	7157	97	4	7024	95
5	7698		5	7654	98	5	7519	96
6	8198		6	8152		6	8015	95
7	8698		7	8650	97	7	8510	
8	9198		8	9147	98	8	9005	96
9	9698		9	9645	97	9	9501	95
8690	9390198	499	8730	9410142	98	8770	9996	
1	0697	500	1	0640	97	1	9430491	
2	1197		2	1137	98	2	0986	
3	1697	499	3	1635	97	3	1481	
4	2196	500	4	2132		4	1976	
5	2696	499	5	2629		5	2471	
6	3195	500	6	3126		6	2966	
7	3695	499	7	3623		7	3461	
8	4194		8	4120		8	3956	94
9	4693	500	9	4617		9	4450	95
8700	5193	499	8740	5114		8780	4945	
1	5692		1	5611		1	5440	94
2	6191		2	6108		2	5934	95
3	6690		3	6605	96	3	6429	94
4	7189		4	7101	97	4	6923	95
5	7688		5	7598		5	7418	94
6	8187	98	6	8095	96	6	7912	
7	8685	99	7	8591	97	7	8406	
8	9184		8	9088	96	8	8900	95
9	9683		9	9584	97	9	9395	94
8710	9400182	98	8750	9420081	96	8790	9889	
1	0680	99	1	0577		1	9440383	
2	1179	98	2	1073		2	0877	
3	1677	99	3	1569		3	1371	
4	2176	98	4	2065	97	4	1865	93
5	2674		5	2562	96	5	2358	94
6	3172		6	3058	95	6	2852	
7	3670	99	7	3553	96	7	3346	
8	4169	98	8	4049		8	3840	93
9	4667		9	4545		9	4333	94
8720	5165		8760	5041		8800	4827	93

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
8801	9445320	494	8841	9465014	491	8881	9484619	489
2	5814	93	2	5505		2	5108	
3	6307		3	5996		3	5597	88
4	6800	94	4	6487		4	6085	89
5	7294	93	5	6978		5	6574	
6	7787		6	7469		6	7063	
7	8280		7	7960		7	7552	88
8	8773		8	8451		8	8040	89
9	9266		9	8942		9	8529	
8810	9759		8850	9433	90	8890	9018	88
1	9450252		1	9923	91	1	9506	89
2	0745		2	9470414		2	9995	88
3	1238	92	3	0905	90	3	9490483	
4	1730	93	4	1395	91	4	0971	89
5	2223		5	1886	90	5	1460	88
6	2716	92	6	2376		6	1948	
7	3208	93	7	2866	91	7	2436	
8	3701	92	8	3357	90	8	2924	
9	4193	93	9	3847		9	3412	
8820	4686	92	8860	4337		8900	3900	
1	5178	93	1	4827		1	4388	
2	5671	92	2	5317		2	4876	
3	6163		3	5807		3	5364	
4	6655		4	6297		4	5852	87
5	7147		5	6787		5	6339	88
6	7639		6	7277		6	6827	
7	8131		7	7767		7	7315	87
8	8623		8	8257		8	7802	88
9	9115		9	8747	89	9	8290	87
8830	9607		8870	9236	90	8910	8777	
1	9460099		1	9726	89	1	9264	88
2	0591	91	2	9480215	90	2	9752	87
3	1082	92	3	0705	89	3	9500239	
4	1574		4	1194	90	4	0726	
5	2066	91	5	1684	89	5	1213	88
6	2557	92	6	2173		6	1701	87
7	3049	91	7	2662		7	2188	
8	3540		8	3151	90	8	2675	
9	4031	92	9	3641	89	9	3162	
8840	4523	91	8880	4130		8920	3649	86

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
8921	9504135	487	8961	9523565	484	9001	9542908	482
2	4622		2	4049	85	2	3390	83
3	5109		3	4534	84	3	3873	82
4	5596	86	4	5018	85	4	4355	
5	6082	87	5	5503	84	5	4837	
6	6569	86	6	5987	85	6	5319	83
7	7055	87	7	6472	84	7	5802	82
8	7542	86	8	6956		8	6284	
9	8028	87	9	7440		9	6766	
8930	8515	86	8970	7924	85	9010	7248	
1	9001		1	8409	84	1	7730	
2	9487		2	8893		2	8212	
3	9973		3	9377		3	8694	
4	9510459	87	4	9861		4	9176	81
5	0946	86	5	9530345	83	5	9657	82
6	1432		6	0828	84	6	9550139	
7	1918		7	1312		7	0621	81
8	2404	85	8	1796		8	1102	82
9	2889	86	9	2280	83	9	1584	81
8940	3375		8980	2763	84	9020	2065	82
1	3861		1	3247		1	2547	81
2	4347	85	2	3731	83	2	3028	82
3	4832	86	3	4214		3	3510	81
4	5318	85	4	4697	84	4	3991	
5	5803	86	5	5181	83	5	4472	
6	6289	85	6	5664		6	4953	
7	6774	86	7	6147	84	7	5434	82
8	7260	85	8	6631	83	8	5916	81
9	7745		9	7114		9	6397	
8950	8230	86	8990	7597		9030	6878	80
1	8716	85	1	8080		1	7358	81
2	9201		2	8563		2	7839	
3	9686		3	9046		3	8320	
4	9520171		4	9529		4	8801	
5	0656		5	9540012	82	5	9282	80
6	1141		6	0494	83	6	9762	81
7	1626		7	0977		7	9560243	80
8	2111	84	8	1460		8	0723	81
9	2595	85	9	1943	82	9	1204	80
8960	3080		9000	2425	83	9040	1684	81

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
9041	9562165	480	9081	9581337	478	9121	9600425	476
2	2645		2	1815		2	0901	
3	3125	81	3	2293		3	1377	
4	3606	80	4	2771		4	1853	
5	4086		5	3249		5	2329	
6	4566		6	3727		6	2805	
7	5046		7	4205		7	3281	75
8	5526		8	4683		8	3756	76
9	6006		9	5161		9	4232	
9050	6486		9090	5639		9130	4708	75
1	6966	79	1	6117	77	1	5183	76
2	7445	80	2	6594	78	2	5659	
3	7925		3	7072	77	3	6135	75
4	8405		4	7549	78	4	6610	76
5	8885	79	5	8027		5	7086	75
6	9364	80	6	8505	77	6	7561	
7	9844	79	7	8982		7	8036	76
8	9570323	80	8	9459	78	8	8512	75
9	0803	79	9	9937	77	9	8987	
9060	1282		9100	9590414		9140	9462	
1	1761	80	1	0891		1	9937	
2	2241	79	2	1368		2	9610412	
3	2720		3	1845		3	0887	
4	3199		4	2322	78	4	1362	
5	3678		5	2800	76	5	1837	
6	4157		6	3276	77	6	2312	
7	4636		7	3753		7	2787	
8	5115		8	4230		8	3262	74
9	5594		9	4707		9	3736	75
9070	6073		9110	5184	76	9150	4211	
1	6552	78	1	5660	77	1	4686	74
2	7030	79	2	6137		2	5160	75
3	7509		3	6614	76	3	5635	74
4	7988	78	4	7090	77	4	6109	
5	8466	79	5	7567	76	5	6583	75
6	8945	78	6	8043	77	6	7058	74
7	9423	79	7	8520	76	7	7532	
8	9902	78	8	8996		8	8006	75
9	9580380		9	9472		9	8481	74
9080	0858	79	9120	9948	77	9160	8955	

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
9161	9619429	474	9201	9638350	472	9241	9657190	470
2	9903		2	8822		2	7660	
3	9620377		3	9294		3	8130	69
4	0851		4	9766		4	8599	70
5	1325		5	9640238		5	9069	
6	1799	73	6	0710	71	6	9539	
7	2272	74	7	1181	72	7	9660009	69
8	2746		8	1653		8	0478	70
9	3220	73	9	2125	71	9	0948	69
9170	3693	74	9210	2596	72	9250	1417	70
1	4167	73	1	3068	71	1	1887	69
2	4640	74	2	3539	72	2	2356	70
3	5114	73	3	4011	71	3	2826	69
4	5587	74	4	4482		4	3295	
5	6061	73	5	4953	72	5	3764	
6	6534		6	5425	71	6	4233	70
7	7007	74	7	5896		7	4703	69
8	7481	73	8	6367		8	5172	
9	7954		9	6838		9	5641	
9180	8427		9220	7309		9260	6110	
1	8900		1	7780		1	6579	
2	9373		2	8251		2	7048	
3	9846		3	8722		3	7517	68
4	9630319		4	9193		4	7985	69
5	0792	72	5	9664		5	8454	
6	1264	73	6	9650135	70	6	8923	
7	1737		7	0605	71	7	9392	68
8	2210		8	1076	70	8	9860	69
9	2683	72	9	1546	71	9	9670329	68
9190	3155	73	9230	2017		9270	0797	69
1	3628	72	1	2488	70	1	1266	68
2	4100	73	2	2958		2	1734	69
3	4573	72	3	3428	71	3	2203	68
4	5045		4	3899	70	4	2671	
5	5517	73	5	4369		5	3139	
6	5990	72	6	4839		6	3607	69
7	6462		7	5309	71	7	4076	68
8	6934		8	5780	70	8	4544	
9	7406		9	6250		9	5012	
9200	7878		9240	6720		9280	5480	

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
9281	9675948	468	9321	9694625	466	9361	9713222	464
2	6416		2	5091		2	3686	
3	6884	67	3	5557		3	4150	
4	7351	68	4	6023	65	4	4614	
5	7819		5	6488	66	5	5078	
6	8287	67	6	6954		6	5542	63
7	8754	68	7	7420	65	7	6005	64
8	9222		8	7885	66	8	6469	63
9	9690	67	9	8351	65	9	6932	64
9290	9680157	68	9330	8816	66	9370	7396	63
1	0625	67	1	9282	65	1	7859	64
2	1092		2	9747	66	2	8323	63
3	1559	68	3	9700213	65	3	8786	
4	2027	67	4	0678		4	9249	64
5	2494		5	1143		5	9713	63
6	2961		6	1608	66	6	9720176	
7	3428		7	2074	65	7	0639	
8	3895		8	2539		8	1102	
9	4362		9	3004		9	1565	
9300	4829		9340	3469		9380	2028	
1	5296		1	3934		1	2491	
2	5763		2	4399	64	2	2954	
3	6230		3	4863	65	3	3417	
4	6697		4	5328		4	3880	
5	7164	66	5	5793		5	4343	62
6	7630	67	6	6258	64	6	4805	63
7	8097		7	6722	65	7	5268	
8	8564	66	8	7187		8	5731	62
9	9030	67	9	7652	64	9	6193	63
9310	9497	66	9350	8116	65	9390	6656	62
1	9963	67	1	8581	64	1	7118	63
2	9690430	66	2	9045		2	7581	62
3	0896		3	9509	65	3	8043	63
4	1362	67	4	9974	64	4	8506	62
5	1829	66	5	9710438		5	8968	
6	2295		6	0902		6	9430	
7	2761		7	1366		7	9892	
8	3227		8	1830		8	9730354	
9	3693		9	2294		9	0816	63
9320	4159		9360	2758		9400	1279	62

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
9401	9731741	461	9441	9750180	460	9481	9768541	459
2	2202	62	2	0640		2	9000	58
3	2664		3	1100		3	9458	57
4	3126		4	1560		4	9915	58
5	3588		5	2020	59	5	9770373	
6	4050	61	6	2479	60	6	0831	
7	4511	62	7	2939		7	1289	
8	4973		8	3399	59	8	1747	57
9	5435	61	9	3858	60	9	2204	58
9410	5896	62	9450	4318		9490	2662	
1	6358	61	1	4778	59	1	3120	57
2	6819	62	2	5237	60	2	3577	58
3	7281	61	3	5697	59	3	4035	57
4	7742		4	6156		4	4492	58
5	8203		5	6615	60	5	4950	57
6	8664	62	6	7075	59	6	5407	
7	9126	61	7	7534		7	5864	58
8	9587		8	7993		8	6322	57
9	9740048		9	8452		9	6779	
9420	0509		9460	8911		9500	7236	
1	0970		1	9370		1	7693	
2	1431		2	9829		2	8150	
3	1892		3	9760288		3	8607	
4	2353		4	0747		4	9064	
5	2814	60	5	1206		5	9521	
6	3274	61	6	1665		6	9978	
7	3735		7	2124	58	7	9780435	
8	4196	60	8	2582	59	8	0892	56
9	4656	61	9	3041		9	1348	57
9430	5117	60	9470	3500	58	9510	1805	
1	5577	61	1	3958	59	1	2262	56
2	6038	60	2	4417	58	2	2718	57
3	6498	61	3	4875	59	3	3175	56
4	6959	60	4	5334	58	4	3631	57
5	7419		5	5792	59	5	4088	56
6	7879	61	6	6251	58	6	4544	57
7	8340	60	7	6709		7	5001	56
8	8800		8	7167		8	5457	
9	9260		9	7625		9	5913	
9440	9720		9480	8083		9520	6369	57

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
9521	9786826	456	9561	9805033	454	9601	9823165	452
2	7282		2	5487	55	2	3617	
3	7738		3	5942	54	3	4069	53
4	8194		4	6396		4	4522	52
5	8650		5	6850		5	4974	
6	9106		6	7304		6	5426	
7	9562	55	7	7758		7	5878	
8	9790017	56	8	8212		8	6330	
9	0473		9	8666	53	9	6782	
9530	0929		9570	9119	54	9610	7234	
1	1385	55	1	9573		1	7686	
2	1840	56	2	9810027		2	8138	51
3	2296	55	3	0481	53	3	8589	52
4	2751	56	4	0934	54	4	9041	
5	3207	55	5	1388	53	5	9493	
6	3662	56	6	1841	54	6	9945	51
7	4118	55	7	2295	53	7	9830396	52
8	4573		8	2748	54	8	0848	51
9	5028	56	9	3202	53	9	1299	52
9540	5484	55	9580	3655		9620	1751	51
1	5939		1	4108	54	1	2202	52
2	6394		2	4562	53	2	2654	51
3	6849		3	5015		3	3105	
4	7304		4	5468		4	3556	
5	7759		5	5921		5	4007	52
6	8214		6	6374		6	4459	51
7	8669		7	6827		7	4910	
8	9124		8	7280		8	5361	
9	9579		9	7733		9	5812	
9550	9800034	54	9590	8186		9630	6263	
1	0488	55	1	8639		1	6714	
2	0943		2	9092	52	2	7165	
3	1398	54	3	9544	53	3	7616	50
4	1852	55	4	9997		4	8066	51
5	2307	54	5	9820450	52	5	8517	
6	2761	55	6	0902	53	6	8968	
7	3216	54	7	1355	52	7	9419	50
8	3670	55	8	1807	53	8	9869	51
9	4125	54	9	2260	52	9	9840320	50
9560	4579		9600	2712	53	9640	0770	51

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
9641	9841221	450	9681	9859202	449	9721	9877109	447
2	1671	51	2	9651	48	2	7556	
3	2122	50	3	9860099	49	3	8003	
4	2572		4	0548	48	4	8450	46
5	3022	51	5	0996	49	5	8896	47
6	3473	50	6	1445	48	6	9343	46
7	3923		7	1893		7	9789	47
8	4373		8	2341	49	8	9880236	46
9	4823		9	2790	48	9	0682	
9650	5273		9690	3238		9730	1128	47
1	5723		1	3686		1	1575	46
2	6173		2	4134		2	2021	
3	6623		3	4582		3	2467	
4	7073		4	5030		4	2913	47
5	7523		5	5478		5	3360	46
6	7973	49	6	5926		6	3806	
7	8422	50	7	6374		7	4252	
8	8872		8	6822		8	4698	
9	9322	49	9	7270	47	9	5144	
9660	9771	50	9700	7717	48	9740	5590	45
1	9850221	49	1	8165		1	6035	46
2	0670	50	2	8613	47	2	6481	
3	1120	49	3	9060	48	3	6927	
4	1569	50	4	9508	47	4	7373	45
5	2019	49	5	9955	48	5	7818	46
6	2468		6	9870403	47	6	8264	
7	2917		7	0850	48	7	8710	45
8	3366	50	8	1298	47	8	9155	46
9	3816	49	9	1745		9	9601	45
9670	4265		9710	2192	48	9750	9890046	46
1	4714		1	2640	47	1	0492	45
2	5163		2	3087		2	0937	
3	5612		3	3534		3	1382	46
4	6061		4	3981		4	1828	45
5	6510		5	4428		5	2273	
6	6959	48	6	4875		6	2718	
7	7407	49	7	5322		7	3163	
8	7856		8	5769		8	3608	
9	8305		9	6216		9	4053	
9680	8754	48	9720	6663	46	9760	4498	

N.	M. Log.	D.	N.	M Log.	D.	N.	M. Log.	D.
9761	9894943	445	9801	9912704	443	9841	9930392	442
2	5388		2	3147		2	0834	41
3	5833		3	3590		3	1275	
4	6278	44	4	4033		4	1716	
5	6722	45	5	4476		5	2157	
6	7167		6	4919		6	2598	
7	7612		7	5362		7	3039	
8	8057	44	8	5805	42	8	3480	
9	8501	45	9	6247	43	9	3921	
9770	8946	44	9810	6690		9850	4362	
1	9390	45	1	7133	42	1	4803	
2	9835	44	2	7575	43	2	5244	
3	9900279		3	8018		3	5685	
4	0723	45	4	8461	42	4	6126	40
5	1168	44	5	8903		5	6566	41
6	1612		6	9345	43	6	7007	
7	2056		7	9788	42	7	7448	40
8	2500		8	9920230	43	8	7888	41
9	2944	45	9	0673	42	9	8329	40
9780	3389	44	9820	1115		9860	8769	41
1	3833		1	1557		1	9210	40
2	4277		2	1999		2	9650	
3	4721	43	3	2441	43	3	9940090	41
4	5164	44	4	2884	42	4	0531	40
5	5608		5	3326		5	0971	
6	6052		6	3768		6	1411	
7	6496		7	4210	41	7	1851	
8	6940	43	8	4651	42	8	2291	
9	7383	44	9	5093		9	2731	41
9790	7827		9830	5535		9870	3172	40
1	8271	43	1	5977		1	3612	39
2	8714	44	2	6419	41	2	4051	40
3	9158	43	3	6860	42	3	4491	
4	9601		4	7302		4	4931	
5	9910044	44	5	7744	41	5	5371	
6	0488	43	6	8185	42	6	5811	
7	0931		7	8627	41	7	6251	39
8	1374	44	8	9068	42	8	6690	40
9	1818	43	9	9510	41	9	7130	39
9800	2261		9840	9951		9880	7569	40

N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.	N.	M. Log.	D.
9881	9948009	439	9921	9965554	438	9961	9983029	436
2	8448	40	2	5992		2	3465	
3	8888	39	3	6430		3	3901	
4	9327	40	4	6868	37	4	4337	
5	9767	39	5	7305	38	5	4773	
6	9950206		6	7743	37	6	5209	
7	0645	40	7	8180	38	7	5645	35
8	1085	39	8	8618	37	8	6080	36
9	1524		9	9055		9	6516	
9890	1963		9930	9492	38	9970	6952	35
1	2402		1	9930	37	1	7387	36
2	2841		2	9970367		2	7823	35
3	3280		3	0804	38	3	8258	36
4	3719		4	1242	37	4	8694	35
5	4158		5	1679		5	9129	
6	4597		6	2116		6	9564	36
7	5036	38	7	2553		7	9990000	35
8	5474	39	8	2990		8	0435	
9	5913		9	3427		9	0870	
9900	6352		9940	3864		9980	1305	36
1	6791	38	1	4301		1	1741	35
2	7229	39	2	4738	36	2	2176	
3	7668	38	3	5174	37	3	2611	
4	8106	39	4	5611		4	3046	
5	8545	38	5	6048		5	3481	
6	8983	39	6	6485	36	6	3916	34
7	9422	38	7	6921	37	7	4350	35
8	9860		8	7358	36	8	4785	
9	9960298	39	9	7794	37	9	5220	
9910	0737	38	9950	8231	36	9990	5655	
1	1175		1	8667	37	1	6090	34
2	1613		2	9104	36	2	6524	35
3	2051		3	9540		3	6959	34
4	2489		4	9976	37	4	7393	35
5	2927		5	9980413	36	5	7828	34
6	3365		6	0849		6	8262	35
7	3803		7	1285		7	8697	34
8	4241		8	1721		8	9131	35
9	4679		9	2157		9	9566	34
9920	5117	37	9960	2593		10000	0000000	

ÍNDICE DEL CONTENIDO DE ESTE TOMO

Páginas.

COMPLEMENTO DE ARITMÉTICA

NOCIONES PRELIMINARES

LIBRO PRIMERO

NÚMEROS ENTEROS

CAPÍTULO PRIMERO

ADICIÓN

CAPÍTULO II

SUSTRACCIÓN

Páginas.

CAPÍTULO III

MULTIPLICACIÓN

CAPÍTULO IV

DIVISIÓN

CAPÍTULO V

PROPIEDADES MÁS IMPORTANTES

LIBRO II

NÚMEROS ENTEROS Y FRACCIONARIOS

CAPÍTULO PRIMERO

PRELIMINARES

CAPÍTULO II

OPERACIONES

CAPÍTULO III

OPERACIONES APROXIMADAS

CAPÍTULO IV

POTENCIACIÓN

Páginas.

LIBRO III

NÚMEROS ENTEROS, FRACCIONARIOS

É INCONMENSURABLES

CAPÍTULO PRIMERO

RADICACIÓN

CAPÍTULO II

RAÍCES CUADRADA Y CÚBICA

CAPÍTULO III

DETERMINACIÓN DE LOGARITMOS

APÉNDICE

FRACCIONES CONTINUAS

FIN DEL TOMO PRIMERO

Este libro

es pésimo y

[illegible]

Gracias pr la

advertencia

ANGULO

CALCULOS MERCANTILES

1