ELEMENS
DES
MATHEMATIQUES,
OU
PRINCIPES GENERAUX
DE
TOUTES LES SCIENCES,
QUI ONT LES GRANDEURS POUR OBJET.

CONTENANT VNE METHODE COVRTE ET FACILE pour comparer ces grandeurs & pour découvrir leurs rapports par le moyen des caracteres des nombres, & des lettres de l'alphabeth. Dans laquelle les choſes ſont démontrées ſelon l'ordre Geometrique, & l'Analyſe renduë beaucoup plus facile, & traittée plus à fond que l'on n'a fait juſqu'ici.

A PARIS,
Chez ANDRE' PRALARD, Marchand Libraire, ruë Saint Jacques, à l'Occaſion.

M DC. LXXV.
AVEC PRIVILEGE DV ROY.

AU TRES-REVEREND PERE
LE TRES-REVEREND PERE
LOUIS ABEL DE SAINTE-MARTHE,
SUPERIEUR GENERAL
DE LA CONGREGATION DE L'ORATOIRE
DE JESUS.

MON TRES-REVEREND PERE,

JE vous preſente dans ces Elemens les veritez les plus generales & les plus fecondes des Mathematiques, & les regles immuables des veritez particulieres qu'elles renferment. Il n'y a rien dans ce Livre qui flatte les ſens ou l'imagination.

Tout ce qu'il contient ne tend qu'à éclairer l'eſprit , & à luy donner aſſez de force & d'étenduë pour penetrer & pour comprendre ce qu'il y a de plus caché dans les Sciences. Ie ne prendrois pas la liberté de mettre cet Ouvrage ſous la protection d'un Nom auſſi illuſtre qu'eſt le voſtre, ſi la verité y eſtoit reveſtuë des vains ornemens dont on a coûtume de la couvrir. Ie ſçay que vous aimez la verité toute pure, & que ce ſeroit vous déplaire que de l'expoſer à vos yeux environnée de cet éclat ſenſible qui répand les tenebres dans l'eſprit. Vous avez ſi heureuſement combattu contre les impreſſions des ſens, que vous n'avez plus de gouſt pour ce qui eſt le plus capable de les contenter. Tout ce qui éblouït les petits eſprits vous paroiſt mépriſable ; Vous eſtes inſenſible à tout ce qui les charme : mais voſtre raiſon ferme & aſſurée s'éleve & s'attache ſans peine aux veritez les plus abſtraites & les plus relevées. I'eſpere donc, MON TRES-REVEREND PERE, que vous recevrez favorablement ces Elemens, où la verité n'a point d'autre parûre que ſa lumiere & ſon évidence, & que vous regarderez le preſent que j'ay l'honneur de vous en faire, comme une marque du profond reſpect avec lequel je ſuis,

MON TRES-REVEREND PERE,

Voſtre tres-humble , tres-obeïſſant,
& tres-obligé ſerviteur, J. P.

PREFACE.

COMME c'eſt une loy indiſpenſable qu'il faut mettre chaque choſe dans ſon rang , je ſuis obligé de dire que la ſcience dont je traite , eſt la premiere & la principale de toutes les ſciences purement humaines. Je ne la compare pas cependant à la Morale, ny à aucune de celles qui ont rapport à l'autre vie ; car je ſçay que tout ce qu'il y a de grand & d'éclatant s'éclypſe & s'aneantit à la veuë de l'éternité. Je ne pretens pas meſme la preferer à la ſcience de l'homme : car quoy que les Mathematiques ſoient beaucoup plus évidentes , & beaucoup plus utiles à la recherche des veritez cachées & difficiles à découvrir, cependant elles ne ſont pas d'un grand uſage pour la conduite de la vie, & pour s'inſtruire de certaines veritez de pratique dont on a beſoin dans le monde. Ces deux ſciences ſont fort differentes, la ſcience de l'homme apprend beaucoup plus à vivre qu'à bien penſer , celle-cy n'apprend qu'à penſer ſans apprendre à vivre. Mais ſommes-nous plûtoſt faits pour vivre , ou pour nous lier étroitement avec les hommes, que pour penſer, ou pour nous unir à la verité ? nous ceſſerons de vivre, & nous penſerons toûjours.

Si j'entreprenois de juſtifier que la ſcience dont je traite merite le rang que je luy donne, en la comparant avec toutes les ſciences particulieres, je ferois ſans doute un diſcours fort long & fort ennuieux, & certainement aſſez inutile. Comme il y a un grand nombre de ſciences , il faudroit faire un grand nombre de comparaiſons ; Et comme on ne peut faire de comparaiſons ſi on ne connoît les choſes que l'on compare , il ſeroit neceſſaire d'en donner au moins quelque idée : Mais outre que cela me meneroit trop loin , je ne prouverois que d'une maniere fort imparfaite les choſes que je prétens faire pleinement connoître en les expliquant dans leur principe.

Il eſt évident que toutes les veritez ne ſont que des rapports, les veritez connuës des rapports connus. Qui connoît que 6 eſt double, de 3, connoît une verité, parce qu'il connoît le rapport de 6 à 3. Qui connoît que le quarré de la diagonale d'un quarré eſt double de ce quarré, connoît une verité, parce qu'il connoît le rapport qui ſe trouve entre ces quarrez. Mais tous les rapports ou toutes les veritez connuës ne le ſont pas également. Il y en a que l'on connoît exactement comme ſont celles des exemples que je viens de dire, & il y en a d'autres que l'on ne connoît que d'une maniere fort imparfaite. On connoît par exemple que le Soleil eſt plus grand que la Lune, qu'un cercle eſt plus grand qu'un quarré, lors que leurs diametres ſont égaux, ce ſont des veritez certaines & évidentes, mais ce ne ſont pas des veritez exactement connuës. Car encore que l'on ſçache qu'il y a un rapport de plus grande inégalité entre le Soleil & la Lune, entre le cercle & le quarré, cependant on ne ſçait point exactement quel il eſt. On ſçait bien que le Soleil eſt plus grand, mais on ne ſçait pas de combien.

Les veritez pouvant eſtre connuës en deux manieres, l'une parfaite, & l'autre imparfaite; il y a deux ſortes de ſciences, puiſque toutes les ſciences ne ſont que connoiſſances d'un certain nombre de veritez. Il y a des ſciences parfaites, & il y en a d'imparfaites. Les parfaites ſont generalement toutes celles qui ont la grandeur pour objet, les imparfaites au contraire ſont toutes celles qui n'ont point la grandeur pour objet. Je ne parle pas icy de la grandeur telle que les yeux la conſiderent, ou que l'imagination toute ſeule ſe la repreſente; je ne parle que de celle que l'eſprit apperçoit, ou que l'imagination ſe repreſente lors qu'elle eſt conduite & reglée par l'eſprit.

La Metaphyſique, la Phyſique, la Morale, la Medecine, la Politique, la Chymie, & beaucoup d'autres, ſont en ce ſens des ſciences imparfaites. Car encore qu'elles renferment des veritez évidentes, elles ne contiennent point des veritez exactes. Il n'y a que les Mathematiques qui ſoient des ſciences parfaites, parce qu'il n'y a que ces ſciences qui comprennent des veritez exactes: Car on ne ſe contente pas dans les Mathematiques de connoître avec évidence que certaines choſes ont plus de grandeur que quelques-autres, on pretend auſſi connoître avec évidence les rapports exacts qui ſont entr'elles, & de combien elles ſont plus grandes.

Mais il faut bien prendre garde que par le mot de grandeur l'on n'entend pas ſeulement l'étenduë en longueur, largeur, & profondeur, mais generalement tout ce que l'on conçoit comme capable du plus & du moins, & ce qui ſe peut meſurer exactement, ſoit parce qu'il eſt exactement connu, ſoit parce qu'il eſt ſuppoſé tel. Ainſi le temps, la peſanteur, la viteſſe, les qualitez même ſenſibles, les degrez de perfections, & generalement toutes les choſes finies, étant capables du plus & du moins, ſont l'objet des Mathematiques. Car ſi l'on connoît exactement ces perfections & ces qualitez, on les peut comparer pour en connoître exactement les rapports; & ſi on ne les connoît pas exactement, on les peut comparer par ſuppoſition. Car ſi l'on ſçait qu'un morceau de fer eſt quatre fois plus peſant qu'un tel morceau de bois, en ſuppoſant que le bois eſt mille fois plus peſant que l'air; on peut conclure par cette ſuppoſition que le fer eſt quatre mille fois plus peſant que l'air.

Tous les rapports exactement connus ſe pouvant exprimer par nombres, il eſt évident que les nombres renferment toutes grandeurs d'une maniere intelligible; & qu'ainſi la ſcience, qui apprend à faire dans les nombres toutes les comparaiſons neceſſaires pour en connoître les rapports, eſt une ſcience generale ou le principe de toutes les ſciences exactes. Car il ne faut qu'appliquer à des eſpeces de grandeurs ce que l'on a découvert en general dans les nombres, pour ſçavoir preſque toutes les ſciences particulieres. Ainſi ces Elemens apprenant à faire toutes les comparaiſons neceſſaires pour connoître avec évidence les rapports exacts qui ſont entre les nombres, il eſt évident qu'ils ſont le principe & le fondement de toutes les ſciences exactes.

Mais quoy que l'Arithmetique ſoit une ſcience dont toutes les autres dépendent, cependant nous en expliquons une autre plus univerſelle, en nous ſervant des lettres de l'alphabeth. Cette ſcience qu'on appelle *Algebre* ſert à éclaircir, à étendre, & à perfectionner autant qu'on le peut faire l'Arithmetique, & generalement toutes les ſciences qui ſe rapportent aux Mathemariques. Elle eſt ſi generale qu'elle conſidere toutes les grandeurs, & que ce qu'elle démontre peut s'appliquer non ſeulement aux nombres, aux lignes & aux figures, aux poids & aux viteſſes, & à toutes les grandeurs; mais encore à tous les nombres, à toutes les lignes, à toutes les viteſſes, & à toutes les grandeurs particulieres que l'on peut concevoir dans chaque eſpece de grandeurs.

Mais ce qu'il y a de plus conſiderable dans cette ſcience n'eſt pas ſon étenduë & ſon univerſalité, s'il m'eſt permis de parler ainſi ; Car comme nous venons de dire l'Arithmetique eſt aſſez generale pour les ſciences. C'eſt la facilité qu'elle donne à l'eſprit pour découvrir les veritez les plus cachées, & dont il ſeroit abſolument impoſſible de s'éclaircir par l'Arithmetique & par la Geometrie ordinaire, ny par le ſecours d'aucune autre ſcience. Car comme on ne peut donner à l'eſprit plus d'étenduë, & plus de capacité qu'il n'en a, cette ſcience apprend ſeulement à la ménager ; Elle luy repreſente ſous des expreſſions tres-courtes un aſſemblage de pluſieurs idées, elle l'occupe ſi peu par les ſens qu'elle le laiſſe en quelque façon tout entier à luy-même, & elle l'aide à parcourir d'une maniere adroite, prompte, & facile tous les rapports des grandeurs qu'il examine. Ainſi il n'échape rien à l'eſprit qu'il n'ait apperçeu ſur ſon ſujet, & la netteté claire & diſtincte de ſes raiſonnemens luy découvre toûjours par la plus courte voye les veritez recherchées qu'il peut connoître, ou les milieux qui luy manquent pour y arriver, s'il ne les peut connoître.

Il eſt donc évident que cette ſcience & l'Arithmetique ſont le fondement de toutes les ſciences exactes, qui ſont celles que l'on peut appeller Mathematiques, puiſque toutes ces ſciences n'enſeignent qu'à connoître certains rapports que des grandeurs particulieres ont entr'elles.

Comme il y a beoucoup de ſciences particulieres qui dépendent de la Geometrie, il y a des perſonnes qui la conſiderent comme le principe general de toutes les ſciences : Et parce que la Geometrie eſt aſſez agreable à cauſe des figures qui tombent ſous l'imagination, il ſe trouve aſſez de gens qui la preferent inconſiderement aux ſciences dont nous traitons. Ils s'imaginent même que les demonſtrations Geometriques par lignes ſont les ſeules veritables, à cauſe qu'elles ſe font comme ſentir.

Je ſçay qu'il y a des choſes particulieres à la Geometrie qu'on doit connoître & démontrer par des figures ; Mais pour traiter comme il faut cette ſcience, l'on eſt ſouvent obligé de ſe ſervir de l'Algebre : Et parce que ſes preuves ſont les plus generales & les plus ſimples, elles doivent paſſer pour les demonſtrations les plus naturelles.

L'on me dira peut-eſtre qu'on ne peut d'écouvrir ny exprimer les grandeurs incommenſurables par nombres, & qu'on le peut toûjours par lignes, & qu'ainſi la Geometrie eſt plus exacte & plus étenduë que la ſcience des nombres. Je répons que l'on peut toûjours exprimer les grandeurs incommenſurables par des nombres incommenſurables; & que ſi les nombres incommenſurables ne ſont pas entierement connus, c'eſt que les grandeurs incommenſurables renfermant quelque choſe d'infiny & d'incomprehenſible, elles ne peuvent eſtre entierement connuës.

Je répons en ſecond lieu, que les lignes ne ſont jamais les veritables expreſſions des grandeurs incommenſurables, ny même des grandeurs commenſurables. Car ce qui ne fait point connoître une grandeur n'en peut eſtre l'expreſſion. Or les lignes dont les Geometres pretendent exprimer les grandeurs inconnuës, ne font point connoître ces grandeurs, elles n'en ſont donc point les expreſſions. Il eſt vray que les Geometres démontrent que ces lignes ſont égales à ces grandeurs, mais ces lignes elles-mêmes ſont inconnuës à l'eſprit, quoy qu'elles ſoient connuës par les yeux ou par l'imagination; Et ſi on veut avoir des expreſſions qui parlent à l'eſprit & non pas aux yeux, on eſt obligé de recourir aux nombres incommenſurables. Donc ces nombres incommenſurables ſont encore plus connus que ces lignes, puiſque ces nombres les expriment & les repreſentent mieux à l'eſprit.

Il eſt ce me ſemble évident que ce nombre $\sqrt{20}$ eſt beaucoup plus connu que la ſoûtendante d'un angle droit dont les côtez ſont 2 & 4. Car on ſçait au moins que $\sqrt{20}$ eſt environ $4\frac{1}{2}$, & ſi on le veut ſçavoir plus au juſte, on le ſçaura par les regles de l'approximation des racines. Mais on ne ſçait pas la grandeur de la ligne qui ſoûtient un angle droit, quoy qu'elle ſoit preſente aux yeux ou à l'imagination. C'eſt la même choſe de ces pretenduës expreſſions des grandeurs inconnuës que l'on donne par les ſections coniques, & par les lignes encore plus compoſées. Car comme toutes les ſciences doivent tendre à éclairer l'eſprit, & à luy découvrir la juſte grandeur, ou la grandeur la plus approchante des choſes inconnuës, on ne doit pas beaucoup eſtimer l'uſage de ces expreſſions par lignes, qui ne parlent qu'aux yeux & à l'imagination, quoy que l'on doive beaucoup eſtimer l'ordre des raiſonnemens, & l'évidence des veritez de Geometrie.

Il n'y a donc rien qui puiſſe eſtre connu qu'on ne puiſſe exprimer par nombres autant qu'il peut eſtre connu ; & parce que nous enſeignons icy à faire dans les nombres commenſurables ou incommenſurables, toutes les comparaiſons neceſſaires pour en découvrir les rapports, il eſt évident que ces Elemens ſont proprement la ſcience generale ou le fondement & le principe de toutes les Mathematiques, & non pas la Geometrie qui dépend en pluſieurs endroits de la connoiſſance de ces Elemens.

L'on peut ajoûter que la Geometrie ſeroit tres-imparfaite & tres-bornée, ſi elle n'empruntoit le ſecours des ſciences dont nous traitons.

Les Geometres n'ont preſque rien découvert en Geometrie ſans l'uſage des proportions, & pour démontrer la nature & les proprietez de ces proportions, ils ont eſté obligé de recourir aux multiples, aux équimultiples, & aux aliquotes des grandeurs que l'on compare, ce qu'on ne peut déterminer que par les nombres ; outre que les proportions elles-mêmes en general font une des principales parties des ſciences que nous expliquons. Enfin ſans l'uſage des nombres les Geometres ne peuvent comparer leurs lignes & leurs figures tant commenſurables qu'incommenſurables, que d'une maniere fort imparfaite.

Mais il n'en eſt pas de même de l'Arithmetique & de l'Algebre. Ces ſciences peuvent s'étendre à l'infiny ſans le ſecours ny des lignes, ny des figures, ny d'aucune autre choſe. Elles ſont au deſſus de toutes les autres ſciences, & l'on n'en peut methodiquement traiter ny perfectionner aucune ſans elles. L'Analyſe qui fait la partie principale de l'Algebre, eſt incomparablement plus feconde pour découvrir des veritez que ne ſont les figures, & ſans elle il eſt comme impoſſible de reſoudre une infinité de problemes. Car quel moyen d'imaginer tout ce long enchaînement de lignes & de figures embaraſſées, où il faut voir diſtinctement tant de differens rapports, avant que de ſçavoir d'où dépend immediatement la reſolution que l'on cherche.

Il eſt vray qu'en connoiſſant certaines proprietez de quelques figures aſſez ſimples, on peut donner certaines reſolutions d'une maniere plus facile par la Geometrie, qu'on ne fera par l'Analyſe; parce qu'on ne ſçait d'abord qu'une ligne tirée ou prolongée de telle ſorte, eſt la grandeur que l'on demande ; au lieu que l'Analyſe ne détermine cette grandeur que par pluſieurs bouts de lignes qui luy ſont égaux, lors qu'ils ſont réünis en une ſeule.

Mais pour ſçavoir par ordre une propoſition de cette ſorte, on eſt ſouvent obligé d'apprendre plus d'un gros volume, dont chaque feüille demande une application de pluſieurs heures. Or le moyen d'apprendre & de ſe ſouvenir de tant de choſes, & ceux-là ne manqueroient-ils pas de prudence qui voudroient perdre un temps conſiderable à s'en remplir ? Outre que les voyes abbregées pour ces reſolutions, peuvent mêmes ſe découvrir par l'Analyſe.

Voicy preſentement l'ordre qu'on a ſuivy dans la diſpoſition de ces Elemens, ils ſont diviſez en deux parties. La premiere qui comprend cinq Livres, explique & démontre la ſupputation des chiffres & des nombres, qu'on appelle autrement *Arithmetique*, avec celle des eſpeces ou des lettres, qui eſt ce qu'on appelle *Algebre*. Et la ſeconde qui en comprend quatre autres, explique & traite à fonds l'Analyſe, ou l'Art de reſoudre les queſtions, & de découvrir les veritez generales des Mathematiques, c'eſt à dire, celles qui regardent les grandeurs priſes generalement, ſans ſuppoſer neanmoins d'autres connoiſſances que celles qu'on accorde ; mais en ſe ſervant des ſeules operations qui ſont établies dans la premiere partie.

Dans le premier Livre de cette partie, l'on fait voir que l'unité & les nombres ſont les ſeules idées par leſquelles nous pouvons regler la meſme de ces grandeurs, & déterminer exactement ce qui s'en peut connoître. Et aprés avoir expoſé les idées fondamentales qui nous ſervent à comparer entr'elles les grandeurs; l'on explique dans la ſuite de ce même Livre les quatre premieres operations qui ſe font par nombres ou grandeurs entieres, qui ſont conſiderées comme des rapports, dont le premier terme ſeul eſt exprimé ; & le ſecond, qui eſt toûjours l'unité, eſt ſous-entendu.

Le ſecond Livre eſt des mêmes operations ſur les nombres ou grandeurs rompuës, qu'on appelle auſſi *Fractions*, & qui ſont des rapports de grandeurs, dont chaque terme eſt exprimé.

Le troiſiéme eſt des puiſſances & de leurs reſolutions, dont toutes les regles ſe trouvent renfermées dans un ſeul probleme, par le moyen d'une Table qui repreſente en abregé toutes ces regles avec leur demonſtration, d'une maniere qui n'eſt pas moins generale qu'elle eſt ſimple & facile à concevoir.

Cette reſolution des puiſſances ne donnant pas toûjours des grandeurs commenſurables, ou qui ſoient exactement connuës, fournit les grandeurs incommenſurables, que l'ordre naturel a demandé qu'on expliquaſt dans le quatriéme Livre, avec toutes les operations que l'on fait ſur elles. Ces grandeurs ſont nommées incommenſurables ; parce que, ainſi qu'il eſt expliqué dans ce Livre, entre les parties infinies, qui priſes autant de fois qu'il le faut, meſurent exactement l'unité, il ne peut s'en trouver aucune qui puiſſe meſurer ces grandeurs ſans laiſſer quelque reſte.

Le ſixiéme Livre traite de la comparaiſon des rapports, qu'on appelle auſſi *proportions*. Cette partie eſt ſi vaſte & ſi feconde, & ſes uſages ont une telle étenduë dans la pluſpart des ſciences, qu'il y en a peu, pour ne point dire aucune, qui puiſſe eſtre expliquée ſans elle. Les égalitez & les proportions Geometriques, qui ſont une eſpece du genre des égalitez, ſont les choſes qui rendent cette partie ſi conſiderable ; & c'eſt auſſi à les éclaircir qu'on s'eſt le plus attaché dans tout cét ouvrage. Car pour les quatre derniers Livres de la ſeconde Partie, ils ne ſont que la ſuite de ce qu'on a dit des égalitez dans le cinquiéme de la premiere. L'on établit premierement dans ces quatre Livres les fondemens de l'Analyſe. Enſuite, aprés y avoir donné quelque idée de la methode de Diophante, & de celle de Viete, l'on s'arreſte particulierement à expliquer celle de Monſieur Deſcartes, parce qu'elle eſt la plus generale, la plus feconde, & la plus facile de toutes. Cependant comme ce ſçavant Homme n'a pas démontré ny même expoſé tous les principes qui luy ont ſervy, l'on ne trouvera pas dans ſes écrits les mêmes avantages pour bien entendre ſon Analyſe, que l'on peut tirer de ces Elemens. Car aprés en avoir expoſé & démontré clairement tous les principes, l'on en déduit par ordre non ſeulement toutes les découvertes qu'elle renferme, mais auſſi d'autres nouvelles encore plus utiles ; Car comme on verra dans le dernier Livre, elles fourniſſent des regles qui ſont beaucoup plus courtes que les ſiennes, & l'on peut même en déduire analytiquement certaines connoiſſances tres-univerſelles, qu'il n'a pas crû que l'on puſt découvrir ſans le ſecours des lignes paraboliques, ou des autres qui appartiennent à la Geometrie compoſée, comme l'Hyperbolique, &c.

Mais comme ces Elemens ſont principalement faits pour ceux qui commencent, & qui n'ont encore aucune teinture des Mathematiques, ny même de l'Arithmetique, il eſt à propos de les avertir qu'ils ne doivent lire que la plume à la main, afin de faire eux-mêmes les operations de tous les differens exemples dont on apporte un aſſez grand nombre, parce qu'on a deſſein de les accoûtumer à pratiquer les regles, & de leur rendre familieres & ſenſibles des matieres, qui ſemblent d'abord aſſez abſtraites & difficiles, ſur tout à ceux qui ne ſont point encore accoûtumez à faire uſage de leur eſprit. Il y a cependant quelques matieres qui ne ſont pas de grand uſage; & que ceux qui voudront, pourront paſſer outre ſans lire, comme eſt par exemple ce qu'on explique des incommenſurables depuis la page 130. juſques à la page 148. & tout le traité des nombres polygones, & ce qu'on a donné ſur la fin des égalitez du quatriéme degré. Pour ceux qui ſont déja verſez dans l'Arithmetique & dans l'Algebre commune, ils auront aſſez de diſcernement pour s'exempter de lire ce qu'ils ſçavent déja. Il y en aura cependant qui pourroient bien ne point s'ennuyer de tout parcourir, afin d'avoir la ſatisfaction de remarquer les liaiſons qu'ils n'auroient point encores apperçeuës entre toutes les veritez & les differentes parties des Mathematiques; & afin d'établir auſſi leurs connoiſſances ſur des principes, qui leur ſembleront peut-eſtre plus ſimples, plus naturels, & en plus petit nombre que ceux dont ils ſe ſont déja ſervis.

Explication de quelques Notes.

QUOYQUE ces Notes ſoient expliquées chacune en ſon lieu ; neanmoins on a crû les devoir encore mettre icy, afin de les faire mieux entendre.

+ ſignifie *plus* : Ainſi 9+3, c'eſt à dire ; neuf plus trois.

— *moins* : Ainſi 14—2, c'eſt à dire ; quatorze moins deux.

= *marque de l'égalité* : Ainſi 9+3=14—2, c'eſt à dire ; neuf plus trois eſt égal à quatorze moins deux.

: : Ces quatte points entre deux termes devant, & deux termes aprés, marquent que ces quatre termes ſont une proportion geometrique : Ainſi *6*. 2 : : 12. 4. c'eſt à dire ; *6* eſt à 2, comme 12 eſt à 4 ; ou bien, *6* contient 2 fois 2, comme 12 contient deux fois 4.

∺ Ces mêmes quatre points avec une ligne qui les coupe, marquent la proportion continuë : Ainſi ∺ 3. *9*. 27. c'eſt à dire ; 3 eſt autant de fois dans *9*, que *9* eſt de fois dans 27.

: Ces deux points entre deux termes devant, & deux termes aprés, marqueront la proportion arithmetique : Ainſi 7. 3 : 13. *9*. c'eſt à dire ; 7 ſurpaſſe autant le nombre 3, que 13 ſurpaſſe *9*.

÷ Ces mêmes deux points avec une ligne qui les coupe, marquent la proportion arithmetique continuë : Ainſi ÷ 3. 7. 11. c'eſt à dire ; 3 eſt ſurpaſſé par 7, autant que 7 eſt ſurpaſſé par 11.

Deux ou pluſieurs lettres enſemble marquent une multiplication de deux ou pluſieurs grandeurs, qui ſont chacune appellées par le nom de l'une de ces lettres. Ainſi *bd*, c'eſt à dire le produit de deux nombres, comme 2 & 4, appellez l'un *b* & l'autre *d*.

√ ſignifie *racine* : Ainſi √4, c'eſt à dire la racine de 4, ou le nombre, comme 2, qui multiplié par ſoy-même donne 4, parceque 2 fois 2 ſont 4.

Les Livres ſont diviſez en nombres ou propoſitions par des chiffres, qui ſont en marge : & c'eſt ſeulement à cela qu'on a égard dans les citations & dans les renvois à quelques points des Livres precedens : Le premier chiffre, qui eſt Romain, marquant le Livre ; & le ſecond qui eſt Arabe, marquant le nombre de ce Livre. Ainſi V. 29. veut dire *le vingt-neuviéme nombre du Livre cinquiéme*.

Que ſi l'endroit où l'on renvoye eſt du même Livre, on cite quelquefois un tel Theoreme, ou une telle propoſition, avec cette marque *S* qui veut dire *ſupra*. Comme 15. *S*. c'eſt à dire, *dans l'article ou la propoſition quinziéme, cy-deſſus ou dans ce même Livre.*

TABLE
DES MATIERES PRINCIPALES.

Fin de la Table.

FAUTES A CORRIGER.

A*Vant que de lire, il eſt à propos de corriger avec la plume les fautes qui ſuivent.*

Page 2. *ligne* 19. ſignifie, *eſcrivez*, 1 ſignifie. *p.* 16, *l.* 31. *eſcr.* $10+8=18$. *p.* 17, *l.* 11. *eſcr.* $16-7=9$. *ibid. l.* 26, au deſſous, *eſcr.* au deſſus. *p.* 28, *l.* 17. j'écris o demi, *eſcr.* j'écris o au demi, & *l.* 20. un pluſieurs, *eſcr.* un ou pluſieurs. *p.* 29, *l.* 22. *pour* 32. *eſcr.* 34. *p.* 32. *l. penult.* parceque, *eſcr.* par qui. *p.* 36, *l.* 13. $8ab$ à $2b$, *eſcr.* $8ab$ à $4b$. *p.* 45, *l.* 4. eſt $\frac{3}{6}$, *eſcr.* $3\frac{3}{6}$. *p.* 55, *l.* 39. $\frac{40}{28}$, *eſcr.* $\frac{38}{28}$. *p.* 57, *l.* 30. le premier 42, *eſcr.* le premier 12. *p.* 61, *lignes* 33, 36, & 37, *pour* $\frac{393}{315}$, *eſcr.* $\frac{391}{315}$. *p.* 62, *lignes* 29 & 30. *pour* $\frac{1}{1}$, *eſcr.* $\frac{1}{12}$. *p.* 64, *l.* 5. additions, *eſcr.* additions compoſées. *p.* 65, *l.* 27. *eſcr.* le quarré du quarré de quarré. *p.* 75, *l.* 9. ſolides des deux, *eſcr.* ſolides du quarré des deux. *p.* 112, *l.* 4. plus ſimple $b\sqrt{c}$, *eſcr.* plus ſimple que $b\sqrt{c}$. *p.* 117, *l. penult.* $\frac{8}{2}a\sqrt{\frac{3}{b}}$, *eſcr.* $\frac{3}{2}a\sqrt{\frac{3}{bc}}$. *p.* 120, *l.* 12. $\frac{pzz+aam}{pzz}$, *eſcr.* $\frac{pzz+aam}{apz}$. *p.* 125, *l.* 16. $\sqrt{\frac{175a}{5aa}}$, *eſcr.* $\sqrt{\frac{225a}{5aa}}$. & *l.* 26. $ab\sqrt{6^e.a}$, *eſcr.* $\sqrt{6^e.\frac{1}{a}}$. *p.* 132, *l.* 11. $-\sqrt{7^e.ab^5}+\sqrt{7^e}$. *eſcr.* $-\sqrt{7^e.ab^5}+\sqrt{7^e.b^6}$. *p.* 133. *l.* 29. $-a\sqrt{bc}$, *eſcr.* $-a\sqrt{bc}-bc$. *p.* 136, *l.* 4. $\sqrt{4\frac{5}{4}}$, *eſcr.* $\sqrt{\frac{45}{4}}$. & *l.* 24. $a+\sqrt{ab}$, *eſcr.* $\overline{a+b\sqrt{ab}}$. & *l.* 26. $aa+2abb+bbab$, *eſcr.* $aa+2ab+bb$ par ab. & *l.* 34 que $2a\sqrt{b}$, *eſcr.* que $2a\sqrt{bc}$. *p* 146, *l.* 1. *pour* 176. *eſcr.* 1. & *pour* 32000 *eſcr.* 5. & *l.* 8. *pour* 2704, *eſcr* 2. & *pour* 7311488, *eſcr.* 2. *p.* 154, *l.* 34. eſt z, *eſcr.* eſt zz. *p.* 155, *l.* 19. $2z^3$, *eſcr.* z^3. *p.* 175. *l.* 27. $a=6$, *eſcr.* $a=3$. *p.* 179, *l.* 25. $35bb$, *eſcr.* $35bb$. *p.* 112, *l.* 2. $\frac{cd}{b+d}$, *eſcr.* $\frac{cd}{b+c}$. *p.* 272, *l.* 10. aura donné, *eſcr.* aura donc. *p.* 273, *l.* 26. $-c+2x$, *eſcr.* $-c+a+2x$. *p.* 275, *l.* 17. $\frac{7}{108}$, *eſcr.* $\frac{7}{104}$; & *l.* 18. $\frac{108}{7}$, *eſcr.* $\frac{104}{7}$; & *l.* 19. 7344 ſols, ou 367 livres 2 ſols, *eſcr.* 7072 ſols, ou 353 livres 12 ſols. *p.* 278, *l.* 27. & la ſomme, *eſcr.* & chaque ſomme. *p.* 279, *l.* 6. $+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$, *eſcr.* $+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c$. & *l.* 16. pag. *eſcr.* pag. 272. & *l.* 18. premiers, *eſcr.* premieres. & *l.* 35. pair, *eſcr.* impair, & impair, *eſcr.* pair. *p.* 282. *l.* 5. grandeur, trouver, *eſcr.* grandeur & le rapport de l'excez au deffaut, trouver. *p.* 291, *l.* 34. $\frac{1}{2}c-2aa$, *eſcr.* $\frac{1}{2}c-aa$. *p.* 304, *l.* 14. $a\sqrt{aa-c}$, *eſcr.* $a+\sqrt{aa-c}$. *p.* 305, *l.* 2. multiplié, *eſcr.* multipliée. *p.* 306, *l.* 19. nouveaux, *eſcr.* nouvelles. *p.* 330, *l.* 15. 125. *eſcr.* 225. *p.* 343, *l.* 37. *eſcr.* ſuivi d'une ceſure. *p.* 345, *l.* 38. tot, *eſcr.* ſunt. *p.* 365, *l.* 22. $f=a$, *eſcr.* $l=a$. *p.* 366, *l.* 27. *abcefghi*, *eſcr.* *abcefghl*. *p.* 273, *l. antepenult.* de la multiplier par, *eſcr.* de multiplier deux fois par. *p.* 389, *l.* 15. $+aa=0$, *eſcr.* $+aa-bb=0$. *p.* 402, *l.* 20. *eſcr. une fois*, $-r$. *p.* 403, *l.* 3. réduite, *eſcr.* transformée. *p.* 412. *l. penult.* paraboliques, *ajoûtez*, &c. *p.* 406, *l.* 29. $\frac{1}{2}p=a$, *eſcr.* $\frac{1}{2}p=aa$.

ELEMENS
DES
MATHEMATIQUES

LIVRE PREMIER.

DES GRANDEURS ET DE LEUR MESURE, ET DES QUATRE PREMIERES OPERATIONS SUR LES GRANDEURS ENTIERES.

NOS penſées different eſſentiellement des paroles qui frappent nos oreilles, & des figures qui paroiſſent à nos yeux, les idées que nous avons des choſes n'ont pas même le moindre rapport à ces paroles ni à ces figures. Mais quoique ces ſignes ſenſibles n'en puiſſent eſtre les naturelles & les veritables expreſſions; cependant elles en ſont des expreſſions qu'on peut appeller arbitraires; parceque l'on eſt convenu de s'en ſervir, & que l'on peut par leur moyen repreſenter d'une maniere ſenſible les penſées les plus cachées & les plus abſtraites de l'eſprit.

L'aſſemblage de pluſieurs de ces ſignes eſt une expreſſion, ou une expoſition d'une ou de pluſieurs idées que nous leur avons jointes.

L'expreſsion courte & diſtincte de ces idées, s'abbrege ordinairement par une autre encore plus courte, mais qui n'eſt pas diſtincte, parcequ'elle n'eſt pas familiere. Et alors l'expreſsion diſtincte eſt une explication de la plus courte, & l'on dit qu'elle en eſt la *définition.* Voici les définitions de quelques expreſsions ou de quelques mots de cette ſorte qui ſerviront dans cet ouvrage.

EXPLICATIONS
OU DEFINITIONS DE QUELQUES MOTS.

Axiome eſt une connoiſſance naturelle & ſi claire que l'on n'en peut douter. Ou ce qui eſt la même choſe, c'eſt une propoſition ſi claire qu'elle n'a pas beſoin de preuves, à cauſe que tout homme raiſonnable en tombe d'accord.

Suppoſition ou *demande* eſt une propoſition moins evidente qu'un axiome, mais qui eſt inconteſtable. Ainſi on demande qu'on l'accorde pour n'eſtre pas obligé de la démontrer.

Theoreme eſt une propoſition dont il faut démontrer la verité.

Probleme ou *queſtion* eſt une propoſition qui demande qu'on découvre quelque verité cachée, & qu'on démontre qu'elle eſt découverte.

Lemme eſt une propoſition qui n'eſt au lieu où elle eſt que pour ſervir de preuve à d'autres qui ſuivent.

Corollaire eſt une propoſition qui ſuit naturellement d'une autre.

Si les mots parlent à nos oreilles, les figures ou les marques parlent en leur maniere à nos yeux. Voici les définitions des figures ou des marques principales qui ſerviront dans cet ouvrage.

EXPLICATIONS
OU DEFINITIONS DE QUELQUES MARQUES.

0 ſignifie ce qui n'a point de proprietez, & que l'on appelle *rien* ou *zero*; 1 ſignifie l'unité, 2 ſignifie deux, 3 trois, 4 quatre, 5 cinq, 6 ſix, 7 ſept, 8 huit, 9 neuf.

$\frac{1}{2}$ ſignifie un demi, $\frac{1}{3}$ ſignifie un tiers, $\frac{1}{4}$ un quart, $\frac{1}{5}$ un cinquiéme, $\frac{1}{6}$ un ſixiéme, $\frac{1}{7}$ un ſeptiéme, $\frac{1}{8}$ un huitiéme, $\frac{1}{9}$ un neuviéme.

Cette marque $+$ ſignifie plus. Ainſi $9+3$ eſt le même que neuf plus trois.

Celle-ci $-$ ſignifie moins. Ainſi $14-2$ eſt le même que quatorze moins deux.

Celle-ci $=$ eſt la marque d'égalité. Ainſi $9+3=14-2$ eſt le même que neuf plus trois ſont égaux à quatorze moins deux, ou neuf plus trois font quatorze moins deux.

Les Mathematiques ne ſont point ſi difficiles qu'on le croît ordinairement. Toutes ces Sciences ne dépendent que des axiomes qui ſuivent, & qui ſont ſi ſimples qu'on ne les peut ignorer.

AXIOMES,
QUI SONT LES PRINCIPES GENERAUX DES MATHEMATIQUES.

I. Chaque grandeur eſt égale à elle-même.

II. Chaque grandeur moins elle-même eſt égale à rien.

III. Chaque grandeur, ou chaque tout, eſt égal à l'aſſemblage de toutes ſes parties.

IV. Chaque grandeur, ou chaqne tout eſt plus grand que ſa partie.

V. Pluſieurs riens ſont égaux à un rien.

VI. Les grandeurs égales à une même grandeur ſont égales entr'elles.

VII. Si à grandeurs égales on en ajoute d'égales, les tous ſeront égaux.

VIII. Si de grandeurs égales on en retranche d'égales , les reſtes ſeront égaux.

IX. Si à grandeurs inégales on en ajoute d'égales , les tous ſeront inégaux.

X. Si de grandeurs inégales on en retranche d'égales , les reſtes ſeront inégaux.

XI. *Lorſque la verité d'une propoſition eſt évidente , on ſe contente de l'énoncer par des termes clairs. Si cette propoſition a beſoin de preuves , on la prouve en ne ſe ſervant que des définitions , ou des axiomes, ou des ſuppoſitions qui ont eſté accordées , ou des theoremes , problemes , lemmes , ou enfin des corollaires dont les veritez ont eſté déja démontrées.*

DE LA NATURE ET DES PROPRIETEZ DE LA GRANDEUR EN GENERAL.

XII. LA grandeur en general eſt tout ce qui a des parties , & qui eſt capable du plus & du moins , c'eſt à dire d'augmentation & de diminution.

XIII. La difference du plus ou du moins fait auſſi differentes grandeurs.

XIV. Si des grandeurs ſont égales , nous diſons qu'elles ont un *rapport d'égalité*.

XV. Et ſi elles ſont inégales qu'elles ont un *rapport d'inégalité*.

XVI. Nous n'examinons point ce que ſont les grandeurs abſolument , & dans elles-mêmes, nous les conſiderons ſeulement en les comparant ſelon les rapports d'égalité ou d'inégalité qu'elles ont entr'elles. Je puis bien connoître que la grandeur d'un pied contient douze fois la grandeur d'un pouce ; que la grandeur d'un pouce contient douze fois la grandeur d'une ligne : mais ne connoiſſant point quelle eſt la grandeur d'une ligne abſolument & dans elle-même , je ne puis connoître auſſi ni la grandeur d'un pouce ni la grandeur d'un pied. Et ainſi je n'examine point ce que ces grandeurs ſont en elles-mêmes , mais ſeulement les rapports qu'elles ont entr'elles , c'eſt à dire combien les unes ſont de fois dans les autres.

XVII. Le rien ou le zero nous ſert de milieu pour faire les comparaiſons des grandeurs , & pour juger de leurs rapports.

XVIII. Les grandeurs ont plus de realité lorſque leur eſtre les éloigne davantage de zero , & elles ont moins de realité lorſque leur non eſtre les éloigne davantage de ce même zero.

XIX. L'uſage a voulu que l'on appellaſt *poſitive* ou *vraie* toute grandeur qui ajoute à zero , & *négative* ou *fauſſe* toute grandeur qui retranche de ce même zero.

XX. L'addition des grandeurs vraies ſe marque par le ſigne + qui ſignifie plus , & le retranchement ou la ſouſtraction de ces mêmes grandeurs ſe marque par le ſigne — qui ſignifie moins.

XXI. Si le plus d'une grandeur eſt ſi grand qu'on ne puiſſe lui rien ajoûter qu'elle n'ait déja , cette grandeur eſt infiniment vraie. Et ſi le moins d'une grandeur eſtoit ſi grand, qu'on ne puſt lui rien retrancher dont elle ne manquaſt déja , cette grandeur ſeroit infiniment fauſſe. Mais parceque noſtre eſprit eſt reſſerré dans des bornes tres-étroites, & que ſi une grandeur eſtoit vraye ou fauſſe infiniment, elle ne ſeroit reſſerrée dans aucunes bornes, nous n'entreprendrons point de comprendre ni même de raiſonner ſur l'infini. Nous entreprendrons ſeulement de raiſonner ſur les grandeurs finies qui peuvent recevoir le plus & le moins.

XXII. L'eſſence de toutes ces grandeurs eſt d'eſtre diviſibles & d'avoir des parties. Ce qui convient eſſentiellement à ces grandeurs, convient eſſentiellement à chacune de leurs parties, puiſque chacune de ces parties eſt auſſi une grandeur. Toutes ces parties ſeront donc auſſi diviſibles, & elles auront d'autres parties qui ſeront encore diviſibles, & qui auront encore de nouvelles parties. Et ainſi de parties plus petites en plus petites juſques à l'infini.

Si l'on objecte que partageant une grandeur en deux parties égales, & chacune de ces parties en deux autres égales, & chacune de ces dernieres en deux autres nouvelles, & ainſi de ſuitte, l'on arriveroit enfin aprés un nombre déterminé de ſemblables partages à quelques parties ſi petites, qu'eſtant encore une fois partagées elles ſeroient aneanties. Chacune de ces dernieres parties ſera donc égale aux deux riens auſquels le dernier partage les aura reduites. Or la grandeur partagée eſt égale à l'aſſemblage déterminé de tous les riens qui ſont égaux à ces parties (par 3. s̑) Quelque choſe ſera donc égale à rien : Ce qui eſt une abſurdité manifeſte. Il eſt donc clair que toute grandeur eſt diviſible à l'infini.

DE LA CONNOISSANCE DES GRANDEURS
ET DE LEUR MESURE.

XXIII. En comparant des grandeurs finies, on peut bien connoître les rapports d'égalité, ou d'inégalité qu'elles ont entr'elles, puiſqu'on peut meſurer les unes par les autres ; mais on n'en peut du tout rien connoître, ſi on les conſidere en elles-mêmes, parceque l'infinité de leurs parties qui les éloigne actuellement de zero, les rend comme de petits infinis, que l'eſprit humain tout immenſe qu'il eſt, n'eſt pas capable de comprendre.

XXIV. Pour meſurer ces grandeurs finies, ou plûtoſt pour comparer entr'eux ces petits infinis, c'eſt à dire pour connoître des grandeurs ce qui s'en peut connoître, il ne ſuffit pas d'avoir zero pour le milieu auquel on les rapporte, il faut encore avoir une regle pour meſurer l'éloignement de ces grandeurs à ce milieu. Cette regle generale eſt l'unité.

XXV. Pour en concevoir diſtinctement la nature, il faut faire attention ſur les idées que nous avons de l'unité & de la multitude. Nous ne pouvons douter que ces deux idées ne ſoient directement oppoſées l'une à l'autre. L'idée de l'unité détruit l'idée de la multitude, & l'idée de la multitude détruit l'idée de l'unité.

XXVI. L'unité eſt ſimple, indiviſible, & ſans compoſition d'aucunes parties. Car ſi elle eſtoit diviſible, & qu'elle euſt des parties, l'idée de la multitude lui conviendroit ; & ainſi l'unité ne ſeroit pas unité.

L'on ne fait pas aſſez de reflexion ſur cette verité. Noſtre eſprit fait ſouvent un faux mélange des veritables idées qui ſont en lui. Souvent nous avons conſideré que chaque grandeur eſtoit diviſible dans une multitude innombrable de parties. L'union de toutes ces parties n'eſt qu'une participation, ou pour parler plus proprement, qu'une repreſentation groſſiere & tres-imparfaite de l'unité, parceque chacune de ces parties eſt actuellement diſtinguée de chaque autre, & qu'elle n'en dépend point pour ſubſiſter ; Et enfin parcequ'elles n'ont toutes aucune liaiſon neceſſaire les unes avec les autres. Cependant cette union ou cette liaiſon que noſtre eſprit imagine dans les grandeurs, nous a fait regarder reciproquement chaque grandeur comme veritablement une, & l'unité comme veritablement diviſible. C'eſt ainſi que nous nous ſommes accoûtumez mal à propos à répandre l'idée de l'unité ſur chaque grandeur, & l'idée de chaque grandeur ſur l'unité.

XXVII. Si nous refléchiſſons ſur toutes nos connoiſſances, nous verrons facilement qu'il n'y en a aucune qui nous ſoit plus claire & plus diſtincte que celle de l'unité. Car ſa nature & ſes proprietez ſont d'eſtre tres-ſimple, indiviſible, & ſans compoſition d'aucunes parties. Non ſeulement elle ſe meſure elle-même, mais elle eſt auſſi la regle immuable & naturelle par laquelle on meſure tous les nombres qui la ſuivent juſques à l'infini, leſquels ne ſont que cette unité même repetée pluſieurs fois.

XXVIII. Cette unité & tous ces nombres ne ſont pas du genre des grandeurs dont nous avons expliqué la nature & les proprietez. Car l'unité eſt indiviſible, & ainſi chacun de ces nombres n'eſt pas diviſible à l'infini, puiſqu'il eſt un aſſemblage fini & déterminé de pluſieurs indiviſibles, c'eſt à dire de l'unité repetée pluſieurs fois. Nous concevons ſeulement que cette unité & que ces nombres ſont des idées tres-claires & tres-intelligibles, qu'ils ſont preſens à nos eſprits, & qu'ils n'ont aucune exiſtence réelle dans les grandeurs particulieres. Cependant c'eſt par eux que nous reglons la meſure de toutes ces grandeurs en meſurant les unes par les autres, comme cette unité & les nombres intelligibles ſe meſurent ou ſont meſurez les uns par les autres.

XXIX. Pour cet effet entre les grandeurs comparées nous en choiſiſſons quelqu'une qui repreſente & qui reçoive le nom de l'unité, & nous concevons cette unité comme diviſible & connuë en elle-même, quoiqu'elle nous ſoit entierement inconnuë, & que même nous n'en puiſſions du tout rien connoître en la conſiderant de cette ſorte.

XXX. L'on compare à cette unité toute grandeur qu'on veut connoître, mais l'unité n'eſt comparée qu'à elle-même, parcequ'on ſuppoſe qu'elle eſt parfaitement connuë.

XXXI. Souvent l'unité diviſible & les grandeurs qu'on lui compare, peuvent avoir une meſure commune, c'eſt à dire quelqu'une de leurs parties appliquée une ou pluſieurs fois ſur les unes & ſur les autres, peut meſurer chacune d'elles exactement & ſans reſte. Alors ces grandeurs ſont appellées *grandeurs* ou *nombres commenſurables.*

XXXII. Mais ſuppoſant qu'aucune de leurs parties ne puiſſe ainſi les meſurer, ces grandeurs comparées à l'unité diviſible, ſont appellées *grandeurs* ou *nombres incommenſurables*. Mais l'unité eſt toûjours appellée commenſurable, parcequ'elle ſe meſure toûjours elle-même exactement & ſans reſte, & que non ſeulement toute grandeur pour eſtre connuë n'eſt comparée qu'à cette unité, mais auſſi parceque cette unité qu'on ſuppoſe toûjours connuë n'eſt comparée qu'à elle-même. On parlera au 4. Livre de ces grandeurs incommenſurables.

XXXIII. L'uſage a voulu que l'unité diviſible fuſt compriſe ſous le mot de nombre commenſurable. Car on dit ordinairement que les grandeurs commenſurables dont cette unité eſt toûjours l'une, comme on le vient de dire, ſont entr'elles comme nombre à nombre, c'eſt à dire qu'elles ſe meſurent ou qu'elles ſont meſurées les unes par les autres, comme quelque nombre meſure ou eſt meſuré par quelqu'autre.

XXXIV. Les nombres commenſurables ſont de deux ſortes. 1°. Si l'unité diviſible à qui on les compare eſtant repetée une ou pluſieurs fois, peut les meſurer exactement & ſans reſte, on les appelle *nombres entiers* ou ſimplement *nombres*, & on les exprime par les caracteres des nombres intelligibles 1, 2, 3, 4, 5, &c. qu'ils repreſentent, à cauſe qu'ils ſont meſurez par l'unité diviſible, comme les nombres intelligibles par l'unité veritable. Par exemple la grandeur de quatre pieds eſt meſurée par la grandeur d'un pied, comme le nombre intelligible 4 eſt meſuré par 1.

XXXV. 2. Mais ſi l'unité diviſible ne peut ainſi meſurer ces nombres, on les appelle *nombres rompus*, ou ſimplement *fractions*, & on les exprime en cette ſorte $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{11}{6}$, & les autres. Ces fractions expriment une ou pluſieurs parties de l'unité diviſible, qui meſurent cette unité comme l'unité veritable meſure les nombres intelligibles. Par exemple le quart d'un pied meſure un pied, comme 1 meſure le nombre intelligible 4. Ou bien cette unité diviſible & les fractions ſont meſurées par une de leurs parties, comme deux des nombres intelligibles & differens entr'eux ſont meſurez par l'unité veritable. Par exemple les trois quarts d'un pied & un pied ſont meſurez par le quart d'un pied, comme les nombres intelligibles 3 & 4 ſont meſurez par 1, à cauſe que $\frac{1}{4}$ eſt 3 fois dans $\frac{3}{4}$ & 4 fois dans 1.

XXXVI. Par les mots *unité* & *nombres* nous n'entendons pas ordinairement dans la ſuite l'unité veritable, & les nombres intelligibles, mais par unité nous entendons toute unité diviſible, & par nombres cette unité même & toute grandeur qu'on lui compare.

DE L'EXPRESSION

DES GRANDEURS.

XXXVII. La maniere d'exprimer les grandeurs eſt arbitraire. Nous ſuivrons la plus commune & la plus univerſellement receuë, qui eſt celle des lettres de l'alphabeth *a, b, c, d,* &c. & des neuf chifres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, auſquels on ajoute encore o la marque de zero.

XXXVIII. Ces neuf caracteres des neuf premiers nombres ſeroient trop petits pour exprimer tout autre au deſſus de 9, ſans l'adreſſe qu'on a eu de les faire valoir differemment, en changeant leur diſpoſition ſans changer leur figure. On les diſpoſe en pluſieurs rangs conſecutifs, qui ſont contez de droite à gauche. Tout chifre écrit au premier rang qui eſt vers la droite, ne vaut que l'aſſemblage des unitez ſimples qu'il enferme. Ainſi 1, ou 2, ou 3, au premier rang ne vaudront qu'un, ou deux, ou trois. Tout chifre au ſecond rang vaut dix fois autant qu'au premier, c'eſt à dire autant de dixaines qu'il enferme d'unitez. Ainſi 1, ou 2, ou 3, au ſecond rang valent dix, ou vingt, ou trente. Tout chifre au troiſiéme rang vaut dix fois autant qu'au ſecond, & cent fois autant qu'au premier, c'eſt à dire autant de centaines qu'il enferme d'unitez. Ainſi 1, ou 2, ou 3, au troiſiéme rang, valent cent, ou deux cent, ou trois cent. De même tout chifre au quatriéme rang vaut autant de dix cent ou de mille qu'il enferme d'unitez, au cinquiéme autant de dix mille, au ſixiéme autant de cent mille, au ſeptiéme autant de dix cent mille ou de millions, au huitiéme autant de dix millions, au neuviéme autant de cent millions, au dixiéme autant de dix cent millions ou de milliars, à l'onziéme autant de dix milliars, au douziéme autant de cent milliars, au treiziéme autant de mille de milliars &c. au vingtiéme autant de dix milliars de milliars, au trentiéme autant de cent milliars de milliars de milliars. Et ainſi de dix rangs en dix rangs à l'infini.

XXXIX. Cette diſpoſition faiſant donc valoir chaque rang dix fois autant que celui qui le precede, il eſt facile de connoître comment on doit écrire ou lire tous les nombres qu'ils expriment. Par exemple pour écrire ce nombre trois cent quarante-cinq milliars, quatre cent ſoixante-ſept millions, neuf cent huitante-trois mille, quatre cent vingt-cinq. Au premier rang j'écris 5 pour les cinq unitez, au ſecond j'écris 2 pour les deux dixaines qui valent vingt, au troiſiéme rang 4 pour les quatre centaines, au quatriéme 3 pour les trois mille, au cinquiéme 8 pour les huit dixaines de mille, au ſixiéme 9 pour les neuf centaines de mille. Et ainſi des autres.

345467983425.

Et reciproquement pour lire le nombre écrit 345467983425, je parcours tous les rangs de ſes chifres en diſant nombres, dixaines, centaines, mille, dixaines de mille, centainesde mille, millions, dixaines de millions, centaines de millions, milliars, dixaines de milliars, centaines de milliars &c. Et lorſque je ſuis arrivé au dernier chifre qui eſt par exemple ici dans le rang des centaines de milliars, je puis lire aiſément le nombre propoſé en cette ſorte, trois cent quarante-cinq milliars, quatre cent ſoixante-ſept millions, neuf cens huitante-trois mille, quatre cent vingt-cinq. Il en eſt ainſi de tous les autres nombres.

centaines de milliars.	dixaines de milliars.	milliars.	centaines de millions.	dixaines de millions.	millions.	centaines de mille.	dixaines de mille.	mille.	centaines.	dixaines.	unitez ou nombres.
3	4	5	4	6	7	9	8	3	4	2	5

XL. *Les Arithmeticiens prononcent ſeptante, huitante, & nonante, pour ſoixante & dix, quatre-vingt, & quatre-vingt-dix, afin de ne point ſe brouiller en contant.*

Chaque zero qui remplit un rang ne donne rien dans ce rang, mais il fait valoir chaque chifre qui le ſuit ſelon le rang qu'il occupe. Ainſi dans 20 qui ſignifie vingt, zero ne donne rien au premier rang, mais il fait rencontrer 2 au ſecond rang, où il doit valoir deux dixaines, c'eſt à dire vingt. De même dans 200 chaque zero ne donne rien au premier ni au ſecond rang, mais ils font rencontrer 2 au troiſiéme rang, où il doit valoir deux cent. Ainſi 4005 vaudra quatre mille cinq, 1609 vaudra mille ſix cent neuf, & ainſi des autres, où quoique ces zero ne donnent rien d'eux-mêmes, ils ne ſont pas cependant inutiles, puiſqu'ils font valoir chaque chifre qui les ſuit ſelon le rang qu'il occupe.

Les inventeurs des chifres avoient la liberté d'en choiſir plus ou moins que neuf, mais il leur a plû de choiſir ce nombre, plûtoſt par hazard que par raiſon. Car il y a grande apparence qu'ils ſe ſont déterminez à ce choix à cauſe que l'arrangement des neuf chifres ſelon l'ordre & la diſpoſition dont ils ſont convenus, fait que chaque unité d'un rang en vaut dix au rang ſuivant, c'eſt à dire autant que nous avons de doigts dans nos deux mains. Car ſi l'on y prend garde, on apprend comme naturellement à conter ſur ſes doigts.

Cependant le choix de ſept chifres, ou celui de quinze auroit eſté plus commode pour éviter beaucoup de fractions, & plus agreable à l'eſprit. Car leur diſpoſition auroit fait valoir leurs rangs ſelon le rapport de 1 à 8, ou de 1 à 16. qui ſont deux nombres qu'on peut partager ſans fractions en deux moitiez, & chacune de ces moitiez en deux autres, & ainſi juſques à l'unité, ce qui eſt le plus ſimple & le plus facile de tous les partages, à cauſe qu'il ſe fait ſelon la progreſſion double, qui approchant le plus de l'unité eſt auſſi la plus connuë.

DES GRANDEURS CONNUES ET INCONNUES,

ET DE LEURS DIFFERENTES EXPRESSIONS.

XLI. On a fait voir aſſez clairement (par 16. S.) qu'on ne peut rien connoître des grandeurs que les rapports qu'elles ont entr'elles. Tous ces rapports ſuppoſent au moins deux grandeurs comparées. On appelle ces deux grandeurs les deux *termes* du rapport. Le premier terme eſt la premiere grandeur comparée, & le ſecond terme la ſeconde. Ainſi comparant 3 avec 1, le premier terme eſt 3, & le ſecond eſt 1. Et comparant 1 avec 3, le premier terme eſt 1 & le ſecond eſt 3.

XLII. Comme la comparaiſon de deux grandeurs fait un rapport, la comparaiſon de deux rapports fait un rapport de rapports, la comparaiſon de deux rapports de rapports, fait un rapport de rapports de rapports. Et ainſi à l'infini.

Pour

XLIII. Pour exprimer le rapport de deux grandeurs on écrit l'une ſur l'autre, le premier terme au deſſus, & le ſecond au deſſous, avec une petite ligne qui en fait la ſéparation. Ainſi $\frac{3}{1}$ marque le rapport ou la comparaiſon de 3 à 1, & $\frac{1}{3}$ marque le rapport ou la comparaiſon de 1 à 3.

XLIV. Il eſt important de bien remarquer que tous les nombres entiers 1, 2, 3, 4, & les autres, ſont des rapports dont le premier terme eſt ſeulement exprimé, & le ſecond qui eſt l'unité eſt ſous-entendu. Car c'eſt le même que ſi on diſoit $\frac{1}{1}$ $\frac{2}{1}$ $\frac{3}{1}$ $\frac{4}{1}$, c'eſt à dire le rapport de 1 à 1, de 2 à 1, de 3 à 1, de 4 à 1, &c. Cette obſervation ſert auſſi pour les lettres, *a*, ou *b*, ou *c*, eſt le même que $\frac{a}{1}$ ou $\frac{b}{1}$ ou $\frac{c}{1}$. La raiſon de cela eſt tres-évidente, puiſque la comparaiſon ſeule des grandeurs avec l'unité fait découvrir ce qui s'en peut connoître.

XLV. On appellera *grandeurs connuës* celles dont les rapports qui ſont entr'elles & l'unité nous ſont connus, & *inconnuës* celles dont ces rapports nous ſont inconnus. Car ſi nous connoiſſons que ces rapports ſoient d'égalité, ou puiſſent eſtre exprimez par nombres, nous connoiſſons de ces grandeurs ce qui s'en peut connoître. Si nous connoiſſons que ces rapports ſoient d'inégalité, c'eſt à dire du plus au moins, ou du moins au plus, & qu'ils ne puiſſent eſtre exprimez par nombres, nous connoiſſons confuſément, & tres-imparfaitement ces grandeurs. Et ſi ces rapports nous ſont entierement inconnus, nous ne connoiſſons point du tout ces grandeurs.

XLVI. Toute grandeur exprimée par nombres s'appelle *grandeur numerique*, & toute grandeur exprimée par lettres s'appelle *grandeur literale*.

XLVII. Toute grandeur entierement connuë peut s'exprimer par nombres, ou par lettres. Par exemple on peut également dire 243, ou bien *a*, ou *b*, ou *c*, &c. On exprime les grandeurs connuës par les premieres lettres de l'alphabeth, comme *a*, ou *b*, ou *c*, &c. & les autres par les dernieres, comme *z*, *y*, *x*, *v*, &c.

DES MILIEUX
POUR ARRIVER A LA CONNOISSANCE DES GRANDEURS.

XLVIII. Lorſque l'on connoît des grandeurs ce qui s'en peut connoître, on n'en doit rien chercher davantage ; mais lorſque l'on n'en connoît pas ce qui s'en peut connoître, ce que l'on en connoît déja ſert de milieu pour arriver à ce que l'on n'en connoît pas encore, & que l'on cherche. Si l'on n'en connoiſſoit aucune choſe, c'eſt à dire ſi l'on ne connoiſſoit aucun des rapports qui ſont entre ces grandeurs, on n'en pouroit avoir aucune connoiſſance.

XLIX. L'on paſſe du connu à la connoiſſance de l'inconnu en parcourant avec ordre tous les rapports connus de l'un à l'autre par des raiſonnemens naturels, juſtes, & tres-clairs.

L. L'ordre que l'on donne pour paſſer ainſi du connu à l'inconnu, eſt ce qu'on appelle *methode* ou *regles*.

LI. Et l'obſervation de cette methode ou de ces regles, eſt ce qu'on appelle *operations ſur les grandeurs.*

LII. Toute operation ſur les grandeurs ne ſe fait que par le + & par le —.

LIII. Le + & le — des grandeurs égales ſe font l'un à l'autre des retranchemens mutuels. Le + retranche du —, & le — retranche du +. La poſition ou la poſſeſſion de mille écus retranche la negation ou la privation de mille écus, & la négation ou la privation de mille écus retranche la poſition ou la poſſeſſion de mille écus, c'eſt à dire + mille écus retranche — mille écus, & — mille écus retranche + mille écus. Ou ce qui eſt une même choſe, $+1000$ écus -1000 écus ſont égaux à zero.

LIV. D'où il eſt clair, 1°. que plus plus ou $+\,+$ eſt égal à moins moins ou $-\,-$, & que $-\,- = +\,+$, c'eſt a dire que l'addition du plus eſt égale à la ſouſtraction du moins, & que la ſouſtraction du moins, eſt égale à l'addition du plus. Ainſi $+\,+a = -\,-a$, & $-\,-a = +\,+a$.

LV. 2°. Que $+\,- = -\,+$, & que $-\,+ = +\,-$, c'eſt à dire que l'addition du moins eſt égale à la ſouſtraction du +, & que la ſouſtraction du + eſt égale à l'addition du —. Ainſi $+\,-a = -\,+a$.

LVI. L'on conçoit l'Addition & la Souſtraction comme ſimples, on les conçoit auſſi comme compoſées. Les ſimples ſont les operations fondamentales dont toutes les autres dépendent. On traittera par ordre des unes & des autres.

DES QUATRE PREMIERES OPERATIONS

SUR LES GRANDEURS ENTIERES.

LVII. CES quatre operations ſont celles que nous appellons *Addition, Souſtraction, Multiplication* & *Diviſion.*

LVIII. Et nous appellons *grandeur entiere* non ſeulement tout nombre entier comme 1, 2, 3, 4, & les autres, mais auſſi toutes les lettres comme *a, b, c, d,* &c. qui ne ſont point conçeuës partagées en pluſieurs de leurs parties comme en moitiez, en tiers, en quarts, &c.

On ſçait déja (par 44. S.) que toute grandeur entiere eſt un rapport dont le premier terme eſt exprimé, & le ſecond qui eſt l'unité eſt ſous-entendu. Ainſi tout ce qu'on dira dans ce premier Livre ſe doit entendre de ces rapports. Ceux qui commencent doivent eux-mêmes reſoudre en chaque operation tous les exemples particuliers que l'on donne, avant qu'ils s'en propoſent aucun autre. Car quoique tous ces exemples ſe rapportent aux regles generales des problemes qu'on donne, chacun enferme neanmoins quelque cas conſiderable, qu'on ne trouve pas dans chaque autre.

DE L'ADDITION.

DEFINITION GENERALE.

LIX. L'Addition eſt une expreſſion que l'on fait de l'aſſemblage de pluſieurs grandeurs données en une ſeule.

L'aſſemblage de ces grandeurs s'appelle auſſi leur *ſomme*. LX.

Comme l'Addition des nombres ſe fait autrement que celle des lettres, on expliquera l'une aprés l'autre.

DE L'ADDITION DES NOMBRES.

DEMANDE.

LXI. ON demande que l'on ſçache déja ajoûter tout nombre au deſſous de 10 à tout autre, comme que $3+4=7$, que $7+2=9$, que $64+8=72$, que $72+9=81$, que $81+6=87$, & ainſi des autres. Il reſte à ſçavoir trouver les autres ſommes des nombres au deſſus de 9 à l'infini, leſquelles ne pouvant d'ordinaire ſe trouver tout d'un coup, on eſt obligé de les chercher par parties en cette ſorte.

PREMIER PROBLEME.

Trouver la ſomme de pluſieurs nombres donnez.

1°. On diſpoſe les uns ſous les autres, les unitez ſous les unitez, les dixaines ſous les dixaines, les centaines ſous les centaines, les mille ſous les mille, &c. LXII.

2°. On ajoûte par ordre ce qui eſt en chaque rang en commançant par le premier, & l'on écrit ſous ce rang ce qui lui appartient, en reſervant pour l'autre qui le ſuit autant d'unitez que l'on a trouvé de dixaines au premier de ces deux rangs. L'operation étant ainſi achevée, les chifres écrits ſous les rangs ſont la ſomme qu'on cherche. Les exemples éclairciront ces regles. LXIII.

PREMIER EXEMPLE.

Pour trouver la ſomme des deux nombres 432 & 245. 1°. Je diſpoſe ainſi l'un ſous l'autre. J'écris 5 qui vaut 5 unitez, ſous 2 qui vaut 2 unitez, 4 qui vaut 4 dixaines ſous 3 qui vaut 3 dixaines, & 2 qui vaut 2 centaines ſous 4 qui vaut 4 centaines.

$$\begin{array}{r} 432 \\ \underline{245} \end{array}$$

2°. Je fais ainſi l'addition en commançant au premier rang ; je dis $2+5=7$ unitez, & j'écris 7 ſous le rang des unitez. Et venant au ſecond rang je dis $3+4=7$ dixaines, & j'écris 7 ſous le rang des dixaines. Et enfin au troiſiéme rang je dis $4+2=6$ centaines, j'écris 6 ſous le rang des centaines. Et l'operation étant ainſi achevée, je connois que 677 écrits ſous les rangs ſont la ſomme cherchée.

$$\begin{array}{rr} & 432 \\ & \underline{245} \\ \text{ſomme} & 677 \end{array}$$

SECOND EXEMPLE.

Pour trouver la ſomme de 459 & 565. 1° Je les diſpoſe comme au premier exemple. 2°. Je dis $9+5=14$, unitez qui font 1 dixaine plus 4 unitez, j'écris les 4 unitez ſous le rang des unitez, & je retiens 1 dixaine pour le ſecond rang qui eſt celui des dixaines. Et venant à ce ſecond rang je dis 1 dixaine que j'ai retenuë $+5=6$, $6+6=12$ dixaines, qui font 1 centaine plus 2 dixaines, j'écris donc ces deux dixaines ſous le rang des dixaines, & je reſerve 1 centaine pour le troiſiéme rang qui eſt celui des centaines. En ſuite à ce troiſiéme rang je dis 1 centaine que j'ai retenuë $+4=5$, $5+5=10$ centaines qui font 1 mille que je reſerve pour le quatriéme rang, qui eſt celui des mille, & parce qu'aprés 1 dixaine de centaine ou 1 mille il ne reſte plus de centaine, je remplis le troiſiéme rang qui eſt celui des centaines par le caractere o qui n'y donne rien, mais qui conſerve la valeur des rangs qui ſuivent. Enfin ne trouvant rien à ajoûter davantage, j'avance 1 mille que j'ai retenu ſous le rang des mille, & je connois que 1024 eſt la ſomme cherchée.

459
565
ſomme 1024

TROISIE'ME EXEMPLE.

Pour trouver la ſomme de 575 & 425. 1°. Je les diſpoſe comme aux exemples precedens. 2°. Je dis $5+5=10$ unitez qui font 1 dixaine que je reſerve pour le ſecond rang, & j'écris o ſous le premier, à cauſe qu'aprés 1 dixaine il ne reſte aucune unité. Et venant au ſecond rang, je dis 1 que j'ai retenu $+7=8$, $8+2=10$ dixaines, qui font une centaine que je reſerve pour le troiſiéme rang, & j'écris un nouveau o ſous le ſecond. Je dis en ſuite au troiſiéme rang 1 centaine que j'ai retenuë $+5=6$, $6+4=10$ centaines ou 1 mille que je retiens pour le quatriéme rang, & j'écris o ſous le troiſiéme. Enfin ne trouvant rien davantage à ajoûter, j'avance 1 mille que j'ai retenu ſous le quatriéme rang, & je connois que 1000 eſt la ſomme cherchée.

575
425
ſomme 1000

QUATRIE'ME EXEMPLE.

Pour trouver la ſomme de 2000, 3000, & 4000. 1°. Je les diſpoſe comme à l'ordinaire. 2°. Je dis au premier rang $0+0+0=0$ (par 5. S.) & j'écris o ſous ce rang. Et venant au ſecond, je dis $0+0+0=0$, & j'écris encore o ſous ce rang. Je dis en ſuite au troiſiéme $0+0+0=0$, & j'écris o ſous ce rang. Et enfin je dis au quatriéme $2+3=5$, $5+4=9$, j'écris 9 ſous ce rang. Et je connois que 9000 eſt la ſomme cherchée.

2000
3000
4000
ſomme 9000

CINQUIE'ME EXEMPLE.

On eſt ordinairement bien-aiſe de faire ſes operations avec promptitude. La connoiſſance des operations qu'on vient de faire, & des raiſons qu'on y a apportées étant diſtinctement apperçeuë, on peut abbreger ainſi ſon diſcours dans toutes les additions des nombres. Pour trouver la ſomme de 5678 & 4625. 1°. Je les diſpoſe à l'ordinaire. 2°. Je dis au premier rang $8+5=13$, j'écris 3 & je retiens 1. Au ſecond rang $1+7=8$, $8+2=10$, j'écris o & je retiens 1. Au troiſiéme rang $1+6=7$, $7+6=13$, j'écris 3, & je retiens 1. Au quatriéme rang $1+5=6$, $6+4=10$, j'écris o, & j'avance 1. Et je connois que 10303 eſt la ſomme cherchée.

5678
4625
ſomme 10303

SIXIE'ME EXEMPLE.

Pour trouver pareillement la ſomme de 4567, 7919, 3488, 5896, & 7685. 1°. Je les diſpoſe à l'ordinaire. 2°. Je dis au premier rang $7+9=16$, $16+8=24$, $24+6=30$, $30+5=35$, j'écris 5 & je retiens 3. Au ſecond rang $3+6=9$, $9+1=10$, $10+8=18$, $18+9=27$, $27+8=35$, j'écris 5 & je retiens 3. Au troiſiéme rang $3+5=8$, $8+9=17$, $17+4=21$, $21+8=29$, $29+6=35$, j'écris 5 & je retiens 3. Enfin au dernier rang $3+4=7$, $7+7=14$, $14+3=17$, $17+5=22$, $22+7=29$, j'écris 9, & j'avance 2. Et je connois que 29555 eſt la ſomme cherchée.

4567
7919
3488
5896
7685
ſomme 29555

Avertissement.

LXIV. *Lorſqu'on veut trouver la ſomme de pluſieurs nombres, pour ne point ſe broüiller dans ſon operation, & pour la faire avec plus de facilité, il faut la partager en n'ajoûtant pas tous ces nombres à la fois. Si par exemple on vouloit trouver la ſomme de trente nombres, l'on en feroit trois partages de dix chacun, l'on reduiroit ces trois partages en trois ſommes, leſquelles étant ajoûtées en une ſeule, donneroient la ſomme totale des trente nombres propoſez.*

DE L'ADDITION

DES GRANDEURS LITERALES.

LXV. Pour ajoûter une ou pluſieurs grandeurs literales à une ou à pluſieurs autres, il ne faut que les lier & les joindre toutes enſemble en conſervant les mêmes ſignes + ou — qui les precedent. Ainſi pour ajouter c à b, c'eſt à dire $+c$ à b, la ſomme eſt $b+c$. Pour ajoûter $d-e+f$ à $b-c$, la ſomme eſt $b-c+d-e+f$.

LXVI. Lorſque la ſomme renferme quelque grandeur repetée pluſieurs fois ſous un même ſigne, on écrit une ſeule fois cette grandeur precedée de ſon ſigne, & du nombre qui exprime combien de fois elle eſt repetée. Ainſi au lieu de $b+b$, l'on écrit $2b$. Au lieu de $2a+a+a+c+d+c$, on écrit $4a+2c+d$.

LXVII. Lorſque la ſomme renferme quelque grandeur repetée pluſieurs fois ſous differens ſignes, on efface autant de fois cette grandeur qu'elle ſe trouve également ſous + & ſous —. Ainſi au lieu de $b+c-b$, l'on écrit ſeulement c, parceque $b-b=0$ (par 2. S) De même au lieu de $3b-b+4c-d-2c$, l'on écrit $2b+2c-d$, parceque $3b-b=2b$, & $4c-2c=2c$. Ces deux regles ſont d'un uſage tres-frequent. Il ſuffit d'en avertir une fois pour toutes.

EXEMPLES DE L'ADDITION

DES GRANDEURS LITERALES.

Add.	$a+3b$	$3a-3b$	$6a+b+d+2d$	$a-4e+3f$
	$a+2b$	$2a-b$	$9a+7b+4d+6f$	$2a+3e-f$
Somme	$2a+5b$.	$5a-4b$.	$15a+8b+7d+6f$.	$3a-e+2f$.

Add.	$2a+6b$		
	$3c-2d$	$2aa+3ab-bb$	$2abc-ffg+fgg$
	$2c+g$	$5ab-3aa$	$abd-abc+2ffg$
Somme	$2a+6b+3c-2d+g$.	$8ab-aa-bb$.	$abc+abd+ffg+fgg$.

LXVIII. Lorſque l'on ajoûte des grandeurs fauſſes avec des vraies, la ſomme eſt plus petite que les vraies. Ainſi ajoûtant -6 à 8 la ſomme $8-6=2$ eſt plus petite que 8, car 6 eſt retranché de 8. Ajoûtant $-c$ à b la ſomme $b-c$ eſt plus petite que b, car c eſt retranché de b. Ces ſortes d'additions negatives ſont de veritables retranchemens, ce n'eſt qu'improprement qu'on les appelle additions.

DE LA SOUSTRACTION.

DEFINITION GENERALE.

LXIX. La Souſtraction eſt une expreſſion que l'on fait du retranchement d'une ou de pluſieurs grandeurs données, d'une ou de pluſieurs grandeurs auſſi données.

LXX. Comme l'on connoît ce qu'on retranche, & cela dont on le retranche, on cherche ſeulement la partie qui reſte aprés le retranchement. Cette partie qui eſt le reſte de la ſouſtraction eſt la difference de ce qu'on retranche à ce dont on le retranche. Si par exemple on retranche 6 de 8, le reſte eſt $8-6=2$, & 2 qui fait partie de 8 eſt la difference qui eſt entre 6 & 8.

Comme la ſouſtraction des nombres ſe fait autrement que celle des lettres, on expliquera l'une aprés l'autre.

DE LA SOUSTRACTION DES NOMBRES.

DEMANDE.

LXXI. On demande que l'on ſçache déja ſouſtraire tout nombre au deſſous de 10 de tout autre au deſſous de 19, comme que $4-3=1$, que $9-5=4$, que $18-9=9$, que $15-7=8$, que $14-8=6$, &c. Il reſte à ſçavoir trouver les autres differences des nombres qui ſont l'un au deſſus de 10, ou l'autre au deſſus de 18 à l'infini, leſquelles ne pouvant d'ordinaire ſe trouver tout d'un coup, on eſt obligé de les chercher par parties en cette ſorte.

SECOND PROBLEME.

Trouver la difference de deux nombres donnez.

LXXII. 1°. On diſpoſe le plus petit ſous le plus grand, les unitez ſous les unitez, les dixaines ſous les dixaines, &c.

LXXIII. 2°. Commençant au premier rang on retranche par ordre & dans chaque rang le chiffre de deſſous du chiffre de deſſus, & l'on écrit ſous ce rang ce qui reſte

LXXIV. 3°. Et ſi dans un rang le chiffre de deſſous ſurpaſſe celui de deſſus, ce chiffre de deſſus empruntera 1 dixaine de celui qui le ſuit, lequel pour cet effet diminuera de l'unité. L'operation étant ainſi achevée, les chiffres écrits ſous les rangs ſont la difference cherchée. Les exemples éclairciront ces regles.

PREMIER EXEMPLE.

Pour trouver la difference des deux nombres 869 & 234. 1°. Je diſpoſe le petit ſous le grand dans le même ordre que j'ai fait au premier Probleme. 2°. Je fais ainſi la ſouſtraction en commençant au premier rang; je dis

9—4=5, & j'écris 5 ſous ce rang. Et venant au ſecond je dis 6—3=3, & j'écris 3 ſous ce rang. Je dis enſuite au troiſiéme rang 8—2=6, j'écris 6 ſous ce troiſiéme rang. Et l'operation étant ainſi achevée, je connois que 633=869—234 eſt le reſte de la ſouſtraction, ou la difference cherchée.

+869
—234
difference 635

Second Exemple.

Pour trouver la difference de 678 à 489. 1°. Je diſpoſe comme au premier exemple 489 ſous 678. 2°. Je dis au premier rang 8 unitez —9 unitez oſtent trop, car 9 ne peut eſtre compris dans 8. J'emprunte donc (ſelon la troiſiéme regle de noſtre Probleme) 1 dixaine des 7 dixaines qui ſont au ſecond rang, écrivant 6 au lieu de 7 que j'efface. Cette dixaine empruntée plus 8 unitez du premier rang font 18 unitez, je dis donc 18—9 unitez font 9 unitez, & j'écris 9 ſous le rang des unitez. Et venant au ſecond rang, je dis 6 dixaines —8 dixaines oſtent trop, j'emprunte donc une dixaine de dixaines des 6 dixaines de dixaines qui ſont au troiſiéme rang, écrivant 5 au lieu de 6 que j'efface. Cette dixaine de dixaines plus 6 dixaines du ſecond rang font 16 dixaines. Je dis donc 16—8=8 dixaines, & j'écris 8 ſous le rang des dixaines. Je dis enfin au troiſiéme rang 5—4=1, j'écris 1 ſous ce rang, & je connois que 189 eſt la difference cherchée.

56
+~~67~~8
—489
differencel 189

Troisie'me Exemple.

Pour trouver la difference de 842 à 405. 1°. Je les diſpoſe comme aux exemples precedens. 2°. Je dis au premier rang 2—5 oſtent trop, j'emprunte donc 1 dixaine de 4 écrivant 3 au lieu de 4. Cette dixaine +2=12, je dis donc 12—5=7, & j'écris 7 ſous le premier rang. Et venant au ſecond, je dis 3—0=3, & j'écris 3 ſous ce rang. Je dis enfin au troiſiéme 8—4=4, j'écris 4 ſous ce rang, & je connois que 437 eſt la difference cherchée.

3
+842
—405
difference 437

Quatrie'me Exemple.

Pour trouver la difference de 346 à 246. 1°. Je les diſpoſe à l'ordinaire. 2°. Je dis au premier rang 6—6=0, & j'écris 0 ſous ce rang. Et venant au ſecond, je dis 4—4=0, & j'écris encore 0 ſous ce rang. Je dis enfin au troiſiéme rang 3—2=1, j'écris 1 ſous ce rang, & je connois que 100 eſt la difference cherchée.

+346
—246
difference 100

Cinquie'me Exemple.

Pour trouver la difference de 800 à 200. 1°. Je les diſpoſe à l'ordinaire. 2°. Je dis au premier rang 0—0=0, & j'écris 0 ſous ce rang. Et venant au ſecond, je dis encore 0—0=0, & j'écris encore 0 ſous ce rang. Je dis enfin au troiſiéme rang 8—2=6, j'écris 6 ſous ce rang, & je connois que 600 eſt la difference cherchée.

+800
—200
difference 600

Sixie'me Exemple.

Pour trouver la difference de 900 à 432. 1°. Je les diſpoſe à l'ordinaire.

2°. Je dis au premier rang $0-2$ oſte trop, car 2 ne peut eſtre compris dans 0, j'emprunte donc 1 dixaine de 0 écrit au rang des dixaines, écrivant -1 au lieu de 0. Ces 10 empruntez plus 0 du premier rang font 10, je dis donc $10-2=8$, & j'écris 8 ſous ce rang. Et venant au ſecond, je dis $-1-3$ oſtent trop, car 3 ne peut eſtre compris dans -1, j'emprunte donc 1 dixaine de 9, écrivant 8 au lieu de 9. Ces 10 empruntez -1 écrit au ſecond rang font 9, je dis donc $9-3=6$, & j'écris 6 ſous ce rang. Je dis enfin au troiſiéme $8-4=4$, j'écris 4 ſous ce rang, & je connois que 468 eſt la difference cherchée.

8-1
$+\cancel{9}00$
-432
difference 468

LXXV. Quelques-uns au lieu de diminuer de l'unité le chiffre dont ils empruntent 1 dixaine, aiment mieux augmenter de la même unité celui qui eſt écrit ſous lui. Par exemple pour faire la ſouſtraction qui precede ſelon leur methode, je dis $0-2$ oſte trop, j'emprunte donc 1 dixaine de 0 écrit au rang des dixaines en ajoûtant 1 à 3 écrit ſous lui. Enſuitte je dis au premier rang les 10 empruntez $-2=8$ unitez, & j'écris 8 ſous le rang des unitez. Et venant au ſecond rang je dis $0-4$ oſte trop, j'emprunte donc 1 dixaine de 9 qui eſt dans le troiſiéme rang en ajoûtant 1 à 4 écrit ſous 9, & je dis au ſecond rang, les 10 empruntez $-4=6$, & j'écris 6 ſous ce rang. Enfin au troiſiéme je dis $9-5=4$, j'écris 4 ſous ce rang, & je connois que 468 eſt la difference cherchée.

$+900$
-432
-11
difference 468

LXXVI. On peut faire auſſi la ſouſtraction des nombres en commençant de gauche à droite, & obſervant de retenir 1 de chaque rang qui vaudra 10 pour le rang qui precede, lorſqu'on voit dans ce rang qui precede que ſon chiffre écrit deſſous eſt plus grand que celui de deſſus, ou bien lorſque ces chiffres étant égaux, on voit au nouveau rang qui les precede que le chiffre écrit deſſous eſt plus grand que celui de deſſus.

Par exemple pour retrancher 19218 de 68386, j'écris ces nombres à l'ordinaire, & je dis en commençant au cinquiéme & dernier rang $6-1=5$, mais parce qu'au quatriéme rang qui precede, 9 ſurpaſſe 8 ſous qui il eſt écrit, j'écris ſeulement 4 ſous le cinquiéme rang, & je retiens 1 qui vaut 10 pour le quatriéme. Et venant à ce quatriéme rang je dis $10+8=18-9=9$, & j'écris 9 ſous ce rang. Et venant au troiſiéme je dis $3-2=1$, & j'écris 1 ſous ce rang. Je dis enſuite au ſecond rang $8-1=7$, mais parce qu'au premier rang 8 eſt plus grand que 6 ſous qui il eſt écrit, j'écris ſeulement 6 ſous le ſecond rang, & je retiens 1 qui vaut 10 pour le premier. Enfin je dis à ce premier rang $10+6=16$, $16-8=8$, j'écris 8 ſous ce rang, & je connois que 49168 eſt la difference cherchée.

$+68\ 86$
-19218
difference 49168

Pareillement pour retrancher 77989675 de 257389560, j'écris ces nombres à l'ordinaire, & je dis au neuviéme & dernier rang 2 moins rien fait 2, mais parce qu'au huitiéme rang 7 ſurpaſſe 5 ſous qui il eſt placé, j'écris ſeulement 1 ſous le neuviéme rang, & je retiens 1, qui vaut 10 au huitiéme. Et venant à à ce huitiéme rang, je dis 10+5=15, 15—7=8, mais parceque 7 & 7 écrits au ſeptiéme rang ſont égaux, & qu'au ſixiéme 9 ſurpaſſe 3 ſous qui il eſt placé, j'ècris ſeulement 7 ſous le huitiéme, & je retiens 1 dixaine pour le ſeptiéme. Je dis enſuite à ce ſeptiéme rang 10+7=17, 17—7=10, j'en écris ſeulement 9 ſous ce rang. Et venant au ſixiéme je dis 10+3=13, 13—9=4, mais parceque 8 & 8 écrits au cinquiéme rang, plus 9 & 9 écrits au quatriéme ſont égaux dans chacun de ces rangs, & qu'au troiſiéme 6 ſurpaſſe 5 ſous qui il eſt placé, j'écris ſeulement 3 ſous le ſixiéme rang, & 9 ſous le cinquiéme, plus encore 9 ſous le quatriéme. Et venant au troiſiéme je dis 10+5=15, 15—6=9, j'en écris ſeulement 8, & je dis au ſecond rang 10+6=16, 16—7=9, j'en écris 8. Et enfin je dis au premier rang 10+0=10, 10—5=5, j'écris 5 ſous ce rang, & je connois que 179399885 eſt la difference cherchée.

+257389560
—77989675
difference 179399885

Cette methode me ſemble plus d'uſage, & je m'en ſers plus volontiers que des precedentes, parceque je trouve qu'elle charge beaucoup moins la memoire que celle du probleme, & qu'outre cela il ne faut effacer ni ajoûter aucuns chiffres, ce qui eſt fort commode pour les ſupputations longues & frequentes, où le meilleur eſt toûjours d'embaraſſer ſes nombres & ſes calculs le moins qu'on le peut.

LXXVII. Lorſque le nombre à retrancher eſt plus grand que le nombre duquel on le retranche, la difference ou le reſte eſt negatif. Si par exemple une perſonne devoit 5 écus à une autre, & lui en payoit 9, il eſt viſible que celle à qui elle devoit lui ſeroit redevable de 4 écus, c'eſt à dire que cette perſonne qui devoit auparavant 4 écus auroit rendu ſa debte moins que rien de 5 écus.

LXXVIII. Dans ces rencontres on écrit le plus grand nombre au deſſus, & aprés avoir operé à l'ordinaire l'on écrit — devant la difference qu'on trouve. Si par exemple on vouloit retrancher 68386 de 9218, il faudroit écrire 68386, & ſous lui 9218, & mettre le ſigne — devant 59168 qui reſtent. Ce reſte negatif marque qu'il s'en manque 59168 que le nombre 9218 ne ſoit auſſi grand que 68386 qui en doit eſtre retranché.

—68386
+9218
Reſte —59168

LXXIX. Lorſqu'on veut retrancher pluſieurs nombres donnez d'un ou de pluſieurs auſſi donnez, il faut par le premier Probleme trouver la ſomme des nombres qu'on veut retrancher, & celle des nombres dont on les veut retrancher, & enſuite trouver la difference de la premiere ſomme à l'autre nombre, ou à la ſomme des autres nombres dont on veut retrancher les premiers. Par exemple pour retrancher 5782+3436 de 68386, le premier Probleme donnera 9218 pour la ſomme de 5782+3436. C'eſt pourquoi je diſpoſe à l'ordinaire cette ſomme 9218 ſous 68386, & faiſant l'operation ſelon les regles, je connois que 59168 eſt la difference cherchée.

+68386
—9218
Difference 59168

Pareillement pour retrancher $57321+7640+90345$ de $34561+207456$. Le premier Probleme me donne 155306 pour la ſomme des trois nombres à retrancher, & 242017 pour la ſomme des deux autres dont il les faut retrancher. Ecrivant donc ſous cette ſomme celle des trois nombres à retrancher, les regles ordinaires me donnent 86711 pour la difference cherchée.

$$\begin{array}{rr} & +242017 \\ & -155306 \\ \hline \text{Difference} & 86711 \end{array}$$

DE LA SOUSTRACTION
DES GRANDEURS LITERALES.

LXXX. Pour ſouſtraire une ou pluſieurs grandeurs literales d'une ou de pluſieurs autres, il ne faut que les joindre en changeant chacun des ſignes de la grandeur ou des grandeurs à ſouſtraire. Car s'il faut retrancher le plus, le moins en fait le retranchement, & s'il faut retrancher le moins, le plus en fait le retranchement (par 53. S.) Ainſi pour retrancher b de a, le reſte ou la difference eſt $a-b$, & pour retrancher $-b$ de a, le reſte ou la difference eſt $a+b$. De même pour retrancher $d-e+f$ de $b-c$, la difference eſt $b-c-d+e-f$.

EXEMPLES DE LA SOUSTRACTION
DES GRANDEURS LITERALES.

De	$2a+5b$	$5a-4b$	$9a+7b+4d+6f$	$2a-4e+3f$
Oſter	$a+2b$	$3a-3b$	$6a+b+d+2d$	$a+3e-5f$
Reſte	$a+3b.$	$2a-b.$	$3a+6b+d+6f.$	$a-7e+8f.$

De	$2a+6b$		
Oſter	$\left\{\begin{array}{l}3c-2d\\2c+g\end{array}\right.$	$3aa+13ab$ $5ab-2aa-bb$	$2abc-ffg+fgg$ $abd-abc$
Reſte	$2a+6b-5c+2d-g.$	$5aa+8ab+bb.$	$3abc-abd-ffg+fgg.$

LXXXI. Si l'on ſouſtrait une grandeur fauſſe d'une vraie, le reſte du retranchement ou la difference eſt plus grande que la vraie. C'eſt ainſi que la difference de 4 à -3 eſt $4+3$ qui ſurpaſſe 4. De même $-b$ ſouſtrait de a donne la difference $a+b$ qui ſurpaſſe a, puiſque b eſt ajoûté à a. Ces ſortes de ſouſtractions negatives ſont de veritables additions, ce n'eſt qu'improprement qu'on les appelle ſouſtractions.

Peut-eſtre que d'abord on aura un peu de peine à voir comment la difference d'une grandeur poſitive comme 4 à une autre negative comme -3 peut eſtre $4+3=7$, mais on comprendra aiſément cette verité, ſi l'on examine que pour arriver de 4 à -3, il faut premierement deſcendre de 4 unitez pour arriver de 4 à zero, & qu'enſuite il faut encore deſcendre de 3 unitez, pour arriver de zero à -3, c'eſt à dire qu'il faut deſcendre en tout de $4+3$ ou de 7 unitez pour arriver de 4 à -3.

L'Addition & la ſouſtraction ſont oppoſées l'une à l'autre. L'une défait
LXXXII. ce que l'autre a fait, & elles ſe ſervent reciproquement de preuves. Le tout
eſt égal à l'aſſemblage de toutes ſes parties, ſi donc on oſte les parties du tout

il ne doit rien reſter de ce tout. Ainſi pour s'aſſurer que 677 eſt la ſomme des deux nombres 432 & 245, il ne faut que retrancher ces deux nombres de 677, s'il ne reſte rien, l'addition eſt bien faite; mais s'il reſte + ou — que rien, l'addition eſt mal faite, il la faut recommencer.

Et par un raiſonnement reciproque les parties ſont égales au tout qu'elles compoſent. Si donc on réünit toutes ces parties on aura leur tout. Ainſi pour s'aſſurer que 245 eſt la difference du tout 677 à ſa partie 432, il faut ajoûter 245 à 432. Si la ſomme rend le tout 677, la ſouſtraction eſt bien faite; mais ſi la ſomme ne rend pas ce tout la ſouſtraction eſt mal faite, il la faut recommancer.

Il ne faut pas s'imaginer comme on le fait ordinairement, que cette maniere d'examiner ſi on n'a point failli, ſoit une démonſtration veritable: Car outre qu'elle n'éclaire pas l'eſprit, il pouroit arriver que l'on ſe tromperoit autant dans la ſouſtraction qu'on ſe ſeroit trompé dans l'addition. La veritable démonſtration de ces operations ſur les nombres dépend de la diſpoſition des chiffres & de leurs rangs expliquée 38. S. Car cette diſpoſition regle les operations, & fait voir que l'on doit ajoûter les unitez aux unitez, les dixaines aux dixaines, &c. ou que l'on doit ainſi les retrancher les unes des autres, comme on l'explique dans les exemples qui precedent. C'eſt à peu prés la même choſe des deux operations qui ſuivent.

DE L'ADDITION COMPOSE'E OU MULTIPLICATION.

DEFINITION GENERALE.

LXXXIII. LA Multiplication eſt l'addition ou la poſition d'une grandeur donnée dans quelqu'une qu'on cherche, égale à l'addition ou à la poſition de l'unité dans une grandeur auſſi donnée.

LXXXIV. On appelle la grandeur qu'on cherche le *produit* des deux données, & ces grandeurs les deux *racines* du produit.

Chacune de ces racines peut eſtre poſitive, ou l'une poſitive & l'autre negative, ou bien chacune negative. Ce qui fait les trois Cas qui ſuivent.

PREMIER CAS.

LXXXV. Si chaque racine eſt poſitive le produit ſera poſitif. Si par exemple on multiplie +2 par +4, le nombre donné ou la racine +2 eſt l'addition ou la ſomme poſitive de l'unité repetée deux fois; le produit de 2 par 4 ſera donc auſſi l'addition ou la ſomme poſitive de l'autre racine +4 repetée 2 fois, c'eſt à dire le nombre poſitif +8.

+1 *unité*	+4 *autre racine*
+1 *repetée*	+4 *repetée*
+2 *racine.*	+8 *produit.*

Ou par un raiſonnement reciproque la racine +4 eſt l'addition ou la ſomme poſitive de l'unité repetée 4 fois; le produit de 2 par 4 ſera donc auſſi l'addition ou la ſomme poſitive de l'autre racine +2 repetée 4 fois, c'eſt à dire le nombre poſitif +8.

+1	+2
+1 *unité*	+2 *autre*
+1 *repetée*	+2 *racine*
+1	+2 *repetée*
+4 *racine.*	+8 *produit.*

SECOND CAS.

LXXXVI. Si une racine eſt poſitive & l'autre negative, leur produit ſera negatif. Si par exemple on multiplie +2 par —4, la racine +2 eſt l'addition ou la ſomme poſitive de l'unité repetée 2 fois, le produit de +2 par —4 ſera donc auſſi l'addition ou la ſôme poſitive de l'autre racine —4 repetée 2 fois, c'eſt à dire le nombre negatif —8 (par 55. S.)

+1 *unité*	—4 *autre racine*
+1 *repetée*	—4 *repetée*
+2 *racine.*	—8 *produit.*

Ou bien par un raiſonnement reciproque la racine —4 eſt l'addition negative ou la ſomme negative de l'unité repetée 4 fois, le produit de +2 par —4 ſera donc auſſi l'addition negative ou la ſomme negative de l'autre racine +2 repetée 4 fois, c'eſt à dire le nombre negatif —8 (par 55. S.)

+1	+2 *autre*
+1 *unité*	+2 *racine*
+1 *repetée*	+2 *repetée*
+1	+2
—4 *racine.*	—8 *produit.*

TROISIE'ME CAS.

Si chaque racine eſt negative leur produit ſera poſitif. Si par exemple on multiplie —2 par —4, la racine —2 eſt l'addition negative ou la ſomme negative de l'unité repetée 2 fois, le produit de —2 par —4 ſera donc auſſi l'addition negative ou la ſomme negative de l'autre racine —4 repetée 2 fois, c'eſt à dire le nombre poſitif moins moins 8=+8. (par 54 S.)

+1 *unité*	—4 *autre racine*
+1 *repetée*	—4 *repetée*
—2 *racine.*	+8 *produit.*

LXXXVII Ou bien par un raiſonnement reciproque la racine —4 eſt l'addition negative ou la ſomme negative de l'unité repetée 4 fois, le produit de —2 par —4 ſera donc auſſi l'addition negative ou la ſomme negative de l'autre racine —2 repetée 4 fois, c'eſt à dire le nombre poſitif moins moins 8=+8 (par 54. S.)

+1	—2
+1 *unité*	—2 *autre*
+1 *repetée*	—2 *racine*
+1	—2 *repetée*
—4 *racine.*	+8 *produit.*

LXXXVIII Il eſt donc évident que plus multiplié par plus, ou moins par moins donne plus : Et que plus multiplié par moins, ou moins par plus donne moins.

DE LA MULTIPLICATION DES NOMBRES.

DEMANDE.

LXXXIX. ON demande que l'on ſçache déja multiplier l'un par l'autre deux nombres qui ſoient chacun au deſſous de 10, comme que 2 fois 4=8, que 3 fois 5=15, que 5 fois 7=35, que 8 fois 9=72, & les autres. Voici une Table pour trouver facilement tous ces petits produits. Ceux qui commencent auront ſoin de l'apprendre par cœur & de ſe la rendre tres-familiere, parcequ'elle eſt d'une neceſſité abſoluë pour la ſuite.

Voyez la premiere Planche Table premiere.

Cette Table eſt diviſée en dix rangs, & chaque rang en dix petits quarrez qu'on appelle cellules. Les cellules du rang A B & celles du rang A C contiennent les dix premiers nombres 1, 2, 3, 4, 5, &c.

Pour trouver le produit de deux nombres qui ſoient chacun au deſſous de

10, il faut prendre l'un de ces nombres au rang A B & l'autre au rang A C, la cellule qui répondra à chacun de ces deux nombres renferme le nombre cherché. Par exemple pour avoir le produit de 6 par 7, je prens 6 au rang A B & 7 au rang A C, la cellule qui répond à chacun de ces deux nombres 6 & 7 renferme le produit cherché 42. Ou bien auſſi je prens 7 au rang AB & 6 au rang AC, & la cellule qui répond à chacun de ces deux nombres renferme le même produit cherché 42. Il en eſt ainſi des autres produits dont je parle. Il reſte à ſçavoir trouver ceux à l'infini qui ont quelque racine au deſſus de 10, leſquels ne pouvant d'ordinaire ſe trouver tout d'un coup, on eſt obligé de les chercher par parties en cette ſorte.

TROISIE'ME PROBLEME.

Trouver le produit de deux nombres donnez.

1°. On diſpoſe le petit nombre donné ou la petite racine ſous la grande, XC.
les unitez ſous les unitez, &c.

2°. On multiplie la grande racine, 1°. par le premier chiffre de la petite, XCI.
2°. par le ſecond, 3°. par le troiſiéme, &c. Et commençant à écrire chacun de ces produits ſous le rang du chifre multipliant, on écrit ſous chaque rang ce qui lui appartient, c'eſt à dire les unitez ſous les unitez, les dixaines ſous les dixaines, &c. La ſomme de tous ces produits partiaux ſera le produit cherché. Les exemples éclairciront ces regles.

Premier Exemple.

Pour trouver le produit des deux racines 24 & 3. 1°. Je diſpoſe la petite 3 ſous la grande 24. 2°. Je dis 3 fois 4=12, j'écris 2 ſous le rang des unitez, & je retiens 1 dixaine pour le rang des dixaines. Et venant à ce rang je dis 3 fois 2 dixaines plus 1 dixaine retenuë font 7 dixaines, j'écris donc 7 ſous le rang des dixaines, & je connois que 72 eſt le produit cherché.

24
3
Produit 72

Second Exemple.

Pour trouver le produit de 84 par 26. 1°. Je diſpoſe 26 ſous 84. 2°. Je multiplie 84, 1°. par 6 premier chifre de 26, en diſant 6 fois 4=24, j'écris 4 ſous le premier rang, & je retiens 2 pour le ſecond. Et venant à ce ſecond, je dis 6 fois 8=48, +2 que j'ai retenu font 50, j'écris donc 0 ſous le ſecond rang, & j'avance 5 ſous le troiſiéme. 2°. Je multiplie 84 par 2 ſecond chifre de 26, en diſant 2 fois 4=8, c'eſt à dire 80, à cauſe que le chifre multipliant 2 vaut 2 dixaines, j'écris donc 8 ſous le ſecond rang, & je dis 2 fois 8=16, j'écris 6 ſous le troiſiéme rang, & j'avance 1 ſous le quatriéme, & je connois que 2184 eſt le produit cherché.

84
26
504
168
Produit 2184

Troiſiéme Exemple.

Pour trouver le produit de 80 par 60. 1°. Je diſpoſe 60 ſous 80. 2°. Je multiplie 80 par 0 premier chifre de 60, en diſant 80 fois 0=0, & j'écris 0 ſous le premier rang ſeul, afin de conſerver la valeur des chifres ſuivans. Je multiplie enſuite 80 par 6 ſecond chifre de 60, en diſant 6 fois $0=0$, & j'écris 0 ſous le ſecond rang, 6 fois $8=48$, j'écris 8 ſous le troiſiéme, & avançant 4 ſous le quatriéme, je connois que 4800 eſt le produit cherché.

$$\begin{array}{r} 80 \\ 60 \\ \hline \textit{Produit}\ 4800 \end{array}$$

Pour multiplier un nombre par 10, par 100, par 1000, &c. il ne faut que lui ajoûter 0, 00, 000, &c. Car dans ces ſortes de multiplications, il ne faut que reculer d'un, ou de deux, ou de trois rangs le nombre qu'on propoſe, afin qu'il vaille dix fois, cent fois, ou mille fois autant. C'eſt ainſi que le produit de 59 par 10 eſt 590, que le produit de 5475 par 10 eſt 54750, que le produit de 1090 par 100 eſt 109000, que le produit de 34987 par 1000 eſt 34987000. Et ainſi des autres.

Quatrièmo Exemple.

Pour trouver le produit de 670 par 305. 1°. Je diſpoſe 305 ſous 670. 2° Je multiplie 670 par 5 premier chifre de 305, en diſant 5 fois $0=0$, & j'écris 0 ſous le premier rang. Et venant au ſecond, je dis 5 fois $7=35$, j'écris 5 ſous le ſecond rang, & je retiens 3 pour le troiſiéme. Et venant à ce troiſiéme rang, je dis 5 fois $6=30$, $30+3$ que j'ai retenu font 33, j'écris donc 3 ſous le troiſiéme rang, & j'avance 3 ſous le quatriéme. Je multiplie enſuite 670 par 0 ſecond chifre de 305, en diſant 670 fois $0=0$, & j'écris 0 ſous le ſecond rang. Enfin je multiplie 670 par 3 dernier chifre de 305, en diſant 3 fois $0=0$, & j'écris 0 ſous le troiſiéme rang aprés 0 écrit au ſecond, 3 fois $7=21$, j'écris 1 ſous le quatriéme rang, & je retiens 2 pour le cinquiéme, 3 fois $6=18$, $18+2$ que j'ai retenu font 20, j'écris 0 ſous le cinquiéme rang, & j'avance 2 ſous le ſixiéme, & je connois que 204350 eſt le produit cherché.

$$\begin{array}{r} 670 \\ 305 \\ \hline 3350 \\ 20100. \\ \hline \textit{Produit}\ 204350 \end{array}$$

DE LA MULTIPLICATION
DES LETTRES.

XCII. Lorſque chaque racine eſt exprimée par lettres, on joint immediatement ces lettres, & l'on écrit devant le ſigne $+$, ſi chaque racine a le même ſigne $+$ ou le même ſigne $-$, à cauſe que $+$ par $+$, ou $-$ par $-$ donne $+$ (par 88. S.) mais on écrit devant le ſigne $-$, ſi une racine a $+$ & l'autre $-$, à cauſe que $+$ par $-$ ou $-$ par $+$ donne $-$ (par 88. S.) Ainſi pour multiplier $+a$ par $+b$, ou $-a$ par $-b$, on écrit $+ab$. Et pour multiplier $+a$ par $-b$, ou $-a$ par $+b$, on écrit $-ab$.

XCIII Si quelques nombres precedent les lettres, 1°. on multiplie les nombres par les nombres, 2°. les lettres par les lettres, 3°. on écrit le produit des nombres devant le produit des lettres. Ainſi pour multiplier $+2a$ par $+4b$, 1°. on multiplie $+2$ par $+4$, le produit eſt $+8$. 2° on multiplie a par b, le produit eſt ab. 3°. on écrit $+8$ devant ab, & l'on obtient $+8ab$ pour le produit de $+2a$ par $+4b$. De même le produit de $-2a$ par $-4b$ eſt $8ab$. Et le produit de $+2a$ par $-4b$, ou de $-2a$ par $+4b$ eſt $-8ab$.

L'une des marques ordinaires de la multiplication eſt encore x. Ainſi $a \times b$ ſignifie que a eſt multiplié par b. Demême 9×8 ſignifie que 9 eſt conçeu comme multiplié par 8. XCIV.

Lorſque chaque racine ou qu'une ſeulement eſt exprimée par pluſieurs lettres qui en déſignent les parties, chaque partie d'une part ſera multipliée par chaque partie de l'autre part, à peu prés comme aux nombres, où on multiplie chaque chifre d'une racine par chaque chifre de l'autre. Ainſi pour multiplier $a+b$ par c. 1°. b par $c=bc$, 2°. a par $c=ac$, la ſomme $ac+bc$ des deux produits partiaux bc & ac fait le produit total de $a+b$ par c. XCV.

$$\begin{array}{r} a+b \\ c \\ \hline \textit{Produit}\ ac+bc \end{array}$$

De même pour multiplier $a+b$ par $c+d$. 1° b par $d=bd$, 2° a par $d=ad$, 3° b par $c=bc$, 4° a par $c=ac$, la ſomme $ac+bc+ad+bd$ des quatre produits partiaux fait le produit total de $a+b$ par $c+d$.

$$\begin{array}{r} a+b \\ c+d \\ \hline ad+bd \\ ac+bc \\ \hline \textit{Produit}\ ac+bc+ad+bd \end{array}$$

EXEMPLES DE LA MULTIPLICATION
DES GRANDEURS LITERALES.

$$\begin{array}{l} a+b \\ a-b \\ \hline -ab-bb \\ aa+ab \\ \hline aa \quad * \; -bb. \end{array} \qquad \begin{array}{l} a+b \\ a+b \\ \hline ab+bb \\ aa+ab \\ \hline aa+2ab+bb. \end{array} \qquad \begin{array}{l} a-b \\ c-d \\ \hline -ad+bd \\ ac-bc \\ \hline ac-bc-ad+bd. \end{array} \qquad \begin{array}{l} a+b \\ c+d \\ \hline ad+bd \\ ac+bc \\ \hline ac+bc+ad+bd. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} aa+2ab+bb \\ a+b \\ \hline aab+2abb+b^3 \\ a^3+2aab+abb \\ \hline a^3+3aab+3abb+b^3. \end{array} \qquad \begin{array}{r} aa-2ab+bb \\ a-b \\ \hline -aab+2abb-b^3 \\ a^3-2aab+abb \\ \hline a^3-3aab+3abb-b^3. \end{array} \qquad \begin{array}{r} aa-ab+bb \\ a+b \\ \hline aab-abb+b^3 \\ a^3-aab+abb \\ \hline a^3 \quad * \quad * +b^3. \end{array}$$

XCVI.

On ſe contente ſouvent d'exprimer la multiplication des grandeurs compoſées de pluſieurs parties, en écrivant une ligne au deſſus de chacune des racines & les joignant en cette ſorte $\overline{a-b+c}\;\overline{b+f}$ c'eſt à dire $a-b+c$ multiplié par $b+f$. XCVII.

Dans la multiplication de deux racines le produit de la premiere par la ſeconde eſt le même que le produit de la ſeconde par la premiere. Ainſi le produit de 2 par 4 eſt le même que le produit de 4 par 2, puiſque 2 fois 4 ou 4 fois 2 font 8. Pareillement ab produit de a par b eſt le même que ba produit de b par a. D'où il eſt clair que dans la multiplication de pluſieurs racines, l'ordre ſelon lequel on les multiplie eſt indifferent. abc par exemple, produit des trois racines a, b, & c eſt le même que acb, ou bac, ou cab, ou cba ; Il n'importe point par où l'on commence, ni par où l'on finiſſe.

DES PRODUITS
ET DE LEURS GENRES DIFFERENS.

XCVIII. Les produits ſe diſtinguent en differens genres, qu'on appelle *dimenſions* ou *degrez*.

XCIX. Lorſque des grandeurs ſont conſiderées comme n'étant point multipliées, on les appelle grandeurs *ſimples* ou *lineaires*. Ainſi a ou b ou x ſont des grandeurs lineaires.

C. Le produit de deux grandeurs lineaires eſt appellé *plan*. Ainſi ab eſt le plan de a par b.

CI. Le produit d'un plan par une grandeur lineaire eſt appellé *ſolide*. Ainſi abc eſt un ſolide de ab par c, ou de a par cb, ou de b par ac.

CII. Le produit d'un ſolide par une grandeur lineaire, ou d'un plan par un autre plan s'appellera un *ſurſolide*. Ainſi $abcd$ ſera un ſurſolide de abc par d, ou de ab par cd, ou de a par bcd &c.

CIII. Le produit d'un ſurſolide par une grandeur lineaire, ou d'un ſolide par un plan eſt appellé produit *de cinq dimenſions*. Ainſi $abcde$ eſt un produit de cinq dimenſions de $abcd$ par e, ou de abc par de, ou de a par $bcde$ &c. Et l'on conçoit dans le même ordre que des grandeurs peuvent monter à d'autres dimenſions plus hautes juſques à l'infini. Mais il ne faut pas s'imaginer que ces dimenſions ſoient quelque choſe de réel dans ces grandeurs; ce ſont ſeulement certaines additions plus ou moins compoſées que noſtre eſprit y conçoit.

CIV. Les produits des lettres marquent ordinairement aux yeux les racines conçeuës dans les grandeurs exprimées par ces lettres. Ainſi ab marque aux yeux une grandeur conçeuë comme un plan des deux racines lineaires a & b. De même abc marque aux yeux une grandeur conçeuë comme un ſolide des trois racines lineaires a, b, & c, ou ce qui eſt une même choſe, du plan ab par la racine lineaire c, ou du plan ac par la racine lineaire b.

CV. Mais ce n'eſt pas la même choſe dans les nombres, car un même nombre ſe conçoit comme lineaire, ou comme produit de dimenſions differentes & de differentes racines dans une même dimenſion. Par exemple on peut entendre par 144 un nombre lineaire, on peut entendre auſſi un plan des deux racines 2 & 72, ou 3 & 48, ou 4 & 36, ou 6 & 24, ou 8 & 18, ou 9 & 16, ou 12 & 12, à cauſe que 144 eſt égal à 2 fois 72, ou à 3 fois 48, ou à 4 fois 36, ou à 6 fois 24, ou à 8 fois 18, ou à 9 fois 16, ou à 12 fois 12.

On peut auſſi par le même nombre 144 entendre un ſolide des trois racines 2, 2 & 36, ou 2, 3 & 24, ou 2, 4 & 18, ou 2, 6 & 12, ou 2, 8 & 9, ou 3, 3 & 16, ou 3, 4 & 12, ou 3, 6 & 8, ou 4, 6 & 6, à cauſe que 144 eſt égal à 2 fois 2 fois 36, ou à 2 fois 3 fois 24, ou à 2 fois 4 fois 18, ou à 2 fois 6 fois 12, ou à 2 fois 8 fois 9, ou à 3 fois 3 fois 16, ou à 3 fois 4 fois 12, ou à 3 fois 6 fois 8, ou à 4 fois 6 fois 6. On peut entendre auſſi par le même nombre 144 un ſurſolide des quatre racines 2, 2, 3 & 12, ou 2, 2, 4 & 9, ou 2, 3, 4 & 6, &c. à cauſe que 144 eſt égal à 2 fois 2 fois 3 fois 12, ou à 2 fois 2 fois 4 fois 9, ou à 2 fois

3 fois 4 fois 6, &c. Et ainſi des autres dimenſions.

On conſidere ſouvent les grandeurs comme produits, deſquels une ou pluſieurs racines étant déterminées, il en faut auſſi déterminer quelque autre. On peut par exemple conſiderer 144 comme un plan, dont la racine 9 étant déterminée, il faut auſſi déterminer l'autre, ou bien comme un ſolide, où 3 & 8 étant determinez pour deux racines, il en faut auſſi déterminer la troiſiéme. C'eſt dequoi nous allons traitter dans l'operation ſuivante. CVI.

DE LA SOUSTRACTION COMPOSE'E, OU DIVISION.

DEFINITION GENERALE.

LA Diviſion eſt l'addition ou la poſition de l'unité dans une grandeur que l'on cherche, égale à l'addition ou à la poſition d'une racine donnée dans un produit donné. CVII.

La racine donnée s'appelle *diviſeur* du produit donné, & la ſomme de l'unité que l'on cherche s'appelle *expoſant* de ce produit à ſon diviſeur. 2 par exemple eſt l'expoſant du produit 8 à ſon diviſeur 4, parceque 2 expoſe que 4 eſt renfermé 2 fois dans 8. CVIII.

Le produit & ſon diviſeur peuvent eſtre chacun poſitif, ou l'un poſitif & l'autre negatif, ou bien chacun negatif. Ce qui fait les trois Cas ſuivans.

PREMIER CAS.

SI chacun eſt poſitif l'expoſant ſera poſitif. Si par exemple on diviſe le produit donné +8 par la racine donnée ou par le diviſeur +4, le produit +8 eſt l'addition ou la ſomme poſitive du diviſeur +4 repeté 2 fois, l'expoſant de +8 à +4 ſera donc auſſi l'addition ou la ſomme poſitive de l'unité repetée 2 fois, c'eſt à dire le nombre poſitif +2. CIX.

+4 *diviſeur*	+1 *unité*
+4 *repeté*	+1 *repetée*
+8 *produit.*	+2 *expoſant.*

SECOND CAS.

SI l'un eſt poſitif & l'autre negatif, l'expoſant ſera negatif. Si par exemple on diviſe le produit +8 par le diviſeur —4, le produit +8 eſt l'addition negative ou la ſomme negative du diviſeur —4 repeté 2 fois, l'expoſant de +8 à —4 ſera donc auſſi l'addition negative ou la ſomme negative de l'unité repetée 2 fois, c'eſt à dire le nombre negatif 2. CX.

—4 *diviſeur*	+1 *unité*
—4 *repeté*	+1 *repetée*
+8 *produit.*	—2 *expoſant.*

Et ſi l'on diviſoit —8 par +4, le produit —8 eſt l'addition negative ou la ſomme negative du diviſeur +4 repeté 2 fois, l'expoſant de —8 à +4 ſera donc auſſi l'addition negative ou la ſomme negative de l'unité repetée 2 fois, c'eſt à dire le nombre negatif —2.

+4 *diviſeur*	+1 *unité*
+4 *repeté*	+1 *repetée*
—8 *produit.*	—2 *expoſant.*

TROISIE'ME CAS.

CXI. Si chacun eſt negatif, l'expoſant ſera poſitif. Si par exemple on diviſe le produit —8 par le diviſeur —4, le produit —8 eſt l'addition ou la ſomme poſitive du diviſeur —4 repeté 2 fois, l'expoſant de —8 à —4 ſera donc auſſi l'addition ou la ſomme poſitive de l'unité repetée 2 fois, c'eſt à dire le nombre poſitif + 2. (par 54. S.)

—4 *diviſeur*	+ 1 *unité*
—4 *repeté*	+ 1 *repetée*
—8 *produit.*	+ 2 *expoſant.*

CXII. Il eſt donc évident que plus diviſé par plus, ou moins par moins donne plus : Et que plus diviſé par moins, ou moins par plus donne moins.

DE LA DIVISION DES NOMBRES.

DEMANDE.

CXIII. ON demande que l'on ſçache déja diviſer tout produit au deſſous de 82 par tout diviſeur au deſſous de 10, comme que dans 8 on trouve 2 fois 4, qu'en 6 on trouve 3 fois 2, qu'en 56 on trouve 7 fois 8, qu'en 81 on trouve 9 fois 9. Et ainſi des autres. La Table des petites multiplications ſervira auſſi pour trouver avec facilité les expoſants de ces petites diviſions. Par exemple pour trouver l'expoſant de 42 à 6, je prens 6 au rang AB & la cellule qui enfermant 42 répond à ce nombre 6, la cellule du rang AC qui répond auſſi à la cellule où eſt 42, enferme l'expoſant cherché 7. Ou bien auſſi je prens 6 au rang AC & la cellule qui enfermant 42 répond à ce nombre 6, la cellule du rang AB qui répond auſſi à la cellule où eſt 42, enferme l'expoſant cherché 7.

Voyez la premiere Planche Table premiere.

Mais ſi aucune des cellules qui répondent à la racine donnée n'enferme le produit donné, l'expoſant cherché n'eſt pas un nombre entier, & alors on cherche ſeulement combien de fois le diviſeur eſt tout entier dans le produit en cette ſorte. On prend le plus grand des nombres au deſſous de la racine donnée qui ſont dans les cellules qui lui répondent, & l'expoſant de ce nombre à la racine donnée eſt l'expoſant entier le plus approchant de celui qu'on cherche. Si par exemple je cherche l'expoſant de 44 à 6, je prens 6 au rang AB, & voyant qu'aucune des cellules qui répondent à 6 n'enferme 44, je prens 42 le plus grand des nombres au deſſous de 44 qui ſont dans les cellules qui répondent à 6, & alors 7 expoſant de 42 à 6, me marquant que 6 n'eſt que 7 fois tout entier dans 44, eſt auſſi l'expoſant entier le plus approchant de l'expoſant de 44 à 6. De même au lieu de l'expoſant de 78 à 8 on prendra le nombre entier 9, à cauſe que 8 n'eſt que 9 fois tout entier dans 78. Il en eſt ainſi des autres. Et il reſte à ſçavoir trouver les autres expoſants entiers ou les plus approchants des produits qui ſont au deſſus de 81 à tout diviſeur qui ſoit au deſſous du produit qu'on diviſe. Ces expoſants ne pouvant d'ordinaire ſe trouver tout d'un coup, on eſt obligé de les chercher par parties en cette ſorte.

QUATRIE'ME PROBLEME.

Trouver l'expoſant d'un nombre donné à un autre auſſi donné.

CXIV. 1°. On diſpoſe le diviſeur ſous les rangs du produit qui commencent à gauche, obſervant que le diviſeur ne ſurpaſſe jamais les rangs ſous qui on le place.

2°. On cherche par parties, en commençant à gauche, combien de fois le diviſeur eſt dans ces rangs, & écrivant l'expoſant trouvé dans un demi cercle à part, on retranche des rangs diviſez le produit du diviſeur par cet expoſant. CXV.

3°. On avance d'un rang vers la droite chaque chiffre du diviſeur, & on cherche par parties combien de fois le diviſeur eſt dans les rangs ſous qui on le place, & cet expoſant étant écrit avec l'autre au demi cercle, en l'avançant vers la droite, on retranche des rangs diviſez le produit du diviſeur par cet expoſant nouveau. Et on repete la même operation, juſques à ce que le diviſeur ait parcouru tous les rangs du produit donné. Tout ce qu'on trouve à la fin écrit au demi cercle eſt l'expoſant cherché. Les exemples éclairciront ces regles. CXVI.

Premier Exemple.

Pour trouver l'expoſant du produit 64 à 2 qu'on prend pour ſon diviſeur. 1°. Je diſpoſe 2 ſous le rang 6 du produit 64. 2°. Je dis 2 eſt 3 fois dans 6, j'écris 3 dans un demi cercle à part, & je retranche du rang diviſé 6 le produit de l'expoſant 3 par 2 écrit ſous le rang 6, en diſant 3 fois $2=6$, $6-6=0$, c'eſt à dire qu'il ne reſte rien de ce retranchement. Et ainſi j'efface 6 & 2 écrit ſous lui.

$$\begin{array}{l}\cancel{6}4\,(3\\ \cancel{2}\end{array}$$

3°. J'avance du ſecond rang où eſt 6, au premier où eſt 4 le diviſeur 2, en l'écrivant ſous 4, & je dis 2 eſt 2 fois dans 4, j'écris 2 au demi cercle avec l'autre expoſant 3, en l'avançant vers la droite, & je retranche du rang diviſé qui eſt 4, le produit du diviſeur 2 par l'expoſant nouveau qui eſt auſſi 2, en diſant 2 fois $2=4$, $4-4=0$, c'eſt à dire qu'il ne reſte rien; j'efface donc 4 & 2 écrit ſous lui. Et l'operation étant ainſi achevée, je connois que 32 écrit au demi cercle eſt l'expoſant cherché de 64 à 2, c'eſt à dire que 2 eſt 32 fois dans 64.

$$\begin{array}{l}\cancel{6}\cancel{4}\,(32\\ \cancel{2}\cancel{2}\end{array}$$

Second Exemple.

Pour trouver l'expoſant de 84 à 42. 1°. Je diſpoſe 42 ſous 84. 2°. Je dis 4 eſt 2 fois dans 8, j'écris 2 au demi cercle, & je retranche du rang 8 le produit de l'expoſant 2 par 4 écrit ſous 8, en diſant 2 fois $4=8$, $8-8=0$, & j'efface 8 & 4 écrit ſous lui. Je retranche auſſi de 4 écrit au premier rang le produit de l'expoſant 2 par 2 écrit ſous 4, en diſant 2 fois $2=4$, $4-4=0$. Effaçant donc 4 & 2, je connois que 2 eſt l'expoſant cherché.

$$\begin{array}{l}\cancel{8}4\,(2\\ \cancel{4}2\end{array}\qquad\begin{array}{l}\cancel{8}\cancel{4}\,(2\\ \cancel{4}\cancel{2}\end{array}$$

Troiſiéme Exemple.

Pour trouver l'expoſant de 800 à 4. 1°. Je diſpoſe comme au premier exemple 4 ſous 800. 2°. Je dis 4 eſt 2 fois dans 8, & j'écris 2 au demi cercle, je dis enſuite 2 fois $4=8$, $8-8=0$, & j'efface 8 & 4 écrit ſous 8.

$$\begin{array}{l}\cancel{8}00\,(2\\ \cancel{4}\end{array}$$

3°. J'avance 4 ſous 0 écrit au ſecond rang, & je dis 4 n'eſt aucune fois dans 0, j'écris 0 qui expoſe cette nullité, avec 2 au demi cercle, & je dis 0 par 4, ou 4 fois $0=0$, $0-0=0$, & j'efface 4.

$$\begin{array}{l}\cancel{8}00\,(20\\ \cancel{4}\cancel{4}\end{array}$$

4°. J'avance 4 ſous o écrit au premier rang, & je dis 4 n'eſt aucune fois dans o, j'écris donc o au demi cercle, & je dis 4 fois o═o, o—o═o. Il ne reſte rien, & je connois que 200 eſt l'expoſant cherché.

~~8~~00 (200
~~44~~4

Quatriéme Exemple.

Pour trouver l'expoſant de 5000 à 10: 1°. Je diſpoſe 10 ſous 5000. 2°. Je dis 1 eſt 5 fois dans 5, & j'écris 5 au demi cercle, 5 fois 1═5, 5—5═0, & j'efface 5 & 1, 5 fois o═o, & j'efface o écrit ſous le troiſiéme rang, ſans rien retrancher du produit donné.

~~5~~000 (5
~~10~~

3°. J'avance d'un rang chaque chifre du diviſeur 10, écrivant o ſous o du ſecond rang, & 1 ſous le troiſiéme, je dis enſuite 1 n'eſt aucune fois dans o ſous qui il eſt placé, j'écris donc o au demi cercle, & j'efface ſeulement 10 à cauſe que 10 fois o═o, & qu'ainſi il ne faut rien retrancher du produit donné.

~~5~~000 (50
~~100~~
~~1~~

4°. J'avance d'un rang chaque chifre du diviſeur 10, écrivant o ſous o du premier rang & 1 ſous o du ſecond, je dis enſuite 1 n'eſt aucune fois dans o, j'écris o au demi cercle, & j'efface 10, le reſte eſt ooo═o, & je connois que 500 eſt l'expoſant cherché.

~~5~~000 (500
~~1000~~
~~11~~

PREMIER AVERTISSEMENT.

Lorſque les nombres donnez ont chacun un ou pluſieurs zero conſecutifs aux premiers de leurs rangs, il ne faut qu'effacer de part & d'autre un nombre égal de ces zero, & diviſer le reſte ſelon les regles; l'expoſant de cette diviſion ſera le même que ſi l'on n'effaçoit point ces zero, comme on le peut voir dans l'exemple qui precede: car ſi au lieu de diviſer 1000 *par* 10 *comme j'ai fait, j'efface le zero qui occupe le premier rang de l'un & de l'autre, j'aurai* 100 *&* 1, *&* 100 *eſtant diviſé par* 1 *donne* 100 *qui eſt le même expoſant que j'avois trouvé par les regles. De même diviſant* 24000 *par* 600, *ſi j'efface les deux zero conſecutifs écrits aux premier & ſecond rangs dans l'un & dans l'autre, j'aurai* 240 *&* 6, *&* 240 *eſtant diviſé par* 6 *donnera* 40, *qui eſt auſſi l'expoſant de* 24000 *à* 600 *qu'on auroit trouvé par les regles.*

SECOND AVERTISSEMENT.

On entend que tout ce qui eſt à gauche ſur un nombre eſt auſſi ſur ce nombre, & qu'un nombre eſt ſous tout ce qui eſt à gauche ſur lui. Par exemple dans 24 *on entend que* 24 *eſt ſur* 4, *& que* 4 *eſt ſous* 24. *De même*
4
dans 2406 *on entend que* 240 *eſt ſur* 9, *& que* 9 *eſt ſous* 240, *mais on n'en-*
9
tend pas que 9 *ſoit ſous* 6, *ni que* 6 *ſoit ſur* 9. *Cette remarque eſt de conſequence pour la ſuite.*

Cinquiéme Exemple.

Pour trouver l'expoſant de 248 à 62. 1°. parceque le diviſeur 62 ſurpaſſe 24 écrit aux premiers rangs vers la gauche, j'avance d'un rang vers la droite chaque chifre de 62 en l'écrivant ſous 48.

248
62

2°. Je dis 6 eſt 4 fois dans 24, & j'écris 4 au demi cercle, 4 fois 6=24, 24—24=0, & j'efface 24 & 6, 4 fois 2=8, 8—8=0. Il ne reſte rien, & je connois que 4 eſt l'expoſant cherché.

248 (4
62

Sixiéme Exemple.

Pour trouver l'expoſant de 8670 à 34. 1°. Je diſpoſe 34 ſous 8670. 2°. Je dis 3 eſt 2 fois dans 8, & j'écris 2 au demi cercle 2 fois 3=6, 8—6=2, j'efface 8 & 3, & j'écris 2 ſur 8, 2 fois 4=8, 26—8=18, j'efface 26 & 4, & j'écris 18 ſur 26.

	1
2	28
8670 (2	8670 (2
34	34

3°. J'avance d'un rang chacun des chifres de 34 en écrivant ce nombre ſous 87, & je dis 3 eſt 6 fois dans 18, & j'écris 6 au demi cercle, 6 fois 3=18, 18—18=0, & j'efface 18 & 3, 6 fois 4=24, 7—24=—17, ce qui manifeſtement oſte trop, car 24 ne peut eſtre compris dans 7, l'expoſant 6 eſt donc trop grand, & ainſi j'écris ſeulement 5 au demi cercle, & je récris les chifres effacez 18 & 3, afin de recommencer un nouveau conte que je fais en diſant 5 fois 3=15, 18—15=3, j'efface 18 & 3, & j'écris 3 ſur 8, 5 fois 4=20, 37—20=17, j'efface 3 & 4, & j'écris 1 ſur 3, en laiſſant 7 où il eſt.

		1
	1	13
1	18	18
28	28	28
8670 (26	8670 (25	8670 (25
344	344	344
3	3	3
	3	3

4°. J'avance d'un rang chaque chifre de 34, en l'écrivant ſous 70, & je dis 3 eſt 5 fois dans 17, & j'écris 5 au demi cercle, 5 fois 3=15, 17—15=2, j'efface 17 & 3, & j'écris 2 ſur 7, 5 fois 4=20, 20—20=0, il ne reſte rien, & je connois que 255 eſt l'expoſant cherché.

2
13
18
282
8670 (255
3444
33
3

Septiéme Exemple.

Pour trouver l'expoſant de 24096 à 48. 1°. Je diſpoſe 48 ſous 24096, écrivant 4 ſous 24 & 8 ſous 0. 2°. Je dis 4 eſt 6 fois dans 24, mais je connois d'abord que l'expoſant 6 eſt trop grand, car 6 fois 4=24, 24—24=0, & 6 fois 8=48, 0—48=—48, ce qui manifeſtement oſte trop, j'écris donc 5 au lieu de 6, & je dis 5 fois 4=20, 24—20=4, j'efface 2 & 4 qui eſt écrit ſous le produit, & je laiſſe 4 écrit dans le produit au lieu où il eſt, 5 fois 8=40, 40—40=0, & j'efface 40 & 8.

24096 (5	24096 (5
48	48

3°. J'avance d'un rang chaque chifre de 48 en l'écrivant ſous 09, & je dis 4 n'eſt aucune fois dans rien ſous qui je l'ai placé, j'écris donc 0 au demi cercle, & j'efface 48. J'avance enfin d'un rang chaque chifre de 48 en l'écrivant ſous 96, & je dis 4 eſt 2 fois dans 9, & j'écris 2 au demi cercle, 2 fois 4=8, 9—8=1, j'efface 9 & 4 & j'écris 1 ſur 9, 2 fois 8=16, 16—16=0, il ne reſte rien, & je connois que 502 eſt l'expoſant cherché.

	1
24096 (50	24096 (502
488	4888
4	44

Huitiéme Exemple.

Pour trouver l'expoſant de 82 à 24. 1°. Je diſpoſe 24 ſous 82. 2°. Je dis 2 eſt 4 fois dans 8, mais en contant comme à l'ordinaire, je trouve que 4 eſt trop grand, & j'écris ſeulement 3 au demi cercle au lieu de 4, je dis enſuite 3 fois 2=6, 8—6=2, j'efface 8 & 2 écrit ſous 8, & j'écris 2 qui reſtent ſur 8, 3 fois 4=12, 12—12=0, j'efface 22 & 4, & j'écris 10 ſur 22. Et parceque le diviſeur 24 occupe tous les rangs du produit donné, je ne dois plus avancer d'un rang chacun des chiffres de ce diviſeur. Ainſi l'operation eſt achevée, & je connois que l'expoſant de 82 à 24 ne peut eſtre un nombre entier, à cauſe que l'expoſant trouvé 3 & le reſte 10 me font voir que 84 enferme 3 fois 24 tout entier, plus 10 des parties de l'unité rompuë en 24 parties égales, l'expoſant 3 & ces parties s'écrivent ainſi $3+\frac{10}{24}$, ou plus communément & pour abbreger $3\frac{10}{24}$, ce qui ſignifie 3 unitez entieres, & 10 vingt-quatriémes parties de l'unité, ou bien 3 plus 10 diviſez par 24. 1
Ces ſortes de reſte ſont du genre des nombres 20
rompus, ou des fractions dont nous devons parler 82 ($3\frac{10}{24}$
au Livre ſuivant. 24

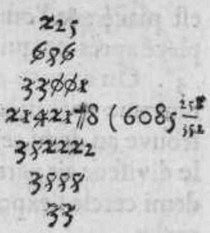
Neuviéme Exemple.

Pour trouver l'expoſant de 2142178 à 352. 1°. Je diſpoſe 352 ſous 2142178 en l'écrivant ſous 142. 2°. Je dis 3 eſt 7 fois dans 21; mais ſi j'écrivois 7 au demi cercle, il faudroit plus retrancher des rangs diviſez qu'ils ne renferment, j'écris donc ſeulement 6 au demi cercle, & je dis 6 fois 3=18, 21—18=3,
j'efface 21 & 3 & j'écris 3 ſur 1, 6 fois 5=30, 34—30=4, 330
j'efface 3 & 5, & je laiſſe 4 où il eſt, 6 fois 2=12, 2142178 (6
42—12=30, j'efface 42 & 2, & j'écris 30 ſur 42. 352

3°. J'avance d'un rang chaque chifre de 352 en l'écrivant ſous 301, & je dis 3 eſt 1 fois dans 3, mais ſi j'écrivois 1 au demi cercle, il faudroit plus retran-
cher des rangs diviſez qu'ils ne renferment, puiſque 301 n'eſt 330
pas ſi grand que 1 fois 352, qui eſt placé ſous 301, j'écris donc 2142178 (60
0 au demi cercle, & j'efface 352 ſans rien retrancher du pro- 3522
duit donné, à cauſe que 352 fois 0=0. 35

4°. J'avance d'un rang chaque chifre de 352 en l'écrivrnt ſous 017, & je dis 3 eſt 10 fois dans 30, mais 10 eſt trop grand, car aucun expoſant de cette ſorte ne doit eſtre exprimé par plus d'un caractere, & ainſi je prends 9 au lieu de 10; mais ſi j'écrivois 9 au demi cercle, il faudroit plus retrancher des
rangs diviſez qu'ils ne renferment, j'écris donc ſeulement 2
8 au demi cercle, & je dis 8 fois 3=24, 30—24=6, j'efface 6
30 & 3, & j'écris 6 ſur 0, 8 fois 5=40, 61—40=21, j'efface 33001
6 & 5, & j'écris 2 ſur 6 en laiſſant 1 où il eſt, 8 fois 2=16, 2142178 (608
17—16=1, j'efface 17 & 2, & j'écris 1 ſur 7 & 0 ſur 1 du 35222
rang qui ſuit 7, pour conſerver la valeur de 2 écrit au rang 355
qui ſuit 17. 3

5°. J'avance d'un rang chaque chifre de 352, en l'écrivant ſous 018, & je dis 3 eſt 6 fois dans 20, mais cet expoſant 6 eſtant trop grand, comme on le peut aiſément voir, j'écris ſeulement 5 au demi cercle, & je dis 5 fois 3=15, 20—15=5, j'efface 20 & 3, & j'écris 5 ſur 0, 5 fois 5=25, 51—25=26, j'efface 51 & 5, & j'écris 26 ſur 51, 5 fois 2=10, 68—10=58, j'efface 6 & 2, & j'écris 5 ſur 6 en laiſſant 8 où il eſt. Il reſte 258 que j'écris avec l'expoſant, en lui ſouſcrivant le diviſeur 352, comme dans l'exemple qui precede. Et l'operation eſtant ainſi achevée, je connois que $6085\frac{258}{352}$ eſt l'expoſant cherché, & que 6085 eſt le nombre entier qui approche le plus de cet expoſant.



Demonſtration du Probleme.

Les regles preſcrites pour la diviſion des nombres paroiſſent démontrées, ou par les raiſons que nous avons apportées dans les exemples precedens, ou par l'ordre & la diſpoſition des chifres que nous y avons obſervée. La ſeule choſe qui me ſemble avoir beſoin de preuves, eſt pourquoi l'on avance au demi cercle autant d'expoſants vers la droite, que chaque chifre du diviſeur eſt de fois avancé d'un rang; la raiſon eſt que l'expoſant des premiers rangs du produit au diviſeur écrit à la fin ſous ces rangs, marque des ſimples unitez, que l'expoſant des ſeconds rangs au diviſeur écrit ſous ces rangs marque des dixaines, que l'expoſant des troiſiémes rangs au diviſeur écrit ſous ces rangs marque des centaines, & ainſi de ſuite à l'infini. De ſorte que quand ces expoſants ne ſeroient que des zero, il ne faut pas laiſſer de les écrire au demi cercle, parcequ'ils font valoir les chifres qui les ſuivent, ſelon l'ordre & la diſpoſition des rangs qu'ils occupent.

Par exemple en cherchant l'expoſant de 24098 à 48, l'expoſant 2 des premiers rangs de 24096, à 48 écrit à la fin ſous ces rangs, marque 2 ſimples unitez, lexpoſant 0 des ſeconds rangs de 24096, à 48 écrit la ſeconde fois ſous ces rangs, marque des dixaines, ou du moins le rang des dixaines, parceque zero ne donne rien dans ſon rang, & l'expoſant 5 des derniers rangs de 24096, à 48 écrit la premiere fois ſous ces rangs marque 5 centaines, qui ne ſeroient pas exprimées, ſi l'on n'avoit eü ſoin de remplir le rang des dixaines du ſecond expoſant 0.

Comme pluſieurs de ceux qui commencent trouvent ordinairement la diviſion tres-difficile à faire ſelon la methode du probleme qui precede, nous en donnerons une autre un peu plus longue à la verité, mais plus facile à obſerver, & qui ſervira de diſpoſition pour faciliter celle qui precede. Cette methode eſt telle.

1°. On diſpoſe le diviſeur comme au probleme precedent.

CXVII. 2°. On cherche combien de fois le chifre qui occupe le dernier rang du diviſeur, eſt de fois dans ceux ſous qui on l'a placé, & l'on efface ce diviſeur, mais on l'écrit ſeparément, & ſous lui on écrit ſon produit par l'expoſant qu'on a trouvé. Si ce produit ſurpaſſe les rangs ſous qui le diviſeur eſt placé, on prend un autre expoſant plus petit de l'unité, par qui on multiplie ce diviſeur: Si le produit ſurpaſſe encore les rangs ſous qui le diviſeur eſt placé, on prend encore un autre expoſant plus petit de l'unité que celui qui precede, par qui on multiplie auſſi le diviſeur. Et l'on continuë la même operation, juſques à ce qu'on ait un produit qui ne ſurpaſſe point les rangs ſous qui le diviſeur eſt placé, & l'on écrit les chiffres des rangs ſous qui le diviſeur n'a point eſté placé aprés ce qui reſte,

3°. On avance d'un rang vers la droite chaque chifre du diviſeur, & réïterant une operation ſemblable à celle qui precede, on ajoûte l'expoſant qu'on trouve au demi cercle. Et repetant ainſi la même operation, juſques à ce que le diviſeur ait parcouru tous les rangs du produit donné, on trouve enfin au demi cercle l'expoſant qu'on cherche. Les exemples ſuivans éclairciront ces regles.

Premier Exemple.

Pour diviſer 2142178 par 352. 1°. Je diſpoſe 352 ſous 2142178, en l'écrivant ſous 142. 2°. Je dis 3 eſt 7 fois dans 21, & j'efface le diviſeur 352, mais je l'écris ſeparément, & ſous lui ſon produit par l'expoſant trouvé 7, ce produit eſt 2464, qui ſurpaſſe 2142 ſous qui le diviſeur 352 eſt placé; Connoiſſant donc que l'expoſant 7 eſt trop grand, je prends ſeulement 6, par qui je multiplie le diviſeur 352, le produit eſt 2112, qui ne ſurpaſſe point 2142, ſous qui le diviſeur 352 eſt placé, & ainſi j'écris 6 au demi cercle, & je retranche 2112 produit du diviſeur 352 par l'expoſant trouvé 6, des rangs 2142, ſous qui le diviſeur eſt placé, il reſte 30, & j'écris 178, ſous qui le diviſeur n'a point encore eſté placé, aprés ce reſte.

+2142178 (6	*pour le premier chifre de l'expoſant.*	
~~352~~	352	352
—2112	~~7~~	6
+30|178	~~2464~~	2112

3°. J'avance d'un rang chaque chifre de 352, en l'écrivant ſous 301, & je dis 3 eſt 1 fois dans 3, mais voyant d'abord que 352 produit du diviſeur 352 par cet expoſant trouvé 1, ſurpaſſe 301, ſous qui le diviſeur eſt placé, j'écris ſeulement 0, c'eſt à dire l'expoſant trouvé 1 diminué de l'unité, au demi cercle, & j'efface 352, ſans rien retrancher du produit donné, parceque 0 par 352, ou 35 fois 0 = 0.

+2142178 (60	*pour le premier chifre de l'expoſant.*	
~~352~~	352	352
—2112	~~7~~	6
+30|178	~~2464~~	2112
~~352~~		

4°. J'avance d'un rang chaque chifre de 352, en l'écrivant ſous 017, & je dis 3 ne doit point eſtre pris plus de 9 fois dans 30, & j'efface le diviſeur 352, mais je l'écris ſeparément, & ſous lui ſon produit par l'expoſant trouvé 9, ce produit eſt 3168 qui ſurpaſſe 3017, ſous qui le diviſeur 352 eſt placé, je prends donc ſeulement 8, par qui je multiplie 352, & le produit 2816 ne ſurpaſſant point 3017, j'écris 8 au demi cercle, & je retranche 2816 produit de 352 par 8, de de 3017 ; il reſte 201, & j'écris 8, ſous qui le diviſeur n'a point encore eſté placé, aprés ce reſte.

+2142178 (608	*pour le premier chifre de l'expoſant.*	
~~352~~	352	352
—2112	~~7~~	6
+30|178	~~2464~~	2112
~~352~~.	*pour le troiſiéme chifre.*	
~~352~~	352	352
—2816	~~9~~	8
+201|8	~~3168~~	2816

J'avance enfin d'un rang chaque chifre de 352, en l'écrivant ſous 018, & je dis 3 eſt 6 fois dans 20, & j'efface 352, mais je l'écris ſeparément, & ſous lui ſon produit par l'expoſant trouvé 6, ce produit eſt 2112, qui ſurpaſſe 2018, ſous qui 352 eſt placé, je prends donc ſeulement 5, par qui je multiplie 352, & le produit 1760 ne ſurpaſſant point 2018, j'écris 5 au demi cercle, & je retranche 1760 produit dé 352 par 5, de 2018, le reſte eſt 258 que j'écris avec l'expoſant, en lui ſouſcrivant 352. Et je connois que 6085 $\frac{258}{352}$ eſt l'expoſant cherché.

+2142178 (6085 $\frac{258}{352}$	*pour le premier chifre de l'expoſant.*	
~~352~~	352	352
—2112	~~7~~	6
+30|178	~~2464~~	2112
~~352~~	*pour le troiſiéme chifre.*	
~~352~~	352	352
—2816	~~9~~	8
+201|8	~~3168~~	2816
~~352~~	*pour le quatriéme chifre.*	
—1760	352	352
+258	~~6~~	5
	~~2112~~	1760

Second Exemple.

Pour diviſer 73394561 par 179. 1°. Je diſpoſe 179 ſous 73394561, en l'écrivant ſous 733. 2°. Je dis 1 eſt 7 fois dans 7, mais connoiſſant d'abord que 7 eſt trop grand, je prends ſeulement 6, & j'efface 179, mais je l'écris ſeparément, & ſous lui ſon produit par l'expoſant trouvé 6, ce produit eſt 1074, qui ſurpaſſe 733 ſous qui le diviſeur 179 eſt placé, je prens donc ſeulement 5, par qui je multiplie 179, le produit eſt 895, qui ſurpaſſant auſſi 733 ſous qui 179 eſt placé, m'oblige de ne prendre que 4, par qui je multiplie de nouveau 179, & le produit 716 ne ſurpaſſant point 733, j'écris 4 au demi cercle, & je retranche 716 de 733 ; le reſte eſt 17, & j'écris 94561 aprés ce reſte.

$$\begin{array}{l} +73394561\,(4 \\ \quad\cancel{1}\cancel{7}\cancel{9} \\ -716 \\ \hline +17|94561 \end{array}$$

pour le premier chifre de l'expoſant.

$$\begin{array}{r} 179 \\ \cancel{6} \\ \hline \cancel{1}\cancel{0}\cancel{7}\cancel{4} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 179 \\ \cancel{8} \\ \hline 8\cancel{9}\cancel{5} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 179 \\ 4 \\ \hline 716 \end{array}$$

3°. J'avance d'un rang 179, en l'écrivant ſous 179, & je dis 1 eſt 1 fois dans 1, & voyant d'abord que le produit du diviſeur par l'expoſant eſt 179 qui ne ſurpaſſe point 179 ſous qui le diviſeur eſt placé, j'écris 1 au demi cercle, & je retranche 179 produit du diviſeur 179 par 1, de 179 ſous qui le diviſeur eſt placé, & il ne reſte rien.

4°. J'avance d'un rang 179 en l'écrivant ſous 004, & voyant que 1 n'eſt aucune fois dans 0, j'écris 0 au demi cercle, & effaçant le diviſeur 179, je l'avance d'un rang en l'écrivant ſous 045, mais voyant encore que 1 n'eſt aucune fois dans 0, ſous qui je l'ai placé, j'écris encore 0 au demi cercle, & j'efface 179.

5°. J'avance d'un autre rang 179, en l'écrivant ſous 456, & je dis 1 eſt 4 fois dans 4, mais connoiſſant d'abord que 4 eſt trop grand, je prens ſeulement 3, & j'efface 179, mais je l'écris ſeparément, & ſous lui ſon produit par 3, ce produit eſt 537, qui ſurpaſſe 456 ſous qui 179 eſt placé, je prends donc ſeulement 2, par qui je multiplie 179, & le produit 358 ne ſurpaſſant point 456, j'écris 2 au demi cercle, & je retranche 358 de 456, il reſte 98, & j'écris 1 aprés ce reſte.

$$\begin{array}{l} +73394561\,(41002 \\ \quad\cancel{1}\cancel{7}\cancel{9} \\ -716 \\ \hline +17|94561 \\ \quad\cancel{1}\cancel{7}\cancel{9} \\ -179 \\ \hline \;\;000|4561 \\ \qquad\cancel{1}\cancel{7}\cancel{9}\,. \\ \qquad\;\cancel{1}\cancel{7}\cancel{9}\,. \\ \qquad\;\;\cancel{1}\cancel{7}\cancel{9} \\ \qquad\;-358 \\ \hline \qquad\;+98|1 \end{array}$$

pour le premier chifre de l'expoſant.

$$\begin{array}{r} 179 \\ \cancel{6} \\ \hline \cancel{1}\cancel{0}\cancel{7}\cancel{4} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 179 \\ \cancel{8} \\ \hline 8\cancel{9}\cancel{5} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 179 \\ 4 \\ \hline 716 \end{array}$$

pour le cinquiéme chifre.

$$\begin{array}{r} 179 \\ \cancel{3} \\ \hline 8\cancel{3}\cancel{7} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 179 \\ 2 \\ \hline 358 \end{array}$$

J'avance enfin d'un rang le diviſeur 179, en l'écrivant ſous 981, & je dis 1 eſt 9 fois dans 9 ; mais connoiſſant d'abord que 9 eſt trop grand, je prends ſeulement 8, & j'efface 179, mais je l'écris ſeparément, & ſous lui ſon produit par 8, ce produit eſt 1432, qui ſurpaſſe 981, je prends donc ſeulement 7, par qui je multiplie 179, le produit eſt 1253 qui ſurpaſſe auſſi 981, je prends donc ſeulement 6, par qui je multiplie 179, le produit eſt 1074, qui ſurpaſſant encore 981, m'oblige de nouveau de ne prendre que 5, par qui je multiplie 179, & le produit 895 ne ſurpaſſant point 981, j'écris 5 au demi cercle, & je retranche 895, produit de 179 par 5, de 981, le reſte eſt 86, que j'écris avec l'expoſant, en lui ſouſcrivant le diviſeur 179. Et l'operation eſtant ainſi achevée, je connois que $410025\frac{86}{179}$ eſt l'expoſant cherché.

$$\begin{array}{l} +7339456 1(410025\frac{86}{179}\\ \quad\cancel{179}\\ -716\\ \hline \quad +17|94561\\ \quad\quad\cancel{179}\\ \quad -179\\ \hline \quad\quad 000|4561\\ \quad\quad\cancel{179}\,.\\ \quad\quad\quad\cancel{179}\,.\\ \quad\quad\quad\quad\cancel{179}\\ \quad\quad\quad -358\\ \hline \quad\quad\quad +98|1\\ \quad\quad\quad\quad\cancel{179}\\ \quad\quad\quad -895\\ \hline \quad\quad\quad +86 \end{array}$$

pour le premier chifre de l'expoſant.

$$\begin{array}{ccc} 179 & 179 & 179\\ \cancel{6} & \cancel{5} & 4\\ \hline \cancel{1074} & \cancel{895} & 716 \end{array}$$

pour le cinquiéme chifre.

$$\begin{array}{cc} 179 & 179\\ \cancel{3} & 2\\ \hline \cancel{537} & 358 \end{array}$$

pour le ſixiéme chifre.

$$\begin{array}{cccc} 179 & 179 & 179 & 179\\ \cancel{8} & \cancel{7} & \cancel{6} & 5\\ \hline \cancel{1432} & \cancel{1253} & \cancel{1074} & 895 \end{array}$$

On trouvera pareillement que l'expoſant de 9342501 à 194 eſt $48157\frac{43}{194}$.

$$\begin{array}{l} +9342501(48157\frac{41}{194}\\ \quad\cancel{194}\\ -776\\ \hline +158|2501\\ \quad\cancel{194}\\ -1552\\ \hline \quad +30|501\\ \quad\quad\cancel{194}\\ \quad -194\\ \hline \quad +111|01\\ \quad\quad\cancel{194}\\ \quad -970\\ \hline \quad +140|1\\ \quad\quad\cancel{194}\\ \quad -1358\\ \hline \quad\quad +45 \end{array}$$

pour le premier chifre de l'expoſant.

$$\begin{array}{ccccc} 194 & 194 & 194 & 194 & 194\\ \cancel{8} & \cancel{7} & \cancel{6} & \cancel{5} & 4\\ \hline \cancel{1552} & \cancel{1358} & \cancel{1164} & \cancel{970} & 776 \end{array}$$

pour le deuxiéme chifre, pour le troiſiéme chifre.

$$\begin{array}{cccc} 194 & 194 & 194 & 194\\ \cancel{9} & 8 & \cancel{2} & 1\\ \hline \cancel{1746} & 1552 & \cancel{388} & 194 \end{array}$$

pour le quatriéme chifre.

$$\begin{array}{cccc} 194 & 194 & 194 & 194\\ \cancel{8} & \cancel{7} & \cancel{6} & 5\\ \hline \cancel{1552} & \cancel{1358} & \cancel{1164} & 970 \end{array}$$

pour le cinquiéme chifre.

$$\begin{array}{ccc} 194 & 194 & 194\\ \cancel{9} & \cancel{8} & 7\\ \hline \cancel{1746} & \cancel{1552} & 1358 \end{array}$$

DE LA DIVISION

DES GRANDEURS LITERALES.

Lorſque le produit & le diviſeur donnez ſont exprimez chacun par lettres, & ne renferment point pluſieurs parties liées par + ou par —, on efface de part & d'autre celles qui s'y trouvent également & autant de fois, & l'on CXVIII.

écrit devant le reſte le ſigne +, ſi chaque grandeur a le même ſigne + ou le même ſigne —, à cauſe que + diviſé par +, ou — par — donne + (*par* 112. *S.*) Mais on écrit le ſigne —, ſi l'une des grandeurs a +, & l'autre —, à cauſe que + diviſé par —, ou — par + donne — (*par* 112. *S.*) Ainſi pour diviſer $+ab$ par a, ou $-ab$ par $-a$, on écrit b. Et pour diviſer $-ab$ par a, ou ab par $-a$, on écrit b. De même pour diviſer ab par b, ou $-ab$ par $-b$, on écrit a. Et pour diviſer $-ab$ par b, ou ab par $-b$, on écrit $-a$.

CXIX. Si quelque nombre precede les lettres, 1°. On diviſe les nombres par les nombres. 2°. les lettres par les lettres, 3°. on écrit l'expoſant des nombres avant l'expoſant des lettres. Ainſi pour diviſer $8ab$ par $4b$, 1°. on diviſe 8 par 4, & l'expoſant eſt 2, 2°. on diviſe ab par b & l'expoſant eſt a, 3°. on écrit l'expoſant 2 devant l'expoſant a, ce qui fait $2a$, & $2a$ eſt l'expoſant de $8ab$ à $2b$. De même l'expoſant de $-8ab$ à $-4b$ eſt $2a$; mais l'expoſant de $8ab$ à $-4b$, ou de $-8ab$ à $4b$ eſt $-2a$.

On voit aſſez que dans la diviſion d'un produit par ſon diviſeur, l'expoſant du produit au diviſeur n'eſt pas le même que l'expoſant du diviſeur à ce produit. Ainſi l'expoſant de 8 *à* 4 *n'eſt pas le même que l'expoſant de* 4 *à* 8, *à cauſe que* 4 *eſt* 2 *fois dans* 8, *& que* 8 *n'eſt pas* 2 *fois dans* 4. *Pareillement l'expoſant de* ab *à* b *n'eſt pas le même que l'expoſant de* b *à* ab *à cauſe que* b *n'eſt pas autant meſuré par* ab *que* ab *eſt meſuré par* b.

CXX. Lorſque chaque grandeur donnée ou qu'une ſeulement eſt exprimée par pluſieurs lettres qui en deſignent les parties, la diviſion ſe fait à peu prés comme celle des nombres. Par exemple pour diviſer $aa+ab+ac+bc$ par $a+b$. 1°. Je les diſpoſe comme les nombres en cette ſorte.

$$\begin{array}{l} aa+ab+ac+bc \\ \;\;a+b \end{array}$$

2°. Je dis l'expoſant de aa à a eſt a, & j'écris a au demi cercle, je dis enſuite le produit de a par a eſt aa, & j'efface aa & a écrit ſous aa, je dis auſſi le produit de a par b eſt ab, $ab-ab=0$, & j'efface ab & b écrit ſous ab.

$$\begin{array}{l} \cancel{1}aa+\cancel{1}ab+ac+ba\,(a \\ \;\;\cancel{1}a+\cancel{1}b \end{array}$$

3°. J'avance chaque partie du diviſeur $a+b$, en écrivant a ſous ac & $+b$ ſous bc, & je dis l'expoſant de ac à a eſt c, & j'écris $+c$ au demi cercle, a par $c=ac$, $ac-ac=0$, & j'efface ac & a écrit deſſous, b par $c=bc$, $bc-bc=0$, & j'efface bc & b écrit deſſous. Il ne reſte rien, & je connois que $a+c$ eſt l'expoſant cherché.

$$\begin{array}{l} \cancel{1}aa+\cancel{1}ab+\cancel{1}ac+\cancel{1}bc\,(a+c \\ \;\;\cancel{1}a+\cancel{1}b\quad\;\cancel{1}a\;+\cancel{1}b \end{array}$$

On a joint ici des chifres tranchez aux lettres qu'on dit devoir eſtre effacées, parceque l'Imprimeur n'a pas eû des caracteres propres pour les marquer autrement.

De même pour diviſer $y^6-8y^4-124yy-64$ par $yy-16$. 1°. Je les diſpoſe comme dans l'exemple precedent. 2°. Je dis l'expoſant de y^6 à yy eſt y^4, & j'écris y^4 au demi cercle, y^4 par $yy=y^6$, $y^6-y^6=0$, & j'efface y^6 & yy, y^4 par $-16=-16y^4$, $-8y^4+16y^4=8y^4$, j'efface $-8y^4$ & -16, & j'écris $+8y^4$ ſur $-8y^4$.

$$\begin{array}{l} \qquad\quad +8y^4 \\ \cancel{1}y^6-8y^4-124yy-64\,(y^4 \\ \;\;\cancel{1}yy-1\cancel{6} \end{array}$$

3°. J'avance le diviſeur $yy-16$, écrivant yy ſous $+8y^4$, & -16 ſous $-124yy$, & je dis l'expoſant de $+8y^4$ à yy eſt $+8yy$, & j'écris $+8yy$ au demi cercle, $8yy$ par $yy=+8y^4$, & j'efface $+8y^4$ & yy, $8yy$ par $-16=-128yy$, $-124yy+128yy=+4yy$, j'efface $-124yy$ & -16, & j'écris $+4yy$ ſur $-124yy$.

$$\begin{array}{l} \quad +8y^4 \quad +4yy \\ \cancel{y^6}-8y^4-\cancel{124yy}-64\,(y^4+8yy \\ \cancel{yy}-\cancel{16}\;-\cancel{16} \\ \qquad\quad \cancel{yy} \end{array}$$

4°. J'avance le diviſeur $yy-16$, écrivant yy ſous $+4yy$ & -16 ſous -64, & je dis l'expoſant de $+4yy$ à yy eſt $+4$, & j'écris $+4$ au demi cercle, $+4$ par $yy=+4yy$, $+4yy-4yy=0$, & j'efface $+4yy$ & yy, $+4$ par $-16=-64$, $-64+64=0$.
Il ne reſte rien, & je connois que $y^4+8yy+4$ eſt l'expoſant cherché.

$$\begin{array}{l} \quad +8y^4 \quad +4yy \\ \cancel{y^6}-8y^4-\cancel{124yy}-64\,(y^4+8yy+4 \\ \cancel{yy}-\cancel{16}\;-\cancel{16}\quad -16 \\ \qquad \cancel{yy}\;\;\cancel{yy} \end{array}$$

CXXI. Lorſque le produit & le diviſeur ne peuvent avoir un expoſant entier & ſans reſte, ces reſtes s'appellent *fractions*, & ces fractions ſont du genre de celles dont nous traitterons au Livre ſuivant. Ainſi cherchant l'expoſant de abb à abc, j'efface ab qui ſe trouve de part & d'autre, & il reſte b du produit abb, & c du produit abc pris pour diviſeur de abb. Ces reſtes b & c ſont une fraction, qu'on écrit comme aux nombres en cette ſorte $\frac{b}{c}$, c'eſt à dire b diviſé par c.

CXXII. Lorſqu'un produit literal enferme pluſieurs parties liées par $+$, ou par $-$, & que la diviſion ne peut du tout ſe faire, ou qu'elle laiſſe un reſte, on ſe contente ordinairement d'écrire ce produit tout entier avec ſon diviſeur au deſſous. Ainſi $aa+ab+ac+bc$ ne peut eſtre diviſé par $a+d$, & je me contente d'écrire $\frac{aa+ab+ac+bc}{a+d}$. De même $xx+ax+bx+ab+cc$ ne peut eſtre diviſé par $x+a$, ſans laiſſer le reſte cc, & je me contente d'écrire $\frac{xx+ax+bx+ab+cc}{x+a}$. Je pourois auſſi écrire $x+b\frac{+cc}{x+a}$. Il en eſt ainſi des autres.

THEORÈME. CXXIII.

En toute diviſion le produit du diviſeur par l'expoſant eſt égal au produit donné.

Demonſtration. Soit ab le produit donné, & a diviſeur de ce produit, l'expoſant de ab à a eſt b; Or le produit du diviſeur a par cet expoſant b eſt ab, & ab eſt auſſi le produit donné. Donc le produit du diviſeur par l'expoſant eſt égal au produit donné. Et c'eſt ce qu'il falloit démontrer.

PREMIER COROLLAIRE. CXXIV.

Il eſt donc évident qu'en toute diviſion le diviſeur & l'expoſant ſont les deux racines, l'une donnée, & l'autre cherchée, du produit qu'on donne à diviſer.

SECOND COROLLAIRE.

CXXV. C'eſt pour cela que la multiplication & la diviſion ſont oppoſées l'une à l'autre ; l'une défait ce que l'autre a fait, & elles ſe ſervent réciproquement de preuves, comme l'addition à la ſouſtraction, & la ſouſtraction à l'addition. C'eſt ainſi que pour s'aſſurer que $xx+ax+bx+ab$ eſt le produit de $x+a$ par $x+b$, il ne faut que diviſer ce produit par l'une de ces deux racines, ſi l'expoſant donne l'autre racine, la multiplication eſt bien faite ; mais s'il ne la donne pas, la multiplication eſt mal faite, il la faut recommencer. Et reciproquement pour s'aſſurer que $x+b$ eſt l'expoſant de $xx+ax+bx+ab$ à $x+a$, il ne faut que multiplier l'expoſant $x+b$ par le diviſeur $x+a$, ſi le produit eſt le même que le produit donné, la diviſion eſt bien faite, mais ſi ce produit n'eſt pas le même, la diviſion eſt mal faite, il la faut recommencer.

DES DIVISEURS

DES GRANDEURS ENTIERES.

CXXVI. ON ſçait déja que ſouvent un produit peut eſtre conçeu comme formé par des racines de differens degrez, & differentes dans un même degré. Lorſque ces racines meſurent pluſieurs fois ſans reſte un produit donné, on les appelle *diviſeurs entiers*, ou ſimplement *diviſeurs* de ce produit. Par exemple 2, 3, & 4 meſurent chacun ſans reſte le nombre 12, & 2, 3 & 4 ſont appellez diviſeurs de 12. L'unité ſe met auſſi dans le rang des diviſeurs de chaque nombre entier, à cauſe qu'eſtant repetée autant de fois qu'il faut, elle les meſure tous exactement & ſans reſte. Ces nombres s'appellent auſſi quelquefois diviſeurs d'eux-mêmes, parceque l'expoſant de toute grandeur à elle-même eſt l'unité. Ainſi l'expoſant de 12 à 12 eſt 1, car 12 eſt 1 fois dans 12. On a beſoin dans pluſieurs rencontres de ſçavoir quels ſont tous les diviſeurs d'un nombre, ou d'une grandeur literale & entiere ; Et c'eſt ce qu'on trouvera par le moyen des deux regles qui ſuivent.

PREMIERE REGLE.

Pour trouver tous les diviſeurs entiers d'un nombre.

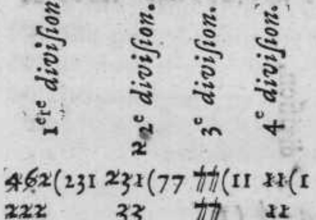
CXXVII. 1°. Si ce nombre eſt pair on le diviſera par 2, & reſervant ce diviſeur 2, ſi l'expoſant eſt encore pair, on le diviſera pareillement par 2, & reſervant encore ce nouveau diviſeur 2, on reïterera une ſemblable diviſion par 2, juſqu'à ce qu'il vienne un nombre impair pour expoſant d'une telle diviſion.

CXXVIII. 2°. Et ſi le nombre donné eſt impair, ou ſi aprés quelque diviſion l'expoſant eſt un nombre impair, on diviſera ce nombre par 3 ſi on le peut faire ſans reſte, & reſervant ce diviſeur 3, on reïterera une ſemblable diviſion par 3, juſques à ce qu'il vienne un expoſant qu'on ne puiſſe diviſer par 3.

CXXIX. 3°. On reïterera de ſemblables diviſions par 5, par 7, par 11, par 13, par 19, par 23, par 29, & ainſi de ſuite par tout autre nombre qui n'aura que l'unité ou que lui-même pour diviſeur, juſques à ce qu'on trouve un expoſant qu'on ne puiſſe diviſer que par l'unité ou par lui-même, & cet expoſant ſera reſervé avec les diviſeurs precedens.

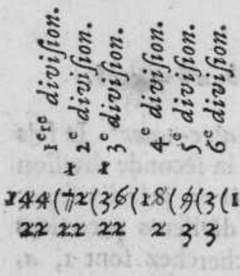
4°. Le premier des nombres reſervez ſera multiplié par le ſecond, le premier & le ſecond plus leur produit ſeront multipliez par le troiſiéme ; le premier & le ſecond plus leur produit, plus le troiſiéme plus ſes produits par les trois nombres precedens ſeront multipliez par le quatriéme, & ainſi de ſuite à l'infini. CXXX.

Par exemple pour trouver tous les diviſeurs du nombre 462. 1°. Comme ce nombre eſt pair, je fais une premiere diviſion par 2, & je reſerve ce premier diviſeur 2. 2°. L'expoſant de la premiere diviſion qui eſt 231 eſtant impair, je fais une ſeconde diviſion par 3, & je reſerve le ſecond diviſeur 3. 3°. 77 expoſant de la ſeconde diviſion ne peut plus eſtre diviſé par 3, il ne peut l'eſtre auſſi par 5, je le diviſe donc par 7, & je reſerve ce troiſiéme diviſeur 7. 4°. 11 expoſant de la troiſiéme diviſion ne peut eſtre diviſé que qar l'unité ou par lui-même, & ainſi je le reſerve avec les diviſeurs precedens. 5°. Je multiplie 2 premier nombre reſervé par le ſecond qui eſt 3, & le produit eſt 6, je multiplie enſuite 2, 3, & 6 premier & ſecond nombre reſervez, plus leur produit par le troiſiéme des nombres reſervez qui eſt 7, & les produits ſont 14, 21, & 42. Je multiplie enſuite 2, 3, 6, 7, 14, 21, & 42 tous les nombres & tous les produits precedens, par 11 dernier des nombres reſervez, & les produits ſont 22, 33, 66, 77, 154, 231, & 462. Et tous ces nombres 1, 2, 3, 6, 7, 11, 21, 33, 42, 66, 77, 154, 231, & 462 ſont les diviſeurs que je cherche.



1er | 2 |
2e | 3 | 6,
nombres 3e | 7 | 14, 21, 42,
reſervez 4e | 11 | 22, 33, 66, 77, 154, 231, 462.

On trouveroit par la même regle que tous les diviſeurs de 144 ſont 1, 2, 3, 4, 8, 12, 16, 24, 36, 48, 72, & 144.



1er | 2 |
2e | 2 | 4,
3e | 2 | $\cancel{4}$, $\cancel{4}$, 8,
4e | 2 | $\cancel{4}$, $\cancel{4}$, $\cancel{4}$, $\cancel{8}$, 16,
nombres 5e | 3 | 6, $\cancel{6}$, 12, $\cancel{6}$, 24, $\cancel{6}$, 48,
reſervez 6e | 3 | $\cancel{6}$, $\cancel{6}$, $\cancel{12}$, $\cancel{6}$, $\cancel{24}$, $\cancel{6}$, $\cancel{48}$, 36, 72, 144.

SECONDE REGLE.

Pour trouver tous les diviſeurs d'une grandeur literale & entiere.

On fera à peu prés comme aux nombres. 1°. On diviſera cette grandeur par quelqu'une qu'on ne puiſſe diviſer que par l'unité ou par elle-même, CXXXI.

& l'on reſervera ce premier diviſeur.

CXXXII. 2°. L'expoſant ſera nouvellement diviſé par ce même diviſeur, ſi cela peut ſe faire, ou par quelqu'autre qu'on ne puiſſe diviſer que par l'unité ou par lui-même, ſi cela ne peut pas ſe faire, & l'on reſervera ce ſecond diviſeur.

CXXXIII. 3°. On reïterera de ſemblables diviſions juſques à ce qu'on trouve un expoſant qu'on ne puiſſe auſſi diviſer que par l'unité ou par lui-même, & l'on reſervera cet expoſant avec les diviſeurs qui precedent.

Par exemple pour trouver tous les diviſeurs entiers de $a^3b+aabb$. 1°. Je fais une premiere diviſion par a, l'expoſant eſt $aab+abb$, & je reſerve le premier diviſeur a. 2°. Je diviſe encore cet expoſant par a, l'expoſant eſt $ab+bb$, & je reſerve le ſecond diviſeur a, 3°. Le ſecond expoſant $ab+bb$ ne peut plus eſtre diviſé par a, je le diviſe donc par b, l'expoſant eſt $a+b$, & je reſerve le troiſiéme diviſeur b, je reſerve auſſi le dernier expoſant $a+b$, qu'on ne peut diviſer exactement que par l'unité ou par lui-même. 4°. Je multiplie le premier diviſeur a par le ſecond qui eſt a, & le produit eſt aa, plus a & a premier & ſecond diviſeurs, & leur produit aa, par b, & les produits ſont ab, ab, & aab, (je ne conte ab qu'une fois,) je multiplie enſuite a, a, aa, ab, & aab tous les diviſeurs & tous les produits qui precedent par le troiſiéme diviſeur $a+b$ & les produits ſont $aa+ab$, a^3+aab, $ab+bb$, $aab+abb$, & $a^3b+aabb$. Et ainſi je trouve que tous les diviſeurs cherchez ſont 1, a, aa, b, ab, aab, $a+b$, $aa+ab$, a^3+aab, $ab+bb$, $aab+abb$, & $a^3b+aabb$.

$$\begin{array}{cccc} \text{1}^{\text{ere}}\text{ diviſion.} & \text{2}^{\text{e}}\text{ diviſion.} & \text{3}^{\text{e}}\text{ diviſion.} & \text{4}^{\text{e}}\text{ diviſion.} \\ a^3b+aabb\ (& aab+abb\ (& ab+bb\ (& a+b\ (\ 1 \\ a\quad a & a\quad a & b\quad b & a+b \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l} 1^{er} & a & \\ 2^{e} & a & aa, \\ \textit{diviſeurs}\ 3^{e} & b & ab,\ aab, \\ \textit{reſervez}\ 4^{e} & a+b & aa+ab,\ a^3+aab,\ ab+bb,\ aab+abb,\ a^3b+aabb. \end{array}$$

Pour trouver pareillement tous les diviſeurs de $a^6+2a^4cc+aac^4$. Je fais une premiere & ſeconde diviſion par a, & l'expoſant de la ſeconde diviſion ne pouvant plus eſtre diviſé par a, ni par c, ni par aa, ni par cc, je le diviſe par $aa+cc$, & l'expoſant $aa+cc$ eſt reſervé avec les trois diviſeurs precedens a, a, & $aa+cc$, & je trouve que tous les diviſeurs cherchez ſont 1, a, aa, $aa+cc$, a^3+acc, a^4+aacc, $a^4+2aacc+c^4$, $a^5+2a^3cc+ac^4$, & $a^6+2a^4cc+aac^4$.

Demonſtration des deux regles precedentes.

Il y a deux choſes à faire voir dans les regles precedentes qui dépendent chacune d'un même principe, la premiere eſt que toutes les grandeurs trouvées doivent eſtre diviſeurs du produit donné, & cela eſt évident ; car ſi on prend, comme on l'a fait dans ces deux regles, l'expoſant d'un produit donné à quelqu'un de ſes diviſeurs, le produit de ce diviſeur par l'expoſant, ou par un diviſeur de l'expoſant, ſera toûjours diviſeur du produit donné. Soit abc le produit donné, & ab l'expoſant de ce produit à quelqu'un de ſes diviſeurs comme c, il eſt clair que abc produit de ab par c, ou ac produit de a diviſeur du diviſeur ab, par c, ou bc produit de b autre diviſeur de ab par c, ſont tous diviſeurs du produit donné abc ; car les expoſans de ce produit à lui-même, & à ac, & à bc, ſont 1, b, & a, qui ſont tous diviſeurs du produit donné abc.

La ſeconde choſe qui reſte à démontrer, eſt que ces regles découvrent tous les diviſeurs du produit donné, & cela eſt encore évident ; car ſoit abc le produit donné, il eſt clair qu'on ne peut le diviſer exactement & ſans reſte que par les trois grandeurs lineaires a, b, ou c, ou par les trois planes ab, ac, ou bc, ou enfin par l'unité ou par lui-même, c'eſt à dire qu'il ne peut avoir que les diviſeurs 1, a, b, c, ab, ac, bc, & abc. Or les regles propoſées découvrent tous ces mêmes diviſeurs, & c'eſt la même choſe en tout autre produit. Ces regles donnent donc tous les diviſeurs du produit donné.

COROLLAIRE.

CXXXIV. Le plus grand diviſeur d'une grandeur entiere eſt cette grandeur même, & ſon plus petit diviſeur eſt l'unité. Ainſi le plus grand diviſeur de 12 eſt 12, & ſon plus petit diviſeur eſt 1 ; car aucun nombre entier plus grand que 12, ou plus petit que 1, ne peut eſtre exactement renfermé dans 12.

ELEMENS DES MATHEMATIQUES.

LIVRE SECOND.

DES QUATRE PREMIERES OPERATIONS SUR LES FRACTIONS DES GRANDEURS ENTIERES.

ON a expliqué au Livre precedent les quatre premieres operations ſur les rapports des grandeurs entieres, dont le premier terme ſeul eſt exprimé, & le ſecond qui eſt l'unité eſt ſous-entendu; & on expliquera dans celui-ci les quatre mêmes operations ſur tout rapport des grandeurs entieres, dont chaque terme eſt exprimé.

I. La nature & l'expreſſion de ces rapports ne differe point de la nature & de l'expreſſion des diviſions. $\frac{8}{4}$ marque également le rapport de 8 à 4, & la diviſion de 8 par 4, car dans le rapport de 8 à 4, je conſidere combien de fois 4 eſt dans 8, & dans la diviſion de 8 par 4, je conſidere auſſi combien de fois 4 eſt dans 8.

II. Tout ce qui convient à la diviſion d'une grandeur par une autre, convient donc également au rapport de l'une à l'autre, & l'expoſant de l'une ſera auſſi l'expoſant de l'autre. Lorſque 8 eſt diviſé par 4, on dit que 2 eſt l'expoſant de 8 à 4, & lorſque 8 eſt rapporté à 4, on dit auſſi que 2 eſt l'expoſant de 8 à 4, ou du rapport de 8 à 4.

III. On appelle auſſi *fractions* ces diviſions ou ces rapports, $\frac{8}{4}$ & $\frac{4}{8}$ ſont des fractions, à cauſe que par $\frac{8}{4}$ on entend un tout diviſé ou rompu en 8 quarts c'eſt à dire en 8 parties égales, dont chacune eſt le quart de l'unité, & par $\frac{4}{8}$, on entend un tout rompu en 4 huitiémes, c'eſt à dire en 4 parties égales, dont chacune eſt un huitiéme de l'unité.

Il eſt à propos de bien remarquer avant que de paſſer outre que ces trois expreſſions differentes diviſions, rapports, *ou* fractions *ne marquent qu'une même choſe énoncée differemment, afin que tout ce qu'on aura démontré des unes ſoit auſſi démontré des autres.*

IV. Les rapports, dont le premier terme enferme exactement pluſieurs fois le ſecond, s'appellent *multiples*, comme ceux qu'on appelle *doubles*, *triples*, *quadruples*, &c.

V. Et les rapports, dont le premier terme eſt enfermé exactement pluſieurs fois dans le ſecond, s'appellent *soûmultiples*, comme ceux qu'on appelle *soûdoubles*, *soûtriples*, *soûquadruples*, ou plus vulgairement demis, tiers, quarts, &c.

Mais pour ne point s'embaraſſer la memoire de tous les differens noms de ces rapports, il vaut mieux les appeller par le nom des nombres qui les expriment, comme le rapport de 2 à 1, de 5 à 1, de 12 à 7, de 101 à 10, de 3 à 5, de 1 à 2, de 121 à 50, & ainſi des autres.

VI. Les nombres les plus ſimples, qui expriment combien de fois les deux termes d'un rapport ſe contiennent, ou ſont contenus les uns par les autres, s'appellent *expoſants exacts*, ou ſimplement *expoſants* de ces rapports. Par exemple 8, premier terme du rapport $\frac{8}{4}$, contient autant de fois 4 qui en eſt le ſecond terme, que 2 contient de fois l'unité, & ainſi $\frac{2}{1}$ ou ſimplement 2 eſt l'expoſant de $\frac{8}{4}$. De même 4, premier terme du rapport $\frac{4}{8}$, eſt autant de fois contenu dans 8, que 1 eſt de fois contenu dans 2, & ainſi $\frac{1}{2}$ eſt l'expoſant de $\frac{4}{8}$. Pareillement l'expoſant de $\frac{12}{16}$ eſt $\frac{3}{4}$, parceque de même que 3, premier terme de $\frac{3}{4}$, n'enferme que les trois quarts du ſecond terme 4, de même auſſi 12, premier terme de $\frac{12}{16}$, n'enferme que les trois quarts du ſecond terme 16. Par de ſemblables raiſonnemens, nous dirons que $\frac{5}{1}$ eſt l'expoſant de $\frac{10}{12}$, que $\frac{2}{7}$ eſt l'expoſant de $\frac{18}{63}$, que $\frac{7}{6}$ eſt l'expoſant de $\frac{45}{30}$, & ainſi des autres.

VII. Lorſque deux grandeurs ſont diviſées chacune ſans reſte par une autre, on dit que cette autre eſt un *diviſeur commun* des deux premieres; & ſouvent deux grandeurs peuvent avoir pluſieurs de ces diviſeurs communs, les uns plus grands, les autres plus petits. Par exemple 36 & 12 peuvent avoir les diviſeurs communs 1, 2, 3, 4, 6, & 12, parceque 1 eſt 36 fois dans 36, & 12 fois dans 12; que 2 eſt 18 fois dans 36, & 6 fois dans 12; que 3 eſt 12 fois dans 36, & 4 fois dans 12; que 4 eſt 9 fois dans 36, & 3 fois dans 12; que 6 eſt 6 fois dans 36, & 2 fois dans 12; & que 12 eſt 3 fois dans 36, & 1 fois dans 12.

Si on ſuppoſe tout ce qui eſt démontré au Livre precedent, on peut avancer ici pour Axiomes les propoſitions ſuivantes.

AXIOMES.

VIII. Si des grandeurs égales ſont également multipliées, les produits ſont égaux.

IX. Si des grandeurs égales ſont également diviſées, les expoſants ſont égaux.

X. Toute grandeur n'a point de diviſeur plus grand qu'elle même.

XI. Tout diviſeur commun à chaque partie d'un tout, eſt auſsi diviſeur de ce tout. a eſt diviſeur commun de ab & de ac parties du tout $ab+ac$, & a eſt auſsi diviſeur du tout $ab+ac$.

XII. Et reciproquement tout diviſeur commun d'un tout & de ſa partie, eſt auſsi diviſeur de l'autre partie. a eſt diviſeur commun du tout $ab+ac$ & de ab l'une des deux parties de ce tout, & a eſt auſsi diviſeur de ac qui eſt l'autre partie de ce tout.

XIII. Le plus grand diviſeur commun des deux parties qui compoſent un tout, eſt auſsi le plus grand diviſeur commun de ce même tout & de l'une de ces parties. a eſt le plus grand diviſeur commun de ab & de ac les deux parties du tout $ab+ac$, & a eſt auſsi le plus grand diviſeur commun du tout $ab+ac$ & de l'une de ſes deux parties ab & ac.

XIV. Le plus grand diviſeur commun d'un tout & de ſa partie, eſt auſsi le plus grand diviſeur commun du même tout & de ſon autre partie. a eſt le plus grand diviſeur commun du tout $ab+ac$ & de la partie de ce tout ab, ou ac, & a eſt auſsi le plus grand diviſeur commun du même tout $ab+ac$ & de l'autre partie de ce tout ac, ou ab.

PREMIER PROBLEME.

Trouver le plus grand diviſeur commun de deux grandeurs.

XV. Si chacune eſt un nombre entier, 1°. on diviſe le grand par le petit.

XVI. 2°. Si cette diviſion laiſſe un reſte ou une fraction, on diviſe le ſecond terme de cette fraction par le premier.

XVII. 3°. Si cette diviſion laiſſe encore une fraction, on diviſe ſon ſecond terme par le premier. Et on repete de ſemblables diviſions juſques à ce qu'il s'en faſſe une ſans reſte. Le diviſeur de la premiere de ces diviſions qu'on fera ſans reſte, ſera le diviſeur qu'on cherche. Les exemples éclairciront ces regles.

Premier Exemple.

Pour trouver le plus grand diviſeur commun de 32 à 64. 1°. On diviſe 64 par 32, l'expoſant eſt 2, & parceque cette premiere diviſion ſe fait ſans reſte, 32 diviſeur de cette même diviſion eſt le plus grand diviſeur commun de 64 & de 32. Cela eſt clair, puiſque 32 ne peut avoir un diviſeur plus grand que lui-même.

$$\begin{array}{l} \cancel{6}\cancel{4}\,(2 \\ 3\cancel{2} \end{array}$$

32 *diviſeur cherché.*

Second Exemple.

Pour trouver le plus grand diviſeur commun de 30 & de 25. 1°. Je diviſe 30 par 25, & l'expoſant eſt $1\frac{5}{25}$. 2°. Cette diviſion laiſſe la fraction $\frac{5}{25}$, & je diviſe 25 ſecond terme de la même fraction par 5 qui eſt ſon premier terme, l'expoſant eſt 5, & parceque cette diviſion ſe fait ſans reſte, 5 diviſeur de cette même diviſion, eſt auſſi le plus grand diviſeur commun de 30 & de 25.

1^{ere} *diviſion.* 2^{e} *diviſion.*

$$\begin{array}{ll} 3\cancel{0}\,(1\frac{5}{25}, & \cancel{2}\cancel{5}\,(5 \\ \cancel{2}\cancel{5} & \cancel{5} \end{array}$$

5 *diviſeur cherché.*

Troiſiéme Exemple.

Pour trouver le plus grand diviſeur commun de 27 & de 21. 1°. Je diviſe 27 par 21, & l'expoſant eſt $1\frac{6}{21}$. 2°. Cette diviſion laiſſe la fraction $\frac{6}{21}$, & je diviſe ſon ſecond terme 21 par le premier qui eſt 6, l'expoſant eſt $\frac{3}{6}$. 3°. Cette troiſiéme diviſion laiſſe encore la fraction $\frac{3}{6}$ & je diviſe 6 par 3, l'expoſant eſt 2, & parceque la diviſion ſe fait ſans reſte, 3 qui en eſt le diviſeur, eſt auſſi le plus grand diviſeur commun que je cherche.

$$\begin{array}{llll} 1^{\text{ere}}\ \textit{diviſion.} & 2^{\text{e}}\ \textit{diviſion.} & 3^{\text{e}}\ \textit{diviſion.} & \\ \cancel{2}\cancel{7}\,(1\frac{6}{21}, & \cancel{2}\cancel{1}\,(3\frac{3}{6}, & \cancel{6}\,(2 & \\ \cancel{2}\cancel{1} & \cancel{6} & \cancel{3} & 3\ \textit{diviſeur cherché.} \end{array}$$

Quatriéme Exemple.

Pour trouver le plus grand diviſeur commun de 98 & de 47. 1°. Je diviſe 98 par 47, & l'expoſant eſt $2\frac{4}{47}$. 2°. Cette premiere diviſion laiſſant la fraction $\frac{4}{47}$, je diviſe 47 par 4, & l'expoſant eſt $11\frac{3}{4}$. 3°. Cette ſeconde diviſion laiſſant la fraction $\frac{3}{4}$, je diviſe 4 par 3, & l'expoſant eſt $1\frac{1}{3}$. 4°. Cette troiſiéme diviſion laiſſant la fraction $\frac{1}{3}$, je diviſe trois par 1, l'expoſant eſt 3, & parceque cette diviſion ſe fait ſans reſte, ſon diviſeur 1 eſt auſſi le plus grand diviſeur commun de 98 & de 47.

$$\begin{array}{lllll} 1^{\text{ere}}\ \textit{diviſion.} & 2^{\text{e}}\ \textit{diviſion.} & 3^{\text{e}}\ \textit{diviſion.} & 4^{\text{e}}\ \textit{diviſion.} & \\ \cancel{9}8\,(2\frac{4}{47}, & \cancel{4}\cancel{7}\,(11\frac{3}{4}, & \cancel{4}\,(1\frac{1}{3}, & \cancel{3}\,(3 & \\ \cancel{4}\cancel{7} & \cancel{4}\cancel{4} & \cancel{3} & \cancel{1} & 1\ \textit{diviſeur cherché.} \end{array}$$

XVIII. *Les mêmes regles ſervent auſſi pour les grandeurs literales compoſées de pluſieurs parties, mais parcequ'elles ſuppoſent encore quelque choſe qu'on n'expliquera que dans la ſuite, & que ſouvent la pratique en ſeroit trop longue & trop penible, on en donnera d'autres ailleurs qui ſeront plus courtes & plus commodes. Et ſi l'on veut en attendant on poura s'exercer à chercher tous les diviſeurs de chacune des grandeurs données, en ſuivant les regles du Livre precedent.* 131. *& ſeq. Et lorſqu'on aura trouvé tous ces diviſeurs, on prendra le plus grand de ceux qui ſont communs à l'une & à l'autre de ces grandeurs données.*

Demonſtration du Probleme.

Soient a & b les deux grandeurs dont il faut trouver le plus grand diviſeur commun; ſoit b pluſieurs fois tout entier dans a, comme 3 fois, & qu'il reſte c. Donc $a=3b+c$. Soit encore c pluſieurs fois tout entier dans b, comme 5 fois, plus un reſte d. Donc $b=5c+d$. Et qu'enfin d ſoit exactement pluſieurs fois dans c, & le premier qui faſſe la diviſion ſans reſte. Il eſt clair (*par* 10. *S.*) que d partie du tout $c+d$ eſt le plus grand diviſeur commun de c & de d, & (*par* 11. *S.*) de $5c$ & de d, ou bien du tout $5c+d$ & de ſa partie d. Donc *par le dernier axiome* 14. *S.* d eſt le plus grand diviſeur commun de $5c+d$ & de $5c$, & par 10. & 11. S. de $5c+d$ & de c. Or $5c+d=b$. Donc d eſt le plus grand diviſeur de b & de c, & par 10. & 11. S. de $3b$ & de c, ou bien de $3b+c$ & de b. Or $3b+c=a$. Donc d eſt le plus grand diviſeur commun de a & de b. Et c'eſt ce qu'il falloit démontrer.

XIX. Lorſque chacune des grandeurs données eſt exprimée par pluſieurs lettres, & n'enferme point pluſieurs parties unies par + ou par —, le produit de toutes les lettres qui ſe trouvent également diſtribuées dans chacune, ſera le diviſeur qu'on cherche. Par exemple le plus grand diviſeur commun de abc & acd, eſt ac produit des lettres a & c, qui ſe trouvent une fois chacune dans chacun des deux produits propoſez abc & acd. De même le plus grand diviſeur commun de $afghh$ & ab^3 eſt abh. Il en eſt ainſi des autres.

PREMIER THEOREME.

XX. Toute diviſion, tout rapport, ou toute fraction, eſt égale à ſon expoſant.

Démonſtration. Soit $\frac{a}{b}$ tel rapport, ou telle diviſion que l'on voudra, & ſoit e l'expoſant de $\frac{a}{b}$, je dis que $\frac{a}{b}=e$; car en toute diviſion, le produit du diviſeur par l'expoſant eſt égal au produit donné, (*par* 123 *du Livre predent.*) Or dans $\frac{a}{b}$, le produit donné eſt a, & ſon diviſeur eſt b; Donc $be=a$, & (*par* 9. *S.*) $\frac{be}{b}=\frac{a}{b}$. Or $\frac{be}{b}$ eſt le même que e multipliée, & enſuite diviſée par b, & toute grandeur multipliée, & enſuite diviſée par une autre, reſte égale à elle-même, puiſque la diviſion défait ce que la multiplication a fait. Donc $\frac{be}{b}=e$. Or $\frac{a}{b}=\frac{be}{b}$. Donc $\frac{a}{b}=e$, ce qu'il falloit démontrer.

Pareillement l'expoſant de $\frac{8}{4}$ eſt 2, & $\frac{8}{4}=2$, car on ne peut douter qu'un tout rompu en 8 parties, dont chacune eſt un quart de l'unité, ne ſoit égal à 2 unitez.

SECOND THEOREME.

Les fractions qui ſont égales entr'elles, ont chacune un même expoſant.

XXI. *Démonſtration.* Chacune de ces fractions eſt égale à ſon expoſant. Or par la ſuppoſition elles ſont égales entr'elles, elles ont donc des expoſants égaux; or ces expoſants égaux ſont chacun le même, puiſque chacun exprime une même valeur par les plus ſimples termes qui la puiſſent exprimer. Donc les fractions qui ſont égales entr'elles ont chacune un même expoſant.

COROLLAIRE.

XXII. Toute fraction qui vaut un nombre entier, a pour expoſant ce nombre entier. Car ce nombre eſtant égal à la fraction, l'expoſant de chacun eſt le même. Or ce nombre entier eſt ſon expoſant à lui-même, puiſqu'on ne peut l'exprimer par des termes plus ſimples. Il eſt donc auſſi l'expoſant de la fraction.

TROISIE'ME THEOREME.

XXIII. Les fractions qui ont chacune un meſme expoſant ſont égales entr'elles. Car chacune de ces fractions eſt égale à ſon expoſant, *par le* 1. *Theoreme*.

Or par la ſuppoſition l'expoſant de chacune eſt le même, elles ſont donc égales entr'elles.

QUATRIE'ME THEOREME.

Toute fraction dont chaque terme eſt multiplié par une meſme grandeur, a même valeur eſtant ainſi multipliée que ne l'eſtant point. XXIV.

Soient par exemple *ab* le premier terme & *a* le ſecond de la fraction $\frac{ab}{b}$ multipliez chacun par la grandeur *c*, cette fraction ainſi multipliée ſera $\frac{abc}{ac}$, qui a même valeur que $\frac{ab}{a}$ *par le Theoreme precedent*, car l'expoſant de chacune eſt *b*.

CINQUIE'ME THEOREME.

Toute fraction dont chaque terme eſt diviſé par une même grandeur, a même valeur eſtant ainſi diviſée que ne l'eſtant point. XXV.

Soient par exemple *abc* le premier terme, & *ac* le ſecond de la fraction $\frac{abc}{ac}$ diviſez chacun par la grandeur *c*, cette fraction ainſi diviſée ſera $\frac{ab}{a}$, qui a même valeur que $\frac{abc}{ac}$ *par le troiſiéme Theoreme*, car l'expoſant de chacune eſt *b*.

Ces deux Theoremes paroiſtront peut-eſtre plus naturellement démontrez, ſi l'on fait attention que c'eſt une même choſe de multiplier ou de diviſer chaque terme d'une fraction par une même grandeur que de multiplier & enſuite diviſer, ou que diviſer & enſuite multiplier cette fraction par cette grandeur ; car cela ne peut changer ſa valeur, puiſque la multiplication fait ce que la diviſion défait, & que la diviſion défait ce que la multiplication fait.

On voit aſſez par les Theoremes precedents, que chaque rapport peut s'exprimer par differens termes, les uns plus grands, & les autres plus petits; & que l'expoſant de toutes ces fractions ſelon la définition que nous en avons donnée 6. S. ſera toûjours l'expreſſion réduite aux moindres termes qui puiſſent marquer la valeur de chacune des fractions égales. $\frac{4}{2}$ *par exemple dont les deux termes ſont 4 & 2, peut s'exprimer par* $\frac{6}{3}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{10}{5}$, $\frac{12}{6}$, $\frac{14}{7}$, $\frac{16}{8}$, $\frac{18}{9}$, *&c. dont les deux termes ſont 6 & 3, 8 & 4, 10 & 5, 12 & 6, 16 & 8, 18 & 9, &c. les uns plus grands & les autres plus petits; & 2 ou* $\frac{2}{1}$, *expoſant commun de toutes ces diviſions, eſt réduit aux deux termes 2 & 1, qui ſont les moindres qui puiſſent marquer la valeur de la fraction* $\frac{4}{2}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{8}{4}$, *&c. De même le rapport* $\frac{ab}{a}$ *peut eſtre exprimé par* $\frac{abc}{ac}$, $\frac{abcd}{acd}$, $\frac{abcde}{acde}$, $\frac{abcdef}{acdef}$, *dont les deux termes ab & a, abc & ac, abcd & acd, abcde & acde, abcdef & acdef, ſont les uns plus grands, & les autres plus petits, mais b ou* $\frac{b}{1}$, *l'expoſant commun de toutes ces fractions ou diviſions, eſt réduit aux deux termes b & 1, qui ſont les moindres qui puiſſent marquer la valeur de la fraction* $\frac{abc}{ac}$, $\frac{abcd}{acd}$, *&c.*

Comme les plus grands termes s'éloignent davantage de l'unité qui nous eſt plus connuë, ils nous rendent auſſi les fractions ou rapports qu'ils expriment plus inconnus que ne font les moindres termes, qui s'approchent *davantage de l'unité. Ainſi les expoſants des fractions, qui ſont toûjours reduits aux moindres termes, rendent toûjours ces fractions les plus connuës qu'elles puiſſent eſtre. C'eſt pourquoi, afin de mieux connoître la valeur d'une fraction, il la faut toûjours reduire aux moindres termes qui peuvent marquer ſa valeur, c'eſt à dire qu'il faut trouver ſon expoſant.*

XXVI. Lorſqu'une grandeur literale eſt conçeuë diviſée en pluſieurs parties, comme en deux, en trois, en quatre &c. on exprime ces parties par une fraction numerique, aprés laquelle on écrit cette grandeur literale en cette ſorte $\frac{1}{3}a$, $\frac{3}{4}ab$, $\frac{8}{9}c^3$, & ainſi des autres, où l'on doit remarquer que la grandeur literale eſt dans le premier terme, car c'eſt le même que ſi l'on diſoit $\frac{1a}{3}$, $\frac{3ab}{4}$, $\frac{7^3}{9}$,&c. c'eſt à dire $1a$ rompu ou diviſé en 3 parties, $3ab$ rompus en 4, $7c^3$ en 9, &c.

SECOND PROBLEME.

Trouver l'expoſant d'une fraction propoſée.

XXVII. 1°. On diviſera chacun de ſes deux termes par leur plus grand diviſeur commun.

2°. On fera du premier de ces deux expoſants le premier terme, & du ſecond le ſecond terme de l'expoſant que l'on cherche. Les exemples éclairciront ces regles.

Premier Exemple.

Pour trouver l'expoſant de $\frac{56}{56}$. 1°. Je diviſe chacun des termes 56 & 56 par 56 qui eſt leur plus grand diviſeur commun. 2°. Je fais de 1 premier expoſant de ces diviſions le premier terme, & de 1, qui eſt pareillement le ſecond expoſant, le ſecond terme de l'expoſant $\frac{1}{1}$ ou 1, qui eſt celui que je cherche.

1ere diviſion.	*1er expoſant.*	*2e diviſion.*	*2e expoſant.*	
$\cancel{56}$	(1,	$\cancel{56}$	(1.	
$\cancel{56}$		$\cancel{56}$		$\frac{1}{1}$ *expoſant cherché.*

Second Exemple.

Pour trouver l'expoſant de $\frac{64}{32}$. 1°. Je diviſe chacun des termes 64 & 32 par 32 qui eſt leur plus grand diviſeur commun. 2°. Je fais de 2 premier expoſant de ces diviſions le premier terme, & de 1 ſecond expoſant le ſecond terme de l'expoſant $\frac{2}{1}$ ou 2, qui eſt celui que je cherche.

1ere diviſion.	*1er expoſant.*	*2e diviſion.*	*2e expoſant.*	
$\cancel{64}$	(2,	$\cancel{32}$	(1.	
$\cancel{32}$		$\cancel{32}$		$\frac{2}{1}$ *expoſant cherché.*

Troiſiéme Exemple.

Pour trouver l'expoſant de $\frac{abc}{acd}$. 1°. Je diviſe chacun des termes *abc* & *acd* par

par ac qui eſt leur plus grand diviſeur commun. 2°. Je fais de b premier expoſant de ces diviſions le premier terme, & de d ſecond expoſant le ſecond terme de l'expoſant $\frac{b}{d}$, qui eſt celui que je cherche.

1^{ere} diviſion. 1^{er} expoſant. 2^{e} diviſion. 2^{e} expoſant.

$$\frac{abc}{ac}(b, \quad \frac{acd}{ac}(d. \quad \frac{b}{d}$$ expoſant cherché.

Quatrième Exemple.

Pour trouver l'expoſant de $\frac{102}{42}ab$. 1°. Je diviſe $102ab$ & 42 par 6 qui eſt leur plus grand diviſeur commun. 2°. Je fais de $17ab$ premier expoſant de ces diviſions le premier terme, & de 7 ſecond expoſant le ſecond terme de l'expoſant $\frac{17ab}{7}$ ou $\frac{17}{7}ab$, qui eſt celui que je cherche.

1^{ere} diviſion. 1^{er} expoſant. 2^{e} diviſion. 2^{e} expoſant.

$$\frac{\overset{\cancel{4}}{\cancel{1}\cancel{0}\cancel{2}}ab}{\cancel{6}\cancel{6}}(17ab, \quad \frac{\cancel{4}\cancel{2}}{\cancel{6}}(7. \quad \frac{17}{7}ab$$ expoſant cherché.

Cinquième Exemple.

Pour trouver l'expoſant de $\frac{a6ccoomm+4a6ccm3p}{ooppz4+4mp3z4}$ 1°. Je diviſe chacun des termes $a^6ccoomm+4a^6ccm^3p$ & $ooppz^4+4mp^3z^4$ par $oo+4mp$ qui eſt leur plus grand diviſeur commun. 2°. Je fais de a^6ccmm, premier expoſant de ces diviſions, le premier terme, & de ppz^4, ſecond expoſant, le ſecond terme de $\frac{a6ccmm}{ppz4}$, qui eſt l'expoſant que je cherche

1^{ere} diviſion. 1^{er} expoſant. 2^{e} diviſion. 2^{e} expoſant.

$$\frac{a^6ccoomm+4a^6ccm^3p}{oo \quad +4mp}(a^6ccm, \quad \frac{ooppz^4+4mp^3z^4}{oo \quad +4mp}(ppz^4. \quad \frac{a6ccmm}{ppz4}$$ expoſant cherché.

Lorſque chaque terme de la fraction donnée n'a point de diviſeur commun plus grand que l'unité, elle eſt ſon expoſant à elle-même, car l'expoſant de chacun de ces termes à l'unité eſt ce même terme. Ainſi $\frac{47}{98}$ n'a point d'autre expoſant que lui-même, car 1 eſtant le plus grand diviſeur commun de 47 & de 98, $\frac{47}{1}=47$, & $\frac{98}{1}=98$.

Démonſtration du Probleme.

1°. Les plus grands diviſeurs donnent des expoſants plus petits, puiſqu'une grande partie eſt moins de fois dans un tout qu'une petite. 2°. Ces petits expoſants deviennent les termes d'une fraction qui vaut autant que la premiere, *par* 15. *S.* puiſque chaque terme de cette fraction eſt diviſé par une même grandeur. 3°. Ces petits expoſants ne peuvent eſtre plus petits, & conſerver la valeur de la fraction propoſée; car en toute fraction, chaque terme ne peut eſtre également diviſé ſans reſte par une grandeur qui ſurpaſſe leur plus grand diviſeur commun. Les regles du probleme ont donc preſcrit ce qu'il falloit faire.

XXVIII. On reduit les nombres ou grandeurs entieres en fractions, en leur ſouſcrivant l'unité pour ſecond terme, ce qui ne change en rien leur valeur. 3 par exemple eſt un nombre entier, & $\frac{3}{1}$ eſt une fraction qui ne differe point de 3. Pareillement a eſt une grandeur entiere, & $\frac{a}{1}$ eſt une fraction qui ne differe point de a.

DE L'ADDITION ET SOUSTRACTION DES FRACTIONS.

DEMANDE.

XXIX. ON demande que l'on ſçache déja ajoûter & ſouſtraire les fractions qui ont chacune un même ſecond terme. Par exemple que $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$, que $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}$, que $\frac{3}{4}a+\frac{3}{4}a=\frac{6}{4}a$, que $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$. Et qu'au contraire $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$, que $\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, que $\frac{3}{4}a-\frac{2}{4}a=\frac{1}{4}a$, que $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$, & ainſi des autres.

AVERTISSEMENT.

XXX. *C'eſt une regle generale pour chacune des operations qui ſuivent, que les fractions ſur leſquelles on veut operer ſoient toûjours des expoſants, c'eſt à dire qu'elles ſoient toûjours reduites aux moindres termes, afin que l'on en connoiſſe mieux la valeur, & que les operations en ſoient plus courtes & plus faciles.*

TROISIE'ME PROBLEME.

XXXI. Faire que deux fractions qui ont leur ſecond terme different, en ayent chacune un même ſans changer de valeur.

Si l'expoſant du plus grand des ſeconds termes au plus petit eſt entier, on multiplie par cet expoſant chaque terme de la fraction où le ſecond terme eſt plus petit, & l'on a ce qu'on cherche.

Mais ſi cet expoſant n'eſt pas entier, on multiplie reciproquement le premier terme de la premiere fraction par le ſecond terme de la ſeconde, & le premier terme de la ſeconde par le ſecond de la premiere; enſuite on fait du produit des deux ſeconds termes le ſecond terme de chacune, & l'on a ce qu'on cherche.

Premier Exemple.

Pour faire que 6 ou $\frac{6}{1}$ & $\frac{9}{4}$ ayent chacune un même ſecond terme, l'expoſant de 4, le plus grand, à 1, le plus petit des deux ſeconds termes 1 & 4, eſt le nombre entier 4; je multiplie donc par cet expoſant 4 chaque terme de $\frac{6}{1}$ où le ſecond terme eſt plus petit. Cela me donne $\frac{24}{4}=\frac{6}{1}$; & ainſi, au lieu de $\frac{6}{1}$ & de $\frac{9}{4}$, j'ay $\frac{24}{4}$ & $\frac{9}{4}$, qui ſans changer de valeur, ont chacune de même ſecond.

$\frac{6}{\text{[illegible]}}$ & $\frac{9}{4}=\frac{24}{4}$ & $\frac{9}{4}$

Second Exemple.

Pour donner un même ſecond terme à $\frac{3}{2}$ & $\frac{5}{6}$, l'expoſant de 6 à 2 eſt le nombre entier 3, je multiplie donc par 3 chaque terme de $\frac{3}{2}$. Cela me donne $\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$, & ainſi, au lieu de $\frac{3}{2}$ & $\frac{5}{6}$ j'ay $\frac{9}{6}$ & $\frac{5}{6}$, qui ſans changer de valeur ont chacune un ſecond terme.

$\frac{3}{2}$ & $\frac{5}{6}=\frac{9}{6}$ & $\frac{5}{6}$

Troiſiéme Exemple.

Pour donner un même ſecond terme à $\frac{5}{4}$ & $\frac{5}{6}$, l'expoſant de 6 à 4, qui eſt $\frac{3}{2}$, n'eſt pas un nombre entier, je multiplie donc reciproquement 5, premier terme de $\frac{5}{4}$, par 6, ſecond terme de $\frac{5}{5}$, & 5, premier terme de $\frac{5}{6}$, par 4 ſecond terme de $\frac{5}{4}$, & je fais de 24 produit de 6 par 4 le ſecond terme de chacune. Cela me donne $\frac{30}{24}=\frac{5}{4}$ & $\frac{20}{24}=\frac{5}{6}$, & ainſi, au lieu de $\frac{5}{4}$ & de $\frac{5}{6}$, j'ai $\frac{30}{24}$ & $\frac{20}{24}$, qui ſans changer de valeur, ont chacune un même ſecond terme.

$\frac{5}{4}$ & $\frac{5}{6}=\frac{30}{24}$ & $\frac{20}{24}$

Quatriéme Exemple.

Pour donner un même ſecond terme à $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{bd}$. d, expoſant de bd à b, eſt entier, je multiplie donc chaque terme de $\frac{a}{b}$ par d, cela me donne $\frac{ad}{bd}=\frac{a}{b}$; & ainſi, au lieu de $\frac{a}{b}$ & de $\frac{ce}{bd}$, j'ai $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{ce}{bd}$, qui ſans changer leur valeur, ont chacune un même ſecond terme.

$\frac{a}{b}$ & $\frac{ce}{bd}=\frac{ad}{bd}$ & $\frac{ce}{bd}$

Cinquiéme Exemple.

Pour donner un même ſecond terme à $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, l'expoſant de b à d ou de d à b n'eſt pas entier, je multiplie donc reciproquement le premier terme de $\frac{a}{b}$ par d, & le premier terme de $\frac{c}{d}$ par b, & je fais de bd produit de b par d le ſecond terme de chacune. Cela me donne $\frac{ad}{bd}=\frac{a}{b}$ & $\frac{bc}{bd}=\frac{c}{d}$; & ainſi, au lieu de $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, j'ay $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, qui ſans changer leur valeur, ont chacune un même ſecond terme.

$\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$

Sixiéme Exemple.

Pour donner un même ſecond terme à $\frac{17}{7}ab$ & $\frac{5}{9}bc$. $\frac{9}{7}$ expoſant de 9 à 7 n'eſt pas entier, je multiplie donc reciproquement $17ab$, premier terme de $\frac{17}{7}ab$, par 9, ſecond terme de $\frac{5}{9}bc$, & 5, premier terme de $\frac{5}{9}bc$, par 7, ſecond terme de $\frac{17}{7}ab$; & je fais de 63, produit de 9 par 7, le ſecond terme de chacune. Cela me donne $\frac{153}{63}ab=\frac{17}{7}ab$, & $\frac{35}{63}bc=\frac{5}{9}bc$; & ainſi, au lieu de $\frac{17}{7}ab$ & $\frac{7}{9}bc$, j'ai $\frac{153}{63}ab$ & $\frac{35}{63}bc$, qui ſans changer leur valeur, ont chacune un même ſecond terme.

$\frac{17}{7}ab$ & $\frac{5}{9}bc=\frac{153}{63}ab$ & $\frac{53}{63}bc$

Septiéme Exemple.

Pour donner un même ſecond terme à $\frac{x^3+axx+abb}{aa-bb}$ & $\frac{xx-bx+bb}{a+b}$. $a-b$ expoſant de $aa-bb$ à $a+b$ eſt entier, je multiplie donc chaque terme de $\frac{xx-bx+bb}{a+b}$ par $a-b$, cela me donne $\frac{axx-abx+abb-bxx+bbx-b^3}{aa-bb} = \frac{xx-bx+bb}{a+b}$; & ainſi, au lieu de $\frac{x^3+axx+abb}{aa-bb}$ & $\frac{xx-bx+bb}{a+b}$, j'ai $\frac{x^3+axx-abb}{aa-bb}$ & $\frac{axx-abx+abb-bxx+bbx-b^3}{aa-bb}$, qui ſans changer leur valeur, ont chacune un même ſecond terme.

Huitiéme Exemple.

Pour donner un même ſecond terme à $\frac{b+2c-e}{a-b}$ & $\frac{x-a}{b-c+e}$. $\frac{b-c+e}{a-b}$, expoſant de $b-c+e$ à $a-b$, ou $\frac{a-b}{b-c+e}$, expoſant de $a-b$ à $b-c+e$, n'eſt pas entier; je multiplie donc reciproquement $b+2c-e$ par $b-c+e$, & $x-a$ par $a-b$, & je fais de $ab-ac+ae-bb+bc-be$, produit de $a-b$ par $b-c+e$, le ſecond terme de chacune. Cela me donne $\frac{bb+bc-2cc+3ce-ee}{ab-ac+ae-bb+bc-be} = \frac{b+2c-e}{a-b}$, & $\frac{ax-aa-bx+ab}{ab-ac+ae-bb+bc-be} = \frac{x-a}{b-c+e}$; & ainſi, au lieu de $\frac{b+2c+e}{a-b}$ & $\frac{x-a}{b-c+e}$, j'ai $\frac{bb+bc-2cc+3ce-ee}{ab-ac+ae-bb+bc-be}$ & $\frac{ax-aa-bx+ab}{ab-ac+ae-bb+bc-be}$, qui ſans changer leur valeur, ont chacune un même ſecond terme.

Démonſtration du Probleme.

Il eſt évident qu'en operant ſelon les regles du probleme, l'on donne aux fractions un même ſecond terme; & parceque dans les operations que l'on fait ſur elles, on multiplie également chacun de leurs termes, il eſt évident *par* 24. *S.* qu'on ne change point leur valeur. Le probleme a donc preſcrit ce qu'il falloit faire.

QUATRIÉME PROBLEME.

Ajoûter pluſieurs fractions.

XXXII. 1°. On trouve par le probleme precedent à chacune des deux premieres de ces fractions un même ſecond terme, ſi le leur eſt different, & on les ajoûte en une ſomme qu'on reduit à ſon expoſant.

2°. On donne à cette ſomme ainſi reduite & à la troiſiéme fraction un même ſecond terme, ſi le leur eſt different, & l'on en prend la ſomme; & ainſi de ſuite.

Par exemple pour adjoûter $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{7}{5}$ en une ſomme. 1°. On trouve *par le probleme qui precede*, que $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{4}{6}+\frac{5}{6}$, dont l'expoſant eſt $\frac{3}{2}$. 2°. On trouve que $\frac{3}{2}+\frac{7}{5}=\frac{15}{10}+\frac{14}{10}=\frac{29}{10}$, & $\frac{29}{10}$ eſt une ſomme égale à $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{7}{5}$, & ainſi c'eſt celle que l'on cherche.

De même pour ajoûter les deux fractions $\frac{b+2c-e}{a-b}$ & $\frac{x-a}{b-c+e}$, on trouve en adjoûtant le produit de $b+2c-e$ par $b-c+e$ au produit de $x-a$ par $a-b$, que $\frac{bb+bc-2cc+3ce-ee+ax-aa-bx+ab}{ab-ac+ae-bb+bc-be}$ eſt la ſomme qu'on cherche. Il en eſt ainſi des autres.

La démonſtration de ce probleme, & celle du probleme ſuivant, ſont une ſuite naturelle de la demande & du probleme qui precedent.

CINQUIÉME PROBLEME.

Souſtraire des fractions les unes des autres. XXXIII.

1°. On reduit par le probleme precedent toutes celles qu'on veut retrancher en une ſomme, & toutes celles dont on les veut retrancher en une autre, & l'on donne à chacune un même ſecond terme.

2°. On retranche de la derniere ſomme la precedente, & le reſte eſt ce qu'on cherche.

Par exemple pour retrancher $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$ de $\frac{3}{4}+\frac{6}{7}$, la ſomme de $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{3}{2}$, & celle de $\frac{3}{4}+\frac{6}{7}=\frac{45}{28}$, donnant donc à $\frac{3}{2}$ & $\frac{45}{28}$ un même ſecond terme, on trouve que $\frac{3}{2}=\frac{42}{28}$ qui eſtant retranché de $\frac{45}{28}$ laiſſé $\frac{45-42}{28}=\frac{3}{28}$ pour la difference ou le reſte qu'on cherche.

De même pour retrancher la fraction $\frac{x-a}{b-c+e}$ de $\frac{b+2c-e}{a-b}$, on trouve que $\frac{x-a}{b-c+e}=\frac{ax-aa-bx+ab}{ab-ac+ae-bb+bc-be}$, & $\frac{b+2c-e}{a-b}=\frac{bb+bc-2cc+3ce-ee}{ab-ac+ae-bb+bc-be}$, & ainſi retranchant $ax-aa-bx+ab$ de $bb+bc-2cc+3ce-ee$, la difference ou le reſte qu'on cherche, eſt $\frac{bb+bc-2cc+3ce-ee-ax+aa+bx-ab}{ab-ac+ac-bb+bc-be}$. Il en eſt ainſi des autres.

COROLLAIRE.

Il eſt d'un grand uſage de reconnoiſtre de combien un rapport ſurpaſſe, ou XXXIV. eſt ſurpaſſé par un autre ; & c'eſt ce qu'on reconnoiſt facilement en donnant à chacun de ces rapports un même ſecond terme, & retranchant l'un de l'autre, ſelon les regles de ce probleme.

Pour exemple pour connoiſtre de combien le rapport de 5 à 7 ou $\frac{5}{7}$ ſurpaſſe ou eſt ſurpaſſé par le rapport de 8 à 11 ou $\frac{8}{11}$, donnant à chacun un même ſecond, terme, on aura $\frac{55}{77}=\frac{5}{7}$ & $\frac{56}{77}=\frac{8}{11}$, où l'on voit facilement que $\frac{8}{11}$ ſurpaſſe $\frac{5}{7}$ de la partie $\frac{1}{77}$, à cauſe que $\frac{56}{77}=\frac{8}{11}$ ſurpaſſe $\frac{55}{77}=\frac{5}{7}$ de la même partie $\frac{1}{77}$.

Lorſqu'on retranche une fraction de quelque autre, on change ſeulement les XXXV. *ſignes qui ſont au premier terme de la fraction qu'on retranche, ſans changer ceux du ſecond terme. Par exemple en retranchant* $\frac{4+2}{5+3}$ *de* $\frac{7}{5+3}$ *on n'écrit pas* $\frac{7}{5+3}\,\frac{-4-2}{-5-3}$, *mais on écrit* $\frac{7}{5+3}\,\frac{-4-2}{5+3}$ *ou* $\frac{7-4-2}{5+3}$, *c'eſt à dire* $\frac{1}{8}$.

Pour adjoûter commodement les fractions ; avant qu'on opere ſur elles, on XXXVI. reduit en chacune à l'unité & aux nombres tout ce qui eſt égal à l'unité & aux nombres, & l'on écrit en fractions les reſtes qui ſont moindres que l'unité.

Par exemple pour ajoûter $\frac{5}{4}+\frac{7}{3}+\frac{23}{5}+\frac{1}{2}$. 1°. Je dis $\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$, $\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$, $\frac{23}{5}=4\frac{3}{5}$, & $\frac{1}{2}$ eſt égal à lui-même, j'ajoûte enſuite les fractions $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{3}$, leur ſomme eſt $\frac{7}{12}$, à qui j'ajoûte $\frac{3}{5}$, la ſomme eſt $\frac{71}{60}=1\frac{11}{60}$, je laiſſe 1 à part, & j'ajoûte $\frac{11}{60}$ & $\frac{1}{2}$, la ſomme eſt $\frac{41}{60}$, à qui j'ajoûte enfin les quatre nombres entiers 1, 2, 4, & 1 que j'avois laiſſé à part, & la ſomme totale $8\frac{41}{60}$ eſt la ſomme cherchée. Cette methode eſt d'un grand uſage. En voici d'autres exemples ſur des grandeurs d'eſpeces differentes, dont les grandes ſont des entiers au regard des petites, & reciproquement les petites des fractions au regard des grandes.

Premier Exemple.

J'ai à reduire en une ſomme pluſieurs monnoyes differentes, comme des piſtoles, des livres, des ſols, & des deniers, la piſtole vaut 10 livres, la livre 20 ſols, & le ſol 12 deniers. Je place en ces monnoyes, les deniers ſous les deniers, les ſols ſous les ſols, les livres ſous les livres, & les piſtoles ſous les piſtolles, en appellant chaque piſtole P, chaque livre l, chaque ſol $ſ$, & chaque denier d. Et les ayant écrit en cette ſorte, j'en fais ainſi l'addition en commençant par les deniers ; Je dis $4+10=14, 14+8=22, 22+7=29d=2$ fois $12d$, (ou $2ſ$) $+5d$, j'écris les $5d$ ſous les deniers, & rejettant 2 fois $12d$, ou $2ſ$ avec les ſols, je dis $2+8=10, 10+9=19, 19+7=26, 26+0=26ſ$, j'écris 6 ſous les ſols, & rejettant 2 au rang ſuivant, je dis $2+1=3, 3+1=4$ dixaines de ſols ou $2l$, rejettant donc $2l$, avec les livres, je dis $2+6=8$, 8 † $8=16, 16+9=25, 25+8=33l=3$ fois 10 livres (ou $3P$) $+3l$, j'écris $3l$ ſous les livres, & rejettant $3P$ avec les piſtoles, je dis $3+5=8, 8+7=15, 15+1=16, 16+3=9$, j'écris 9 ſous les piſtoles, & rejettant 2 au rang ſuivant, je dis $2+1=3, 3+2=5$, j'écris 5 ſous ce rang, & je connois que $59P+3l+6ſ+5d$ eſt la ſomme cherchée

Piſtoles	*livres*	*ſols*	*deniers*
5	6	8	4
7	8	9	10
11	9	17	8
23	8	10	7

Somme $59\,P + 3\,l + 6\,ſ + 5\,d$.

Second Exemple.

J'ai à reduire en une ſomme la valeur de pluſieurs meſures d'eſpeces differentes, comme de perches, de pieds, de pouces, & de lignes. La perche dans la Province de France vaut 18 pieds, le pied vaut 12 pouces, & le pouce 12 lignes, je place ces meſures les lignes ſous les lignes, les pouces ſous les pouces, &c. en appellant chaque perche P, chaque pied P, chaque pouce p, & chaque ligne l, & les ayant écrit en cette ſorte, j'en fais ainſi l'addition, je dis $11+6=17, 17+10=27, 27+7=34l$, qui font $2p$, $+10l$, j'écris donc $10l$ ſous les lignes, & rejettant $2p$ avec les pouces, je dis $2+10=12, 12+11=23, 23+10=33, 33+9=42p=3$ fois $12p$ (ou $3\mathrm{P}$) $+6p$, j'écris $6p$ ſous les pouces, & rejettant $3\mathrm{P}$ avec les pieds, je dis $3+17=20, 20+15=35, 35+9=44, 44+13=57\mathrm{P}=3$ fois $18\mathrm{P}$ (ou $3P$) $+3\mathrm{P}$, j'écris $3\mathrm{P}$ ſous les pieds, & rejettant 3 perches avec les perches, je dis $3+4=7, 7+2=9, 9+4=13, 13+7=20$, j'écris 0, & je retiens 2, & continuant le reſte de l'operation comme aux entiers, je connois enfin que $1250P+3\mathrm{P}+6p+10l$ eſt la ſomme cherchée.

Perches	*Pieds*	*pouces*	*lignes*
354	17	10	11
272	15	11	6
64	9	10	10
557	13	9	7

Somme $1250\,P + 3\,\mathrm{P} + 6\,p + 10\,l$

Troiſiéme Exemple.

On meſure tout dans l'Aſtronomie par le moyen du cercle. Il eſt partagé en 360 parties égales, qu'on appelle *degrez* ; chaque degré eſt partagé en 60 parties égales, qu'on appelle *minutes* ou *premieres*; chaque premiere en 60 autres parties égales, qu'on appelle *ſecondes*; chaque ſeconde en 60 *troiſiémes*, chaque troiſiéme en 60 *quatriémes*, &c. Et toutes ces parties s'appellent *fractions Aſtronomiques*. Je ſuppoſe que j'aie à reduire en une ſomme la valeur de pluſieurs de ces fractions d'eſpeces differentes, comme des degrez, des premieres, des ſecondes, des troiſiémes, & des quatriémes. Je place ces fractions les quatriémes ſous les quatriémes &c. en appellant, comme font les Aſtronomes, chaque degré *d*, chaque premiere $'$, chaque ſeconde $''$, chaque troiſiéme $'''$, & chaque quatriéme $''''$, & les ayant écrit en cette ſorte, je fais ainſi leur addition, je dis $8+9=17$, $17+7=24$, $24+6=30''''$, j'écris $0''''$ ſous les quatriémes, & rejettant 3 au rang ſuivant, je dis $3+3=6$, $6+5=11$, $11+4=15$, $15+5=20$ dixaines ou $200''''=3$ fois $60''''$ (ou $3'''$) $+20''''$, j'écris donc $20''''$, c'eſt à dire, j'avance 2 devant $0''''$, & rejettant 3 avec les troiſiémes, je dis $3+6=9$, $9+9=18$, $18+5=23$, $23+2=25'''$, j'écris $5'''$ ſous les troiſiémes, & rejettant 2 au rang ſuivant, je dis $2+5=7$, $7+4=11$, $11+3=14$ dixaines, ou $140'''=2$ fois $60'''$ (ou $2''$) $+20'''$ qui avec $5'''$ déja écrites font $25'''$, j'avance donc ſimplement 2 avant 5, & rejettant $2''$ avec les ſecondes. je dis $2+4=6$, $6+7=13$, $13+5=18$, $18+5=23''$, j'écris $3''$, & rejettant 2 au rang ſuivant, je dis $2+3=5$, $5+4=9$, $9+5=14$, $14+4=18$ dixaines ou $180''$ $=3$ fois $60''$ (ou $3'$) ſans aucun reſte, rejettant donc $3'$ avec les premieres, je dis $3+9=12$, $12+0+8=20$, $20+7=27'$, j'écris $7'$, & rejettant 2 au rang ſuivant, je dis $2+5=7$, $7+3=10$, $10+4=14$, $14+1=15$ dixaines, ou $150'=2$ fois $60'$ (ou $2d$) $+30'$, j'écris donc 3 devant $7'$, & rejettant 2 au rang ſuivant, je dis $2+5=7$, $7+4=11$, $11+8=19$, $19+5=24d$, j'écris $4d$, & rejettant 2 au rang ſuivant, je dis $2+2=4$, $4+6=10$, $10+2=12$, $12+3=15$, j'écris 5 & j'avance 1. Et je connois enfin que $154d+27'+3''+25'''+20''''$ eſt la ſomme cherchée.

$$\begin{array}{lrrrrr}
 & 25d & +59' & +34'' & +56''' & +38'''' \\
 & 64 & 30 & 47 & 9 & 59 \\
 & 28 & 48 & 55 & 45 & 47 \\
 & 35 & 17 & 45 & 32 & 56 \\ \hline
\textit{Somme} & 154d & +27' & +3'' & +25''' & +20''''
\end{array}$$

Lorſqu'on retranche une fraction d'une autre, pour abbreger, on reduit avant l'operation à l'unité & aux nombres, ce qui eſt égal en chacune à l'unité & aux nombres; & s'il reſte une fraction dans le nombre à retrancher, on oſte cette fraction de celle qui reſte dans l'autre nombre, ſuppoſé qu'il y en reſte une plus grande, ou bien de l'unité qu'on oſte à ce nombre, ſuppoſe qu'il n'y reſte pas une fraction plus grande. XXXVII.

Par exemple pour retrancher $\frac{40}{28}$ de $\frac{7}{2}$. 1°. Je dis $\frac{40}{28}=1\frac{5}{14}$, & $\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$. 2°. Je retranche $\frac{5}{14}$ de $\frac{1}{2}$ ou de $\frac{7}{14}$ égal à $\frac{1}{2}$, & il reſte $\frac{2}{14}$ ou $\frac{1}{7}$, je retranche enſuite 1 de 3, & le reſte 2 plus le reſte $\frac{1}{7}$ fait $2\frac{1}{7}$ qui eſt la difference que je cherche.

De même pour retrancher $\frac{26}{3}$ de $\frac{846}{10}$. 1°. Je dis $\frac{26}{3}=8\frac{2}{3}$ & $\frac{846}{10}=84\frac{3}{5}$. 2°. Je vois que $\frac{2}{3}$ ou $\frac{10}{15}$ ne peut eſtre retranché de $\frac{3}{5}$ ou $\frac{9}{15}$, & ainſi je retranche $\frac{2}{3}$ de 1 que j'oſte à 84, écrivant 83 au lieu de 84, & il reſte $\frac{1}{3}$. Enſuite je retranche 8 de 83, le reſte eſt 75, j'ajoûte enſuite $\frac{1}{3}$ ou $\frac{5}{15}$ à $\frac{3}{5}$ ou $\frac{9}{15}$, ce qui fait $\frac{14}{15}$, que j'ajoûte enfin à 75, & $75\frac{14}{15}$ eſt le reſte que je cherche. Voici d'autres exemples de la même methode ſur des grandeurs d'eſpeces differentes.

Premier Exemple.

Pour trouver la difference de $25P+7l+15\text{ſ}+8d$ à $19P+9l+18\text{ſ}+10d$, je les diſpoſe à l'ordinaire, & je fais ainſi leur ſouſtraction en commençant par les deniers, je dis $8-10$ oſte trop, car $10d$ ne peuvent eſtre compris dans 8, j'emprunte donc 1ſ ou $12d$ du rang ſuivant, écrivant 4 au lieu de 5, & je dis $12+8=20d$, $20-10=10$, & j'écris $10d$ ſous les deniers; & venant aux ſols, je dis $4-8$ oſte trop, j'emprunte donc 1 au rang ſuivant, écrivant 0 au lieu de 1, & je dis 1 dixaine empruntée $+4=14$, $14-8=6\text{ſ}$, & j'écris 6ſ ſous 8ſ, $0-1$ dixaine de ſols oſte trop, j'emprunte donc 2 dixaines de ſols ou 1 livre au rang ſuivant, écrivant 6 au lieu de 7, & je dis 2 empruntez $+0-1=1$, & j'écris 1 ſous ce rang: venant aprés aux livres, je dis $6-9$ oſte trop, j'emprunte donc $1P$ ou $10l$, écrivant 4 au lieu de 5, & je dis $10+6=16$, $16-9=7l$, & j'écris $7l$ ſous les livres: & enfin venant aux piſtoles, je dis $4-9$ oſte trop, j'emprunte donc 1 du rang ſuivant, écrivant 1 au lieu de 2, & je dis $10+4=14$, $14-9=5P$, & j'écris $5P$ ſous $9P$, je dis enſuite $1-1=0$. Et je connois que $5P+7l+16\text{ſ}+10d$ eſt la difference cherchée.

$$\begin{array}{rrrrr} & 14 & 6 & 04 & \\ & +\cancel{25}P & +\cancel{7}l & +\cancel{15}\text{ſ} & +8d \\ & -19 & -9 & -18 & -10 \\ \hline \textit{difference} & 5P & +7l & +16\text{ſ} & +10d \end{array}$$

Second Exemple.

Pour trouver la difference de 24 perches 16 pieds 10 pouces 6 lignes à $13P+17\mathrm{P}+11p+10l$, je les diſpoſe à l'ordinaire, & j'en fais ainſi la ſouſtraction en commençant par les lignes; je dis $6-10$ oſte trop, & j'emprunte $1p$ ou $12l$, écrivant 9 au lieu de 10, je dis enſuite $12+6=18$, $18-10=8l$, & j'écris $8l$ ſous les lignes; & venant aux pouces, je dis $9-11p$ oſte trop, & j'emprunte $1\mathrm{P}$ ou $12p$, écrivant 5 au lieu de 6, je dis enſuite $12+9=21$, $21-11=10p$, & j'écris $10p$ ſous les pouces: enſuite je dis en venant aux pieds, $15-17$ oſte trop, j'emprunte donc $1P$ ou $18\mathrm{P}$, écrivant 3 au lieu de 4, & je dis $18+15=33$, $33-17=16\mathrm{P}$, & j'écris $16\mathrm{P}$ ſous les pieds: Et enfin aux perches je dis $3-3=0$, & j'écris 0 ſous $3P$, & au rang ſuivant, je dis $2-1=1$, & j'écris 1 aprés 0. Et je connois que le reſte ou la difference cherchée eſt $10P+16\mathrm{P}+10p+8l$.

$$\begin{array}{rrrrr} & 3 & 5 & 9 & \\ & +2\cancel{4}P & +1\cancel{6}\mathrm{P} & +1\cancel{0}p & +6l \\ & -13 & -17 & -11 & -10 \\ \hline \textit{difference} & 10P & +16\mathrm{P} & +10p & +8l \end{array}$$

Troiſiéme Exemple.

Pour trouver la difference de $359d+47'+35''+48'''+15''''$ à $348d+49'+58''+56'''+37''''$, je les diſpoſe à l'ordinaire, & je fais ainſi leur ſouſtraction en commençant par les quatriémes, je dis $5-7$ oſte trop, j'emprunte donc 1 au rang ſuivant, écrivant 0 au lieu de 1, & je dis 10 empruntez $+5=15$, $15-7=8''''$, & j'écris $8''''$ ſous $7''''$, je dis enſuite $0-3$ oſte trop, j'emprunte donc $1'''$ ou 6 fois $10''''$, écrivant 7 au lieu de 8, & je dis $6-3=3$ dixaines, j'avance donc 3 aprés 8 : & venant aux troiſiémes, je dis $7-6=1'''$, & j'écris $1'''$ ſous $6'''$, je dis enſuite $4-5$ oſte trop, & j'emprunte $1''$ ou 6 fois $10'''$, écrivant 4 au lieu de 5, & je dis $6+4=10$, $10-5=5$ dixaines de troiſiémes, & j'écris 5 aprés $1'''$: enſuite venant aux ſecondes, je dis $4-8$ oſte trop, j'emprunte donc 1, écrivant 2 au lieu de 3, & je dis $10+4=14$, $14-8=6''$, & j'écris $6''$ ſous $8''$, & enſuite je dis $2-5$ oſte trop, j'emprunte donc $1'$ ou 6 dixaines de ſecondes, écrivant 6 au lieu de 7, & je dis $6+2=8$, $8-5=3$, & j'écris 3 aprés $6''$: Et venant aux premieres, je dis $6-9$ oſte trop, j'emprunte donc 1, écrivant 3 au lieu de 4, & je dis $10+6=16$, $16-9=7'$, & j'écris $7'$ ſous $9'$, & enſuite je dis $3-4$ oſte trop, j'emprunte donc $1d$ ou 6 fois $10'$, écrivant 8 au lieu de 9, & je dis $6+3=9$, $9-4=5$, & j'écris 5 aprés $7'$: Et enfin venant aux degrez, je dis $8-8=0$, & j'écris $0d$ ſous $8d$, je dis enſuite $5-4=1$, & j'écris 1 ſous 4, $3-3=0$, il ne faut plus rien écrire, & je connois que $10d+57'+36''+51'''+38''''$ eſt la difference cherchée.

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & 8 & 36 & 24 & 7 & 0 \\
 & +35\cancel{9}d & +4\cancel{7}' & +35'' & +48''' & +15'''' \\
 & -348 & -49 & -58 & -56 & -37 \\
\hline
\textit{difference} & 10d & +57' & +36'' & +51''' & +38''''
\end{array}$$

DE LA MULTIPLICATION

DES FRACTIONS.

SIXIE'ME PROBLEME.

Trouver le produit de deux fractions.

XXXVIII. On fait deux produits, le premier des deux premiers termes, & le ſecond des deux ſeconds termes de ces fractions. Le premier de ces produits eſt le premier terme, & le ſecond produit le ſecond terme d'une autre fraction, dont l'expoſant eſt le produit qu'on cherche. Les exemples éclairciront cette regle.

Premier Exemple.

Pour trouver le produit de $\frac{4}{3}$ par $\frac{3}{5}$, je fais deux produits, le premier 42, des deux premiers termes 4 & 3, & le ſecond 15, des deux ſeconds termes 3 & 5, & le premier produit 12 eſt le premier terme, & le ſecond produit 15 le ſecond terme de la fraction $\frac{12}{15}$ dont l'expoſant $\frac{4}{5}$ eſt le produit cherché.

Second Exemple.

Pour trouver le produit de $\frac{4}{5}$ par $\frac{2}{3}$, le produit 8, de 4 par 2, eſt le premier terme, & le produit 15 de 5 par 3, le ſecond terme de la fraction $\frac{8}{15}$, qui n'a point d'autre expoſant qu'elle-même, à cauſe qu'elle eſt réduite aux moindres termes qui peuvent marquer ſa valeur. Ainſi cette fraction eſt le produit qu'on cherche.

Troiſiéme Exemple.

Pour trouver le produit de $\frac{ab}{g}$ par $\frac{fc}{b}$, le produit $abfc$, de ab par fc, eſt le premier terme, & le produit bg, de g par b, le ſecond terme de la fraction $\frac{abfc}{bg}$, dont l'expoſant $\frac{afc}{g}$ eſt le produit cherché.

Quatriéme Exemple.

Pour trouver le produit de $\frac{a+b}{a-e}$ par $\frac{a+b-e}{b+e}$, le produit $aa+2ab+bb-ae-be$, de $a+b$ par $a+b-e$, eſt le premier terme, & le produit $ab+ae-be-ee$, de $a-e$ par $b+e$, eſt le ſecond terme de la fraction $\frac{aa+2ab+bb-ae-be}{ab+ae-be-ee}$, qu'on ne peut réduire à de moindres termes. Et ainſi cette fraction eſt le produit qu'on cherche.

Démonſtration du Probleme.

Soient $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ les deux fractions à multiplier, je dis que l'expoſant de $\frac{ac}{bd}$ eſt le produit qu'on cherche. Car ſoit e l'expoſant de $\frac{a}{b}$, & f l'expoſant de $\frac{c}{d}$. Donc (*par I. 123.*) $be=a$, & $df=c$; Donc $\frac{bedf}{bd}=\frac{ac}{bd}$. Or ef eſt l'expoſant de $\frac{bedf}{bd}$, il eſt donc auſſi l'expoſant de $\frac{ac}{bd}$. Or e & f ont même valeur que les fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$: Donc ef ſera le produit de ces deux fractions, puiſque les grandeurs égales également multipliées donnent des produits égaux, l'expoſant de $\frac{ac}{bd}$ eſt donc le produit cherché. Ce qu'il falloit démontrer.

Voici encore une démonſtration plus ſenſible par nombres. Soit à multiplier $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{4}$, le produit trouvé par la regle eſt $\frac{1}{8}$. Or *par la définition generale de la multiplication I. 83.* puiſque la fraction donnée $\frac{1}{2}$ n'enferme que la poſition de la moitié de l'unité, le produit de $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{4}$ n'enferme pareillement que la moitié de l'autre fraction $\frac{1}{4}$, c'eſt à dire $\frac{1}{8}$ (puiſque $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$) Or $\frac{1}{8}$ eſt auſſi le produit trouvé par la regle. On a donc fait ce qu'il falloit faire.

Ou bien par un raiſonnement reciproque, la fraction $\frac{1}{4}$ n'enferme que la poſition du quart de l'unité, le produit de $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{4}$ n'enferme donc auſſi que la poſition du quart de l'autre fraction $\frac{1}{2}$, c'eſt à dire $\frac{1}{8}$ (puiſque $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$) Or $\frac{1}{8}$ eſt auſſi le produit trouvé par la regle: On a donc fait ce qu'il falloit faire.

XXXIX. Pour trouver plus facilement le produit de deux fractions, avant que d'operer ſur elles, 1°. On réduit en chacune à l'unité & aux nombres, tout ce qui eſt égal à l'unité & aux nombres. 2°. On prend le produit des nombres entiers, plus celuy des fractions reſtées, plus deux autres produits l'un de la premiere fraction reſtée par le ſecond des nombres entiers, & l'autre de la ſeconde fraction par le premier nombre. 3°. On prend la ſomme de ces quatre produits, & l'on a ce qu'on cherche.

Par exemple pour multiplier $\frac{17}{3}$ par $\frac{21}{8}$. 1°. Je dis $\frac{17}{3}=5\frac{2}{3}$, & $\frac{21}{8}=2\frac{5}{8}$. 2°. Je prens 10 produit de 5 par 2, plus $\frac{5}{12}$ produit de $\frac{2}{3}$ par $\frac{5}{8}$, plus $1\frac{1}{3}$ produit de $\frac{2}{3}$

par 2 ou $\frac{2}{1}$, plus $3\frac{1}{8}$ produit de $\frac{5}{8}$ par 5. 3°. Je prends la ſomme des produits trouvez 10, $\frac{5}{12}$, $1\frac{1}{3}$, & $3\frac{1}{8}$, & cette ſomme qui eſt $14\frac{7}{8}$ eſt auſſi le produit que je cherche.

Cette maniere abregée eſt d'un grand uſage, lorſqu'on veut prendre le produit des fractions qui renferment beaucoup de chifres.

DE LA DIVISION

DES FRACTIONS.

SEPTIÉME PROBLEME.

Trouver l'expoſant d'une fraction à une autre.

On fait deux produits, le premier du premier terme de la premiere fraction par le ſecond terme de la ſeconde, & le ſecond du ſecond terme de la premiere fraction par le premier terme de la ſeconde. Le premier de ces produits ſera le premier terme, & le ſecond produit le ſecond terme d'une autre fraction, dont l'expoſant eſt l'expoſant qu'on cherche. Les exemples ſuivans éclairciront cette regle. XL.

Premier Exemple.

Pour trouver l'expoſant de $\frac{4}{5}$ à $\frac{4}{3}$, je fais deux produits, le premier 12 de 4, premier terme de $\frac{4}{5}$, par 3, ſecond terme de $\frac{4}{3}$; & le ſecond 20 de 5, ſecond terme de $\frac{4}{5}$, par 4, premier terme de $\frac{4}{3}$. Le premier produit 12 eſt le premier terme, & le ſecond produit 20 le ſecond terme de la fraction $\frac{12}{20}$, dont l'expoſant $\frac{3}{5}$ eſt auſſi l'expoſant cherché.

Second Exemple.

Pour trouver l'expoſant de $\frac{8}{15}$ à $\frac{2}{3}$, je fais deux produits le premier 24, de 8 par 3, & le ſecond 30, de 15 par 2; le premier produit 24 eſt le premier terme, & le ſecond produit 30 le ſecond terme de $\frac{24}{30}$, dont l'expoſant $\frac{4}{5}$ eſt auſſi l'expoſant cherché.

Troiſiéme Exemple.

Pour trouver l'expoſant de $\frac{ab}{cg}$ à $\frac{be}{cf}$, le produit $abcf$, de ab par cf, eſt le premier terme, & le produit $becg$, de cg par be, le ſecond terme de $\frac{abcf}{becg}$, dont l'expoſant $\frac{af}{eg}$ eſt auſſi l'expoſant cherché.

Quatriéme Exemple.

Pour trouver l'expoſant de $\frac{a}{b}$ à $\frac{c}{g}$, le produit ag eſt le premier terme, & le produit bc le ſecond terme de $\frac{ag}{bc}$, qui ne pouvant eſtre réduit à de moindres termes, eſt auſſi l'expoſant cherché.

Cinquiéme Exemple.

Pour trouver l'expoſant de $\frac{aa+2ab+bb-ac-bc}{ab+ac-bc-cc}$ à $\frac{a+b-c}{b+c}$, le produit

$aab+2abb+aae+abe-aee-bee+b^3$, de $aa+2ab+bb-ae-be$ par $b+e$, eſt le premier terme, & le produit de $ab+ae-be-ee$ par $a+b-c$, qui eſt $aab+abb+aae-abe-2aee-bbe+e^3$, eſt le ſecond terme de $\frac{aab+2abb+aae+abe-aee-bee+b^3}{aab+abb+aae-abe-2aee-bbe+e^3}$, dont l'expoſant $\frac{a+b}{c-e}$ eſt auſſi l'expoſant cherché.

Démonſtration du Probleme.

Soit $\frac{a}{b}$ la fraction à diviſer, & $\frac{c}{d}$ ſon diviſeur; je dis que l'expoſant de $\frac{ad}{bc}$ eſt auſſi l'expoſant qu'on cherche: Car ſoit e l'expoſant de $\frac{a}{b}$, & f l'expoſant de $\frac{c}{d}$: Donc (*par I. 123.*) $be=a$, & $df=c$; Donc $\frac{bed}{bdf}=\frac{ad}{bc}$. Or $\frac{e}{f}$ eſt l'expoſant de $\frac{bed}{bdf}$, il eſt donc auſſi l'expoſant de $\frac{ad}{bc}$. Or e & f ont même valeur que les fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$; Donc $\frac{e}{f}$ ſera l'expoſant de $\frac{a}{b}$ à $\frac{c}{d}$, puiſque les grandeurs égales également diviſées donnent les mêmes expoſants: l'expoſant de $\frac{ad}{bc}$ ſera donc l'expoſant qu'on cherche. Ce qu'il falloit démontrer.

Voici encore une démonſtration plus ſenſible par nombres. Soit à diviſer $\frac{1}{8}$ par $\frac{1}{4}$, l'expoſant trouvé par la regle eſt $\frac{1}{2}$. Or *par la définition generale de la diviſion I.* 107. puiſque la fraction donnée $\frac{1}{8}$ n'enferme que la poſition de la moitié de ſon diviſeur $\frac{1}{4}$, l'expoſant de $\frac{1}{8}$ à $\frac{1}{4}$ n'enferme pareillement que la moitié de l'unité, c'eſt à dire $\frac{1}{2}$, qui eſt auſſi l'expoſant trouvé par la regle.

Soit pareillement à diviſer $\frac{1}{4}$ par $\frac{1}{8}$, l'expoſant trouvé par la regle eſt 2 ou $\frac{2}{1}$. Or *par la définition generale de la diviſion I.* 107. puiſque la fraction $\frac{1}{4}$ eſt une addition ou une ſomme de ſon diviſeur $\frac{1}{8}$ repeté 2 fois (puiſque $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$) l'expoſant de $\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{8}$ ſera auſſi l'addition ou la ſomme de l'unité repetée 2 fois, c'eſt à dire 2, qui eſt auſſi l'expoſant trouvé par la regle: On a donc fait ce qu'il falloit faire.

DE LA REDUCTION DES GRANDEURS

DE DIFFERENTES ESPECES.

XLI. Pour multiplier ou diviſer des grandeurs d'eſpeces differentes, on les réduit toutes de part & d'autre à la plus grande des eſpeces propoſées, ce que l'on fait en diviſant les petites eſpeces par le nombre qui marque combien elles ſont de fois dans les grandes, auſquelles on les veut réduire; & l'on cherche enſuite le produit ou l'expoſant qu'on demande par les regles ordinaires des operations ſur les grandeurs rompuës.

Par exemple pour multiplier 24 piſtoles 10 livres 15 ſols 10 deniers par $12P+7l+10ſ+11d$, chaque $ſ=12d$, chaque $l=20ſ=20$ fois $12d$, & chaque $P=10l=10$ fois 20 $ſ=10$ fois 20 fois $12d$: C'eſt pourquoi je diviſe d'une part $10l$ par 10, $15ſ$ par 240, & $10d$ par 2400; & de l'autre part $7l$ par 10, $10ſ$ par 240, & $11d$ par 2400. Les trois expoſans d'une part, qui ſont $1p$, $\frac{1}{16}p$, & $\frac{1}{240}p$ avec $24p$, donnent la ſomme $25\frac{1}{15}p$; & les trois expoſans de l'autre part, qui ſont $\frac{7}{10}p$, $\frac{1}{24}p$, & $\frac{11}{2400}p$ avec $12p$, donnent la ſomme $12\frac{597}{800}p$, & le produit de ces deux ſommes eſt $319\frac{387}{2000}p$, qui eſt auſſi le produit cherché.

XLII. Pour reduire une eſpece de grandeur à une autre plus grande, on diviſe cette eſpece par le nombre qui marque combien elle eſt de fois dans la plus grande. Ainſi pour réduire 1842476090 deniers à des piſtoles, je diviſe ce nombre par 2400, à cauſe que chaque d eſt 2400 fois dans $1P$, l'expoſant de cette diviſion eſt $767698P + 890d$.

Pour réduire $890d$ à des livres, je diviſe 890 par 240, à cauſe que chaque d eſt 240 fois dans $1l$, l'expoſant de cette diviſion eſt $3l + 170d$.

Pour réduire $170d$ à des ſols, je diviſe 170 par 12, à cauſe que chaque d eſt 12 fois dans $1ſ$, l'expoſant de cette diviſion eſt $14ſ + 2d$. Et par ce moyen je viens enfin à connoiſtre que $1842476090d$ eſt le même que $767698P + 3l + 14ſ + 2d$.

XLIII. Avant que d'ajoûter, ſouſtraire, multiplier, ou diviſer les fractions des grandeurs d'eſpeces differentes, on réduit dans chacune de leurs ſommes partiales les grandes à des entiers, & l'on rejette aux petites les reſtes moindres que l'unité.

Si par exemple $\frac{35}{6}d + \frac{59'}{3} + \frac{36''}{7} + \frac{52'''}{27} + \frac{36''''}{15}$ eſtoit une des ſommes partiales qu'il fallut ajoûter, retrancher, multiplier ou diviſer par quelque autre. Avant que d'operer ſelon ce qu'on vient de dire, je la réduis ainſi; je dis aux degrez $\frac{35}{6}d = 5\frac{5}{6}d$, j'écris $5d$ ſous les degrez, & je multiplie $\frac{5}{6}$ par 60 ou $\frac{60}{1}$, le produit eſt $\frac{300'}{6} = 50'$ que j'écris ſous les premieres; & venant à ces premieres, je dis $\frac{59}{3} = 19\frac{2}{3}$ j'écris $19'$ ſous les premieres, & je multiplie $\frac{2}{3}$ par 60, le produit eſt $\frac{120''}{3}$ ou $40''$ que j'écris ſous les ſecondes; & venant à ces ſecondes, je dis $\frac{36''}{7} = 5\frac{1}{7}''$, j'écris 5 ſous les ſecondes, & je multiplie $\frac{1}{7}$ par 60, le produit eſt $\frac{60}{7}$ ou $8\frac{4}{7}'''$, j'écris $8'''$ ſous les troiſiémes, & je retiens $\frac{4}{7}'''$, je dis enſuite $\frac{52'''}{27} = 1\frac{25}{27}'''$, j'écris $1'''$ ſous $8'''$, & j'ajoûte $\frac{25}{27}'''$ à $\frac{4}{7}'''$ que j'avois retenu, la ſomme eſt $\frac{283}{189} = 1\frac{94}{189}'''$, j'écris donc encore $1'''$ ſous les troiſiémes, & je multiplie $\frac{94}{189}$ par 60, le produit eſt $\frac{5640''''}{189} = 29\frac{53}{63}''''$, j'écris $29''''$ ſous les quatriémes, & je retiens $\frac{53}{63}''''$, je dis enſuite $\frac{36''''}{15} = 2\frac{2}{5}''''$, j'écris $2''''$ ſous $9''''$, & j'ajoûte $\frac{2}{5}$ à $\frac{53}{63}''''$ que j'avois retenu, la ſomme eſt $\frac{393}{315}''''$ que j'écris en la laiſſant en fraction, à cauſe que multipliant $\frac{393}{315}$ par 60, le produit ne peut eſtre réduit à des cinquiémes ſans fraction. Enfin je réduis toutes ces grandeurs en une ſomme, & je trouve $6d + 9' + 45'' + 10''' + 31\frac{393}{315}''''$ qui n'a qu'une fractiõ $\frac{393}{315}$, & qui eſt neanmoins égale à $\frac{35}{6}d + \frac{59'}{3} + \frac{36''}{7} + \frac{52'''}{27} + \frac{36''''}{15}$. Il en eſt ainſi des autres.

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & \frac{35}{6}d + & \frac{59'}{3} + & \frac{36''}{7} + & \frac{52'''}{27} + & \frac{36''''}{15} \\ \hline
 & 5d + & 50' + & 40'' + & 8''' + & 29'''' \\
 & & 19 + & 5 + & 1 + & 2 \\
 & & & & 1 & 2\frac{393}{315} \\ \hline
\textit{Somme} & 6d + & 9' + & 45'' + & 10''' + & 31\frac{393}{315}
\end{array}$$

DES FRACTIONS
DE FRACTIONS.

XLIV. Comme les nombres partagez en differentes parties produiſent les fractions, ainſi les fractions partagées en differentes parties produiſent les fractions de fractions ; & pareillement les fractions de fractions partagées en d'autres parties produiſent les fractions de fractions de fractions : & ainſi de ſuite. $\frac{2}{3}$ par exemple eſt une fraction, $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ eſt une fraction de fraction, $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ de $\frac{5}{6}$ eſt une fraction de fraction de fraction, & ainſi des autres.

XLV. Pour operer ſur ces ſortes de fractions de fractions, ou de fractions de fractions de fractions, &c. On les réduit auparavant à des fractions ordinaires qui ont une même valeur, ce qui ſe fait en multipliant les unes par les autres, car leur produit aura même valeur qu'elles.

Par exemple pour réduire à une fraction ordinaire $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$, je multiplie l'une de ces fractions par l'autre, & le produit $\frac{8}{15}$ eſt égal à $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$: Car ſoit $\frac{4}{5}$ appellé a, donc $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5} = \frac{2}{3}a$ qui eſt la même choſe que $\frac{2}{3}$ multiplié par a, puiſque $\frac{2}{3}a$ & $\frac{2a}{3}$ ſont la même choſe (*par 26. S.*) Donc le produit de $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, qui eſt $\frac{8}{15}$, eſt égal à $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$.

Pareillement pour réduire à une fraction ordinaire $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ de $\frac{5}{6}$. 1°. Je multiplie la premiere fraction par la ſeconde, & le produit eſt $\frac{8}{15}$. 2° Je multiplie ce produit $\frac{8}{15}$ par la troiſiéme fraction $\frac{5}{6}$, & le produit $\frac{4}{9}$ eſt une fraction égale à $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ de $\frac{5}{6}$. Il en eſt ainſi des autres.

DES ALIQUOTES
DES NOMBRES ENTIERS.

XLVI. Toutes les grandeurs, qui eſtant priſes pluſieurs fois meſurent exactement & ſans reſte un nombre, ſont appellées ſes *parties aliquotes*, ou ſimplement ſes *aliquotes*. Nous diſons par exemple que 1, 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, &c. ſont des aliquotes de 4, parceque 4 renferme exactement & ſans reſte 4 fois 1, 2 fois 2, 8 fois $\frac{1}{2}$, 16 fois $\frac{1}{4}$, 32 fois $\frac{1}{8}$, 48 fois $\frac{1}{12}$, &c. Nous diſons pareillement que $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{1}$, &c. ſont des aliquotes de $\frac{1}{3}$, parceque $\frac{1}{3}$ renferme exactement & ſans reſte 2 fois $\frac{1}{6}$, 3 fois $\frac{1}{9}$, 4 fois $\frac{1}{1}$, &c.

XLVII. Tout nombre pouvant ſe partager en une infinité de parties égales, peut avoir auſſi une infinité d'aliquotes. Et l'on poura découvrir autant de ces aliquotes que l'on voudra.

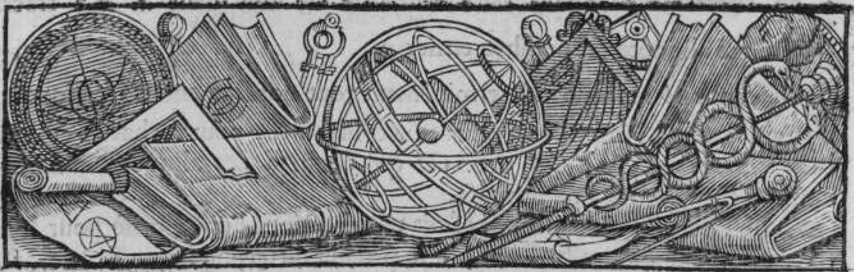
Car, 1°. ſi le nombre eſt entier, l'unité eſtant priſe pour le premier terme d'une fraction, & le produit du nombre entier qu'on propoſe par tout nombre entier, eſtant pris pour le ſecond terme de la même fraction, cette fraction ſera toûjours une aliquote du nombre propoſé. Soit par exemple a le nombre entier qu'on propoſe, & b tel nombre entier que l'on voudra ; il eſt viſible que la fraction $\frac{1}{ab}$ eſt aliquote du nombre entier a, car l'expoſant du nombre entier a à la fraction $\frac{1}{ab}$ eſt le nombre entier aab, qui expoſe combien de fois

$\frac{1}{ab}$ eſt exactement & ſans reſte renfermé de fois dans a. La fraction $\frac{1}{ab}$ eſt donc aliquote du nombre entier a.

Or comme b marque indéterminément tout nombre entier, $\frac{1}{ab}$ aliquote de a poura varier à l'infini, en prenant ſucceſſivement pour b chacun des nombres infinis 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. Ce qui donnera des aliquotes infinies du nombre entier a que l'on propoſe.

2°. Mais ſi le nombre propoſé eſtoit une fraction, l'unité priſe pour le premier terme d'une autre fraction, & le produit du ſecond terme de la fraction propoſée par tout nombre entier, eſtant pris pour le ſecond terme de cette autre fraction, cette fraction nouvelle ſera toûjours une aliquote de celle qu'on propoſe. Car ſoit $\frac{a}{c}$ la fraction propoſée, & b tel nombre entier que l'on voudra; il eſt viſible que la fraction $\frac{1}{bc}$ eſt aliquote de $\frac{a}{c}$, puiſque l'expoſant de $\frac{a}{c}$ à $\frac{1}{bc}$ eſt le nombre entier ab qui expoſe combien de fois $\frac{1}{bc}$ eſt exactement & ſans reſte renfermé dans $\frac{a}{c}$.

Et parceque b marque indéterminément tout nombre entier, la fraction $\frac{1}{bc}$ poura varier à l'infini, en prenant ſucceſſivement pour b chacun des nombres infinis 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. Ce qui donnera des aliquotes infinies de la fraction propoſée $\frac{a}{c}$.



ELEMENS DES MATHEMATIQUES.

LIVRE TROISIÉME.

DES PUISSANCES,

ET DE LEUR RESOLUTION.

I. ON a pû déja remarquer que a^3, b^4, c^3, &c. ſont la même choſe que *aaa, bbbb, ccc*, &c. On voit aſſez qu'il y a beaucoup de difference entre ces multiplications reïterées & les ſommes des grandeurs, entre b^3 par exemple & $3b$, entre b^4 & $4b$, b^5 & $5b$, &c. Car b^3, b^4, b^5, &c. marquent des additions ou des multiplications, mais $3b$, $4b$, $5b$, &c. ne marquent que des additions ſimples : de ſorte que les unes de ces grandeurs ſont beaucoup differentes des autres. $3b$ par exemple & b^3 ſont beaucoup differens l'un de l'autre ; car ſi b vaut 4, $3b$ vaudront 3 fois 4, c'eſt à dire 12 ; mais b^3 vaudra 4 fois 4 fois 4, c'eſt à dire 16 fois 4, ou 64, ce qui eſt beaucoup different de 12.

DEFINITIONS.

II. Ces Multiplications reïterées d'une grandeur s'appellent ſes *puiſſances*. Le plan de b par b eſt bb que j'appelle la *ſeconde puiſſance* de b. Le ſolide fait du plan bb par b, ou la *troiſiéme puiſſance* de b, eſt b^3. Sa *quatriéme puiſſance* eſt b^4. Sa cinquiéme b^5, &c.

De même la ſeconde puiſſance de 3 eſt 9. Sa troiſiéme puiſſance eſt 27. Sa quatriéme 81. Et ainſi de ſuite.

III. Le plan d'une grandeur par elle-même, ou la ſeconde puiſſance d'une

grandeur

grandeur s'appelle *quarré* de cette grandeur, & cette grandeur *racine quarrée*, ou ſimplement *racine* de ce quarré. bb par exemple eſt le quarré de b, & b la racine quarrée, ou ſimplement la racine de bb. 9 eſt le quarré de 3, & 3 eſt la racine de 9. 100 eſt le quarré de 10, & 10 eſt la racine de 100.

IV. Le ſolide fait du plan d'une grandeur par elle-même multiplié de nouveau par cette grandeur, ou bien la troiſiéme puiſſance d'une grandeur eſt appellée ſon *cube*, & cette grandeur la *racine cubique* de ce cube. b^3 par exemple eſt le cube de b, & b la racine cubique de b^3. 27 eſt le cube de 3, & 3 la racine cubique de 27.

V. La quatriéme puiſſance d'une grandeur eſt appellée le *quarré du quarré* de cette grandeur, & cette grandeur la *racine de la racine* de ce quarré de quarré. b^4 par exemple eſt le quarré du quarré de b, & b la racine de (bb) la racine de b^4.

VI. Si une grandeur eſt miſe en *cinquiéme puiſſance*, nous diſons que cette grandeur eſt la *racine* 5^e^. de cette puiſſance. b^5 par exemple eſt la cinquiéme puiſſance de b, & b la racine 5^e. de b^5.

VII. La ſixiéme puiſſance d'une grandeur eſt appellée le *quarré du cube* de cette grandeur, & cette grandeur la *racine de la racine cubique*, ou la *racine cubique de la racine* de cette puiſſance. b^6 par exemple eſt la ſixiéme puiſſance de b, ou le quarré de b^3 cube de b, ou le cube de bb quarré de b, & b eſt la racine de (bb) la racine cubique de b^6, ou bien b eſt la racine cubique de (b^3) la racine de b^6; & pour abbreger nos expreſſions nous diſons que b eſt la racine 6^e. de b^6.

VIII. Pareillement ſi une grandeur eſt en *ſeptiéme puiſſance*, nous l'appellons racine 7^e. de cette puiſſance. Ainſi b^7 eſtant la ſeptiéme puiſſance de b, nous diſons que b eſt la racine 7^e. de b^7.

IX. On appelle la huitiéme puiſſance d'une grandeur, le *quarré du quarré* de cette grandeur. La neuviéme, le *cube du cube* de cette grandeur. La dixiéme, le *quarré de ſa cinquiéme puiſſance*. La douziéme, le *cube du quarré de ſon quarré*. La quinziéme, le *cube de ſa cinquiéme puiſſance*. Et ainſi des autres.

X. Mais il eſt plus court d'appeller ces puiſſances ſelon le nombre de leurs dimenſions ou degrez, & les grandeurs lineaires, dont elles ſont formées par des multiplications reïterées, les *racines* 8^e. 9^e. 10^e. 11^e. 12^e. &c. Ainſi nous dirons que b^2 eſt la huitiéme puiſſance de b, & b la racine 8^e. de b^8. Que b^9 eſt la neuviéme puiſſance de b, & b la racine 9^e. de b^9. Que b^{10} eſt la dixiéme puiſſance de b, & b la racine 10^e. de b^{10}. De même que b eſt la racine 11^e. de b^{11}, la racine 12^e. de b^{12}, & ainſi des autres.

XI. Lorſqu'une grandeur ſera exprimée par pluſieurs parties ou caracteres, nous dirons que la premiere partie ou le premier caractere, eſt celui qui eſt écrit plus à gauche, & le dernier celui qui eſt plus à droite.

Par exemple dans $a+b+c$, le premier caractere eſt a, le ſecond eſt b, & le troiſiéme c. De même dans 542, le premier caractere eſt 5 écrit au troiſiéme & dernier rang, le ſecond caractere eſt 4, & le troiſiéme eſt 2 écrit au premier rang.

DE LA FORMATION DES PUISSANCES.

PREMIER THEOREME.

XII. Le quarré de toute grandeur exprimée par deux parties ou caracteres enferme le quarré du premier caractere, plus deux produits du premier par le ſecond, plus le quarré du ſecond.

Démonſtration. Le quarré de $a+b$ eſt $aa+2ab+bb$, car $a+b$ par $a+b$ donne un tel produit. Or ce quarré enferme aa quarré du premier caractere a, plus $2ab$ deux produits du premier caractere a par le ſecond b, plus enfin bb quarré du ſecond caractere b. Donc &c.

$$\begin{array}{rr}
\text{Racine} & a+b \\
\text{par} & a+b \\
\hline
 & ab+bb \\
 & aa+ab \quad \\
\hline
\text{Quarré} & aa+2ab+bb
\end{array}$$

SECOND THEOREME.

XIII. Le cube de toute grandeur exprimée par deux caracteres enferme le cube du premier, plus trois ſolides du quarré du premier par le ſecond, plus trois autres ſolides du premier par le quarré du ſecond, plus enfin le cube du ſecond.

Démonſtration. Le cube de $a+b$ eſt $a^3+3aab+3abb+b^3$, qui enferme a^3 cube de a, plus $3aab$ trois ſolides du quarré aa par b, plus $3abb$ trois autres ſolides de a par le quarré bb, plus enfin b^3 cube de b. Tout cela eſt évident par la formation même du cube.

$$\begin{array}{rr}
\text{Quarré} & aa+2ab+bb \\
\text{par} & a+b \\
\hline
 & aab+2abb+b^3 \\
 & a^3+2aab+abb \quad\quad \\
\hline
\text{Cube} & a^3+3aab+3abb+b^3
\end{array}$$

TROISIE'ME THEOREME.

XIV. On verra pareillement que le quarré du quarré d'une telle grandeur enferme le quarré du quarré du premier caractere, plus quatre ſurſolides du cube de ce premier caractere par le ſecond, plus ſix autres ſurſolides du quarré du premier par le quarré du ſecond, plus encore quatre ſurſolides du premier par le cube du ſecond, plus enfin le quarré du quarré du ſecond.

Dém. Le quarré du quarré de $a+b$ eſt $a^4+4a^3b+6aabb+4ab^3+b^4$, qui enferme a^4 le quarré du quarré de a, plus $4a^3b$ quatre ſurſolides du cube a^3 par b, plus $6aabb$ ſix autres ſurſolides du quarré aa par le quarré bb, plus encore $4ab^3$ quatre ſurſolides de a par le cube b^3, plus enfin b^4 quarré du quarré de b.

$$\begin{array}{rr}
\text{Cube} & a^3+3aab+3abb+b^3 \\
\text{par} & a+b \\
\hline
 & a^3b+3aabb+3ab^3+b^4 \\
 & a^4+3a^3b+3aabb+ab^3+b^4 \\
\hline
\text{Quarré du quarré} & a^4+4a^3b+6aabb+4ab^3+b^4
\end{array}$$

Le produit de cette quatriéme puiſſance par $a+b$ donne la cinquiéme puiſſance $a^5+5a^4b+10a^3bb+10aab^3+5ab^4+b^5$. XV.

Laquelle eſtant de nouveau multipliée par $a+b$ donne la ſixiéme

$$a^6+6a^5b+15a^4bb+20a^3b^3+15aab^4+6ab^5+b^6.$$

Cette ſixiéme par $a+b$ donne la ſeptiéme qui eſt

$$a^7+7a^6b+21a^5bb+35a^4b^3+35a^3b^4+21aab^5+7ab^6+b^7.$$

Et ainſi des autres qui ſuivent à l'infini.

XVI. La Table que nous donnons pour la compoſition des puiſſances, eſt une deſcription de ces puiſſances qu'on vient de former, & qu'on a continuées juſques à la dixiéme. Chaque rang de cette Table, qui va de gauche à droite, marque une puiſſance de $a+b$. & $a+b$ marque toute grandeur exprimée par deux parties ou caracteres ſeparez. Il importe beaucoup pour la ſuite de ſçavoir diſtinctement comment ces puiſſances ſe forment, & il eſt facile de le ſçavoir, ſi on s'exerce à les former ſoi-même.

Voyez la premiere Planche Table troiſiéme.

PREMIERE DEMANDE.

XVII. On demande que l'on puiſſe trouver le quarré de toute grandeur literale exprimée par pluſieurs parties.

Le produit de cette grandeur par elle-même donnera ce quarré. Mais on peut beaucoup abreger ſon operation en cette ſorte.

On écrit le quarré de la premiere partie.

Plus deux produits de la premiere par la ſeconde, plus le quarré de la ſeconde.

Plus deux produits des deux premieres par la troiſiéme, plus le quarré de la troiſiéme.

Plus deux produits des trois premieres par la quatriéme, plus le quarré de la quatriéme.

Plus deux produits des quatre premieres par la cinquiéme, plus le quarré de la cinquiéme. Et ainſi de ſuite à l'infini.

Par exemple pour quarrer $a+b+c$, j'écris aa quarré de la premiere partie. Plus $2ab$ deux plans de a par la ſeconde partie b, plus bb quarré de b. Plus $2ac+2bc$ deux plans des deux premieres parties $a+b$ par la troiſiéme c, plus enfin cc quarré de c, & tout le plan $aa+2ab+bb+2ac+2bc+cc$, eſt le quarré de $a+b+c$.

Racine $a+b+c$

Quarré $aa+2ab+bb+2ac+2bc+cc$

Pareillement, pour quarrer $bb+2bc+6bd+4cc$, j'écris b^4 quarré de bb. Plus $4b^3c$ deux produits de bb par $2bc$, plus $4bbcc$ quarré de $2bc$. Plus $12b^3d+24bbcd$ deux produits des deux premieres parties $bb+2bc$ par la troiſiéme $6bd$, plus $36bbdd$ quarré de $6bd$. Plus $8bbcc+16bc^3+48bccd$ deux produits des trois premieres parties $bb+2bc+6bd$ par la quatriéme $4cc$. Plus $16c^4$ quarré de $4cc$, & toute la ſomme de ces produits qui eſt $b^4+4b^3c+12bbcc+12b^3d+24bbcd+36bbdd+16bc^3+48bccd+16c^4$, eſt le quarré de $bb+2bc+6bd+4cc$. Il en eſt ainſi des autres.

Racine $bb+2bc+6bd+4cc$

Quarré $b^4+4b^3c+4bbcc+12b^3d+24bbcd+36bbdd+8bbcc+16bc^3+48bccd+16c^4$

Ou $b^4+4b^3c+12bbcc+12b^3d+24bbcd+36bbdd \quad * \quad +16bc^3+48bccd+16c^4$

COROLLAIRE.

XVIII. Il eſt évident par cette formation, que tout quarré renferme le quarré de telle des parties de ſa racine qu'on voudra, plus deux produits de cette partie par toutes les autres, plus le quarré de toutes ces autres.

Ainſi $aa+2ab+bb+2ac+2bc+cc$ renferme le quarré aa de la premiere partie de ſa racine qui eſt a, plus $2ab+2ac$ deux plans de a par toutes les autres parties de la racine qui ſont $b+c$, plus enfin $bb+2bc+cc$ quarré de ces autres parties $b+c$.

Ou bien auſſi ce quarré renferme bb quarré de b, plus $2ab+2bc$ deux plans de b par $a+c$, plus $aa+2ac+cc$ quarré de $a+c$.

Ou bien encore le même quarré renferme cc quarré de c, plus $2ac+2bc$ deux plans de c par $a+b$, plus $aa+2ab+bb$ quarré de $a+b$. C'eſt à dire que $aa+2ab+bb+2ac+2bc+cc=bb+2ab+2bc+aa+2ac+cc$ $=cc+2ac+2bc+aa+2ab+bb$. Il en eſt ainſi de tout autre quarré.

SECONDE DEMANDE.

XIX. On demande que l'on puiſſe trouver le cube de toute grandeur literale exprimée par pluſieurs parties.

Le produit de cette grandeur par ſon quarré donnera ce cube. Mais on peut beaucoup abreger ſon operation en cette ſorte.

On écrit le cube de la premiere partie.

Plus trois produits du quarré de la premiere par la ſeconde, plus trois autres produits de la premiere par le quarré de la ſeconde, plus le cube de la ſeconde.

Plus trois produits du quarré des deux premieres par la troiſiéme, plus trois autres produits des deux premieres par le quarré de la troiſiéme, plus le cube de la troiſiéme.

Plus trois produits du quarré des trois premieres par la quatriéme, plus trois autres produits des trois premieres par le quarré de la quatriéme, plus le cube de la quatriéme. Et ainſi de ſuite à l'infini.

Par exemple pour cuber $a+b+c$, j'écris a^3 cube de la premiere partie a. Plus $3aab$ trois ſolides de aa (quarré de a) par la ſeconde partie b, plus $3abb$ trois autres ſolides de a par le quarré bb, plus b^3 cube de b. Plus $3aac+6abc+3bbc$ trois ſolides de $aa+2ab+bb$ (quarré de $a+b$) par la troiſiéme partie c, plus $3acc+3bcc$ trois autres ſolides de $a+b$ par le quarré cc, plus enfin c^3 cube de c.

$$\text{Racine } a+b+c$$

$$\text{Cube } a^3+3aab+3abb+b^3+3aac+6abc+3bbc+3acc+3bcc+c^3$$

Pareillement, pour cuber $bb+2bc+6bd+4cc$, j'écris b^6 cube de bb. Plus $6b^5c$ trois produits de b^4 (quarré de bb) par $2bc$, plus $12b^4cc$ trois autres produits de bb par $4bbcc$ quarré de $2bc$, plus $8b^3c^3$ cube de $2bc$. Plus $18b^5d+72b^4cd+72b^3ccd$ trois produits de $b^4+4b^3c+4bbcc$ (quarré de $bb+2bc$) par la troiſiéme partie $6bd$, plus $108b^4dd+216b^3cdd$ trois autres produits de $bb+2bc$ par $36bbdd$ quarré de $6bd$, plus $216b^3d^3$ cube de $6bd$, Plus $12b^4cc + 48b^3c^3 + 48bbc^4 + 144b^3ccd + 288bbc^3d + 432bbccdd$ trois produits de $b^4 + 4b^3c + 4bbcc + 12b^3d + 24bbcd + 36bbdd$ (quarré des trois premieres parties $bb + 2bc + 6bd$) par $4cc$, plus $48bbc^4 + 96bc^5 + 288bc^4d$ trois autres produits de $bb + 2bc + 6bd$ par $16c^4$ quarré de $4cc$, plus enfin $64c^6$ cube de $4cc$, & toute la ſomme $b^6 + 6b^5c + 24b^4cc + 56b^3c^3 + 18b^5d + 72b^4cd + 216b^3ccd + 108b^4dd + 216b^3cdd + 216b^3d^3 + 96bbc^4 288bbc^3d + 432bbccdd + 96bc^5 + 288bc^4d + 64c^6$.

Racine $bb + 2bc + 6bd + 4cc$

Cube $b^6 + 6b^5c + 12b^4cc + 8b^3c^3 + 18b^5d + 72b^4cd + 72b^3ccd + 108b^4dd$
$+ 216b^3cdd + 216b^3d^3 + 12b^4cc + 48b^3c^3 + 48bbc^4 + 144b^3ccd$
$+ 288bbc^3d + 432bbccdd + 48bbc^4 + 96bc^5 + 288bc^4d + 64c^6$.

COROLLAIRE.

Il eſt évident par cette formation que tout cube renferme le cube de telle des parties de ſa racine qu'on voudra, plus trois produits du quarré de cette partie par toutes les autres, plus trois autres produits de cette partie par le quarré de toutes les autres, plus le cube de toutes ces autres. XX.

Ainſi le cube $a^3 + 3aab + 3abb + b^3 + 3aac + 6abc + 3bbc + 3acc + 3bcc + c^3$ renferme a^3 cube de a, plus $3aab + 3aac$ trois ſolides du quarré aa par toutes les autres parties de la racine qui ſont $b + c$, plus $3abb + 6abc + 3acc$ trois autres ſolides de a par $bb + 2bc + cc$ quarré de $b + c$, plus $b^3 + 3bbc + 3bcc + c^3$ cube de $b + c$.

Ou bien auſſi ce cube renferme b^3 cube de b, plus $3abb + 3bbc$ trois ſolides de bb (quarré de b) par $a + c$, plus $3aab + 6abc + 3bcc$ trois autres ſolides de b par $aa + 2ac + cc$ quarré de $a + c$, plus $a^3 + 3aac + 3acc + c^3$ cube de $a + c$, c'eſt à dire que ce cube eſt le même que la ſomme totale $b^3 + 3abb + 3bbc + 3aab + 6abc + 3bcc + a^3 + 3aac + 3acc + c^3$.

Ou bien encore le même cube renferme c^3 cube de c, plus $3acc + 3bcc$ trois ſolides de cc par $a + b$, plus $3aac + 6abc + 3bbc$ trois autres ſolides de c par $aa + 2ab + bb$ quarré de $a + b$, plus enfin $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$ cube $a + b$. C'eſt à dire que ce cube eſt le même que la ſomme totale $c^3 + 3acc + 3bcc + 3aac + 6abc + 3bbc + a^3 + 3aab + 3abb + b^3$. Il en eſt ainſi de tout autre cube.

COROLLAIRE GENERAL.

On vient de voir aux demandes qui precedent, en élevant une grandeur literale exprimée par pluſieurs parties ou caracteres à la ſeconde ou troiſième puiſſance, que la même operation qui ſe fait par le moyen de la premiere & de la ſeconde partie de cette grandeur, ſe reïtere par le moyen des deux premieres & de la troiſiéme, & enſuite par le moyen des trois premieres & de la quatriéme, & encore enſuite par le moyen des quatre premieres & de la cinquiéme, &c. XXI.

La même choſe ſe fait auſſi pour les autres puiſſances plus élevées que la troiſiéme, & on peut reconnoître au rang de chaque puiſſance de la Troiſiéme Table, ce qu'on doit écrire pour élever toute grandeur literale qui a pluſieurs parties à la puiſſance égale à celle de ce rang. Car ſi on prend ſucceſſivement a pour la premiere partie de cette grandeur, & b pour la ſeconde, & enſuite a pour les deux premieres & b pour la troiſiéme, & encore enſuite a pour les trois premieres & b pour la quatriéme, & ainſi à l'infini : La premiere cellule du rang qu'on aura pris marquera ſingulierement ce qu'on doit écrire pour la premiere partie. Et toutes les cellules de ce rang qui ſuivent la premiere, marqueront ſucceſſivement ce qu'on doit encore écrire par le moyen de la premiere & ſeconde partie, & enſuite par le moyen des deux premieres & de la troiſiéme, & encore enſuite par le moyen des trois premieres & de la quatriéme, des quatre premieres & de la cinquiéme, des cinq premieres & de la ſixiéme. Et ainſi de ſuite à l'infini.

Par exemple au rang de la ſeconde puiſſance qui eſt $aa+2ab+bb$, la premiere cellule aa marque ſingulierement que pour élever toute grandeur à ſon quarré, on doit premierement écrire le quarré de ſa premiere partie. Et les deux cellules $2ab+bb$ marqueront ſucceſſivement qu'on doit écrire deux produits de la premiere par la ſeconde, plus le quarré de la ſeconde. Et enſuite deux produits des deux premieres par la troiſiéme, plus le quarré de la troiſiéme. Et encore enſuite deux produits des trois premieres par la quatriéme, plus le quarré de la quatriéme. Et ainſi à l'infini, comme on l'a déja vû aux exemples de la premiere demande.

De même au rang de la troiſiéme puiſſance $a^3+3aab+3abb+b^3$, la premiere cellule a^3 marque ſingulierement qu'en écrivant le cube d'une grandeur exprimée par pluſieurs parties, on doit premierement écrire le cube de la premiere partie. Et les trois cellules $3aab+3abb+b^3$, qu'on doit ſucceſſivement écrire trois produits du quarré de la premiere par la ſeconde, plus trois autres produits de la premiere par le quarré de la ſeconde, plus le cube de la ſeconde. Et enſuite trois produits du quarré des deux premieres par la troiſiéme, plus trois autres produits des deux premieres par le quarré de la troiſiéme, plus le cube de la troiſiéme. Et encore enſuite trois produits du quarré des trois premieres par la quatriéme, plus trois autres produits des trois premieres par le quarré de la quatriéme, plus le cube de la quatriéme. Et ainſi à l'infini, comme on l'a déja vû aux exemples de la ſeconde demande.

Pareillement au rang de la cinquiéme puiſſance, laquelle eſt $a^5+5a^4b+10a^3bb+10aab^3+5ab^4+b^5$, la premiere cellule a^5 marque ſingulierement qu'en écrivant la 5^e^ puiſſance d'une grandeur exprimée par pluſieurs parties, on doit premierement écrire la cinquiéme puiſſance de la premiere partie. Et les cinq autres cellules $5a^4b+10a^3bb+10aab^3+5ab^4+b^5$, qu'on doit ſucceſſivement écrire cinq produits du quarré de quarré de la premiere partie par la ſeconde, plus dix produits du cube de la premiere par le quarré de la ſeconde, plus dix autres produits du quarré de la premiere par le cube de la ſeconde, plus cinq produits de la premiere par le quarré du quarré de la ſeconde, plus la cinquiéme puiſſance de la ſeconde.

Et enſuite, cinq produits du quarré de quarré des deux premieres par la troiſiéme, plus dix produits du cube des deux premieres par le quarré de la troiſiéme, plus dix autres produits du quarré des deux premieres par le cube de la troiſiéme, plus cinq produits des deux premieres par le quarré du quarré de la troiſiéme, plus la cinquiéme puiſſance de la troiſiéme. Et ainſi à l'infini.

C'eſt la même choſe des autres puiſſances, en ſe ſervant des rangs de la Troiſiéme Table qui ont même degré que ces puiſſances.

Voyez la premiere Planche Table troiſiéme.

XXII. Nous dirons dans la ſuite qu'un nombre eſt dans un rang & dans ceux qui ſuivent, c'eſt à dire dans ceux qui ſont avancez vers la gauche, lorſque ce nombre eſt non ſeulement dans les uns & dans les autres de ces rangs, mais auſſi lorſqu'il eſt tout entier dans le premier, ou dans le premier & ſecond de ces rangs. Je dirai par exemple dans 148 que 8, ou 38, ou 48, ou 108, ou 126, &c. ſont au premier rang & dans ceux qui ſuivent. Et cela afin de marquer ſeulement le rang où quelque nombre commence à ſe rencontrer ſans faire attention aux caracteres qui ſont aux rangs ſuivans, ni ſe mettre en peine de ſçavoir s'il y en a, ou s'il n'y en a pas pluſieurs.

XXIII. Et ſi on ſuppoſe que tous les caracteres d'un nombre ſoient tranchez par de petites lignes de deux en deux, ou de trois en trois, ou de quatre en quatre, &c. en commençant de droite à gauche, nous appellerons *A* ou *premiere tranche*, celle qui eſt plus à gauche, *B* ou *ſeconde tranche* celle qui ſuit la premiere, *C* ou *troiſiéme* celle qui ſuit la ſeconde, *D* ou *quatriéme* celle qui ſuit la troiſiéme. Et ainſi de ſuite.

A	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*
29	48	49	160	103	007	869	3593	2801

TROISIE'ME DEMANDE.

XXIV. On demande que l'on puiſſe trouver le quarré de tout nombre donné. Le produit de ce nombre par lui-même donnera ce quarré. C'eſt ainſi que le produit de 543 par lui-même donne le quarré 294849, dont la racine eſt 543.

Racine 543
par 543
1629
2172 .
2715 . .
Quarré 294849

COROLLAIRE.

XXV. En tout nombre quarré tranché de deux en deux caracteres & de droite à gauche. 1°. Le quarré du premier caractere eſt dans la tranche *A*.

2°. Deux plans de ce premier caractere par le ſecond ſont au ſecond rang de *B* & dans ceux qui ſuivent, & le quarré du ſecond caractere eſt au premier rang de *B* & dans ceux qui ſuivent.

3°. Deux plans des deux premiers caracteres par le troiſiéme ſont au ſecond rang de *C* & dans ceux qui ſuivent, & le quarré du troiſiéme caractere eſt au premier rang de *C* & dans ceux qui ſuivent.

4°. Deux plans des trois premiers caracteres par le quatriéme ſont au ſecond rang de *D* & dans ceux qui ſuivent, & le quarré du quatriéme caractere eſt au premier rang de *D* & dans ceux qui ſuivent. Et ainſi des autres tranches *E*, *F*, &c. à l'infini.

Soit par exemple le quarré 294849 tranché comme on vient de dire. En quarrant 543 racine de ce quarré, on multiplie 3 par 3, ce qui fait 9. Plus 54 dixaines par 3, & 3 par 54 dixaines, ce qui fait 324 dixaines, plus 4 dixaines par 4 dixaines, ce qui fait 16 centaines, plus 5 centaines par 4 dixaines, & 4 dixaines par 5 centaines, ce qui fait 40 mille, plus enfin 5 centaines par 5 centaines, ce qui fait 25 dixaines de mille.

Racine			543
par			543
			9
		32	4.
		16	..
	4	0.	..
	25	..	..
Quarré	29	48	49
	A	*B*	*C*

Tous ces plans diſpoſez par ordre, & reduits en une ſomme rendent le quarré propoſé 294849. Et dans cette ſomme ou ce quarré. 1°. 25 quarré du premier caractere 5 eſt dans la tranche *A*. 2°. 40 deux plans de 5 par le ſecond caractere 4 ſont au ſecond rang de *B* & dans ceux qui ſuivent, & 16 quarré de 4 eſt au premier rang de *B* & dans ceux qui ſuivent. 3°. 324 deux plans des deux premiers caracteres 54 par le troiſiéme qui eſt 3 ſont au ſecond rang de *C* & dans ceux qui ſuivent, & 9 quarré de 3 eſt au premier rang de *C*.

Pareillement au quarré 97515625 tranché comme dans l'exemple qui precede, & dont la racine eſt 9875. 1°. 81 quarré de 9 eſt dans *A*. 2°. 144 deux plans de 9 par 8 ſont au ſecond rang de *B* & dans ceux qui ſuivent, & 64 quarré de 8 eſt au premier rang de *B* & dans ceux qui ſuivent. 3°. 1372 deux plans de 98 par 7 ſont au ſecond rang de *C* & dans ceux qui ſuivent, & 49 quarré de 7 eſt au premier rang de *C* & dans ceux qui ſuivent. 4°. 9870 deux plans de 987 par 5 ſont au ſecond rang de *D* & dans ceux qui ſuivent, & 25 quarré de 5 eſt au premier rang de *D* & dans ceux qui ſuivent. C'eſt la même choſe de tout nombre quarré.

Racine				9875
par				9875
				25
		9	87	0.
			49	..
	1	37	2.	..
		64	..	..
	14	4.	..	..
	81	..	..	..
Quarré	97	51	56	25
	A	*B*	*C*	*D*

QUATRIÉME DEMANDE.

XXVI. On demande que l'on puiſſe trouver le cube de tout nombre donné. Le produit de ce nombre par ſon quarré donnera ce cube. C'eſt ainſi que le produit de 543 par 294849 quarré de 543, donne le cube 160103007, dont la racine cubique eſt 543.

Racine	543
Quarré	294849
	884547
	1179396.
	1474245..
Cube	160103007

COROLLAIRE.

COROLLAIRE.

XXVII. En tout nombre cube tranché de trois en trois caracteres. 1°. Le cube du premier caractere eſt dans la tranche *A*.

2°. Trois ſolides du quarré de ce premier caractere par le ſecond ſont au troiſiéme rang de *B* & dans ceux qui ſuivent, plus trois autres ſolides du premier caractere par le quarré du ſecond ſont au ſecond rang de *B* & dans ceux qui ſuivent, & le cube du ſecond caractere eſt au premier rang de *B* & dans ceux qui ſuivent.

3°. Trois ſolides des deux premiers caracteres par le troiſiéme ſont au troiſiéme rang de *C* & dans ceux qui ſuivent, plus trois autres ſolides des deux premiers caracteres par le quarré du troiſiéme ſont au ſecond rang de *C* & dans ceux qui ſuivent, & le cube du troiſiéme caractere eſt au premier rang de *C* & dans ceux qui ſuivent.

4°. Trois ſolides du quarré des trois premiers caracteres par le quatriéme ſont au troiſiéme rang de *D* & dans ceux qui ſuivent, plus trois autres ſolides des trois premiers caracteres par le quarré du quatriéme ſont au ſecond rang de *D* & dans ceux qui ſuivent, & le cube du quatriéme caractere eſt au premier rang de *D* & dans ceux qui ſuivent. Et ainſi des autres tranches à l'infini.

Soit par exemple le cube 160103007 tranché comme on vient de dire. En cubant 543 racine de ce cube, on multiplie 9 (quarré de 3) par 3, ce qui fait 27. Plus 324 dixaines (deux plans de 54 dixaines par 3) par 3, ce qui fait 1458 dixaines, plus 25 dixaines de mille, plus 40 mille, plus 16 centaines, c'eſt à dire plus 2916 centaines (quarré de 54 dixaines) par 3, & 54 dixaines par 324 dixaines (deux plans de 54 dixaines par 3) ce qui fait 26244 centaines. Plus 16 centaines par 4 dixaines, ce qui fait 64 mille, plus 16 centaines par 5 centaines, & 40 mille par 4 dixaines, ce qui fait 240 dixaines de mille, plus 25 dixaines de mille par 4 dixaines, & 40 mille par 5 centaines, ce qui fait 300 centaines de mille, plus enfin 25 dixaines de mille par 5 centaines, ce qui fait 125 millions.

Voyez la formation du quarré de 543 au Corollaire precedent.

```
    Racine 543
       par 543
             9
          324.
          16..
         40...
        25....
   Quarré 294849
       par 543
            27
         14 58.
       2|624 4..
        |  64|...
       2|40 .|...
      30|0 ..|...
     125|... |...
     160|103 |007
       A| B  | C
```

Tous ces produits diſpoſez par ordre, & réduits en une ſomme, rendent le cube même qu'on propoſe, & dans cette ſomme ou dans ce cube. 1°. 125 cube du premier caractere 5 eſt dans la tranche *A*. 2°. 300 trois ſolides de 25 (quarré du premier caractere 5) par le ſecond caractere qui eſt 4, ſont au troiſiéme rang de *B* & dans ceux qui ſuivent, plus 240 trois autres ſolides de 5 par 16 quarré de 4 ſont au ſecond rang de *B* & dans ceux qui ſuivent, & 64 cube de 4 eſt au premier rang de *B* & dans ceux qui ſuivent. 3°. 26244 trois ſolides de 2916 (quarré des deux premiers caracteres 54) par le troiſiéme qui eſt 3, ſont au troiſiéme rang de *C* & dans ceux qui ſuivent, plus 1458 trois autres ſolides de 54 par 9 quarré de 3 ſont au ſecond rang de *C* & dans ceux qui ſuivent, & 27 cube de 3 eſt au premier rang de *C* & dans ceux qui ſuivent.

```
   Quarré 294849
         par 543
----------------
              27
          14|58.
       2|624|4..
        | 64|...
       2|40 |...
      30|0..|...
     125|...|...
----------------
Cube 160|103|007
       A|  B|  C
```

Voyez la formation du quarré de 9875 au Corollaire precedent.

Pareillement au cube 962966796875 dont la racine eſt 9875. 1°. 729 cube de 9 eſt dans *A*.

2°. 1944 trois ſolides de 81 (quarré de 9) par 8, ſont au troiſiéme rang de *B* & dans ceux qui ſuivent, plus 1728 trois autres ſolides de 9 par 64 (quarré de 8) ſont au ſecond rang de *B* & dans ceux qui ſuivent, & 512 cube de 8 eſt au premier rang de *B* & dans ceux qui ſuivent.

3°. 201684 trois ſolides de 9604 (quarré de 98) par 7, ſont au troiſiéme rang de *C* & dans ceux qui ſuivent, plus 14406 trois autres ſolides de 98 par 49 quarré de 7, ſont au ſecond rang de *C* & dans ceux qui ſuivent, & 343 cube de 7 eſt au premier rang de *C* & dans ceux qui ſuivent.

4°. 14612535 trois ſolides de 974169 (quarré de 984) par 5, ſont au troiſiéme rang de *D* & dans ceux qui ſuivent, plus 74025 trois autres ſolides de 987 par 25 quarré de 5, ſont au ſecond rang de *D* & dans ceux qui ſuivent, & 125 cube de 5 eſt au premier rang de *D* & dans ceux qui ſuivent. C'eſt la même choſe de tout nombre cube.

```
         Racine 9875
            par 9875
--------------------
                  25
               9870.
                49..
             1372...
              64....
            144.....
            81......
--------------------
     Quarré 97515625
            par 9875
--------------------
                |125
             740|25.
         1461253|5..
             343|...
          14406.|...
       20168|4..|...
         512|...|...
      17|28.|...|...
     194|4..|...|...
     729|...|...|...
--------------------
Cube 962|966|796|875
       A|  B|  C|  D
```

COROLLAIRE GENERAL.

Comme on reconnoît en chaque rang de la Troiſiéme Table ce qu'on doit XXVIII. écrire pour élever toute grandeur literale à une puiſſance égale à celle de ce rang, on reconnoît auſſi dans chaque rang de la même Table ce qu'on diſpoſe en chaque tranche qui ſuit *A*, en élevant toute grandeur numerique à une puiſſance égale à celle de ce rang. Car ſi l'on prend ſucceſſivement *a* pour le premier caractere du nombre qu'on propoſe, & *b* pour le ſecond caractere; & enſuite *a* pour les deux premiers, & *b* pour le troiſiéme; & encore enſuite *a* pour les trois premiers, & *b* pour le quatriéme, &c. La premiere cellule du rang qu'on aura pris marquera ce qui eſt dans la tranche *A*. Et toutes les cellules de ce rang qui ſuivent *A* marqueront ſucceſſivement ce qui eſt dans tous les rangs de *B* & dans ceux qui ſuivent, & enſuite, ce qui eſt dans tous les rangs de *C* & dans ceux qui ſuivent, & encore enſuite, ce qui eſt dans tous les rangs de *D* & dans ceux qui ſuivent. Et ainſi des autres tranches *E*, *F*, *G*, &c.

C'eſt ainſi qu'au rang de la ſeconde puiſſance $aa+2ab+bb$, la premiere cellule aa marque qu'en quarrant tout nombre entier, on diſpoſe premierement le quarré du premier caractere de ce nombre dans la tranche *A*. Et les deux cellules $2ab+bb$ qui ſuivent la premiere aa, marquent auſſi qu'on diſpoſe ſucceſſivement deux plans du premier caractere par le ſecond au ſecond rang de *B* & dans ceux qui ſuivent, plus le quarré du ſecond caractere au premier rang de *B* & dans ceux qui ſuivent. Et enſuite, qu'on diſpoſe deux plans des deux premiers caracteres par le troiſiéme au ſecond rang de *C* & dans ceux qui ſuivent, plus le quarré du troiſiéme au premier rang de *C* & dans ceux qui ſuivent. Et encore enſuite, qu'on diſpoſe deux plans des trois premiers caracteres par le quatriéme au ſecond rang de *D* & dans ceux qui ſuivent, plus le quarré du quatriéme caractere au premier rang de *D* & dans ceux qui ſuivent. Et ainſi des autres, comme on a déja vû aux exemples du Corollaire de la troiſiéme demande.

De même au rang de la troiſiéme puiſſance $a^3+3aab+3abb+b^3$, la premiere cellule a^3 marque qu'en cubant tout nombre entier, on diſpoſe le cube de ſon premier caractere dans la tranche *A*. Et les trois cellules $3aab+3abb+b^3$ qui ſuivent la premiere a^3, marquent auſſi qu'on diſpoſe ſucceſſivement & par ordre trois ſolides du quarré du premier caractere par le ſecond au troiſiéme rang de *B* & dans ceux qui ſuivent, plus trois autres ſolides du premier par le quarré du ſecond au ſecond rang de *B* & dans ceux qui ſuivent, plus le cube du ſecond caractere au premier rang de *B* & dans ceux qui ſuivent. Et enſuite, qu'on diſpoſe par ordre trois ſolides du quarré des deux premiers caracteres par le troiſiéme au troiſiéme rang de *C* & dans ceux qui ſuivent, plus trois autres ſolides des deux premiers caracteres par le quarré du troiſiéme au ſecond rang de *C* & dans ceux qui ſuivent, plus le cube du troiſiéme caractere au premier rang de *C* & dans ceux qui ſuivent. Et encore enſuite, qu'on diſpoſe trois ſolides du quarré des trois premiers caracteres par le quatriéme, au troiſiéme rang de *D* & dans ceux qui ſuivent, plus trois autres ſolides des trois premiers caracteres par le quarré du quatriéme, au ſecond rang de *D* & dans ceux qui ſuivent, plus le cube du quatriéme caractere au premier rang de *D* & dans ceux qui ſuivent. Et ainſi des autres, comme on a déja vû aux exemples du Corollaire de la quatriéme Demande.

Pareillement au rang de la cinquiéme puiſſance qui eſt comme l'on ſçait, $a^5 + 5a^4b + 10a^3bb + 10aab^3 + 5ab^4 + a^5$, la premiere cellule a^5 marque qu'en élevant tout nombre entier à la cinquiéme puiſſance, on diſpoſe la cinquiéme puiſſance du premier caractere de ce nombre dans la tranche *A*. Et les cinq autres cellules $5a^4b + 10a^3bb + 10aab^3 + 5ab^4 + b^5$, marquent auſſi qu'on diſpoſe par ordre cinq produits du quarré de quarré du premier caractere par le ſecond, au cinquiéme rang de *B* & dans ceux qui ſuivent, plus dix produits du cube du premier caractere par le quarré du ſecond, au quatriéme rang de *B* & dans ceux qui ſuivent, plus dix autres produits du quarré du premier caractere par le cube du ſecond, au troiſiéme rang de *B* & dans ceux qui ſuivent, plus cinq produits du premier caractere par la quatriéme puiſſance du ſecond, au ſecond rang de *B* & dans ceux qui ſuivent, plus la cinquiéme puiſſance du ſecond caractere au premier rang de *B* & dans ceux qui ſuivent.

Et enſuite, que l'on diſpoſe par ordre cinq produits de la quatriéme puiſſance des deux premiers caracteres par le troiſiéme, au cinquiéme rang de *C* & dans ceux qui ſuivent, plus dix produits du cube des deux premiers caracteres par le quarré du troiſiéme, au quatriéme rang de *C* & dans ceux qui ſuivent, plus dix autres produits du quarré des deux premiers caracteres par le cube du troiſiéme, au troiſiéme rang de *C* & dans ceux qui ſuivent, plus cinq produits des deux premiers par la quatriéme puiſſance du troiſiéme, au ſecond rang de *C* & dans ceux qui ſuivent, plus la cinquiéme puiſſance du troiſiéme, au premier rang de *C* & dans ceux qui ſuivent.

Il en eſt ainſi des autres rangs de la troiſiéme Table, dont les puiſſances ſont plus élevées, & des nombres élevez à ces puiſſances. On poura, ſi l'on veut, s'en former des exemples ſoi-même.

DE LA RESOLUTION

DES PUISSANCES.

XXIX. LES puiſſances eſtant formées par une multiplication reïterée de leurs racines, ces racines ſe découvrent par une eſpece de diviſion qui eſt ce qu'on appelle *Extraction de racines*, ou *Reſolution des puiſſances*.

XXX. Auparavant que l'on commence la reſolution d'une puiſſance numerique, je ſuppoſe, 1°. qu'on appelle a le premier caractere de ſa racine laquelle on cherche à découvrir, & b le ſecond caractere de la même racine. 2°. Que pour oſter l'équivoque & la confuſion, on appelle c les deux premiers caracteres $a+b$, & d le troiſiéme; qu'on appelle e les trois premiers caracteres $a+b+d$, & f le quatriéme; qu'on appelle g les quatre premiers $a+b+d+f$, & h le cinquiéme; & ainſi des autres. De ſorte que

$a+b=c$, $a+b+d=e$, $a+b+d+f=g$, $a+b+d+f+h=i$, &c.

Cela nous ſervira beaucoup pour abreger nos raiſonnemens, pour les faire mieux concevoir, & pour rendre nos operations claires & ſenſibles.

XXXI. Je ſuppoſe encore que l'on faſſe pluſieurs tranches dans la puiſſance à reſoudre, en commençant de droite à gauche, & que chaque tranche que l'on y fait ait autant de caracteres que l'on conçoit de degrez dans cette puiſſance.

Je ſuppoſe par exemple que pour chercher la racine d'un nombre quarré, on le tranche de deux en deux caracteres, parceque c'eſt une puiſſance de deux degrez : que pour chercher la racine cubique d'un nombre cube, on le tranche de trois en trois caracteres, parceque c'eſt une puiſſance de trois degrez. Pareillement que pour chercher la racine cinquiéme d'un nombre en cinquiéme puiſſance, on le tranche de cinq en cinq caracteres ; que pour chercher la racine ſeptiéme d'une ſeptiéme puiſſance, on la tranche de ſept en ſept caracteres. Et ainſi des autres.

XXXII. Lorſque ces tranches ſont ainſi faites, on peut déja ſçavoir combien la racine qu'on cherche a de caracteres, puiſqu'elle en a autant que l'on trouve de tranches au nombre propoſé, comme il eſt clair par le Corollaire general 28. S.

XXXIII. Or pour commencer la reſolution d'une puiſſance numerique qu'on donne, on tire premierement a de la tranche A, c'eſt à dire la racine ſimple ou lineaire du plus grand nombre qui eſt enfermé dans A, & qui a même degré que la puiſſance à reſoudre.

XXXIV. Cette racine lineaire peut aller juſques à 9, & jamais plus haut que 9. Et ainſi pour reſoudre les puiſſances élevées des nombres, il faut ſçavoir juſqu'où vont les puiſſances également élevées des dix premiers nombres, & quelles ſont les racines lineaires de ces puiſſances.

La ſeconde Table de la premiere planche renferme les ſecondes, troiſiémes, quatriémes, cinquiémes, ſixiémes, & ſeptiémes puiſſances, dont ces dix premiers nombres ſont les racines lineaires.

Voyez la premiere planche Table 2.

XXXV. Le Probleme ſuivant renferme une methode generale pour reſoudre telle puiſſance numerique qu'on voudra. Mais pour le bien concevoir, & pour le mettre facilement en pratique, on doit poſſeder pleinement tout ce que nous avons dit dans ce Livre de la compoſition des puiſſances ; & il faut encore examiner avec ſoin la quatriéme Table que l'on donne pour la reſolution de ces puiſſances. Cette Table n'eſt point autre que celle de la compoſition des puiſſances, dont chacune des premieres cellules eſt détachée, & chaque autre diviſée par b.

Voyez la premiere planche Table 4.

Il faut bien auſſi ſe ſouvenir que a & b, dans les cellules de ces Tables & dans nos raiſonnemens, ſignifient la même choſe que le premier & ſecond caractere de la racine lineaire qu'on cherche, & qu'on ſuppoſe, comme on a déja dit S. 30. que $c = a + b$, $e = a + b + d$, $g = a + b + d + f$, $i = a + b + d + f + h$, &c.

PROBLEME GENERAL.

XXXVI. Trouver la racine lineaire de toute puiſſance numerique & déterminée.

1°. On la tranche comme on a expliqué 31. S. & on tire a de la tranche A, comme on a dit 33. S. Enſuite on écrit a au demi cercle, & l'on retranche ſa puiſſance de A. Et l'on écrit B aprés ce qui reſte.

2°. On prend dans la quatriéme Table le rang de la puiſſance donnée, & l'on écrit ſa premiere cellule, c'eſt à dire le nombre qu'elle vaut, ſous le dernier rang de B & ſous ceux qui ſuivent. On cherche l'expoſant de ces rangs à ce nombre écrit ſous eux ; cet expoſant eſt le ſecond caractere de la racine, & celui que nous appellons b : on écrit donc b au demi cercle, & on efface le diviſeur écrit ſous le dernier rang de B & ſous ceux qui ſuivent, mais on l'écrit ſeparément, & aprés lui, ou au deſſous dans un rang plus à droite, on écrit la ſeconde cellule de la même puiſſance ; & dans un nouveau rang plus à droite, la troiſiéme cellule de cette puiſſance. Et ainſi de chaque autre cellule de la puiſſance qu'on a priſe dans la ſeconde Table. On prend la ſomme de tous ces nombres ainſi diſpoſez, laquelle on multiplie par b, & on oſte le produit de tous les rangs de B & de ceux qui ſuivent, & l'on écrit C aprés ce qui reſte.

3°. On fait une ſemblable operation ſur tous les rangs de C & ſur ceux qui ſuivent, par le moyen des deux premiers caracteres $a+b$ qui ſont appellez c, & qu'on a écrits au demi cercle, & du troiſiéme d que l'on découvre. Et l'on écrit D aprés ce qui reſte.

4°. On fait encore une ſemblable operation ſur tous les rangs de D & ſur ceux qui ſuivent, par le moyen des trois premiers caracteres $a+b+d=e$ qu'on a écrits au demi cercle, & du quatriéme f que l'on découvre. Et l'on écrit E aprés ce qui reſte.

5°. On fait de nouveau une ſemblable operation ſur tous les rangs de E & ſur ceux qui ſuivent, par le moyen des quatre premiers caracteres $a+b+d+f=g$ & du cinquiéme appellé h. Et ainſi de ſuite à l'infini. Tous les exemples ſuivans éclairciront ces regles.

Premier Exemple.

Pour tirer la racine du quarré 294849. 1°. Je le tranche de deux en deux caracteres en commençant de droite à gauche, & je dis, la racine du plus grand quarré renfermé dans $A=29$, eſt 5 racine du quarré 25, & j'écris 5 au demi cercle pour le premier caractere appellé a. Je dis enſuite 5 fois $5=25$, $29-25=4$, il reſte donc 4, & j'écris B ou $48=B$ aprés ce premier reſte 4.

2°. Je prends dans la quatriéme Table le rang de la ſeconde puiſſance. Ce rang eſt $2a+b$. J'écris donc ſa premiere cellule $2a$, c'eſt à dire 10 double du premier caractere $5=a$, ſous 4 ſecond rang de B & ſous ceux qui ſuivent, & je dis 1 eſt 4 fois dans 4 écrit ſur 1 : J'écris donc 4 au demi cercle pour le ſecond caractere appellé b, & j'efface 10 écrit ſous 44, mais je l'écris ſeparément, & aprés lui dans un rang plus à droite, j'écris $+b$ la ſeconde cellule de $2a+b$, c'eſt à dire $4=b$. Ces deux uombres 10. & 4 ainſi diſpoſez font $104=2a+b$; je multiplie cette ſomme 104 par $4=b$, le produit eſt $416=2ab+bb$ que je retranche de 448 les deux rangs de B & ceux qui ſuivent. Il reſte 32, & j'écris $49=C$ aprés ce ſecond reſte.

3°. Je reïtere une ſemblable operation ſur les deux rangs de C & ſur ceux qui ſuivent en cette ſorte. J'appelle c les deux premiers caracteres $54=a+b$ qui ſont écrits au demi cercle, & j'écris $2c=108$ double de 54 ſous le ſecond rang de C & ſous ceux qui ſuivent, & je dis 1 eſt 3 fois dans 3, j'écris 3 au demi cercle pour le troiſiéme caractere appellé d, & j'efface 108, mais je l'écris ſeparément, & aprés lui dans un rang plus à droite le troiſiéme caractere trouvé $3=d$. Ces deux nombres 108. & 3 ainſi diſpoſez font $1083=2c+d$, dont le produit par le troiſiéme caractere trouvé 3 eſt $3249=2cd+dd$ que je retranche de 3249 les deux rangs de C & ceux qui ſuivent. Il ne reſte rien, & je connois que 543 eſt la racine cherchée.

```
              A | B | C
Quarré      +29 | 48| 49  (543 Racine      5=a,        4=b,        3=d,

             —25
1er reſte   + 4 |48             Pour B                    Pour C
               10 .           104=2a+b                 1083=2c+d
             —4 16          par 4=b                  par 3=d
                            ------------             -------------
2e reſte    +3 2|49          416=2ab+bb               3249=2cd+dd
                108 .
             —32 49
3e reſte     00 00
```

Second Exemple.

Pour tirer la racine du quarré 97515625. 1°. Je le tranche comme au premier exemple, & je dis la racine du plus grand quarré enfermé dans $97=A$, eſt 9 racine du quarré 81, & j'écris $9=a$ au demi cercle; je dis enſuite 9 fois $9=81$, $97-81=16$. Il reſte donc 16 de la tranche A, & j'écris B ou $51=B$ aprés ce premier reſte.

```
             A | B| C | D
Quarré     +97 |51|56 |25 (9            9=a,

              —81
1er reſte    +16|51
```

2°. Je prends dans la quatriéme Table le rang $2a+b$ & j'écris $2a$ ou 18 double de 9 ſous 5 ſecond rang de B & ſous ceux qui ſuivent, & je dis 1 eſt

16 fois dans 16, mais je ne puis prendre plus que 9. J'écris donc 9 au demi cercle pour le ſecond caractere appellé b, & j'efface 18, mais je l'écris ſeparément, & aprés lui dans un rang plus à droite $+b$ ou le ſecond caractere trouvé 9. Ces deux nombres 18 . & 9 ainſi diſpoſez font 189, dont le produit par 9 eſt 1701, que je dois retrancher de 1651 les deux rangs de B & ceux qui ſuivent. Mais parceque le produit 1701 ſurpaſſe 1651 de qui je dois le retrancher, je connois que le ſecond caractere 9 écrit au demi cercle eſt trop grand ; je l'efface donc en écrivant 8 ſur lui, & je r'écris ſeparément 18 double du premier caractere $9=a$, & aprés lui dans un rang plus à droite le ſecond caractere 8 nouvellement trouvé. Ces deux nombres 18 . & 8 ainſi diſpoſez font 188, dont le produit par $8=b$ eſt $1504=2ab+bb$, & je retranche ce produit de 1651 les deux rangs de B & ceux qui ſuivent. Il reſte 147, & j'écris $56=C$ aprés ce ſecond reſte.

3°. J'écris $2c$ ou 196 double des deux premiers caracteres 98 ſous 5 ſecond rang de C & ſous ceux qui ſuivent, & je dis 1 eſt 14 fois dans 14 ; mais en contant comme j'ai fait pour B, je reconnois que 9 & 8 ſont chacun trop grands, j'écris donc ſeulement 7 au demi cercle pour le troiſiéme caractere appellé d, & j'efface 196, mais je l'écris ſeparément, & aprés lui dans un rang plus à droite le troiſiéme caractere trouvé 7. Ces nombres ainſi diſpoſez font 1967, dont le produit par 7 eſt 13769, que je retranche de 14756, les deux rangs de C & ceux qui ſuivent. Il reſte 987, & j'écris $25=D$ aprés ce reſte.

4°. J'écris $2e$ ou 1974 double des trois premiers caracteres trouvez 987, ſous 2 ſecond rang de D & ſous ceux qui ſuivent, & je dis 1 eſt 9 fois dans 9, mais je voi d'abord que 9 eſt trop grand, & je trouve en contant que 8, 7, & 6 ſont auſſi chacun trop grands, j'écris donc ſeulement $5=f$ au demi cercle, & j'efface 1974, mais je l'écris ſeparément, & aprés lui dans un rang plus à droite le quatriéme caractere trouvé 5. Ces nombres ainſi diſpoſez font 19745, dont le produit par 5 eſt 98725, que je retranche de 98725, les deux rangs de D & ceux qui ſuivent. Il ne reſte rien, & je connois que 9875 eſt la racine cherchée.

$$\begin{array}{rl}
 & A\,|\,B\,|\,C\,|\,D \\
\textit{Quarré} & +97|51|56|25 \;(\,9\overset{8}{\cancel{9}}75 \;\textit{Racine}\quad 9=a,\quad 8=b,\quad 7=d,\quad 5=f.
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
 & -81 \\ \hline
1^{er}\ \textit{reſte} & +16|51 \\
 & \cancel{1}8. \\
 & -15\,04 \\ \hline
2^{e}\ \textit{reſte} & +1\,47|56 \\
 & \cancel{1}\cancel{9}\cancel{6}. \\
 & -137\,69 \\ \hline
3^{e}\ \textit{reſte} & +9\,87|25 \\
 & \cancel{1}\cancel{9}\cancel{7}4. \\
 & -9\,87\,25 \\ \hline
 & 000\,00
\end{array}$$

Pour B

$$\begin{array}{l}
18\cancel{9}=2a+b \\
\text{par } \cancel{9}=b \\ \hline
\cancel{1}\cancel{7}\cancel{0}1=2ab+bb
\end{array}$$

Pour B

$$\begin{array}{l}
188=2a+b \\
\text{par } 8=b \\ \hline
1504=2ab+bb
\end{array}$$

Pour C

$$\begin{array}{l}
1967=2c+d \\
\text{par } 7=d \\ \hline
13769=2cd+dd
\end{array}$$

Pour D

$$\begin{array}{l}
19745=2e+f \\
\text{par } 5=f \\ \hline
98725=2ef+ff
\end{array}$$

Troiſiéme Exemple.

Pour tirer la racine du quarré 927324304. 1°. Je le tranche à l'ordinaire, & je dis la racine du plus grand quarré renfermé dans $9=A$, eſt 3 racine de ce même quarré 9, & j'écris 3 au demi cercle. Je dis enſuite 3 fois $3=9$, $9-9=0$, & j'efface 9.

2°. Je prends dans la quatriéme Table $2a+b$, & j'écris $2a$ ou 6 double de $3=a$ ſous le ſecond rang de *B*, & je dis 6 n'eſt aucune fois dans 2 ſous qui je l'ai placé, j'écris donc o au demi cercle pour le ſecond caractere appellé *b*, & parceque 60 par o, ou 60 fois $0=0$, je n'ai rien à retrancher de *B* ni des rangs qui ſuivent, & ainſi j'efface ſimplement 6.

3°. J'écris $2c$ ou 60 double de $30=c$ ſous le ſecond rang de *C* & ſous ceux qui ſuivent, & je dis 6 eſt 4 fois dans 27, j'écris 4 au demi cercle, & j'efface 60, mais je l'écris ſeparément, & aprés lui dans un rang plus à droite *d* ou le troiſiéme caractere trouvé 4. Ces deux nombres 60 . & 4 ainſi diſpoſez font 604, dont le produit par 4 eſt 2416, que je retranche des deux rangs de *D* & de ceux qui ſuivent. Il reſte 316, & j'écris $43=D$ aprés ce reſte.

4°. J'écris $2e$ ou 608 double de 304, ſous le ſecond rang de *D* & ſous ceux qui ſuivent, & je dis 6 eſt 5 fois dans 31, j'écris 5 au demi cercle, & j'efface 608, mais je l'écris ſeparément, & aprés lui dans un rang plus à droite le quatriéme caractere trouvé $5=f$. Ces deux nombres 608 . & 5 ainſi diſpoſez font 6085, dont le produit par 5 eſt 30425, que je retranche de 31643, les deux rangs de *D* & ceux qui ſuivent. Il reſte 1218, & j'écris $04=E$ aprés ce reſte.

5°. J'écris $2g$ ou 6090 double de 3045, ſous le ſecond rang de *E* & ſous ceux qui ſuivent, & je dis 6 eſt 2 fois dans 12, j'écris 2 au demi cercle, & j'efface 6090, mais je l'écris ſeparément, & aprés lui dans un rang plus à droite le cinquiéme caractere trouvé $2=h$. Ces deux nombres 6090 . & 2 ainſi diſpoſez font 60902, dont le produit par 2 eſt 121804, que je retranche de 121804, les deux rangs de *E* & ceux qui ſuivent. Il ne reſte rien, & je connois que 30452 eſt la racine cherchée.

$$\begin{array}{rl} & A|\,B\,|\,C\,|\,D\,|\,E \\ \textit{Quarré} & +\cancel{9}|27|32|43|04 \end{array}$$
(30452 *Racine* $3=a$, $0=b$, $4=d$, $5=f$, $2=h$,

$$\begin{array}{r} \cancel{6}. \\ \cancel{6}\cancel{0}. \\ -2416 \\ \hline +316|43 \\ \cancel{6}\cancel{0}8. \\ -30425 \\ \hline +1218|04 \\ \cancel{6}\cancel{0}\cancel{9}\cancel{0}. \\ -121804 \\ \hline 000000 \end{array}$$

Pour C

$$\begin{array}{l} 604=2c+d \\ \text{par } 4=d \\ \hline 2416=2cd+dd \end{array}$$

Pour D

$$\begin{array}{l} 6085=2e+f \\ \text{par } 5=f \\ \hline 30425=2ef+ff \end{array}$$

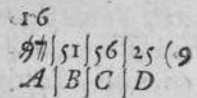
Pour E

$$\begin{array}{l} 60902=2g+h \\ \text{par } 2=h \\ \hline 121804=2gh+hh \end{array}$$

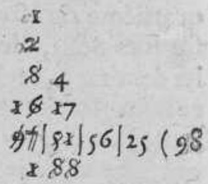
AUTRE MANIERE POUR TIRER LA RACINE DES NOMBRES QUARREZ.

XXXVII. La maniere ordinaire de reſoudre les nombres quarrez, differe un peu de celle que nous venons d'éclaircir par les exemples precedens, cependant elle eſt fondée ſur les mêmes principes. Voici par exemple comment je tire la racine du quarré 97515625 ſelon cette methode.

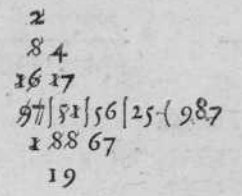
1°. Je le tranche à l'ordinaire, & je dis la racine du plus grand quarré enfermé dans *A* eſt 9 racine du quarré 81, & j'écris 9 au demi cercle. Je dis enſuite 9 fois 9=81, 97—81=16, j'efface 97, & j'écris 16 ſur 97.

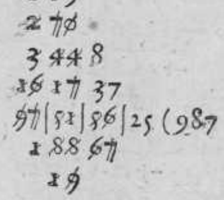


2°. J'écris 18 double de 9 ſous le ſecond rang de *B* & ſous ceux qui ſuivent, & je dis 1 ne peut eſtre pris plus de 9 fois dans 16. Mais ſi j'écrivois 9 au demi cercle, il faudroit dire 9 fois 1=9, 16—9=7, 9 fois 8=72, 75—72=3, 9 fois 9=81, 31—81=—51, ce qui oſteroit trop; l'expoſant 9 eſt donc trop grand, & j'écris ſeulement 8 au demi cercle & ſous le premier rang de *B*, & je dis 8 fois 1=8, 16—8=8, j'efface 16 & 1, & j'écris 8 ſur 6, 8 fois 8=64, 85—64=21, j'efface 85 & 8 écrit ſous 5, & j'écris 21 ſur 85, 8 fois 8=64, 211—64=147, j'efface 211 & 8 écrit ſous 1, & j'écris 147 ſur 211.



3°. J'écris 196 double de 98 ſous le ſecond rang de *C* & ſous ceux qui ſuivent, & je dis 1 eſt 14 fois dans 14, mais je reconnois en contant que 9 & 8 ſont chacun trop grands, j'écris donc ſeulement 7 au demi cercle & ſous le premier rang de *C*, & je dis 7 fois 1=7, 14—7=7, j'efface 14 & 1, & j'écris 7 ſur 4, 7 fois 9=63, 77—63=14, j'efface 77 & 9, & j'écris 14 ſur 77, 7 fois 6=42, 45—42=3, j'efface 45 & 6, & j'écris 3 ſur 5 & 0 ſur 4, pour conſerver la valeur de 1 qui ſuit 4, je dis auſſi 7 fois 7=49, 1036—49=987, j'efface 1036, & j'écris 987 ſur 036.





4°. J'écris 1974 double de 987 ſous le ſecond rang de *D* & ſous ceux qui ſuivent, & je dis 1 eſt 9 fois dans 9, mais je connois en contant que 9, 8, &

7 ſont chacun trop grands, j'écris donc ſeulement 5 au demi cercle & ſous le premier rang de *D*, & je dis 5 fois 1=5, 9—5=4, j'efface 9 & 1, & j'écris 4 ſur 9, 5 fois 9=45, 48—45=3, j'efface 48 & 9, & j'écris 3 ſur 8, 5 fois 7=35, 37—35=2, j'efface 37 & 7, & j'écris 2 ſur 7, 5 fois 4=20, 22—20=2, j'efface 2 écrit ſur 7 & 4 écrit ſous 2, & je laiſſe 2 où il eſt, 5 fois 5=25, 25—25=0. Il ne reſte rien, & je connois que 9875 eſt la racine cherchée.

~~1~~ ~~1~~ 9
~~2~~ ~~7~~~~0~~
~~8~~ ~~4~~~~4~~ 8
~~1~~~~6~~ ~~1~~~~7~~ 37
~~9~~~~7~~|~~5~~~~1~~|~~5~~~~6~~|25 (9875
~~1~~ ~~8~~~~8~~ ~~6~~~~7~~ 45
~~1~~~~9~~ 97
~~1~~

~~4~~
~~1~~ ~~1~~~~9~~
~~2~~ ~~7~~~~0~~ ~~3~~
~~8~~ ~~4~~~~4~~8 ~~2~~
~~1~~~~6~~ ~~1~~~~7~~ 3~~7~~
~~9~~~~7~~|~~5~~~~1~~|~~5~~~~6~~|25 (9875
~~1~~ ~~8~~~~8~~ ~~6~~~~7~~ ~~4~~5
~~1~~~~9~~ ~~9~~~~7~~
~~1~~

AVERTISSEMENT.

La pratique de cette methode eſt beaucoup plus difficile que celle du Probleme general; mais quoiqu'elle me ſemble plus d'uſage, parcequ'elle eſt plus courte, je me contenterai pourtant de ne l'expoſer qu'en paſſant & ſans en donner de regles; car j'aime mieux tout rapporter à un probleme ſeul, dont l'operation eſt ſans doute plus facile qu'aucune autre, que d'établir pluſieurs problemes differens & particuliers, afin d'expliquer quelques methodes abregées, mais qui ne ſont ni generales, ni faciles à ſuivre comme celle du probleme que nous venons de donner, & que nous éclaircirons encore par d'autres exemples ſur des puiſſances plus élevées que la ſeconde.

Quatriéme Exemple.

Pour tirer la racine cubique du cube 160103007. 1°. Je le tranche de trois en trois caracteres en commençant de droite à gauche, & je dis la racine cubique du plus grand cube enfermé dans *A* ou 160 eſt 5 racine cubique de 125, & j'écris 5 au demi cercle, je dis enſuite 160—125=35. Il reſte donc 35 de la tranche *A*, & j'écris 103=*B* aprés ce premier reſte.

$$\begin{array}{llll} & A & B & C \\ \textit{Cube} & +160 & 103 & 007\ (5 \end{array} \qquad 5=a.$$

$$\begin{array}{lll} & \underline{-125} & \\ 1^{er}\ \textit{reſte} & +35 & |103 \end{array}$$

2°. Je prens dans la quatriéme Table le rang de la troiſiéme puiſſance, ce rang eſt $3aa+3ab+bb$. J'écris ſa premiere cellule $3aa$, c'eſt à dire 75 triple de 25 quarré du premier caractere $5=a$ ſous le troiſiéme rang de *B* & ſous ceux qui ſuivent, & je dis 7 eſt 5 fois dans 35, mais je connois d'abord que 5 eſt trop grand, j'écris donc ſeulement 4 au demi cercle pour le ſecond caractere appellé b, & j'efface 75, mais je l'écris ſeparément, & ſous lui dans un rang plus à droite la ſeconde cellule $+3ab$, c'eſt à dire 60 trois plans du premier caractere $5=a$ par le ſecond qui eſt $4=b$, & dans un autre rang plus à droite la troiſiéme cellule $+bb$, c'eſt à dire 16 quarré de 4. La ſomme de ces nombres ainſi diſpoſez eſt $8116=3aa+3ab+bb$, dont le produit par $4=b$ eſt 32464 que je retranche de 35103 les trois rangs de *B* & ceux qui ſuivent. Il reſte 2639, & j'écris *C* qui eſt 007 aprés ce ſecond reſte.

3°. J'écris $3cc$ ou 8748 triple de 2916 quarré des deux premiers caracteres 54 ſous le troiſiéme rang de *C* & ſous ceux qui ſuivent, & je dis 8 eſt 3 fois dans 26, j'écris 3 au demi cercle, & j'efface 8748, mais je l'écris ſeparément, & ſous lui dans un rang plus à droite $3cd$ ou 486 trois plans des deux premiers caracteres 54 par le troiſiéme qui eſt 3, & dans un autre rang plus à droite dd ou 9 quarré de 3. La ſomme de ces trois nombres ainſi diſpoſez eſt 879669, dont le produit par 3 eſt 2639007 que je retranche des trois rangs de *C* & de ceux qui ſuivent. Il ne reſte rien, & je connois que 543 eſt la racine cherchée.

A | *B* | *C*
Cube +160|103|007 (543 *Racine* $5=a$, $4=b$, $3=d$,

—125		
1er *reſte* + 35|103	*Pour B*	*Pour C*
~~78~~. .	$75..=3aa$	$8748..=3cc$
—32 464	$60.=3ab$	$486.=3cd$
2e *reſte* +2 639|007	$16=bb$	$9=dd$
8~~74~~8. .	$8116=3aa+3ab+bb$	$879669=3cc+3cd+dd$
—2639 007	*par* $4=b$	*par* $3=d$
0000 000	$32464=3aab+3abb+b^3$	$2639007=3ccd+3cdd+d^3$

Cinquiéme Exemple.

Pour tirer la racine cubique de 962966796875. 1°. Je le tranche à l'ordinaire, & je dis la racine cubique du plus grand cube enfermé dans *A* eſt 9 racine cubique de 729, & j'écris 9 au demi cercle, je dis enſuite $962-729=233$. Il reſte donc 233, & j'écris 966 aprés ce premier reſte.

2°. Je prends dans la quatriéme Table $3aa+3ab+bb$ le rang de la troiſiéme puiſſance, & j'écris $3aa$ ou 243 triple de 81 quarré de $9=a$ ſous le troiſiéme rang de *B* & ſous ceux qui ſuivent, & je dis 2 eſt au moins 9 fois dans 23, j'écris 9 au demi cercle, & j'efface 243, mais je l'écris ſeparément, & ſous lui dans un rang plus à droite j'écris $3ab$ ou 243 trois autres plans du premier caractere 9 par le ſecond qui eſt auſſi 9, & au deſſous dans un rang encore plus à droite bb ou 81 quarré de 9. La ſomme de ces nombres ainſi diſpoſez eſt 26811, dont le produit par 9 eſt 241299 que je devrois retrancher de 233966 les trois rangs de B & ceux qui ſuivent. Mais parceque le produit 241299 ſurpaſſe 233966 de qui je dois le retrancher, je reconnois que 9 ſecond caractere écrit au demi cercle eſt trop grand, j'écris donc ſeulement 8 au demi cercle pour le caractere appellé b, & je r'écris ſeparément $3aa$ ou 243 triple de 81 quarré du premier caractere $9=a$, & ſous lui dans un rang plus à droite $3ab$ ou 216 trois plans de $9=a$ par $8=b$, & dans un rang encore plus à droite bb ou 64 quarré de 8. La ſomme de ces trois nombres ainſi diſpoſez eſt 26524, dont le produit par 8 eſt 212192 que je retranche de 233966 les trois rangs de B & ceux qui ſuivent. Il reſte 21774, & j'écris $796=C$ aprés ce reſte

3°. J'écris $3cc$ ou 28812 triple de 9604 quarré de 98, ſous 7 troiſiéme rang de C & ſous ceux qui ſuivent, & je dis 2 eſt au moins 9 fois dans 21, mais je connois en operant comme j'ai fait pour B, que 9 & 8 ſont chacun trop grands, j'écris donc ſeulement 7 au demi cercle, & j'efface 28812, mais je l'écris ſeparément, & ſous lui dans un rang plus à droite $3cd$ ou 2058 trois plans de 98 par 7, & dans un rang encore plus à droite dd ou 49 quarré de 7. La ſomme de ces nombres ainſi diſpoſez eſt 2901829, dont le produit par 7 eſt 20312803, que je retranche de 21774796 les trois rangs de C & ceux qui ſuivent. Il reſte 1461993, & j'écris $875=D$ aprés ce troiſiéme reſte.

4°. J'écris $3ee$ ou 2922507 triple de 974169 quarré de $987=e$, ſous le troiſiéme rang de D & ſous ceux qui ſuivent, & je dis 2 eſt 7 fois dans 14, mais je connois d'abord que 7 eſt trop grand, & je trouve auſſi en contant que 6 eſt trop grand, j'écris donc ſeulement 5 au demi cercle, & j'efface 2922507, mais je l'écris ſeparément, & ſous lui dans un rang plus à droite $3ef$ ou 14805 trois plans de 987 par 5, & dans un rang encore plus à droite ff ou 25 quarré de 5. La ſomme de ces trois nombres ainſi diſpoſez eſt 292398775, dont le produit par 5 eſt 1461993875, que je retranche de 1461993875 les trois rangs de D & ceux qui ſuivent. Il ne reſte rien, & je connois que 9875 eſt la racine cubique que je cherche.

$A \mid B \mid C \mid D$

Cube $+962 \mid 966 \mid 796 \mid 875\ (\overset{8}{\cancel{9}}875$ *Racine cubique.* $9=a,\quad 8=b,\quad 7=d,\quad 5=f.$

-729

1^er^ *reſte* $+233 \mid 966$

$\cancel{2}\cancel{4}3..$

$-212\,192$

2^e^ *reſte* $+21\,774 \mid 796$

$\cancel{2}88\cancel{1}\,\cancel{2}..$

$-20\,312\,803$

3^e^ *reſte* $+1\,461\,993 \mid 875$

$\cancel{2}\cancel{9}\cancel{2}\,\cancel{2}5\cancel{0}\cancel{7}..$

$-1\,461\,993\,875$

$0000\,000\,000$

Pour B

$243..=3aa$

$243.=3ab$

$81=bb$

$26811=3aa+3ab+bb$

par $\cancel{9}=b$

$\cancel{2}\cancel{4}\cancel{1}\cancel{2}\cancel{9}\cancel{9}=3aab+3abb+b^3$

Pour C

$28812..=3cc$

$2058.=3cd$

$49=dd$

$2901829=3cc+3cd+dd$

par $7=d$

$20312803=3ccd+3cdd+d^3$

Pour B

$243..$

$216.$

$64=bb$

$26524=3aa+3ab+bb$

par $8=b$

$212192=3aab+3abb+b^3$

Pour D

$2922507..=3ee$

$14805.=3ef$

$25=ff$

$292398775=3ee+3ef+ff$

par $5=f$

$1461993875=3eef+3eff+f^3$

Sixiéme Exemple.

Pour tirer la racine cubique de 2823887970540 8. 1°. Je le tranche à l'ordinaire, & je dis la racine cubique du plus grand cube enfermé dans *A*, eſt 3 racine cubique de 27, & j'écris 3 au demi cercle. Je dis enſuite 28—27=1, & j'écris 238=*B* aprés ce premier reſte 1.

2°. Je prens $3aa+3ab+bb$ dans la quatriéme Table, & j'écris $3aa$ ou 27 triple de 9 quarré de $3=a$, ſous 2 troiſiéme rang de *B* & ſous ceux qui ſuivent, & je dis 2 n'eſt aucune fois dans 1, j'écris donc 0 au demi cercle, & j'efface 27. Il reſte donc *B* tout entier & 1 écrit devant *B*, & j'écris 879=*C* aprés tout ce reſte.

3°. J'écris $3cc$ ou 2700 triple de 900 quarré de 30, ſous 8 troiſiéme rang de *C* & ſous ceux qui ſuivent, & je dis 2 eſt 6 fois dans 12, mais je voi d'abord que 6 eſt trop grand, & je trouve en contant que 5 eſt auſſi trop grand, j'écris donc ſeulement 4 au demi cercle, & j'efface 2700, mais je l'écris ſeparément, & ſous lui dans un rang plus à droite $3cd$ ou 360 trois plans de 30 par 4, & dans un rang encore plus à droite dd ou 16 quarré de 4. La ſomme de ces trois nombres ainſi diſpoſez eſt 273616, dont le produit par 4 eſt 1094464, que je retranche de 1238876, les trois rangs de *C* & ceux qui ſuivent. Il reſte 144415, & j'écris 705=*D* aprés ce reſte.

4°. J'écris $3ee$ ou 277248 triple de 92416 quarré de 304 ſous le troiſiéme rang de *D* & ſous ceux qui ſuivent, & je dis 2 eſt 7 fois dans 14, mais je voi d'abord que 7 eſt trop grand, & je trouve auſſi en contant que 6 eſt trop grand, j'écris donc ſeulement 5 au demi cercle, & j'efface 277248, mais je l'écris ſeparément, & ſous lui dans un rang plus à droite $3ef$ ou 4560 trois plans de 304 par 5, & dans un rang encore plus à droite ff ou 25 quarré de 5. La ſomme de ces trois nombres ainſi diſpoſez eſt 27770425, dont le produit par 5 eſt 138852125, que je retranche de 144415705 les trois rangs de *D* & ceux qui ſuivent. Il reſte 5563580, & j'écris 408=*E* aprés ce reſte.

5°. J'écris $3gg$ ou 278 6075 triple de 9272025 quarré de 3045, ſous le troiſiéme rang de *E* & ſous ceux qui ſuivent, & je dis 2 eſt 2 fois dans 5, j'écris 2 au demi cercle, & j'efface 27816025, mais je l'écris ſeparément, & ſous lui dans un rang plus à droite $3gh$ ou 18270 trois plans de 3045 par 2, & dans un rang encore plus à droite hh ou 4 quarré de 2. La ſomme de ces trois nombres ainſi diſpoſez eſt 2781790104, dont le produit par 2 eſt 5563580408, que je retranche de 5563580408 les trois rangs de *E* & ceux qui ſuivent Il ne reſte rien, & je connois que 30452 eſt la racine cubique que je cherche.

A | *B* | *C* | *D* | *E*
+28 | 238 | 879 | 705 | 408 (30452 *Racine cubique.* $3=a$, $0=b$, $4=d$, $5=f$, $2=h$,
—27
+1 | 238 | 879
$2\cancel{7}\,..$
$2\cancel{7}\cancel{0}\,\cancel{0}\,..$
—1 094 464
+144 415 | 705
$\cancel{2}\cancel{7}\,\cancel{7}\cancel{2}\cancel{4}\,8..$
—138 852 125
+5 563 580 | 408

Pour C

$2700..=3cc$
$360.=3cd$
$16=dd$

$273616=3cc+3cd+dd$
par $4=d$

$1094464=3ccd+3cdd+d^3$

Pour D

$277248..=3ee$
$4560.=3ef$
$25=ff$

$27770425=3ee+3ef+ff$
par $5=f$

$138852125=3eef+3eff+f^3$

$+5563580|408$
$2\cancel{7}81\cancel{6}\cancel{0}\cancel{7}\cancel{5}..$
-5563580408
0000000000

Pour E

$27816075.. = 3gg$
$182704 = 3gh + hh$
$2781790204 = 3gg + 3gh + hh$
$\text{par } 2 = h$
$5563580408 = 3ggh + 3ghh + h^3$

Septiéme Exemple.

Pour tirer la racine 4^e^ du quarré de quarré 869359322801. 1°. Je le tranche de quatre en quatre caracteres en commençant de droite à gauche, & je dis la racine du plus grand quarré de quarré enfermé dans $869 = A$, eſt 5 racine 4^e^ de 625, & j'écris 5 au demi cercle. Je dis enſuite $869 - 625 = 244$. Il reſte donc 244 de la tranche A, & j'écris $3593 = B$ aprés ce premier reſte.

2°. Je prends dans la quatriéme Table $4a^3 + 6aab + 4abb + b^3$ le rang de la quatriéme puiſſance, & j'écris ſa premiere cellule $4a^3$, ou 500 quatre cubes du premier caractere $5 = a$, ſous le quatriéme rang de B & ſous ceux qui ſuivent, & je dis 5 eſt 4 fois dans 24, j'écris 4 au demi cercle, pour le ſecond caractere appellé b, & j'efface 500, mais je l'écris ſeparément, & ſous lui dans un rang plus à droite la ſeconde cellule $6aab$, ou 600 ſix ſolides de 25 quarré de $5 = a$ par $4 = b$, & dans un autre rang plus à droite la troiſiéme cellule $4abb$, ou 320 quatre ſolides de 5 par 16 quarré de 4, & dans un rang encore plus à droite 64 cube de 4. La ſomme de ces nombres ainſi diſpoſez eſt 563264, dont le produit par 4 eſt 2253056, que je retranche de 2443593 les quatre rangs de B & ceux qui ſuivent. Il reſte 190537, & j'écris $2801 = C$ aprés ce ſecond reſte.

3°. J'écris $4c^3$ ou 629856 cube de 54, ſous le quatriéme rang de C & ſous ceux qui ſuivent, & je dis 6 eſt 3 fois dans 19, j'écris 3 au demi cercle, & j'efface 629856, mais je l'écris ſeparément, & ſous lui dans un rang plus à droite $6ccd$ ou 52488 ſix ſolides de 2916 quarré de 54 par 3, & dans un autre rang plus à droite $4cdd$ ou 1944 quatre ſolides de 54 par 9 quarré de 3, & dans un rang encore plus à droite 27 cube de 3. La ſomme de ces quatre nombres ainſi diſpoſez eſt 635124267, dont le produit par 3 eſt 1905372801, que je retranche de 1905372801 les quatre rangs de C & ceux qui ſuivent. Il ne reſte rien, & je connois que 543 eſt la racine cherchée.

$A \,|\, B \,|\, C$
$+869|3593|2801$ (543 *Racine* 4^c^. $5 = a$, $4 = b$, $3 = d$,
-625
$+244|3593$
$500...$
-2253053
$+190537|2801$
$\cancel{6}\,\cancel{2}\cancel{9}8\cancel{5}\,\cancel{6}...$
-1905372801
0000000000

Pour B

$500... = 4a^3$
$600.. = 6aab$
$320. = 4abb$
$64 = b^3$
$563264 = 4a^3 + 6aab + 4abb + b^3$
$\text{par } 4 = b$
$2253056 = 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4$

Pour C

$629856... = 4c^3$
$52488.. = 6ccd$
$1944. = 4cdd$
$27 = d^3$
$635124267 = 4c^3 + 6ccd + 4cdd + d^3$
$\text{par } 3 = d$
$1905372801 = 4c^3d + 6ccdd + 4cd^3 + d^4$

AUTRE MANIERE POUR RESOUDRE LES QUATRIE'MES PUISSANCES.

XXXVIII. On tire plus communément la racine 4e d'une quatriéme puiſſance en cette ſorte. On tire premierement la racine quarrée de cette puiſſance, & enſuite la racine quarrée de la racine découverte, & l'on a ce qu'on cherche.

Ainſi pour tirer la racine 4e de 8693593 2801 de l'exemple qui precede, on tire premierement ſa racine quarrée qui eſt 294849, & tirant enſuite la racine quarrée de cette racine découverte 294849, on trouve 543, & 543 eſt la racine 4e de 86935932801, & la même qu'on a découverte par l'operation de l'exemple precedent.

Huitiéme Exemple.

Pour tirer la racine 5e de 1354259331834300000. 1°. Je le tranche de cinq en cinq caracteres en commençant de droite à gauche, & je dis la racine 5e du plus grand nombre en cinquiéme puiſſance qui ſoit enfermé dans *A*, eſt 4 racine 5e de 1024, & j'écris 4 au demi cercle. Je dis enſuite $1354 - 1024 = 330$. Il reſte donc 330, & j'écris $25933 = B$ aprés ce premier reſte.

2°. Je prends dans la quatriéme Table le rang de la cinquiéme puiſſance $5a^4 + 10a^3b + 10aabb + 5ab^3 + b^4$, & j'écris ſa premiere cellule $5a^4$, c'eſt à dire 1280 cinq quarrez de 16 quarré de $4 = a$, ſous le cinquiéme rang de *B* & ſous ceux qui ſuivent, & je dis 1 eſt 3 fois dans 3, mais je connois d'abord que 3 eſt trop grand, j'écris donc ſeulement 2 au demi cercle pour le ſecond caractere appellé *b* & j'efface 1280, mais je l'écris ſeparément, & ſous lui dans un rang plus à droite la ſeconde cellule $10a^3b$, c'eſt à dire 1280 dix ſurſolides de 64 cube du premier caractere 4 par le ſecond qui eſt 2, & dans un autre rang plus à droite la troiſiéme cellule $10aabb$, c'eſt à dire 640 dix autres ſurſolides de 16 quarré de 4 par 4 quarré de 2, & dans un nouveau rang plus à droite la quatriéme cellule $5ab^3$, c'eſt à dire 160 cinq autres ſurſolides de $4 = a$ par 8 cube de $2 = b$, & dans un rang encore plus à droite la cinquiéme cellule b^4, c'eſt à dire 16 quarré du quarré de 2. La ſomme de ces cinq nombres ainſi diſpoſez eſt 14145616, dont le produit par le ſecond caractere $2 = b$ eſt 28291232, que je retranche de 33025933 les cinq rangs de *B* & ceux qui ſuivent. Il reſte 4734701, & j'écris $18343 = C$ aprés ce ſecond reſte.

3°. J'écris $5c^4$, c'eſt à dire 1555 8480 cinq quarrez du quarré des deux premiers caracteres 42, ſous le cinquiéme rang de *C* & ſous ceux qui ſuivent, & je dis 1 eſt 4 fois dans 4, mais je connois d'abord que 4 eſt trop grand, j'écris donc ſeulement 3 au demi cercle, & j'efface 15558480, mais je l'écris ſeparément, & ſous lui dans un rang plus à droite $10c^3d$, c'eſt à dire 2222640 dix ſurſolides de 74088 cube de 42 par le troiſiéme caractere $3 = d$, & dans un nouveau rang plus à droite $10ccdd$, c'eſt à dire 158760 dix autres ſurſolides de 1764 quarré de 42 par 9 quarré de 3, & dans un nouveau rang plus à droite $5cd^3$, c'eſt à dire 5670 cinq ſurſolides de 42 par 27 cube de 3, & dans un rang encore plus à droite d^4 ou 81 quarré du quarré de 3. La ſomme de ces cinq

cinq nombres ainſi diſpoſez eſt 157823372781, dont le produit par 3 eſt 473470118343 que je retranche des cinq rangs de *C* & de ceux qui ſuivent, & il ne reſte rien.

Or j'ai encore à operer ſur la tranche *D* toute entiere. Mais comme elle n'a que cinq zero, tout ce que j'écrirois ſous ſes rangs ne pouroit donner pour expoſant que zero, & ce zero multipliant la ſomme des cinq nombres que j'écrirois ſeparément, & ſelon l'ordre accoutumé de nos regles, ne pouroit donner auſſi que zero pour produit. Je finis donc l'operation en écrivant ſeulement 0 au demi cercle, & connoiſſant qu'il ne reſte rien, je ſçai que 4230 eſt la racine 5^e que je cherche.

$$\begin{array}{l}
\quad A \mid B \mid C \mid D \\
+1354 \mid 25933 \mid 18343 \mid 00000 \ (4230 \ \textit{Racine } 5^e. \\
-1024 \\
\hline
+330 \mid 25933 \\
\quad 1280\ldots\ldots \\
-2829\,1232 \\
\hline
+47\,34701 \mid 18343 \\
\quad 15\,55848\,0\ldots\ldots \\
-47\,34701\,18343 \\
\hline
+00\,00000\,00000
\end{array}$$

Pour B

$$\begin{array}{r}
1280\ldots\ldots = 5a^4 \\
1280\ldots = 10a^3b \\
640\ldots = 10aabb \\
160. = 5ab^3 \\
16 = b^4 \\
\hline
14145616 = 5a^4 + 10a^3b + 10aabb + 5ab^3 + b^4 \\
\text{par } 2 = b \\
\hline
28291232 = 5a^4b + 10a^3bb + 10aab^3 + 5ab^4 + b^5
\end{array}$$

Pour C

$$\begin{array}{r}
15558480\ldots\ldots = 5c^4 \\
2222640\ldots = 10c^3d \\
158760\ldots = 10ccdd \\
5670. = 5cd^3 \\
81 = d^4 \\
\hline
157823372781 = 5c^4 + 10c^3d + 10ccdd + 5cd^3 + d^4 \\
\text{par } 3 = d \\
\hline
473470118343 = 5c^4d + 10c^3dd + 10ccd^3 + 5cd^4 + d^5
\end{array}$$

DE LA RESOLUTION

DES AUTRES PUISSANCES.

Pour reſoudre les puiſſances beaucoup élevées, il faut ſçavoir, comme on a déja dit 34. S. juſqu'où vont les puiſſances également élevées des dix premiers nombres, & quelles ſont les racines ſimples ou lineaires de ces puiſſances. Si l'on en vouloit donner encore d'autres que celles qui ſont dans la ſeconde Table, il ſuffiroit de donner les onziémes, treiziémes, dix-ſeptiémes, dix-neuviémes, & les autres ſeules qui ſuivent où le nombre des degrez n'a point de diviſeurs que l'unité ou que lui-même, à cauſe que ſçachant reſoudre ces ſortes de puiſſances, on ſçait reſoudre auſſi toutes les autres.

Car par exemple, pour tirer la racine 4^e d'une quatriéme puiſſance, on fera comme on a dit 38. S. Pareillement pour tirer la racine 6^e d'une ſixiéme puiſſance, on tire premierement la racine de cette puiſſance, & la racine cubique de cette racine eſt ce qu'on cherche.

Mais on tire la racine 7^e d'une ſeptiéme puiſſance immediatement, & ſelon les cellules du ſeptiéme rang qui lui eſt particulierement propre.

Pour tirer la racine 9^e d'une neuviéme puiſſance, on tire premierement la racine cubique de cette puiſſance, & la racine cubique de cette racine cubique eſt celle que l'on cherche. Et ainſi en ſuivant le même ordre pour les autres puiſſances plus élevées à l'infini.

Demonſtration du Probleme general.

Toutes les regles de ce probleme, & l'application qu'on en a faite ſur tous les exemples precedens, paroîtront plus que ſuffiſamment démontrées, ſi l'on conſidere qu'elles ſont une ſuite naturelle ou plûtoſt une ſimple application du Corollaire general 28. S. Car pour reſoudre les puiſſances numeriques, nous oſtons ſucceſſivement & par ordre de chacun de leurs rangs par le moyen de la quatriéme Table, les mêmes produits que la troiſiéme nous a marqué devoir eſtre enfermez dans ces rangs. Or par les regles du Probleme general, tous ces produits ſont formez par le moyen des caracteres écrits au demi cercle, & par le Corollaire general 28. S. les mêmes produits ſont formez par le moyen des caracteres qui marquent la racine des puiſſances propoſées. Ce qui eſt au demi cercle marquera donc cette racine.

DE LA RESOLUTION

DES PUISSANCES LITERALES.

Mais afin de rendre nos preuves encore plus ſenſibles, & pour rendre auſſi le Probleme general autant étendu qu'il le peut eſtre, nous appliquerons ſur les puiſſances literales ce qu'on a fait ſur les numeriques. Mais l'on doit obſerver que la diſpoſition des rangs & des tranches qui convient aux grandeurs numeriques, ne convient pas en même ſorte aux grandeurs literales.

Premier Exemple.

Pour tirer la racine quarrée de $aa - 6ab + 9bb + 2ac - 6bc + cc$. 1°. Je dis la racine du quarré aa eſt a, j'écris a au demi cercle, & j'efface le quarré aa, écrivant o ſous lui.

2°. J'écris $2a$ double de a ſous $-6ab$, & je dis, l'expoſant de $-6ab$ à $2a$ eſt $-3b$, & j'écris $-3b$ au demi cercle, & ſous $+bb$. Je multiplie enſuite $2a - 3b$ par $-3b$, & le produit eſt $-6ab + 9bb$ que j'oſte du quarré donné.

3°. J'écris $2a - 6b$ double de $a - 3b$ ſous $2ac - 6bc$, & je dis l'expoſant de $2ac$ à $2a$ eſt $+c$, & j'écris $+c$ au demi cercle, & ſous $+cc$. Je multiplie enſuite $2a - 6b + c$ par $+c$, & le produit eſt $2ac - 6bc + cc$, que j'oſte du quarré donné. Il ne reſte rien, & je connois que $a - 3b + c$ eſt la racine cherchée.

$$\begin{array}{l}
\text{Quarré } aa - 6ab + 9bb + 2ac - 6bc + cc\ (a - 3b + c \text{ Racine} \\
\qquad\qquad \cancel{2}a\ - \cancel{3}b,\quad \cancel{2}a\ - \cancel{6}b\ + \cancel{1}c \\
\qquad\ \ \underline{-aa + 6ab - 9bb, - 2ac + 6bc - cc} \\
\qquad\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0
\end{array}$$

Second Exemple.

Pour reſoudre le cube $a^3 + 3aab + 3abb + b^3 + 3aac + 6abc + 3bbc + 3acc + 3bcc + c^3$. 1°. Je dis la racine cubique de a^3 eſt a, j'écris a au demi cercle, & j'efface a^3 du cube à reſoudre.

2°. J'écris $3aa$ triple de aa quarré de a ſous $+3aab$, & je dis l'expoſant de $+3aab$ à $3aa$ eſt $+b$, & j'écris $+b$ au demi cercle, j'écris auſſi $3ab$ trois plans de a par b ſous $+3abb$, & $+bb$ quarré de b ſous b^3. Je multiplie enſuite $3aa + 3ab + bb$ par b, & le produit eſt $3aab + 3abb + b^3$, que j'oſte du cube à reſoudre.

3°. J'écris $3aa + 6ab + 3bb$ triple de $aa + 2ab + bb$ quarré de $a + b$, ſous $+3aac + 6abc + 3bbc$, & je dis l'expoſant de $3aac$ à $3aa$ eſt $+c$, que j'écris au demi cercle, j'écris auſſi $3ac + 3bc$ trois autres plans de $a + b$ par c, ſous $+3acc + 3bcc$, & $+cc$ quarré de c ſous $+c^3$. Je multiplie enſuite tout ce que je viens d'écrire par c, & j'oſte le produit $3aac + 6abc + 3bbc + 3acc + 3bcc + c^3$ du cube à reſoudre. Il ne reſte rien, & je connois que $a + b + c$ eſt la racine cubique que je cherche.

$$\begin{array}{l}
\text{Cube } a^3 + 3aab + 3abb + b^3 + 3aac + 6abc + 3bbc + 3acc + 3bcc + c^3 (a + b + c \quad \text{Rac, cubiq.} \\
\qquad\qquad \cancel{3}aa\ + \cancel{3}ab\ + \cancel{1}bb, \cancel{3}aa\ + \cancel{6}ab\ + \cancel{3}bb, + \cancel{3}ac + \cancel{3}bc, + \cancel{1}cc \\
\quad \underline{-a^3 - 3aab - 3abb - b^3, - 3aac - 6abc - 3bbc, - 3acc - 3bcc, - c^3} \\
\qquad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0
\end{array}$$

AUTRE MANIERE PLUS COURTE
ET PLUS FACILE.

Pour les Quarrez.

On peut reſoudre tout quarré literal ſelon la methode generale qu'on vient d'expliquer, mais on poura trouver plus commode d'abreger ſon operation en la commençant par celui des quarrez qui ſont au quarré donné, dont la racine ſe peut plus facilement connoître. Car cette racine eſtant écrite au demi cercle, on diviſe par ſon double tous les produits qu'on peut ainſi diviſer ſans reſte. On ajoûte l'expoſant de cette diviſion au demi cercle, & on efface du quarré donné tous les produits diviſez, plus le quarré de l'expoſant nouvellement trouvé. S'il ne reſte rien, on a la racine qu'on cherche; mais s'il reſte quelque choſe, on rëitere une ſemblable operation, en choiſiſſant au lieu du quarré qu'on a pris l'un des autres qui ſont au quarré donné; ou bien on ſuit la methode generale expliquée avant celle-ci. XXXIX.

Exemple.

Pour tirer la racine quarrée de $169aa+208ab+64bb-442ac-272bc+289cc$. 1°. Je tire la racine du quarré $64bb$ qui eſt le plus facile à reſoudre, cette racine eſt $8b$ que j'écris au demi cercle, & j'oſte ſon quarré du quarré donné.

2°. Je diviſe par $16b$ double de $8b$, les plans $+208ab-272bc$ que $8b$ peut diviſer ſans reſte, l'expoſant que je trouve eſt $13a-17c$, & j'écris $+13a-17c$ au demi cercle, j'oſte enſuite du quarré donné les plans diviſez $208ab-272bc$, plus $169aa-442ac+289cc$, quarré de l'expoſant nouvellement trouvé. Il ne reſte rien, & je connois que $8b+13a-17c$ eſt la racine que je cherche.

$$\begin{array}{llllllll}
\textit{Quarré} & +169aa & +208ab & +64bb & -442ac & -272bc & +289cc & (8b+13a-17c\ \textit{Racine.} \\
 & & 8b & & & 8b & & \\
 & -169aa & -208ab & -64bb & +442ac & +272bc & -289cc & \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

Psur les Cubes.

On peut auſſi dans le même ordre reſoudre tout cube literal en commençant ſon operation par celui des cubes qui ſont dans le cube donné, dont la racine cubique ſe peut plus facilement connoître.

Car cette racine eſtant écrite au demi cercle, on diviſe par le triple de ſon quarré tous les produits qu'on peut ainſi diviſer ſans reſte; on ajoûte l'expoſant de cette diviſion au demi cercle, & on oſte du cube donné tous les produits diviſez, plus trois autres produits de la premiere racine par le quarré de l'expoſant nouvellement trouvé, plus auſſi le cube de ce même expoſant. S'il ne reſte rien, on a la racine cherchée, & s'il reſte quelque choſe, on reïtere une ſemblable operation, en choiſiſſant au lieu du cube qu'on a pris l'un des autres qui ſont dans le cube á reſoudre. Ou bien on ſuit la methode generale du Probleme qui precede.

Exemple.

Pour tirer la racine cubique de $256097875a^6b^3+13306425a^4bbcdd+230505aabccd^4+1331c^3d^6+844966 5a^4bbc^3+8770aabc^4dd+2532c^5d^4+93345aabc^6+1617c^7dd+343c^9$. 1°. Je tire la racine cubique de $343c^9$ qui eſt la plus facile à trouver. Cette racine eſt $7c^3$ que j'écris au demi cercle, & j'oſte ſon cube du cube donné.

2°. Je diviſe par $147c^6$ triple de $49c^6$ quarré de $7c^3$, les produits $93345aabc^6+1617c^7dd$, ou c a le plus de dimenſions, & qu'on peut diviſer ſans reſte; l'expoſant eſt $635aab+11cdd$ que j'écris au demi cercle, & j'oſte du cube donné les produits diviſez, plus $844966a^4bbc^3+8770aabc^4dd+2532c^5d^4$ trois autres produits de $7c^3$ par $40325a^4bb+1370aabcdd+121ccd^4$ quarré de l'expoſant trouvé $635aab+11cdd$; J'oſte auſſi $256097875a^6b^3+13306425a^4bbcdd+230505aabccd^4+1331c^3d^6$ cube de $635aab+11cdd$. Il ne reſte rien, & je connois que $7c^3+635aab+11cdd$ eſt la racine cubique que je cherche. S'il reſtoit quelque choſe, on pouroit reïterer une ſemblable operation, en choiſiſſant au lieu du cube $343c^9$ l'un des autres qui ſont enfermez dans le cube à reſoudre. Ou bien l'on pouroit ſuivre la methode generale.

TROISIE'ME MANIERE.

XL. Lorſque tous les produits d'un quarré qu'on propoſe à reſoudre ont le ſigne +, & qu'on peut facilement connoître chaque racine de chacun des quarrez qu'il renferme, on peut abreger ainſi ſon operation.

Pour les Quarrez.

On tire chaque racine de chacun des quarrez qu'on voit au quarré donné. On écrit toutes ces racines au demi cercle, & on oſte leur quarré du quarré donné. S'il ne reſte rien, on a la racine cherchée; mais s'il reſte quelque choſe, on continuë ſon operation ſur ce reſte par le moyen de ce qui eſt au demi cercle, & lorſqu'en operant ainſi, on ne trouve pas ce qu'on cherche, on ſuit la methode generale, ou bien l'autre qui precede celle-ci.

Exemple.

Pour tirer la racine quarrée de $49a^6 + 70a^4bb + 25aab^4 + 126a^4bc + 90aab^3c + 81aabbcc$, je tire chaque racine de chacun des quarrez $49a^6$, $25aab^4$, & $81aabbcc$ qui ſont au quarré donné. Les trois racines de ces quarrez ſont $7a^3$, $5abb$, & $9abc$. j'écris donc au demi cercle $7a^3 + 5abb + 9abc$, & j'oſte leur quarré de celui qu'on propoſe à reſoudre. Or comme ce quarré lui eſt égal, il ne reſte rien, & je connois que $7a^3 + 5abb + 9abc$ eſt la racine que je cherche.

$$\begin{array}{llllll} 49a^6 & + 70a^4bb & + 25aab^4 & + 126a^4bc & + 90aab^3c & + 81aabbcc\,(7a^3 + 5abb + 9abc \\ 7a^3, & & 5abb & & & 9abc \\ -49a^6 & - 70a^4bb & - 25aab^4 & - 126a^4bc & - 90aab^3c & - 81aabbcc \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Pour les Cubes.

Pareillement en tout cube literal, ſoient que les produits qui le compoſent ayent le ſigne +, ſoit qu'ils ayent le ſigne —, lorſqu'on peut facilement connoître chaque racine cubique de chacun des cubes qui ſont au cube donné, on abrege ainſi ſon operation.

On tire chaque racine cubique de chacun des cubes qu'on voit dans le cube donné, on écrit toutes ces racines au demi cercle, & on oſte leur cube de celui qu'on veut reſoudre. S'il ne reſte rien, on a la racine cherchée; mais s'il reſte quelque choſe, on continuë ſon operation ſur ce reſte par le moyen de ce qui eſt au demi cercle. Et lorſqu'en operant ainſi l'on ne trouve pas ce qu'on cherche (ce qui arrive aſſez rarement) on recommence ſon operation, & on la fait en ſuivant la methode generale.

Premier Exemple.

Pour tirer la racine cubique de $a^3 + 3aab + 3abb + b^3 + 3aac + 6abc + 3bbc + 3acc + 3bcc + c^3$, je tire chaque racine cubique de chacun des cubes a^3, b^3, & c^3, qui ſont dans le cube à reſoudre; les trois racines de ces cubes ſont a, b, & c, j'écris donc $a + b + c$ au demi cercle, & j'en cherche le cube pour l'oſter de celui qu'on propoſe. Or comme ce cube lui eſt égal, il ne reſte rien, & ainſi je connois que $a+b+c$ eſt la racine cubique que je cherche.

$$\begin{array}{l}
a^3+3aab+3abb+b^3+3aac+6abc+3bbc+3acc+3bcc+c^3\;(a+b+c\\
a, \qquad\qquad\qquad b, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad c\\
\underline{-a^3-3aab-3abb-b^3-3aac-6abc-3bbc-3acc-3bcc-c^3}\\
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0
\end{array}$$

Second Exemple.

Pour tirer la racine cubique de $b^6+6b^5c+24b^4cc+56b^3c^3+18b^5d+72b^4cd+216b^3ccd+108b^4dd+216b^3cdd+216b^3d^3+96bbc^4+288bbc^3d+432bbccdd+96bc^5+288bc^4d+64c^6$, je tire chaque racine cubique de chacun des cubes b^6, $216b^3d^3$, & $64c^6$, qui ſont au cube donné, les racines de ces cubes ſont bb, $6bd$, & $4cc$, j'écris donc $bb+6bd+4cc$ au demi cercle; & je cherche leur cube qui eſt $b^6+18b^5d+108b^4dd+216b^3d^3+12b^4cc+144b^3ccd+432bbccdd+48bbc^4+288bc^4d+64c^6$, que je retranche du cube total. Il reſte $6b^5c+12b^4cc+72b^4cd+72b^3ccd+216b^3cdd+56b^3c^3+48bbc^4+288bbc^3d+96bc^5$.

Enſuite j'écris le triple du quarré de $bb+6bd+4cc$ ſous ce reſte, ou plûtoſt je me contente de placer ſeulement $3b^4$ la premiere partie de ce triple ſous $6b^5c$, & je dis l'expoſant de $6b^5c$ à $3b^4$ eſt $2bc$, que j'écris au demi cercle, je multiplie enſuite le triple du quarré de $bb+6bd+4cc$, plus le triple du produit de $bb+6bd+4cc$ par $2bc$, plus encore le quarré de $2bc$, par $2bc$; & j'ôſte le produit de ce qui eſt reſté au cube à reſoudre. Il ne reſte rien, & ainſi je connois que $bb+6bd+4cc+2bc$ eſt la racine cubique que je cherche. Il en eſt ainſi des autres.

DE L'USAGE DE CETTE METHODE.

XLI. Cette Troiſiéme Methode eſt ordinairement la plus courte. Comme ſon uſage a beaucoup d'étenduë, on ſe la doit rendre auſſi tres-familiere. On peut l'étendre à toute autre puiſſance impaire, & l'on peut encore l'étendre à toutes les puiſſances paires, deſquelles chaque partie a le ſigne +. Or il eſt toûjours facile de réduire une puiſſance paire à ſa racine ſimple, ou à une autre puiſſance impaire, en tirant ſa racine quarrée, & de nouveau la racine de cette racine, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'on découvre la racine de cette puiſſance, ou juſqu'à ce qu'on arrive à une puiſſance impaire.

Si par exemple on avoit à reſoudre une vingtiéme puiſſance literale, ſa racine quarrée ſeroit une dixiéme puiſſance, dont une nouvelle racine quarrée ſeroit une cinquiéme puiſſance, c'eſt à dire une puiſſance impaire.

Je ne m'arreſte point à expliquer davantage les raiſons de la ſeconde & troiſiéme maniere de reſoudre les puiſſances literales, elles ſont trop évidentes pour arreſter les perſonnes attentives.

Au reſte pour s'aſſurer qu'une racine découverte numerique ou literale eſt celle que l'on cherche, il ne faut que l'élever à une puiſſance égale à celle qu'on avoit à reſoudre. Car ſi la racine ainſi élevée rend la puiſſance qu'on s'eſt propoſée à reſoudre, elle eſt celle qu'on cherche, mais ſi elle ne rend pas cette puiſſance, elle n'eſt pas celle qu'on cherche, & l'operation eſtant mal faite, il la faut recommencer.

PREMIER THEOREME.

Si on ajoûte à un nombre quarré le double de ſa racine, plus l'unité, la ſomme ſera égale au nombre quarré qui ſuit de plus prés le quarré qu'on propoſe. XLII.

Démonſtration. Soit aa le quarré propoſé. La racine de ce quarré eſt a; Or ajoûtant au quarré aa le double de ſa racine a, on fait la même choſe que ſi on prenoit deux plans de a (qui devient la premiere partie d'un nouveau quarré) par l'unité qui en eſt la ſeconde partie: Et en ajoûtant encore l'unité au quarré aa, plus aux deux plans de a par 1, on leur ajoûte le quarré de 1 qui eſt la ſeconde partie du nouveau quarré. Donc la ſomme $aa+2a+1$ doit eſtre le quarré de la racine $a+1$. Or $a+1$ eſt le nombre qui ſuit immediatement & de plus prés le nombre a racine du quarré aa, puiſque $a+1$ ne ſurpaſſe a que de l'unité ſeule. Donc la ſomme $aa+2a+1$ eſt le nombre quarré qui ſuit de plus prés aa. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE QUI PEUT SERVIR D'UN PROBLEME POUR FORMER UNE TABLE DE TOUS LES NOMBRES QUARREZ.

SI l'on diſpoſe ſucceſſivement & par ordre tous les nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, & les autres, le premier de ces nombres qui eſt 1 ſera le premier nombre quarré. Ce quarré 1, plus 3 qui ſuit 1, donnent le ſecond quarré 4. Le quarré 4 plus 5 qui ſuit 3, donnent le troiſiéme quarré 9. Pareillement $9+7$ font le quatriéme quarré 16, $16+9=25$, $25+11=36$, $36+13=49$. Et ainſi des autres. XLIII.

La raiſon de cela eſt claire par le Theoreme precedent. Car en ajoûtant 3 au quarré 1, on lui ajoûte le double de ſa racine, plus l'unité; ce qui doit donner le quarré ſuivant qui eſt 4. En ajoûtant 5 au quarré 4, on lui ajoûte le double de ſa racine 2, plus 1, ce qui doit donner le quarré ſuivant qui eſt 9. Et ainſi des autres. Car puiſque tous les nombres impairs 3, 5, 7, 9, 11, &c. pris ſucceſſivement & par ordre, ſont le double de tous les nombres 1, 2, 3, 4, 5, &c. augmenté de l'unité, il eſt viſible que l'addition des quarrez & de ces nombres eſtant continuée ſucceſſivement & par ordre, comme on le vient de dire, doit auſſi donner ſucceſſivement tous les nombres quarrez.

SECOND THEOREME.

Si on ajoûte à un nombre cube le triple du quarré de ſa racine, plus le triple de la même racine, plus l'unité, la ſomme ſera égale au nombre cube qui ſuit de plus prés le cube qu'on propoſe. XLIV.

Démonſtration. Soit a^3 le cube propoſé. Je dis que la ſomme $a^3+3aa+3a+1$ eſt le nombre cube qui ſuit de prés a^3. Car $a+1$ qui eſt la racine cubique de cette ſomme, eſt le nombre qui ſuit immediatement & de plus prés le nombre *a* racine cubique du cube propoſé a^3, puiſque $a+1$ ne ſurpaſſe *a* que de l'unité ſeule.

XLV. Si pareillement on ajoûte à un quarré de quarré quatre cubes de ſa racine 4e, plus ſix quarrez de la même racine, plus 4 fois cette racine, plus encore l'unité, la ſomme ſera le quarré de quarré qui ſuit de plus prés celui qu'on propoſe.

Car ſi le quarré de quarré qu'on propoſe eſt a^4, la ſomme ſera le quarré de quarré $a^4 + 4a^3 + 6aa + 4a + 1$, dont la racine 4e. $a+1$, ſurpaſſe *a* de l'unité. Il en eſt ainſi des autres puiſſances.

AVERTISSEMENT.

XLVI. *Mais je ne dois pas oublier une methode aſſez facile pour former une Table de tous les nombres cubes.*

Si l'on diſpoſe ſucceſſivement & par ordre tous les nombres impairs

1ere *difference.* 2e *difference.* 3e *difference.*

1. 3, 5. 7. 9, 11, 13, 15, 17. 19. 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35. 37. &c.

Le premier de ces nombres qui eſt l'unité, ſera le premier cube. Si l'on paſſe les deux ſuivans 3 & 5, & qu'on ajoûte 7 au premier cube 1, on aura le ſecond cube 8. Si l'on paſſe les cinq ſuivans 9, 11, 13, 15, & 17, & qu'on ajoûte 19 au cube 8, on aura le troiſiéme cube 27. Si l'on paſſe les huit ſuivans 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, & 35, & qu'on ajoûte 37 au cube 27, on aura le quatriéme cube 64. &c. c'eſt à dire qu'en paſſant de ces nombres impairs ſelon l'ordre de ceux-ci 2, 5, 8, 11, 14, &c. qui croiſſent toûjours de 3, & ajoûtant les autres qui les ſuivent 7, 19, 37, 61, 91, &c. aux cubes 1, 8, 27, 64, 125, &c. que l'on aura trouvé, on découvrira ſucceſſivement & par ordre tous les nombres cubes.

Et afin de trouver avec moins de peine les nombres 7, 19, 37, 61, 91, &c. qui ſont les differences que les cubes 1, 8, 27, 64, 125, 216, &c. ont entr'eux, on diſpoſera une ſuite des nombres 6, 12, 18, 24, & les autres, qui commençant par 6 croiſſent toûjours de 6. L'unité ajoûtée au premier nombre 6 donne la premiere difference 7, 7 ajoûté au ſecond nombre 12 donne la ſeconde difference 19. $19+18$ donne 37. $37+24=61$. $61+30=91$. Et ainſi des autres.

6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54.
Differences 1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 227.
Cubes 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512.

TROISIÉME THEOREME.

Tout produit de deux nombres quarrez eſt un quarré, qui a pour ſa racine le produit des deux racines de ces quarrez.

Démonſtration. Soient deux quarrez tels qu'on voudra aa & bb. Le produit de ces deux quarrez eſt $aabb$; Or ce produit eſt égal à ab multiplié quarrément, $aabb$ eſt donc un quarré qui a pour ſa racine ab. Or ab eſt le produit de a & b les deux racines des quarrez aa & bb. Donc tout produit de deux nombres quarrez eſt un quarré, qui a pour ſa racine le produit des deux racines de ces quarrez. Ce qu'il falloit démontrer.

QUATRIÉME THEOREME.

On prouvera en même ſorte que tout produit de deux nombres cubes eſt un cube, qui a pour ſa racine cubique le produit des deux racines cubiques de ces cubes.

a^3b^3 par exemple produit des deux cubes a^3 & b^3, eſt un cube qui a pour racine cubique ab, le produit de a & b les deux racines cubiques des cubes a^3 & b^3. Il en eſt ainſi des autres puiſſances.

DES PUISSANCES EXPRIMÉES PAR FRACTIONS.

SECOND PROBLEME.

Reſoudre les puiſſances exprimées par fractions. XLVII.

On tire chaque racine de chacun de leurs termes; la premiere de ces racines ſera le premier terme, & la ſeconde racine le ſecond terme d'une fraction qui eſt la racine qu'on cherche.

Premier Exemple.

Pour tirer la racine de $\frac{aa}{bb}$, je tire a & b chaque racine de chacun des termes aa & bb; La premiere racine a eſt le premier terme, & la ſeconde b le ſecond terme de la fraction $\frac{a}{b}$, qui eſt la racine de $\frac{aa}{bb}$. Car $\frac{a}{b}$ par $\frac{a}{b} = \frac{aa}{bb}$.

Second Exemple.

Pour tirer la racine de $\frac{25}{9}$, 5 racine de 25 eſt le premier terme, & 3 racine de 9 le ſecond terme de $\frac{5}{3}$, qui eſt la racine de $\frac{25}{9}$. Car $\frac{5}{3}$ par $\frac{5}{3} = \frac{25}{9}$.

Pareillement la racine de $20\frac{1}{4} = \frac{81}{4}$ eſt $\frac{9}{2}$ ou $4\frac{1}{2}$, celle de $\frac{1}{4}qq$ eſt $\frac{1}{2}q$. Car $\frac{1}{2}q$ par $\frac{1}{2}q = \frac{1}{4}qq$.

Troiſiéme Exemple.

Pour tirer la racine cubique de $\frac{a^3}{b^3}$, a racine cubique de a^3 eſt le premier terme, & b racine cubique de b^3, le ſecond terme de $\frac{a}{b}$ qui eſt la racine cubique de $\frac{a^3}{b^3}$.

Pareillement la racine cubique de $2\frac{10}{27} = \frac{64}{27}$ eſt $1\frac{1}{3}$, celle de $\frac{1}{27}p^3$ eſt $\frac{1}{3}p$. Et ainſi des autres.

XLVIII. Les trois methodes qu'on a donné 36, 39, & 40. S. pour reſoudre les puiſſances literales & entieres, ſervent auſſi pour reſoudre les puiſſances rompuës, lorſqu'elles ſont compoſées de pluſieurs parties, excepté que les diviſions ſe peuvent également faire ſans fractions, ou avec fractions.

Premier Exemple.

Pour tirer la racine de $aa + ab - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc - ac$. 1°. Selon la ſeconde methode 39. S. je prends a racine du quarré aa, j'écris a au demi cercle, & j'efface aa.

2°. Je diviſe par $2a$ les deux plans $ab - ac$ multipliez chacun par a, l'expoſant eſt $\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$ que j'écris au demi cercle, & j'efface les deux plans diviſez $ab - ac$, plus auſſi $\frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}cc$ quarré de $\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$. Il ne reſte rien, & je connois que $a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$ eſt la racine cherchée.

$$\begin{array}{l}
\text{Quarré } aa + ab - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc - ac \ (a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \text{ Racine} \\
\quad 2a, 2a \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 2a \\
\underline{- aa - ab + \frac{1}{2}bc - \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}cc + ac} \\
\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0
\end{array}$$

Second Exemple.

Je trouve par une operation ſemblable que la racine de $4a^4 + 2aabb + \frac{1}{4}b^4 - 4aabc - b^3c + bbcc + 2aacc + \frac{1}{2}bbcc - bc^3 + \frac{1}{4}c^4$ eſt $2aa + \frac{1}{2}bb - bc + \frac{1}{2}cc$.

$$\begin{array}{l}
4a^4 + 2aabb + \frac{1}{4}b^4 - 4aabc - b^3c + bbcc + 2aacc + \frac{1}{2}bbcc - bc^3 + \frac{1}{4}c^4 (2aa + \frac{1}{2}bb - bc + \frac{1}{2}cc \\
2aa, 4aa, \qquad\qquad 4aa, \qquad\qquad\qquad 4aa \\
\underline{- 4a^4 - 2aabb - \frac{1}{4}b^4 + 4aabc + b^3c - bbcc - 2aacc - \frac{1}{2}bbcc + bc^3 - \frac{1}{4}c^4} \\
\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0
\end{array}$$

Troiſiéme Exemple.

On trouvera que la racine cubique de $\frac{1}{8}a^6 - \frac{1}{4}a^5b + \frac{1}{6}a^4bb - \frac{1}{27}a^3b^3$ eſt $\frac{1}{2}aa - \frac{1}{3}ab$. Cela ſe voit d'abord en prenant ſelon la troiſiéme methode 40. S. chacune des deux racines cubiques des cubes $\frac{1}{8}a^6$, & $-\frac{1}{27}a^3b^3$. Car ces deux racines ſont $\frac{1}{2}aa$ & $-\frac{1}{3}ab$, dont le cube eſt le même que celui qu'on propoſe à reſoudre.

$$\begin{array}{l}
\text{Cube } \frac{1}{8}a^6 - \frac{1}{4}a^5b + \frac{1}{6}a^4bb - \frac{1}{27}a^3b^3 \ (\frac{1}{2}aa - \frac{1}{3}ab \text{ Racine cubique.} \\
\quad \frac{1}{2}aa \qquad\qquad\qquad - \frac{1}{3}ab \\
\underline{- \frac{1}{8}a^6 + \frac{1}{4}a^5b - \frac{1}{6}a^4bb + \frac{1}{27}a^3b^3} \\
\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0
\end{array}$$

Cinquiéme Theoreme.

Tout nombre quarré a pour expoſant un nombre quarré. XLIX.

Démonſtration. Ce nombre quarré ne peut eſtre qu'entier ou rompu, s'il eſt entier, le Theoreme eſt évident, car ce nombre eſt ſon expoſant à lui-même, puiſqu'il ne peut eſtre exprimé par des termes plus ſimples.

S'il eſt rompu, ſoit ce quarré appellé $\frac{aa}{bb}$, & ſon expoſant $\frac{c}{d}$; je dis que $\frac{c}{d}$ eſt un nombre quarré. Car ſoit $\frac{e}{f}$ l'expoſant de $\frac{a}{b}$, donc $\frac{ee}{ff}$ ſera l'expoſant de $\frac{aa}{bb}$. Or $\frac{c}{d}$ eſt auſſi l'expoſant de $\frac{aa}{bb}$. Donc $\frac{c}{d}$ eſt le même que $\frac{ee}{ff}$. Or $\frac{ee}{ff}$ eſt un nombre quarré, car $\frac{e}{f}$ qui en eſt la racine eſt un nombre commenſurable, puiſqu'on le ſuppoſe égal au nombre commenſurable $\frac{a}{b}$ dont il eſt l'expoſant. Donc $\frac{c}{d}$ eſt un nombre quarré. Donc tout nombre quarré a pour expoſant un nombre quarré. Ce qu'il falloit démontrer.

Et l'on poura démontrer auſſi dans le même ordre que tout nombre cube a pour expoſant un nombre cube. Et ainſi des autres puiſſances.

Sixiéme Theoreme.

Toute fraction quarrée égale à un nombre entier, a ſa racine égale à un nombre entier. L.

Démonſtration. Le nombre entier eſtant égal à la fraction, l'expoſant de chacun eſt le même *par II.* 21. Or ce nombre entier eſt ſon expoſant à lui-même, il eſt donc auſſi l'expoſant de la fraction *par II.* 21. Or un tel expoſant eſt quarré par le cinquiéme Theoreme. Il ſera donc le produit d'un nombre entier par lui-même, ou, ce qui eſt la même choſe, la racine de ce quarré ſera un nombre entier. Or cette racine eſt égale à l'expoſant de la racine de la fraction quarrée, car ſi des puiſſances ſont égales, leurs racines ſont égales. La racine d'une telle fraction eſt donc égale à un nombre entier. Ce qu'il falloit démontrer.

ELEMENS DES MATHEMATIQUES.

LIVRE QUATRIÉME.

DES GRANDEURS INCOMMENSURABLES, ET DES OPERATIONS SUR CES GRANDEURS.

Des Puiſſances imparfaites.

I. TOUT ce qu'on a dit au Livre precedent, regarde principalement les puiſſances parfaites, c'eſt à dire celles dont l'on tire les racines ſans qu'il vienne aucun reſte. Mais il y a peu de ces puiſſances, ſi on les compare aux imparfaites qui ſont celles dont l'on ne peut tirer les racines ſans qu'il vienne un reſte. 16 & 25 par exemple, ſont des quarrez parfaits, mais on trouve entre ces deux quarrez tous les nombres 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, & 24, qui ne le ſont pas. Car il eſt clair qu'on ne peut trouver aucun nombre entier dont le produit par lui-même donne aucun de ces nombres que je viens de marquer. 1 fois 1, par exemple, ni 2 fois 2, ni 3 fois 3, ni 4 fois 4, ni 5 fois 5, &c. ne donneront jamais le nombre 18. Et nous allons démontrer plus bas qu'aucun nombre rompu multiplié par lui-même ne peut donner auſſi ce même nombre 18, ou quelqu'autre ſemblable ; & que les puiſſances imparfaites ont leurs racines incommenſurables.

PREMIER THEOREME.

II. Toute grandeur qui peut meſurer une ou pluſieurs fois ſans reſte quelque nombre, peut toûjours s'exprimer par nombres.

Démonſtration. Soit tout nombre appellé a, & la grandeur qui meſure A

Premiere Planche qui doit eſtre à la fin du 3e Livre de la premiere partie, page 101.

Table 1ere des petites Multiplications & Diviſions.

A B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

C

Table 2e pour les premieres puiſſances des 10 premiers nombres.

Racines.	*Quarrez.*	*Cubes.*	*4es Puiſſances.*	*5es Puiſſances.*	*7es Puiſſances.*
1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	128
3	9	27	81	243	2187
4	16	64	256	1024	16384
5	25	125	625	3125	78125
6	36	216	1296	7776	279936
7	49	343	2401	16807	823543
8	64	512	4096	32768	2097152
9	81	729	6561	59049	4782969
10	100	1000	10000	100000	10000000

Table 3e pour la compoſition des puiſſances.

a	b										puiſſance 1ere ou lineaire.
aa	$2aa$	bb									2e puiſſance.
a^3	$3aab$	$3abb$	b^3								3e puiſſance.
a^4	$4a^3b$	$6aabb$	$4ab^3$	b^4							4e puiſſance.
a^5	$5a^4b$	$10a^3bb$	$10aab^3$	$5ab^4$	b^5						5e puiſſance.
a^6	$6a^5b$	$15a^4bb$	$20a^3b^3$	$15aab^4$	$6ab^5$	b^6					6e puiſſance.
a^7	$7a^6b$	$21a^5bb$	$35a^4b^3$	$35a^3b^4$	$21aab^5$	$7ab^6$	b^7				7e puiſſance.
a^8	$8a^7b$	$28a^6bb$	$56a^5b^3$	$70a^4b^4$	$56a^3b^5$	$28aab^6$	$8ab^7$	b^8			8e puiſſance.
a^9	$9a^8b$	$36a^7bb$	$84a^6b^3$	$126a^5b^4$	$126a^4b^5$	$84a^3b^6$	$36aab^7$	$9ab^8$	b^9		9e puiſſ.
a^{10}	$10a^9b$	$45a^8bb$	$120a^7b^3$	$210a^6b^4$	$252a^5b^5$	$210a^4b^6$	$120a^3b^7$	$45aab^8$	$10ab^9$	b^{10}	10e puiſſ.

Table 4e pour la reſolution des puiſſances.

a	b										
aa	$2a$	b									2e puiſſance.
a^3	$3aa$	$3ab$	bb								3e puiſſance.
a^4	$4a^3$	$6aab$	$4abb$	b^3							4e puiſſance.
a^5	$5a^4$	$10a^3b$	$10aabb$	$5ab^3$	b^4						5e puiſſance.
a^6	$6a^5$	$15a^4b$	$20a^3bb$	$15aab^3$	$6ab^4$	b^5					6e puiſſance.
a^7	$7a^6$	$21a^5b$	$35a^4bb$	$35a^3b^3$	$21aab^4$	$7ab^5$	b^6				7e puiſſance.
a^8	$8a^7$	$28a^6b$	$56a^5bb$	$70a^4b^3$	$56a^3b^4$	$28aab^5$	$8ab^6$	b^7			8e puiſſance.
a^9	$9a^8$	$36a^7b$	$84a^6bb$	$126a^5b^3$	$126a^4b^4$	$84a^3b^5$	$36aab^6$	$9ab^7$	b^8		9e puiſſ.
a^{10}	$10a^9$	$45a^8b$	$120a^7bb$	$210a^6b$	$252a^5b^4$	$210a^4b^5$	$120a^3b^6$	$45aab^7$	$10ab^8$	b^9	10e puiſſ.

une ou pluſieurs fois ſans reſte, appellée *b*; ſoit encore appellé *c* le nombre qui marque combien de fois *b* eſt dans *a*. La grandeur *b* eſt donc autant de fois dans le nombre *a*, que l'unité eſt de fois dans le nombre *c*. Donc $\frac{a}{b} = \frac{c}{1}$ *par I.* 107. & 108. & *par II.* 20. Car $\frac{c}{1}$ eſt l'expoſant de $\frac{a}{b}$. Or multipliant par *b* chacun des deux rapports égaux $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{1}$, les produits *a* & $\frac{bc}{1}$ ſont égaux *par II.* 8. & diviſant encore chacun de ces produits égaux par *c*, les expoſants $\frac{a}{c}$ & $\frac{b}{1}$ ſont égaux *par II.* 9.. Or *a* & *c* ſont chacun un nombre ſelon la ſuppoſition, & $\frac{b}{1} = b$ *par I.* 44. La fraction $\frac{a}{c}$ ou la grandeur *b* qui lui eſt égale, poura donc s'exprimer par nombres. Ce qu'il falloit démontrer.

SECOND THEOREME.

Si un nombre entier ne peut avoir de nombre entier pour ſa racine, aucune III.
fraction multipliée par elle-même ne donnera ce nombre pour produit.

Démonſtration. Par la ſuppoſition le produit de la fraction par elle-même eſt égal au nombre entier. La racine de ce produit eſt donc égale à un nombre entier, *par III.* 50. c'eſt à dire que le nombre qu'on propoſe a pour ſa racine un nombre entier. Or on ſuppoſe que cela eſt impoſſible. Donc la racine veritable que l'on conçoit dans une puiſſance imparfaite, ne peut eſtre exprimée par aucuns nombres ni entiers ni rompus. Ce qu'il falloit démontrer.

TROISIE'ME THEOREME.

Les racines des puiſſances imparfaites ſont des grandeurs incommenſu- IV.
rables à toutes ſortes de nombres entiers ou rompus.

Démonſtration. Tous les nombres ont quelque meſure commune. Car ſi des nombres ſont entiers, l'unité repetée autant qu'il faudra les meſure chacun exactement & ſans reſte: Et ſi des nombres ſont rompus, l'unité & ces nombres auront quelque meſure commune, laquelle eſtant priſe autant de fois qu'il faudra, les meſurera chacun exactement & ſans reſte; 1 par exemple, & telle fraction que l'on voudra comme $\frac{a}{b}$, ont $\frac{1}{b}$ pour meſure commune, parceque $\frac{1}{b}$ ſe trouve autant de fois dans 1, qu'il y a d'unitez dans *b*; & autant de fois dans $\frac{a}{b}$, qu'il y a d'unitez dans *a*. De même $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ ont $\frac{1}{bd}$ pour meſure commune, parceque $\frac{1}{bd}$ ſe trouve autant de fois dans $\frac{a}{b}$ qu'il y a d'unitez dans *ad*, & autant de fois $\frac{c}{d}$ qu'il y a d'unitez dans *bc*. Or les racines des puiſſances imparfaites ne peuvent eſtre exprimées par aucuns nombres ni entiers ni rompus par le ſecond Theoreme; ces racines ne peuvent donc meſurer une ou pluſieurs fois aucun nombre ſans reſte, car autrement ces racines pouroient eſtre exprimées par nombres, ſelon le premier Theoreme. Or ſi de ſemblables racines ne peuvent meſurer une ou pluſieurs fois ſans reſte aucun nombre, leur moitié, ni leur tiers, ni leur quart, ni aucune autre ſemblable de leurs parties, qui les meſure exactement pluſieurs fois, ne pouront pareillement meſurer une ou pluſieurs fois aucun nombre ſans reſte. Car ſoit toute graudeur comme a, qui ne puiſſe meſurer une ou pluſieurs fois aucun nombre ſans reſte, & ſoit telle partie de cette grandeur qu'on voudra, qui la meſure pluſieurs fois ſans reſte, appellée b; ſoit encore appellé c le nombre qui marque combien de fois b eſt dans a. La partie b eſt donc autant de fois dans la grandeur a, que l'unité eſt de fois dans le nombre c. Donc $\frac{a}{b} = \frac{c}{1}$ par I. 107 & 108, & par II. 20. Car $\frac{c}{1}$ eſt l'expoſant de $\frac{a}{b}$. Or multipliant par b chacun des deux rapports égaux $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{1}$, les produits a & $\frac{bc}{1}$ ſont égaux, *par II.* 8. & diviſant chacun de ces produits égaux par c, les expoſans $\frac{a}{c}$ & $\frac{b}{1}$ ſont égaux, *par II. 9.* Or c eſt un nombre ſelon la ſuppoſition, ſi donc la partie de a que nous appellons b, peut s'exprimer par nombre, la fraction $\frac{a}{c}$ qui lui eſt égale poura pareillement s'exprimer par nombres. Mais nous avons ſuppoſé que la grandeur a ne peut eſtre exprimée par nombres, la fraction $\frac{a}{c}$ ne poura donc auſſi l'eſtre, ni par conſequent la partie b qui lui eſt égale. Donc les racines des puiſſances imparfaites ſont des nombres ou grandeurs incommenſurables à toutes ſortes de nombres entiers ou rompus, *par I. 32.* Ce qu'il falloit démontrer.

AVERTISSEMENT.

V. *Mais quoique de ſemblables grandeurs ne puiſſent jamais s'exprimer par des nombres commenſurables, & qu'eſtant incommenſurables, l'on ne puiſſe en avoir une connoiſſance exacte & parfaite, cependant elles ſont tres-réelles, & la Geometrie nous fournit les moyens de les déterminer exactement par lignes.*

COROLLAIRE.

VI. Si le rapport de deux grandeurs n'eſt pas de nombre à nombre, ou, ce qui eſt la même choſe, ſi ce rapport ne peut pas s'exprimer par nombres, les deux grandeurs ſont incommenſurables entr'elles. Si $\frac{b}{c}$ ne peut eſtre exprimé par nombres, les deux grandeurs b & c ſont incommenſurables entr'elles.

DE L'APPROXIMATION DES RACINES VERITABLES.

PREMIER PROBLEME.

VII. On connoît que les nombres entiers ne ſont pas quarrez, ou cubes, &c. lorſqu'ayant trouvé les plus grands nombres entiers & quarrez ou cubes qu'ils enferment, on trouve encore quelque reſte.

18 par exemple, n'eſt pas quarré à cauſe qu'aprés 16 le plus grand nombre entier & quarré renfermé dans 18, on trouve encore 2 pour reſte. De même 1038 n'eſt pas quarré, à cauſe qu'en cherchant ſa racine, on trouve au demi cercle 32 la racine de 1024 le plus grand nombre entier & quarré renfermé dans 1038, & qu'il reſte encore 14, ce qui empêche que 1038 ne ſoit un quarré parfait.

Ce qu'il y a de merveilleux dans les puiſſances imparfaites, c'eſt que leurs racines ne pouvant jamais eſtre exactement connuës, l'on en peut toutefois approcher de plus en plus à l'infini en cette maniere.

SECOND PROBLEME.

Approcher à l'infini de la juſte valeur d'une racine cherchée dans une puiſſance imparfaite. VIII.

1°. On opere ſur elle ſelon les regles ordinaires, juſqu'à ce qu'on ait trouvé le reſte qui la rend imparfaite, & alors on ſouſcrit 1 à ce qui eſt au demi cercle.

2°. On ajoûte à ce qui reſte une tranche de zero, c'eſt à dire autant de zero que la puiſſance à reſoudre a de degrez, & l'on continuë l'operation comme à l'ordinaire ſur les rangs de cette tranche ajoûtée, & ſur ceux qui la ſuivent. On ajoûte au demi cercle l'expoſant qu'on trouve, & on lui ſouſcrit un zero.

3°. Comme cette ſeconde operation laiſſe un nouveau reſte, on ajoûte encore à ce reſte une tranche de zero, & l'on continuë l'operation comme auparavant ſur les rangs de cette tranche & ſur ceux qui ſuivent, on ajoûte au demi cercle l'expoſant qu'on trouve, & on lui ſouſcrit un zero.

4°. Comme cette troiſiéme operation laiſſe encore un reſte, on reïtere une ſemblable operation qui laiſſe auſſi un nouveau reſte, ſur lequel on reïtere encore une ſemblable operation; Et ainſi de ſuite à l'infini. Les exemples éclairciront ces regles.

Premier Exemple.

Pour approcher de la juſte valeur de la racine de 18. 1°. J'écris au demi cercle 4 racine de 16 le plus grand quarré renfermé dans 18, & j'écris 1 ſous 4.

2°. Comme il reſte 2, j'ajoûte à ce reſte une tranche de zero, c'eſt à dire deux, à cauſe que je conſidere 18 comme une puiſſance de deux degrez, & je continuë l'operation comme à l'ordinaire ſur les rangs de cette tranche & ſur ceux qui ſuivent, l'expoſant que je trouve eſt 2, & j'écris 2 au demi cercle, & 0 ſous 2.

3°. Comme cette ſeconde operation laiſſe le reſte 36, j'ajoûte encore à ce reſte deux zero, & continuant l'operation comme auparavant, l'expoſant que je trouve eſt 4, & j'écris 4 au demi cercle, & 0 ſous 4.

Quarré imparfait $+18$ ($\frac{424}{100}$

-16

1^{er} *reſte* $+2|00$

8.

$-1\,64$

2^{e} *reſte* $+36|00$

84.

$-3\,2\,76$

3^{e} *reſte* $+2\,24|00$

4°. Comme cette troiſiéme operation laiſſe le reſte 224, je reïtere une ſemblable operation, l'expoſant que je trouve eſt 2, & j'écris 2 au demi cercle; & 0 ſous 2.

5°. Comme cette quatriéme operation laiſſe le reſte 5436, je reïtere encore une ſemblable operation, l'expoſant que je trouve eſt 6, & j'écris 6 au demi cercle, & 0 ſous 6.

6°. Comme il vient un nouveau reſte 34524, je reïtere encore une ſemblable operation, l'expoſant que je trouve eſt 4, & j'écris 4 au demi cercle, & 0 ſous 4.

7°. Comme il vient un autre reſte 58304, je reïtere de nouveau une ſemblable operation, l'expoſant que je trouve eſt 0, & j'écris 0 au demi cercle, & 0 ſous 0.

8°. Il reſte donc 5830400 ſur qui reïterant l'operation accoûtumée, l'expoſant que je trouve eſt 6, & j'écris 6 au demi cercle, & 0 ſous 6. Il reſte encore 73923164 ſur qui on peut renouveller l'operation. Et ainſi de ſuite.

Quarré imparfait + 18 ($\frac{42426406}{10000000}$ *Racine approchée.*

— 1 6
1^{er} *reſte* + 2 | 00
8 .
— 1 64
2^{e} *reſte* + 3 6 | 00
8 $\cancel{4}$.
— 3 3 76
3^{e} *reſte* + 2 24 | 00
8$\cancel{4}$ 8 .
— 1 69 64
4^{e} *reſte* 5 4 3 6 | 00
8 $\cancel{4}$8 $\cancel{4}$.
— 5 0 90 76
5^{e} *reſte* + 3 4 5 24 | 00
8$\cancel{4}$ 8$\cancel{5}$ 2 .
— 3 39 40 96
6. & 7^{e} *reſtes* + 5 83 04 | 00 | 00
8 $\cancel{4}$8 $\cancel{5}$2 8 .
8$\cancel{4}$ 8$\cancel{5}$ 28 $\cancel{0}$.
— 5 09 11 68 36
8^{e} *reſte* + 73 92 31 64 . *&c.*

Second Exemple.

Pour approcher de la juſte valeur de la racine de 1038. 1°. Je trouve ſelon les regles ordinaires 32 au demi cercle, & j'écris 1 ſous 32.

2°. Comme j'ai auſſi trouvé 14 de reſte, j'ajoûte à ce reſte une tranche de zero, c'eſt à dire deux autant que la puiſſance à reſoudre a de degrez, & je continuë l'operation comme à l'ordinaire ſur les rangs de cette tranche & ſur ceux qui ſuivent, l'expoſant que je trouve eſt 2, & j'écris 2 au demi cercle, & o ſous 2.

3°. Comme cette ſeconde operation laiſſe le reſte 116, j'ajoûte encore à ce reſte deux zero, & continuant l'operation comme auparavant, l'expoſant que je trouve eſt 1, & j'écris 1 au demi cercle, & o ſous 1.

4°. Comme cette troiſiéme operation laiſſe le reſte 5159, je reïtere une ſemblable operation, l'expoſant que je trouve eſt 8, & j'écris 8 au demi cercle, & o ſous 8.

5°. Comme cette quatriéme operation laiſſe le reſte 476, je reïtere encore une ſemblable operation, l'expoſant que je trouve eſt o, & j'écris o au demi cercle, & o ſous o.

6°. Comme cette cinquiéme operation laiſſe le reſte 47600, je reitere de nouveau une ſemblable operation, l'expoſant que je trouve eſt encore o que j'écris au demi cercle, & o ſous lui.

7°. Comme cette ſixiéme operation laiſſe le reſte 4760000, je reitere une autre ſemblable operation, l'expoſant que je trouve eſt 7, & j'écris 7 au demi cercle, & o ſous 7. Il reſte encore 24947951 ſur qui je puis pareillement renouveller l'operation. Et je connois déja que $32\frac{218007}{1000000}$ eſt une racine qui approche beaucoup de la veritable que je cherche.

Quarré imparfait $+1038$ ($\frac{32218007}{1000000}$ *ou* $32\frac{218007}{1000000}$ *racine approchée.*

-1024

1er *reſte* $+\overline{14}|00$

$\cancel{6}\,\cancel{4}.$

-1284

2e *reſte* $+\overline{1}\,\overline{16}|00$

$\cancel{6}\cancel{4}\,\cancel{4}.$

-6441

3e *reſte* $+\overline{51}\,\overline{59}|00$

$\cancel{6}\,\cancel{4}\cancel{4}\,\cancel{2}.$

-51524

4. 5. & 6e *reſtes* $+\overline{4}\,\overline{76}|00|00|00$

$\cancel{6}\cancel{4}\,\cancel{4}\cancel{3}\,\cancel{6}.$

$\cancel{6}\,\cancel{4}\cancel{4}\,\cancel{3}\cancel{6}\,\cancel{0}.$

$\cancel{6}\cancel{4}\,\cancel{4}\cancel{3}\,\cancel{6}\cancel{0}\,\cancel{0}.$

$-4\,51\,05\,20\,49$

7e *reſte* $+\overline{24}\,\overline{94}\,\overline{79}\,\overline{51}.$ &c.

Troiſiéme Exemple.

Pour approcher de la juſte valeur de la racine cubique de 1038. 1°. Selon les regles ordinaires du Probleme general je trouve 10 au demi cercle.

2°. J'ajoûte trois zero à 38 qui reſtent, & je continuë l'operation, l'expoſant que je trouve eſt 1 que j'écris au demi cercle en lui ſouſcrivant 10. Car c'eſt le même d'écrire 1 ſous 10 que j'ai trouvé dans la premiere operation, & o ſous 1 que je trouve en celle-ci, ou bien d'écrire 10 dans cette premiere operation, & $\frac{1}{10}$ dans celle-ci.

3°. Comme cette ſeconde operation laiſſe le reſte 7699, j'ajoûte encore à ce reſte trois zero, & je continuë l'operation, l'expoſant que je trouve eſt 7, & j'écris 7 au demi cercle, & o ſous 7.

Comme cette troiſiéme operation laiſſe encore le reſte 409487, j'ajoûte de nouveau trois zero à ce reſte, & je continuë l'operation, l'expoſant que je trouve eſt 1, & j'écris 1 au demi cercle & o ſous 1. Il reſte encore 99169789 ſur qui je puis encore continuer de nouvelles operations. Et 10$\frac{171}{1000}$ écrit au demi cercle eſt une racine qui approche déja beaucoup de celle que je cherche.

Cube imparfait $+1038\ (10\frac{171}{1000}$ *Racine cubique approchée.*

$$
\begin{array}{rl}
 & -1000 \\
1^{er}\ \textit{reſte} & \overline{+38}|000 \\
 & 3\cancel{0}\cancel{0}.. \\
 & -30301 \\
2^{e}\ \textit{reſte} & \overline{+7\,699}|000 \\
 & 1\,\cancel{0}2\cancel{0}\,1.. \\
 & -7\,289\,513 \\
3^{e}\ \textit{reſte} & \overline{+409\,487}|000 \\
 & 31\cancel{0}\,28\cancel{6}\,\cancel{7}.. \\
 & -310\,317\,211 \\
4^{e}\ \textit{reſte} & \overline{+99\,169\,789}.\ \&c.
\end{array}
$$

Démonſtration du Probleme.

Chaque tranche ajoûtée multiplie toute la puiſſance à reſoudre par 100, ſi c'eſt une ſeconde puiſſance, par 1000, ſi ç'en eſt une troiſiéme, &c. (par ce qu'on a dit au troiſiéme exemple du 3^{e} Probleme I. 91.) c'eſt à dire que chaque tranche ajoûtée multiplie la ſeconde puiſſance par le quarré de 10, la troiſiéme puiſſance par le cube de 10, & ainſi des autres. Or chaque fois qu'on multiplie en cette ſorte la puiſſance à reſoudre par une puiſſance pareille de 10, on fait un produit dont la racine eſt multipliée par 10. Diviſant donc en même temps cette racine, qu'on écrit par parties au demi cercle, par 10, comme les regles du Probleme l'enſeignent, on la multiplie & on la diviſe également, & ainſi l'on ne change en rien ſa valeur par II. 24 & 25. Mais quand on reitereroit de nouvelles operations, on trouveroit à l'infini de nouveaux reſtes, & l'on n'arriveroit jamais à la racine veritable, quoiqu'on en approchaſt toûjours de plus en plus. Car chaque expoſant qu'on ajoûte au demi cercle, doit toujours eſtre tel que ſes deux plans par tous les caracteres écrits avant lui, plus ſon quarré puiſſent eſtre retranchez des rangs ſur leſquels on opere. Or ces plans & ce quarré ne peuvent eſtre enfermez dans ces rangs exactement & ſans reſte, car les expoſans qu'on ajoute au demi cercle eſtant toujours commenſurables, ils ne peuvent jamais eſtre aſſez juſtes pour donner ce qui manque à la veritable racine, puiſqu'elle eſt incommenſurable ſelon la ſuppoſition. Il faut donc qu'il y ait toujours quelque reſte. Et enfin l'on approche toujours de plus en plus de la racine veritable, lorſqu'écrivant quelques nombres au premier terme de la fraction qu'on écrit au demi cercle, l'on n'écrit rien au ſecond que des zero.

MANIERE POUR APPROCHER EN DESSUS DES RACINES INCOMMENSURABLES.

IX. On prend auſſi quelquefois pour racines approchées celles qui ſurpaſſent la racine veritable, d'une grandeur plus petite que telle autre qu'on voudra.

Ces racines ſe reconnoiſſent facilement lorſqu'on a celles qui en approchent de ſi prés au deſſous, que la grandeur qui leur manque eſt plus petite que celle qu'on aura déterminée. Car il ne faut qu'ajouter l'unité au premier terme de leur fraction, pour en avoir de celles qu'on demande.

Exemple.

Suppoſons qu'on demande une racine cubique qui ſurpaſſe celle de 1038, d'une grandeur plus petite que $\frac{1}{1000}$. Je trouve en ſuivant le Probleme precedent $10\frac{171}{1000}$ qui approche de ſi prés la racine cubique de 1038, que la grandeur qui lui manque eſt plus petite que $\frac{1}{1000}$. Car ſi j'ajoute encore $\frac{1}{1000}$ à $10\frac{171}{1000}$, j'aurai $10\frac{172}{1000}$ dont le cube ſurpaſſe 1038. Comme donc c'eſt une notion commune que les plus grands quarrez ou les plus grands cubes ont de plus grandes racines, il eſt vrai de conclure que $10\frac{171}{1000}$ eſt plus petit, & $10\frac{172}{1000}$ plus grand que la racine cubique de 1038. Or $\frac{1}{1000}$ eſtant la difference de ces deux racines approchées l'une au deſſous, & l'autre au deſſus de la veritable qu'on cherche, il paroît évident que l'une eſt ſurpaſſée & que l'autre ſurpaſſe cette racine incommenſurable d'une grandeur plus petite que $\frac{1}{1000}$.

AVERTISSEMENT.

Si je m'eſtois engagé de ſuivre la methode ordinaire de ceux qui traittent des puiſſances, j'aurois dû parler des puiſſances imparfaites & de l'ap-

proximation de leuts racines au Livre precedent ; mais l'ordre m'a ſemblé plus naturel de n'en parler qu'ici. Car les grandeurs incommenſurables, qui me fourniſſent le ſujet de ce quatriéme Livre, naiſſent de la reſolution des puiſſances imparfaites, puiſqu'elles en ſont les racines veritables.

DE L'EXPRESSION

DES RACINES VERITABLES.

X. Souvent on exprime la juſte valeur de la racine conçeuë dans une puiſſance parfaite ou imparfaite, par de certains ſignes qu'on appelle radicaux.

On exprime la racine d'une ſeconde puiſſance par ce ſigne $\surd$, qui ſignifie racine quarrée ou ſimplement racine. On exprime la racine cubique d'une troiſiéme puiſſance par ce ſigne $\surd C.$ qui ſignifie racine cubique. Celle d'une quatriéme s'exprime par $\surd\surd$ qui ſignifie racine de racine. Celle d'une cinquiéme par $\surd 5^e$. D'une ſixiéme par $\surd C.\surd$ ou $\surd\surd C$. D'une ſeptiéme par $\surd 7^e$. D'une huitiéme par $\surd\surd\surd$. D'une neuviéme par $\surd C\surd C$. D'une dixiéme par $\surd 5^e.\surd$ ou $\surd\surd 5^e$. Et ainſi des autres.

XI. Dans chacune de ces racines ou de ces ſignes radicaux, nous diſons que les nombres, qui ſont écrits ou ſous-entendus aprés eux, ſont les nombres de ces ſignes. Par exemple dans $\surd C.$ ou $\surd 3^e.$ nous appellons 3 le nombre de ce ſigne. De même 6 eſt le nombre de $\surd C\surd$. 10 celui de $\surd 5^e.\surd$. On appelle auſſi les nombres 2, 3, 4, &c. les expoſans des ſignes radicaux $\surd$, $\surd C$, $\surd\surd$, &c.

XII. Ces ſignes ſervent particulierement pour marquer la juſte valeur des differentes racines que l'on conçoit dans les puiſſances imparfaites, & qu'on ne peut exactement déterminer par nombres.

La racine de 18 par exemple, ne peut eſtre déterminée par nombres, & l'on ſe contente de l'exprimer ainſi $\surd 18$. De même $\surd 1038$ exprime la juſte valeur de la racine de 1038 qu'on ne peut déterminer par nombres. De même la racine de $\surd 5+\surd 3$ ne peut eſtre déterminée par nombres, & je l'exprime ainſi $\surd.\overline{\surd 5+\surd 3}$.

Pareillement la racine de $aa-2ab+bb+cc$ ne peut eſtre exactement determinée, & je me contente de l'exprimer ainſi $\surd\overline{aa-2ab+bb+cc}$. La racine de $\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3$ ne peut eſtre déterminée, & je l'exprime en cette ſorte $\surd\overline{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$. La racine cubique de $\frac{1}{2}q+\surd\overline{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$ ne peut eſtre déterminée, & je l'exprime en cette ſorte $\surd C.\overline{\frac{1}{2}q+\surd\overline{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$. Il en eſt ainſi des autres.

XIII. Les racines incommenſurables des fractions s'expriment en deux manieres. Par exemple pour marquer la racine de $\frac{3}{5}$, on écrit $\surd\frac{3}{5}$, ou bien $\frac{\surd 3}{\surd 5}$, parceque chacun des termes 3 & 5 eſt conçeu renfermé ſous le ſigne radical $\surd$, & qu'il eſt égal d'écrire $\surd\frac{aa}{bb}$, ou $\frac{\surd aa}{\surd bb}$, puiſque l'un & l'autre ſont la même choſe que $\frac{a}{b}$. De même la racine de $\frac{4}{5}$ s'exprime en cette ſorte $\surd\frac{4}{5}$, ou bien $\frac{\surd 4}{\surd 5}$; & parceque $\surd 4 = 2$, au lieu de $\surd\frac{4}{5}$ ou de $\frac{\surd 4}{\surd 5}$, on peut encore écrire $\frac{2}{\surd 5}$, ou bien $2\surd\frac{1}{5}$. Et par la même raiſon, au lieu de $\surd\frac{5}{4}$ ou de $\frac{\surd 5}{\surd 4}$, on écrit $\frac{\surd 5}{2}$, ou bien $\frac{1\surd 5}{2}$, ou enfin ſelon l'uſage le plus ordinaire $\frac{1}{2}\surd 5$.

Pareillement pour marquer la racine cubique de $\frac{3}{5}$, on écrit $\surd C.\frac{3}{5}$, ou bien $\frac{\surd C.3}{\surd C.5}$. Et pour marquer la racine cubique de $\frac{8}{5}$, on écrit $\frac{2}{\surd C.5}$, ou $2\surd C.\frac{1}{5}$ Mais pour marquer la racine cubique de $\frac{5}{8}$, on écrit $\frac{1}{2}\surd C.5$. Il en eſt ainſi des autres.

XIV. S'il arrive que je ſois obligé de marquer le quarré de quelque racine, comme par exemple celui d'une racine cubique, je puis marquer ainſi ce quarré $Q\surd C$. Par ex. au lieu d'écrire le quarré de $\surd C.\overline{\tfrac{1}{2}q + \surd\overline{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}}$, j'écris $Q\surd C.\overline{\tfrac{1}{2}q + \surd\overline{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}}$.

AVERTISSEMENT.

XV. *Il ne faut pas s'imaginer que les ſignes radicaux, ni même que les lignes des Geometres donnent aucune connoiſſance diſtincte des grandeurs qu'elles expriment. Si les puiſſances dont ces grandeurs ſont les racines qu'on y conçoit, ſont imparfaites, on ne les poura jamais exactement connoître, parceque leurs racines ne pouvant eſtre exprimées par nombres, elles ſont incommenſurables; de ſorte qu'aucune partie de ces grandeurs ou de l'unité à qui on les compare, eſtant appliquée une ou pluſieurs fois ſur les unes & ſur les autres, ne peut meſurer chacune d'elles exactement & ſans reſte, comme on l'a démontré au troiſiéme Theoreme 4. S.*

DES OPERATIONS

SUR LES GRANDEURS INCOMMENSURABLES.

XVI. Comme la diviſion des grandeurs entieres, dont l'expoſant n'eſt pas entier, donne des fractions qui ne peuvent eſtre entieres, de même la reſolution des grandeurs commenſurables, dont la racine ne peut eſtre exprimée par nombres, donne les grandeurs incommenſurables.

XVII. Comme auſſi on réduit les fractions à leurs moindres termes, c'eſt à dire à leur expoſant, pour les rendre plus connuës, & pour operer plus facilement ſur elles, on réduit pareillement les grandeurs incommenſurables à des expreſſions plus courtes, pour les rendre en quelque façon plus connuës, & pour operer auſſi plus facilement ſur elles.

On fait cette réduction lorſqu'on tire hors des ſignes radicaux $\surd$, $\surd C.$ ou autres, toutes les racines des quarrez ou des cubes, ou des autres puiſſances qui ſont diviſeurs des grandeurs renfermées ſous les ſignes $\surd$, ou $\surd C.$ &c. On réduit par exemple $\surd 75$ à $5\surd 3$, à cauſe que $5 = \surd 25$, & $75 = 25$ *par* 3; de ſorte que $5\surd 3 = \surd\overline{25\ par\ 3} = \surd 75$. Ces reductions ſe font ainſi.

Troisie'me Probleme.

XVIII. Réduire toute racine incommenſurable des grandeurs entieres à l'expreſſion la plus courte qui en marque la valeur.

Lorſque la grandeur enfermée ſous le ſigne radical eſt entiere & qu'elle a le ſigne $\surd$, ou $\surd C.$ ou quelque autre, on choiſit parmi tous ſes diviſeurs le plus grand quarré, ou cube, ou autre puiſſance déterminée par le ſigne radical. On diviſe la grandeur qui eſt ſous le ſigne par ce quarré, ou par ce cube, &c. & on écrit la racine ſimple du quarré, ou du cube, &c. devant le ſigne radical $\surd$, ou $\surd C$ &c. & l'expoſant nouvellement trouvé aprés ce ſigne. Et l'on a ce qu'on cherche.

Premier Exemple.

Pour réduire $\surd 75$ à ſon expreſſion la plus ſimple, je choiſis 25 le plus grand nombre quarré diviſeur de 75, je diviſe 75 par 25, l'expoſant eſt 3, & j'écris 5 racine du quarré 25 devant $\surd$ ſigne radical de $\surd 75$, & 3 expoſant nouvellement trouvé aprés ce ſigne. Cela me donne $5\surd 3$, & $5\surd 3$ eſt l'expreſſion la plus ſimple qui marque exactement la valeur de $\surd 75$. $\surd 75 = 5\surd 3$

$\surd 27$ ſe réduiroit de même à $3\surd 3$. $\surd 27 = 3\surd 3$

Second Exemple.

Pour réduire $\surd C.81$ à ſon expreſſion la plus ſimple, je choiſis 27 le plus grand cube diviſeur de 81, je diviſe 81 par 27, l'expoſant eſt 3, & j'écris 3 racine cubique du cube 27 devant $\surd C.$ & 3 expoſant nouvellement trouvé aprés ce ſigne. Cela me donne $3\surd C.3$, & $3\surd C.3$ eſt l'expreſſion la plus ſimple qui marque exactement la valeur de $\surd C.81$ $\surd C.81 = 3\surd C.3$

$\surd C.375$ ſe réduiroit de même à $5\surd C.3$. $\surd C.325 = 5\surd C.3$

Troïſiéme Exemple.

Pour réduire $\surd a^3b$ à ſon expreſſion la plus ſimple, je choiſis aa le plus grand quarré diviſeur de a^3b, je diviſe a^3b par aa, & j'écris a racine de aa devant $\surd$, & ab expoſant nouvellement trouvé aprés ce ſigne. Cela me donne $a\surd ab$, & $a\surd ab$ eſt l'expreſſion la plus ſimple qui marque exactement la valeur de $\surd a^3b$. $\surd a^3b = a\surd ab$

$\surd a^5b^3$ ſe réduiroit de même à $aab\surd ab$. $\surd a^5b^3 = aab\surd ab$

Pareillement $\surd C.a^4b$ ſe réduiroit à $a\surd C.ab$. $\surd C.a^4b = a\surd C.ab$

$\surd C.a^5b^3$ ſe réduiroit de même à $ab\surd C.aa$ $\surd C.a^5b^3 = ab\surd C.aa$.

Quatriéme Exemple.

Pour réduire $\surd\overline{a^3b - aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4}$ à ſon expreſſion la plus ſimple, je choiſis $aa + 2ac + cc + 2ab - 2bc + bb$ le plus grand quarré diviſeur de ce qui eſt ſous le ſigne $\surd$, je fais la diviſion à l'ordinaire, & j'écris $a + c - b$ racine du quarré que j'ai pris devant $\surd$, & $ab + bb$ expoſant de la diviſion que j'ai faite aprés ce ſigne. Cela me donne

$\overline{a+c-b}\sqrt{ab+bb}$ pour l'expreſſion la plus ſimple qui marque exactement la valeur de la racine propoſée.

$$\sqrt{a^3b-aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4}=\overline{a+c-b}\sqrt{ab+bb}$$

Cinquiéme Exemple.

Pour réduire $\sqrt{C.\,x^6-9x^5+27x^4-15x^3-108xx+324x-324}$ à ſon expreſſion la plus ſimple, je choiſis $x^3-9xx+27x-27$ le plus grand cube diviſeur de tout ce qui eſt ſous $\sqrt{}C.$ je diviſe tout ce qui eſt ſous ce ſigne par ce cube, l'expoſant eſt x^3+12, & j'écris $x-3$ racine cubique du cube que j'ai pris devant $\sqrt{}C.$ & x^3+12 aprés ce ſigne. Cela me donne $\overline{x-3}\sqrt{C.\,x^3+12}$ pour l'expreſſion la plus ſimple qui marque exactement la valeur de la racine propoſée.

$$\sqrt{C.\,x^6-9x^5+27x-15x^3-108xx+324x-324}=\overline{x-3}\sqrt{C.\,x^3+12}$$

Sixiéme Exemple.

XIX. Mais ſi les grandeurs entieres renfermées ſous les ſignes radicaux $\sqrt{}$ ou $\sqrt{}C.$ n'ont aucun autre quarré ou cube pour diviſeur que l'unité, les racines incommenſurables qu'on propoſe ſont réduites à leurs expreſſions les plus ſimples, *par 16. S.* parcequ'alors on ne peut rien tirer hors des ſignes que l'unité, laquelle on ſous-entend toûjours en eſtre tirée ; car $\sqrt{a}=1\sqrt{a}$, parcequ'on entend toûjours en prenant $\sqrt{a}$ qu'on le prend 1 fois.

Ainſi $\sqrt{35}$ ſera réduite à ſon expreſſion la plus ſimple, parceque 35 n'a point d'autre quarré pour diviſeur que l'unité. De même $\sqrt{C.35}$ ſera réduite à ſon expreſſion la plus ſimple, parceque 35 n'a point d'autre cube pour diviſeur que l'unité Pareillement $\sqrt{ab}$ & $\sqrt{C.\,aab}$ ſont réduites à leurs expreſſions les plus ſimples, parceque ab n'a point d'autre quarré, ni aab d'autre cube pour diviſeur que l'unité.

Démonſtration du Probleme.

Soit propoſée la racine incommenſurable $\sqrt{a}$, qu'il faille réduire à ſon expreſſion la plus ſimple. Soit bb le plus grand quarré diviſeur de la grandeur entiere a, & c l'expoſant de a au quarré bb. 1°. Il faut démontrer que $b\sqrt{c}$ trouvé ſelon les regles du Probleme eſt égal à $\sqrt{a}$. Or cela eſt évident. Car puiſque c eſt l'expoſant de a à bb ; donc $a=bbc$ (*par I. 123*) Or $\sqrt{bb}=b$; donc $b\sqrt{c}=\sqrt{bbc}$, & par conſequent $b\sqrt{c}=\sqrt{a}$.

2°. Mais il reſte encore à démontrer que $\sqrt{a}$ ne peut eſtre réduite à une expreſſion plus ſimple que $b\sqrt{c}$, & cela eſt encore évident. Car ſi bb eſt le plus grand quarré diviſeur de a, aucun quarré ne poura exactement diviſer l'expoſant c. Car ſoit dd un quarré diviſeur de c, & e l'expoſant de c au quarré dd ; donc $dde=c$ (*par I. 123.*) Or $bbc=a$; donc $bbdde=a$. Or $bbdd$ eſt un diviſeur de $bbdde$; il eſt donc auſſi un diviſeur de a. Mais ce diviſeur $bbdd$ eſtant un produit des quarrez bb & dd, doit neceſſairement eſtre un quarré, (*par III. 2.*) & parceque bb & dd ſont chacun entiers, il eſt viſible que le quarré $bbdd$ ſera un plus grand diviſeur de a que le quarré

bb. Or cela eſt contre la ſuppoſition, aucun quarré ne peut donc diviſer l'expoſant e ; & ainſi $\sqrt{e}$ ſera réduite à ſon expreſſion la plus ſimple (*par* 16. *S.*) Donc $\sqrt{bbc}$, ou $\sqrt{a}$ qui lui eſt égale, ne peut eſtre réduite à une expreſſion plus ſimple $b\sqrt{c}$. Les regles du Probleme ont donc preſcrit ce qu'il falloit faire.

QUATRIÉME PROBLEME.

XX. Réduire toute racine incommenſurable des grandeurs rompuës à ſon expreſſion la plus ſimple.

On opere ſur chaque terme de la fraction propoſée comme au Probleme precedent, & l'on trouve l'expreſſion cherchée. Les exemples éclairciront cette regle.

Premier Exemple.

Pour réduire $\sqrt{\frac{27}{20}}$ à ſon expreſſion la plus ſimple. Cette grandeur eſt la même que $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{20}}$ *par* 12. *S.* Je réduis donc par le Probleme precedent $\sqrt{27}$ à $3\sqrt{3}$, & $\sqrt{20}$ à $2\sqrt{5}$, & j'écris $\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$, ou ſelon l'uſage le plus ordinaire, j'écris $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$ pour l'expreſſion la plus ſimple de $\sqrt{\frac{27}{20}}$.

$$\sqrt{\frac{27}{20}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$$

Second Exemple.

Pour réduire $\sqrt{\frac{5}{4}}$ à ſon expreſſion la plus ſimple. $\sqrt{5}$ ne peut s'exprimer plus ſimplement, & $\sqrt{4} = 2$; j'écris donc $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ pour l'expreſſion la plus ſimple que je cherche.

$$\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Mais pour réduire $\sqrt{\frac{4}{5}}$ à ſon expreſſion la plus ſimple, j'écris $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ou bien $2\sqrt{\frac{1}{5}}$.

$$\sqrt{\frac{4}{5}} = 2\sqrt{\frac{1}{5}}$$

De même $\sqrt{\frac{48}{10}a^3b}$ ſe réduit à $4a\sqrt{\frac{3}{10}ab}$. $\sqrt{\frac{2aa}{5bc}}$ ſe réduit à $a\sqrt{\frac{2}{5bc}}$.

On réduiroit pareillement $\sqrt{\mathrm{C}.\frac{81}{4}a^3b}$ à $3\sqrt{\mathrm{C}.\frac{3}{4}ab}$, & $\sqrt{\mathrm{C}.\frac{8ab^3}{85ccdd}}$ à $2b\sqrt{\frac{a}{85ccdd}}$. Et ainſi des autres.

Troiſiéme Exemple.

Pour réduire $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$, ou donnant à chaque partie le même ſecond terme $ppzz$, pour réduire $\sqrt{\frac{aaoomm + 4aam^3p}{ppzz}}$ à ſon expreſſion la plus ſimple, $\sqrt{aaoomm + 4aam^3p}$ ſe réduit à $am\sqrt{oo + 4mp}$, & $\sqrt{ppzz}$ ſe réduit à pz. Ecrivant donc $\frac{am}{pz}\sqrt{oo + 4mp}$, j'ai l'expreſſion la plus ſimple que je cherche.

$$\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}} = \frac{am}{pz}\sqrt{oo + 4mp}$$

On trouvera pareillement que $\sqrt{\frac{oozz + 4mpzz}{aa}} = \frac{z}{a}\sqrt{oo + 4mp}$. Il en eſt ainſi des autres.

Dém.

Démonſtration du Probleme.

Soit $\surd\frac{a}{b}$ une racine incommenſurable qu'il faille réduire à ſon expreſſion la plus ſimple. Soit *cc* le plus grand quarré diviſeur de *a*, & *d* l'expoſant de *a* au quarré *bb*, & ſoit pareillement *ee* le plus grand quarré diviſeur de *b*, & *f* l'expoſant de *b* au quarré *ee*; je dis que $\frac{c}{e}\surd\frac{d}{f}$ trouvée en operant ſelon le Probleme, eſt l'expreſſion la plus ſimple de $\surd\frac{a}{b}$. Car puiſque *d* eſt l'expoſant de *a* au quarré *cc*, & *f* l'expoſant de *b* au quarré *ee*; donc $a = ccd$, & $b = eef$ (*par I.* 123.) Donc $\surd\frac{a}{b} = \surd\frac{ccd}{eef}$. Or $\frac{c}{e}\surd\frac{d}{f}$ eſt l'expreſſion la plus ſimple de $\surd\frac{ccd}{eef}$, parceque *d* & *f* n'ont aucun quarré pour diviſeur, comme il eſt évident par la ſeconde partie de la démonſtration du troiſiéme Probleme. Donc $\frac{c}{e}\surd\frac{d}{f}$ eſt l'expreſſion la plus ſimple $\surd\frac{a}{b}$. On a donc fait ce qu'il falloit faire.

AVERTISSEMENT.

Mais pour avoir une preuve ſenſible qu'on a bien fait l'operation, on remarquera qu'il faut ſeulement multiplier le quarré ou le cube de ce qu'on a tiré hors du ſigne $\surd$ *ou* $\surd$ *C. par la grandeur qui reſte enfermée ſous ce ſigne. Car ſi le produit eſt égal à la grandeur qui eſtoit ſous le ſigne avant qu'on operaſt, c'eſt une marque qu'on a bien fait l'operation, mais ſi le produit n'eſt pas égal à cette grandeur, on a mal fait l'operation, il la faut recommencer.*

DE LA REDUCTION DES GRANDEURS INCOMMENSURABLES SOUS UN MÊME SIGNE.

Comme pour operer ſur les fractions on donne à chacune un même ſecond
terme ſans changer leur valeur, de même pour operer ſur les grandeurs in- XXI.
commenſurables on leur donne a chacune un même ſigne radical ſans changer
auſſi leur valeur. Ces changemens des ſignes radicaux ſe font en cette ſorte.

CINQUIEME PROBLEME.

Réduire deux grandeurs incommenſurables ſous un même ſigne ſans changer leur valeur. XXII.

Si l'expoſant du nombre de la grande racine à la petite eſt entier, on éleve la petite au nombre de la grande; & ſi cet expoſant n'eſt pas entier, on éleve chacune au nombre que donne le produit du nombre de la grande par le nombre de la petite. Et l'on a ce qu'on cherche. Les exemples ſuivans éclairciront cette regle.

Premier Exemple.

Pour réduire ſous un même ſigne $\surd 3$ & $\surd\surd$ C.15. L'expoſant de 6 nombre de $\surd\surd$ C.15 à 2 nombre de $\surd 3$ eſt le nombre entier 3, j'éleve donc $\surd 3$ à $\surd\surd$ C. en multipliant 3 enfermé ſous $\surd$, cubiquement, à cauſe que

2 nombre de $\surd$ eſt 3 fois dans 6 nombre de $\surd\surd C$. Et j'ai alors ſous un même ſigne $\surd\surd C.27 = \surd 3$, & $\surd\surd C.15$ où je n'ai rien changé.

Second Exemple.

Pour réduire ſous un même ſigne $4\surd 3$ & $5\surd C.2$. $\frac{3}{2}$ expoſant de 3 nombre de $\surd C$. à 2 nombre de $\surd$ n'eſt pas entier, & 6 eſt le produit de 3 par 2, j'éleve donc $\surd 3$ & $\surd C.2$ à $\surd C\surd$, en multipliant cubiquement 3 écrit aprés $\surd$, & quarrément 2 écrit aprés $\surd C\surd$, à cauſe que 2 nombre de $\surd$ eſt 3 fois dans 6 nombre de $\surd C$. & que 3 nombre de $\surd C$. eſt 2 fois dans le même nombre 6. Et j'ai alors ſous un même ſigne $4\surd C\surd 27 = 4\surd 3$, & $5\surd C\surd 4 = 5\surd C.2$.

Troiſiéme Exemple.

Pour réduire ſous un même ſigne $\surd 5ab$ & $\surd\surd \overline{a^3b + ab^3}$. L'expoſant de 4 nombre de $\surd\surd$ à 2 nombre de $\surd$ eſt le nombre entier 2. J'éleve donc $\surd 5ab$ à $\surd\surd$, en multipliant $5ab$ quarrément. Et j'ai alors ſous un même ſigne $\surd\surd 25aabb = \surd 5ab$, & $\surd\surd \overline{a^3b + ab^3}$, où je n'ai rien changé.

Quatriéme Exemple.

Pour réduire ſous un même ſigne $\surd aq$ & $\surd C.aaq$. $\frac{3}{2}$ expoſant de 3 à 2 n'eſt pas entier, & 6 eſt le produit de 3 par 2. J'éleve donc $\surd aq$ & $\surd C.aaq$ à $\surd C\surd$, en multipliant aq cubiquement, & aaq quarrément, à cauſe que 2 nombre de $\surd$ eſt 3 fois dans 6 nombre de $\surd C\surd$, & que 3 nombre de $\surd C$. eſt 2 fois dans le même nombre 6. J'ai donc ſous un même ſigne $\surd C\surd a^3q^3 = \surd aq$, & $\surd C\surd a^4qq = \surd C.aaq$.

Démonſtration du Probleme.

Elle n'eſt pas moins ſenſible qu'elle paroiſt évidente. Car l'on voit aſſez qu'il eſt égal d'écrire $\surd aa$, ou $\surd\surd a^4$, ou $\surd C\surd a^6$, &c. puiſque chacune de ces grandeurs eſt égale à a. Cela eſt ſi clair qu'on pouroit en faire un axiome.

SIXIÉME PROBLÉME.

XXIII. Réduire entierement les grandeurs incommenſurables ſous leurs ſignes.

1°. On éleve ce qui eſt hors du ſigne, au degré qui eſt marqué par le nombre de ce ſigne.

2°. On multiplie la puiſſance trouvée par ce qui reſte ſous le ſigne.

3°. On écrit le nouveau produit ſous le ſigne, & l'on a ce qu'on cherche.

Premier Exemple.

Par exemple, pour réduire entierement $5\surd 3$ ſous ſon ſigne $\surd$, je multiplie 5 quarrément, à cauſe que le nombre du ſigne $\surd$ eſt 2, le produit eſt 25. 2°. Je multiplie 25 par 3 qui eſt ſous le ſigne $\surd$. 3°. J'écris le nouveau produit 75 ſous $\surd$; & je connois que $\surd 75$ eſt la même choſe que $5\surd 3$ réduite entierement ſous le ſigne $\surd$. $5\surd 3 = \surd 75$.

Second Exemple.

Pour réduire toute la grandeur $6\surd C.3$ ſous ſon ſigne $\surd C$. je multiplie 6 cubiquement, & le produit 216 par 3, enſuite j'écris le nouveau produit 648 ſous le ſigne $\surd C$. & je connois que $\surd C.648$ eſt la même choſe que $6\surd C.3$ réduite entierement ſous $\surd C$. $6\surd C.3 = \surd C.648$.

Il en eſt ainſi des autres, & la démonſtration du Probleme n'eſt que l'inverſe de celles du troiſiéme & du quatriéme Probleme.

COROLLAIRE.

XXIV. Cette methode de réduire entierement les grandeurs incommenſurables ſous leurs ſignes, nous fournit un moyen pour reconnoître entre pluſieurs de ces grandeurs, quelles ſont les plus grandes ou les plus petites; car ces grandeurs eſtant réduites entierement ſous un même ſigne par le cinquiéme Probleme & par celui que je viens d'expoſer, on connoît facilement quelles ſont les plus grandes.

Si par exemple on propoſe les deux grandeurs $5\sqrt{3}$ & $6\sqrt{C.3}$, & qu'on veüille ſçavoir laquelle des deux eſt la plus grande, on les réduit premierement ſous un même ſigne par le cinquiéme Probleme, & l'on a les deux expreſſions $5\sqrt{6^e.27}$ & $6\sqrt{6^e.9}$, leſquelles eſtant réduites entierement ſous leur ſigne par le Probleme qui precede, on trouve $\sqrt{6^e.421875}$ & $\sqrt{6^e.419904}$. Et alors voyant que $\sqrt{6^e.421875}$ eſt plus grande que $\sqrt{6^e.419904}$, on connoît auſſi que la grandeur $5\sqrt{3} = \sqrt{6^e.421875}$ eſt plus grande que $6\sqrt{C.3} = \sqrt{6^e\ 419904}$. Il en eſt ainſi des autres.

AVERTISSEMENT.

XXV. *Si les grandeurs qu'on veut réduire ſous les ſignes ſont tout-à-fait commenſurables, on les éleve au degré marqué par le nombre des ſignes ſous leſquels on les veut réduire, & l'on écrit les puiſſances qu'on trouve ſous ces ſignes. Par exemple, pour réduire 5 ſous le ſigne* $\sqrt{}$*, je quarre 5, & j'écris le quarré 25 ſous* $\sqrt{}$ *en cette ſorte* $\sqrt{25}$. *Et pour réduire 5 ſous le ſigne* $\sqrt{C.}$ *je cube 5, & j'écris le cube 125 ſous* $\sqrt{C.}$ *en cette ſorte* $\sqrt{C.125}$. *Il en eſt ainſi des autres.*

DES RAPPORTS QUE LES GRANDEURS INCOMMENSURABLES ONT ENTR'ELLES.

On ſçait que les grandeurs incommenſurables n'ont aucun rapport de nombre à nombre avec les grandeurs commenſurables. Mais il arrive ſouvent que ces grandeurs incommenſurables ſont commenſurables entr'elles.

QUATRIÉME THEOREME.

XXVI. Car ſi des racines incommenſurables ont chacune une même grandeur renfermée ſous un même ſigne, elles ſeront commenſurables entr'elles.

Démonſtration. Soient les racines incommenſurables $5\sqrt{3}$ & $3\sqrt{3}$ qui ayent chacune le même nombre 3 renfermé ſous le même ſigne $\sqrt{}$; je dis que $5\sqrt{3}$ & $3\sqrt{3}$ ſont commenſurables entr'elles. Car le rapport de l'une à l'autre, c'eſt à dire $\frac{5\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$ eſt la même choſe que $\frac{5}{3}$, dont chaque terme eſt également multiplié par $\sqrt{3}$. Et ainſi $\frac{5\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{5}{3}$, ou ce qui eſt la même choſe, le rapport de $5\sqrt{3}$ à $3\sqrt{3}$ eſt égal au rapport de 5 à 3. Or le rapport de 5 à 3 eſt un rapport de nombre à nombre, puiſque 5 & 3 ſont chacun un nombre; $5\sqrt{3}$ & $3\sqrt{3}$ ont donc auſſi un rapport de nombre. Elles ſont donc commenſurables entr'elles. Ce qu'il falloit démontrer.

Cinquiéme Theoreme.

XXVII. Si des racines incommenſurables réduites à leurs expreſſions les plus ſimples, n'ont pas chacune une même grandeur renfermée ſous un même ſigne, elles ſont incommenſurables entr'elles.

Démonſtration. Soient les racines incommenſurables $a\sqrt{b}$ & $c\sqrt{d}$, leſquelles eſtant réduites à leurs expreſſions les plus ſimples, ne peuvent avoir une même grandeur renfermée ſous le même ſigne $\sqrt{}$, ces grandeurs $a\sqrt{b}$ & $c\sqrt{d}$ ſont incommenſurables entr'elles, *par 6. S.* Car il eſt certain par la démonſtration du quatriéme Probleme que leur rapport $\frac{a\sqrt{b}}{c\sqrt{d}}$ ou $\frac{a}{c}\sqrt{\frac{c}{d}}$ ne peut eſtre exprimé par nombres.

Septiéme Probleme.

XXVIII. Reconnoître ſi les racines incommenſurables des grandeurs entieres, ſont commenſurables entr'elles.

On les réduit chacune par le troiſiéme Probleme aux expreſſions les plus ſimples qui marquent leur valeur, & on leur donne par le cinquiéme un même ſigne, ſi le leur eſt different. Si alors il reſte dans chacune une même grandeur ſous le ſigne radical, elles ſont commenſurables entr'elles, & le rapport en peut eſtre connu. Mais s'il ne reſte pas dans chacune une même grandeur ſous le ſigne, elles ſont incommenſurables entr'elles, & leur rapport ne peut eſtre connu.

Premier Exemple.

Pour connoître ſi les racines incommenſurables $\sqrt{75}$ & $\sqrt{27}$ ſont commenſurables entr'elles. Ces racines réduites à leurs expreſſions les plus ſimples ſont $5\sqrt{3}$ & $3\sqrt{3}$. Or chacune a le même nombre 3 ſous le ſigne $\sqrt{}$, elles ſont donc commenſurables entr'elles, *par 26. S.* & leur rapport eſt celui de 5 à 3, c'eſt à dire $\frac{5}{3}$.

De même le rapport des racines cubiques $\sqrt{C.81}$ & $\sqrt{C.375}$, eſt celui de 3 à 5, ou $\frac{3}{5}$.

Second Exemple.

Pour connoître ſi $\sqrt{a^3b}$ & $\sqrt{ab^3}$ ſont commenſurables entr'elles. Ces racines réduites à leurs expreſſions les plus ſimples, ſont $a\sqrt{ab}$ & $b\sqrt{ab}$. Elles ſont donc commenſurables entr'elles, & leur rapport eſt celui de a à b, c'eſt à dire $\frac{a}{b}$.

De même le rapport de $\sqrt{C.81a^4c}$ & $\sqrt{C.24ab^3c}$, eſt celui de $3a$ à $2b$, ou $\frac{3a}{2b}$.

Troiſiéme Exemple.

De même pour connoître ſi les deux grandeurs $\sqrt{a^3b+aabb}$ & $\sqrt{a^3b-aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4}$ ſont commenſurables entr'elles. Ces racines réduites à leurs expreſſions les plus ſimples, ſont

$a\sqrt{ab+bb}$, & $\overline{a+c-b}\sqrt{ab+bb}$; de ſorte qu'elles ſont commenſurables, & leur rapport eſt celui de a à $a+c-b$, ou $\frac{a}{a+c-b}$.

Pareillement $\sqrt{\text{C}.\,x^6-9x^5+27x^4-15x^3-108xx+324x-324}$ & $\sqrt{\text{C}.\,3x^3+36}$, ont pour leur rapport celui de $x-3$ à 3, ou $\frac{x-3}{3}$. Il en eſt ainſi des autres.

Lorſque j'appelle a, b, c, x, &c. des grandeurs commenſurables, je l'entends ſeulement par ſuppoſition, c'eſt à dire, quoique ces lettres puiſſent également marquer toute ſorte de grandeurs commenſurables ou incommenſurables, neanmoins je les conſidere alors ſeulement comme les expreſſions de telles grandeurs que l'on voudra choiſir, pourveu que ces grandeurs ſoient commenſurables.

Quatriéme Exemple.

Mais pour connoître ſi les racines incommenſurables $\sqrt{12}$ & $\sqrt{45}$ ſont commenſurables entr'elles. Ces racines réduites à leurs expreſſions les plus ſimples ſont $2\sqrt{3}$ & $3\sqrt{5}$, & parceque 3 & 5 enfermez ſous les ſignes $\sqrt{\ }$, ſont differents entr'eux, les racines $2\sqrt{3}$ & $3\sqrt{5}$, ou $\sqrt{12}$ & $\sqrt{45}$ qui leur ſont égales, ne ſont point commenſurables entr'elles, par le cinquiéme Theoreme, à cauſe que $\sqrt{3}$ n'eſt point égal à $\sqrt{5}$.

Démonſtration du Probleme.

La premiere partie du Probleme ſuit neceſſairement du quatriéme Theoreme, & la ſeconde ſuit pareillement du cinquiéme Theoreme.

HUITIE'ME PROBLEME.

Reconnoître ſi les racines incommenſurables des fractions ſont commen- XXIX.
ſurables entr'elles.

On les réduit, comme au Probleme precedent, à leurs expreſſions les plus ſimples, & ſous un même ſigne. Si alors il reſte une même grandeur ſous chaque ſigne, elles ſont commenſurables entr'elles. Mais s'il ne reſte pas une même grandeur ſous chaque ſigne, on donne aux fractions reſtées ſous les ſignes un même ſecond terme, ſi le leur eſt different, & on les réduit de nouveau à leurs expreſſions les plus ſimples. Si alors il reſte une même grandeur ſous chaque ſigne, elles ſont commenſurables entr'elles; ſinon, elles ſont incommenſurables entr'elles. Les exemples éclairciront cette regle.

Premier Exemple.

Pour connoître ſi $\sqrt{\frac{48}{10}}$ & $\sqrt{\frac{27}{40}}$ ſont commenſurables entr'elles. Ces racines eſtant réduites à leurs expreſſions les plus ſimples, ſont $4\sqrt{\frac{3}{10}}$ & $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{10}}$, & parceque $\frac{3}{10}$ reſte ſous chaque ſigne $\sqrt{\ }$, elles ſont commenſurables entr'elles, & leur rapport eſt celui de 4 à $\frac{3}{2}$ ou $\frac{8}{3}$.

De même $\sqrt{\frac{27aa}{4bc}}$ & $\sqrt{\frac{12bb}{25bc}}$ ſont commenſurables entr'elles, parcequ'elles ſe réduiſent à $\frac{3}{2}a\sqrt{\frac{3}{bc}}$ & $\frac{2}{5}b\sqrt{\frac{3}{bc}}$.

Pareillement $\sqrt{\text{C}.\,\frac{24}{54}}$ & $\sqrt{\text{C}.\,\frac{192}{16}}$ ſont commenſurables entr'elles, parcequ'elles ſe réduiſent à $\frac{2}{3}\sqrt{C.\frac{1}{2}}$ & $2\sqrt{C.\frac{3}{2}}$.

Second Exemple.

Pour connoître ſi $\sqrt{\frac{48}{10}}$ & $\sqrt{\frac{54}{5}}$ ſont commenſurables entr'elles. Ces racines ſe réduiſent à $4\sqrt{\frac{3}{10}}$ & $3\sqrt{\frac{6}{5}}$. Mais parceque les fractions $\frac{3}{10}$ & $\frac{6}{5}$ qui reſtent ſous les ſignes $\sqrt{}$ ne ſont point égales, je donne à chacune un même ſecond terme, & j'ai $3\sqrt{\frac{12}{10}} = 3\sqrt{\frac{6}{5}}$. Réduiſant donc $3\sqrt{\frac{12}{10}}$ à ſon expreſſion la plus ſimple, je trouve $6\sqrt{\frac{3}{10}}$ qui lui eſt égale, & qui a ſous le ſigne $\sqrt{}$ la même fraction qui eſt reſtée ſous ce ſigne dans $4\sqrt{\frac{3}{10}}$, d'où je connois que $4\sqrt{\frac{3}{10}}$ & $6\sqrt{\frac{3}{10}}$, ou bien $\sqrt{\frac{48}{10}}$ & $\sqrt{\frac{54}{5}}$ qui leur ſont égales, ſont commenſurables entr'elles, & leur rapport eſt celui de 4 à 6 ou $\frac{2}{3}$.

Troiſiéme Exemple.

Pour connoître ſi $\sqrt{\frac{10}{48}}$ & $\sqrt{\frac{5}{54}}$ ſont commenſurables entr'elles. Ces racines réduites à leurs expreſſions les plus ſimples ſont $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{10}{3}}$ & $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}$. Voyant donc que les fractions reſtées ſous les ſignes ſont inégales entr'elles, je donne à chacune un même ſecond terme, & j'ai au lieu de $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{10}{3}}$ & $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}$, les deux autres $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{60}{18}}$ & $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{15}{18}}$ qui leur ſont égales. Réduiſant donc ces racines à leurs expreſſions les plus ſimples, je trouve $\frac{1}{6}\sqrt{\frac{15}{2}}$ & $\frac{1}{9}\sqrt{\frac{15}{2}}$ qui leur ſont égales, & qui ont chacune la même fraction ſous le ſigne $\sqrt{}$, d'où je connois que les racines propoſées ſont commenſurables entr'elles, & leur rapport eſt celui de $\frac{1}{6}$ à $\frac{1}{9}$ ou $\frac{3}{2}$.

Quatriéme Exemple.

Pour connoître ſi $\sqrt{\frac{oozz+4mpzz}{aa}}$ & $\sqrt{\frac{aaoomm+4aam3p}{ppzz}}$ ſont commenſurables entr'elles. Ces grandeurs réduites à leurs expreſſions les plus ſimples, ſont $\frac{z}{a}\sqrt{oo+4mp}$ & $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$, & parceque la même grandeur $oo+4mp$ reſte ſous chaque ſigne $\sqrt{}$, elles ſont commenſurables entr'elles, & leur rapport eſt celui qui eſt entre $\frac{z}{a}$ & $\frac{am}{pz}$, c'eſt à dire $\frac{pzz}{aam}$. Il en eſt ainſi des autres.

Démonſtration du Probleme.

Elle eſt la même que celle du Probleme precedent. Car lorſque les grandeurs reſtées ſous les ſignes ſont égales, leur rapport peut eſtre exprimé par nombres, *par 26. S.* & ainſi elles ſont commenſurables entr'elles. Mais lorſque les grandeurs reſtées ſous les ſignes ſont inégales, & ne peuvent eſtre renduës égales par de nouvelles réductions, leur rapport ne peut pas eſtre exprimé par nombres, *par 27. S.* & ainſi elles ſont incommenſurables entr'elles. Or ſi ſelon les regles du Probleme, on donne aux grandeurs qui reſtent ſous les ſignes un même ſecond terme, & que le premier de chacune eſtant réduite à ſon expreſſion la plus ſimple, il reſte encore ſous les ſignes des grandeurs inégales, on ne peut les égaler par des réductions nouvelles ſans changer leur valeur. Car leurs premiers termes eſtant réduits à leurs expreſſions les plus ſimples, on n'en peut rien tirer davantage hors des ſignes, & leurs ſeconds termes eſtant égaux, ainſi qu'on le ſuppoſe, on ne peut rien tirer de l'un hors du ſigne, qu'on ne puiſſe tirer pareillement de l'autre. De ſorte que ces grandeurs ne peuvent eſtre renduës égales par des réductions nouvelles.

COROLLAIRE.

XXX. Une même racine incommenſurable peut recevoir differentes expreſſions ſans changer ſa valeur. Par exemple $\surd\frac{6}{5}$ eſt réduite à ſon expreſſion la plus ſimple, parcequ'aucun quarré ne la multiplie, cependant ſi je multiplie chaque terme 6 & 5 renfermez ſous $\surd$ par le nombre 2, ou 3, ou 5, ou 6, qui ſont diviſeurs de l'un des deux termes 5 & 6, j'aurai $\surd\frac{12}{10}$, ou $\surd\frac{18}{15}$, ou $\surd\frac{30}{25}$, ou $\surd\frac{36}{30}$ qui ſeront chacune égale à $\surd\frac{6}{5}$, & qu'on poura réduire aux nouvelles expreſſions $2\surd\frac{3}{10}$, $3\surd\frac{2}{15}$, $\frac{1}{5}\surd 30$, & $6\surd\frac{1}{30}$. Il en eſt ainſi des autres. Cependant j'attribuë également le nom de *ſimple*, à chacune de ces expreſſions differentes de la même racine, parcequ'on ne trouve dans chacune aucun nombre quarré qui puiſſe diviſer ſans reſte l'un ou l'autre des termes qui ſont renfermez ſous le ſigne $\surd$.

Or la raiſon pourquoi ces ſortes de multiplications eſtant faites, on peut tirer quelque grandeur hors du ſigne radical, c'eſt que toute grandeur multipliée par quelqu'un de ſes diviſeurs, donne un produit dont un quarré eſt diviſeur, de ſorte que dans les multiplications ſemblables à celles dont on vient de parler, la racine de ce quarré poura ſe tirer hors du ſigne $\surd$. Soit par exemple abc telle grandeur qu'on voudra qui aura pour diviſeurs a, b, c, ab, ac, bc, & abc. Si on multiplie abc par quelqu'un de ces diviſeurs comme a, ou b, ou c, il eſt viſible que le produit $aabc$, ou $abbc$, ou $abcc$, aura le quarré aa, ou bb, ou cc pour diviſeur.

PREPARATION DES RACINES INCOMMENSURABLES

POUR FAIRE LES QUATRE PREMIERES OPERATIONS SUR ELLES.

XXXI. C'eſt une regle generale pour chacune des quatre premieres operations qui ſuivent ſur les racines incommenſurables, qu'elles ſoient toûjours réduites à leurs expreſſions les plus ſimples par le troiſiéme ou quatriéme Probleme. Qu'on réduiſe toûjours chacune ſous un même ſigne par le cinquiéme. Et qu'on reconnoiſſe par le ſeptiéme ou huitiéme, ſi ces racines ſont commenſurables entr'elles.

NEUVIE'ME PROBLEME.

Ajoûter ou retrancher les racines incommenſurables.

XXXII. Si elles ſont commenſurables entr'elles, on écrit devant le ſigne radical qu'elles ont, la ſomme ou la difference de ce qui eſt écrit avant chaque ſigne, & on laiſſe ſous le ſigne radical ce qu'on y trouve.

Mais ſi les racines ſont incommenſurables entr'elles, on ſe contente de les écrire ſimplement avec les ſignes $+$ ou $-$. Les exemples ſuivans éclairciront ces regles.

Premier Exemple.

Pour trouver la ſomme de $5\sqrt{3}$ & $3\sqrt{3}$, ces racines ſont commenſurables entr'elles, & la ſomme de 5 & de 3 écrits avant les ſignes $\sqrt{\ }$ eſt 8, j'écris donc $8\sqrt{3}$ pour la ſomme cherchée.

Pareillement la ſomme de $\frac{3}{4}\sqrt{C.5}$ & de $\frac{1}{6}\sqrt{C.5}$ eſt $\frac{11}{12}\sqrt{C.5}$.

Second Exemple.

Pour trouver la ſomme de $\frac{z}{a}\sqrt{oo+4mp}$ & $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$. Ces racines ſont commenſurables, & la ſomme de $\frac{z}{a}$ & de $\frac{am}{pz}$ eſt $\frac{pzz+aam}{apz}$, j'écris donc $\frac{pzz+aam}{pzz}\sqrt{oo+4mp}$ pour la ſomme cherchée.

Troiſiéme Exemple.

Pour retrancher $3\sqrt{3}$ de $5\sqrt{3}$, la difference de 5 à 3 eſt 2, & j'écris $2\sqrt{3}$ pour la difference cherchée.

Pareillement la difference de $\frac{3}{4}\sqrt{C.5}$ & de $\frac{1}{6}\sqrt{C.5}$ eſt $\frac{7}{12}\sqrt{C.5}$.

Quatriéme Exemple.

Pour retrancher $\frac{z}{a}\sqrt{oo+4mp}$ de $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$. $\frac{am}{pz}-\frac{z}{a}=\frac{aam-pzz}{apz}$, & j'écris $\frac{aam-pzz}{apz}\sqrt{oo+4mp}$ pour la difference cherchée.

Cinquiéme Exemple.

Mais pour trouver la ſomme de $\sqrt{21}$ & de $\sqrt{15}$. Ces racines ſont incommenſurables, car aucun quarré ne peut diviſer exactement 21 ni 15, ni faire qu'il reſte un même nombre ſous le ſigne $\sqrt{\ }$. Je me contente donc d'ajoûter ces racines en écrivant ſimplement $\sqrt{21}+\sqrt{15}$ pour leur ſomme.

Et ſi j'avois à retrancher $\sqrt{15}$ de $\sqrt{21}$, j'écrirois pour reſte $\sqrt{21}-\sqrt{15}$.

De même pour ajoûter $2+\sqrt{5}$ à $\sqrt{5}$, j'écris $2+2\sqrt{5}$.

Et pour retrancher 2 de $\sqrt{5}$, j'écris $\sqrt{5}-2$.

C'eſt de ces dernieres ſortes d'additions ou de ſouſtractions que naiſſent certaines grandeurs qu'on appelle *binomes*, & *multinomes incommenſurables.*

Démonſtration du Probleme.

Soient les racines incommenſurables $3\sqrt{3}$ & $5\sqrt{3}$ à ajoûter en une ſomme, il eſt clair que $8\sqrt{3}$ trouvée en ſuivant le Probleme, eſt la ſomme cherchée. Car ſoit faite $\sqrt{3}=a$. Donc $3\sqrt{3}=3a$, & $5\sqrt{3}=5a$. Or $3a+5a=8a$. Donc $3\sqrt{3}+5\sqrt{3}=8\sqrt{3}$.

On prouvera en même ſorte que $5\sqrt{3}-3\sqrt{3}=2\sqrt{3}$. On a donc fait ce qu'il falloit faire.

AUTRE MANIERE D'AJOUTER OU SOUSTRAIRE LES RACINES INCOMMENSURABLES QUI N'ONT QUE LE SIGNE $\sqrt{\ }$.

Outre la methode generale d'ajoûter ou ſouſtraire toute ſorte de racines incommenſurables

incommenſurables par le Probleme precedent ; lorſque les racines qu'on propoſe n'ont que le ſigne radical $\sqrt{}$, on peut encore les ajoûter ou ſouſtraire par les regles qui ſuivent.

REGLE POUR L'ADDITION. XXXII.

On ajoûte en une ſomme les deux grandeurs qui ſont ſous les ſignes $\sqrt{}$, plus 2 fois la racine du produit de ces deux grandeurs. Et la racine de la ſomme totale réduite à ſon expreſſion la plus ſimple, eſt la ſomme qu'on cherche.

Premier Exemple.

Pour ajoûter en une ſomme $\sqrt{75}$ & $\sqrt{48}$, j'ajoûte en une ſomme 75 & 48 qui ſont ſous les ſignes $\sqrt{}$, & j'ai 123 à qui j'ajoûte encore 120, c'eſt à dire 2 fois 60 racine de 3600 produit de 75 par 48. La ſomme totale eſt 243, & $\sqrt{243}$ réduite à $9\sqrt{3}$, eſt la ſomme de $\sqrt{75}$ & de $\sqrt{48}$.

$$\begin{array}{rr} & 75 \\ \textit{par} & \underline{48} \\ \textit{produit} & 3600 \\ \textit{ſa racine} & 60 \\ \textit{par} & \underline{2} \\ & 120 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 75 \\ & \underline{+48} \\ \textit{ſomme} & 123 \\ & +120 \end{array}$$

$$\sqrt{245} = 9\sqrt{3} \text{ ſomme cherchée.}$$

Second Exemple.

Pour ajoûter $\sqrt{a^3 + aab}$ & $\sqrt{abb + b^3}$, j'ajoûte en une ſomme $a^3 + aab$ & $abb + b^3$, plus $2aab + 2abb$, c'eſt à dire 2 fois $aab + abb$ la racine de $a^4bb + 2a^3b^3 + aab^4$ produit de $a^3 + aab$ par $abb + b^3$, & j'ai la ſomme totale $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, dont la racine quarrée réduite à $\overline{a+b}\sqrt{a+b}$, eſt la ſomme cherchée.

$$\begin{array}{rl} & a^3 + aab \\ \text{par} & \underline{abb + b^3} \\ \text{produit} & a^4bb + 2a^3b^3 + aab^4 \\ \text{ſa racine} & aab + abb \\ \text{par} & \underline{2} \\ & 2aab + 2abb \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & a^3 + aab \\ & \underline{+ abb + b^3} \\ \text{ſomme} & a^3 + aab + abb + b^3 \\ & + 2aab + 2abb \end{array}$$

$$\sqrt{a^3 + 3aab + 3abb + b^3} = \overline{a+b}\sqrt{a+b} \text{ ſomme cherchée.}$$

Troiſiéme Exemple.

Pour ajoûter $\sqrt{8}$ & $\sqrt{10}$, j'ajoûte en une ſomme 8 & 10, & j'ai 18 à qui j'ajoûte encore $8\sqrt{5}$, c'eſt à dire 2 fois $\sqrt{80}$ la racine de 80 produit de 8 par 10, la ſomme totale eſt $18 + 8\sqrt{5}$, & $\sqrt{18 + 8\sqrt{5}}$ eſt la ſomme cherchée. Mais les grandeurs $\sqrt{8}$ & $\sqrt{10}$ ſont incommenſurables entr'elles, à cauſe que le ſigne $\sqrt{}$ ſe trouve neceſſairement avant $18 + 8\sqrt{5}$ & devant 5. En pareilles rencontres j'aimerois mieux écrire $\sqrt{8} + \sqrt{10}$ que $\sqrt{18 + 8\sqrt{5}}$, parceque celle-là me ſemble exprimée plus ſimplement que celle-ci.

$$\begin{array}{r} 8 \\ \text{par } 10 \\ \hline \textit{produit } 80 \\ \textit{ſa racine } 4\sqrt{5} \\ \text{par } 2 \\ \hline 8\sqrt{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ + 10 \\ \hline \textit{ſomme } 18 \\ + 8\sqrt{5} \end{array}$$

$\sqrt{18 + 8\sqrt{5}}$ *ou plûtoſt* $\sqrt{8} + \sqrt{10}$ *ſomme cherchée.*

XXXIII. REGLE POUR LA SOUSTRACTION.

On ajoûte en une ſomme les deux grandeurs qui ſont ſous les ſignes $\sqrt{}$, & l'on retranche de cette ſomme 2 fois la racine du produit de ces deux grandeurs. Et la racine de ce qui reſte eſt la difference ou le reſte qu'on cherche.

Premier Exemple.

Pour retrancher $\sqrt{48}$ de $\sqrt{75}$, j'ajoûte en une ſomme 75 & 48, & j'ai 123 dont je retranche 120, c'eſt à dire 2 fois 60 la racine de 3600 produit de 75 par 48. Il reſte 3; & $\sqrt{3}$ eſt la difference ou le reſte qu'on cherche.

$$\begin{array}{r} 75 \\ \text{par } 48 \\ \hline \textit{produit } 3600 \\ \textit{ſa racine } 60 \\ \text{par } 2 \\ \hline 120 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 75 \\ + 48 \\ \hline \textit{ſomme } 123 \\ - 120 \\ \hline \end{array}$$

$\sqrt{3}$ *difference cherchée.*

Second Exemple.

On trouvera pareillement que $\sqrt{abb + b^3}$ retranchée de $\sqrt{a^3 + aab}$ laiſſe le reſte ou la difference $a - b\sqrt{a + b}$.

$$\begin{array}{r} a^3 + aab \\ \text{par } abb + b^3 \\ \hline \text{produit } a^4bb + 2a^3b^3 + aab^4 \\ \text{ſa racine } aab + abb \\ \text{par } 2 \\ \hline 2aab + 2abb \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^3 + aab \\ + abb + b^3 \\ \hline \text{ſomme } a^3 + aab + abb + b^3 \\ - 2aab - 2abb \end{array}$$

$\sqrt{a^3 - aab - abb + b^3} = a - b\sqrt{a + b}$ difference cherchée.

Troiſiéme Exemple.

Mais on trouveroit que la difference de $\sqrt{10}$ à $\sqrt{8}$ eſt $\sqrt{18 - 8\sqrt{5}}$, ou pour l'exprimer plus ſimplement, $\sqrt{10} - \sqrt{8}$.

10
par 8
produit 80
ſa racine $4\sqrt{5}$
par 2
$8\sqrt{5}$

10
+8
ſomme 18
$-8\sqrt{5}$

$\sqrt{18 - 8\sqrt{5}}$ ou plûtoſt $\sqrt{10} - \sqrt{8}$ *difference cherchée.*

Démonſtration des Regles.

Soient $\sqrt{aa}$ & $\sqrt{bb}$ telles grandeurs que l'on voudra. Si par la regle de l'addition on ajoûte en une ſomme les deux grandeurs *aa* & *bb* renfermées ſous les ſignes $\sqrt{\ }$, plus $2\sqrt{aabb}$, c'eſt à dire 2 fois *ab* la racine du produit de *aa* par *bb*, la ſomme totale ſera $aa + 2ab + bb$. Or la racine de cette ſomme totale, c'eſt à dire $\sqrt{aa + 2ab + bb} = a + b$, & pareillement $\sqrt{aa} + \sqrt{bb} = a + b$, puiſque $\sqrt{aa} = a$, & $\sqrt{bb} = b$. La regle a donc découvert la ſomme cherchée, & preſcrit ce qu'il falloit faire.

On démontrera ſemblablement la regle de la ſouſtraction, en renverſant le raiſonnement qu'on vient de faire pour démontrer la regle de l'addition.

AVERTISSEMENT.

Les grandeurs qu'on ajoûte ou qu'on retranche ſont toûjours commenſurables entr'elles, lerſque le produit des grandeurs qui ſont ſous les ſignes $\sqrt{\ }$ eſt un quarré. Mais au contraire elles ſont toûjours incommenſurables entr'elles, lorſque ce produit n'eſt point un quarré. C'eſt pourquoi ſi-toſt qu'on apperçoit que ce produit n'eſt point quarré, il ſuffit d'écrire ſimplement les racines qu'on propoſe avec les ſignes + ou —, comme on l'a déja dit aux troiſiémes exemples des deux regles, ſans continuer l'operation. XXXIV.

DIXIE'ME PROBLEME.

Multiplier deux racines incommenſurables.

On écrit devant le ſigne radical le produit des grandeurs qui ſont hors des ſignes, & aprés, le produit de celles qui ſont ſous ces ſignes; & l'on a le produit cherché. Ce produit peut auſſi quelquefois ſe réduire à une expreſſion plus ſimple. XXXV.

Mais ſi les racines propoſées ont le ſigne $\sqrt{\ }$, & ſont commenſurables entr'elles, l'operation s'abrege en multipliant le produit des grandeurs qui ſont hors des ſignes, par celle qui reſte ſous chacun d'eux. Les exemples ſuivans éclairciront ces regles.

Premier Exemple.

Pour multiplier $8\sqrt{3}$ par $4\sqrt{2}$, 8 par $4=32$, & 3 par $2=6$, j'écris donc $32\sqrt{6}$ pour le produit cherché $8\sqrt{3}$ *par* $4\sqrt{2}=32\sqrt{6}$

Pareillement $3\sqrt{a}$ par $2\sqrt{b}=6\sqrt{ab}$

Second Exemple.

Pour multiplier $3\sqrt{5}$ par $2\sqrt{10}$, 3 par $2=6$, & 5 par $10=50$, j'écris donc $6\sqrt{50}$ pour le produit cherché. Et parceque $\sqrt{50}$ ſe réduit à $5\sqrt{2}$ au lieu de $6\sqrt{50}$, je puis encore écrire 6 fois $5\sqrt{2}$, c'eſt à dire $30\sqrt{2}$ pour le produit cherché. $3\sqrt{5}$ *par* $2\sqrt{10}=6\sqrt{50}=30\sqrt{2}$

Ainſi $5\sqrt{ab}$ par $6\sqrt{bc}=30b\sqrt{ac}$. $5\sqrt{ab}$ par $6\sqrt{bc}=30\sqrt{abbc}=30b\sqrt{ac}$

Troiſiéme Exemple.

Pour multiplier $5\sqrt{2}$ par $\sqrt{2}$ ou par $1\sqrt{2}$. Comme ces racines ſont commenſurables entr'elles, & que 5 par $1=5$, & $\sqrt{2}$ par $\sqrt{2}=2$, je multiplie 5 par 2, & 10 eſt le produit cherché. $5\sqrt{2}$ *par* $1\sqrt{2}=5\sqrt{4}=10$

De même $3\sqrt{a}$ par $\frac{1}{2}\sqrt{a}=1\frac{1}{2}a$. $3\sqrt{a}$ par $\frac{1}{2}\sqrt{a}=\frac{3}{2}\sqrt{aa}=1\frac{1}{2}a$

Mais $3\sqrt{\frac{1}{a}}$ par $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{a}}=\frac{3}{2a}$. $3\sqrt{\frac{1}{a}}$ par $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{a}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{aa}}=\frac{3}{2a}$

Et pareillement $3\sqrt{\frac{5}{a}}$ par $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{a}}=\frac{15}{2a}$. $3\sqrt{\frac{5}{a}}$ par $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{a}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{25}{aa}}=\frac{15}{2a}$

Quatriéme Exemple.

Pour multiplier $\sqrt{\frac{242}{5}}$ par $\sqrt{5}$, $\frac{242}{5}$ par $5=242$, j'écris donc $\sqrt{242}$ pour le produit cherché. Pareillement $\frac{5}{2}\sqrt{5}$ par $\sqrt{5}=12\frac{1}{2}$.

Cinquiéme Exemple.

Pour multiplier $2\sqrt{\mathrm{C}.3}$ par $3\sqrt{\mathrm{C}.3}$, 2 par $3=6$, & 3 par $3=9$, j'écris donc $6\sqrt{\mathrm{C}.9}$ pour le produit cherché.

Pareillement $2\sqrt{\mathrm{C}.ab}$ par $3\sqrt{\mathrm{C}.ab}=6\sqrt{\mathrm{C}.aab}$.

Mais $2\sqrt{\mathrm{C}.aab}$ par $3\sqrt{\mathrm{C}.aab}=6a\sqrt{\mathrm{C}.ab}$.

On trouvera auſſi que $\sqrt{6^{e}.5}$ par $\sqrt{6^{e}.\frac{1}{20}}=\sqrt{\mathrm{C}.\frac{1}{2}}$. Et ainſi des autres.

Démonſtration du Probleme.

Soient $\sqrt{a}$ & $\sqrt{b}$ deux racines incommenſurables telles qu'on voudra, il faut prouver que $\sqrt{ab}$ trouvée ſelon la methode du Probleme eſt le produit de $\sqrt{a}$ par $\sqrt{b}$. Pour cet effet ſoit $\sqrt{a}$ appellée c, & $\sqrt{b}$ appellée d, le produit de $\sqrt{a}$ par $\sqrt{b}$ eſt donc égal au produit cd. Or $\sqrt{ab}=\sqrt{ccdd}$, & $\sqrt{ccdd}=cd$. Donc $\sqrt{ab}$ eſt le produit de $\sqrt{a}$ par $\sqrt{b}$. Le Probleme a donc preſcrit ce qu'il falloit faire.

ONZIE'ME PROBLEME.

XXXVI. Diviſer une racine incommenſurable par une autre.

On écrit devant le ſigne radical l'expoſant de la grandeur qui eſt hors du premier ſigne à celle qui eſt hors du ſecond, & aprés, l'expoſant de ce qui eſt ſous le premier ſigne à ce qui eſt ſous le ſecond. Et l'on a l'expoſant qu'on cherche.

Mais ſi les racines propoſées ſont commenſurables entr'elles, l'operation s'abrege en écrivant le ſeul expoſant des grandeurs qui ſont hors des ſignes. Car cet expoſant eſt celui que l'on cherche. Les exemples ſuivans éclairciront ces regles.

Premier Exemple.

Pour diviſer $32\sqrt{6}$ par $4\sqrt{2}$, $\frac{32}{4}=8$, & $\frac{6}{2}=3$, j'écris donc $8\sqrt{3}$ pour l'expoſant cherché.

$$\frac{32\sqrt{6}}{4\sqrt{2}}=8\sqrt{3}$$

Pareillement $6\sqrt{ab}$ diviſée par $2\sqrt{b}$ donne $3\sqrt{a}$.

$$\frac{6\sqrt{ab}}{2\sqrt{b}}=3\sqrt{a}$$

Second Exemple.

Pour diviſer 10 par $\sqrt{2}$, c'eſt à dire $10\sqrt{1}$ par $\sqrt{2}$, $\frac{10}{1}=10$, & $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$, j'écris donc $10\sqrt{\frac{1}{2}}$ pour l'expoſant cherché.

Je pourois encore trouver le même expoſant ſous une expreſſion differente en cette ſorte. Pour diviſer 10 par $\sqrt{2}$, c'eſt à dire $\sqrt{100}$ par $\sqrt{2}$, $\frac{100}{2}=50$, j'écris donc $\sqrt{50}$ pour l'expoſant cherché, & parceque $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$, j'écris $5\sqrt{2}$ au lieu de $\sqrt{50}$.

$$\frac{10}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{100}{2}}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

De même $\frac{3}{2}a$ diviſé par $\frac{1}{2}\sqrt{a}$ donne $3\sqrt{a}$.

$$\frac{3a}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{9aa}{a}}=3\sqrt{a}$$

Mais $\frac{3}{2a}$ diviſé par $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{a}}$ donne $3\sqrt{\frac{1}{a}}$, ou $\frac{3}{a}\sqrt{a}$, *par* 30. *S.*

$$\frac{3\sqrt{a}}{a}=\sqrt{\frac{9a}{aa}}=3\sqrt{\frac{1}{a}}=\frac{3}{a}\sqrt{a}$$

Et pareillement $\frac{15}{2a}$ diviſé par $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{a}}$ donne $3\sqrt{\frac{5}{a}}$, ou $\frac{3}{a}\sqrt{5a}$, *par* 30. *S.*

$$\frac{15\sqrt{a}}{a\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{175a}{5aa}}=3\sqrt{\frac{5}{a}}=\frac{3}{a}\sqrt{5a}$$

Troiſiéme Exemple.

Pour diviſer $30\sqrt{5}$ par $10\sqrt{5}$, $\frac{30}{10}=3$, & $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1$, j'écris donc 3 expoſant de 30 à 10 pour l'expoſant cherché, à cauſe que les racines propoſées ſont commenſurables entr'elles, *par* 26. *S.*

$$\frac{30\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}=3$$

Pareillement $a\sqrt{b}$ diviſée par $b\sqrt{b}$ donne $\frac{a}{b}$, *par* 26. *S.*

$$\frac{a\sqrt{b}}{b\sqrt{b}}=\frac{a}{b}.$$

On trouvera en même ſorte que $\sqrt{a^3b-ab^3}$ diviſée par $\sqrt{aa-bb}$, donne $\sqrt{ab}$.

On trouvera auſſi que $\sqrt{\mathrm{C}.\frac{1}{2}}$ diviſée par $\sqrt{6^e.5}$, donne $\sqrt{6^e.\frac{1}{20}}$. Car $\sqrt{\mathrm{C}.\frac{1}{2}}=\sqrt{6^e.\frac{1}{4}}$.

Et pareillement $\sqrt{ab}$ par $\sqrt{6^e.a^4b^3}$, donne $ab\sqrt{6^e.a}$. Et ainſi des autres.

Démonſtration du Probleme.

Soient $\sqrt{a}$ & $\sqrt{b}$ deux racines incommenſurables telles qu'on voudra, il faut prouver que $\sqrt{\frac{a}{b}}$ trouvée ſelon la methode du Probleme, eſt l'expoſant de $\sqrt{a}$ par $\sqrt{b}$. Pour cet effet, ſoit $\sqrt{a}$ appellée c & $\sqrt{b}$ appellée d, l'expoſant de $\sqrt{a}$ à $\sqrt{b}$ eſt donc égal à l'expoſant $\frac{c}{d}$. Or $\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{cc}{dd}}$, & $\sqrt{\frac{cc}{dd}}=\frac{c}{d}$. Donc $\sqrt{\frac{a}{b}}$ eſt l'expoſant de $\sqrt{a}$ à $\sqrt{b}$. Le Probleme a donc preſcrit ce qu'il falloit faire.

DES BINOMES ET MULTINOMES

INCOMMENSURABLES.

XXXVII. La ſomme de deux grandeurs incommenſurables entr'elles s'appelle *binome*. On dit par exemple que $a+\sqrt{b}$ eſt un binome, parceque les deux grandeurs a & $\sqrt{b}$ ſont conſiderées comme eſtant incommenſurables entr'elles.

XXXVIII. Mais la difference de deux grandeurs incommenſurables entr'elles s'appelle *apotome* ou *reſidu*. On dit par exemple que $a-\sqrt{b}$ eſt un apotome. Cependant j'appellerai ces grandeurs *des binomes* auſſi bien que les autres, à cauſe qu'elles s'expriment neceſſairement par deux noms, qui marquent des grandeurs incommenſurables entr'elles.

XXXIX. Et ſi l'on ajoûte ou retranche plus de deux grandeurs incommenſurables entr'elles, j'appellerai *multinome* la ſomme ou la difference trouvée. Je dirai par exemple que $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ eſt un trinome, ſuppoſé que a, $\sqrt{b}$ & $\sqrt{c}$ ſoient toutes incommenſurables entr'elles. Et je dirai pareillement que $a+\sqrt{b}+\sqrt{\sqrt{c}}+\sqrt{d}$ eſt un quadrinome.

Mais je dirai ſeulement que $\sqrt{8}+\sqrt{6}+\sqrt{2}$ eſt un binome. Car $\sqrt{8}$ & $\sqrt{2}$ eſtant commenſurables entr'elles, puiſque $\sqrt{8}$ ſe réduit à $2\sqrt{2}$, au lieu de $\sqrt{8}+\sqrt{6}+\sqrt{2}$ on peut écrire $2\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{2}$, ou plûtoſt pour abreger la ſomme $3\sqrt{2}+\sqrt{6}$; ce qui ne peut paſſer que pour un binome. De même $ab+a\sqrt{bc}+c\sqrt{aa}+\sqrt{bcd}$ ne paſſera que pour un trinome. Car ab & $c\sqrt{aa}$ eſtant commenſurables entr'elles, on peut écrire $ab+ac+a\sqrt{bc}+\sqrt{bcd}$, où quoiqu'il y ait quatre parties, l'on n'en conçoit toutefois que trois de differente nature, la premiere $\overline{ab+ac}$ tout-à-fait commenſurable, & les deux autres $a\sqrt{bc}$ & $\sqrt{bcd}$, qui ſont chacune incommenſurables à la premiere, & qui le ſont encore entr'elles. Il en eſt ainſi des autres.

DE L'ADDITION ET SOUSTRACTION

DES MULTINOMES.

XL. L'Addition & la Souſtraction des multinomes n'ont rien de particulier. Car on ne fait qu'écrire enſemble ces grandeurs avec leurs ſignes, lorſqu'on cherche leur ſomme, & avec des ſignes contraires, lorſqu'on cherche leur difference, en la même ſorte qu'on ajoûte ou qu'on retranche les grandeurs literales.

Par exemple pour ajouter $26-4\sqrt{5}$ & $8\sqrt{10-4\sqrt{5}}$, j'écris $26-4\sqrt{5}+8\sqrt{10-4\sqrt{5}}$.

Et pareillement pour retrancher $8\sqrt{10-4\sqrt{5}}$ de $26-4\sqrt{5}$, j'écris $26-4\sqrt{5}-8\sqrt{10-4\sqrt{5}}$. Et ainſi des autres.

DE LA MULTIPLICATION
DES MULTINOMES.

Elle ſe fait en multipliant par le dixiéme Probleme chaque partie d'une part par chaque partie de l'autre, & prenant pour le produit qu'on cherche, la ſomme totale de tous les produits partiaux qu'on a découvert. XLI.

Premier Exemple.

Pour multiplier $6+2\sqrt{5}$ par lui-même, je dis $2\sqrt{5}$ par $2\sqrt{5}=20$, & j'écris $+20$, 6 par $2\sqrt{5}$, plus $2\sqrt{5}$ par 6 font $24\sqrt{5}$, & j'écris $+24\sqrt{5}$, enfin je dis 6 par $6=36$, j'écris 36 ; & je connois que $36+24\sqrt{5}+20$, c'eſt à dire que le binome $56+24\sqrt{5}$ eſt le produit cherché. Je trouverai de même que $2\sqrt{2}-\sqrt{6}$ par $2\sqrt{3}-\sqrt{2}$ donne pour produit $4\sqrt{6}-6\sqrt{2}-4+2\sqrt{3}$.

$$\begin{array}{rl}
 & 6+2\sqrt{5} \\
\textit{par} & 6+2\sqrt{5} \\
\hline
\textit{Produit} & 36+24\sqrt{5}+20 \\
\textit{ou} & 56+24\sqrt{5} \quad *
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
 & 2\sqrt{2}-\sqrt{6} \\
\textit{par} & 2\sqrt{3}-\sqrt{2} \\
\hline
 & -4+2\sqrt{3} \\
 & 4\sqrt{6}-6\sqrt{2} \\
\hline
\textit{Produit} & 4\sqrt{6}-6\sqrt{2}-4+2\sqrt{3}
\end{array}$$

Second Exemple.

Pour multiplier $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ par lui-même, je dis $\sqrt{a}$ par $\sqrt{a}=a$, & j'écris a, $\sqrt{a}$ par $\sqrt{b}$, plus $\sqrt{b}$ par $\sqrt{a}$ font $2\sqrt{ab}$, & j'écris $+2\sqrt{ab}$, & enfin $\sqrt{b}$ par $\sqrt{b}=b$, j'écris $+b$, & je connois que le binome $\overline{a+b}+2\sqrt{ab}$ eſt le quarré de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Je trouverai en même ſorte que la grandeur commenſurable $ab-aa+bb$ eſt le produit du binome $\sqrt{ab}+\sqrt{aa-bb}$ par $\sqrt{ab}-\sqrt{aa-bb}$.

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt{a}+\sqrt{b} \\
\text{par} & \sqrt{a}+\sqrt{b} \\
\hline
\text{Produit} & a+2a\sqrt{b}+b \\
\hline
\text{ou} & \overline{a+b}+2a\sqrt{b}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt{ab}+\sqrt{aa-bb} \\
\text{par} & \sqrt{ab}-\sqrt{aa-bb} \\
\hline
 & ab+\sqrt{a^3b-ab^3} \\
 & -\sqrt{a^3b-ab^3}-aa+bb \\
\hline
\text{Produit} & ab \quad * \quad -aa+bb
\end{array}$$

DE LA DIVISION
DES MULTINOMES NUMERIQUES.

On la fait ſouvent comme celle des grandeurs literales, en diviſant par parties ſelon les regles du Probleme onziéme, toutes les parties d'une part par toutes les parties de l'autre, & prenant pour l'expoſant cherché, la ſomme totale de tous les expoſans partiaux qu'on a découvert. XLII.

Premier Exemple.

Pour diviſer $10\sqrt{2}+2\sqrt{30}+2\sqrt{35}+2\sqrt{21}$ par 4, j'écris $\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{30}+\frac{1}{2}\sqrt{35}+\frac{1}{2}\sqrt{21}$.

Second Exemple.

Pour diviſer $4\sqrt{6}-6\sqrt{2}-4+2\sqrt{3}$ par $2\sqrt{2}-\sqrt{6}$, je dis l'expoſant de $4\sqrt{6}$ à $2\sqrt{2}$ eſt $2\sqrt{3}$ que j'écris au demi cercle, $2\sqrt{3}$ par $2\sqrt{2}-\sqrt{6}$, eſt $4\sqrt{6}-6\sqrt{2}$ que j'oſte du produit donné, j'avance enſuite le diviſeur $2\sqrt{2}-\sqrt{6}$ ſous $-4+2\sqrt{3}$, & je dis l'expoſant de -4 à $2\sqrt{2}$ eſt $\frac{-2}{\sqrt{2}}$, ou $-\sqrt{2}$ que j'écris au demi cercle, $-\sqrt{2}$ par $2\sqrt{2}-\sqrt{6}$ eſt $-4+2\sqrt{3}$ que j'oſte du produit donné. Il ne reſte rien, & ainſi je connois que $2\sqrt{3}-\sqrt{2}$ eſt l'expoſant cherché.

$$4\sqrt{6}-6\sqrt{2}-4+2\sqrt{3}\ (2\sqrt{3}-\sqrt{2}\ \textit{expoſant.}$$
$$\cancel{2}\sqrt{\cancel{2}}-\sqrt{\cancel{6}},-\cancel{2}\sqrt{\cancel{2}}-\sqrt{\cancel{6}}$$

DE LA DIVISION DES BINOMES
DONT L'EXPOSANT EST UN BINOME.

Mais tous les binomes numeriques ne peuvent pas ſe diviſer en cette ſorte, il faut ſouvent un peu d'adreſſe pour en trouver les expoſans ſous leurs expreſſions les plus ſimples. Lors par exemple qu'un binome doit eſtre diviſé par un autre, ſi toutes leurs parties ſont commenſurables, ou n'ont pour ſigne radical que le ſigne $\sqrt{}$, l'expoſant de l'un à l'autre eſt toûjours un binome qu'on peut trouver en cette ſorte.

REGLE.

XLIII. Le binome à diviſer & ſon diviſeur ſont chacun multipliez par la difference de la partie commenſurable du diviſeur à ſa partie incommenſurable. Enſuite on diviſe le premier des produits trouvez par le ſecond, & l'expoſant de cette diviſion eſt un binome qui eſt auſſi l'expoſant qu'on cherche.

Premier Exemple.

Pour diviſer $56+24\sqrt{5}$ par $6+2\sqrt{5}$, les deux parties $24\sqrt{5}$ & $2\sqrt{5}$ ſont commenſurables entr'elles, d'où je connois que l'expoſant de leur diviſion doit s'exprimer par un binome, & je trouve ainſi cet expoſant. Je multiplie chacun des binomes $56+24\sqrt{5}$ & $6+2\sqrt{5}$ par $6-2\sqrt{5}$ difference de 6 partie commenſurable du diviſeur à ſa partie incommenſurable $2\sqrt{5}$. Enſuite je diviſe $96+32\sqrt{5}$ le premier des produits trouvez par le ſecond qui eſt 16, l'expoſant que je trouve eſt le binome $6+2\sqrt{5}$, & ce binome eſt auſſi l'expoſant que je cherche.

Diviſeur $6+2\sqrt{5}$

Mult. par $6-2\sqrt{5}$

$-12\sqrt{5}-20$

$36+12\sqrt{5}$

2^{e} *Produit* $36\quad *\quad -20=16$

$(6+2\sqrt{5}$ *expoſant cherché.*

Produit à diviſer $56+24\sqrt{5}$

Mult. par $6-2\sqrt{5}$

$-112\sqrt{5}-240$

$336+144\sqrt{5}$

1^{er} *Produit* $96+32\sqrt{5}\quad *$

$1\cancel{6},\ 1\cancel{6}$

Second

Second Exemple.

Pour diviſer $588+132\sqrt{2}$ par $12+2\sqrt{2}$, je multiplie chacun des binomes par $12-2\sqrt{2}$, & je diviſe $6528+408\sqrt{2}$ le premier des produits trouvez par le ſecond qui eſt 136, l'expoſant que je trouve eſt le binome $48+3\sqrt{2}$; qui eſt auſſi l'expoſant cherché.

$$\begin{array}{rr} \textit{Produit à diviſer } 588+132\sqrt{2} & \textit{Diviſeur } 12+2\sqrt{2} \\ \textit{Mult. par } \underline{12-\ 2\sqrt{2}} & \textit{Mult. par } \underline{12-2\sqrt{2}} \\ -1176\sqrt{2}-528 & -24\sqrt{2}-8 \\ \underline{7056+1584\sqrt{2}} & \underline{144+24\sqrt{2}} \\ 1^{er}\ \textit{Produit}\ 6528+408\sqrt{2} \quad * & 2^{e}\ \textit{Produit}\ 136 \quad * \quad\quad * \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \cancel{2} & & \\ \cancel{1}\cancel{0}\cancel{4} & & \\ \cancel{2}\cancel{3}8 & \cancel{1}\cancel{1} & \\ \cancel{6}\cancel{5}\cancel{2}8 & +\cancel{4}\cancel{0}8\sqrt{2} & (\,48+3\sqrt{2}\ \textit{expoſant cherché.} \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{6}\cancel{6} & \cancel{1}\cancel{3}\cancel{6} & \\ \cancel{1}\cancel{3} & & \end{array}$$

Démonſtration de la Regle.

En operant ſelon la regle, on conſidere le binome à diviſer & ſon diviſeur comme les deux termes d'une fraction ou d'un rapport, dont il faut trouver l'expoſant, puiſqu'on ſuppoſe que l'un doit eſtre diviſé par l'autre. Or multipliant comme on a fait aux exemples qui precedent, chacun de ces termes ou binomes qu'on propoſe par une même grandeur, on ne change point la valeur de leur expoſant, *par II. 24.* les produits nouvellement trouvez auront donc un même expoſant que ces binomes, *par II. 21.* Mais pour prouver que cet expoſant doit encore eſtre un binome, ſoit $c+d\sqrt{b}$ & $a+\sqrt{b}$ les deux que l'on propoſe, ſoit de plus chacun de ces binomes multiplié ſelon la ſuppoſition par $a-\sqrt{b}$.

1°. En multipliant $c+d\sqrt{b}$ par $a-\sqrt{b}$, on trouve quatre produits, les deux commenſurables ac & $-db$ qui ne paſſent que pour une partie, *par 39. S.* & les deux autres incommenſurables $ad\sqrt{b}$ & $-c\sqrt{b}$, qui ne doivent paſſer auſſi que pour une partie, à cauſe qu'ayant chacune la même grandeur b ſous le ſigne $\sqrt{}$, elles ſont commenſurables entr'elles; de ſorte que le produit $\overline{ac-db}+\overline{ad-c}\sqrt{b}$ ne doit paſſer que pour un binome, *par 39. S.*

2°. En multipliant le diviſeur $a+\sqrt{b}$ par $a-\sqrt{b}$, on trouve deux produits $a\sqrt{b}$ & $-a\sqrt{b}$ qui s'effacent, de ſorte qu'il ne reſte au produit que la grandeur commenſurable $\overline{aa-b}$. Or le binome $\overline{ac-db}+\overline{ad-c}\sqrt{b}$ diviſé par une grandeur commenſurable comme $\overline{aa-b}$, ne peut donner aucun trinome ou multinome, car toutes les parties de l'expoſant ſeront commenſurables, ou n'auront rien d'incommenſurable que la grandeur $\sqrt{b}$.

L'expoſant des binomes qu'on propoſe ſera donc auſſi un binome.

$$\begin{array}{rl}
\text{Produit à diviſer} & c+d\sqrt{b} \\
\text{Mult. par} & a-\sqrt{b} \\
\hline
 & -c\sqrt{b}-db \\
 & ac+ad\sqrt{b} \\
\hline
\text{1}^{\text{er}}\text{ Produit} & ac-db+\overline{ad-c}\sqrt{b}.
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
\text{Diviſeur} & a+\sqrt{b} \\
\text{Mult. par} & a-\sqrt{b} \\
\hline
 & -a\sqrt{b}-b \\
 & aa+a\sqrt{b} \\
\hline
\text{2}^{\text{e}}\text{ Produit} & aa \quad * \quad -b
\end{array}$$

METHODE GENERALE
POUR DIVISER LES MULTINOMES NUMERIQUES, DONT LES PARTIES N'ONT POINT D'AUTRE SIGNE QUE $\sqrt{}$.

XLIV. Quoique tous les binomes diviſez les uns par les autres n'ayent pas toûjours des binomes pour expoſans, & que les multinomes en ayent encore moins que les binomes, cependant la regle precedente peut s'étendre generalement à toutes les diviſions qu'on doit faire ſur les uns & ſur les autres, & donner des expoſans de ces diviſions; mais afin de trouver ces expoſans, il faudra faire un nombre de multiplications d'autant plus grand que le diviſeur aura plus de parties incommenſurables entr'elles. Ceci s'expliquera & s'entendra peut-eſtre mieux par les exemples ſuivans.

Premier Exemple.

Pour diviſer $2\sqrt{5}+\sqrt{14}$ par $\sqrt{10}+\sqrt{6}$, je multiplie chacun des binomes par $\sqrt{10}-\sqrt{6}$, & je diviſe le premier des produits trouvez qui eſt $10\sqrt{2}+2\sqrt{35}-2\sqrt{30}-2\sqrt{21}$, par le ſecond qui eſt 4, l'expoſant que je trouve eſt $\frac{5}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{35}-\frac{1}{2}\sqrt{30}-\frac{1}{2}\sqrt{21}$, qui eſt auſſi l'expoſant que je cherche.

$$\begin{array}{rl}
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{Diviſeur } \sqrt{10}+\sqrt{6} \\
\textit{Prod. à div.} & 2\sqrt{5}+\sqrt{14} \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{Mult. par } \sqrt{10}-\sqrt{6} \\
\textit{Mult. par} & \sqrt{10}-\sqrt{6} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -2\sqrt{15}-6 \\
 & -2\sqrt{30}-2\sqrt{21} \qquad\qquad\qquad\qquad 10+2\sqrt{15} \\
 & 10\sqrt{2}+2\sqrt{35} \qquad\qquad \text{2}^{\text{e}}\textit{ Produit } 10 \quad * \quad -6=4 \\
\hline
\text{1}^{\text{er}}\textit{ Produit} & 10\sqrt{2}+2\sqrt{35}-2\sqrt{30}-2\sqrt{21}\ (\frac{5}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{35}-\frac{1}{2}\sqrt{30}-\frac{1}{2}\sqrt{21}\ \textit{expoſant.} \\
 & 4, \qquad 4, \qquad 4, \qquad 4,
\end{array}$$

Second Exemple.

Pour diviſer 12 par $3+\sqrt{2}-\sqrt{3}$, je multiplie chaque grandeur par $3+\sqrt{2}+\sqrt{3}$, les produits ſont $36+12\sqrt{2}+12\sqrt{3}$ & $8+6\sqrt{2}$. Mais parceque le diviſeur ainſi multiplié ne donne point un nombre tout-à-fait commenſurable pour produit, je multiplie de nouveau chaque produit trouvé par $8-6\sqrt{2}$, ou plûtoſt par $6\sqrt{2}-8$, à cauſe que 72 quarré de $6\sqrt{2}$ eſtant plus grand que 64 quarré de 8, $6\sqrt{2}$ eſt plus grand que 8, les produits que je trouve ſont $-144+120\sqrt{2}-96\sqrt{3}+72\sqrt{6}$ & 8. Diviſant donc le premier de ces produits par le ſecond, je trouve l'expoſant

$= 18+15\surd 2-12\surd 3+9\surd 6$, qui eſt celui que je cherche.

Produit à diviſer 12	*Diviſeur* $3+\surd 2-\surd 3$
Mult par $3+\surd 2+\surd 3$	*Mult. par* $3+\surd 2+\surd 3$
1er *Produit* $36+12\surd 2+12\surd 3$	2^{e} *Produit* $9+6\surd 2+2-3$
Mult. par $-8+6\surd 2$	*ou* $8+6\surd 2 \quad * \quad *$
$+216\surd 2+144+72\surd 6$	*Mult. par* $-8+6\surd 2$
$-288-96\surd 2-96\surd 3$	*Produit* $-64+72=8$

$$\begin{array}{l} \qquad\quad 6 \qquad 4 \qquad\quad 1 \\ \textit{Produit } -\cancel{144}+12\cancel{0}\surd 2-\cancel{96}\surd 3+\cancel{7}2\surd 6\ (-18+15\surd 2-12\surd 3+9\surd 6\ \textit{expoſant.} \\ \qquad\quad 88, \quad 88, \quad\ 88, \qquad 8, \end{array}$$

SUITE DE LA METHODE GENERALE.

Pour faire methodiquement la diviſion des multinomes, il faut que le produit à diviſer & ſon diviſeur ſoient multipliez en telle ſorte que l'on trouve un nouveau diviſeur entierement commenſurable. Or ſi le diviſeur qu'on donne eſt un binome, & que chaque partie de ce binome ait le ſigne $\surd C.$ ſelon cette forme $\surd C.a+\surd C.b$, on trouvera un nouveau diviſeur entierement commenſurable, ſi on multiplie le produit à diviſer & ſon diviſeur $\surd C.a+\surd C.b$ par un trinome qui ait cette forme $\surd C.aa-\surd C.ab+\surd C.bb$, car le produit du diviſeur donné $\surd C.a+\surd C\,b$ par ce trinome, eſt la grandeur tout-à-fait commenſurable $a+b$. XLV.

$$\begin{array}{rl} \text{Diviſeur donné} & \surd C.a \quad +\surd C.b \\ \text{Mult. par} & \surd C.aa-\surd C.ab+\surd C.bb \\ \hline & +\surd C.aab-\surd C.abb+\qquad b \\ & a-\surd C.aab+\surd C.abb \\ \hline \text{Produit} & a \qquad * \qquad * \quad + \quad b \end{array}$$

De même ſi le diviſeur eſt le binome $\surd\surd a+\surd\surd b$, on trouvera un nouveau diviſeur entierement commenſurable, ſi on multiplie le produit à diviſer & ſon diviſeur par le quadrinome
$\surd\surd a^3-\surd\surd aab+\surd\surd abb-\surd\surd b^3$, car le produit de $\surd\surd a+\surd\surd b$ par ce quadrinome eſt $a-b$.

$$\begin{array}{rl} \textit{Diviſeur donné} & \surd\surd a \quad +\surd\surd b \\ \textit{Mult. par} & \surd\surd a^3-\surd\surd aab+\surd\surd abb-\surd\surd b^3 \\ \hline & +\surd\surd a^3b-\surd\surd aabb+\surd\surd ab^3-\qquad b \\ & a-\surd\surd a^3b+\surd\surd aabb-\surd\surd ab^3 \\ \hline \text{Produit} & a \qquad * \qquad * \qquad * \quad - \quad b \end{array}$$

Il en eſt ainſi des autres. Mais lorſque les deux parties du binome ou diviſeur donné ont un ſigne different, on doit les réduire chacune ſous un même ſigne par le cinquiéme Probleme 22. S.

Et afin qu'on ait une formule ou un modele general pour faire toute ſorte de diviſions dans leſquelles le diviſeur qu'on donne eſt un binome,

ſi ces binomes ou diviſeurs ſont	les produits à diviſer ſeront multipliez par
$\surd a + \surd b$	$\surd a - \surd b$
$\surd C.a + \surd C.b$	$\surd C.aa - \surd C.ab + \surd C.bb$
$\surd\surd a + \surd\surd b$	$\surd\surd a^3 - \surd\surd aab + \surd\surd abb - \surd\surd b^3$
$\surd 5^e.a + \surd 5^e.b$	$\surd 5^e.a^4 - \surd 5^e.a^3b + \surd 5^e.aabb - \surd 5^e.ab^3 + \surd 5^e.b^4$
$\surd 6^e.a + \surd 6^e.b$	$\surd 6^e.a^5 - \surd 6^e.a^4b + \surd 6^e.a^3bb - \surd 6^e.aab^3 + \surd 6^e.ab^4 - \surd 6^e.b^5$
$\surd 7^e.a + \surd 7^e.b$	$\surd 7^e.a^6 - \surd 7^e.a^5b + \surd {}^e.a^4bb - \surd 7^e.a^3b^3 + \surd 6^e.aab^4 - \surd 7^e.ab^5 + \surd 7^e.$

Et l'on prendra dans tous ces cas pour diviſeur commenſurable la grandeur $a -$ ou $+ b$. L'on prendra $a - b$, ſi l'expoſant du ſigne radical eſt un nombre pair, comme ceux de $\surd$, $\surd\surd$, $\surd C\surd$, &c. mais l'on prendra $a + b$, ſi l'expoſant du ſigne eſt un nombre impair, comme ceux de $\surd C.$ $\surd 5^e.$ $\surd 7^e.$ &c. Au reſte on remarquera que nous ſuppoſons ordinairement a plus grand que b. Et quoique l'on ait toûjours mis le ſigne $+$ devant chaque partie du binome donné, on l'a ſeulement fait pour ſe déterminer, ce ſigne $+$ marquera ſi l'on veut la poſition de ſon contraire, c'eſt à dire $-$, ſi par exemple les deux parties du binome donné pour diviſeur avoient l'une $+$ & l'autre $-$, chaque partie du multinome, par lequel on multiplie le produit à diviſer, doit avoir le ſigne $+$. Mais afin que l'on voye mieux l'uſage de tout ceci, nous en ferons l'application aux exemples ſuivans.

Premier Exemple.

Pour diviſer $10 + 5\surd C.3$ par $\surd C.2 + \surd C.3$, je multiplie le produit à diviſer $10 + 5\surd C.3$ par $\surd C.4 - \surd C.6 + \surd C.9$, & je diviſe le produit $10\surd C.4 - 10\surd C.6 + 5\surd C.12 + 10\surd C.9 - 5\surd C.18 + 15$ par $5 = 2 + 3$, l'exp. que je trouve eſt $2\surd C.4 - 2\surd C.6 + \surd C.12 + 2\surd C.9 - \surd C.18 + 3$, qui eſt auſſi celui que je cherche.

$$\begin{array}{rl}
\textit{Produit à diviſer} & 10 + 5\surd C.3 \\
\textit{Mult. par} & \underline{\surd C.4 - \surd C.6 + \surd C.9} \\
 & + 5\surd C.12 - 5\surd C.18 + 15 \\
 & \underline{10\surd C.4 - 10\surd C.6 + 10\surd C.9} \\
\textit{Produit} & \cancel{10}\surd C.4 - \cancel{10}\surd C.6 + \cancel{5}\surd C.12 + \cancel{10}\surd C.9 - \cancel{5}\surd C.18 + \cancel{15} \\
 & \cancel{5} \quad \cancel{5} \quad \cancel{5} \quad \cancel{5} \quad \cancel{5} \quad \cancel{5} \\
 & (2\surd C.4 - 2\surd C.6 + \surd C.12 + 2\surd C.9 - \surd C.18 + 3 \ \textit{expoſant.}
\end{array}$$

Second Exemple.

Pour diviſer 15 par $\surd\surd 2 + \surd\surd 3$, je multiplie 15 par $\surd\surd 8 - \surd\surd 12 + \surd\surd 18 - \surd\surd 27$, & je diviſe le produit par 5, l'expoſant que je trouve eſt $3\surd\surd 8 - 3\surd\surd 12 + 3\surd\surd 18 - 3\surd\surd 27$, qui eſt auſſi celui que je cherche. Il en eſt ainſi des autres.

DE LA DIVISION DES INCOMMENSURABLES
EXPRIMEZ PAR LETTRES.

XLVI. Elle ſuit à peu prés les regles de la diviſion ordinaire des lettres, & celles du huitiéme Probleme, où nous en avons donné des exemples ſur les racines ſimples & qui n'ont point pluſieurs parties, cependant comme il eſt ſouvent difficile de réduire les incommenſurables literales à leurs expreſſions les plus ſimples, on aura ſoin de réduire ſous un même ſigne le produit à diviſer & ſon diviſeur.

On voit aſſez qu'il eſt facile de diviſer a^3+abb par $a\sqrt{aa+bb}$, car l'expoſant de a^3+abb à a eſt $aa+bb$; Or $aa+bb$ diviſé par $\sqrt{aa+bb}$ qui en eſt la racine, donne neceſſairement $\sqrt{aa+bb}$. Et ainſi l'expoſant de a^3+abb à $a\sqrt{aa+bb}$ eſt $\sqrt{aa+bb}$.

Il ne paroiſt pas difficile non plus de diviſer $\overline{a+b}\sqrt{aa+bb}$ par $a+b$, car on voit d'abord que l'expoſant eſt $\sqrt{aa+bb}$.

Mais il paroiſt d'abord un peu difficile de diviſer $\sqrt{a^4+2a^3b-2ab^3-b^4}$ par $a+b$, à cauſe que $\sqrt{a^4+2a^3b-2ab^3-b^4}$ n'eſt pas réduite à ſon expreſſion la plus ſimple qui eſt $\overline{a+b}\sqrt{aa-bb}$. Comme donc le produit à diviſer & ſon diviſeur $a+b$ n'ont pas le même ſigne $\sqrt{}$, je réduis ſous ce ſigne $a+b$, en écrivant $\sqrt{aa+2ab+bb}$ qui lui eſt égale, & alors diviſant $a^4+2a^3b-2ab^3-b^4$ par $aa+2ab+bb$, l'expoſant eſt $aa-bb$, & ainſi $\sqrt{aa-bb}$ ſera l'expoſant cherché.

S'il falloit diviſer $ab+b\sqrt{bc}$ par $a+\sqrt{bc}$, ab diviſé par a, & $b\sqrt{bc}$ diviſée par $\sqrt{bc}$ donnent chacun l'expoſant b, & ainſi b ſera l'expoſant cherché.

Pour diviſer $aa-bc$ par $a+\sqrt{bc}$, l'expoſant de aa à a eſt a, a par $a+\sqrt{bc}=aa+a\sqrt{bc}$, qui eſtant retranché de $aa-bc$, laiſſe pour reſte $-a\sqrt{bc}-bc$. Diviſant donc de nouveau $-a\sqrt{bc}$ par a, l'expoſant eſt $-\sqrt{bc}$, $-\sqrt{bc}$ par $a+\sqrt{bc}=-a\sqrt{bc}-bc$, qui eſtant retranché de $-a\sqrt{bc}$ ne laiſſe aucun reſte, de ſorte que l'expoſant cherché eſt $a-\sqrt{bc}$.

$$\begin{array}{lll} x aa-bc,-a\sqrt{bc}\ (a. & \qquad & x aa-bc,-a\sqrt{bc}\ (a-\sqrt{bc}\ \text{expoſant.} \\ x a\ +x\sqrt{bc} & & x a\ -x\sqrt{bc}, \\ & & \quad +\sqrt{bc}+a \end{array}$$

On trouvera en même ſorte que $ab-cd$ diviſé par $\sqrt{ab}-\sqrt{cd}$, donne $\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$.

Que $a^3+bc\sqrt{bc}$ diviſé par $a+\sqrt{bc}$ donne $aa+bc-a\sqrt{bc}$.

De même $aabb-ccdd$ diviſé par $\sqrt{ab}-\sqrt{cd}$, donne $\overline{ab+cd}\sqrt{ab}+\overline{ab+cd}\sqrt{cd}$.

De même encore $a^3b-abbc$ diviſé par $aa+a\sqrt{bc}$ donne $ab-b\sqrt{bc}$.

Et $a^3 + abc + aa - bc\sqrt{bc}$ diviſé par $a - \sqrt{bc}$ donne $aa + bc + 2a\sqrt{bc}$.

Si l'on multiplie le produit à diviſer & ſon diviſeur par une même grandeur, les nouveaux produits auront un même expoſant que les grandeurs données : Et pareillement ſi l'on diviſe le produit à diviſer & ſon diviſeur par une même grandeur, les nouveaux expoſans auront un même expoſant que les grandeurs données, *par II. 24. & 25.* C'eſt pourquoi, lorſqu'on poura diviſer chacune de ces grandeurs par un même diviſeur, on prendra pour l'expoſant qu'on cherche, celui des expoſans nouvellement trouvez.

Par exemple pour diviſer $180 + 24x + 3xx + 2x^3 - x^4$ par $8\sqrt{xx + 12}$, chacune de ces grandeurs diviſée par $xx + 12$, les expoſans ſont $15 + 2x - xx$, & $\frac{8}{\sqrt{xx+12}}$, diviſant donc $15 + 2x - xx$ par $\frac{8}{\sqrt{xx+12}}$, l'expoſant eſt $\frac{15+2x-xx}{8}\sqrt{xx + 12}$, qui eſt auſſi l'expoſant que je cherche.

Pareillement pour diviſer $180 + 24x + 3xx + 2x^3 - x^4$ par $\overline{x + 3}\sqrt{xx + 12}$, chacune de ces grandeurs diviſée par $x^3 + 3xx + 12$, les expoſans ſont $5 - x$ & $\frac{1}{\sqrt{xx+12}}$. diviſant donc $5 - x$ par $\frac{1}{\sqrt{xx+12}}$, l'expoſant ſera $\overline{5 - x}\sqrt{xx + 12}$, qui eſt auſſi l'expoſant que je cherche.

Mais enfin, lorſque l'on trouve les calculs trop penibles, ou qu'on ne peut découvrir aucun moyen de trouver les plus ſimples expoſans des grandeurs données, on ſe contente de les écrire à l'ordinaire en cette ſorte. $\frac{1}{c-d}\sqrt{a^4 + b^4}$, c'eſt à dire $\sqrt{a^4 + b^4}$ diviſé par $c - d$. $\frac{c-d}{\sqrt{a^4+b^4}}$, c'eſt à dire $c - d$ diviſé par $\sqrt{a^4 + b^4}$. $\frac{a}{a+b}\sqrt{aa + bb}$, c'eſt à dire $a\sqrt{aa + bb}$ diviſé par $a + b$. $\frac{aa+\sqrt{abcd}}{a+\sqrt{bc}}$, c'eſt à dire $aa + \sqrt{abcd}$ diviſé par $a + \sqrt{bc}$. De même $\frac{180+24x+3xx+2x^3-x^4}{\overline{x+3}\sqrt{xx+12}}$, c'eſt à dire $180 + 24x + 3xx + 2x^3 - x^4$ diviſé par $\overline{x + 3}\sqrt{xx + 12}$, je ſuppoſe dans ce dernier exemple, & dans d'autres ſemblables, qu'on ne puiſſe ou qu'on ne veuille point en chercher un expoſant plus ſimple.

DE LA RESOLUTION DES MULTINOMES INCOMMENSURABLES.

TREIZIE'ME PROBLEME.

XLVII. Trouver la racine quarrée d'un binome.

1°. On retranche le quarré de la petite partie du quarré de la grande, & on tire la racine du reſte.

2°. On ajoute cette racine à la grande partie, ce qui fait une ſomme, & on la retranche de la même partie, ce qui fait une difference.

3°. On tire la racine de la moitié de la ſomme, & la racine de la moitié de la difference, enſuite on prend la ſomme de ces deux racines, ſi chaque partie du binome a $+$; ou bien on prend leur difference, ſi une partie a

$+$ & l'autre $-$, & l'on a la racine qu'on cherche. Les exemples ſuivans éclairciront ces regles.

Premier Exemple.

Pour tirer la racine de $33+\sqrt{800}$. 1°. Je retranche 800 quarré de la petite partie $\sqrt{800}$, de 1089 quarré de la grande partie 33. Le reſte eſt 289, dont je tire la racine quarrée 17.

2°. J'ajoute la racine 17 à la grande partie 33, la ſomme eſt 50 ; & je retranche la même racine 17 de la partie 33, & la difference eſt 16.

3°. Je tire 5 racine de 25 moitié de la ſomme 50, & $\sqrt{8}$ racine de 8 moitié de la difference 16, enſuite j'ajoute enſemble 5 & $\sqrt{8}$, parceque chaque partie du binome à reſoudre a le ſigne $+$, & la ſomme $5+\sqrt{8}$ eſt la racine que je cherche.

	33, $+\sqrt{800}$.		33		33
par	33		$+17$		-17
grand quarré	$+1089$	*ſomme*	$+50$	*difference*	$+16$
petit quarré	-800	*ſa moitié*	25	*ſa moitié*	8
reſte	$+289$		5	$+$	$\sqrt{8}$ *racine cherch.*
ſa racine	17				

On trouvera pareillement que la racine de $116+12\sqrt{80}$ eſt $6+\sqrt{80}$.

	116, $+12\sqrt{80}$.		116		116
par	116		$+44$		-44
grand quarré	$+13456$	*ſomme*	$+160$	*difference*	$+72$
petit quarré	-11520	*ſa moitié*	80	*ſa moitié*	36
reſte	$+1936$		$\sqrt{80}$	$+$	6 *racine cherchée.*
ſa racine	44				

AVERTISSEMENT.

Il n'eſt pas toûjours ici le plus court de réduire les parties incommenſurables à leurs expreſſions les plus ſimples.

Second Exemple.

Pour trouver la racine de $\sqrt{20}-\sqrt{15}$. 1°. Je retranche 15 quarré de la petite partie $\sqrt{15}$, de 20 quarré de la grande $\sqrt{20}$. Le reſte eſt 5, dont je tire la racine quarrée $\sqrt{5}$.

2°. J'ajoute $\sqrt{5}$ à la grande partie $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$, la ſomme eſt $3\sqrt{5}$ ou $\sqrt{45}$; & je retranche $\sqrt{5}$ de $\sqrt{20}$, & la difference eſt $\sqrt{5}$.

3°. Je tire $\sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{5}}$ ou $\sqrt{\sqrt{11\frac{1}{4}}}$ la racine de $\sqrt{11\frac{1}{4}}$ moitié de la ſomme $\sqrt{45}$, je tire auſſi $\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{5}}$ ou $\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}}$ la racine de la moitié de la difference $\sqrt{5}$, enſuite je prends la difference de $\sqrt{\sqrt{11\frac{1}{4}}}$ & $\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}}$, à cauſe qu'une partie du binome a le ſigne $-$, & je connois que cette difference $\sqrt{\sqrt{11\frac{1}{4}}}-\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}}$ eſt la racine que je cherche.

$\sqrt{20}, -\sqrt{15}.$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{20}$
par $\sqrt{20}$	$+\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}$
grand quarré $+20$	*ſomme* $+3\sqrt{5}=\sqrt{45}.$	*difference* $+\sqrt{5}$
petit quarré -15	*ſa moitié* $\frac{3}{2}\sqrt{5}=\sqrt{4\frac{5}{4}}=\sqrt{11\frac{1}{4}}.$	*ſa moitié* $\frac{1}{2}\sqrt{5}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\sqrt{1\frac{1}{4}}$
reſte $+5$	$\sqrt{\sqrt{11\frac{1}{4}}}$	$-\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}}$ *racine cherchée.*
ſa racine $\sqrt{5}$		

On trouvera pareillement que la racine de $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ eſt $\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{1}{2}}}-\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{1}{2}}}$.

$\sqrt{5}, -\sqrt{3}.$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$
par $\sqrt{5}$	$+\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
grand quarré $+5$	*ſomme* $\sqrt{5}+\sqrt{2}$	*difference* $\sqrt{5}-\sqrt{2}$
petit quarré -3	*ſa moitié* $\sqrt{1\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$	*ſa moitié* $\sqrt{1\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{1}{2}}$
reſte $+2$	$\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{1}{2}}}$	$-\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{1}{2}}}$ *racine cherchée.*
ſa racine $\sqrt{2}$		

Troiſiéme Exemple.

Pour tirer ſa racine de $\overline{a+b}\sqrt{ab}+2ab$. 1°. Je retranche $4aabb$ quarré de la partie $2ab$, de $a^3b+2aabb+ab^3$ quarré de la partie $\overline{a+b}\sqrt{ab}$. Le reſte eſt $a^3b-2aabb+ab^3$, dont je tire la racine $\overline{a-b}\sqrt{ab}$.

2°. J'ajoûte la racine $\overline{a-b}\sqrt{ab}$ à la partie $\overline{a+b}\sqrt{ab}$, la ſomme eſt $2a\sqrt{ab}$, & je retranche la même racine de cette partie, la difference eſt $2b\sqrt{ab}$.

3°. Je tire $\sqrt{a\sqrt{ab}}$ la racine de $a\sqrt{ab}$ moitié de la ſomme $2a\sqrt{ab}$, & $\sqrt{b\sqrt{ab}}$ la racine de $b\sqrt{ab}$ moitié de la difference $2b\sqrt{ab}$, & $\sqrt{a\sqrt{ab}}+\sqrt{b\sqrt{ab}}$, ou $\sqrt{\sqrt{a^3b}}+\sqrt{\sqrt{ab^3}}$ eſt la racine que je cherche.

$a+\sqrt{ab}, +2ab.$	$\overline{a+b}\sqrt{ab}$	$\overline{a+b}\sqrt{ab}$
par $a+b\sqrt{ab}$	$+\overline{a-b}\sqrt{ab}$	$\overline{-a+b}\sqrt{ab}$
grand quarré $aa+2abb+bbab$	ſomme $2a\sqrt{ab}$	difference $2b\sqrt{ab}$
ou $a^3b+2aabb+ab^3$	ſa moitié $a\sqrt{ab}$	ſa moitié $b\sqrt{ab}$
petit quarré $-4aabb$	$\sqrt{a\sqrt{ab}}$	$+\sqrt{b\sqrt{ab}}$
reſte $a^3b-2aabb+ab^3$	ou $\sqrt{\sqrt{a^3b}}$	$+\sqrt{\sqrt{ab^3}}$ {racine cherchée.
ſa racine $\overline{a-b}\sqrt{ab}$		

Il en eſt ainſi des autres, mais on connoît ſouvent par un ſimple regard, ou en ſuivant à peu prés les methodes expliquées III. 39. & 40. quelles ſont les racines des binomes exprimez par lettres. Par exemple pour trouver celle du binome $aa+bc+2a\sqrt{bc}$, je vois d'abord que $2a\sqrt{b}$ eſt double du plan de a racine du quarré aa par $\sqrt{bc}$ la racine de bc conſideré comme quarré : Et ainſi je connois que $a+\sqrt{bc}$ eſt la racine du binome $aa+bc+2a\sqrt{bc}$.

Pareillement pour trouver la racine de $mm+\frac{pxx}{m}+x\sqrt{4pm}$, je vois que $x\sqrt{4pm}$, ou ce qui eſt la même choſe, *par* 30. *S.* que $2mx\sqrt{\frac{p}{m}}$ eſt double du produit de *m* racine du quarré *mm* par $x\sqrt{\frac{p}{m}}$ racine de $\frac{pxx}{m}$ conſideré comme quarré : Et ainſi je connois que $m+x\sqrt{\frac{p}{m}}$ eſt la racine du binome $mm+\frac{pxx}{m}+x\sqrt{4pm}$.

Démonſtration du Probleme.

Soit pris tel binome qu'on voudra comme $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Pour quarrer ce binome, l'on prend *a* quarré de $\sqrt{a}$, plus $2\sqrt{ab}$ deux plans de $\sqrt{a}$ par $\sqrt{b}$, plus *b* quarré de $\sqrt{b}$. La ſomme $\overline{a+b}+2a\sqrt{ab}$ eſt donc le quarré de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, & ce quarré eſt un binome, car $\overline{a+b}$ ne ſont pris que pour une partie, *par* 39. *S.* & $2\sqrt{ab}$ pour une autre. Or retranchant par la premiere regle du Probleme le quarré de la partie incommenſurable $2\sqrt{ab}$, du quarré de la partie commenſurable $\overline{a+b}$, il reſte $aa-2ab+bb$ qui eſt un quarré dont la racine eſt $a-b$. Ajoûtant donc $a-b$ par la ſeconde regle à $a+b$, la ſomme eſt $2a$, c'eſt à dire le double du quarré de la partie $\sqrt{a}$; & retranchant par la même regle cette racine $\overline{a-b}$ de $a+b$, la difference eſt $2b$, c'eſt à dire le double du quarré de l'autre partie $\sqrt{b}$. Prenant donc *a* moitié de la ſomme $2a$, & *b* moitié de la difference $2b$, & tirant chaque racine de *a* & de *b*, on aura $\sqrt{a}$ & $\sqrt{b}$, dont la ſomme $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ eſt la racine du binome $\overline{a+b}+2\sqrt{ab}$. Et l'on verra par un ſemblable raiſonnement que la difference $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ eſt la racine de l'autre binome $\overline{a+b}-2\sqrt{ab}$. Les regles du Probleme ont donc preſcrit ce qu'il falloit faire.

DE L'EXTRACTION DES RACINES QUARRÉES DES MULTINOMES.

Pour avoir quelque idée de leur nature, & pour trouver moyen de les reſoudre, nous les pourons conſiderer dans leur formation.

Soit donc premierement le trinome $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ tel que ſa premiere partie $\sqrt{a}$ ſurpaſſe chacune des deux autres, & que la ſeconde $\sqrt{b}$ ſurpaſſe la troiſiéme $\sqrt{c}$. Ce trinome aura pour quarré le quadrinome ſuivant $\overline{a+b+c}+2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc}$.

La premiere partie $\overline{a+b+c}$ ſera toute commenſurable, la ſeconde XLVIII. $2\sqrt{ab}$ ſurpaſſera chacune des deux ſuivantes, à cauſe que *a* eſt plus grand que chacune des deux grandeurs *b* & *c*, & par la même raiſon la troiſiéme partie $2\sqrt{ac}$ ſurpaſſera la quatriéme $2\sqrt{bc}$. Or cela eſtant ainſi, pour trouver la racine du quadrinome $a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc}$, ou d'un autre ſemblable. 1°. Je prends $\sqrt{ab}$ moitié de la ſeconde partie $2\sqrt{ab}$, & je multiplie $\sqrt{ab}$ par $\sqrt{ac}$ moitié de la troiſiéme $2\sqrt{ac}$, le produit eſt $a\sqrt{bc}$. 2°. Je diviſe le produit $a\sqrt{bc}$ par $\sqrt{bc}$ moitié de la quatriéme partie $2\sqrt{bc}$, & l'expoſant eſt *a*, dont je prends la racine quarrée $\sqrt{a}$.

3°. Je diviſe par $\sqrt{a}$ que je viens de trouver, $\sqrt{ab}$ moitié de la ſeconde partie $2\sqrt{ab}$, plus $\sqrt{ac}$ moitié de la troiſiéme partie $2\sqrt{ac}$, & les expoſans ſont $\sqrt{b}$ & $\sqrt{c}$. Or voyant que $\overline{a+b+c}$ ſomme des trois quarrez des expoſans $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, & $\sqrt{c}$ que je viens de trouver, font la partie commenſurable du quadrinome qu'on propoſe, je connois auſſi que $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ eſt la racine que je cherche, *par III. 17. & 18.*

Pour trouver la racine du quadrinome $10+2\sqrt{10}-2\sqrt{15}-2\sqrt{6}$. 1°. Je l'écris en cette ſorte $10-2\sqrt{15}+2\sqrt{10}-2\sqrt{6}$, car il faut que les parties incommenſurables qui ſont les plus grandes ſoient les premieres, & que celles qui ſont les plus petites ſoient les dernieres, afin de le pouvoir reſoudre ſelon la forme du quadrinome precedent. 2°. Je prends $\sqrt{15}$ moitié de la ſeconde partie $2\sqrt{15}$, & je multiplie $\sqrt{15}$ par $\sqrt{10}$ moitié de la troiſiéme partie $2\sqrt{10}$, le produit eſt $\sqrt{150}$, ou $5\sqrt{6}$, je diviſe ce produit par $\sqrt{6}$ moitié de la quatriéme partie $2\sqrt{6}$, l'expoſant eſt 5 dont je prends la racine qui eſt $\sqrt{5}$. 3°. Je diviſe par $\sqrt{5}$ que je viens de trouver $-\sqrt{15}$ moitié de la ſeconde partie $-2\sqrt{15}$, plus $\sqrt{10}$ moitié de la troiſiéme partie $2\sqrt{10}$, & les expoſans ſont $-\sqrt{3}$ & $\sqrt{2}$. Or voyant que $5+3+2$ les trois quarrez des expoſans $\sqrt{5}$, $-\sqrt{3}$, & $\sqrt{2}$ que je viens de trouver, font 10 qui eſt la partie commenſurable du quadrinome à reſoudre, je connois que $\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}$ eſt la racine que je cherche.

On trouvera en même ſorte que la racine de $6\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2\sqrt{6}-4$ eſt $\sqrt{\sqrt{18}}-\sqrt{\sqrt{8}}+\sqrt{\sqrt{2}}$.

Soit en ſecond lieu le quadrinome $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ tel que ſes premieres parties ſoient les plus grandes, & que les dernieres ſoient les plus petites. Ce quadrinome aura pour ſon quarré le ſeptinome ſuivant $\overline{a+b+c+d}+2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ad}+2\sqrt{bd}+2\sqrt{cd}$. La premiere partie $\overline{a+b+c+d}$ ſera toute commenſurable, la ſeconde $2\sqrt{ab}$, & la troiſiéme $2\sqrt{ac}$ ſurpaſſeront chacune de celles qui les ſuivent, mais la quatriéme $2\sqrt{bc}$ poura également ſurpaſſer ou eſtre ſurpaſſée par la cinquiéme $2\sqrt{ad}$. Car ſoit $a=7$, $b=3$, $c=2$, & $d=1$. Donc $2\sqrt{bc}=2\sqrt{6}$, & $2\sqrt{ad}=2\sqrt{7}$ qui ſurpaſſe $2\sqrt{6}$. Mais par une ſuppoſition nouvelle, ſoit $a=7$, $b=5$, $c=3$, & $d=2$. Donc $2\sqrt{bc}=2\sqrt{15}$, & $2\sqrt{ad}=2\sqrt{14}$ qui eſt ſurpaſſée par $2\sqrt{15}$. Il peut donc également arriver, lors même que a eſt plus grand que chacune des grandeurs b, c, & d, & b plus grand que chacune des grandeurs c & d, & c plus grand que d; que la quatriéme partie du ſeptinome $2\sqrt{bc}$ ſurpaſſe la cinquiéme $2\sqrt{ad}$, ou bien qu'elle en ſoit ſurpaſſée. Ainſi quoique les ſeptinomes qui ont des quadrinomes pour racines, puiſſent toûjours ſe reſoudre, cependant leur reſolution ne poura pas toûjours ſe faire d'une même maniere, mais ſeulement par l'une ou par l'autre des deux ſuivantes.

Premiere Maniere.

Par exemple pour reſoudre le ſeptinome $\overline{a+b+c+d}+2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ad}+2\sqrt{bd}+2\sqrt{cd}$. 1°. Je prends $\sqrt{ab}$ moitié de la ſeconde partie $2\sqrt{ab}$, & je multiplie $\sqrt{ab}$ par $\sqrt{ac}$ moitié de la troiſiéme $2\sqrt{ac}$, le produit eſt $a\sqrt{bc}$. 2°. Je diviſe le produit $a\sqrt{bc}$ par $\sqrt{bc}$ moitié de la quatriéme partie $2\sqrt{bc}$, & l'expoſant eſt a dont je prends la racine quarrée qui eſt $\sqrt{a}$. 3°. Je diviſe par $\sqrt{a}$ que je viens de trouver, $\sqrt{ab}$ moitié de la ſeconde partie $2\sqrt{ab}$, plus $\sqrt{ac}$ moitié de la troiſiéme $2\sqrt{ac}$, plus $\sqrt{ad}$ moitié de la cinquiéme $2\sqrt{ad}$, je paſſe la quatriéme $2\sqrt{bc}$, parceque $\sqrt{a}$ n'a pas multiplié $\sqrt{bc}$, les expoſans que je trouve ſont $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, & $\sqrt{d}$. 4°. Je quarre $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ qui eſt la ſomme de tous les expoſans que j'ai trouvez, & voyant que le quarré de cette ſomme eſt le même qu'on propoſe à reſoudre, je connois que $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ eſt la racine que je cherche.

Seconde Maniere.

Mais pour reſoudre le ſeptinome $\overline{a+b+c+d}+2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{ad}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{bd}+2\sqrt{cd}$, où la partie $2\sqrt{ad}$ eſt miſe devant $2\sqrt{bc}$, parcequ'elle eſt plus grande. 1°. Je prends comme dans l'exemple qui precede, $\sqrt{ab}$ moitié de la ſeconde partie $2\sqrt{ab}$, & je multiplie $\sqrt{ab}$ par $\sqrt{ac}$ moitié de la troiſiéme $2\sqrt{ac}$, le produit eſt $a\sqrt{bc}$. 2°. Je diviſe le produit $a\sqrt{bc}$ par $\sqrt{ad}$ moitié de la quatriéme partie $2\sqrt{ad}$, & l'expoſant eſt $a\sqrt{\frac{bc}{ad}}$. 3°. Je diviſe par cet expoſant, $\sqrt{ab}$, plus $\sqrt{ac}$, plus $\sqrt{bc}$, les moitiez de la ſeconde, troiſiéme, & cinquiéme partie, mais voyant que le quarré de la ſomme des expoſans trouvez n'eſt pas le même qu'on propoſe à reſoudre, je change ainſi l'operation. 1°. Je multiplie $\sqrt{ac}$ par $\sqrt{ab}$, & le produit eſt $a\sqrt{bc}$. 2°. Je ne diviſe pas $a\sqrt{bc}$ par $\sqrt{ad}$ moitié de la quatriéme partie, mais par $\sqrt{bc}$ moitié de la cinquiéme, & l'expoſant eſt a dont je prends la racine quarrée $\sqrt{a}$. 3° Je diviſe par $\sqrt{a}$ les moitiez des parties conſecutives $2\sqrt{ab}$, $2\sqrt{ac}$, & $2\sqrt{ad}$, les expoſans ſont $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, & $\sqrt{d}$. 4°. Voyant que le quarré de $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ ſomme de tous les expoſans trouvez, eſt le même qu'on propoſe à reſoudre, je connois que $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ eſt la racine que je cherche.

On diſtinguera mieux dans la reſolution des ſeptinomes numeriques ces deux manieres differentes. On verra par exemple que $13+2\sqrt{21}+2\sqrt{14}-2\sqrt{7}+2\sqrt{6}-2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ peut bien ſe reſoudre par la premiere, mais il ne peut pas ſe reſoudre par la ſeconde. La racine qu'on trouve eſt $\sqrt{7}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$.

Comme au contraire, on verra que $17+2\sqrt{35}+2\sqrt{21}+2\sqrt{15}-2\sqrt{14}-2\sqrt{10}-2\sqrt{6}$ peut bien ſe reſoudre par la ſeconde maniere, mais il ne poura pas ſe reſoudre par la premiere. La racine qu'on trouve eſt $\sqrt{7}+\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Cependant on a diſpoſé par ordre dans chacun de ces exemples les plus grandes parties les premieres, & les plus petites les dernieres.

Stevin l'un des Auteurs qui ont traitté plus à fonds les incommenſurables, nous propoſe une eſpece de quadrinome dont la racine eſt pareillement quadrinome. Mais il dit, que n'ayant point encore trouvé de regles pour les reſoudre legitimement, il ſe contentera d en propoſer un exemple pour ceux qui voudront bien s'en occuper.

L'exemple qu'il apporte eſt le quadrinome $15+6\sqrt{6}+10\sqrt{2}+8\sqrt{3}$, lequel a même forme que le quarré du quadrinome $\sqrt{ab}+b+\sqrt{a}+\sqrt{b}$, qui eſt $\overline{ab+bb+a+b}+\overline{2b+2}\sqrt{ab}+\overline{2a+2b}\sqrt{b}+4b\sqrt{a}$. Or pour reſoudre ce quadrinome literal. 1°. Je vois ſi $\overline{a+b}$ moitié de ce qui eſt hors du ſecond ſigne $\sqrt{}$, égale les grandeurs b & a, qui ſont l'une ſous le ſecond ſigne & l'autre ſous le troiſiéme, & ſi b qui eſt ſous le ſecond, égale le quart des $4b$ qui ſont hors du troiſiéme. 2°. Par le moyen des deux grandeurs a & b que je viens de trouver, j'en compoſe les quatre $\sqrt{ab}$, b, $\sqrt{a}$, & $\sqrt{b}$; & voyant que le quarré de $\sqrt{ab}+b+\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ſomme de ces quatre parties, rend le quadrinome même qu'on propoſe, je connois auſſi que $\sqrt{ab}+b+\sqrt{a}+\sqrt{b}$ eſt la racine que je cherche.

Pareillement pour reſoudre le quadrinome $15+6\sqrt{6}+10\sqrt{2}+8\sqrt{3}$ de l'exemple que Stevin nous apporte. 1°. Je vois ſi 5 moitié de 10 qui eſt hors du ſecond ſigne, égale les deux nombres 2 & 3, qui ſont l'un ſous le ſecond ſigne & l'autre ſous le troiſiéme, & ſi 2 qui eſt ſous le ſecond égale le quart de 8 qui eſt hors du troiſiéme. 2°. Par le moyen des deux nombres 3 & 2 que je viens de trouver, je compoſe les quatre grandeurs $\sqrt{6}$, 2, $\sqrt{3}$ & $\sqrt{2}$, & voyant que le quarré de $\sqrt{6}+2+\sqrt{3}+\sqrt{2}$, rend le quadrinome même que Stevin nous propoſe à reſoudre, je connois que $\sqrt{6}+2+\sqrt{3}+\sqrt{2}$ en eſt la racine.

On trouvera en même ſorte que la racine de $20+8\sqrt{6}+10\sqrt{3}+12\sqrt{2}$ eſt $3+\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

Mais il peut ſouvent arriver que $\overline{2b+2\sqrt{ab}}$ ſoit plus petite que $\overline{2a+2b}\sqrt{b}$, ce qui change un peu l'operation. Par exemple je ne puis reſoudre le quadrinome $209+18\sqrt{2}+6\sqrt{14}+8\sqrt{7}$ comme j'ai fait les deux precedens, mais je le puis reſoudre en le conſiderant ſelon la forme du quadrinome $\overline{ab+bb+a+b}+\overline{2a+2b}\sqrt{b}+\overline{2b+2}\sqrt{ab}+4b\sqrt{a}$ où la partie $\overline{2a+2b}\sqrt{b}$ eſt écrite devant $\overline{2b+2}\sqrt{ab}$. Car je trouve ainſi la racine de $209+18\sqrt{2}+6\sqrt{14}+8\sqrt{7}$. 1°. Je vois ſi 9 moitié de 18 qui eſt hors du premier ſigne, égale 2 & 7 qui ſont l'un ſous le premier & l'autre ſous le troiſiéme, & ſi 2 qui eſt ſous le premier égale le quart de 8 qui eſt hors du troiſiéme ſigne. 2°. Par le moyen des deux nombres 2 & 7 que je viens de trouver, je compoſe les quatre grandeurs $\sqrt{14}$, $\sqrt{7}$, 2 & $\sqrt{2}$, & voyant que le quarré de $\sqrt{14}+\sqrt{7}+2+\sqrt{2}$ rend celui qu'on propoſe à reſoudre, je connois que $\sqrt{14}+\sqrt{7}+2+\sqrt{2}$ en eſt la racine.

J'aurois encore à examiner & à expliquer pluſieurs cas ſemblables, mais cela me meneroit trop loin, & n'auroit pas beaucoup d'uſage. Peut-eſtre qu'en parlant des égalitez, je donnerai un moyen general pour reſoudre tous les quadrinomes dont la racine eſt quadrinome. Je me contenterai ſeulement de faire remarquer ici qu'il ſe rencontre ſouvent des trinomes dont la racine eſt quadrinome, quoique Stevin n'en tombe pas d'accord. Tel eſt par exemple le trinome $15-2\sqrt{6}+2\sqrt{2}$ dont la racine eſt $\sqrt{6}-2+\sqrt{3}+\sqrt{2}$, & qui a même forme que le trinome literal

$\overline{ab+bb+a+b-2b+2\sqrt{ab}+2a-2b\sqrt{b}}$, lequel a pour racine le quadrinome literal $\sqrt{ab-b}+\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

J'ajoûterai auſſi qu'il y a d'autres eſpeces de multinomes dont la racine ſe pouroit trouver ſelon les regles du Probleme treiziéme 47. S.

Par exemple $26-4\sqrt{5}-\sqrt{640-256\sqrt{5}}$ eſt une eſpece de trinome dont je trouve ainſi la racine. 1°. Je retranche $640-256\sqrt{5}$ quarré de la petite partie $\sqrt{640-256\sqrt{5}}$, de $756-208\sqrt{5}$ quarré de la grande partie $26-4\sqrt{5}$. Le reſte eſt $116+48\sqrt{5}$, & je tire comme au premier exemple du Probleme treiziéme, $6+4\sqrt{5}$ la racine de ce reſte.

2°. J'ajoûte la racine $6+4\sqrt{5}$ à la grande partie $26-4\sqrt{5}$, & la ſomme eſt 32, & je retranche la même racine $6+4\sqrt{5}$ de la partie $26-4\sqrt{5}$, & la difference eſt $20-8\sqrt{5}$.

3°. Je tire 4 racine de 16 moitié de la ſomme 32, & $\sqrt{10-4\sqrt{5}}$ racine de $10-4\sqrt{5}$ moitié de la difference $20-8\sqrt{5}$, enſuite je prends la difference de 4 & $\sqrt{10-4\sqrt{5}}$, à cauſe que la partie $\sqrt{640-256\sqrt{5}}$ a le ſigne — au multinome qu'on propoſe, & je connois enfin que $4-\sqrt{10-4\sqrt{5}}$ eſt la racine que je cherche.

$$\begin{array}{rlrlrl}
 & 26-4\sqrt{5},\ -\sqrt{640-256\sqrt{5}} & & & & \\
\textit{par} & 26-4\sqrt{5} & & +26-4\sqrt{5} & & 26-4\sqrt{5} \\
\textit{grand quarré} & +756-208\sqrt{5} & & +6+4\sqrt{5} & & -6+4\sqrt{5} \\
\textit{petit quarré} & -640+256\sqrt{5} & \textit{ſomme} & 32 \quad * & \textit{difference} & 20-8\sqrt{5} \\
\textit{reſte} & +116+48\sqrt{5} & \textit{ſa moitié} & 16 & \textit{ſa moitié} & 10-4\sqrt{5} \\
\textit{ſa racine} & 6+4\sqrt{5} & & 4 \quad - & & \sqrt{10-4\sqrt{5}}\ \textit{rac. cherch.}
\end{array}$$

AVERTISSEMENT.

Lorſque la racine d'un binome ou d'un autre multinome ne peut avoir une expreſſion aſſez ſimple, il vaut mieux écrire devant eux le ſigne radical. On trouve par exemple ſelon les regles du Probleme treiziéme 47. S. que la racine quarrée de $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ *eſt* $\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{1}{2}}}-\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{1}{2}}}$. *qui eſt beaucoup plus compoſée que* $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$. *C'eſt pourquoi au lieu de cette racine* $\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{1}{2}}}-\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{1}{2}}}$, *il eſt plus à propos d'écrire* $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$. *Car cette expreſſion eſt non ſeulement plus ſimple, & en quelque façon plus connuë que la precedente, mais elle a encore cet avantage qu'on peut en Geometrie la déterminer plus facilement par lignes. Car on n'a beſoin que de trouver trois fois une moyenne proportionnelle entre deux lignes pour déterminer* $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$, *au lieu que pour déterminer par lignes* $\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{1}{2}}}-\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{1}{2}}}$, *on a beſoin de trouver quatre fois une moyenne proportionnelle entre deux lignes.* L.

DE L'EXTRACTION

DES AUTRES RACINES.

LI. Pour tirer la racine 4^{e} d'un binome ou multinome, on tire premierement ſa racine quarrée, & la racine de cette racine eſt celle que l'on cherche. Pareillement pour en tirer une racine 8^{e}. on en tire la racine quarrée, & enſuite la racine de cette racine, & une nouvelle racine tirée de cette racine de racine, eſt celle que l'on cherche. Il en eſt ainſi des racines 16^{e}. 32^{e}. &c. Mais on n'a pas encore donné de regles generales pour tirer les racines cubiques, 5^{es}. 7^{es}. & autres ſemblables de tous les multinomes qui pouroient ſe reſoudre. Si on avoit de telles regles, on en auroit auſſi pour tirer toutes les autres, comme les racines 6^{e}. 9^{e}. 12^{e}. 15^{e}. &c. *par III.* 38. *& ſeq.* Schooten nous en a ſeulement donné une generale pour tirer toute ſorte de racines des binomes, lorſque ces racines peuvent pareillement eſtre exprimées par d'autres binomes. Sa regle eſt telle.

Règle generale pour tirer toutes ſortes de racines des binomes, qui ont des binomes pour leurs racines.

PREPARATION.

LII. 1°. Pour tirer les racines des binomes où l'on trouve des fractions, on multiplie chacune de leurs parties par le ſecond terme de ces fractions afin de les oſter. Par exemple pour tirer quelque racine de $12\frac{1}{2} + 11\surd 2$, je multiplie chaque partie du binome par 2, & j'ai $25 + 22\surd 2$. Pareillement pour tirer quelque racine de $11\surd\frac{2}{5} + \frac{5}{2}\surd 5$, je multiplie tout le binome premierement par $\surd 5$, & j'ai $11\surd 2 + \frac{25}{2}$, c'eſt à dire $12\frac{1}{2} + 11\surd 2$, & enſuite par 2, comme j'ai déja fait. Il en eſt ainſi des autres.

2°. Si les binomes qu'on ſe propoſe de reſoudre, n'ont aucune de leurs parties qui ſoit commenſurable, on réduit l'une de ſes deux parties à ſon expreſſion la plus ſimple, & l'on multiplie ou l'on diviſe chacune par ce qui reſte ſous le ſigne radical de cette partie. Par exemple pour tirer quelque racine de $\surd 242 + \surd 243$, je réduis la partie $\surd 242$ à $11\surd 2$, & alors, multipliant chaque partie par $\surd 2$, j'ai $22 + \surd 486$, où 22 eſt commenſurable. Pareillement pour tirer quelque racine de $\surd C.3993 + \surd 6^{e}.1757812 5$, je réduis $\surd C.3993$ à $11\surd C.3$, & diviſant chaque partie par $\surd C.3$, j'ai $11 + \surd 125$, où 11 eſt commenſurable.

3°. Pour tirer les racines 3^{e}. 5^{e}. 7^{e}. & autres ſemblables, lorſque la racine 3^{e}. 5^{e}. 7^{e}. ou autre, de la difference qui ſe trouve entre les quarrez des parties du binome, ne ſera pas un nombre entier, on multipliera chaque partie du binome par cette difference, s'il en faut tirer une racine cubique; par le quarré de cette difference, s'il en faut tirer une racine 5^{e}. par le cube de cette difference, s'il en faut tirer une racine 7^{e}. par la 5^{e}. puiſſance de cette difference, s'il en faut tirer une racine 11^{e}. & ainſi des autres. Et alors, on aura un autre binome, où la racine 3^{e}. 5^{e}. 7^{e}. ou autre, de la difference qui eſt entre les quarrez des parties, ſera toûjours un nombre entier.

Par exemple pour tirer la racine cubique de $22 + \sqrt{486}$, j'oſte 484 quarré de 22, de 486 quarré de $\sqrt{486}$, & il reſte 2, dont la racine cubique n'eſt pas un nombre entier. C'eſt pourquoi je multiplie tout le binome par 2, & j'ai $44 + \sqrt{1944}$, où la racine cubique de 8 difference de 1936 & 1944 quarrez de 44 & $\sqrt{1944}$, eſt le nombre entier 2. De même pour tirer la racine 5e. de $11 + \sqrt{125}$, 121 quarré de 11, oſté de 125 quarré de $\sqrt{125}$, laiſſe la difference 4 dont la racine 5e. n'eſt pas un nombre entier ; & ainſi je multiplie tout le binome par 16 quarré de 4, & j'ai $176 + \sqrt{3200}$, où la racine 5e de 1024, difference de 30976 & 3200, qui ſont les quarrez de 176 & $\sqrt{3200}$, eſt le nombre entier 4.

Pareillement pour tirer la racine 7e. de $338 + \sqrt{114242}$, la difference qui eſt entre les quarrez des parties eſt 2, dont la racine 7e. n'eſt pas un nombre entier. Je multiplie donc tout le binome par 8 cube de 2, & j'ai $2704 + \sqrt{7311488}$, où la racine 7e. de la difference qui eſt entre les quarrez des parties eſt 2. Il en eſt ainſi des autres.

La preparation precedente donne toûjours des binomes dans leſquels une partie, & le quarré de l'autre partie, plus la racine 3e. 5e. 7e. ou autre, de la difference qui eſt entre les quarrez des parties, ſont des nombres entiers. Et ce binome reſolu, donne auſſi la reſolution de celui qu'on propoſe, quoiqu'ils ſoient differens entr'eux. Car il ne faut, comme on verra plus bas, que diviſer ou multiplier la racine 3e. 5e. 7e. ou autre que l'on a découverte, par les racines 3es. 5es. 7es. ou autres, des nombres par leſquels on a multiplié ou diviſé le binome qu'on avoit premierement propoſé.

REGLE.

Or le binome eſtant ainſi preparé, afin d'en trouver la racine, on cherche *par 9. S.* un nombre commenſurable, qui en ſurpaſſe la veritable racine d'une grandeur qui ne ſoit point au deſſus de $\frac{1}{2}$ Et alors, ſi la partie commenſurable du binome eſt plus grande que ſon autre partie, 1°. On réduit en une ſomme le nombre pris pour racine approchée, plus l'expoſant de la racine 3e. 5e. 7e. ou autre, de la difference qui eſt entre les quarrez des parties, à ce nombre; Et la moitié du plus grand nombre entier renfermé dans la ſomme, eſt la partie commenſurable de la racine cherchée. Enſuite on oſte du quarré de cette partie découverte la racine 3e. 5e. 7e. ou autre de la difference des quarrez des parties, & ce qui reſte eſt le quarré de l'autre partie que l'on cherche.

Mais ſi la partie commenſurable du binome à reſoudre eſt plus petite que ſon autre partie; 1°. On oſte du nombre pris pour racine approchée l'expoſant de la racine 3e. 5e. 7e. ou autre de la difference qui eſt entre les quarrez des parties, à ce nombre; Et la moitié du plus grand nombre entier renfermé dans le reſte, eſt la partie commenſurable de la racine cherchée. Enſuite on ajoûte au quarré de cette partie découverte la racine 3e. 5e. 7e. ou autre, de la difference qui eſt entre les quarrez des parties. Et la ſomme eſt le quarré de l'autre partie que l'on cherche.

Or on connoît ſi le binome découvert eſt la racine cherchée, en élevant ce binome à une puiſſance égale à celle du premier qu'on avoit à reſoudre. Les exemples ſuivans éclairciront ce qu'on vient de dire.

Premier Exemple.

Pour tirer la racine cubique de $20 + \sqrt{392}$. Connoiſſant que la racine cubique de la difference qui eſt entre les quarrez des parties eſt le nombre entier 2, je tire quelque racine quarrée de 392, qui ſoit preſque égale à ce nombre, afin qu'en la joignant à 20, je puiſſe avoir une ſomme commenſurable preſqu'égale au binome $20 + \sqrt{392}$. Cette racine eſt 19 ou 20, laquelle eſtant ajoûtée à la partie commenſurable 20, donne la ſomme 39 ou 40. Or je connois en operant ſelon la methode expliquée 9. S. que la racine cubique de 39 ou de 40 eſt entre 3 & $3\frac{1}{2}$. Et ainſi $3\frac{1}{2}$ ſurpaſſera la veritable racine cubique du binome $20 + \sqrt{392}$ qui eſt entre 39 & 40, d'une grandeur qui eſt au deſſous de $\frac{1}{2}$. C'eſt pourquoi je prends $3\frac{1}{2}$ ſelon la regle pour la racine cubique de $20 + \sqrt{392}$. Enſuite je diviſe 2, c'eſt à dire la racine cubique de la difference qui eſt entre les quarrez des parties, par $3\frac{1}{2}$ que j'ai pris pour racine approchée, & l'expoſant eſt $\frac{4}{7}$. Or parceque la partie commenſurable 20 eſt plus grande que la partie incommenſurable $\sqrt{392}$, j'ajoûte l'expoſant trouvé $\frac{4}{7}$ à la racine approchée $3\frac{1}{2}$. La ſomme eſt $4\frac{1}{14}$; & 2, moitié de 4 qui eſt le plus grand nombre entier renfermé dans 4_{14}, eſt la partie commenſurable de la racine cubique ou du binome que je cherche. Enſuite le quarré de cette partie eſt 4, dont j'oſte 2 racine cubique de 8 difference des quarrez des parties, & le reſte 2 eſt le quarré de l'autre partie que je cherche. Le binome $2 + \sqrt{2}$ ſera donc la racine cubique cherchée, ſi toutefois on la peut exprimer par un binome. Et pour m'en aſſurer, je prens le cube de $2 + \sqrt{2}$; & voyant que ce cube eſt le binome même que j'avois à réſoudre, je ſuis certain que le binome $2 + \sqrt{2}$ en eſt la racine cubique.

Second Exemple.

Pour tirer la racine cubique de $25 + \sqrt{968}$. Connoiſſant que la racine cubique de la difference des quarrez des parties eſt le nombre entier 7, je tire une racine quarrée de 968, afin d'avoir une ſomme commenſurable preſqu'égale au binome $25 + \sqrt{968}$. Cette racine eſt 31 ou 32, laquelle eſtant ajoûtée à la partie commenſurable 25, donne la ſomme 56 ou 57. Or je connois en operant ſelon la methode expliquée 9. S. que la racine cubique de 56 ou de 57 eſt entre $3\frac{1}{2}$ & 4. Et ainſi 4 ſurpaſſera la veritable racine cubique du binome $25 + \sqrt{968}$ qui eſt entre 56 & 57, d'une grandeur qui eſt au deſſous de $\frac{1}{2}$. C'eſt pourquoi je prens 4 ſelon la regle pour la racine cubique de $25 + \sqrt{968}$. Enſuite je diviſe 7, c'eſt à dire la racine cubique de la difference qui eſt entre les quarrez des parties, par 4 que j'ai pris pour racine approchée, & l'expoſant eſt $\frac{7}{4}$. Or parceque la partie commenſurable 25 ne ſurpaſſe point la partie incommenſurable 968, je retranche l'expoſant trouvé $\frac{7}{4}$ de la racine approchée 4. Le reſte eſt $\frac{9}{4}$ ou $2\frac{1}{4}$; & 1, moitié de 2 qui eſt le plus grand nombre entier enfermé dans $2\frac{1}{4}$, eſt la partie commen-

ſurable

ſurable de la racine ou du binome que je cherche. Enſuite le quarré de cette partie eſt 1, à qui j'ajoûte 7 racine cubique de la difference qui eſt entre les quarrez des parties, & la ſomme 8 eſt le quarré de l'autre partie. Le binome $1+\sqrt{8}$ ſera donc la racine cubique cherchée, ſi toutefois cette racine peut eſtre exprimée par un binome. Et pour m'en aſſurer je prens le cube de $1+\sqrt{8}$; & voyant que ce cube eſt le binome même $25+\sqrt{968}$ que j'avois à réſoudre, je ſuis certain que le binome $1+\sqrt{8}$ en eſt la racine cubique.

L'on trouvera en même ſorte que la racine cubique du binome $44+\sqrt{1944}$ eſt le binome $2+\sqrt{6}$.

Troiſiéme Exemple.

Pour tirer la racine 5^{e}. de $176+\sqrt{32000}$. 1°. Je prens $3\frac{1}{2}$ pour racine 5^{e}. approchée du binome, à peu prés comme aux exemples precedens. 2°. Je diviſe 4, racine 5^{e}. de la difference qui eſt entre les quarrez des parties, par $3\frac{1}{2}$ pris pour racine approchée, & l'expoſant eſt $1\frac{1}{7}$. Or parceque la partie 176 eſt plus petite que $\sqrt{32000}$, j'oſte l'expoſant $1\frac{1}{7}$ de $3\frac{1}{2}$ pris pour la racine 5^{e}. du binome. Le reſte eſt $2\frac{5}{14}$; & 1, moitié de 2 le plus grand nombre entier enfermé dans $2\frac{5}{14}$, eſt la partie commenſurable de la racine cherchée. Enſuite le quarré de cette partie 1 eſt 1, à qui j'ajoûte 4 la racine 5^{e}. de la difference des quarrez des parties, & la ſomme 5 eſt le quarré de l'autre partie que je cherche. Et pour ſçavoir ſi $1+\sqrt{5}$ eſt la racine du binome $176+\sqrt{32000}$, j'en prens la 5^{e}. puiſſance, & voyant que cette puiſſance rend le binome même qu'il faut reſoudre, je m'aſſure que $1+\sqrt{5}$ en eſt la racine 5^{e}.

Quatriéme Exemple.

Pour tirer la racine 7^{e}. de $2704+\sqrt{7311488}$. 1°. Je prens $3\frac{1}{2}$ pour la racine 7^{e}. approchée. 2°. Je diviſe 2 racine 5^{e}. de la difference qui eſt entre les quarrez des parties, par $3\frac{1}{2}$ pris pour racine approchée, & l'expoſant eſt $\frac{4}{7}$. Or parceque 2704 ſurpaſſe $\sqrt{7311488}$, j'ajoûte l'expoſant $\frac{4}{7}$ à $3\frac{1}{2}$. La ſomme eſt $4\frac{1}{14}$, & 2, moitié de 4 le plus grand nombre entier renfermé dans $4\frac{1}{14}$, eſt la partie commenſurable de la racine cherchée. Enſuite le quarré de cette partie 2 eſt 4, dont je retranche 2 racine 7^{e}. de la difference des quarrez des parties; le reſte 2 eſt le quarré de l'autre partie. Et je connois que $2+\sqrt{2}$ eſt la racine que je cherche, parceque ſa 7^{e}. puiſſance eſt $2704+\sqrt{7311488}$, dont il falloit trouver la racine 7^{e}. Il en eſt ainſi des autres puiſſances plus élevées.

Moyen pour faciliter la preuve.

Mais l'on doit remarquer qu'il n'eſt pas toûjours neceſſaire d'élever entierement les binomes qu'on a découvert à une puiſſance égale à celle des binomes qu'il faut reſoudre, afin d'eſtre aſſuré qu'ils en ſont les racines cherchées; car on peut le reconnoître en abregeant, ou même en ſupprimant une partie de ſon operation, par le moyen de la Table des puiſſances.

Par exemple pour voir ſi le binome $1+\sqrt{5}$ eſt la racine 5^{e}. de

$176+\surd 32000$, je ſuppoſe $176=a$, & $\surd 32000=b$, & prenant le rang de la 5ᵉ. puiſſance $a^5+5a^4b+10a^3bb+10aab^3+5ab^4+b^5$, j'ajoûte en une ſomme les parties a^5, $10a^3bb$, & $5ab^4$, où b n'a point de dimenſions impaires, c'eſt à dire j'ajoûte 1, 50, & 125 ; & voyant que la ſomme 176 eſt la partie commenſurable du binome $176+\surd 32000$, je connois auſſi que $1+\surd 5$ en eſt la racine 5ᵉ.

De même pour voir ſi $2+\surd 2$ eſt la racine 7ᵉ. du binome $2704+\surd 7311488$, je ſuppoſe $2704=a$, & $\surd 7311488$, & prenant le rang de la 7ᵉ. puiſſance $a^7+7a^6b+21a^5bb+35a^4b^3+35a^3b^4+21aab^5+7ab^6+b^7$, j'ajoûte en une ſomme les parties a^7, $21a^5bb$, $35a^3b^4$, & $7ab^6$, où b n'a point de dimenſions impaires, c'eſt à dire j'ajoûte en une ſomme $128=a^7$. $1344=21a^5bb$, $1120=35a^3b^4$, & $112=7ab^6$, & voyant que la ſomme 2704 eſt la partie commenſurable du binome à reſoudre, je connois auſſi que $2+\surd 2$ en eſt la racine 7ᵉ. Il en eſt ainſi des autres.

Suite de la Regle.

LIII. Enfin lorſque pour reſoudre un binome, on l'aura multiplié ou diviſé par quelque nombre, & réduit par ce moyen à un autre binome, dont on aura découvert la racine 3ᵉ. 5ᵉ. 7ᵉ. ou autre, il faudra diviſer ou multiplier cette racine découverte par la racine 3ᵉ. 5ᵉ. 7ᵉ. ou autre, du nombre par lequel on aura multiplié ou diviſé le binome qu'on avoit premierement à reſoudre.

Par exemple pour tirer la racine cubique de $12\frac{1}{2}+\surd 242$, on a multiplié ce binome par 2, & l'on a découvert que la racine du binome produit par cette multiplication eſt $1+\surd 8$; ainſi il faudra diviſer $1+\surd 8$ par $\surd\text{C}.2$, & l'on aura $\surd\text{C}.\frac{1}{2}+\surd 6^{e}.128=\surd\text{C}.\overline{12\frac{1}{2}+\surd 242}$.

On a auſſi multiplié $\surd\frac{125}{4}+\surd\frac{242}{5}$ par $\surd 5$, & on a trouvé $12\frac{1}{2}+\surd 242$, dont la racine cubique eſt $\surd\text{C}\frac{1}{2}+\surd 6^{e}.128$, laquelle eſtant diviſée par $\surd 6^{e}.5$, donne $\surd 6^{e}.\frac{1}{20}+\surd 6^{e}.\frac{128}{5}=\surd\text{C}.\overline{\surd\frac{125}{4}+\surd\frac{242}{5}}$.

Pareillement pour reſoudre $\surd\text{C}.3993+\surd 6^{e}.1757812 5$, on a diviſé ce binome par $\surd\text{C}.3$, & pour en tirer la racine 5ᵉ. on l'a encore multiplié par 16. C'eſt pourquoi on diviſera la racine 5ᵉ. $1+\surd 5$ du binome reſolu par $\surd 5^{e}.16$, & on la multipliera par $\surd 15^{e}.3$.

Je ne m'arreſte point à démontrer toutes ces choſes, on poura voir ce qu'en a dit Schooten *pag.* 395. *& ſeq.* Je dirai ſeulement que l'un des principaux uſages de cette regle a eſté juſqu'ici de ſervir pour réduire à des grandeurs commenſurables certaines racines cubiques, que Cardan détermine en quelques égalitez du 3ᵉ. degré par des expreſſions qui les renferment ſous les ſignes radicaux $\surd$ & $\surd\text{C}$. Mais en traittant de ces égalitez, j'eſtablis d'autres regles plus courtes & plus geometriques, pour découvrir immediatement ces racines, lorſqu'elles ſont commenſurables. Et de plus, on n'eſt pas aſſuré en cherchant par la methode precedente les racines 3ᵉ. 5ᵉ. 7ᵉ. ou autres, des binomes qu'on veut reſoudre, ſi les grandeurs qu'on découvre ſont veritablement les racines qu'on cherche. Il faut pour s'en aſſurer les élever au degré de la puiſſance du binome à reſoudre, & voir ſi elles rendent ce binome, ou ſi elles ne le rendent pas. En quoi l'eſprit n'eſt pas éclairé.

Ce que nous avons dit de la reſolution des quadrinomes, ſeptinomes & autres ſemblables, a le même defaut.

Je ne dis rien de l'approximation des racines des binomes ou multinomes. Car il n'y aura perſonne de ceux qui ſeront arrivez juſques à la fin de ce Quatriéme Livre, & qui ſçauront bien les principes de toutes les matieres principales que nous avons déja traittées, qui ne voye facilement qu'en cherchant les racines approchées des parties du binome ou multinome, & réduiſant ces parties en une ſomme, cette ſomme ſera la racine approchée de tout le binome ou multinome propoſé.

ELEMENS
DES
MATHEMATIQUES.

LIVRE CINQUIÉME.

DE LA COMPARAISON DES GRANDEURS ET DE LEURS RAPPORTS.

NOUS *avons enſeigné dans les Livres precedens la maniere d'operer ſur les differens rapports des grandeurs, & nous enſeignerons dans celui-ci les proprietez de ces rapports dont la connoiſſance & l'uſage ſont les plus importans pour les Mathematiques.*

I. On ſçait déja que comme la comparaiſon des grandeurs eſt un rapport de ces grandeurs, ainſi la comparaiſon des rapports eſt un rapport de ces rapports, & que la comparaiſon des rapports de rapports eſt un rapport de ces rapports de rapports. Et ainſi des autres à l'infini. Or tous ces rapports ont une égalité ou inégalité entr'eux, & leur inégalité ſe peut toûjours réduire à l'égalité, ſi l'on retranche des plus grands l'excez qui les empeſche d'égaler les plus petits, ou ſi l'on ajoûte aux plus petits ce qui leur manque pour égaler les plus grands.

II. De toutes ces égalitez celles qui ſe trouvent entre des grandeurs en partie connuës & en partie inconnuës, ſont les expreſſions ordinaires de tous les problemes ou queſtions que l'on propoſe ſur les grandeurs. C'eſt pour cela que nous avons jugé qu'il eſtoit à propos de parler ici des problemes & des égalitez qui les expriment, non ſeulement pour éclaircir les démonſtrations de ce Sixiéme Livre, mais encore pour faire voir que ces égalitez ont une liaiſon ſi eſtroite avec les rapports, qu'elles ne ſont proprement qu'une même choſe énoncée differemment, & enviſagée ſous differens coſtez.

DES PROBLEMES.

III. Tous les Problemes qui regardent les grandeurs, & qu'on ſe propoſe de réſoudre doivent toûjours renfermer des grandeurs connuës avec les rapports connus de ces grandeurs à quelques autres. Car ſi tout eſtoit connu dans ces Problemes, on auroit leur reſolution, & ainſi il ſeroit inutile de la chercher; & ſi tout en eſtoit inconnu, ne connoiſſant aucun milieu pour arriver à leur reſolution, il ſeroit impoſſible de les reſoudre. Si par exemple on me demandoit le nombre qui eſt égal à 6 & double de 3, il eſt bien viſible que celui qui me feroit une ſemblable demande, y répondroit en même temps, puiſque le nombre connu 6 eſtant égal à lui-même eſt double de 3. Mais ſi cette perſonne me demandoit le nombre qu'elle a dans ſa penſée, ſans me rien déterminer davantage; ne pouvant deviner la penſée de cette perſonne, & n'ayant rien qui me puiſſe ſervir de principe, ni d'où je puiſſe déduire par des raiſonnemens ſuivis la connoiſſance de ce qu'on me demande, la reſolution m'en eſt tout-à-fait impoſſible. Ce n'eſt donc point à ces ſortes de queſtions ou problemes qu'on doit chercher quelque réponſe, c'eſt ſeulement à ceux où l'on envelope des grandeurs & des rapports de grandeurs, qui ayant quelque choſe de connu, ont auſſi quelque choſe d'inconnu.

IV. Lorſqu'un probleme ne ſuppoſe point de contradiction, & qu'il eſt poſſible, on l'appelle *un probleme réel.* On demande par exemple qu'un nombre poſitif plus 3 faſſe 5, ce nombre qu'on demande eſt 2, car $2+3=5$, & le probleme eſtant poſſible, on l'appelle réel.

V. Mais lorſqu'un probleme ſuppoſe quelque contradiction, & qu'il eſt impoſſible, on l'appelle *un probleme imaginaire.* On demande par exemple qu'un nombre poſitif plus 5 faſſe 3, ce nombre eſt impoſſible à trouver, & le probleme enfermant une contradiction, on dit qu'il eſt imaginaire, car c'eſt vouloir que la partie d'un tout ſoit égale ou plus grande que ſon tout.

VI. Si ces problemes ſont tels que l'on y ſuppoſe quelque grandeur inconnuë & conſiderée comme lineaire égale à d'autres grandeurs entierement connuës, on les appelle *problemes ſimples.*

Si par exemple on demande quelle grandeur eſt égale aux nombres $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, & $\frac{1}{4}$; comme on connoît tous les nombres $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, qui ſont égaux à la grandeur inconnuë qu'on demande, le probleme eſt appellé ſimple.

VII. Mais ſi quelque produit entierement inconnu eſt ſuppoſé égal ou inégal à d'autres produits, qui ayent même degré que le produit inconnu, & dans leſquels le connu ſe trouve envelopé avec l'inconnu, plus ou moins d'autres produits entierement connus, on les appelle *problemes compoſez.*

Si par exemple on demande quel eſt un quarré égal au plan fait de ſa racine par $4+6$, plus ou moins un autre plan fait de 4 par 6, le quarré qu'on demande eſt tout inconnu, le plan fait de ſa racine par $4+6$ eſt un produit, où la racine du quarré inconnu, qui eſt pareillement inconnuë, ſe trouve envelopée avec le connu $4+6$, & enfin le plan de 4 par 6 eſt un produit entierement connu. Ce probleme eſt appellé compoſé.

VIII. Or il peut y avoir des problemes compoſez de plus en plus à l'infini, parceque les rapports du connu à l'inconnu peuvent eſtre cachez & envelopez de plus en plus à l'infini. La partie des Mathematiques qui nous apprend à déveloper ces ſortes de rapports, eſt celle que nous appellons *Analyſe*, d'un mot Grec qui ſignifie reſolution. Les principales de ſes regles ſont celles-ci.

PREMIERE REGLE.

IX. Lorſqu'un Probleme eſt propoſé, la premiere choſe qu'on doit faire pour commencer à le réſoudre, c'eſt de conſiderer attentivement l'eſtat de la queſtion, & toutes les conditions qu'elle renferme, & de bien diſtinguer tout ce qu'on peut d'abord y connoître, de ce que l'on n'y connoît pas encore.

SECONDE REGLE.

X. Enſuite il faut marquer exactement toutes les grandeurs qui ſont les termes de la queſtion, par les caracteres des nombres ou des lettres de l'alphabeth.

XI. Celles de ces grandeurs que l'on connoît ſeront exprimées par les caracteres des nombres qui marquent le rapport qu'elles ont avec l'unité, ou plûtoſt par les premieres lettres $a, b, c, d,$ &c. ſur tout ſi les problemes ſont difficiles à réſoudre; car il y a deux avantages fort conſiderables à exprimer ainſi par $a, b, c, d,$ &c. les grandeurs qui ſont connuës. Le premier, c'eſt qu'on abrege beaucoup la longueur & le travail de ſes operations; & le ſecond, c'eſt que les reſolutions qu'on découvre ſont ſi univerſelles qu'elles peuvent ſervir de formules ou de modeles generaux & ſenſibles pour réſoudre les queſtions infinies de même eſpece que celles qu'on aura réſoluës.

Mais pour les autres grandeurs que l'on ne connoît pas encore, elles ſeront exprimées par les dernieres lettres $z, y, x, v,$ &c. Or quoique la methode la plus generale ſoit toûjours d'exprimer chacune de ces grandeurs par une lettre inconnuë qui ne marquera qu'elle ſeule, cependant il eſt toûjours avantageux d'en pouvoir exprimer pluſieurs, ſans employer plus d'une lettre inconnuë, comme on le peut faire en pluſieurs rencontres. Car ſi par exemple deux grandeurs inconnuës ont la grandeur connuë a pour leur difference, appellant z la plus grande inconnuë, la plus petite peut eſtre appellée $z-a$, puiſqu'on ſuppoſe qu'il s'en manque a qu'elle ne ſoit égale à la plus grande. Et ſi l'on appelle z la plus petite, la plus grande par la même ſuppoſition pouroit eſtre appellée $z+a$. De ſorte qu'employant la ſeule inconnuë z, l'on exprime cependant deux grandeurs inconnuës, qui ont a pour leur difference.

TROISIÉME REGLE.

XII. Chaque grandeur ayant receu ſa dénomination ſelon la regle precedente, on conſidere le probleme comme eſtant déja reſolu, & l'on tire autant d'égalitez des ſuppoſitions que l'on y a faites, que l'on employe de lettres inconnuës pour exprimer tous ſes termes. Peut-eſtre que ces regles s'entendront mieux par un exemple.

Exemple.

Suppoſons qu'on nous ait donné un tel probleme à reſoudre. Les âges de deux perſonnes font 100 années, l'âge du premier ſurpaſſe de 40 années l'âge du ſecond; l'on demande quel eſt l'âge de chaque perſonne?

Pour commencer à le reſoudre, 1°. J'examine attentivement ſelon la premiere regle, quel eſt l'eſtat de la queſtion, & je reconnois qu'elle renferme deux conditions, auſquelles en ſatisfaiſant la queſtion eſt reſoluë; la premiere de ces conditions, c'eſt de trouver deux nombres qui ſoient égaux à 100; & la ſeconde, c'eſt qu'il faut que le plus grand de ces deux nombres ſurpaſſe le plus petit de 40.

2°. Je donne donc ſelon la ſeconde de nos regles un nom à chacun de ces deux nombres. Or ſi j'appelle z le plus petit des deux âges, le plus grand, par la ſeconde des ſuppoſitions qu'on a faites, ſera $z+40$, car cette ſuppoſition demande que le plus grand âge ſurpaſſe le plus petit de 40. Ainſi les deux âges ſeront, le premier $z+40$, & le ſecond z.

3°. Chaque âge ayant ainſi receu ſon nom, je ſuppoſe ſelon la troiſiéme regle que le probleme eſt déja reſolu, & je tire autant d'égalitez des ſuppoſitions qu'on y a faites, que j'employe de lettres inconnuës pour exprimer les deux âges. Or n'employant pour cette expreſſion qu'une ſeule inconnuë qui eſt z, je n'ai auſſi qu'une égalité à chercher, & je la trouve en raiſonnant ainſi. La ſomme des deux âgez $z+40$ & z, eſt $2z+40$. Or par la premiere ſuppoſition qu'on a faite, cette ſomme doit égaler 100 années, j'ai donc l'égalité cherchée $2z+40=100$. Où il faut remarquer qu'ayant employé la ſeconde ſuppoſition pour dénommer les deux grandeurs z & $z+40$, j'employe la premiere ſuppoſition qui me reſte pour former mon égalité $2z+40=100$. Car il faut toûjours prendre garde que les mêmes ſuppoſitions qui ſervent à dénommer quelque grandeur, ne doivent point ſervir pour en tirer des égalitez.

premier âge,	*ſecond âge,*	*ſomme des deux âges,*	*égalité cherchée.*
$z+40$,	z,	$z+40+z$, ou $2z+40$,	$2z+40=100$.

Les deux parties qu'on trouve en ces ſortes d'égalitez de part & d'autre de leur ſigne $=$, en ſeront appellées les deux membres. Ainſi dans noſtre égalité $2z+40=100$, $2z+40$ qui eſt devant le ſigne $=$, & 100 qui eſt aprés ce ſigne, ſont les deux membres de l'égalité.

Autre dénomination plus generale.

Mais ſuppoſons par la methode la plus generale de la ſeconde regle, que chacun des deux nombres inconnus ſoit exprimé par une lettre inconnuë qui ne marque que lui ſeul, & que le plus petit eſtant appellé z, le plus grand ſoit appellé y. Comme j'employe les deux inconnuës z & y afin de marquer les deux âges, je dois auſſi ſelon la troiſiéme regle, tirer des ſuppoſitions que l'on fait au probleme, deux égalitez differentes qui en puiſſent marquer toutes les conditions. Or je le fais en raiſonnant ainſi. La ſomme des deux âges z & y, eſt $z+y$. Or par la premiere ſuppoſition cette ſomme doit égaler 100 années, j'ai donc pour premiere égalité $z+y=100$.

le plus petit âge,	*le plus grand,*	*la ſomme des deux,*	*premiere égalité.*
z,	y,	$z+y$,	$z+y=100$.

Or par la ſeconde ſuppoſition y, c'eſt à dire les années de la premiere perſonne ſurpaſſent de 40 celles de la ſeconde, qui ſont appellées z, ſi donc j'ajoûte à z les 40 années qui lui manquent pour égaler y, j'égalerai ces deux grandeurs, & j'aurai pour la ſeconde égalité cherchée $z+40=y$.

le plus petit âge,	*le plus grand,*	*leur difference,*	*ſeconde égalité.*
z,	y,	40,	$z+40=y$.

XIII.

Mais ſoit que l'on n'ait qu'une égalité ſeule en n'employant qu'une ſeule lettre inconnuë, ſoit qu'on en ait pluſieurs en employant pluſieurs de ces lettres, toutes les conditions du probleme ne laiſſent pas d'eſtre auſſi bien renfermées dans l'égalité qui eſt ſeule, que dans les autres qui ſont en plus grand nombre. Et pour le voir par noſtre exemple, l'égalité ſeule $2z+40=100$, qui n'a que la ſeule lettre inconnuë z, renferme la premiere condition du probleme, qui demande que les deux âges égalent 100 années; Et la même égalité $2z+40=100$ renferme auſſi la ſeconde condition du probleme, qui demande que le premier âge ſurpaſſe le ſecond de 40 années, car comme on l'a dit auparavant, $2z+40$ eſt la ſomme des deux nombres inconnus $z+40$ & z, dont le premier ſurpaſſe le ſecond de 40.

Pour les deux autres égalitez $z+y=100$, & $z+40=y$; il eſt aſſez viſible qu'elles renferment auſſi les deux mêmes conditions qui ſont déterminées dans le probleme.

D'où l'on peut tirer cette conſequence, que l'égalité qui eſt ſeule & qui n'a qu'une lettre inconnuë, peut autant ſervir pour réſoudre le probleme, que toutes les autres qui en ont pluſieurs. Elle peut même y ſervir davantage, parceque s'il y en a pluſieurs, on eſt obligé, comme on verra plus bas, de les réduire toutes à une ſeule qui n'ait qu'une lettre inconnuë. Or quand on eſt arrivé à l'égalité ſeule, voici comment l'on continuë la reſolution du probleme.

QUATRIÉME REGLE.

Pour la reſolution des problemes qui ſont réduits à une ſeule égalité, dans laquelle il n'y a qu'une lettre inconnue.

XIV. L'on ajoûte ou l'on retranche des grandeurs égales de chacun de ſes membres; ou bien l'on multiplie, ou l'on diviſe également chacun de ces membres; ou bien enfin l'on tire de chacun des racines égales. Et ces operations ſe continuent juſques à ce qu'on ait tout l'inconnu ſeul d'une part & le connu de l'autre, en quoi l'on a auſſi la reſolution que l'on cherche.

L'on appelle ordinairement l'obſervation de cette regle, *réduction des égalitez*. En voici des exemples.

DE LA REDUCTION

PAR ADDITION.

Elle ſe fait en effaçant d'un membre ce qu'on y trouve avec le ſigne $-$, & l'écrivant dans l'autre avec le ſigne $+$. XV.

Si par exemple on a l'égalité $y-20=50$, j'efface 20 du premier membre où il eſt avec $-$, & je l'écris dans l'autre avec $+$; aprés quoi je connois que le nombre 70 entierement connu, eſt la valeur de l'inconnuë y.

$$y-20=50,\quad y-\cancel{20}=50+20.\quad \text{Or } 50+20=70.\quad \text{Donc } y=70.$$

Démonſtration. Les deux membres $y-20$ & 50 ſont égaux entr'eux par la ſuppoſition; Or ſi à grandeurs égales on en ajoûte d'égales, les tous ſeront égaux entr'eux. Ajoûtant donc à chacun des deux membres égaux $y-20$ & 50, le même nombre 20, les tous qui ſont $y-20+20$, & $50+20$, ſeront égaux entr'eux. Or $-20+20=0$. Donc $y-20+20=y$: Or $50+20=70$. Donc $y=70$. Ce qu'il falloit démontrer.

$$\begin{array}{r} y-20=50\\ +20=+20\\ \hline \textit{ſommes}\ y\ \ *\ =70 \end{array}$$

Par la même raiſon ſi $z-b=a$, l'on aura $z=a+b$. Et pareillement ſi $a-z=0$, l'on aura $a=0+z$, c'eſt à dire $a=z$, car $0+z=z$, puiſque zero ne donne rien.

DE LA REDUCTION

PAR SOUSTRACTION.

Elle ſe fait en effaçant d'un membre ce qu'on y trouve avec le ſigne $+$, & l'écrivant dans l'autre avec le ſigne $-$. XVI.

Si par exemple on a l'égalité $z+20=50$, j'efface 20 du premier membre, où il eſt avec $+$, & je l'écris dans l'autre avec $-$; aprés quoi je connois que le nombre 30 entierement connu, eſt la valeur de l'inconnuë z.

$$z+20=50,\quad z+\cancel{20}=50-20.\quad \text{Or } 50-20=30.\quad \text{Donc } z=30.$$

Démonſtration. Les deux membres $z+20$ & 50 ſont égaux entr'eux par la ſuppoſition; Or ſi de grandeurs égales on en retranche d'égales, les reſtes ſeront égaux entr'eux. Retranchant donc de chacun des deux membres égaux $z+20$ & 50, le même nombre 20, les reſtes qui ſont $z+20-20$, & $50-20$, ſeront égaux entr'eux. Or $+20-20=0$. Donc $z+20-20=z$: Or $50-20=30$. Donc $z=30$. Ce qu'il falloit démontrer.

$$\begin{array}{r} z+20=\ \ 50\\ -20=-20\\ \hline \textit{reſtes}\ z\ \ *\ =\ \ 30 \end{array}$$

Par la même raiſon, ſi $z+b=a$, l'on aura $z=a-b$. Et pareillement ſi $a+z=0$, l'on aura $a=0-z$, c'eſt à dire $a=-z$, ou bien ſi l'on avoit tranſpoſé a, en laiſſant $+z$ au premier membre où il eſt, l'on auroit

$+z = -a$. De ſorte que la grandeur z vaudroit moins que rien. Ce qui ſemble impoſſible à concevoir, quoique cela ne ſoit pas ſans exemple même dans le langage commun, puiſqu'on dit d'un homme endebté, qu'il s'en faut vingt mille eſcus qu'il n'ait un ſol.

COROLLAIRE.

XVII. Il s'enſuit de tout ce que nous venons de dire que les grandeurs qu'on trouve également diſtribuées dans chaque membre & ſous un même ſigne, doivent y eſtre effacées. Si par exemple on a l'égalité $z - a = b + c - a$, comme $-a$ ſe trouve en chaque membre, il le faut effacer ſans rien écrire, car ſi l'on écrivoit $+a$ dans l'un ou l'autre membre, ou dans chacun des deux, il y auroit $-a + a$, ce qui ſeroit égal à rien.

Pareillement ſi l'on réduit l'égalité $z - a + 3b = 2b + c - 3a$, comme $-a + 2b$ ſe trouvent en chaque membre, il les faut effacer, aprés quoi il reſte $z + b = c - 2a$, laquelle eſtant réduite en effaçant $+b$ du premier membre, & l'écrivant au ſecond avec le ſigne $-$, l'on trouve $z = c - 2a - b$. Il en eſt ainſi des autres.

$$\begin{array}{lllll} & z - a + 3b & = & 2b + c - 3a & \\ \text{Or} & + a - 2b & = & -2b \quad + a & \\ \hline \text{Donc } z & * + b & = & * \quad c - 2a & \\ \text{Or} & - b & = & - b & \\ \hline \text{Donc } z & * \quad * & = & * \quad c - 2a - b & \end{array}$$

DE LA REDUCTION
PAR MULTIPLICATION.

XVIII. Elle ſe fait en multipliant toutes les parties de l'égalité par chaque ſecond terme des fractions qui s'y trouvent.

Si par exemple on me propoſe à réduire l'égalité $\frac{z}{3} = 6$, je multiplie chaque membre par 3, aprés quoi je connois que le nombre 18 entierement connu, eſt la valeur de l'inconnuë z.

$\frac{z}{3} = 6$. Or 3 fois $\frac{z}{3} = z$, & 3 fois $6 = 18$ Donc $z = 18$.

Démonſtration. Les deux termes $\frac{z}{3}$ & 6 ſont égaux entr'eux par la ſuppoſition : Or ſi des grandeurs égales ſont également multipliées, les produits ſont égaux. Multipliant donc les deux termes égaux $\frac{z}{3}$ & 6 par le même nombre 3, les produits, qui ſont z & 18, ſeront auſſi egaux entr'eux. Et c'eſt ce qu'il falloit démontrer.

Par la même raiſon, ſi $\frac{z}{a} = b$, l'on aura $z = ab$. Et ſi $\frac{zz}{b-c} = b + c$, effaçant $b - c$ du premier membre $\frac{zz}{b-c}$, il eſt multiplié par $b - c$, & le produit eſt z, il faudra donc auſſi multiplier le ſecond membre $b + c$ par $b - c$, afin d'avoir le produit $bb - cc$, & que l'égalité propoſée ſoit réduite à $zz = bb - cc$.

Pareillement ſi l'on avoit à réduire cette égalité $\frac{zz}{a} = \frac{aa+ab}{z}$, effaçant a du premier membre, il eſt multiplié par a, & effaçant z du ſecond membre, il eſt multiplié par z ; il reſte donc à multiplier reciproquement, c'eſt à dire en croix, le premier terme du ſecond membre par a, & le premier terme du premier membre par z, afin d'avoir l'égalité propoſée réduite à celle-ci $z^3 = a^3 + abb$.

$$z^3,\ \frac{zz}{a} \times \frac{aa+ab,\ a^3+abb}{z}$$

PREMIER COROLLAIRE.

Si les deux membres de l'égalité ſont diviſez chacun par une même grandeur, il ne faut que l'effacer de part & d'autre ſans rien multiplier par elle. Ainſi pour réduire $\frac{zz}{a} = \frac{aa-bb}{a}$, effaçant a de part & d'autre, l'on aura $zz = aa - bb$. XIX.

Et pour réduire $\frac{z^3}{aa-bb} = \frac{ab+bc}{a+b}$, chacun de ſes membres eſt diviſé par $a+b$. Car le premier eſt diviſé par $aa - bb$, qui eſt le produit de $a+b$ par $a - b$; effaçant donc $a+b$ de chaque membre, ce qui ſe fait en diviſant par $a+b$ le ſecond terme $aa - bb$ de la premiere fraction, & lui laiſſant pour ſecond terme l'expoſant trouvé $a - b$; & effaçant enſuite $a+b$ de la ſeconde fraction, l'égalité propoſée ſera réduite à $\frac{z^3}{a-b} = ab+bc$. Et cette égalité nouvelle ſe réduira en effaçant $a - b$ de ſon premier membre, ce qui fait z^3, & multipliant par $a - b$ le ſecond membre, afin d'avoir pour produit $aab+abc-abb-bbc$, & que l'égalité ſoit enfin réduite à celle-ci qui eſt ſans fraction $2z^3 = aab+abc-abb-bbc$.

SECOND COROLLAIRE.

Toute égalité dont chaque membre eſt une fraction, ſe peut réduire à une autre qui ſoit ſans fraction, ſi l'on multiplie en croix le premier terme de la premiere fraction par le ſecond de la ſeconde, & le premier terme de la ſeconde par le ſecond de la premiere. Car en ceci l'on ne fait que donner un même ſecond terme aux deux fractions égales ſans changer leur valeur, aprés quoi l'on efface de part & d'autre le ſecond terme qu'on leur a donné, ce qui ne trouble point leur égalité par le Corollaire qui precede. XX.

SUITE DE LA REDUCTION PAR MULTIPLICATION.

Cette maniere de réduire les égalitez en multipliant également chacun de leurs membres, nous ſert encore pour les délivrer des grandeurs incommenſurables qui peuvent s'y trouver. Soit par exemple $\sqrt{z} = 3$, puiſque ces deux grandeurs ſont égales, leurs quarrez, ou leurs cubes, &c. ſeront pareillement égaux. Si donc on multiplie quarrément chaque membre, l'on aura $z = 9$. XXI.

Par la même raiſon, ſi $\sqrt{z} = \sqrt{aa - bb}$, l'on aura $z = aa - bb$. Et ſi pareillement l'on avoit $\sqrt{}C.zz = \sqrt{}C.\overline{a^3+b^3}$, l'on aura $zz = a^3+b^3$.

DE LA REDUCTION
PAR DIVISION.

Elle ſe fait en diviſant toutes les parties de l'égalité par les grandeurs connuës qui multiplient les termes inconnus. XXII.

Si par exemple on me propoſe à réduire l'égalité $9z=144$, je diviſe chaque membre par 9, aprés quoi je connois que le nombre 16 entierement connu, eſt la valeur de l'inconnuë z.

$$9z=144.\ \text{Or}\ \frac{9z}{9}=z,\ \&\ \frac{144}{9}=16.\ \text{Donc}\ z=16.$$

Démonſtration. Les deux termes $9z$ & 144 ſont égaux entr'eux par la ſuppoſition. Or ſi des grandeurs égales ſont également diviſées, les expoſants ſont égaux. Diviſant donc les deux termes égaux $9z$ & 144, par le même nombre 9, les expoſants, qui ſont z & 16, ſeront auſſi égaux entr'eux. Ce qu'il falloit démontrer.

Par la même raiſon, ſi $az=bc$, l'on aura $z=\frac{bc}{a}$. Et ſi $bzz-czz=bb-cc$, le premier membre diviſé par $b-c$ a pour expoſant zz, & le ſecond diviſé pareillement par $b-c$, a $b+c$ pour expoſant, de ſorte que l'égalité propoſée ſe trouve réduite à $zz=b+c$.

COROLLAIRE.

XXIII. Si les deux membres de l'égalité ſe trouvent multipliez chacun par les mêmes grandeurs, on les effacera de part & d'autre. Ainſi pour réduire $azz=aaz+abz$, effaçant az de part & d'autre, l'on aura $z=a+b$. Pareillement ſi l'on avoit $z^4=abzz+cdzz$, effaçant zz de part & d'autre, l'égalité ſera réduite à $zz=ab+cd$.

Et pour réduire $aaz^3-bbz^3=ab^3c-b^4c+abc^3-bbc^3$, chacun de ſes membres eſt multiplié par $a-b$. Diviſant donc chacun par $a-b$, l'on a $az^3+bz^3=b^3c+bc^3$, laquelle eſtant diviſée de nouveau par $a+b$, l'on trouve enfin $z^3=\frac{b^3c+bc^3}{a+b}$. En quoi l'on voit qu'il en eſt de même des égalitez que des fractions, car les unes & les autres ſe réduiſent à leurs moindres termes afin d'eſtre mieux connuës.

DE LA REDUCTION

PAR EXTRACTION DES RACINES.

XXIV. Elle ſe fait en tirant également les racines de part & d'autre. Si par exemple on a $zz=144$, la racine quarrée eſtant tirée de part & d'autre, l'on trouvera que $z=12$.

$$zz=144.\ \text{Or}\ \sqrt{zz}=z,\ \&\ \sqrt{144}=12\ \ \text{Donc}\ z=12.$$

La démonſtration eſt évidente. Car ſi des quarrez ou des cubes &c. ſont égaux entr'eux, leurs racines quarrées, ou cubiques, &c. ſeront pareillement égales. Or les quarrez zz & 144 ſont égaux entr'eux. Donc z & 12 qui en ſont les racines ſeront égales entr'elles. Ce qu'il falloit démontrer.

Par la même raiſon, ſi $zz=aa+2ab+bb$, l'on aura $z=a+b$. Et ſi $zz=aa+bc+2a\sqrt{bc}$, l'on aura $z=a+\sqrt{bc}$. Comme pareillement ſi $zz=-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$, l'on aura $z=\sqrt{-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$.

De même ſi $z^3=\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$, l'on aura $z=\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$.

Suite des Réductions precedentes.

Tous les exemples precedens ſont aſſez voir que la ſeule fin des réductions n'eſt que pour dégager tout l'inconnu des grandeurs connuës avec leſquelles il ſe trouve envelopé, afin que reſtant ſeul d'une part, ſon égalité avec les grandeurs connuës qui ſont de l'autre part, puiſſe eſtre immediatement concluë. C'eſt pourquoi, lorſqu'on a d'une part tout l'inconnu dégagé du connu, il ne faut plus faire aucune operation, quand même il y auroit des fractions de l'autre part. Car autrement ce ſeroit enveloper de nouveau l'inconnu avec le connu, duquel il ſe trouve dégagé. Si par exemple j'avois l'égalité $zz = \frac{aa}{bb-cc}$, j'aurois tort ſi je voulois oſter la fraction du ſecond terme, en effaçant $bb-cc$ de ce terme, & multipliant le premier zz qui eſt entierement inconnu, par $bb-cc$ qui eſt entierement connu. XXV.

Mais ſi j'avois $zz = \frac{aab+abb}{z}$, parceque z qui diviſe le ſecond terme, eſt inconnuë, je ſerois obligé de multiplier le premier terme par z, aprés quoi l'égalité ſeroit réduite à $z^3 = aab + abb$.

Application des regles precedentes.

Au reſte afin que l'on voye mieux l'uſage des regles precedentes, ſur tout de la quatriéme, & des réductions dont nous venons d'expliquer les principaux fondemens, & de démontrer la pratique; on en fera l'application ſur les queſtions ſuivantes.

Premiere Queſtion.

Les âges de deux perſonnes ſont 100 années, & le premier âge ſurpaſſe le ſecond de 40 années. Quel eſt chacun de ces deux âges?

Soit le plus petit âge appellé z. Donc par la ſeconde ſuppoſition le plus grand âge ſera $z+40$, puiſqu'il doit ſurpaſſer l'autre de 40 années. Or par la premiere ſuppoſition, la ſomme des deux âges doit égaler 100 années; j'ai donc l'égalité $2z+40=100$. Or pour la réſoudre, en réduiſant tout l'inconnu ſeul d'une part, & laiſſant le connu ſeul qui lui eſt égal de l'autre part, j'oſte 40 de chacun des deux membres, & j'ai $2z=60$, dont chaque membre eſtant diviſé par 2, je trouve enfin que $z=30$. Le ſecond âge eſt donc 30 années, & le premier $30+40$, c'eſt à dire 70 années; & la queſtion eſt reſoluë. Car ces deux nombres 70 & 30 ſont égaux à 100, & le plus grand ſurpaſſe le plus petit de 40.

ſecond âge,	*premier âge,*	*leur ſomme,*	*leur égalité.*
z,	$z+40$,	$2z+40$,	$2z+40=100$.

Réduction par ſouſtraction,	*Reduction par diviſion, & reſolution.*
Donc $2z=60$,	Donc $z=30$, & $z+40=70$.

Autre Reſolution.

La queſtion peut auſſi ſe réſoudre ſi l'on nomme autrement les deux âges, en commençant par le plus grand en cette ſorte. Soit le plus grand âge appellé y, le plus petit ſera donc $y-40$ par la ſeconde ſuppoſition, puiſqu'il s'en faut 40 années qu'il n'égale le plus grand. Or par la premiere ſuppoſition la ſomme des deux âges égale 100 années ; j'ai donc l'égalité $2y-40=100$. Or pour la reſoudre j'ajoûte 40 à chaque membre, & j'ai $2y=140$, dont chaque membre eſtant diviſé par 2, je trouve enfin que $y=70$. Le premier âge eſt donc 70 années, & le ſecond $70-40$, c'eſt à dire 30 années. Et la queſtion eſt reſoluë.

premier âge,	*ſecond âge,*	*leur ſomme,*	*égalité,*
y,	$y-40$,	$2y-40$,	$2y-40=100$.

Reduction par addition,	*Reduction par diviſion & reſolution.*
Donc $2y=140$.	Donc $y=70$, & $y-40=30$.

Seconde Queſtion.

Les âges de trois perſonnes font 100 années, le premier âge ſurpaſſe le ſecond de 24 années, & le ſecond ſurpaſſe le troiſiéme de 20 années. Quel eſt chacun de ces trois âges.

Soit le troiſiéme & le plus petit âge appellé z, le ſecond ſera donc $z+20$, par la troiſiéme ſuppoſition, puiſqu'il doit ſurpaſſer le troiſiéme âge z de 20 années. Or par la ſeconde ſuppoſition le premier âge doit ſurpaſſer le ſecond $z+20$ de 24 années, le premier âge ſera donc $z+44$. Or par la premiere ſuppoſition la ſomme des trois âges z, $z+20$, & $z+44$, doit eſtre égale à 100 années ; j'ai donc l'égalité $3z+64=100$. Et afin de la reſoudre, j'oſte 64 de chaque membre, & j'ai $3z=36$, dont chaque membre eſtant diviſé par 3, je trouve enfin que $z=12$, le troiſiéme âge eſt donc 12 années, le ſecond 32, & le premier 56.

troiſiéme âge,	*ſecond âge,*	*premier âge,*	*leur ſomme,*	*égalité.*
z,	$z+20$,	$z+44$,	$3z+64$,	$3z+64=100$.

Réduction par ſouſtraction,	*Réduction par diviſion, & reſolution.*
Donc $3z=36$.	Donc $z=12$, $z+20=32$, & $z+44=56$.

Autre Reſolution.

La queſtion peut auſſi ſe reſoudre ſi l'on nomme autrement les trois âges en cette ſorte. Soit le premier & le plus grand âge appellé y, le ſecond ſera donc $y-24$ années par la ſeconde ſuppoſition, & le troiſiéme $y-44$ par la troiſiéme ſuppoſition. Or il faut par la premiere que les trois âges faſſent 100 années, l'égalité ſera donc $3y-68=100$. Or afin de la reſoudre j'ajoûte 68 à chaque membre, & j'ai $3y=168$, dont chaque membre eſtant diviſé par 3, je trouve enfin que $y=56$, le premier âge eſt donc 56 années, le ſecond 32, & le troiſiéme 12.

premier âge,	*ſecond âge,*	*troiſiéme âge,*	*leur ſomme,*	*égalité.*
y,	$y-24$,	$y-44$,	$3y-68$,	$3y-68=100$.

réduction par addition,	*réduction par diviſion, & reſolution.*
Donc $3y=168$.	Donc $y=56$, $y-24=32$, & $y-44=12$.

COROLLAIRE.

Or la raiſon pourquoi je n'ai pas reſolu d'abord la queſtion en cette ſeconde maniere, bien qu'elle ſemble un peu plus naturelle, c'eſt que la dénomination des grandeurs ſe doit plûtoſt faire en commençant par les plus petites que par les plus grandes, parceque l'égalité trouvée en cette ſorte eſt plus facile à reſoudre. Car il eſt bien viſible que l'égalité $3z+64=100$, eſt plus facile à reſoudre que $3y-68=100$, puiſque l'une ſe réduit à $3z=36$, qu'on peut diviſer plus facilement par 3, que $3y=168$ à qui l'autre eſt réduite.

Troiſiéme Queſtion.

Les âges de trois perſonnes font 144 années, le premier a trois fois l'âge du ſecond, & le ſecond a deux fois l'âge du troiſiéme. Quel eſt chacun de ces trois âges ?

Soit le troiſiéme & le plus petit âge appellé z, le ſecond ſera donc $2z$ par la troiſiéme ſuppoſition, puiſqu'il doit avoir deux fois le troiſiéme âge z. Or par la ſeconde ſuppoſition le premier âge doit avoir 3 fois le ſecond $2z$, cet age ſera donc $6z$. Or la ſomme des trois âges z, $2z$, & $6z$, doit eſtre égale à 144 années par la premiere ſuppoſition, j'ai donc l'égalité $9z=144$. Et afin de la reſoudre, je diviſe chaque membre par 9, & j'ai enfin $z=16$. Le troiſiéme âge eſt donc 16 années, le ſecond 2 fois 16, ou 32, & le premier eſt 3 fois 32, ou 96. Et la queſtion eſt reſoluë.

troiſiéme âge,	*ſecond âge,*	*premier âge,*	*leur ſomme,*	*égalité.*
z,	$2z$,	$6z$,	$9z$,	$9z=144$.

réduction par diviſion, & reſolution.
Donc $z=16$, $2z=32$, & $6z=96$.

Autre Reſolution.

La queſtion ſe peut auſſi reſoudre, ſi l'on nomme autrement les trois âges en cette ſorte. Soit le premier & le plus grand âge appellé y, le ſecond ſera donc $\frac{1}{3}y$ par la ſeconde ſuppoſition, puiſque cet âge ſe doit trouver 3 fois dans y. Or par la troiſiéme ſuppoſition, le ſecond âge $\frac{1}{3}y$ doit avoir deux fois le troiſiéme, le troiſiéme âge ſera donc $\frac{1}{6}y$, car 2 fois $\frac{1}{6}y=\frac{1}{3}y$. Les trois âges ſeront donc y, $\frac{1}{3}y$, & $\frac{1}{6}y$, & leur ſomme $\frac{3}{2}y$. Or cette ſomme doit égaler les 144 années par la premiere ſuppoſition, j'aurai donc l'égalité $\frac{3}{2}y=144$. Et pour la reſoudre, je multiplie chaque membre par 2, & j'ai $3y=288$, dont chaque membre eſtant diviſé par 3, je trouve enfin que $y=96$, le premier âge y eſt donc 96 années, le ſecond 32, & le troiſiéme 16. Et la queſtion eſt reſoluë.

premier âge,	*ſecond âge,*	*troiſiéme âge,*	*leur ſomme,*	*égalité.*
y,	$\frac{1}{3}y$,	$\frac{1}{6}y$,	$\frac{3}{2}y$,	$\frac{3}{2}y=144$.

reduction par multiplication.	*reduction par diviſion, & reſolution.*
Donc $3y=288$.	Donc $y=96$, $\frac{1}{3}y=32$, & $\frac{1}{6}y=16$.

COROLLAIRE.

XXVI. Cette ſeconde maniere nous confirme encore que la dénomination des grandeurs doit ordinairement ſe commencer plûtoſt par les plus petites que par les plus grandes, afin d'éviter les fractions, & de rendre ainſi ſes operations plus faciles à faire.

Quatrième Queſtion.

L'on dit qu'une mere a quatre fois l'âge de ſon enfant, & que le produit de leurs âges fait 100 années. Et l'on demande quel eſt chacun de ces deux âges.

Soit l'âge de l'enfant appellé z, l'âge de ſa mere ſera donc $4z$ par la premiere ſuppoſition, & le produit de ces deux âges ſera $4zz$. Or par la ſeconde ſuppoſition ce produit doit eſtre égal à 100 années, j'ai donc l'égalité $4zz=100$. Et pour la reſoudre, je diviſe chaque membre par 4, & j'ai $zz=25$, d'où tirant également la racine quarrée de chaque membre, je trouve enfin que $z=5$. L'âge de l'enfant eſt donc 5 années, & celui de ſa mere 20.

petit âge,	*grand âge,*	*leur produit,*	*égalité.*
z,	$4z$,	$4zz$,	$4zz=100$.

réduction par diviſion,	*réduction par extraction de racine, & reſolution.*
Donc $zz=25$.	Donc $z=5$, & $4z=20$.

REGLE CINQUIÉME ET GENERALE.

Pour la reſolution des problemes qui ſont exprimez par pluſieurs égalitez, dans leſquelles il y a pluſieurs lettres inconnuës.

XXVII. Lorſqu'on a trouvé par la troiſiéme rege 12. S. autant d'égalitez, qu'on employe de lettres inconnuës pour l'expreſſion de toutes les grandeurs.

1°. L'on cherche à découvrir par la quatriéme regle dans la premiere égalité, une valeur de la premiere inconnuë qui s'y trouve, exprimée par le moyen des autres grandeurs connuës ou inconnuës, & l'on ſubſtituë cette valeur à la place de l'inconnuë qui lui eſt égale, par tout où cette inconnuë ſe trouve dans les égalitez ſuivantes.

2°. L'on cherche en même ſorte dans la premiere égalité, où l'on vient de ſubſtituer la valeur découverte, une valeur de la premiere inconnuë qui s'y trouve, exprimée par les autres grandeurs connuës ou inconnuës, & l'on ſubſtituë cette valeur à la place de l'inconnuë qui lui eſt égale, par tout où cette inconnuë ſe trouve dans les égalitez ſuivantes.

3°. L'on reïtere de nouveau une ſemblable operation par le moyen de la premiere des égalitez où l'on vient de ſubſtituer la valeur découverte. Et ainſi de ſuite, juſques à ce qu'on ſoit enfin arrivé à une égalité qui n'ait qu'une lettre inconnuë.

4°. Lorſqu'on a découvert cette égalité, on la reſout par la quatriéme regle 14. S. & la valeur de ſon inconnuë eſtant ainſi entierement connuë, l'on l'on ſubſtituë cette valeur à la place de l'inconnuë qui lui eſt égale, par tout où cette inconnuë ſe trouve dans la derniere des égalitez qui precede, aprés quoi cette égalité n'a plus qu'une inconnuë.

5°. Lorſqu'on a cette égalité, on la reſout par la maniere accoûtumée, de la quatriéme regle 14. S. & la valeur de ſon inconnuë eſtant ainſi entierement connuë, l'on ſubſtituë cette valeur à la place de l'inconnuë qui lui eſt égale, par tout où cette inconnuë ſe trouve dans l'égalité precedente. Aprés quoi cette égalité n'enferme plus qu'une lettre inconnuë. L'on reſout donc cette égalité, & l'on ſubſtitüe la valeur de ſon inconnüe, plus celle qu'on a découverte avant elle, au lieu des inconnües qui ſont égales à ces valeurs, dans l'égalité precedente. Ce qui donne une nouvelle égalité qui n'a qu'une lettre inconnüe. L'on reïtere de nouveau une ſemblable operation par le moyen de cette égalité trouvée. Et ainſi de ſuite en retrogradant, juſques à ce que l'on ſoit enfin arrivé à la connoiſſance de toutes les grandeurs inconnües. Les exemples éclairciront ces regles.

Mais afin que l'on puiſſe mieux voir comme en ſuivant des voyes tout-à-fait differentes, l'on ne laiſſe pas d'arriver aux mêmes reſolutions, reprenons les deux premieres de nos queſtions precedentes.

Premiere Queſtion.

Les âges de deux perſonnes font 100 années, & le premier âge ſurpaſſe le ſecond de 40 années. Quel eſt chacun de ces deux âges?

Soit le premier & le plus grand appellé y, & le plus petit z. Par la premiere ſuppoſition ces deux âges font 100 années, j'aurai donc pour premiere égalité $y+z=100$.

Or par la ſeconde ſuppoſition y doit ſurpaſſer z de 40 années. Si donc j'ajoûte à z les 40 années qui lui manquent pour égaler y, j'égalerai ces deux grandeurs, & j'aurai pour la ſeconde égalité $z+40=y$, ou bien en tranſpoſant 40, j'aurai $z=y-40$.

Cela eſtant, je reſous ainſi la queſtion par le moyen de ces deux égalitez.

1°. Puiſque la premiere égalité eſt $y+z=100$. Donc tranſpoſant z afin que l'inconnüe y reſte ſeule d'une part, j'aurai $y=100-z$, & $100-z$ ſera une valeur de y, exprimée par le moyen du nombre 100 entierement connu, & de l'inconnüe z. Je ſubſtitüe donc cette valeur à la place de y qui lui eſt égale dans la ſeconde égalité $z=y-40$, & j'ai $z=100-z-40$.

2°. Or cette égalité ne renfermant que la ſeule lettre inconnüe z, je la réduis par la quatriéme regle 14. S. & connoiſſant ainſi que 30 eſt la valeur entierement connüe de z, je ſubſtitüe cette valeur au lieu de z qui lui eſt égale, dans l'égalité precedente $y=100-z$, & j'ai $y=100-30=70$. Les deux âges ſont donc 70 & 30, & la queſtion eſt reſolue.

Premiere égalité $y+z=100$. Donc $y=100-z$.
Seconde égalité $z+40=y$. Donc $z=y-40=100-z-40$.
Or $z=100-z-40$ ſe réduit à $2z=60$. Donc $z=30$.
Or $y=100-z$, & $100-z=100-30=70$. Donc $y=70$.

Seconde Queſtion.

Les âges de trois perſonnes font 100 années, le premier âge ſurpaſſe le ſecond de 24 années, & le ſecond ſurpaſſe le troiſiéme de 20. Quel eſt chacun de ces trois âges?

Soit le premier & le plus grand âge appellé x, le ſecond y, & le troiſiéme z.

Par la premiere ſuppoſition ces trois âges font 100 années, j'aurai donc pour premiere égalité $x+y+z=100$.

Or par la ſeconde ſuppoſition, x eſt plus grand que y de 24 années, ſi donc j'oſte de x les 24 années dont il ſurpaſſe y, j'égalerai ces deux grandeurs, & j'aurai pour ſeconde égalité $y=x-24$.

Or par la troiſiéme ſuppoſition, le ſecond âge y doit ſurpaſſer le troiſiéme x de 20 années; ſi j'oſte donc de y ces 20 années, j'aurai pour ma troiſiéme égalité $z=y-20$.

Enſuite je reſous ainſi la queſtion par le moyen de ces trois égalitez. 1°. La premiere égalité eſt $x+y+z=100$. Donc tranſpoſant y & z, afin que l'inconnüe x reſte ſeule d'une part, j'aurai $x=100-y-z$, je ſubſtitüe donc $100-y-z$ à la place de x qui lui eſt égale, dans les égalitez ſuivantes, c'eſt à dire ſeulement dans la ſeconde $y=x-24$, parceque x ne ſe rencontre point dans la troiſiéme. Cette ſeconde égalité ſera donc $y=100-y-z, -24$.

2°. Or cette égalité renfermant les deux lettres inconnües y & z, je réduis toute l'inconnüe y d'une part, en ajoûtant y à chaque membre, parcequ'elle eſt avec — dans le ſecond, j'ai donc par ce moyen $2y=76-z$, qui ſe réduit en diviſant chaque membre par 2, à $y=38-\frac{1}{2}z$. Je ſubſtitüe donc $38-\frac{1}{2}z$ au lieu de y qui lui eſt égale, dans la troiſiéme egalité qui reſte & qui eſt $z=y-20$, & j'ai $z=38-\frac{1}{2}z, -20=18-\frac{1}{2}z$.

3°. Or cette egalité $z=18-\frac{1}{2}z$ ne renfermant que la ſeule inconnüe z, je la reduis par la quatriéme regle à $z=12$. Connoiſſant donc que 12 eſt la valeur de z, je ſubſtitue cette valeur au lieu de z qui lui eſt egale dans l'egalité precedente qui eſt $y=38-\frac{1}{2}z$, & j'ai $y=32$. Enſuite je ſubſtitue 12 valeur de z, & 32 valeur de y, au lieu de y & de z dans l'egalité precedente qui eſt $x=100-y-z$, ce qui me donne $x=100-32-12=56$. Les trois âges ſont donc 56, 32, & 12. Et la queſtion eſt reſolue.

Premiere egalité $x+y+z=100$. Donc $x=100-y-z$.
Seconde egalité $y=x-24$.
Troiſiéme egalité $z=y-20$.
Or $x=100-y-z$.
Donc $y=100-y-z,-24=76-y-z$. Donc $2y=76-z$, & $y=38-\frac{1}{2}z$.
Or $z=y-20$.
Donc $z=38-\frac{1}{2}z,-20=18-\frac{1}{2}z$. Donc $\frac{3}{2}z=18$. Donc $\frac{1}{2}z=6$, & $z=12$.
Or $y=38-\frac{1}{2}z$, & $\frac{1}{2}z=6$. Donc $y=32$.
Or $x=100-y-z$, & $100-y-z=100-32-12=56$. Donc $x=56$.

Troiſiéme Queſtion.

Trois perſonnes ont chacun un nombre d'écus, le premier & le ſecond en ont 82 plus que le troiſiéme, le premier & le troiſiéme en ont 400 plus que le ſecond, & le ſecond & le troiſiéme en ont 566 plus que le premier. Combien chacun a-t'il d'ecus?

Pour rendre la queſtion plus generale, & faire en ſorte que ſa reſolution ſerve d'un modele general pour toute autre ſemblable, je rends mes grandeurs connües $82 = a$, $400 = b$, & $566 = c$, & j'appelle le premier nombre inconnu des écus x, le ſecond y, & le troiſiéme z.

Or par la premiere ſuppoſition, le premier nombre d'écus x plus le ſecond y ont a plus que le troiſiéme z. J'aurai donc pour premiere egalité $x + y = z + a$.

De même par la ſeconde ſuppoſition $x + z$ ont b plus que le nombre y. J'aurai donc pour ſeconde egalité $x + z = y + b$.

Et la troiſiéme ſuppoſition me donnera pareillement pour troiſiéme egalité $y + z = x + c$.

Or ayant ces trois egalitez, je reſous ainſi la queſtion par leur moyen. 1°. $x + y = z + a$. Donc $x = z + a - y$. Je ſubſtitue donc $z + a - y$ à la place de x qui lui eſt egale dans la ſeconde egalité $x + z = y + b$, & dans la troiſiéme $y + z = x + c$. Apres quoi je trouve au lieu de la ſeconde, $z + a - y, + z = y + b$, & au lieu de la troiſiéme, $y + z = z + a - y, + c$.

2°. Or la ſeconde egalité $z + a - y, + z = y + b$ ſe réduit à $y = z + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. Et la troiſiéme $y + z = z + a - y, + c$ ſe réduit à $y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c$. C'eſt pourquoi connoiſſant par cette troiſiéme egalité que $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c$ eſt la valeur de y, je ſubſtituë cette valeur au lieu de y qui lui eſt égale dans la precedente qui eſt $y = z + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, & j'ai en ſa place $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c = z + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, qui ſe réduit à $z = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$. Enſuite je ſubſtituë $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c$ valeur de y, & $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$ valeur de z, au lieu de y & de z dans l'egalité precedente $x = z + a - y$. Ce qui me donne enfin $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$. Les trois nombres d'écus ſont donc $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 241$, $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c = 324$, & $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c = 483$. Et la queſtion eſt reſoluë.

$82 = a$, $400 = b$, & $566 = c$.

1ere égalité $x + y = z + a$. Donc $x = z + a - y$.
2e egalité $x + z = y + b$.
3e egalité $y + z = x + c$.

2e egalité $z + a - y, + z = y + b$. Donc $2z + a - b = 2y$, & $y = z + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$.
3e egalité $y + z = z + a - y, + c$. Donc $2y = a + c$, & $y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c$.
Or par la ſeconde egalité, $y = z + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$.
Donc $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c = z + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. Donc $z = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$.
Or par la premiere egalité $x = z + a - y$.
Donc $x = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c + a - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c$, c'eſt à dire $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.
Or $a = 82$, $b = 400$, & $c = 566$.
Donc $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 241$, $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c = 324$, & $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c = 483$.

Les calculs ſe font avec plus de facilité en appellant les grandeurs connues par les premieres lettres de l'alphabeth que par les caracteres des nombres qui valent ces grandeurs. Mais les calculs eſtant finis, au lieu de ces grandeurs connues a, b, c, &c. deſquelles on s'eſt ſervi pendant le cours de l'operation, il faut avoir ſoin de remettre les nombres qui ſont egaux à ces grandeurs. Car autrement l'on ne pouroit diſtinctement connoître quelles ſont les grandeurs inconnues que l'on vient de chercher.

Formule pour les Queſtions ſemblables.

La reſolution de ce troiſiéme exemple ſert de formule pour toute autre queſtion ſemblable, où l'on demande trois grandeurs dont la premiere & ſeconde ayent toute grandeur connue a plus que la troiſiéme, la premiere & la troiſiéme toute grandeur connue b plus que la ſeconde, & enfin la ſeconde & la troiſiéme toute grandeur connue c plus que la premiere. Car alors, comme on vient de voir, la premiere de ces grandeurs qu'on demande ſera toûjours $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$, la ſeconde $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c$, & la troiſiéme $\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$.

Quatriéme Queſtion.

Quatre perſonnes ont chacun un nombre d'écus; le premier, le ſecond & le troiſiéme en ont 50 plus que le quatriéme; le premier, ſecond & quatriéme en ont 40 plus que le troiſiéme; le premier, troiſiéme & quatriéme en ont 30 plus que le ſecond; & enfin le ſecond, troiſiéme & quatriéme en ont 20 plus que le premier. Combien chacun a-t'il d'écus?

Je ſuppoſe comme j'ai déja fait dans l'exemple precedent, que $50=a$, $40=b$, $30=c$, & $20=d$, & j'appelle le premier nombre inconnu des écus v, le ſecond x, le troiſiéme y, & le quatriéme z. Enſuite je tire des quatre ſuppoſitions qui ſont dans la queſtion, les quatre egalitez ſuivantes.

$50=a$, $40=b$, $30=c$, & $20=d$.
1^ere^ egalité $v+x+y=z+a$. Donc $v=z+a-x-y$.
2^e^ egalité $v+x+z=y+b$.
3^e^ egalité $v+y+z=x+c$.
4^e^ egalité $x+y+z=v+d$.

Or par la premiere je trouve $v=z+a-x-y$, mettant donc $z+a-x-y$ au lieu de v qui lui eſt égale dans les trois égalitez ſuivantes, j'aurai
pour 2^e^. $z+a-x-y, +x+z=y+b$. ou $2z+a-b=2y$.
3^e^. $z+a-x-y, +y+z=x+c$. ou $2z+a-c=2x$.
4^e^. $x+y+z=z+a-x-y, +d$ ou $2x+2y=a+d$.

Or par la ſeconde egalité $2z+a-b=2y$, je trouve $y=z+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$. Mettant donc $z+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$ au lieu de y qui lui eſt égale dans les deux égalitez ſuivantes, c'eſt à dire ſeulement dans la quatriéme égalité $2x+2y=a+d$, parceque y ne ſe rencontre point dans la troiſiéme qui eſt $2z+a-c=2x$, j'aurai pour 4^e^. $2x, +2z+a-b=a+d$, ou $2x+2z=b+d$.

Or par la troiſiéme égalité $2z+a-c=2x$, je trouve $x=z+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}c$. Mettant donc $z+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}c$ au lieu de x qui lui eſt egale dans la quatriéme egalité $2x+2z=b+d$, j'aurai $2z+a-c, +2z=b+d$, c'eſt à dire

$4z=b+c+d-a$, qui ſe réduit à $z=\frac{1}{4}b+\frac{1}{4}c+\frac{1}{4}d-\frac{1}{4}a$.

C'eſt pourquoi mettant cette valeur de z entierement connuë dans l'égalité precedente $2x+2z=b+d$, j'aurai $2x,+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}d-\frac{1}{2}a=b+d$, c'eſt à dire $2x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}d$, qui ſe réduit à $x=\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}c+\frac{1}{4}d$. Enſuite mettant les deux valeurs toutes connuës de x & de z par tout où ces grandeurs ſe trouvent dans l'egalité precedente $2x+2y=a+d$, c'eſt à dire mettant ſeulement dans cette egalité la valeur de x, parceque z ne s'y rencontre point, j'aurai $2y=a+d,-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}d$, qui ſe réduit à $y=\frac{1}{4}a-\frac{1}{4}b+\frac{1}{4}c+\frac{1}{4}d$. Mettant enfin les valeurs découvertes des trois grandeurs x, y, & z, par tout où ces grandeurs ſe trouvent dans l'egalité precedente, ou v ſe trouve, c'eſt à dire dans l'egalité $v=z+a-x-y$, j'aurai $v=+\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{4}c-\frac{1}{4}d$. Les quatre nombres d'écus ſont donc $v=25$, $x=20$, $y=15$, & $z=10$. Et la queſtion eſt reſoluë.

Premiere Formule.

Si donc l'on demande quatre grandeurs dont les trois premieres ſurpaſſent la quatriéme de la grandeur a, les deux premieres & la quatriéme ſurpaſſent la troiſiéme de la grandeur b, la premiere & les deux dernieres ſurpaſſent la ſeconde de la grandeur c, & enfin les trois dernieres ſurpaſſent la premiere de la grandeur d. Ces grandeurs ſeront toûjours celles-ci diviſées chacune par 4.

La 1ere $\overline{a+b+c-d}$. La 2e. $\overline{a+b-c+d}$.
La 3e. $\overline{a-b+c+d}$. La 4e. $\overline{-a+b+c+d}$.

Seconde Formule.

L'on trouvera dans le même ordre que ſi l'on demande cinq grandeurs, dont les quatre premieres ayent a plus que la cinquiéme ; les trois premieres & la derniere ayent b plus que la quatriéme ; les deux premieres & les deux dernieres ayent c plus que la troiſiéme ; la premiere & les trois dernieres ayent d plus que la ſeconde ; & enfin les quatre dernieres ayent e plus que la premiere. Ces grandeurs ſeront toûjours celles-ci diviſées chacune par 6.

La 1ere $\overline{a+b+c+d-2e}$. La 2e. $\overline{a+b+c-2d+e}$. La 3e. $\overline{a+b-2c+d+e}$.
La 4e. $\overline{a-2b+c+d+e}$. La 5e. $\overline{-2a+b+c+d-e}$.

Pareillement ſi l'on demandoit ſix grandeurs & que les excéz fuſſent a, b, c, d, e, & f ; l'on trouveroit de ſemblables ſommes, leſquelles eſtant diviſées chacune par 8, ſeroient les grandeurs cherchées Et ainſi de ſuite à l'infini, en diviſant ces ſortes de ſommes par le double du nombre de toutes les grandeurs qu'on demande moins 4. c'eſt à dire par 10 ſi l'on demande 7 grandeurs ; par 12 ſi l'on en demande 8 ; par 14, ſi l'on en demande 9, &c. Et dans chaque ſomme l'on retrancheroit alternativement 3 fois chaque difference, ſi l'on demandoit 6 grandeurs, 4 fois ſi l'on en demandoit 7, 5 fois ſi l'on en demandoit 8. &c.

DE L'USAGE
DE LA METHODE GENERALE.

XXVIII. Les queſtions qui precedent & une infinité d'autres, ſe reſolvent plus facilement par d'autres voyes, & en employant moins de lettres inconnuës. Mais ces voyes ſont particulieres, & mon deſſein n'eſt de chercher ici que les plus generales. Or la methode d'exprimer chaque inconnuë par une lettre inconnuë eſt la plus generale de toutes. Car où les autres ſervent, elle eſt auſſi d'uſage; & où l'on a de la peine à en trouver quelque autre, l'on en peut découvrir en la ſuivant, quoiqu'il ſoit inutile alors d'en trouver d'autre, puiſque ſi on l'obſerve elle ſuffira ſeule pour reſoudre le probleme qu'on propoſe. Et une ſeconde raiſon pour laquelle on doit encore la preferer aux autres methodes, c'eſt qu'elle ſuppoſe moins de connoiſſance dans l'eſprit de celui qui s'en ſert. Car tous ſes raiſonnemens ne ſont immediatement fondez que ſur les conditions portées par le probleme qu'on doit reſoudre, & toutes ſes déductions ne ſe tirent qu'en reſolvant les égalitez qu'on a formées, & mettant enſuite à la place de certaines grandeurs inconnuës, certaines valeurs exprimées differemment, mais qui leur ſont égales.

PREMIER ET PRINCIPAL COROLLAIRE DE L'ANALYSE.

XXIX. Et pour les formules qui ſuivent de nos reſolutions, elles font déja voir combien noſtre Analyſe eſt feconde non ſeulement pour découvrir les veritez qu'elle recherche, mais auſſi pour connoître avec autant de facilité que d'evidence, les progrez infinis que peuvent avoir ordinairement de ſemblables découvertes. Et cet avantage tout conſiderable qu'il eſt, lui convient ſi uniquement, que ce n'eſt pas tout-à-fait ſans raiſon que de tres-ſçavans hommes l'ont conſiderée & la conſiderent encore aujourd'hui comme la premiere & la plus noble partie des Mathematiques. Mais ce n'eſt pas ici le lieu d'examiner ſi leur ſentiment eſt bien fondé, ou s'il eſt mal fondé. Peut-eſtre en dirai-je quelque choſe au Livre ſuivant.

DE LA COMPOSITION
DES PROBLEMES EN GENERAL.

XXX. Pour avoir une idée generale de cette compoſition, il faut conſiderer que tout ce qu'il y a de plus difficile dans l'Analyſe, c'eſt de ſçavoir bien reſoudre les egalitez qu'on a découvertes. Car les problemes pouvant eſtre compoſez de plus en plus à l'infini, les egalitez qui les repreſentent, puiſqu'elles marquent toutes les conditions que l'on y renferme, ſeront auſſi compoſées de plus en plus à l'infini. Or en tout probleme, les raiſonnemens tirez de ce qu'on y connoît, font découvrir quelle eſt l'egalité ou l'inegalité des grandeurs inconnuës aux grandeurs connuës : Si donc ils ſont plus compoſez, les operations qu'il faut faire ſeront auſſi plus compoſées, & les raiſonnemens plus longs à déduire. Car ne pouvant conclure immediatement l'egalité ou l'inegalité qu'on cherche, il faut y arriver par d'autant plus de milieux que la compoſition des problemes eſt plus envelopée.

Si l'on ſuppoſe par exemple que $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$. Puiſque $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{12}$. Donc $z = 1\frac{1}{12}$. Ce probleme eſt ſimple, & il n'eſt pas difficile à reſoudre, l'egalité de z avec $1\frac{1}{12}$ peut eſtre immediatement concluë.

Et ſi l'on ſuppoſe qu'un cube ſoit egal aux deux ſolides 2 & $\frac{11}{8}$, ſoit z la racine du cube. Donc par la ſuppoſition $z^3 = 2 + \frac{11}{8}$. Or $2 + \frac{11}{8} = \frac{27}{8}$, & parceque les cubes egaux ont leurs racines cubiques egales, $z = \frac{3}{2}$. Ce probleme eſt encore ſimple, quoique la grandeur inconnuë z^3 ſoit une troiſiéme puiſſance, parceque l'inconnu n'entre point en compoſition avec le connu, & qu'il n'a pas differens degrez.

Mais ſi l'on ſuppoſe une autre grandeur dont le quarré ſoit egal à un plan compoſé de ſa racine par $2 + 3$, moins un autre plan de 2 par 3. Prenant z pour la racine du quarré, je puis bien écrire ſelon la ſuppoſition $zz = 3z + 2z, - 2$ fois 3, c'eſt à dire $zz = 5z - 6$. Mais je n'apperçoi pas d'abord la valeur de z, ni celle auſſi de ſon quarré zz. Ce probleme eſt compoſé, & les raiſonnemens qui me feront conclure z égal à une grandeur connuë, me feront plus longs à déduire.

Si l'on ſuppoſe encore qu'un cube ſoit égal à un ſolide compoſé du quarré de la racine de ce cube par 9, moins un autre ſolide compoſé de la même racine par le plan 26, plus un ſolide égal à 24. Prenant z pour racine du cube, j'écrirai facilement ſelon la ſuppoſition $z^3 = 9zz - 26z + 24$, mais ſi l'on me demande quel eſt ce cube, & quelle en eſt la racine, je ne puis pas facilement répondre à cette queſtion, car les raiſonnemens qui peuvent me faire conclure l'égalité de z racine de ce cube à une grandeur connuë, ſont plus longs à déduire, & je ne puis arriver mediatement à cette connoiſſance, il faut que j'y employe pluſieurs milieux.

Or dans tous ces problemes & dans d'autres ſemblables, l'on peut aiſément voir que la difficulté de reduire tout l'inconnu ſeul d'une part & le connu de l'autre, vient de ce que l'inconnuë z eſt multipliée par ſoi-même, & de plus qu'elle eſt envelopée avec d'autres grandeurs connuës. Or plus cette inconnuë eſt ainſi multipliée par ſoi-même, & envelopée avec d'autres grandeurs connuës, plus le probleme eſt compoſé; La reſolution en ſera donc plus longue & plus difficile. XXXI.

Ce n'eſt pas neanmoins que cette reſolution ſe puiſſe autrement tirer que par nos réductions ordinaires, qui ſe font par le plus & par le moins, c'eſt à dire par toutes ſortes d'additions & de ſouſtractions ſimples ou compoſées, j'entends par additions compoſées toutes ſortes de multiplications ou d'involutions des grandeurs, & par ſouſtractions compoſées, j'entends toutes ſortes de diviſions ou de reſolutions de puiſſances. Mais parceque ſi les egalitez qu'on veut reſoudre, ſont des egalitez compoſées, ces operations ne ſe font pas tout-à-fait de la même maniere que nous les avons faites dans nos réductions & reſolutions precedentes, où nos egalitez ont toûjours eſté ſimples, nous ne dirons rien dans ce Livre, ni dans celui qui ſuit de la nature des egalitez compoſées, ni comment il les faut reſoudre. Nous reſervons d'en traitter plus à fonds dans les Livres ſuivans.

Au reſte l'on trouvera peut-eſtre à redire que je me ſois arreſté ſi longtemps à expliquer des choſes trop faciles, ſi l'on a tant ſoit peu d'ouverture ſur les Mathematiques; mais j'ai crû le devoir faire pour arreſter un peu ceux qui commencent, ſur les fondemens principaux de toute l'Analyſe, afin que s'en eſtant formé des idées tres-claires & tres-diſtinctes, ils puiſſent plus facilement dans la ſuite bien reconnoître ſes uſages, & l'appliquer plus methodiquement. Et de plus, je croy n'avoir rien expliqué qu'on ne doive ſçavoir, & qui ne merite qu'on y faſſe attention, ſi l'on veut bien appercevoir quel eſt en general l'ordre le plus naturel, ſelon lequel on doit ſe conduire pour arriver à la reſolution des problemes.

DES PROPORTIONS ET PROGRESSIONS ARITHMETIQUES.

DEFINITIONS.

XXXII. Tout excez ou difference ſuppoſe neceſſairement deux grandeurs, l'une plus grande & l'autre plus petite, & l'on appelle ces deux grandeurs les deux termes de la difference. Si 7 & 5 ſont les deux grandeurs, leur difference eſt $7-5$, & les deux nombres 7 & 5 ſont les deux termes de la difference $7-5$.

XXXIII. L'uſage a voulu que l'on appellaſt l'egalité de deux differences, c'eſt à dire le rapport de deux differences egales, *proportion Arithmetique*. La difference de 7 à 5, ou $7-5$, eſt la même que celle de 12 à 10, ou $12-10$; & l'egalité de ces deux differences s'appelle proportion Arithmetique.

XXXIV. Or chaque difference ſuppoſant deux termes, la proportion Arithmetique, qui renferme deux differences, en ſuppoſe neceſſairement quatre, & l'on dit que ces termes ſont *arithmetiquement proportionnels*. L'on appelle auſſi le premier terme *premier antecedent*, & le ſecond *premier conſequent*, le troiſiéme *ſecond antecedent*, & le quatriéme *ſecond conſequent*.

XXXV. L'on appelle encore le premier & quatriéme terme *les deux extrêmes* de la proportion, & le ſecond & troiſiéme terme ſont appellez *ceux du milieu*, ou *les moyens*.

XXXVI. Si les deux moyens ſont egaux, la proportion s'appelle continuë, & le terme qui tient la place de chacun des moyens, s'appelle *moyen arithmetiquement proportionel*.

PREMIER THEOREME.

XXXVII. En toute proportion arithmetique, la ſomme des extrêmes eſt egale à la ſomme des moyens.

Démonſtration. Soient a, b, c, & d, les quatre termes de toute proportion arithmetique, dont a & d ſoient les deux extrêmes, & b & c les deux moyens. Par la definition de la proportion arithmetique, il doit y avoir une même difference entre a & b qu'entre c & d. Or ſoit cette difference appellée e, ſi premierement l'on ſuppoſe a plus grand que b, & c par conſequent plus grand que d. Donc $a=b+e$, & $c=d+e$. Or la ſomme des extrêmes eſt $a+d=b+e+d$, & la ſomme des moyens eſt $b+c=b+d+e$. Et viſiblement $b+e+d=b+d+e$. Donc $a+d=b+c$, c'eſt à dire que la ſomme des extrêmes eſt egale à celle des moyens. Ce qu'il falloit démontrer.

Mais ſuppoſons en ſecond lieu que a eſt plus petit que b, & c par conſequent plus petit que d. Donc $a=b-e$, & $c=d-e$. Or la ſomme des extrêmes eſt $a+d=b-e+d$, & celle des moyens eſt $b+c=b+d-e$. Et viſiblement $b-e+d=b+d-e$. Donc $a+d=b+c$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

En toute proportion arithmetique continuë, la ſomme des extrêmes eſt egale au moyen proportionel pris deux fois. Car ce terme tient la place de chacun des deux moyens. XXXVIII.

PREMIER PROBLEME.

Les trois premiers termes d'une proportion arithmetique eſtant connus, en trouver le quatriéme. XXXIX.

La ſomme des deux moyens moins le premier terme donnera ce terme. Soient par exemple 15, 10, & 18, les trois premiers termes d'une proportion arithmetique, la ſomme des moyens 10 & 18 eſt 38, dont le premier terme 15 eſtant retranché laiſſe pour reſte 13 qui eſt le quatriéme terme. Car par le Theoreme precedent ce terme 13 plus le premier qui eſt 15 donne une même ſomme que les deux moyens 10 & 18. 15. 10. 18. 13.

AUTRE MANIERE.

On peut trouver encore plus facilement ce terme. Car ſi le premier de ceux qui ſont connus eſt plus grand que le ſecond, oſtant la difference qui eſt entre les deux premiers du troiſiéme terme, le reſte laiſſera le quatriéme. XL.

Si par exemple 15, 10, & 18, ſont les trois premiers termes connus, la difference des deux premiers eſt 5, & cette difference retranchée du troiſiéme terme 18 laiſſe le quatriéme qui eſt 13. 15. 10. 18. 13.

Mais ſi le premier terme eſt plus petit que le ſecond, ajoûtant la difference qui eſt entre les deux premiers, au troiſiéme terme, la ſomme donnera le quatriéme.

Si par exemple 10, 15, & 13, ſont les trois premiers termes connus, la difference qui eſt entre les deux premiers eſt 5, & cette difference ajoûtée au troiſiéme terme 13 donne le quatriéme qui eſt 18. 10. 15. 13. 18.

Tout cela eſt clair par le Theoreme precedent.

SECOND PROBLEME.

Continuer une progreſſion arithmetique, dont on connoît le premier terme & la difference qui eſt entre le premier & le ſecond. XLI.

Si le premier terme ſurpaſſe le ſecond, le premier moins la difference connuë donnera le ſecond; le ſecond moins la même difference donnera le troiſiéme; le troiſiéme moins cette difference donnera le quatriéme. Et ainſi des autres.

Si par exemple 8 eſt le premier terme, & 1 la difference ou l'excez dont ce terme 8 ſurpaſſe le ſecond, la progreſſion arithmetique ſera

$8.\ 7.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1.\ 0.\ -1.\ -2.\ -3.$ &c.

Et ſi pareillement le premier & le plus grand terme eſt a, & que ſa difference au ſecond ſoit d, la progreſſion arithmetique ſera

$a.\ a-d.\ a-2d.\ a-3d.\ a-4d.\ a-5d.\ a-6d.\ a-7d.$ &c.

Mais ſi le premier terme eſt plus petit que le ſecond, le premier plus la difference connuë donnera le ſecond; le ſecond plus la même difference donnera le troiſiéme; le troiſiéme plus cette difference donnera le quatriéme. Et ainſi des autres.

Si par exemple le premier terme eſt 1, & que la difference ou l'excez dont le ſecond terme ſurpaſſe le premier, ſoit pareillement 1, la progreſſion arithmetique ſera la ſuite naturelle de tous les nombres

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. &c.

Et ſi pareillement le premier & le plus petit terme eſt 1, & que la difference ſoit 2, la progreſſion arithmetique ſera la ſuite de tous les nombres impairs

1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. &c.

Et ſi le premier terme & le plus petit eſt 2, & que la difference ſoit auſſi 2, la progreſſion arithmetique ſera la ſuite de tous les nombres pairs

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. 24. &c.

De même ſi le premier & le plus petit terme eſt a, & que la difference ſoit d, la progreſſion arithmetique ſera

$a.\ a+d.\ a+2d.\ a+3d.\ a+4d.\ a+5d.\ a+6d.\ a+7d.\ a+8d.$ &c.

Cette progreſſion literale peut nous marquer generalement telle autre qu'on voudra, & même celles dont le premier terme ſurpaſſe le ſecond, car en ce cas $+d$, $+2d$, $+3d$, &c. vaudront moins que rien, & ſeront du genre des grandeurs que nous appellons negatives. Ainſi tout ce que nous aurons démontré de cette progreſſion, ſera generalement démontré de toute autre.

SECOND THEOREME.

XLII. En toute progreſſion arithmetique l'addition de deux termes egalement eloignez des extrêmes, eſt egale à la ſomme des extrêmes.

Démonſtration. Soit priſe telle progreſſion arithmetique qu'on voudra, comme $a.\ a+d.\ a+2d.\ a+3d.\ a+4d.\ a+5d.\ a+6d.$ Les deux termes $a+d$ & $a+5d$, ou les deux autres $a+2d$ & $a+4d$ ſont egalement eloignez des extrêmes a & $a+6d$. Or la ſomme des deux termes $a+d$ & $a+5d$, ou celle des deux autres $a+2d$ & $a+4d$, eſt egale à la ſomme des extrêmes a, & $a+6d$. Car chacune de ces ſommes eſt $2a+6d$. Et l'on verra la même choſe en toute autre progreſſion. Donc l'addition de deux termes egalement eloignez des extrêmes, eſt egale à la ſomme des extrêmes.

Ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire.

Lorſque le nombre des termes eſt impair, le terme du milieu ajoûté à lui-même donne une ſomme egale à la ſomme des deux extrêmes. Car ce terme du milieu tient lieu de deux termes, puiſqu'il eſt le conſequent de celui qui le precede, & l'antecedent de celui qui le ſuit; de ſorte que l'on peut conſiderer ce ſeul terme comme deux egalement eloignez des extrêmes. Et ainſi deux fois ce terme egaleront la ſomme des extrêmes. XLIII.

Troisiéme Theoreme.

En toute progreſſion arithmetique, la ſomme de tous les termes eſt égale au produit des deux extrêmes par la moitié du nombre de tous les termes. XLIV.

Démonſtration. Par le Theoreme precedent, la ſomme des extrêmes eſt egale à celle des deux premiers termes qui en ſont egalement eloignez, ou des deux ſeconds, ou des deux troiſiémes, ou de tous les autres, leſquels eſtant pris pareillement deux à deux, ſont auſſi egalement eloignez des extrêmes. C'eſt pourquoi la ſomme de tous les termes eſt egale au produit des deux extrêmes par la moitié du nombre de tous les termes. Ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire.

D'où il eſt evident que ſi le nombre des termes eſt impair, leur ſomme entiere eſt egale au produit du moyen par le nombre de tous les termes. Car le moyen vaut la moitié des deux extrêmes. Or la ſomme de tous les termes eſt egale au produit des extrêmes, par la moitié du nombre de tous les termes, ou ce qui eſt la même choſe, cette ſomme eſt egale au produit de la moitié des deux extrêmes par le nombre de tous les termes. Donc ſi le nombre des termes eſt impair, leur ſomme entiere eſt egale au produit du moyen par le nombre de tous les termes. XLV.

Quatriéme Theoreme.

En toute progreſſion arithmetique, chaque terme renferme le premier, plus autant de fois la difference qui regne dans la progreſſion, qu'il y a de termes avant lui. XLVI.

Démonſtration. Soit priſe telle progreſſion arithmetique que l'on voudra, comme $a.$ $a+d.$ $a+2d.$ $a+3d.$ $a+4d.$ $a+5d.$ $a+6d.$ & dans elle l'un de ſes termes, par exemple le cinquiéme $a+4d$, ou le ſixiéme $a+5d$. Le cinquiéme terme $a+4d$, renferme une fois le premier terme a, plus 4 fois la difference d, & le ſixiéme renferme une fois a, & 5 fois la difference d: Or il y a quatre termes qui precedent le cinquiéme $a+4d$, & il y en a cinq qui precedent le ſixiéme $a+5d$. Donc chaque terme renferme le premier plus autant de fois la difference qu'il y a de termes avant lui. Ce qu'il falloit démontrer.

PREMIER COROLLAIRE.

XLVII. Donc la difference d eſt égale au dernier terme moins le premier, diviſé par le nombre de tous les termes diminué de l'unité.

Car $d = \frac{a+4d-a}{4} = \frac{a+5d,-a}{5} = \frac{a+6d,-a.}{6}$ &c.

SECOND COROLLAIRE.

XLVIII. Et reciproquement le nombre de tous les termes egale l'unité, plus le dernier terme moins le premier, diviſé par la difference. Car par exemple dans la progreſſion $a.\ a+d.\ a+2d.\ a+3d.\ a+4d.$ qui n'a que 5 termes, le nombre $5 = 1 + \frac{a+4d,-a}{d}$ Et dans la progreſſion $a.\ a+d.\ a+2d.\ a+3d.\ a+4d.\ a+5d.$ qui a ſix termes, le nombre $6 = 1 + \frac{a+5d,-a}{d}$. Et ainſi des autres.

TROISIE'ME COROLLAIRE.

XLIX. Le premier terme eſt egal au dernier, moins le produit de la difference par le nombre de tous les termes diminué de l'unité. Car le dernier terme contient le premier, plus autant de fois la difference qu'il y a de termes avant lui, c'eſt à dire autant qu'il y a de termes dans toute la progreſſion moins un. De ſorte que retranchant du dernier terme autant de fois la difference qu'il y a de termes avant lui, le reſte doit laiſſer le premier terme.

QUATRIE'ME COROLLAIRE.

L. Et reciproquement le dernier terme doit egaler le premier, plus le produit de la difference par le nombre de tous les termes diminué de l'unité; puiſque ce dernier terme contient le premier, plus autant de fois la difference qu'il y a de termes avant lui.

TROISIE'ME PROBLEME.

LI. Le premier terme a, le dernier que j'appelle m, & le nombre des termes que j'appelle n, eſtant donnez, trouver la difference.

On diviſe le dernier terme moins le premier par le nombre des termes diminué de l'unité, & l'expoſant $\frac{m-a}{n-1}$ eſt la difference qu'on cherche. Cela eſt clair, *par* 47. *S.*

Exemple.

Une perſonne diſtribuë pendant 8 jours quelque aumône à des pauvres. Le premier jour elle leur donne 5 ſols, le dernier jour 26, & chaque autre jour un certain nombre plus que le precedent, mais qui eſt toûjours le même. On demande combien elle a donné chaque jour?

Les nombres des ſols diſtribuez pendant les 8 jours ſont une progreſſion arithmetique dont le premier terme $a = 5$, le dernier $m = 26$, le nombre des termes $n = 8$, & ainſi la difference $\frac{m-a}{n-1}$ eſt $\frac{21}{7} = 3$. Le nombre 3 eſtant donc la difference de chaque terme à celui qui le ſuit, le premier jour la perſonne a donné 5 ſols, le ſecond jour 8, le troiſiéme 11. &c.

5. 8. 11. 14. 17. 20. 23. 26.

QUATRIÉME PROBLEME.

LII. Le premier terme *a*, la difference *d*, & le dernier terme *m* eſtant donnez, trouver le nombre de tous les termes.

On prend l'unité, plus le dernier terme moins le premier, diviſé par la difference, & la ſomme $1+\frac{m-a}{d}$ eſt la valeur du nombre inconnu qu'on demande. C'eſt une ſuite du ſecond Corollaire 48. *S.*

Exemple.

Quelqu'un ayant emprunté de l'argent d'un uſurier s'eſt engagé de lui payer pour intereſts le premier mois 2 écus, le ſecond 2 plus que le premier, le troiſiéme 2 plus que le ſecond, & ainſi de ſuite juſqu'au rembourſement total. Or il arrive que le dernier mois auquel il fait ce rembourſement, il paye 36 écus d'intereſt. On demande combien il s'eſt écoulé de temps juſqu'au rembourſement total?

Les nombres des écus payez pour l'intereſt des mois qui ſont échûs, ſont une progreſſion arithmetique, dont le premier terme $a=2$, la difference $d=2$, & le dernier terme $m=36$. Et ainſi le nombre des termes $1+\frac{m-a}{d}$ eſt $1+\frac{34}{2}=18$. Le nombre 18 eſt donc celui des mois qui ſe ſont écoulez juſqu'au rembourſement total.

2. 4. 6. 8. 10. 12 14. 16. 18. 20. 22. 24. 26. 28. 30. 32. 34. 36.

CINQUIEME PROBLEME.

LIII. La difference *d*, le nombre des termes *n*, & le dernier terme *m* eſtant donnez, trouver le premier terme.

On oſte du dernier terme le produit de la difference par le nombre de tous les termes diminué de l'unité; & le reſte $m-dn+1d$ eſt le premier terme qu'on cherche, *par* 49. *S.*

Exemple.

Une perſonne a dépenſé de l'argent pendant 15 jours. Chaque jour elle a dépenſé 3 ſols plus que le jour precedent, & le dernier jour elle en a dépenſé 92. L'on demande combien cette perſonne a dépenſé de ſols chaque jour?

La difference $d=3$, le nombre des termes $n=15$, & le dernier terme $m=92$. Ainſi le premier terme $m-dn+1d$ eſt $92-45+3=50$. La perſonne a donc dépenſé 50 ſols le premier jour, 53 le ſecond, 56 le troiſiéme. Et ainſi de ſuite.

50. 53. 56. 59. 62. 65. 68. 71. 74. 77. 80. 83. 86. 89. 92.

SIXIÉME PROBLEME.

LIV. Le premier terme *a*, la difference *d*, & le nombre des termes *n* eſtant donnez, trouver le dernier terme.

On ajoûte au premier terme le produit de la difference par le nombre de tous les termes diminué de l'unité; & la ſomme $a+dn-1d$ donne le dernier terme, *par* 50. *S.*

Exemple.

Un Jardinier a cueilli les pommes d'un pommier pendant 12 années; la premiere année il a cueilli 5 pommes, la ſeconde 60 plus que la premiere, la troiſiéme 60 plus que la ſeconde. Et ainſi de ſuite juſqu'à la douziéme année. L'on demande combien il a cueilli de pommes la douziéme année.

Les nombres des pommes cueillies chaque année font une progreſſion arithmetique, dont le premier terme $a=5$, la difference $d=60$, & le nombre des termes $n=12$. Ainſi le dernier terme $a+dn-1d$ ſera $5+720-60=665$. Le Jardinier a donc cueilli 665 pommes la derniere année.

5. 65. 125. 185. 245. 305. 365. 425. 485. 545. 605. 665.

SEPTIE'ME PROBLEME.

LV. Le premier terme a, la difference d, & le nombre des termes n eſtant donnez, trouver la ſomme de la progreſſion.

On cherche par le probleme precedent, le dernier terme $a+dn-1d$. Enſuite on ajoûte les deux extrêmes a & $a+dn-1d$ en une ſomme, laquelle on multiplie par $\frac{1}{2}n$, c'eſt à dire par la moitié du nombre de tous les termes; Et le produit $an+\frac{1}{2}dnn-\frac{1}{2}dn$ donne la ſomme de la progreſſion, par le troiſiéme Theoreme 44. S.

Premier Exemple.

Un Prince ayant ordonné une levée de gens de guerre; le premier jour on enroole 50 ſoldats, le ſecond jour 12 plus que le premier, le troiſiéme 12 plus que le ſecond. Et ainſi de ſuite pendant 2 mois qui font 60 jours. L'on demande combien l'on a enroolé de ſoldats pendant tout ce temps.

Le premier terme $a=50$, la difference $d=12$, & le nombre des termes $n=60$. Ainſi toute la ſomme de la progreſſion, qui eſt $an+\frac{1}{2}dnn-\frac{1}{2}dn$, ſera $300+21600-360=21540$. L'on a donc enroolé 21540 ſoldats pendant les deux mois.

Second Exemple.

Deux perſonnes ont dépenſé une égale ſomme d'argent pendant pluſieurs mois. L'un a dépenſé 20 écus chaque mois, & l'autre a dépenſé 6 écus le premier mois, le ſecond 2 écus plus que le premier, le troiſiéme 2 plus que le ſecond, & ainſi de ſuite. L'on demande combien ils ont dépenſé d'écus, & combien de temps ils ont employé à les dépenſer?

Les nombres des écus que la ſeconde perſonne a dépenſé font une progreſſion arithmetique, dont le premier terme $a=6$, la difference $d=2$, & la ſomme de la progreſſion doit eſtre égale au produit du nombre inconnu de tous les termes que j'appelle z par le nombre donné 20 que j'appelle b. Je connois donc que pour ſatisfaire à la queſtion, il faut que le premier terme a, la difference d, & tel autre nombre que l'on voudra, comme b, eſtant donnez, la progreſſion ſoit continuée de telle ſorte que la ſomme inconnuë de tous ſes termes ſoit égale au produit du nombre inconnu de ces mêmes termes par le nombre donné b.

Et afin de le faire generalement. Le premier terme eſt a, la difference d, & le nombre inconnu des termes eſt z. Donc par le probleme que l'on vient d'expoſer, la ſomme de la progreſſion ſera $az+\frac{1}{2}dzz-\frac{1}{2}dz$, car nous appellons ici z ce que nous y appellons n. Or par la ſuppoſition cette ſomme doit égaler le produit du nombre inconnu de tous les termes qui eſt z par le nombre donné b. Donc l'égalité $az+\frac{1}{2}dzz-\frac{1}{2}dz=bz$ renfermera toutes les conditions qu'on demande, & ſa reſolution donnera auſſi celle de la queſtion Or afin de la reſoudre, je diviſe également chacun de ſes membres par z, & j'ai $a+\frac{1}{2}dz-\frac{1}{2}d=b$. J'ajoûte enſuite $\frac{1}{2}d$, & je retranche a de part & d'autre, & j'ai de nouveau l'égalité $\frac{1}{2}dz=b+\frac{1}{2}d-a$, dont chaque membre multiplié par 2 & diviſé par d, me donne enfin $z=\frac{2b+1d-2a}{d}$. Et remettant au lieu des lettres a, b, & d, les nombres 6, 20, & 2, qui leur ſont égaux, je connois que $z=\frac{30}{2}=15$. Le nombre 15 eſt donc celui des mois pendant leſquels chaque perſonne a dépenſé 15 fois 20 écus; c'eſt à dire 300.

6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. 24. 26. 28. 30. 32. 34.

Troiſiéme Exemple.

Deux perſonnes partent dans un même temps pour faire un voyage. La premiere fait tous les jours 8 lieuës, & la ſeconde ne fait le premier jour que 3 lieuës, le ſecond 4, le troiſiéme 5, & ainſi de ſuite faiſant chaque jour une lieuë plus que le jour precedent. L'on demande dans combien de jours cette perſonne peut atteindre la premiere qui fait tous les jours 8 lieuës, & combien chacune aura fait de lieuës?

Les nombres des lieuës que la ſeconde perſonne fait chaque jour, font une progreſſion arithmetique dont le premier terme $a=6$, la difference $d=1$, & la ſomme inconnuë de la progreſſion doit eſtre égale au produit du nombre inconnu de tous les termes par le nombre donné 8. Si donc je ſuppoſe $8=b$, le nombre de tous les termes $\frac{2b+1d-2a}{d}$ ſera 11. Le nombre 11 eſt donc celui des jours que la ſeconde perſonne a employé pour atteindre la premiere, & pendant leſquels chacune a fait 11 fois 8 lieuës, c'eſt à dire 88.

HUITIÉME PROBLEME.

La difference d, le nombre des termes n, & la ſomme de la progreſſion LVI.
que j'appelle $ſ$ eſtant donnez, trouver les deux extrêmes & chacun des interpoſez.

1°. On diviſe la ſomme de la progreſſion par la moitié du nombre de tous les termes, & l'expoſant qui eſt $\frac{2ſ}{n}$ donne la ſomme des extrêmes, *par 45. S.*

2°. On multiplie la difference par le nombre de tous les termes diminué de l'unité, & le produit qui eſt $nd-1d$ donne le dernier terme moins le premier, *par 54. S.*

3°. On oſte enfin le dernier terme moins le premier de la ſomme des deux extrêmes, aprés quoi il eſt viſible que le premier terme doit ſe trouver 2 fois dans le reſte $\frac{2s}{n} - nd + 1d$. Ce premier terme ſera donc $\frac{s}{n} - \frac{1}{2}nd + \frac{1}{2}d$, & le dernier $\frac{s}{n} + \frac{1}{2}nd - \frac{1}{2}d$. Or le premier eſtant trouvé, & la difference eſtant donnée, le ſecond l'eſt auſſi, & pareillement chacun de ceux qui le ſuivent eſt donné.

Exemple.

Une Fontaine artificielle a 10 jets d'eauë differens. Le ſecond jette dans une heure 2 pintes d'eauë plus que le premier, le troiſiéme 2 plus que le ſecond, & ainſi de ſuite. Et tous enſemble jettent 100 pintes d'eauë dans une heure. L'on demande combien chacun de ces dix jets de la Fontaine jette d'eauë dans une heure?

La difference $d = 2$, le nombre des termes $n = 10$, & la ſomme de la progreſſion $s = 100$. Le premier terme $\frac{s}{n} - \frac{1}{2}nd + \frac{1}{2}d$ ſera donc $\frac{100}{10} - 10 + 1$, c'eſt à dire 1. Et ainſi le premier jet de la Fontaine jette 1 pinte d'eauë dans une heure, le ſecond 3, le troiſiéme 5. Et ainſi de ſuite.

1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19.

AVERTISSEMENT.

LVII. *Lorſqu'on a établi des principes qui ſont generaux, il y a toûjours une infinité de veritez cachées qui en dépendent & qu'on en peut déduire. Mais il eſt ordinairement difficile de reconnoître immediatement comment elles peuvent en eſtre déduites, parceque l'on ne voit qu'une liaiſon fort éloignée entre ces veritez & leurs principes. C'eſt pourquoi il eſt tres-important de trouver des moyens generaux pour découvrir en peu de temps ces veritez. Or le plus general, le plus facile, & peut-eſtre l'unique de tous les moyens que l'on puiſſe inventer à cet effet, c'eſt de trouver des égalitez qui repreſentent la dépendance que les veritez inconnuës que l'on cherche à connoître, ont avec d'autres veritez que l'on connoît déja.*

Si par exemple le premier terme a, la difference d, & la ſomme de la progreſſion s eſtant donnez, il falloit connoître le nombre des termes & le plus grand, & que je ne viſſe pas immediatement comment cette connoiſſance peut eſtre déduite des principes que j'ai déja établis pour les progreſſions arithmetiques, je pourois recourir aux égalitez, & tâcher d'en déduire la connoiſſance que je deſire avoir, en cette ſorte.

Le premier terme eſt a, la difference d, & j'appelle z le nombre inconnu des termes. Donc *par* 55. *S.* la ſomme de la progreſſion ſera $az + \frac{1}{2}dzz - \frac{1}{2}dz$. Or par la ſuppoſition s eſt auſſi la ſomme de la progreſſion. J'aurai donc l'égalité $az + \frac{1}{2}dzz - \frac{1}{2}dz = s$, & cette égalité reſoluë me fera connoître ce que vaut le nombre des termes z, aprés quoi je trouverai le plus grand terme, *par* 54. *S.* Or afin de reſoudre l'égalité $az + \frac{1}{2}dzz - \frac{1}{2}dz = s$, j'ajoûte $\frac{1}{2}dz$, & je retranche az de part & d'autre.

Je

Je multiplie enſuite chaque membre par 2, & je le diviſe par *d*. Ce qui me donne enfin l'égalité $zz = 1z - \frac{2az}{d} + \frac{2ſ}{d}$. Et cette égalité eſt compoſée, parceque zz & z ſont deux degrez differens de l'inconnuë z, deſquels $\frac{2ſ}{d}$ n'enferme ny l'un ny l'autre. Ces égalitez compoſées & leurs reſolutions ſeront expliquées dans les Livres ſuivans. Mais en attendant, lorſque le premier terme a, la difference d, & la ſomme $ſ$ ſeront déterminées, nous pourons trouver le dernier terme de cette progreſſion, & le nombre de tous ſes termes par le moyen du Theoreme ſuivant.

CINQUIE'ME THEOREME.

LVIII. En toute progreſſion arithmetique, ſi l'on ajoûte le produit de la ſomme de tous les termes par 8 fois la difference, à un quarré qui ait pour ſa racine 2 fois le premier terme moins la difference, la ſomme totale ſera un quarré qui aura pour ſa racine 2 fois le dernier terme plus la difference.

Démonſtration. Soit priſe telle progreſſion arithmetique que l'on voudra, comme $a.\ a+d.\ a+2d.\ a+3d.\ a+4d.$ la ſomme de tous ſes termes eſt $5a+10d$, dont le produit par 8 fois la difference d eſt $40ad+80dd$. Or ce produit ajoûté au quarré $4aa-4ad+dd$ qui a pour ſa racine $2a-d$, c'eſt à dire 2 fois le premier terme a moins la difference d, l'on aura pour la ſomme totale $4aa+36ad+81dd$. Or cette ſomme eſt un quarré, car elle eſt égale au produit de $2a+9d$ par ſoi-même, $2a+9d$ en eſt donc la racine. Or cette racine enferme 2 fois $a+4d$ qui eſt le dernier terme de la progreſſion, plus 1 fois la difference d. La ſomme totale eſt donc un quarré qui a pour ſa racine 2 fois le dernier terme plus la difference. Et l'on verra la même choſe en toute autre progreſſion.. Donc &c. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

LIX. Si donc on ajoûte au quarré de $2a-d$ le produit de la ſomme des termes que j'appelle $ſ$ par 8 fois la difference, & que j'oſte 1 fois la difference, de la racine de la ſomme totale $4aa-4ad+dd+8dſ$; la moitié du reſte, c'eſt à dire $\frac{1}{2}\sqrt{4aa-4ad+dd+8dſ} - \frac{1}{2}d$, ſera le dernier terme. Car ſi nous prenons $2a+9d$, la racine de la ſomme totale $4aa+36ad+81dd$ du Theoreme precedent, il eſt viſible que la difference d eſtant 1 fois retranchée de cette racine, laiſſera $2a+8d$, dont la moitié $a+4d$ eſt le dernier terme de la progreſſion.

NEUVIE'ME PROBLEME.

LX. Le premier terme a, la difference d, & la ſomme de la progreſſion $ſ$ eſtant donnez, trouver le dernier terme de la progreſſion & le nombre des termes.

1°. On prend un quarré qui ait pour ſa racine 2 fois le premier terme moins la difference, on ajoûte à ce quarré le produit de la ſomme des termes par 8 fois la difference.

2°. On tire la racine quarrée de la ſomme totale, & l'on retranche de cette racine 1 fois la difference. La moitié de ce qui reſte, c'eſt à dire $\frac{1}{2}\sqrt{4aa-4ad+dd+8ds}-\frac{1}{2}d$, ſera le dernier terme de la progreſſion par le Corollaire precedent.

Or ce dernier terme eſtant connu, le nombre de tous les termes eſt auſſi donné. Car ſi nous appellons ce dernier terme m, l'on ſçait, *par* 52. *S*. que le nombre de tous les termes doit eſtre $1+\frac{m-a}{d}$, ou bien mettant au lieu de m ſa valeur, ce nombre ſera $\frac{\sqrt{4aa-4ad+dd+8ds}+d-2a}{2d}$.

Exemple.

Quelqu'un ayant emprunté de l'argent d'un uſurier, il s'eſt engagé de lui payer pour intereſt, le premier mois 2 écus, le ſecond mois 2 plus que le premier, le troiſiéme 2 plus que le ſecond, & ainſi de ſuite. Or il arrive que tous les intereſts qu'il a payé ſe montent à 342 écus. L'on demande combien il a payé d'écus le dernier mois, & combien il s'eſt écoulé de temps juſqu'au rembourſement total?

Le premier terme $a=2$, la difference $d=2$, & la ſomme des termes $s=342$. Et ainſi le dernier terme $\frac{1}{2}\sqrt{4aa-4ad+dd+8ds}-\frac{1}{2}d$ ſera 36. Et ſi j'appelle m ce terme 36, le nombre de tous les termes $1+\frac{m-a}{d}$ ſera 18. La perſonne a donc payé 36 écus le dernier mois, & 18 mois ſe ſont écoulez juſqu'au rembourſement total.

DIXIE'ME PROBLEME.

LXI. Si nous prenons la Table des puiſſances, & que la grandeur a ſoit conſiderée comme le premier terme d'une progreſſion arithmetique, & b comme la difference qui regne dans cette progreſſion; la ſomme de telles puiſſances qu'on voudra de tous les termes de la progreſſion, peut ſe trouver ainſi.

On prend dans la Table des puiſſances le rang de la puiſſance plus haute d'un degré que les puiſſances cherchées, & l'on éleve au même degré le terme qui ſuit immediatement & de plus prés le dernier de la progreſſion; & l'on en retranche.

1°. Le premier terme de la progreſſion élevé à ce même degré.

2°. Le produit du nombre de tous les termes par la difference élevée à ce même degré.

3°. Chaque terme de la progreſsion élevé à chacune des puiſſances qui ſont moindres d'un degré que les puiſſances cherchées, & multiplié dans chacun de ces degrez par ce qui multiplie un pareil degré du premier terme a au rang que l'on a pris dans la Table des puiſſances. Enſuite on diviſe le reſte qu'on trouve par la puiſſance du premier terme a, qui a même degré que les puiſſances cherchées, multipliée par le nombre de la cellule où cette puiſſance ſe trouve au rang que l'on a pris. Et l'expoſant qu'on trouve eſt auſsi la ſomme cherchée. Les exemples éclairciront ces regles.

Premier Exemple.

Soit propoſée la progreſsion arithmetique 5. 8. 11. 14. dont le premier terme eſt 5, & la difference 3, & qu'il faille trouver la ſomme de tous les quarrez de ſes termes. Pour trouver cette ſomme, je prens dans la Table des puiſſances le rang qui ſurpaſſe d'un degré les puiſſances quarrées dont il faut trouver la ſomme. Ce rang eſt $a^3+3aab+3abb+b^3$, & aprés avoir ſuppoſé le premier terme $5=a$, & la difference $3=b$, je prens 17 qui ſuit immediatement le dernier terme 14, & j'éleve 17 au degré du rang que j'ai pris, c'eſt à dire je prens 4913 cube de 17. Enſuite je retranche de ce cube, 1°. 125 cube du premier terme 5. 2°. 108 produit de 27 cube de la difference 3, par 4 nombre de tous les termes. 3°. J'en retranche auſsi la ſomme 38 des nombres propoſez 5. 8. 11. 14. multipliée par $3bb$, à cauſe que $3bb$ multiplie au rang que j'ai pris la puiſſance lineaire du premier terme a dans la cellule $3abb$, c'eſt à dire que j'en retranche encore 1026 produit de 38 par $27=3bb$. Et parcequ'il ne reſte plus de puiſſance inferieure à celle des quarrez dont il faut trouver la ſomme, je diviſe le reſte 3654 par $9=3b$, à cauſe que $3b$ multiplie au rang que j'ai pris le quarré aa dans la cellule $3aab$. L'expoſant de la diviſion eſt 406, qui eſt auſsi la ſomme de tous les quarrez des termes propoſez 5. 8. 11. 14. Car ces quarrez ſont 25. 64. 121. & 196. & leur ſomme eſt 406.

5. 8. 11. 14. | 17. $5=a$. $3=b$.

par 17 — $125=a^3$

quarré 266 — $108=4b^3$

par 17 — $1026=3bb$ſ

Cube 4913 — $1259=a^3+4b^3+35bb$ *ſomme à retrancher.*

—1259

reſte 3654 (406 *ſomme de tous les quarrez*

$\cancel{9}\cancel{9}\cancel{9}$

Second Exemple.

Pour trouver la ſomme de tous les cubes des termes de la progreſsion 5. 8. 11. 14. je prens dans la Table des puiſſances le rang qui ſurpaſſe d'un degré les puiſſances cubiques dont il faut trouver la ſomme. Ce rang eſt $a^4+4a^3b+6aabb+4ab^3+b^4$, & aprés avoir ſuppoſé le premier terme $5=a$, & la difference $3=b$, je prens 17 qui ſuit immediatement le dernier terme 14, & j'éleve 17 au degré du rang que j'ai pris, c'eſt à dire je prens 83521 quarré du quarré de 17. Enſuite je retranche de ce nombre, 1°. 625 quarré du quarré du premier terme 5. 2°. 324 produit de 81 quarré du quarré de la difference 3, par le nombre des termes qui eſt 4. 3°. J'en retranche auſsi la ſomme 38 de tous les nombres propoſez 5. 8. 11. 14. multipliée par $4b^3$, à cauſe que la puiſſance lineaire du terme a eſt multipliée par $4b^3$ dans la cellule $4ab^3$, c'eſt à dire j'en retranche 4104 produit de 38 par $108=4b^3$. 4°. Plus auſsi 21924 produit de 406 ſomme de tous les quarrez par $54=6bb$, à cauſe que la puiſſance quarrée aa eſt multipliée par $6bb$ dans la cellule $6aabb$. Et parce-qu'il ne reſte plus de puiſſance inferieure à celle des cubes dont il faut trouver la ſomme, je diviſe 56544 qui reſte par $1 = 4b$, à cauſe que $4b$ multiplie au rang que j'ai pris la puiſſance cubique a^3 dans la cellule $4a^3b$. L'expoſant de la diviſion eſt 4712, qui eſt auſsi la ſomme de tous les cubes des termes propoſez. Car ces cubes ſont 125. 512. 1331. 2744. & leur ſomme eſt 4712.

5. 8. 11. 14. | 17
quarré 289
quarré de quarré 83521
— 26977
56544

$625 = a^4$
$324 = 4b^4$
$4104 = 6b^3$ſ
$21924 = 6bb$ *par* 406 *ſomme de tous les quarrez.*
26977 *ſomme totale qu'il faut retrancher.*

$\cancel{1}$
$\cancel{1}8\cancel{1}\cancel{2}$
$\cancel{5}\cancel{6}\cancel{5}\cancel{4}\cancel{4}$ (4712 *ſomme de tous les cubes.*
$\cancel{1}\cancel{2}\cancel{2}\cancel{2}\cancel{2}$
$\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1}$

Démonſtration du Probleme.

Soit toute progreſsion arithmetique $a.\ a+d.\ a+2d.\ a+3d.$ & qu'il faille trouver la ſomme de telles puiſſances de ſes termes que l'on voudra, comme par exemple celle de tous leurs cubes. Selon les regles du probleme je prens le rang de la quatriéme puiſſance $a^4+4a^3b+6aabb+4ab^3+b^4$, & j'éleve à ce même degré $a+4d$ qui ſuit immediatement le dernier terme de la progreſsion, qui eſt $a+3d$. Je retranche enſuite de ce terme ainſi élevé, c'eſt à dire de $a^4+16a^3d+96aadd+256ad^3+256d^4$, 1°. a^4, 4e. puiſſance du premier terme a, plus $4d^4$ produit d'une pareille puiſſance de la difference d par le nombre des termes qui eſt 4, plus $16ad^3+24d^4$ produit de la ſomme de tous les termes par $4d^3 = 4b^3$, qui multiplie le premier terme a dans la cellule $4ab^3$, plus encore $24aadd+72ad^3+84d^4$, produit de la ſomme de tous les quarrez par $6dd = 6bb$, qui multiplie le quarré aa dans la cellule $6aabb$. Le reſte eſt $16a^3d+72aadd+168ad^3+144d^4$, & ce reſte eſtant diviſé par $4d = 4b$, qui multiplie la puiſſance cubique a^3 dans la cellule $4a^3b$, laiſſe pour expoſant $4a^3+18aad+42add+36d^4$. Or cet expoſant eſt la ſomme de tous les cubes des termes propoſez, qui ſont a^3. $a^3+3aad+3add+d^3$. $a^3+6aad+12add+8d^3$. & $a^3+9aad+27add+27d^3$. Et c'eſt la même choſe en toute autre progreſsion arithmetique, & pour telle autre de leurs puiſſances qu'on voudra. Les regles du probleme ont donc preſcrit ce qu'il falloit faire.

$a.\ a+d.\ a+2d.\ a+3d.$
terme ſuivant immediatement $a+4d$.
ſa 4e. *puiſſ.* $a^4+16a^3d+96aadd+256ad^3+256d^4$.
$-a^4 \ * \ -24aadd-88ad^3-112d^4$.
reſte $* \ 16a^3d+72aadd+168ad^3+144d^4$ $(4a^3+18aad+42add+36d^4$ *ſomme des cubes.*
$\cancel{4}d,\quad \cancel{4}d,\quad \cancel{4}d,\quad \cancel{4}d,$

$a^4 \ *$
$4d^4$
$16ad^3+24d^4$
$24aadd+72ad^3+84d^4$
$a^4 \ * \ +24aadd+88ad^3+112d^4$

PREMIER COROLLAIRE.

LXII. En toute progreſſion arithmetique des nombres naturels, le quarré du terme qui ſuit immediatement & de plus pres le dernier, moins le quarré du premier terme, moins encore le nombre des termes, eſt égal à 2 fois la ſomme de tous les termes. Par exemple ſi la progreſſion eſt a. $a+1$. $a+2$. $a+3$. le terme qui ſuit immediatement $a+3$ eſt $a+4$, dont le quarré eſt $aa+8a+16$. Et ſi l'on oſte de ce quarré celuy du premier terme a, plus le nombre des termes qui eſt 4, le reſte ſera $aa+8a+16$, $-aa$, -4, c'eſt à dire $8a+12$. Or ce reſte eſt égal à 2 fois $4a+6$, qui eſt la ſomme de tous les termes. Et il en eſt ainſi de toute autre progreſſion arithmetique des nombres naturels, où la difference eſt 1. Donc &c.

SECOND COROLLAIRE.

LXIII. L'on trouvera de même qu'en toute progreſſion arithmetique des nombres naturels, le cube du terme qui ſuit immediatement le dernier, moins le cube du premier terme, moins le nombre des termes, moins trois fois la ſomme de tous les termes, eſt égal à 3 fois la ſomme de tous les quarrez. Ainſi la progreſſion eſtant a. $a+1$. $a+2$. $a+3$. le cube du terme qui ſuit immediatement $a+3$ eſt $a^3+12aa+48a+64$. Et ſi l'on en retranche a^3 cube du premier terme a, plus 4 nombre de tous les termes, plus $12a+18$ triple de la ſomme de tous les termes, le reſte $12aa+36a+42$ ſera triple de la ſomme de tous les quarrez qui eſt $4aa+12a+14$. Or la raiſon pourquoi cela eſt une ſuite du probleme, c'eſt qu'en retranchant le nombre de tous les termes, l'on fait la même choſe que ſi l'on retranchoit le produit du quarré ou du cube de la difference qui eſt 1 par le nombre des termes.

LXIV. L'on trouvera dans le même ordre qu'en toute progreſsion arithmetique où la difference eſt 1, le quarré du quarré du terme qui ſuit immediatement le dernier, moins le quarré du quarré du premier, moins le nombre des termes, moins 4 fois la ſomme de tous les mêmes termes, moins encore 6 fois la ſomme de tous leurs quarrez, ſera égal à 4 fois la ſomme de tous les cubes. Et ainſi des autres à l'infini.

Monſieur Paſchal à qui eſt deuë l'invention du Probleme & des Corollaires precedens, les juge fort utiles dans la Geometrie des indiviſibles pour meſurer l'aire de toutes ſortes de paraboles, & d'une infinité d'autres figures.

DES NOMBRES POLYGONES.

DEFINITIONS.

LXV. L'on appelle *nombres Polygones*, ou *de pluſieurs angles*, les ſommes des progreſsions arithmetiques dont le premier terme a eſt l'unité, & la difference d tel autre nombre que l'on voudra.

LXVI. Et ces nombres polygones ſe diſtinguent en pluſieurs genres differens, car ſi la difference qui regne dans la progreſsion eſt l'unité, cette progreſsion ſera la ſuite naturelle des nombres 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. &c. & ſon premier terme qui eſt l'unité, & les ſommes de ſes deux premiers termes 1 & 2, ou des trois premiers 1. 2. & 3. ou des quatre premiers 1. 2. 3. & 4. ou des cinq 1. 2. 3. 4. & 5. &c. donneront les nombres 1. 3. 6. 10. 15. 21. 28. 36. 45. &c. qui ſont appellez *trigones* ou *triangulaires*, parceque leurs unitez ſe peuvent arranger en forme d'un triangle en cette ſorte.

LXVII. Mais ſi la difference de la progreſsion eſt 2, cette progreſsion ſera la ſuite naturelle des nombres impairs 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. &c. & ſon premier terme qui eſt l'unité, & les ſommes ou de ſes deux premiers termes 1, & 3, ou des trois premiers 1. 3. & 5. ou des quatre premiers 1. 3. 5. & 7. ou des cinq 1. 3. 5. 7. & 9. &c. donneront les nombres quarrez 1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81. &c. *par III.* 43. Et ces nombres s'appellent *tetragonones*, ou *quadrangulaires*, ou *quarrez*, parceque leurs unitez ſe peuvent arranger en forme d'un quarré en cette ſorte.

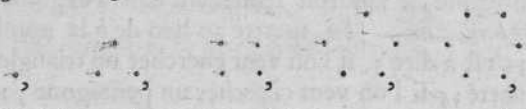
LXVIII. Et ſi la difference eſt 3, & que la progreſsion ſoit 1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. &c. l'unité qui en eſt le premier terme, & les ſommes de 1 & 4, ou de 1. 4. & 7. ou de 1. 4. 7. & 10. ou de 1. 4. 7. 10. & 13. &c. donneront les nombres 1. 5. 12. 22. 35. 51. 70. 92. 117. &c. qui ſont appellez *pentagones*.

LXIX. Pareillement ſi la difference eſt 4, & que la progreſsion ſoit 1. 5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. 33. &c. l'unité, & les ſommes de 1 & 5, ou de 1. 5. & 9. ou de 1. 5. 9. & 13. ou de 1. 5. 9. 13. & 17. &c. donneront les nombres 1. 6. 15. 28. 45. 66. 91. 120. 153. &c. qui ſont appellez *hexagones*.

LXX. De même ſi la progreſsion eſt 1. 6. 11. 16. 21. 26. 31. 36. 41. &c. le nombres qu'on appelle *heptagones* ſeront 1. 7. 18. 34. 55. 81. 112. 148. 189. &c. Il en eſt ainſi pour tous les autres nombres polygones à l'infini,

LXXI. L'on appelle *coſté d'un polygone* le nombre qui marque la multitude de tous les termes, dont la ſomme a compoſé ce polygone. Si par exemple les 5 termes 1. 2. 3. 4 & 5. eſtant réduits en une ſomme, ont compoſé le nombre triangulaire 15, l'on dira que 5, qui eſt le nombre des termes, eſt le coſté du triangle 15. De même ſi les 8 termes 1. 5. 9. 13. 17. 21. 25. & 29. ont compoſé l'hexagone 120, l'on dira que 8 eſt le coſté de cet hexagone. L'on dira pareillement que 6 eſt le coſté de l'heptagone 81, conſideré comme un heptagone formé par la ſomme des ſix termes 1. 6. 11. 16. 21. & 26. Et ſi l'on conſidere ce même nombre 81 comme un quarré formé par la ſomme des 9 termes 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. & 19, l'on dira que 9 eſt le coſté de ce quarré 81. Par où l'on voit qu'un même nombre peut eſtre quelquesfois conſideré comme un polygone en pluſieurs manieres differentes, ſelon leſquelles il aura differens coſtez.

Or il paroiſt aſſez par toutes les definitions precedentes, que tout nombre entier qui eſt plus grand que 2, eſt un polygone qui aura 2 pour ſon coſté, parceque les unitez de ce nombre pouront eſtre arrangées dans des éloignemens égaux, en telle ſorte qu'elles repreſenteront une figure qui aura 2 unitez pour ſon coſté, & autant d'angles qu'elle aura de coſtez; ainſi qu'on le peut voir par ces figures. LXXII.



&c.

Et pour ce qui eſt de l'unité, on la peut conſiderer comme un polygone de tel genre & de telle eſpece que l'on voudra, comme un triangle par exemple, ou comme un quarré, ou comme un pentagone, &c. parceque toutes les proprietez qui conviendront generalement à toutes ſortes de polygones pouront auſſi lui convenir. LXXIII.

Mais le nombre 2 ne peut eſtre conſideré comme aucun polygone, car ſes deux unitez quelque arrangement qu'on leur donne, ne pouront jamais repreſenter aucune figure angulaire, mais ſeulement les deux extrêmitez de quelque ligne droite; Et de plus les autres proprietez generales qui conviennent à tous les polygones, ne peuvent convenir à 2. LXXIV.

L'un des principaux fondemens pour connoître les proprietez generales des nombres angulaires ou polygones, c'eſt que le nombre de leurs angles ſurpaſſe toûjours de 2 unitez la difference qui regne dans la progreſſion dont ces polygones ſont la ſomme. Par exemple, ſi les nombres ſont triangulaires, la difference de la progreſſion ſera 1, *par 66. S.* & le nombre des angles 3, qui ſurpaſſe 1 de 2 unitez. De même ſi les nombres ſont quarrez, la difference de la progreſſion ſera 2, *par 67, S.* & le nombre des angles 4, qui ſurpaſſe 2 de 2 unitez. Et ſi pareillement les nombres ſont pentagones, la difference eſt 3, *par 68. S.* & le nombre des angles eſt $3+2$, c'eſt à dire 5. LXXV.

ONZIE'ME PROBLEME.

Le coſté d'un polygone que j'appelle *n*, & le nombre de ſes angles que j'appelle *b*, eſtant donnez, trouver ce polygone. LXXVI.

1°. On prend 2 unitez, plus le produit de la moitié du nombre des angles diminuée de l'unité par le coſté donné, & l'on retranche de la ſomme la moitié du nombre des angles.

2°. L'on multiplie tout ce qui reſte par le coſté donné, & le produit $2n+\frac{1}{2}bnn-nn-\frac{1}{2}bn$ donne le polygone qu'on cherche.

Démonſtration. Car tout polygone eſt la ſomme d'une progreſſion dont le premier terme $a=1$, *par* 65. *S.* la difference $d=b-2$, puiſque le nombre des angles qui eſt b doit toûjours ſurpaſſer la difference d de 2 unitez, *par* 15. *S.* Et pour le coſté nous l'appellons n, parcequ'il marque toûjours le nombre des termes. Or en toute progreſſion dont le premier terme eſt a, la difference d, & le nombre des termes n, la ſomme de la progreſsion eſt $an+\frac{1}{2}dnn-\frac{1}{2}dn$, par 55. *S.* Si donc nous ſuppoſons $a=1$, & $d=b-2$, cette ſomme ſera le polygone qui aura pour coſté la grandeur donnée n. Or ſubſtituant dans cette ſomme ou dans ce polygone 1 & $b-2$, au lieu des deux grandeurs a & d qui leur ſont égales, l'on aura pour ſa même valeur, $2n+\frac{1}{2}bnn-nn-\frac{1}{2}bn$. Les regles du probleme ont donc preſcrit ce qu'il falloit faire.

Et ſi l'on vouloit avoir des regles plus particulieres pour chaque eſpece de polygone, il faudroit ſeulement dans l'expreſsion generale du polygone $2n+\frac{1}{2}bnn-nn-\frac{1}{2}bn$, mettre au lieu de b le nombre des angles qui lui eſt égal; c'eſt à dire 3, ſi l'on veut chercher un triangle; 4 ſi l'on veut chercher un quarré; 5 ſi l'on veut chercher un pentagone; 12 ſi l'on veut chercher un nombre de 12 angles. Et ainſi pour tous les autres nombres angulaires. D'où l'on poura tirer les regles ſuivantes.

Pour les Nombres

Triangulaires,	*Quarrez,*	*Pentagones,*	*Hexagones,*	*Heptagones,*
$\frac{nn+n}{2}$,	$\frac{2nn+*}{2}$,	$\frac{3nn-1n}{2}$,	$\frac{4nn-2n}{2}$,	$\frac{5nn-3n}{2}$,

Et ainſi de ſuite pour tous les autres polygones à l'infini.

De ſorte par exemple que ſi j'avois à trouver le triangle dont le coſté eſt 6, ſuppoſant $6=n$, & prenant la formule des nombres triangulaires, j'aurai $\frac{nn+n}{2}=21$.

De même ſi le coſté eſt 12, ſon triangle ſera 78, ſon quarré 144, ſon pentagone $\frac{3nn-1n}{2}=210$, ſon hexagone $\frac{4nn-2n}{2}$ ou $2nn-n=276$, ſon heptagone ſera 342. Et ainſi des autres.

DOUZIÉME PROBLEME.

LXXVII. Le polygone *ſ*, & le nombre de ſes angles n eſtant donnez, trouver ſon coſté.

1°. On prend un quarré qui ait pour ſa racine le nombre des angles diminué de 4 unitez, on ajoûte à ce quarré le produit du polygone par 8 fois le nombre des angles diminué de 2 unitez.

2° On tire la racine de la ſomme totale, on lui ajoûte le nombre des angles diminué de 4 unitez; & la ſomme qu'on trouve diviſée par 2 fois le nombre des angles diminué de 2 unitez, c'eſt à dire $\frac{\sqrt{bb-8b+16+8b\text{ſ}-16\text{ſ}}+b-4}{2b-4}$ donne

donne le coſté qu'on cherche.

Démonſtration. Le polygone donné $ſ$ eſt la ſomme d'une progreſsion dont le premier terme $a = 1$, & la difference $d = b - 2$. Or en toute progreſsion dont le premier terme eſt a, la difference d, & la ſomme de la progreſsion $ſ$, le nombre de ſes termes eſt $\frac{\sqrt{4aa-4ad+dd+8dſ}+d-2a}{2d}$, *par 60. S.* Suppoſant donc $a = 1$ & $d = b - 2$, ce nombre ſera le coſté du polygone $ſ$, car le coſté de tout polygone marque le nombre de tous les termes de la progreſsion dont ce polygone eſt la ſomme : Or ſubſtituant dans ce nombre des termes ou dans ce coſté, 1 & $b - 2$ au lieu des grandeurs a & d qui leur ſont égales, l'on aura pour ſa même valeur $\frac{\sqrt{bb-8b+16+8bſ-16ſ}+b-4}{2b-4}$. Les regles du probleme ont donc preſcrit ce qu'il falloit faire.

Et ſi à l'exemple du probleme precedent, on vouloit avoir des regles plus particulieres pour chaque eſpece de polygone, il faudroit ſeulement dans l'expreſsion generale de leur coſté, que l'on vient de donner, mettre au lieu de b le nombre des angles qui lui eſt égal, c'eſt à dire 3 ſi l'on veut chercher le coſté d'un triangle; 5 ſi c'eſt le coſté d'un pentagone; 6 ſi c'eſt celui d'un hexagone; 15 ſi c'eſt celui d'un nombre de 15 angles. Et ainſi des autres. D'où l'on poura tirer les regles ſuivantes.

Pour les coſtez des nombres

Triangulaires,	*Quarrez,*	*Pentagones,*	*Hexagones,*	*Heptagones.*
$\frac{\sqrt{1+8ſ}-1}{2}$,	$\frac{\sqrt{*\ +16ſ}\ *}{4}$,	$\frac{\sqrt{1+24ſ}+1}{6}$,	$\frac{\sqrt{4+32ſ}+2}{8}$,	$\frac{\sqrt{9+40ſ}+3}{10}$,

Et ainſi de ſuite à l'infini. De ſorte que ſi j'avois à trouver le coſté du triangle 21, ſuppoſant $21 = ſ$, & prenant la formule qui ſert pour les coſtez des nombres triangulaires, j'aurai $\frac{\sqrt{1+8ſ}-1}{2} = 6$.

De même ſi le triangle eſt 1225, ſon coſté ſera 49. Et ſi nous conſiderons 1225 comme un nombre quadrangulaire, ſon coſté ſera 35. Et ſi nous le conſiderons comme un hexagone, prenant la formule qui marque les coſtez des nombres hexagones, & ſuppoſant $1225 = ſ$, nous trouverons que ſon coſté $\frac{\sqrt{4+32ſ}+2}{8} = 25$.

On trouvera en même ſorte, que ſi l'on conſidere 81 comme un quarré & comme un heptagone, ſes coſtez ſeront 9 & 6.

COROLLAIRE.

LXXVIII. Mais s'il arrivoit qu'on propoſaſt un nombre polygone, & que ſans déterminer le nombre de ſes angles ni de ſon coſté, il fallut neanmoins trouver l'un & l'autre, de ſemblables demandes ſeroient quelquesfois indéterminées, parcequ'un même nombre peut eſtre quelquesfois conſideré comme un polygone en pluſieurs manieres differentes, ſelon leſquelles il aura differens coſtez. Cependant l'on pouroit toûjours déterminer toutes ces differentes manieres par le moyen des formules precedentes. Car ſi un nombre eſt polygone, le quarré qui aura pour ſa racine le nombre des angles diminué de 4 unitez, plus le produit du polygone par 8 fois le nombre des angles diminué de 2 unitez, donnera toûjours un nombre quarré, *par* 58. *S.* & la racine de ce quarré plus le nombre des angles moins 4 eſtant diviſée par 2 fois le nombre des angles moins 4 unitez, donnera toûjours un nombre entier qui ſera le coſté du polygone. C'eſt une ſuite du probleme.

C'eſt pourquoy ſi quelque nombre eſtant propoſé, l'on prend le quarré d'un autre nombre diminué de 4 unitez, plus le produit du nombre propoſé par 8 fois cet autre nombre diminué de 2 unitez, & que la racine de la ſomme ne ſoit pas commenſurable, ou bien ſi cette racine eſtoit commenſurable, mais qu'en lui ajoûtant le ſecond nombre diminué de 4 unitez, & diviſant la ſomme par 2 fois le même nombre moins 4 unitez, l'expoſant ne fuſt pas un nombre entier; il eſt bien viſible que le nombre propoſé ne pouroit pas eſtre un polygone, qui euſt l'autre nombre pour ſon coſté.

TREIZIÉME PROBLEME.

LXXIX. Ainſi tout nombre entier eſtant propoſé, pour trouver en combien de manieres il peut eſtre appellé polygone.

Si l'on appelle ce nombre *ſ*, on verra ſucceſſivement & par ordre ſi chaque expreſſion des formules precedentes peut valoir un nombre entier.

Soit par exemple 36 le nombre propoſé, je ſuppoſe premierement que ce nombre eſt un triangle, & l'appellant *ſ*, je prens la formule $\frac{\sqrt{1+8ſ}-1}{2}$ qui ſert pour les coſtez des nombres triangulaires, & voyant que la valeur de cette formule eſt le nombre entier 8, je conclus que 36 eſt un triangle dont le coſté eſt 8. Voyant enſuite que la valeur de la formule qui ſert pour les nombres quadrangulaires, eſt le nombre entier 6, ou plûtoſt ſans me ſervir de cette formule pour les quarrez, voyant que 36 eſt un quarré dont le coſté eſt 6, je conclus déja que 36 eſt un nombre polygone en deux differentes manieres. Enſuite voyant que la valeur des formules qui ſervent pour les coſtez des pentagones, hexagones, & autres, ne peut eſtre un nombre entier, excepté de celle qui ſert pour les coſtez des nombres de 36 angles, qui eſt $\frac{\sqrt{1024+272ſ}+32}{68}$, dont la valeur eſt le nombre entier 2; je conclus enfin que 36 ne peut eſtre qu'un triangle dont le coſté eſt 8, ou un quarré dont le coſté eſt 6, ou un nombre de 36 angles dont le coſté eſt 2. Il en eſt ainſi des autres. Et la démonſtration du probleme n'eſt qu'une ſuite du precedent & du cinquiéme Theoreme 58. S.

Au reſte en prenant les formules, il eſt aſſez viſible que l'on ne doit point paſſer au delà de celle qui ſert pour le coſté des nombres angulaires qui ont plus d'angles que le nombre propoſé n'a d'unitez. Ainſi dans l'exemple precedent du nombre 36, il n'auroit pû ſervir de rien de paſſer au delà de la formule $\frac{\sqrt{1024+272ſ}+32}{68}$ qui ſert pour le coſté des nombres de 36 angles.

AVERTISSEMENT.

Au reſte l'on ne doit pas s'imaginer qu'il y ait des figures geometriques autres que les triangles, ou bien les quarrez qui répondent aux nombres angulaires, & auſquelles toutes les mêmes proprietez puiſſent auſſi bien convenir qu'elles conviennent à ces nombres polygones. LXXX.

DE LA PROPORTION GEOMETRIQUE.

DEFINITIONS.

L'égalité de deux rapports, c'eſt à dire le rapport de deux rapports égaux, ou la comparaiſon de deux rapports qui ont chacun un même expoſant, s'appelle *proportion geometrique*, ou ſimplement *proportion*. Les rapports $\frac{6}{3}$ & $\frac{8}{4}$ ſont égaux entr'eux. Car $\frac{2}{1}$ ou 2 expoſant de chacun eſt le même, & $\frac{6}{3}=\frac{8}{4}$ s'appelle proportion geometrique. LXXXI.

Or chaque rapport ſuppoſant deux termes, la proportion geometrique qui renferme deux rapports, en ſuppoſe neceſſairement quatre; & ces termes ſont appellez *proportionels*. Le premier terme s'appelle auſſi *premier antecedent*, & le ſecond *premier conſequent*; le troiſiéme *ſecond antecedent*, & le quatriéme *ſecond conſequent*. Et l'on dit que le premier antecedent eſt à ſon conſequent, comme le ſecond antecedent eſt à ſon conſequent, c'eſt à dire que l'expoſant du premier au ſecond terme eſt égal à l'expoſant du troiſiéme au quatriéme. Et ces proportions ſe marquent ainſi 6.3::8.4. c'eſt à dire, 6 eſt à 3 comme 8 eſt à 4, ou le rapport de 6 à 3 eſt égal au rapport de 8 à 4, ou bien $\frac{6}{3}=\frac{8}{4}$. LXXXII.

Avertiſſement.

Lors donc que l'on verra ces ſortes d'expreſſions 6.3::8.4. il faut ſe figurer qu'elles ne ſignifient rien autre choſe que les termes de deux fractions qui ſont égales entr'elles, la premiere fraction eſt le premier antecedent diviſé par ſon conſequent, & la ſeconde fraction eſt le ſecond antecedent diviſé par ſon conſequent. L'on doit bien remarquer cela, car l'on s'accoûtume preſque toûjours à chercher des differences eſſentielles & des diſtinctions réelles dans les choſes qui ſont exprimées ou figurées differemment, quoique cependant elles ſoient les mêmes. Je me perſuade que cette ſorte d'expreſſion 6.3::8.4. a eſté choiſie pour éviter celle des petits caracteres qui marquent les fractions, & pour ne point ſe ſervir de la marque d'égalité.

Le premier & le quatriéme terme de la proportion s'appellent *extrêmes*, & les deux autres *ceux du milieu* ou *les moyens*. LXXXIII.

Si les deux moyens ſont égaux, la proportion s'appelle *continuë*, & le terme qui tient la place de chacun des moyens s'appelle *moyen proportionel*.

Proportion continuë 8.4::4.2.

Et afin d'abreger ces proportions continuës, & de les diſtinguer des autres, on les exprime ainſi.

Proportion continuë ∺ 8.4.2.

LXXXIV. Lorſqu'une proportion s'étend à plus de trois termes, on l'appelle *progreſſion*, & on la marque ainſi.

Progreſſion ∺ 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c.

LXXXV. La définition que nous venons de donner de la proportion geometrique, ſemblera peut-eſtre plus facile à comprendre que celle qu'on en donne ordinairement par le moyen des aliquotes des grandeurs comparées ; Du moins elle en explique la nature d'une maniere plus generale, & l'on peut toûjours par ſon moyen démontrer poſitivement ſi quatre grandeurs ſont ou ne ſont pas en proportion geometrique, comme on le verra dans la ſuite.

LXXXVI. L'on peut même tirer des deux expreſſions differentes de ſes 4 termes une methode generale pour marquer le rapport qui ſe trouve entre tels & tant d'autres rapports que l'on voudra. Par exemple pour marquer le rapport qui eſt entre ces deux rapports $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{5}$, je diviſe $\frac{1}{4}$ par $\frac{1}{5}$, & l'expoſant $\frac{5}{4}$ eſt le rapport de $\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{5}$. Car $\frac{1}{4}$ diviſé par $\frac{1}{5} = \frac{5}{4}$, ou bien en l'exprimant ainſi $\frac{1}{4}.\frac{1}{5}::5.4$. De même pour marquer le rapport qui eſt entre le rapport de $\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{5}$, & celui de $\frac{1}{3}$ à $\frac{1}{7}$, je trouve en premier lieu $\frac{5}{4}$ expoſant de $\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{5}$, & $\frac{7}{3}$ expoſant de $\frac{1}{3}$ à $\frac{1}{7}$, & enſuite je trouve $\frac{15}{28}$ expoſant de l'expoſant $\frac{5}{4}$ à l'expoſant $\frac{7}{3}$; & $\frac{15}{28}$ marque le rapport qui ſe trouve entre le rapport de $\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{5}$, & celui de $\frac{1}{3}$ à $\frac{1}{7}$. Car $\frac{1}{4}$ diviſé par $\frac{1}{5}$, diviſé par $\frac{1}{3}$ diviſé $\frac{1}{7} = \frac{15}{28}$, ou bien en l'exprimant ainſi $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}}.\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{7}}::15.28.$ c'eſt à dire $\frac{1}{4}$ diviſé par $\frac{1}{5}$, eſt à $\frac{1}{3}$ diviſé par $\frac{1}{7}$, comme 15 eſt à 28.

COROLLAIRE.

D'où l'on peut tirer cette conſequence, que deux differens rapports, qui ont chacun le même antecedent, ſont entr'eux comme leurs conſequens dans un ordre renverſé. Par exemple $\frac{a}{b}.\frac{a}{c}::c.b$. Car $\frac{a}{b}$ diviſé par $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$. Pareillement $\frac{1}{3}.\ \frac{1}{7}.\ 7.\ 3$. Car $\frac{1}{3}$ diviſé par $\frac{1}{7} = \frac{7}{3}$. De même $\frac{1}{4}.\frac{1}{5}::5.\ 4$.

PREMIER THEOREME.

LXXXVII Deux grandeurs conſervent un même rapport quoiqu'on ajoûte à l'une & à l'autre, ſi ce qu'on ajoûte à la premiere eſt à ce qu'on ajoûte à la ſeconde comme la premiere eſt à la ſeconde.

Démonſtration. Soient les deux grandeurs a & b auſquelles on ajoûte c & d, ſi $a.b::c.d$. c'eſt à dire ſi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, je dis que $a+c.\ b+d::a.b$. c'eſt à dire que $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$. Car ſoit e l'expoſant de $\frac{a}{b}$. Par la ſuppoſition e eſt auſſi l'expoſant de $\frac{c}{d}$. Donc $eb = a$ & $ed = c$. Et ainſi mettant à la place des grandeurs a & c, eb valeur de a, & ed valeur de c, dans les deux antecedens $a+c$ & a ; on aura $\frac{eb+ed}{b+d}=\frac{a+c}{b+d}$ & $\frac{eb}{b}=\frac{a}{b}$. Or $\frac{eb+ed}{b+d}=\frac{eb}{b}$. Car e l'expoſant de chacun eſt le même. Donc $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}$, ou bien en l'exprimant ainſi $a+c.\, b+d :: a.\, b$. Ce qu'il falloit démontrer.

SECOND THEOREME.

Deux grandeurs conſervent un même rapport quoiqu'on retranche de l'une & de l'autre, ſi ce qu'on retranche de la premiere eſt à ce qu'on retranche de la ſeconde, comme la premiere eſt à la ſeconde. LXXXVIII.

Démonſtration. Soient les deux grandeurs a & b, deſquelles on retranche c & d. Si $a.\, b :: c.\, d$. je dis que $a-c.\, b-d :: a.\, b$. Car ſoit e l'expoſant de $\frac{a}{b}$, par la ſuppoſition e eſt auſſi l'expoſant de $\frac{c}{d}$. Donc $eb=a$ & $ed=c$. Et ainſi mettant à la place des grandeurs a & c, eb valeur de a & ed valeur de c dans les deux antecedens $a-c$ & a, on aura $\frac{eb-ed}{b-d}=\frac{a-c}{b-d}$ & $\frac{eb}{b}=\frac{a}{b}$. Or $\frac{eb-ed}{b-d}=\frac{eb}{b}$. Car e l'expoſant de chacun eſt le même. Donc $\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}$, ou bien en l'exprimant ainſi $a-c.\, b-d :: a.\, b$. Ce qu'il falloit démontrer.

TROISIE'ME THEOREME.

Si quatre termes ſont proportionels, ils le ſeront encore dans chacun des quatre changemens qui ſuivent. LXXXIX.

Premier changement qui s'appelle *de permutation.*

Ce changement ſe fait lorſqu'on tranſpoſe les termes de chaque rapport, ce qui s'appelle ordinairement *permutando.*

Soit par exemple $a.\, b :: c.\, d$. c'eſt à dire $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, je dis que *permutando* $b.\, a :: d\ c$. ou $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$. Car ſoit e l'expoſant de $\frac{a}{b}$, e eſt auſſi l'expoſant de $\frac{c}{d}$; Donc $eb=a$, & $ed=c$. Et ainſi mettant à la place des grandeurs a & c, leurs valeurs eb & ed, dans les deux rapports $\frac{b}{a}$ & $\frac{d}{c}$, on aura $\frac{b}{eb}=\frac{b}{a}$, & $\frac{d}{ed}=\frac{a}{c}$. Or $\frac{b}{eb}=\frac{d}{ed}$, car $\frac{1}{e}$ l'expoſant de chacun eſt le même. Donc $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, ou bien en l'exprimant ainſi $b.\, a :: d.\, c$. Ce qu'il falloit démontrer.

Second changement qui s'appelle *alternatif.*

Ce changement ſe fait en comparant les antecedens enſemble, & les conſequens enſemble ; le premier terme au troiſiéme, & le ſecond au quatriéme, ce qui s'appelle *alternando.* XC.

Soit par exemple $a.\, b :: c.\, d$. c'eſt à dire $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Donc *alternando* $a.\, c :: b.\, d$. ou $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, car ſoit e l'expoſant de $\frac{a}{b}$, e eſt auſſi l'expoſant de $\frac{c}{d}$. Donc $eb=a$ & $ed=c$. Et ainſi mettant à la place des grandeurs a & c leurs valeurs eb & ed dans le rapport $\frac{a}{c}$, on aura $\frac{eb}{ed}=\frac{a}{c}$. Or $\frac{eb}{ed}=\frac{b}{d}$.

Car l'expoſant de chacun eſt $\frac{b}{d}$. Donc $\frac{a}{c}=\frac{b}{a}$, ou bien en l'exprimant ainſi $a.c::b.d.$ Ce qu'il falloit démontrer.

Troiſiéme Changement qui s'appelle *de compoſition.*

XCI. Ce changement ſe fait en comparant chaque antecedent plus ſon conſequent avec ſon conſequent, ce qui s'appelle *componendo.*

Soit par exemple $a.b::c.d.$ c'eſt à dire $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Donc *componendo* $a+b.b::c+d.d.$ ou $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$. Car ſoit e l'expoſant de $\frac{a}{b}$, e eſt auſſi l'expoſant de $\frac{c}{d}$. Donc $eb=a$, & $ed=c$. Et ainſi mettant à la place des grandeurs a & c leurs valeurs eb & ed dans les deux rapports $\frac{a+b}{b}$ & $\frac{c+d}{d}$, on aura $\frac{eb+b}{b}=\frac{a+b}{b}$ & $\frac{ed+d}{d}=\frac{c+d}{d}$. Or $\frac{eb+b}{b}=\frac{ed+d}{d}$. Car l'expoſant de chacun eſt $e+1$. Donc $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$, ou bien en l'exprimant ainſi $a+b.\ b::c+d.\ d.$ Ce qu'il falloit démontrer.

Quatriéme changement qui s'appelle *de diviſion.*

XCII. Ce changement ſe fait en comparant chaque antecedent moins ſon conſequent avec ſon conſequent, ce qui s'appelle *dividendo.*

Soit par exemple $a.b::c.d.$ c'eſt à dire $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Donc *dividendo* $a-b.b::c-d.d.$ ou $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$. Car ſoit e l'expoſant de $\frac{a}{b}$, e eſt auſſi l'expoſant de $\frac{c}{d}$. Donc $eb=a$ & $ed=c$. Et ainſi mettant à la place de a & de c leurs valeurs eb & ed dans les deux rapports $\frac{a-b}{b}$ & $\frac{c-d}{d}$, on aura $\frac{eb-b}{b}=\frac{a-b}{b}$ & $\frac{ed-d}{d}=\frac{c-d}{d}$. Or $\frac{eb-b}{b}=\frac{ed-d}{d}$. Car l'expoſant de chacun eſt $e-1$. Donc $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$, ou bien en l'exprimant ainſi $a-b.\ b::c-d.\ d.$

Du troiſiéme & quatriéme changement.

XCIII. On peut remarquer que dans le troiſiéme changement on ne fait qu'adjoûter l'unité, & au quatriéme que la retrancher dans chacun des deux rapports égaux qui font la proportion. C'eſt pourquoi on auroit appellé plus proprement ces deux changemens *addendo* & *detrahendo,* que *componendo* & *dividendo.* Car de même que *dividendo* convient plus à la diviſion qu'à la ſouſtraction ; de même auſſi *componendo* convient plus à la multiplication qu'à l'addition ; puiſqu'il eſt vrai de dire, que l'uſage ſemble avoir établi ces mots *compoſition* & *reſolution*, pour exprimer les deux idées directement oppoſées de la multiplication, qui fait que les grandeurs ſimples deviennent plus compoſées ; & de la diviſion, qui fait que les compoſées ſe réduiſent à de plus ſimples.

QUATRIÉME THEOREME.

XCIV. Pluſieurs rapports eſtant égaux, tous les antecedens ſont à tous les conſequens, comme chaque antecedent eſt à ſon conſequent.

Démonſtration. Soient $a.\ b::c,d::f.g.$ c'eſt à dire $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{f}{g}$, je dis que $\frac{a+c+f}{b+d+g}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{f}{g}$. Car ſoit e l'expoſant de $\frac{a}{b}$, e eſt auſſi l'expoſant de $\frac{c}{d}$ & de $\frac{f}{g}$. Donc $eb=a$, $ed=c$, & $eg=f$. Mettant donc à la place des grandeurs a, c, & f, leurs valeurs eb, ed, & eg, dans les rapports $\frac{a+c+f}{b+d+g}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, & $\frac{f}{g}$, on aura $\frac{eb+ed+eg}{b+d+g}=\frac{a+b+f}{b+d+g}$, $\frac{eb}{b}=\frac{a}{b}$, $\frac{ed}{d}=\frac{c}{d}$, & $\frac{eg}{g}=\frac{f}{g}$. Or $\frac{eb+ed+eg}{b+d+g}=\frac{eb}{b}=\frac{ed}{d}=\frac{eg}{g}$; Car l'expoſant de chacun eſt e. L'on voit donc que $\frac{a+c+f}{b+d+g}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{f}{g}$. Ce qu'il falloit démontrer.

QUATRIE'ME THEOREME.

En toute proportion geometrique, le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens XCV.

Démonſtration. Soit toute proportion geometrique appellée $a.b::c.d.$ c'eſt à dire $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Je dis que $ad=bc$. Car ſoit e l'expoſant de $\frac{a}{b}$, e eſt auſſi l'expoſant de $\frac{c}{d}$. Donc $eb=a$, & $ed=c$. Et mettant à la place des grandeurs a & b, eb valeur de a, & ed valeur de e, dans les produits ad & bc; on aura $ebd=ad$, & $bed=bc$. Or $ebd=bed$. Donc $ad=bc$. Ce qu'il falloit démontrer.

Autre Démonſtration.

Ce Theoreme peut encore eſtre ainſi démontré. Selon la ſuppoſition, $a.b::c.d.$ ou $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Si ces deux rapports égaux ſont chacun également multipliez par bd produit des deux conſequens b & d, les produits nouveaux ſeront ad & bc. Or les grandeurs également multipliées donnent des produits égaux. Donc $ad=bc$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

En toute proportion continuë le produit des extrêmes eſt égal au quarré du moyen proportionel. $\div a.b.c.$ eſt une proportion continuë & $ac=bb$. Car $\div a.b.c.$ eſt le même que $a.b::b.c.$ Donc par le Theoreme precedent $ac=bb$. XCVI.

CINQUIE'ME THEOREME.

Si quatre grandeurs ſont tellement diſpoſées que le produit des extrêmes ſoit égal au produit des moyens, ces grandeurs ſont proportionelles. XCVII.

Démonſtration. Soient par exemple ces quatre grandeurs ainſi diſpoſées $a.$ $b.$ $c.$ $d.$ & $ad=bc$, je dis que $a.b::c.d.$ ou $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Car ſi les deux produits égaux ad & bc ſont chacun également diviſez par bd, les expoſants nouveaux ſeront $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$. Or ſi des grandeurs égales ſont également diviſées, les expoſans ſont égaux. Donc $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ou bien en l'exprimant ainſi, $a.b::c.d.$ Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Les quatre changemens démontrez au troiſiéme Theoreme, lorſque XCVIII.

quatre grandeurs ſont proportionelles, pouroient encore eſtrē ainſi démontrez. Selon la ſuppoſition $a.b::c.d.$ Donc $ad=bc$..

Donc
- *permutando* $b.a::d.c.$ Car $bc=ad$.
- *alternando* $a.c::b.d.$ Car $ad=cb$.
- *componendo* $a+c.c::b+d.d.$ Car $ad+cd=bc+cd$, puiſque $ad=bc$.
- *dividendo* $a-c.c::b-d.d.$ Car $ad-cd=bc-cd$, puiſque $ad=bc$.

SIXIÉME THEOREME.

IC. En toute proportion geometrique, 1°. Le premier terme eſt égal au produit du ſecond par le troiſiéme, diviſé par le quatriéme.

C. 2°. Le ſecond terme eſt égal au produit du premier par le quatriéme, diviſé par le troiſiéme.

CI. 3°. Le troiſiéme terme eſt égal au produit du premier par le quatriéme, diviſé par le ſecond.

CII. 4°. Et enfin le quatriéme terme eſt égal au produit du ſecond par le troiſiéme, diviſé par le premier.

Démonſtration. Soit priſe telle proportion droite qu'on voudra, comme $a.b::c.d.$ Donc par la définition de cette proportion 81. S. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. & par le quatriéme Theoreme 95. S. $ad=bc$.

Or diviſant les deux produits égaux ad & bc.	1°. par d	on trouvera les expoſans égaux	a & $\frac{bc}{d}$
	2°. par c		b & $\frac{ad}{c}$
	3°. par b		c & $\frac{ad}{b}$
	4°. par a		d & $\frac{bc}{a}$

Or 1°. le premier terme a, ou $\frac{bc}{d}$ qui lui eſt égal, eſt le produit du ſecond terme b par le troiſiéme c, diviſé par le quatriéme d.

2°. Le ſecond terme b, ou $\frac{ad}{c}$ qui lui eſt égal, eſt le produit du premier terme a par le quatriéme d, diviſé par le troiſiéme c.

3°. Le troiſiéme terme c, ou $\frac{ad}{b}$ qui lui eſt égal, eſt le produit du premier terme a par le quatriéme d, diviſé par le ſecond b.

4°. Et enfin le quatriéme terme d, ou $\frac{bc}{a}$ qui lui eſt égal, eſt le produit du ſecond terme b par le troiſiéme c, diviſé par le premier terme a.

Donc &c. Ce qu'il falloit démontrer.

DES PROPORTIONS DROITES,

ET RENVERSÉES.

CIII. Lorſque le premier terme d'une proportion eſt au ſecond, comme le troiſiéme eſt au quatriéme; ou ce qui eſt la même choſe *par* 90. *S.* lorſque le premier terme eſt au troiſiéme comme le ſecond eſt au quatriéme, la proportion qui s'appelle geometrique, s'appelle auſſi une *proportion droite*.

Mais lorſque le premier terme d'une proportion eſt au troiſiéme, comme dans un ordre renverſé le quatriéme terme eſt au ſecond ; la proportion s'appelle *renverſée* ou *reciproque*. CIV.

SEPTIE'ME THEOREME.

Si donc l'on tranſpoſe reciproquement le premier terme d'une proportion renverſée à la place du troiſiéme, & le troiſiéme à la place du premier ; ou bien le ſecond terme à la place du quatriéme, & le quatriéme à la place du troiſiéme ; la proportion qui eſtoit renverſée ſera renduë droite, parcequ'aprés une ſemblable tranſpoſition le premier terme ſera au ſecond comme le troiſiéme ſera au quatriéme. Par exemple 2. *6*. 4. 3. eſt une proportion reciproque, car le premier terme 2 eſt au troiſiéme 4, comme le quatriéme terme 3 eſt au ſecond *6*. Mais ſi je tranſpoſe reciproquement 2 & 4, les premier & troiſiéme termes, à la place l'un de l'autre, & que j'écrive 4. *6* : : 2. 3. la proportion qui eſtoit renverſée auparavant eſt renduë droite, car le premier terme 4 eſt au ſecond qui eſt *6*, comme le troiſiéme 2 eſt au quatriéme 3. Et pareillement ſi je tranſpoſe reciproquement *6* & 3, le ſecond & quatriéme termes de la proportion renverſée à la place l'un de l'autre, & que j'écrive 2. 3 : : 4. *6*. la proportion ſera droite, puiſque 2 eſt à 3, comme 4 eſt à *6*. Tout cela eſt clair par la définition precedente. CV.

HUITIE'ME THEOREME.

En toute proportion renverſée ou reciproque, le produit des deux premiers termes eſt égal au produit des deux derniers. CVI.

Démonſtration. Si l'on tranſpoſe reciproquement le ſecond terme de la proportion renverſée à la place du quatriéme, & le quatriéme à la place du ſecond ; ou bien le premier à la place du troiſiéme, & le troiſiéme à la place du premier ; on fera des deux premiers termes de la proportion renverſée les deux extrêmes, & des deux derniers les deux moyens d'une proportion droite : ou bien on fera des deux premiers termes de la proportion renverſée les deux moyens, & des deux derniers les deux extrêmes d'une autre proportion droite. Or en chacune de ces deux proportions droites, le produit des deux extrêmes eſt égal au produit des deux moyens. Le produit des deux premiers termes de la proportion renverſée ſera donc égal au produit des deux derniers. Et c'eſt ce qu'il falloit démontrer.

NEUVIE'ME THEOREME.

En toute proportion renverſée ou reciproque. 1°. Le premier terme eſt égal au produit des deux derniers, diviſé par le ſecond. CVII.

2°. Le ſecond terme eſt égal au produit des deux derniers, diviſé par le premier. CVIII.

3°. Le troiſiéme terme eſt égal au produit des deux premiers, diviſé par le quatriéme. CIX.

4°. Et enfin le quatriéme terme eſt égal au produit des deux premiers, diviſé par le troiſiéme. CX.

Démonſtration. Soit priſe telle proportion renverſée que l'on voudra, comme *a. d. c. b.* Donc par la définition de cette proportion, 104. S. $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$. Donc par le Theoreme precedent $ad=bc$.

Or diviſant les deux produits égaux *ad* & *bc*	1°. par d	on trouvera les expoſans égaux	a & $\frac{bc}{d}$
	2°. par a		d & $\frac{bc}{a}$
	3°. par b		c & $\frac{ad}{b}$
	4°. par c		b & $\frac{ad}{c}$

Or 1°. Le premier terme a, ou $\frac{bc}{d}$ qui lui eſt égal, eſt le produit des deux derniers termes c & b, diviſé par le ſecond d.

2°. Le ſecond terme d, ou $\frac{bc}{a}$ qui lui eſt égal, eſt le produit des deux derniers termes c & b, diviſé par le premier a.

3°. Le troiſiéme terme c, ou $\frac{ad}{b}$ qui lui eſt égal, eſt le produit des deux premiers termes a & d, diviſé par le quatriéme b.

4°. Et enfin le quatriéme terme b, ou $\frac{ad}{c}$ qui lui eſt égal, eſt le produit des deux premiers termes a & d, diviſé par le troiſiéme c.

Donc &c. Ce qu'il falloit démontrer.

DE LA REGLE DE TROIS

OU DE PROPORTION.

CXI. Il eſt aiſé de juger par ce neuviéme Theoreme, & par le ſixiéme 90. S. que trois termes d'une proportion eſtant connus, l'on en peut connoître auſſi le quatriéme. La regle qui fait connoître ce terme inconnu s'appelle communément *Regle de Trois* ou *de proportion*, & quelques-uns, à cauſe du grand uſage que l'on en fait, lui ont donné le nom de *regle d'or*.

CXII. Il y a dans les queſtions ordinaires qui dépendent de cette regle, deux des trois termes connus qui ſont de même genre, & à l'un deſquels la queſtion propoſée ſe rapporte. Si par exemple je dis 3 degrez du plus grand cercle qui entoure la terre, ont 72 lieuës de longueur, combien aura de lieuës le cercle entier qui vaut 360 degrez? Les deux termes 3 degrez & 360 degrez ſont de même genre, & la queſtion ſe rapporte au dernier de ces deux termes, qui eſt 360 degrez. Or trois termes d'une proportion eſtant connus, on les peut ainſi diſpoſer pour chercher le quatriéme inconnu.

CXIII. On écrit le terme auquel la queſtion ſe rapporte, à la troiſiéme place; celui de même genre à la premiere, & l'autre terme qui eſt ſeul & d'un même genre que le quatriéme inconnu, à la ſeconde place. Ces termes eſtant ainſi diſpoſez, ſi le premier eſt au ſecond, comme le troiſiéme eſt au quatriéme, la proportion eſt de celles que nous appellons droites; mais ſi le premier terme eſt au troiſiéme, comme le quatriéme inconnu eſt au ſecond, la proportion eſt de celles que nous appellons renverſées u reciproques.

Si par exemple on me dit que 3 degrez du plus grand cercle qui entoure la terre, ont 72 lieuës de longueur, & que l'on me demande combien aura de lieuës le cercle entier qui vaut 360 degrez; j'écris 360 degrez auſquels la queſtion ſe rapporte, à la troiſiéme place, 3 degrez qui ſont d'un même genre, à la premiere, & 72 lieuës qui ſont le terme ſeul, & d'un même genre que le nombre inconnu des lieuës qui ſont le quatriéme terme, à la ſeconde place.

degrez. lieuës :: degrez. lieuës
3. 72 :: 360. ?

J'examine enſuite ces trois termes ainſi diſpoſez, & je connois que le premier terme 3 degrez eſt au troiſiéme 360 degrez, comme le ſecond terme 72 lieuës eſt au quatriéme inconnu. Car autant que trois degrez ſont plus petits que 360 degrez, autant 72 lieuës doivent eſtre plus petites que le nombre inconnu des lieuës qui ſera le quatriéme terme. Et ainſi cette proportion s'appelle droite.

Il en eſt tout au contraire de cette autre queſtion. L'Hiſtoire Sainte rapporte que 153600 ouvriers employerent 7 années pour bâtir le Temple de Hieruſalem. Combien 33600 ouvriers auroient-ils employé d'années pour le bâtir? J'écris 33600 ouvriers auſquels la queſtion ſe rapporte, à la troiſiéme place, 153600 ouvriers qui ſont du même genre, à la premiere, & 7 années qui ſont d'un genre different, à la ſeconde.

ouvriers. années. ouvriers. années.
153600. 7. 33600. ?

J'examine enſuite ces trois termes ainſi diſpoſez, & je connois que le premier terme 153600 ouvriers, eſt au troiſiéme 33600 ouvriers, comme le quatriéme inconnu eſt au ſecond terme 7 années. Car autant que le premier terme eſt plus grand que le troiſiéme, autant le quatriéme inconnu doit eſtre plus grand que le ſecond, puiſqu'il faut d'autant plus d'années pour bâtir le Temple qu'il y a moins d'ouvriers. Et ainſi cette proportion eſt renverſée.

Comment l'on juge ſi la proportion eſt droite ou renverſée.

CXIV. Ordinairement on juge aſſez par la queſtion même, ſi la proportion eſt droite, ou ſi elle eſt renverſée. On juge qu'elle eſt renverſée, ſi les deux termes connus qui ſont de même genre, ont un rapport reciproque, ou bien s'ils agiſſent reſpectivement ſur quelque choſe diſtincte & ſeparée des termes de la proportion. Mais ſi cela n'eſt point, on juge que la proportion eſt droite.

Ainſi dans la queſtion du Temple & des ouvriers, on juge que la proportion eſt renverſée, à cauſe que les deux termes 153600 ouvriers & 33600 ouvriers agiſſent reſpectivement ſur le Temple qu'ils bâtiſſent, & qui eſt ſeparé des ouvriers & des années qui font la proportion.

Mais dans la queſtion de la Terre, & des degrez de ſon plus grand cercle, on juge que la proportion eſt droite, à cauſe que les deux termes 3 degrez & 360 degrez du plus grand cercle de la Terre, n'agiſſent reſpectivement ſur aucune choſe ſeparée des degrez & des lieuës qui ſont les termes de la proportion.

CXV. Comme il y a une proportion droite, & une renverſée ou reciproque, il y a auſſi une regle de Trois droite, & une renverſée ou reciproque. La regle droite ſert à chercher le quatriéme terme d'une proportion droite, dont les trois premiers termes ſont connus. Et la renverſée ou reciproque ſert à chercher le quatriéme terme d'une proportion renverſée, dont les trois premiers termes ſont pareillement connus. Mais ces deux regles peuvent ſe réduire à la ſeule droite. Car ſi l'on connoît que la proportion ſoit renverſée, on la rendra droite en tranſpoſant reciproquement comme on a dit 104. S. le premier terme à la place du troiſiéme, & le troiſiéme à la place du premier. Ainſi dans la queſtion du Temple & des ouvriers qui font la proportion renverſée,

ouvriers. années. ouvriers. années.
153600. 7. 33600. ?

je rends cette proportion droite en écrivant 33600. 7 :: 153600. ?

DE LA REGLE DROITE.

PREMIER PROBLEME.

CXVI. Trois termes d'une proportion droite eſtant connus, connoiſtre le quatriéme.

1°. On écrit le terme auquel la queſtion ſe rapporte à la troiſiéme place, celui de même genre à la premiere, & l'autre qui eſt d'un genre different à la ſeconde.

2°. Ces termes eſtant ainſi diſpoſez, on multiplie le ſecond par le troiſiéme, & l'on diviſe leur produit par le premier; & l'expoſant qu'on trouve eſt le quatriéme terme de la proportion. Les exemples éclairciront ces regles.

Premier Exemple.

3 degrez du plus grand cercle qui entoure la Terre, ont 72 lieuës de longueur, combien en aura le cercle entier qui eſt de 360 degrez? c'eſt à dire, combien aura de lieuës tout le tour de la Terre?

1°. 3 degrez & 360 degrez n'agiſſent reſpectivement ſur aucune choſe ſeparée des termes de la proportion, ainſi la proportion eſt droite. J'écris donc 360 degrez auſquels la queſtion ſe rapporte, à la troiſiéme place, 3 degrez qui ſont d'un même genre, à la premiere, & 72 lieuës à la ſeconde place. 2°. Ces trois termes eſtant ainſi diſpoſez, je multiplie le ſecond terme 72 par le troiſiéme 360, & je diviſe leur produit 25920 par le premier terme 3, l'expoſant de cette diviſion eſt 8640, & cet expoſant eſt auſſi le quatriéme terme que je cherche. Le tour entier de la Terre aura donc 8640 lieuës.

degrez. lieuës :: degrez. lieuës.
3. 72 :: 360. 8640.

Second Exemple.

Une Tour fort élevée a 164 pieds d'ombre, & une perche de 26 pieds eſtant élevée perpendiculairement ſur l'horizon a 5 pieds d'ombre; on demande quelle eſt la hauteur de la Tour?

1°. 5 pieds d'ombre & 164 pieds d'ombre n'agiſſent reſpectivement ſur aucune choſe ſeparée des termes de la proportion, ainſi la proportion eſt droite. J'écris donc les 164 pieds d'ombre de la Tour auſquels la queſtion ſe rapporte, à la troiſiéme place, les 5 pieds d'ombre de la perche à la premiere, & les 26 pieds de la hauteur de cette perche à la ſeconde. 2°. Ces trois termes eſtant ainſi diſpoſez, je multiplie 26 par 164, & je diviſe leur produit par 5, l'expoſant que je trouve eſt $852\frac{4}{5}$, & cet expoſant eſt le quatriéme que je cherche. La hauteur de la Tour ſera donc de 852 pieds 9 pouces 7 lignes plus la 5^e partie d'une ligne.

pieds d'ombre de la perche.	*pieds de la hauteur de la perche ::*	*pieds d'ombre de la Tour.*	*pieds de la hauteur de la Tour.*
5.	26 ::	164.	$852\frac{4}{5}$.

Troiſiéme Exemple.

On ſuppoſe que le baſſin d'une fontaine a trois ouvertures, par la premiere l'eau s'écoule toute en 3 heures, par la ſeconde en 5, & par la troiſiéme en 6. On demande en combien de temps tout le baſſin plein d'eau s'écouleroit, ſi on ouvroit en même temps toutes ſes ouvertures.

Selon la ſuppoſition 1 où toute l'eau du baſſin s'écoule par la premiere ouverture en 3 heures. Donc il s'en écoulera $\frac{1}{3}$ par la même ouverture dans 1 heure; Et pareillement il s'en écoulera $\frac{1}{5}$ dans 1 heure par la ſeconde ouverture, $\frac{1}{6}$ par la troiſiéme, & $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ par toutes trois enſemble. Or $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ font $\frac{21}{30}$ ou $\frac{7}{10}$. Si donc $\frac{7}{10}$ de toute l'eau s'écoulent dans 1 heure, dans combien de temps s'écouleront $\frac{10}{10}$, c'eſt à dire 1, ou toute l'eau de la fontaine. La regle de Trois droite donnera $1\frac{3}{7}$. Et la queſtion eſt reſoluë.

par la 1^{ere} ouverture.	*par la ſeconde.*	*par la troiſiéme.*
heures. eau :: heure. eau.	*heures. eau :: heure. eau.*	*heures. eau :: heure. eau.*
3. 1 :: 1. $\frac{1}{3}$.	5. 1 :: 1. $\frac{1}{5}$.	6. 1 :: 1. $\frac{1}{6}$.

	parties de l'eau.	*heure ::*	*toute l'eau.*	*heures cherchées.*
Or $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{21}{30}=\frac{7}{10}$. Donc	$\frac{7}{10}$.	1 ::	1.	$\frac{10}{7}=1\frac{3}{7}$.

Quatriéme Exemple.

Quatre tuyaux verſent de l'eau dans le baſſin d'une fontaine. Le premier emplit le baſſin dans 8 heures, le ſecond dans 9, le troiſiéme dans 12, & le quatriéme dans 18. Le même baſſin a 4 ouvertures par leſquelles toute ſon eau s'écoule, en 3 heures par la premiere, en 4 par la ſeconde, en 6 par la troiſiéme, & en 7 par la quatriéme. L'on demande ſi on ouvre en même temps tous les tuyaux, & qu'on lâche toutes les ouvertures, combien tout le baſſin plein d'eau ſera de temps à s'écouler?

Selon la premiere ſuppoſition tous les tuyaux enſemble verſent au baſſin $\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}$, c'eſt à dire $\frac{3}{8}$ de toute l'eau qu'il peut contenir, pendant l'eſpace de 1 heure. Et par la ſeconde ſuppoſition il s'écoule du même baſſin $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$, c'eſt à dire $\frac{25}{28}$ de toute ſon eau pendant l'eſpace de 1 heure. Donc retranchant $\frac{3}{8}$ de $\frac{25}{28}$, c'eſt à dire ce que tous les tuyaux ont verſé au baſſin dans 1 heure, de ce qui s'en eſt écoulé par toutes les ouvertures pendant le même temps, le reſte $\frac{29}{56}$ marquera toute l'eau qui s'eſt écoulée du baſſin dans 1 heure, outre celle que tous les tuyaux enſemble y ont verſé pendant le même temps. Si donc $\frac{29}{56}$ de toute l'eau s'écoulent dans 1 heure, dans combien de temps 1, ou toute l'eau, s'écoulera-t'elle. La regle de Trois droite donnera $1\frac{27}{29}$. Et la queſtion eſt reſoluë.

l'eau qui entre. *l'au qui ſort.*

$\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}=\frac{3}{8}$. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=\frac{25}{28}$.

l'excez de l'eau qui ſort.	*heure*	: :	*toute l'eau.*	*heures cherchées.*
$\frac{25}{28}-\frac{3}{8}=\frac{29}{56}$.	1	: :	1.	$\frac{56}{29}=1\frac{27}{29}$.

Démonſtration du Probleme.

Selon la quatriéme partie du ſixiéme Theoreme 102. S. le quatriéme terme de toute proportion droite eſt égal au produit du ſecond par le troiſiéme, diviſé par le premier. Or ſi $a.b::c.$ ſont les trois premiers termes d'une proportion droite, le quatriéme $\frac{bc}{a}$ trouvé ſelon les regles du probleme, eſt auſſi le produit du ſecond terme b par le troiſiéme c, diviſé par le premier terme a. Ces regles ont donc preſcrit ce qu'il falloit faire.

Autre Démonſtration.

Je pourois encore démontrer autrement que le quatriéme terme que j'appelle z eſt égal à $\frac{bc}{a}$. Car puiſque la proportion droite eſt $a.b::c.z.$ je puis donc l'exprimer en cette autre maniere $\frac{a}{b}=\frac{c}{z}$, ce qui fait une égalité dont la reſolution fera connoître la grandeur inconnuë z. Or pour reſoudre cette égalité, je multiplie chacun de ſes membres par bz; & je trouve cette autre $az=bc$ dont chaque membre eſtant diviſé par a laiſſe $z=\frac{bc}{a}$.

CXVII. Cette démonſtration donnée par le moyen des égalitez; nous fait aſſez connoître que la regle de Trois n'eſt qu'une ſuite des égalitez qui ſe trouvent entre les rapports des grandeurs, & qu'elle n'en differe point par ſa nature, mais par la ſeule maniere dont nous avons accoûtumé de l'exprimer. Il ne faut donc pas s'imaginer ſelon la plaiſante remarque de Stifelius que les équations ſoient à l'égard de la regle de Trois, comme les Servantes ſont à l'égard de leurs Maiſtreſſes, & qu'elles ne peuvent réſoudre tout ce qu'on réſout par cette regle. Car au contraire on peut dire ſans crainte de ſe tromper, que non ſeulement les égalitez ne ſont pas moins generales que les proportions, mais auſſi que celles-là ſont le genre, dont celles-ci ne ſont que des eſpeces particulieres.

DE LA REGLE RENVERSE'E.

SECOND PROBLEME.

Trois termes d'une proportion renverſée eſtant connus, connoître le quatriéme. CXVIII.

1°. On écrit le terme auquel la queſtion ſe rapporte, à la troiſiéme place, celui qui eſt du même genre à la premiere, & l'autre qui eſt d'un genre different à la ſeconde.

2°. Ces termes eſtant ainſi diſpoſez, on multiplie le premier par le ſecond, & l'on diviſe leur produit par le troiſiéme; Et l'expoſant qu'on trouve eſt le quatriéme terme de la proportion. Les exemples éclairciront ces regles.

Premier Exemple.

Si 153600 ouvriers bâtirent le Temple de Hieruſalem dans 7 années, dans combien d'années 33600 ouvriers l'auroient-ils pû bâtir?

1°. 153600 ouvriers & 33600 ouvriers agiſſent reciproquement ſur le Temple, car les uns le bâtiſſent dans un nombre d'années d'autant plus petit qu'ils ſont en plus grand nombre, & reciproquement les autres le bâtiſſent dans un nombre d'années d'autant plus grand qu'ils ſont en plus petit nombre. Ainſi la proportion eſt reciproque. J'écris donc 33600 ouvriers auſquels la queſtion ſe rapporte, à la premiere place, 153600 ouvriers à la troiſiéme, & 7 années à la ſeconde. 2°. Je multiplie le premier terme 153600 par le ſecond terme 7, & je diviſe le produit par le troiſiéme 33600, l'expoſant que je trouve eſt 32, & cet expoſant eſt le quatriéme terme que je cherche. Les 33600 ouvriers auroient donc pû bâtir le Temple dans 32 années.

ouvriers.	*années.*	*ouvriers.*	*années.*
153600.	7.	33600.	32

Second Exemple.

Si Hieruſalem aſſiegée par l'armée de Veſpaſian, avoit aſſez de proviſions pour nourir 2000000 perſonnes pendant 10 années, on demande pendant combien d'années elle en auroit pû nourir 400000?

1°. 2000000 & 400000 perſonnes ont un rapport reciproque aux vivres, car elles peuvent s'en nourir pendant un nombre d'années d'autant plus petit qu'elles ſont en plus grand nombre, & d'autant plus grand qu'elles ſont en plus petit nombre. La proportion eſt donc reciproque, & j'écris 400000 perſonnes auſquelles la queſtion ſe rapporte, à la troiſiéme place, les 2000000 à la premiere, & les 10 années à la ſeconde. 2°. Je multiplie le premier terme 2000000 par le ſecond terme 10, & je diviſe le produit par le troiſiéme 400000, l'expoſant que je trouve eſt 50, & cet expoſant eſt le quatriéme terme que je cherche. De ſorte que Hieruſalem auroit pû nourir les 400000 perſonnes pendant 50 années.

perſonnes.	*années.*	*perſonnes.*	*années.*
2000000.	10.	400000.	50.

Troiſiéme Exemple.

S'il faut 12 aûnes d'une étoffe qui aura $\frac{3}{4}$ de largeur, pour faire un habit, combien faudra-t'il d'aûnes d'une étoffe qui n'aura que $\frac{2}{3}$ de largeur?

1°. L'on connoît que la proportion eſt renverſée, parceque les deux largeurs des étoffes ont un rapport reciproque ſur l'habit; car plus l'étoffe aura de largeur, moins il en faudra d'aûnes pour le faire, & au contraire moins l'étoffe aura de largeur, plus il en faudra d'aûnes. La proportion eſt donc reciproque, & j'écris les $\frac{2}{3}$ de largeur à qui la queſtion ſe rapporte, à la troiſiéme place, les $\frac{3}{4}$ de largeur à la premiere, & les 12 aûnes à la ſeconde. 2°. Je multiplie le premier terme $\frac{3}{4}$ par le ſecond terme 12, & je diviſe le produit qui eſt 9, par le troiſiéme $\frac{2}{3}$, l'expoſant que je trouve eſt $13\frac{1}{2}$. Et cet expoſant eſt le quatriéme terme que je cherche. De ſorte qu'il faudroit 13 aûnes & demie d'une étoffe qui auroit $\frac{2}{3}$ de largeur, pour faire l'habit, en ſuppoſant qu'il en falluſt 12 aûnes d'une étoffe qui auroit $\frac{3}{4}$ de largeur.

1ere *largeur.*	*aûnes.*	2e *largeur.*	*aûnes.*
$\frac{3}{4}$.	12.	$\frac{2}{3}$.	$13\frac{1}{2}$.

Dèmonſtration du Probleme.

Selon la quatriéme partie du neuviéme Theoreme 100. S. le quatriéme terme de toute proportion renverſée eſt égal au produit du premier par le ſecond, diviſé par le troiſiéme. Or ſi $a.\ d.\ c.$ ſont les trois premiers termes d'une proportion renverſée, le quatriéme $\frac{ad}{c}$ trouvé ſelon les regles du probleme, eſt auſſi le produit du premier a par le ſecond d, diviſé par le troiſiéme c. Ces regles ont donc preſcrit ce qu'il falloit faire.

Preuve pour l'operation de la Regle de Trois.

Pour s'aſſurer que le terme qu'on a découvert eſt veritablement celui qu'on cherche, lorſque la proportion eſt droite, on prend le produit des extrêmes & celui des moyens; ſi ces deux produits ſont égaux, l'operation eſt bien faite, & s'ils ſont inégaux l'operation eſt mal faite.

Mais lorſque la proportion eſt renverſée, ou reciproque dans la diſpoſition de ſes termes, on prend le produit des deux premiers termes & celui des deux derniers. Si ces produits ſont égaux, l'operation eſt bien faite, & s'ils ſont inégaux, l'operation eſt mal faite, il la faut recommencer.

AUTRE MANIERE POUR LA REGLE DE TROIS RENVERSÉE.

CXIX. Si l'on connoît qu'une queſtion propoſée dépende de la proportion renverſée, & qu'on diſpoſe ſes trois termes connus en telle ſorte que le terme auquel la queſtion ſe rapporte ſoit à la premiere place, celui qui eſt d'un même genre à la troiſiéme, & l'autre qui eſt ſeul & d'un genre different à la ſeconde; la queſtion poura ſe reſoudre en multipliant, comme on fait pour la regle de Trois, le ſecond terme par le troiſième, & diviſant le produit qu'on trouve par le premier: Car l'expoſant d'une ſemblable diviſion ſera le terme inconnu que l'on cherche.

Connoiſſant par exemple que la queſtion des ouvriers qui bâtiſſent le Temple dépend de la proportion renverſée, ſi j'écris les 33600 ouvriers auſquels la queſtion ſe rapporte, à la premiere place, les 153600 qui ſont d'un même genre, à la troiſiéme, & les 7 années à la ſeconde; je reſoudrai la queſtion en multipliant le ſecond terme 7 par le troiſiéme 153600, & diviſant le produit trouvé par le premier terme 33600, car l'expoſant de cette diviſion qui eſt 32, ſera le terme inconnu que je cherche.

ouvriers. années :: *ouvriers. années.*
33600. 7 :: 153600. 32.

Autre Maniere pour la Regle de Trois.

CXX. Lorſque la proportion eſt droite dans la diſpoſition de ſes termes, l'on peut rendre aſſez ſouvent ſon operation plus commode en diviſant le ſecond terme par le premier, & multipliant l'expoſant qu'on trouve par le troiſiéme. Ou bien, ce qui revient au même, & ſi on le juge plus facile, en diviſant le troiſiéme terme par le premier, & multipliant l'expoſant qu'on trouve par le ſecond; car le produit trouvé en ſuivant l'une ou l'autre de ces deux manieres, ſera le quatriéme terme de la proportion; puiſque ſi les trois premiers termes d'une proportion droite ſont $a. b :: c.$ on trouvera toûjours le quatriéme qui eſt $\frac{bc}{a}$, ſoit qu'on multiplie, comme on fait dans la Regle de Trois droite, le ſecond terme b par le troiſiéme c, & qu'on diviſe le produit bc par le premier terme a; ſoit qu'on diviſe b par a, & qu'on multiplie l'expoſant $\frac{b}{a}$ par c; ſoit enfin qu'on diviſe c par a, & qu'on multiplie l'expoſant $\frac{c}{a}$ par b. L'uſage de ceci poura mieux ſe connoître, ſi l'on en fait l'application aux exemples qui precedent.

Premier Exemple.

Pour réſoudre la queſtion de la Terre & des degrez de ſon plus grand cercle. Les trois termes connus, 3 degrez, 72 lieuës, & 360 degrez, eſtant diſpoſez à l'ordinaire, je diviſe le ſecond 72 par le premier qui eſt 3, & je multiplie l'expoſant 24 par le troiſiéme 360; le produit que je trouve eſt 8640, & ce nombre eſt celui des lieuës qu'aura tout le tour de la Terre.

degrez. lieues :: *degrez. lieues.*
3. 72 :: 360. 8640.

Second Exemple.

Pour reſoudre la queſtion de la Tour & des pieds de ſon ombre. Les trois termes connus 5 pieds de l'ombre de la perche, 26 pieds de ſa hauteur, & 164 pieds d'ombre de la Tour, eſtant diſpoſez à l'ordinaire, je diviſe 26 par 5, & je multiplie l'expoſant $5\frac{1}{5}$ par 164, le produit que je trouve eſt $852\frac{4}{5}$, & ce nombre eſt celui des pieds que la Tour a pour ſa hauteur.

pieds d'ombre de la perche.	*pieds de la hauteur de la perche* ::	*pieds d'ombre de la Tour.*	*pieds de la hauteur de la Tour.*
5.	26 ::	164.	$852\frac{4}{5}$.

Troiſiéme Exemple.

Pour réſoudre la queſtion du Temple & des ouvriers qui le bâtiſſent. Les trois termes connus 33600 ouvriers, 7 années, & 153600 ouvriers, eſtant diſpoſez en telle ſorte qu'ils ſoient les trois premiers d'une proportion droite, je diviſe le ſecond terme 7 par le premier 33600, & je multiplie l'expoſant $\frac{1}{4800}$ par le troiſiéme 153600, (ce qui ſe fait en diviſant ce dernier nombre par 4800) le produit que je trouve eſt 32, & ce nombre eſt celuy des années que les 33600 ouvriers auroient dû employer pour bâtir le Temple.

ouvriers. années :: ouvriers. années.
33600. 7 :: 153600. 32.

Quatriéme Exemple.

Pour réſoudre la queſtion de Hieruſalem & de ſes Citoyens aſſiegez. Les trois termes connus 400000 perſonnes, 10 années, & 2000000 de perſonnes, eſtant diſpoſez en telle ſorte qu'ils ſoient les trois premiers d'une proportion droite, je diviſe le troiſiéme terme 2000000 par le premier 400000, (ce qui ſe fait en diviſant ſimplement 20 par 4) & je multiplie l'expoſant 5 par 10, le produit que je trouve eſt 50, & ce nombre eſt celui des années que la ville auroit pû nourir 400000 perſonnes.

perſonnes. années :: perſonnes. années.
400000. 10 :: 2000000. 50.

AVERTISSEMENT.

CXXI. *Cette Methode peut eſtre fort utile dans une infinité de rencontres pour ceux qui ont beaucoup d'operations & de calculs à faire, ſur tout s'ils ont de la facilité pour operer ſur les fractions. Car il eſt incomparablement plus court dans la pluſpart des proportions droites de diviſer le ſecond terme par le premier, & de multiplier l'expoſant par le troiſiéme, ou bien de diviſer le troiſiéme terme par le premier, & de multiplier l'expoſant par le ſecond, que de compoſer un grand nombre par le produit du ſecond & troiſiéme terme, pour le reſoudre & diviſer enſuite par le premier. L'experience & l'uſage pouront prouver ce que je dis.*

DE LA REGLE DE COMPAGNIE.

LA Regle de Trois nous fournit pluſieurs regles qui n'en ſont que des ſuites.

Nous parlerons ici des principales qui ſont la Regle de Compagnie, les Regles d'Alliage, & celles de fauſſe poſition.

CXXII. La Regle de Compagnie eſt celle qui enſeigne à diviſer une grandeur donnée en pluſieurs parties proportionnelles à d'autres grandeurs qui ſont déterminées. Son nom ſe tire des Compagnies ou Societez que font enſemble des Marchands pour trafiquer tous en commun, à cauſe que ſon uſage y eſt abſolument neceſſaire.

Troisiéme Probleme.

Diviſer une grandeur donnée en pluſieurs parties proportionelles à d'autres grandeurs qui ſont pareillement déterminées. CXXIII.

1°. On écrit la ſomme de ces grandeurs qui ſont déterminées, à la premiere place d'une proportion droite, l'autre grandeur qu'on donne à diviſer à la ſeconde, & chacune des grandeurs déterminées à la troiſiéme.

2°. On applique autant de fois la regle de trois droite que l'on a écrit de grandeurs à la troiſiéme place, & l'on trouve autant de nouveaux termes, qui ſont les parties proportionelles qu'on cherche. Les exemples éclairciront ces regles.

Premier Exemple.

Trois Marchands ont fait en commun une bourſe de 10000 écus, avec laquelle ils en ont gagné 4000. Le premier Marchand a mis 2000 écus dans la bourſe, le ſecond y en a mis 5000, & le troiſiéme 3000. On demande ce que chaque Marchand doit recevoir du gain total des 4000 écus, à proportion de l'argent qu'il a mis dans la bourſe ?

1°. J'écris 10000 la ſomme totale des écus qu'on a mis dans la bourſe, à la premiere place d'une proportion droite, 4000 le nombre des écus qui font le gain total, duquel chaque Marchand reçoit une partie proportionelle au nombre des écus qu'il a mis dans la bourſe, à la ſeconde place, & les trois nombres 2000, 5000, & 3000, qui ſont ceux des écus que chacun des Marchands a mis dans la bourſe, à la troiſiéme place. 2°. J'applique trois fois la regle de trois droite, & je trouve les trois quatriémes termes 800, 2000, & 1200, qui ſont auſſi ceux que je cherche.

Le premier Marchand doit donc recevoir 800 écus de gain total, le ſecond doit en recevoir 2000, & le troiſiéme 1200.

contribution totale.	*gain total*		*contributions particulieres.*	*gains particuliers.*
10000.	4000	::	2000.	800.
		::	5000.	2000.
			3000.	1200.

Second Exemple.

Quatre Marchands ont fait en commun une bourſe de 16000 eſcus, ſur laquelle ils en ont perdu 4000. Le premier Marchand a mis 2000 eſcus dans la bourſe, le ſecond y en a mis 5000, le troiſiéme 3000, & le quatriéme 6000. On demande ce que chaque Marchand doit porter pour ſa part de la perte totale des 4000 eſcus à proportion de l'argent qu'il a mis dans la bourſe ?

1°. J'écris la contribution totale des 16000 à la premiere place d'une proportion droite, la perte totale des 4000 eſcus à la ſeconde, & chacune des contributions particulieres 2000, 5000, 3000, & 6000, à la troiſiéme. 2°. J'applique quatre fois la regle de trois droite, & je trouve les quatriémes termes —500, —1250, —750, & —1500, qui ſont auſſi ceux que je cherche.

Le premier Marchand doit donc porter 500 eſcus de perte, le ſecond en doit porter 1250, le troiſiéme 750, & le quatriéme 1500. Et ſi l'on retranche la perte de chacun ſur l'argent qu'il a mis dans la bourſe, le premier qui a mis 2000 eſcus n'en retirera que 1500, le ſecond qui en a mis 5000 n'en retirera que 3750, le troiſiéme qui en a mis 3000 n'en retirera que 2250, & le quatriéme enfin qui en a mis 6000 n'en retirera que 4500.

contribution totale.	*perte totale* ::	*contributions particulieres.*	*pertes particulieres.*	*reſtes particuliers.*
+16000.	—4000 ::	+2000.	—500.	+1500
		+5000.	—1250.	+3750
		+3000.	—750.	+2250
		+6000.	—1500.	+4500

Troiſiéme Exemple.

On peut auſſi trouver la même choſe par une autre operation ſemblable aux precedentes. Car ſi 16000 eſcus de contribution portent 4000 eſcus de perte, il en reſtera 12000. Or chacun des 4 Marchands doit retirer de ce reſte une partie proportionelle à l'argent qu'il a mis dans la bourſe.

Je fais donc une nouvelle operation en cette ſorte. 1°. J'écris la contribution totale des 16000 eſcus à la premiere place d'une proportion droite, le reſte total des 12000 à la ſeconde, & chacune des contributions particulieres 2000, 5000, 3000, & 6000 à la troiſiéme 2°. J'applique quatre fois la regle de trois droite, & je trouve les quatriémes termes 1500, 3750, 2250, & 4500, qui marquent ce que chacun des quatre Marchands doit retirer des 12000 eſcus reſtez, à proportion de l'argent qu'il a mis dans la bourſe. Et ſi l'on retranche chacun de ces reſtes particuliers de chacune des contributions particulieres, les quatre reſtes 500, 1250, 750, & 1500, marqueront les pertes particulieres que les Marchands feront obligez de porter.

contribution totale.	*reſte total* ::	*contributions particulieres.*	*reſtes particuliers.*	*pertes particulieres.*
+16000.	+12000 ::	+2000.	+1500.	—500
		+5000.	+3750.	—1250
		+3000.	+2250.	—750
		+6000.	+4500.	—1500

CXXIV. Mais comme il peut y avoir quelques perſonnes qui douteront que ceux-là qui ont le plus contribué pour la bourſe commune, ſoient obligez de porter une plus grande partie de la perte totale, & que ceux au contraire leſquels y ont le moins contribué ne ſoient obligez d'en porter qu'une moindre partie, on pourra les en convaincre par ce raiſonnement. Il eſt viſible que ſi un ſeul Marchand avoit riſqué les 16000 eſcus , il porteroit lui ſeul toute la perte des 4000 eſcus ; Et ſi deux Marchands avoient riſqué chacun 8000 eſcus , c'eſt à dire la moitié de la contribution totale des 16000, il eſt encore viſible que chacun d'eux ne ſeroit obligé de porter que 2000 eſcus de perte , c'eſt à dire la moitié de la perte totale des 4000 eſcus. Et pareillement ſi quatre Marchands avoient riſqué chacun le quart de la contribution totale, ils ne ſeroient obligez de porter chacun que le quart de la perte , & ainſi des autres. Et ſi quelques Marchands s'eſtoient mis dans la compagnie de ceux qui ont perdu les 4000 eſcus ſans avoir rien contribué dans leur bourſe commune , ceux-là ne ſeroient obligez de porter aucune partie des 4000 eſcus de la perte qu'ils ont faite , car en ne riſquant rien , on ne peut ni gagner ni perdre. Donc ceux qui ont le plus contribué doivent porter une plus grande partie de la perte , & ceux au contraire qui ont le moins contribué n'en doivent porter qu'une moindre partie.

Tout cela n'eſt pas difficile à concevoir, cependant il y a des cas qui s'y rapportent , leſquels on prendra d'abord pour des paradoxes. Si par exemple quelques-uns des Marchands avoient contribué moins que rien, ils perdroient ſi les autres gagnoient. Et au contraire ils gagneroient ſi ces autres perdoient. Voici deux queſtions paradoxes de cette ſorte , ſur leſquelles Schooten écrit ainſi à Monſieur Deſcartes.

> « Je ſerois bien-aiſe , dit-il, que vous vouluſſiez prendre la peine d'examiner ſi ces deux queſtions paradoxes ſont bien reſoluës. Deux perſonnes s'eſtant aſſociées ont gagné 12 eſcus. Or la premiere de ces deux perſonnes avoit 5 eſcus lorſqu'elle s'eſt aſſociée , & la ſeconde en avoit —2, c'eſt à dire qu'elle eſtoit redevable de ces 2 eſcus. L'on demande ce que chaque perſonne doit avoir pour ſa part du gain total des 12 eſcus ? Et l'on répond que la ſeconde doit payer 8 eſcus à la premiere , quoique le gain ſoit evident. Au contraire , ſi les deux perſonnes ont perdu 12 eſcus , parceque la premiere en a fourni 5, & la ſeconde —2, il eſt bien viſible par la nature de la queſtion , que la premiere perſonne doit recevoir —20 eſcus, & que la ſeconde au contraire doit en recevoir +8, quoique la perte ſoit evidente. »

CAS DE GAIN.

contribution totale.	*gain total : :*	*contributions particulieres.*	*gains particuliers.*
+3.	+12 : :	+5.	+20
		—2.	—8

CAS DE PERTE.

contribution totale.	*perte totale : :*	*contributions particulieres.*	*pertes particulieres.*
+3.	—12 : :	+5.	—20
		—2.	+8

La raiſon pourquoi cela doit arriver ainſi , eſt celle qu'en rend Monſieur Deſcartes dans la réponſe qu'il fait à Schooten. Voici ſes termes.

» Les deux queſtions que vous nommez paradoxes ſont bien reſoluës ;
» & encore qu'il ne ſoit pas ordinaire qu'un homme qui a quelque bien
» ſe mette en compagnie avec un autre qui a moins que rien, il peut
» toutefois arriver des cas auſquels cela ſe pratique. Par exemple, deux
» Marchands d'Amſterdam ont chacun leurs Commis en Alep, & parce-
» qu'ils ne ſe fient pas trop en ces deux Commis, & qu'ils ſçavent qu'ils
» ſont ennemis l'un de l'autre, ils leur écrivent que du jour qu'ils auront
» receu leurs lettres, ils ſe rendent conte l'un à l'autre de tout ce qu'ils ont
» entre leurs mains du bien de leur Maiſtre ; & que s'il ſe trouve que l'un
» d'eux doive plus qu'il n'a, que cela ſoit payé de l'argent de l'autre, &
» que le ſurplus ſoit mis en commun, pour eſtre employé en marchandiſe,
» ſans que l'un des Commis puiſſe rien vendre ni acheter ſans le ſçeu de
» l'autre ; Et ils s'accordent entr'eux qu'ils partageront enſemble le gain ou
» la perte, à raiſon de l'argent que leurs Commis auront eü entre leurs
» mains, lorſqu'ils recevront les lettres. Enſuite dequoi, s'il arrive qu'un
» de ces Commis ait cinq mille livres, & que l'autre doive deux mille livres,
» ayant payé ces deux mille livres de l'argent du premier, il reſtera trois
» mille livres qu'ils employeront en marchandiſe ; Et ſi de ces trois mille
» livres ils gagnent douze mille livres, c'eſt le quadruple de leur argent :
» C'eſt pourquoi celui qui avoit au commencement cinq mille livres en doit
» gagner vingt mille, & par conſequent l'autre qui eſtoit reliquataire de
» deux mille livres en doit perdre huit mille. Au contraire, s'il y a douze
» mil livres de perte, celui qui avoit cinq mille livres en doit perdre vingt
» mille, & l'autre par conſequent en gagner huit mille, parcequ'ayant payé
» ſes deux mille livres de l'argent du premier, il l'a empeſché de les em-
» ployer en la marchandiſe, où il y avoit le quadruple à perdre.

Démonſtration du Probleme.

Soit g toute grandeur donnée à diviſer en trois parties proportionelles aux trois grandeurs déterminées a, b, & c. Selon les regles du probleme, $a+b+c$ ſomme des trois grandeurs déterminées, ſera le premier terme d'une proportion droite, la grandeur g qu'on donne à diviſer ſera le ſecond, & chacune des trois a, b, c, en ſera un troiſiéme ; enſuite dequoi l'on trouvera ſelon les regles les trois termes nouveaux $\frac{ag}{a+b+c}$, $\frac{bg}{a+b+c}$ & $\frac{ag}{a+b+c}$. Or ces trois termes ne ſont autre choſe que a, b, & c, multipliées chacune également par g, & diviſées par $a+b+c$, ce qui ne change rien dans le rapport des unes aux autres, *par II.* 24. & 25. Ces trois termes ont donc entr'eux mêmes rapports que les trois grandeurs a, b, & c, qu'on a déterminées. Or la ſomme de ces trois termes découverts, qui eſt $\frac{ag+bg+cg}{a+b+c}$, eſt égale à la grandeur g qu'on donne à diviſer. Les regles du probleme ont donc preſcrit ce qu'il falloit faire.

$$a+b+c. \qquad g :: \begin{cases} a. & \frac{ag}{a+b+c}. \\ b. & \frac{bg}{a+b+c}. \\ c. & \frac{cg}{a+b+c}. \end{cases}$$

Formules.

On poura prendre cette démonſtration pour une formule generale de la reſolution des exemples infinis qui ſont de même eſpece. Car ſuppoſant qu'on appelle g toute grandeur donnée à diviſer en trois parties proportionelles à trois autres grandeurs déterminées. Si on appelle ces trois grandeurs a, b, & c, les trois parties proportionelles ſeront toûjours

$$\frac{ag}{a+b+c}, \quad \frac{bg}{a+b+c}, \ \& \ \frac{cg}{a+b+c}.$$

L'on trouvera dans le même ordre que les quatre parties de toute grandeur g proportionelles aux quatre autres grandeurs a, b, c, & d, ſont

$$\frac{ag}{a+b+c+d}, \quad \frac{bg}{a+b+c+d}, \quad \frac{cg}{a+b+c+d}, \ \& \ \frac{dg}{a+b+c+d}.$$

Et pareillement que les cinq parties de g proportionelles aux cinq grandeurs a, b, c, d, & e, ſont

$$\frac{ag}{a+b+c+d+e}, \quad \frac{bg}{a+b+c+d+e}. \quad \frac{cg}{a+b+c+d+e}, \quad \frac{dg}{a+b+c+d+e}, \quad \frac{eg}{a+b+c+d+e}.$$

Et ainſi de ſuite à l'infini.

DE LA REGLE D'ALLIAGE.

C'eſt une regle qui enſeigne à mélanger des choſes de differentes valeurs, en ſorte que leur mélange faſſe un compoſé qui ait une autre valeur déterminée & moyenne entre celles qui ſont differentes. Par exemple, un Orfévre a de deux ſortes d'or, l'un vaut 130 piſtoles le marc, & l'autre n'en vaut que 124; On demande quel mélange il doit faire de ces deux ſortes d'or, afin d'en avoir un marc du prix de 128 piſtoles? Les prix de 130 & de 124 piſtoles ſont les prix differens des deux ſortes qu'il faut mélanger enſemble, 1 marc eſt le compoſé que doit faire ce mélange, & 128 piſtoles ſont le prix déterminé & moyen entre les prix differens 130 & 124, puiſque 130 eſt plus grand que 128, & que 124 eſt plus petit. CXXV.

QUATRIE'ME PROBLEME.

Allier deux grandeurs de differens prix, en ſorte que leur compoſé ait un prix moyen. CXXVI.

1°. On prend la difference du plus grand prix au prix moyen, & celle du prix moyen au moindre prix. Enſuite on ordonne deux proportions droites en écrivant la ſomme totale des deux differences au premier terme d'une proportion droite, la grandeur qui a le prix moyen pour ſa valeur, au ſecond terme, & chacune des deux differences au troiſiéme.

2°. On cherche les deux quatriémes termes des proportions, & ces deux termes marquent reciproquement, le ſecond, ce qu'on doit prendre de la grandeur du plus grand prix, & le premier, ce qu'on doit prendre de la grandeur du moindre prix, afin d'avoir l'alliage ou le mélange qu'on cherche. Les exemples éclairciront ces regles.

Premier Exemple.

Un Orfévre a de deux ſortes d'or, l'un vaut 130 piſtoles le marc, & l'autre n'en vaut que 124; Quel mélange doit-il faire de ces deux ſortes, afin d'avoir un marc d'or du prix de 128 piſtoles?

1°. La difference du plus grand prix qui eſt 130, au prix moyen 128, eſt 2; & la difference de 128 au moindre prix 124, eſt 4, j'écris donc 6 ſomme des differences 2 & 4 au premier terme de deux proportions droites, 1 marc ou la grandeur qui vaut le prix moyen, au ſecond, & chacune des deux differences 2 & 4 au troiſiéme terme. 2°. Je cherche les deux quatriémes termes de cette proportion. Ces termes ſont $\frac{1}{3}$ & $\frac{2}{3}$, dont la ſomme fait 1. Et le terme $\frac{1}{3}$ marque ce qu'on doit prendre de l'or du plus petit prix, & reciproquement $\frac{2}{3}$ ce qu'il faut prendre de l'or du plus grand prix; afin d'avoir 1 marc qui ait le prix moyen pour ſa valeur. Et en effet le tiers qu'on doit prendre d'un marc de 124 piſtoles en vaut $41\frac{1}{3}$, & les deux tiers qu'on doit prendre d'un marc de 130 piſtoles en valent $86\frac{2}{3}$; de ſorte que joignant ces deux valeurs $41\frac{1}{3}$ & $86\frac{2}{3}$ en une ſomme, l'on aura le prix moyen 128.

grand prix.	*prix moyen.*	*petit prix.*	*premiere difference.*	*ſeconde difference.*
130 *piſtoles.*	128.	124.	130—128=2.	128—124=4.

ſomme des differences.	*mélange total : :*	*differences.*	*parties du mélange reciproquement priſes.*
6.	1 : :	2.	$\frac{1}{3}$ *d'un marc de* 124 *piſtoles.*
		4.	$\frac{2}{3}$ *d'un marc de* 130 *piſtoles.*

Second Exemple.

Une perſonne a deux ſortes de vin, l'un qui vaut 8 ſols la pinte, & l'autre qui n'en vaut que 5. On demande ce qu'elle doit prendre de chacun, pour en faire une piece de 400 pintes, qui puiſſe valoir 40 eſcus?

En premier lieu, ſi 400 pintes valent 40 eſcus, 1 pinte vaudra la $\frac{1}{10}$ partie d'un eſcu, c'eſt à dire 6 ſols. Cela eſtant, je dis, ſi deux ſortes de vin valent l'un 5 ſols, & l'autre 8 ſols, quel mélange en doit-on faire, pour en avoir 400 pintes du prix de 6 ſols chaque pinte? & je le trouve ainſi.

1°. La difference du plus grand prix qui eſt 8, au prix moyen 6, eſt 2; & la difference de 6 au moindre prix 5, eſt 1. J'écris donc 3 ſomme des differences au premier terme, 400 pintes qui ont chacune pour valeur le prix moyen 6 au ſecond terme, & chacune des deux differences 2 & 1 au troiſiéme. 2°. Je cherche les deux quatriémes termes de ces proportions. Ces termes ſont $266\frac{2}{3}$ & $133\frac{1}{3}$, dont la ſomme fait 400. Et le premier de ces termes $266\frac{2}{3}$ marque le nombre des pintes qu'on doit prendre du vin de de moindre prix, & l'autre terme $133\frac{1}{3}$, celui des pintes qu'on doit prendre du vin du plus grand prix, afin d'avoir 400 pintes, qui valent 400 fois le prix moyen 6 ſols, c'eſt à dire 2400 ſols, qui font 120 livres, ou bien 40 eſcus.

400 *pintes.* 40 *eſcus* :: 1 *pinte.* $\frac{1}{10}$ *d'un eſcu, qui vaut* 6 *ſols.*

grand prix.	*prix moyen.*	*petit prix.*	*premiere difference.*	*ſeconde difference.*
8 *ſols.*	6.	5.	$8-6=2$.	$6-5=1$.

ſomme des differences.	*mélange total*	::	*differences.*	*mélanges particuliers & reciproques.*
3.	400	::	2.	$266\frac{2}{3}$ *pintes à* 5 *ſols.*
			1.	$133\frac{1}{3}$ *pintes à* 8 *ſols.*

Démonſtration du Probleme.

Cette Régle d'Alliage differe fort peu de la Regle de Compagnie, parcequ'il ne faut qu'y partager la grandeur qui vaut le prix moyen en deux parties proportionelles aux differences. Mais il faut que ces parties trouvées l'une par le moyen de la premiere difference, & l'autre par le moyen de la ſeconde, ſoient entr'elles reciproquement comme ces differences. Car ſoient a & c les prix de deux grandeurs qu'il faut allier, & m le mélange qu'on doit faire de ces grandeurs, en ſorte qu'eſtant mélangées, elles ayent un prix moyen que j'appelle b. a ſera donc plus grand, & c ſera plus petit que le prix moyen b. Or ſoit e la premiere difference ou l'excez de a ſur b. Donc $a-e=b$. Et ſoit pareillement f la ſeconde difference ou le deffaut qui empeſche que c ne ſoit égal à b. Donc $c+f=b$. Or il eſt bien viſible que la partie que je dois prendre du prix a doit reciproquement ſurpaſſer ou eſtre ſurpaſſée d'autant plus par la partie que je dois prendre du prix c, que e excez de a ſur b, qui eſt la premiere difference, eſt ſurpaſſée ou qu'elle ſurpaſſe f excez de b ſur c, qui eſt la ſeconde difference. Car pour faire une juſte compenſation des deux prix differens a & c, qui les puiſſe égaler à b, il faut que les parties qu'on en prendra ſoient telles, que l'excez d'une part détruiſe le defaut de l'autre. Or multipliant chacune des égalitez precedentes $a-e=b$, & $c+f=b$, la premiere, par la ſeconde difference f, & la ſeconde, par la premiere difference e, l'on trouve $af-ef=bf$, & $ce+ef=be$. De ſorte que prenant $af-ef$, ou bf qui lui eſt égale, de la grandeur a, plus $ce+ef$, ou be qui lui eſt égale, de la grandeur c, la ſomme ſera $af-ef+ce+ef$, ou $bf+be$. Et dans cette ſomme l'excez de ce qu'on prend d'une part détruit le defaut de ce qu'on prend de l'autre, puiſque $-ef+ef=0$. & de plus l'égalité ſe conſerve toûjours avec le prix moyen b également multiplié. Ainſi il faudra que la partie qu'on prendra de la grandeur qui vaut a, ſoit à la partie qu'on prendra de la grandeur qui vaut c, comme bf eſt à be, c'eſt à dire reciproquement comme la premiere difference e eſt à la ſeconde difference f. Mais il faudra de plus que la ſomme de ces parties ſoit égale à m. Or ſi les deux grandeurs bf & be ſont multipliées chacune par m & diviſées par $be+bf$, l'on trouvera les deux parties

Voyez ce raiſonnement figuré dans la page ſuivante.

$\frac{fm}{e+f}$ & $\frac{em}{e+f}$, qui ſont entr'elles comme bf eſt à be, ou ce qui eſt la même choſe, comme f eſt à e, c'eſt à dire reciproquement comme e eſt à f. Or la ſomme de ces parties eſt égale à m. Car l'une eſtant un produit de la grandeur m par la ſeconde difference f, diviſé par $e+f$ ſomme des deux differences e & f, & l'autre eſtant un produit de la même grandeur m par la premiere difference e, diviſé pareillement par $e+f$, la ſomme des deux doit neceſſairement eſtre un produit de la grandeur m par $e+f$, diviſé par $e+f$, c'eſt à dire que cette ſomme doit donner neceſſairement la grandeur m. L'on prendra donc la partie $\frac{fm}{e+f}$ de la grandeur qui vaut a, & la partie $\frac{em}{e+f}$ de la partie qui vaut c. Or l'on trouve auſſi par les regles du probleme qu'il faut prendre $\frac{fm}{e+f}$ de la grandeur qui vaut a, & $\frac{em}{e+f}$ de la grandeur qui vaut c. Ces regles ont donc preſcrit ce qu'il falloit faire.

grand prix.	*moyen.*	*petit.*	*premiere difference.*	*ſeconde difference.*
a.	b.	c.	$a-b=e$.	$b-c=f$.

Donc $a-e=b$, & $c+f=b$. Donc $af-ef=bf$, & $ce+ef=be$.
Donc $af-ef+ce+ef=bf+be$. ou bien $af+ce=bf+be$.

ſomme des differences.	*mélange total*	::	*differences.*	*parties du mélange reciproquement priſes.*
$e+f$.	m	::	e.	$\frac{em}{e+f}$ *partie de la grandeur du prix a.*
			f.	$\frac{fm}{e+f}$ *partie de la grandeur du prix c.*

Troiſiéme Exemple.

La démonſtration precedente eſtant bien compriſe, il ne ſera pas difficile de concevoir la reſolution de cette queſtion ſi commune chez les Hiſtoriens. Hieron Prince de Siracuſe, commanda qu'on fiſt une Couronne d'or pur pour l'offrir à l'une de ſes idoles. L'Orfévre fit la Couronne du poids que Hieron l'avoit commandé, mais il y mélangea quelque partie d'argent, & déroba une égale partie de l'or qu'il avoit receu pour faire la Couronne. Le Prince l'ayant appris, ou s'en eſtant défié, & l'Orfévre deſavoüant ſon larcin, il donna ordre à Archimedes de l'en éclaircir ſans endommager la Couronne, parcequ'elle eſtoit travaillée avec beaucoup d'artifice & de délicateſſe. L'on demande comment Archimedes pût découvrir le larcin?

L'on dit qu'il fiſt deux lingots chacun du poids de la Couronne, l'un d'or pur & l'autre d'argent, il prit enſuite un vaiſſeau plein d'eau où il plongea la Couronne, qui fit ſortir un volume d'eau égal à ſa groſſeur; il meſura cette eau, & retirant la Couronne il remplit le vaiſſeau, & il y plongea l'un des lingots qui fit pareillement ſortir un volume d'eau égal à ſa groſſeur. Il meſura encore cette eau, & faiſant le même avec l'autre lingot, il trouva que l'or pur avoit moins fait ſortir d'eau que la Couronne, & la Couronne moins que l'argent, en quoi il s'aſſura déja que la Couronne eſtoit mêlée d'or & d'argent.

Or pour connoître au juſte ce qu'il y avoit d'or & ce qu'il y avoit d'argent, ſoit a la quantité de l'eau qu'a fait ſortir la Couronne, $a+b$ celle de l'eau qu'à fait ſortir le lingot d'argent, & $a-c$ celle qu'a fait ſortir le lingot d'or pur; Il faut allier $a+b$ & $a-c$ avec a en cette ſorte. 1°. J'écris $b+c$ ſomme des differences b & c au premier terme des deux proportions droites, la grandeur moyenne a au ſecond, & les differences b & c au troiſiéme. 2°. Je cherche les deux quatriémes termes de ces proportions. Ces termes ſont $\frac{ab}{b+c}$ & $\frac{ac}{b+c}$, qui marquent reciproquement, le premier la quantité de l'eau qu'a fait ſortir l'or qui eſt dans la Couronne, & le ſecond la quantité qu'a fait ſortir l'argent qui eſt auſſi mêlé dans la Couronne. De ſorte que les parties de l'eau dont le mélange eſt a, c'eſt à dire les deux parties de l'eau qu'ont fait ſortir l'or & l'argent qui font le poids de la Couronne, ſont déja connuës.

quantitez de l'eau qu'ont fait ſortir
le lingot d'argent. la Couronne. le lingot d'or pur.
$a+b.\qquad a.\qquad a-c.$

$$b+c.\quad a :: \begin{cases} b. & \frac{ab}{b+c}\ \text{quantité de l'eau qu'a fait ſortir l'or qui eſt dans la Couronne.} \\ c. & \frac{ac}{b+c}\ \text{quantité de l'eau qu'a fait ſortir l'argent qui eſt dans la Couronne.} \end{cases}$$

Mais ſi ces quantitez d'eau ſont connuës, les parties de l'or & de l'argent qui les ont fait ſortir, ne le ſont pas encore. Afin donc de les connoître, ſoit d le poids entier de la Couronne ou de chaque lingot. Je dis a, ou la quantité d'eau que fait ſortir la Couronne, eſt au poids d, comme $\frac{ab}{b+c}$ & $\frac{a}{b+c}$ les parties d'eau que font ſortir l'or & l'argent qui font le poids de la Couronne, ſont aux quatriémes termes, qui marquent le poids l'un de l'or & l'autre de l'argent dont le mêlange compoſe la Couronne. Et ainſi l'Orfévre a mêlangé le poids $\frac{cd}{b+c}$ d'argent, & dérobé un poids égal de l'or qu'il a receu pour faire la Couronne.

$$a.\quad d :: \begin{cases} \frac{ab}{b+c}. & \frac{bd}{b+c}.\ \text{poids de l'or qui eſt dans la Couronne.} \\ \frac{ac}{b+c}. & \frac{cd}{b+c}\ \text{poids de l'argent mélangé dans la Couronne.} \end{cases}$$

Et ſuppoſant que le poids de la Couronne ou de chaque lingot ſoit celui de trois marcs, & que le lingot d'argent ait fait ſortir 10 onces d'eau plus que la Couronne, & la Couronne 2 onces plus que le lingot d'or pur, en réduiſant les 3 marcs à 6 livres ou à 96 onces, à cauſe que chaque marc contient 2 livres ou 32 onces, nous aurons $d=96$, $b=10$,

& $c=2$. Et ainſi la partie $\frac{bd}{b+c}$ des trois marcs, qui eſt dans la Couronne, ſera $\frac{960}{12}$ ou 80 onces, c'eſt à dire 5 livres ; & la partie $\frac{cd}{b+d}$ de l'argent que l'Orfévre y a mèlangé, ou de l'or qu'il a pris ſera $\frac{192}{12}$ ou 16 onces, c'eſt à dire 1 livre.

Autre Reſolution de la même Queſtion.

Je trouverois auſſi la même choſe en cette ſorte. L'experience aprend que l'or & l'argent peſent moins dans l'eau que dans l'air, mais l'or y perd moins de ſon poids que l'argent. J'appelle donc d le poids de la Couronne ou de chaque lingot dans l'air, & a celui de la Couronne dans l'eau, $a+c$ celui de l'or pur, & $a-b$ celui de l'argent. J'allie donc $a+c$ & $a-b$ avec a, & je trouve que $\frac{ac}{b+c}$ & $\frac{ab}{b+c}$ ſont les poids en particulier, l'un de l'or & l'autre de l'argent, qui font a, ou le poids de la Couronne dans l'eau.

$$c+b. \qquad a :: \begin{cases} c.\ \frac{ac}{b+c} \text{ poids dans l'eau de l'argent mélangé daus la Couronne.} \\ b.\ \frac{ab}{b+c} \text{ poids dans l'eau de l'or qui eſt dans la Couronne.} \end{cases}$$

Enſuite je dis a ou le poids de la Couronne dans l'eau eſt au poids d de la Couronne ou de chaque lingot dans l'air, comme $\frac{ac}{b+c}$ & $\frac{ab}{b+c}$ les poids dans l'eau l'un de l'argent & l'autre de l'or, qui font a ou le poids de la Couronne dans l'eau, ſont aux quatriémes termes $\frac{cd}{b+c}$ & $\frac{bd}{b+c}$, qui marquent les poids en l'air l'un de l'argent & l'autre de l'or qui ſont dans la Couronne. Ainſi l'Orfévre a mélangé le poids ou la partie $\frac{cd}{b+c}$ d'argent.

$$a. \qquad d :: \begin{cases} \frac{ac}{b+c}.\ \frac{cd}{b+c} \text{ poids dans l'air de l'argent mélangé dans la Couronne.} \\ \frac{ab}{b+c}.\ \frac{bd}{b+c} \text{ poids dans l'air de l'or qui eſt dans la Couronne.} \end{cases}$$

CINQUIÉME PROBLEME.

CXXVIII. Allier des grandeurs de differens prix, en ſorte qu'elles faſſent un certain mêlange qui ait un prix moyen.

1°. L'on réduit tous les prix en deux partages, de chacun deſquels on tire une ſomme d'excez ou de deffauts, & l'on multiplie reciproquement la premiere ſomme par le nombre des prix qui ont ſervi pour trouver la ſeconde ; & la ſeconde, par le nombre des prix qui ont ſervi pour trouver la premiere. On ordonne enſuite deux proportions droites, en écrivant la ſomme totale des deux produits trouvez au premier terme, la grandeur qui a le prix moyen pour ſa valeur au ſecond, & chacun des deux produits au troiſiéme.

2°. L'on cherche les deux quatriémes termes des proportions, & ces termes marquent reciproquement, le premier, ce qu'il faut prendre des grandeurs dont les prix ont ſervi pour trouver la ſeconde ſomme; & le ſecond, ce qu'il faut prendre des autres grandeurs qui reſtent, & dont les prix ont auſſi ſervi pour trouver la premiere ſomme. Les reſolutions ſuivantes éclairciront ces regles.

Exemple.

Si l'once de ſafran vaut 10 ſols, celle de canelle 8, de muſcade 6, de poivre 4, & de gerofle 3. Combien en peut-on prendre de chacun pour en faire un mélange de 21 livres qui puiſſe valoir à raiſon de 5 livres 12 ſols chacune?

En premier lieu, ſi 1 livre qui fait 16 onces vaut 5 livres 12 ſols, qui font 112 ſols, 1 once qui vaut la $\frac{1}{16}$ partie d'une livre, vaudra auſſi la $\frac{1}{16}$ partie de 112 ſols, c'eſt à dire $\frac{112}{16}$, ou bien 7 ſols. Et ſi 1 livre fait 16 onces, 21 livres feront 21 fois 16 ou 336 onces.

onces.	*ſols* ::	*once.*	*ſols.*	*livre.*	*onces* ::	*livres.*	*onces*
16.	112 ::	1.	7.	1.	16 ::	21.	336.

Cela eſtant ainſi, je dis ſi l'once de ſafran vaut 10 ſols, celle de canelle 8, &c. que puis-je prendre de chaque ſorte pour en avoir un mêlange de 336 onces du prix de 7 ſols l'once? Et je le trouve ainſi.

Premiere Reſolution.

1°. La ſomme de 3 & de 1, qui ſont les differences des plus grands prix 10 & 8 au moyen 7, eſt 4; & la ſomme de 1, 3, & 4, qui ſont les differences du prix moyen 7 aux moindres prix 6, 4, & 3, eſt 8. Je multiplie donc reciproquement la premiere ſomme 4 par 3 nombre des prix 6, 4, & 3, qui ont ſervi pour trouver la ſeconde ſomme 8, & je multiplie cette ſeconde ſomme 8 par 2 nombre des prix 10 & 8, qui ont ſervi pour trouver la premiere 4; J'ordonne enſuite deux proportions droites en écrivant la ſomme totale 28 au premier de leurs termes, les 336 onces du prix moyen de 7 ſols chacune, au ſecond, & les 2 produits 12 & 16 au troiſiéme. 2°. Je cherche les deux quatriémes termes de ces proportions. Ces termes ſont 144 & 192, & leur ſomme eſt égale à 336 nombre des onces qui doivent entrer dans le mêlange. Et le premier de ces termes 144 marque ce qu'on peut prendre du mêlange du poivre, de la muſcade, & du gerofle, dont les prix ont ſervi pour trouver la ſeconde ſomme; & l'autre terme 192 marque ce qu'on peut prendre du mêlange du ſafran & de la canelle, dont les prix ont ſervi pour trouver la premiere ſomme. Et pour déterminer encore plus particulierement ce qu'il faut prendre de chacune des ſortes, l'on partagera 144 en trois parties égales, & 48, tiers de 144, ſera le nombre des onces de chacune des trois ſecondes ſortes, & pareillement 96 moitié de 192, ſera celui des onces de chacune des deux premieres ſortes.

Voyez l'operation dans la page ſuivante.

	prix.	*leurs differences & leurs ſommes.*	
ſafran	10 *ſols*	10—7=3	7—6=1
canelle	8	8—7=1	7—4=3
prix moyen	7	1ere *ſomme* 4	7—3=4
poivre	6	*par* 3	2e *ſomme* 8
muſcade	4	1er *produit* 12	*par* 2
gerofle	3	+ *le* 2e *produit* 16	2e *produit* 16
		ſomme des produits 28	

ſomme des produits.	*mélange total* ::	*produits.*	*parties du mélange reciproquement priſes.*
28	336 ::	12.	144: 48 *onces de poivre* 48 *de muſcade* 48 *de gerofle*
		16.	192: 96 *onces de ſafran* 96 *de canelle*

Seconde Reſolution.

CXXIV. Si l'on doit allier plus de deux grandeurs, leur mêlange ſe poura faire en pluſieurs differentes manieres, parcequ'on poura joindre differemment les prix donnez, en ſorte que leurs excez ſur le prix moyen, ou leurs defauts détruiſent quelques parties les unes des autres, ce qui fera que les deux ſommes des differences pouront varier en pluſieurs manieres. Ainſi dans noſtre exemple, ſi je joins le plus grand prix 10 avec les trois du moindre prix, & que je laiſſe ſeul le prix 8; la premiere ſomme n'aura qu'une ſeule difference qui eſt 1, & la ſeconde ſomme des autres differences ou des reſtes 4, 3, 1, & —3 ſera 5: Et par le moyen de ces deux ſommes 1 & 5, je trouverai en operant comme j'ai fait pour la premiere reſolution, que le mélange peut ſe faire en prenant 37 onces plus $\frac{1}{3}$ de chacune des quatre ſortes dont les prix ont ſervi pour trouver la ſeconde ſomme, & 186 onces plus $\frac{2}{3}$ de canelle dont le prix 8 a ſervi pour trouver la premiere ſomme.

			7—10=—3
			7—6=1
canelle	8 *ſols*	8—7=1	7—4=3
prix moyen	7	1ere *ſomme* 1	7—3=4
ſafran	10	*par* 4	2e *ſomme* 5
poivre	6	1er *produit* 4	*par* 1
muſcade	4	+ *le* 2e *produit* 5	2e *produit* 5
gerofle	3	*ſomme des prod.* 9	

ſomme des produits.	*mélange total* ::	*produits.*	*parties du mélange reciproquement priſes.*
9	336 ::	4.	$149\frac{1}{3}$: $37\frac{1}{3}$ *de ſafran* $37\frac{1}{3}$ *de poivre* $37\frac{1}{3}$ *de muſcade* $37\frac{1}{3}$ *de gerofle*
		5.	$186\frac{2}{3}$: $186\frac{2}{3}$ *de canelle*

Troiſiéme Reſolution.

Le mêlange peut auſſi ſe faire en prenant 37 onces plus $\frac{1}{3}$ de muſcade & autant de gerofle, & 87 onces plus $\frac{1}{9}$ de chacune des trois autres ſortes.

ſafran	10 *ſols*	10—7 = 3		7—4 = 3
canelle	8	8—7 = 1		7—3 = 4
poivre	6	6—7 = —1	*2e ſomme*	7
prix moyen	7	*1ere ſomme* +3	*par*	3
muſcade	4	*par* 2	*2e produit*	21
gerofle	3	*1er produit* 6	*plus le 1er*	6
			ſomme des produits	27

ſomme des produits.	*mélange total*	::	*produiſs.*	*parties du mélange reciproquement priſes.*	
27.	336	::	6.	$74\frac{2}{3}$	$37\frac{1}{3}$ *de muſcade*
					$37\frac{1}{3}$ *de gerofle*
			21.	$261\frac{1}{3}$	$87\frac{1}{9}$ *de ſafran*
					$87\frac{1}{9}$ *de canelle*
					$87\frac{1}{9}$ *de poivre*

L'on pouroit donner encore pluſieurs autres reſolutions ſemblables. CXXX. Mais en rejettant les prix d'une part à une autre, on doit toûjours prendre garde que chacune des differences ſoit poſitive. Car ſi l'une des deux eſtoit égale à rien, l'on ne pouroit faire aucun mêlange par leur moyen, & ſi elle eſtoit moindre que rien, l'on auroit des reſolutions negatives, ce qui ne ſatisferoit à la queſtion qu'improprement. Par exemple, ſi je joignois d'une part les prix du ſafran, de la canelle & du girofle, & de l'autre les prix du poivre & de la muſcade, je trouverois que pour faire le mêlange il ne faudroit rien prendre du poivre ni de la muſcade, mais qu'il faudroit tout prendre des trois autres ſortes. Ce qui eſt contraire à la queſtion, car elle demande qu'il entre quelque choſe au mêlange de chacune des ſortes.

10—7 =	3		7—6 = 1
8—7 =	1		7—4 = 3
3—7 =	—1	*2e ſomme*	4
1ere ſomme	*	*par*	3
par	2	*2e prod.*	12
1er produit	*	*plus le 1er*	*
ſomme des produits			12

mélange	::	*produits.*		*parties du mélange.*
			*	* *du poivre*
				* *de la muſcade*
336	::	*.		
		12.	336	112 *de ſafran*
				112 *de canelle*
				112 *de gerofle*

Et ſi je joignois d'une part les prix du ſafran & du giroffe, & de l'autre les trois autres qui reſtent, je trouverois que pour faire le mêlange, bien loin d'y mettre quelque choſe de la canelle, du poivre & de la muſcade, il faudroit au contraire que l'on oſtaſt du mêlange, 112 onces de chacune de ces trois ſortes, & que l'on y en miſt 336 de chacune des deux autres ſortes. Ce qui ſeroit contraire à la queſtion, car elle demande qu'il entre quelque choſe de chacune des ſortes au mêlange, & non pas qu'il en ſorte quelqu'une.

$10 - 7 = 3 \qquad 7 - 8 = -1$

$\underline{3 - 7 = -4} \qquad 7 - 6 = 1$

1^{ere} *ſomme* $-1 \qquad \underline{7 - 4 = 3}$

par $\underline{3}$ $\qquad 2^{e}$ *ſomme* 3

1^{er} *prod.* -3 $\qquad$ *par* $\underline{2}$

2^{e} *produit* 6

plus le 1^{er} $\underline{-3}$

$$\textit{ſomme des produits} \; +3. \quad \overset{\textit{mélange}}{336} \; :: \left\{ \begin{array}{l} \overset{\textit{produits.}}{-3. -336} \left\{ \begin{array}{l} \overset{\textit{parties du mélange.}}{-112 \textit{ de canelle}} \\ -112 \textit{ de poivre} \\ -112 \textit{ de muſcade} \end{array} \right. \\ +6. +672 \left\{ \begin{array}{l} 336 \textit{ de ſafran} \\ 336 \textit{ de geroſle} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Autre Maniere plus courte & plus facile.

L'operation peut encore eſtre renduë plus courte. Car il ne ſera point CXXXI. neceſſaire de chercher aucun produit, ſi le nombre des prix eſt égal de part & d'autre; & ſi ce nombre eſt inégal, il ſera facile de le rendre égal en repetant pluſieurs fois quelques-uns des prix. Mais lorſqu'on a trouvé les deux derniers termes des proportions, il faut partager chacun d'eux en autant de parties égales que l'on conſidere de prix de part & d'autre, & il faut attribuer aux grandeurs dont les prix ſont repetez, autant de ces parties égales que leurs prix ſont repetez de fois.

Par exemple, pour reſoudre noſtre queſtion precedente, je joins d'une part 10 & 8, & parceque ces 2 prix ne ſont pas en ſi grand nombre que les 3 autres qui reſtent de l'autre part, je repete deux fois l'un de ces 2 prix, comme 8, afin d'avoir trois prix de part & d'autre. Cela eſtant fait, je prens les ſommes des differences; la premiere de ces deux ſommes eſt 5, & la ſeconde eſt 8, & leur ſomme totale eſt 13. J'ordonne enſuite deux proportions droites, en écrivant la ſomme totale 13 au premier de leurs termes, 336 onces du prix moyen de 7 ſols au ſecond, & les deux ſommes au troiſiéme. Je cherche les deux quatriémes termes de ces proportions. Ces termes ſont $129\frac{3}{13}$ & $206\frac{10}{13}$, & leur ſomme eſt égale à 336 nombre de toutes les onces qui doivent entrer dans le mélange. Et le premier de ces termes $129\frac{3}{13}$ marque ce qu'on peut prendre du mélange de la muſcade, du poivre & du geroſle, dont les prix ont ſervi pour trouver la ſeconde ſomme 8, & l'autre terme $206\frac{10}{13}$ marque ce qu'on doit prendre du mélange de ſafran & de la canelle, dont les prix ont ſervi pour trouver

trouver la premiere ſomme 5. Et afin de déterminer en particulier ce qu'il faut prendre de chacune des ſortes, l'on partagera $129\frac{3}{13}$ en trois parties égales, & $43\frac{1}{13}$, qui eſt le tiers du terme $129\frac{3}{13}$, ſera le nombre des onces de chacune des trois differentes ſortes dont les prix ont ſervi pour trouver la ſomme 5, & $206\frac{0}{13}$ ſera partagé en trois parties égales à cauſe des trois prix 10, 8, & 8, car 8 eſt conſideré comme deux, & $68\frac{12}{13}$ ſera le nombre des onces de ſafran dont le prix 10 n'a point eſté pris plus d'une fois, & pour les deux autres parties qui reſtent, c'eſt à dire $68\frac{12}{13}$ & $68\frac{12}{13}$, elles marqueront qu'il faut prendre 2 fois $68\frac{12}{13}$, c'eſt à dire $137\frac{11}{13}$ des onces de la canelle, parcequ'on a fait ſervir 2 fois ſon prix 8.

	prix.		
ſafran	10 *ſols*	10—9=3	7—6=1
canelle	8	8—7=1	7—4=3
prix moyen	7	8—7=1	7—3=4
poivre	6	1ere *ſomme* 5	2e *ſomme* 8
muſcade	4	*plus la* 2e 8	
gerofle	3	*ſomme totale* 13	

				parties du mélange reciproquement priſes.
ſomme totale.	*mélange total* ::	*ſommes.*		$43\frac{1}{13}$ *onces de poivre*
13.	336 ::	5.	$129\frac{3}{13}$	$43\frac{1}{13}$ *de muſcade*
				$43\frac{1}{13}$ *de gerofle*
		8.	$206\frac{10}{13}$	$68\frac{12}{13}$ *onces de ſafran*
				$137\frac{11}{13}$ *de canelle*

Au reſte lorſqu'il y a plus de deux grandeurs à mélanger, l'on peut CXXXII. trouver une infinité de reſolutions differentes. Car bien qu'il y ait autant de prix d'un coſté que d'un autre, comme dans la reſolution precedente & dans d'autres ſemblables, cependant l'on y peut encore repeter pluſieurs fois les prix que l'on voudra, pourvû que le nombre en ſoit toûjours conſervé égal de part & d'autre, & que chacun ſoit pris au moins une fois.

Par exemple pour reſoudre encore autrement noſtre queſtion, je joins d'une part les trois prix 10, 8, & 8, & de l'autre les trois autres prix 6, 4 & 3, ainſi que je viens de le faire dans la reſolution precedente, & je repete encore quelques prix, autant d'une part que de l'autre : Par exemple, je repete encore 1 fois 8 d'une part & 1 fois 3 de l'autre, aprés quoi je trouve les deux ſommes 6 & 12 dont la ſomme totale eſt 18, & par leur moyen je trouve en la maniere accoûtumée les deux termes

112 & 224 dont la ſomme fait 336, & le premier de ces termes marque ce qu'il faut prendre du mélange du poivre, de la muſcade & du gerofle, dont les prix ont ſervi pour trouver la ſeconde ſomme 12, & l'autre terme 224 marque auſſi le mélange qu'on doit faire du ſafran & de la canelle, dont les prix ont ſervi pour trouver la premiere ſomme 6. Mais parceque les prix 8 & 3 ont eſté repetez l'un trois fois & l'autre 2, chacun des termes 112 & 224 eſtant partagé en 4 parties égales, 28 qui eſt le quart de 112 ſera le nombre des onces du poivre dont le prix 6 n'a ſervi qu'une fois, ce même quart 28 ſera auſſi le nombre des onces de la muſcade dont le prix 4 n'a ſervi pareillement qu'une fois; mais pour les deux autres quarts 28 & 28 qui reſtent, ils marqueront qu'il faut prendre 2 fois 28 ou 56 onces de gerofle dont le prix 3 a ſervi deux fois. Et de même 56 qui eſt le quart de 224, marquera le nombre des onces du ſafran dont le prix 10 n'a ſervi qu'une fois, mais pour les trois autres quarts 56, 56, & 56 qui reſtent, ils marqueront que l'on doit prendre 3 fois 56 ou 168 onces de canelle, dont le prix 8 a ſervi trois fois. Et l'on pouroit en même ſorte varier infiniment les ſommes, & trouver par ce moyen une infinité de reſolutions differentes.

	prix.		
ſafran	10 *ſols*	10—7=3	7—6=1
canelle	8	8—7=1	7—4=3
prix moyen	7	8—7=1	7—3=4
poivre	6	8—7=1	7—3=4
muſcade	4	1ere *ſomme* 6	2e *ſomme* 12
gerofle	3	*plus la* 2e 12	
		ſomme totale 18	

ſomme totale.	*mélange total ::*	*ſommes.*	*parties du mélange reciproquement priſes.*
18.	336 ::	6.	112: 28 *onces de poivre* 28 *de muſcade* 28, 28 *ou* 56 *de gerofle*
		12.	224: 56 *de ſafran* 56, 56, 56 *ou* 168 *de canelle*

La preuve pour connoître ſi l'operation eſt bien faite, ou ſi elle eſt mal faite, c'eſt de multiplier toutes les grandeurs trouvées chacune par ſon prix. L'on réduit enſuite tous les produits en une ſomme, & ſi cette ſomme égale le produit de la grandeur qui fait le mélange total, par le prix moyen, l'operation eſt bien faite; mais ſi la ſomme n'eſt pas égale à ce produit, l'operation eſt mal faite, il la faut recommencer.

Démonſtration du Probleme.

Soient plus de deux grandeurs à allier comme trois, ſoient les prix de ces trois grandeurs a le plus grand, & c & d deux autres plus petits que le prix moyen que j'appelle b; & ſoit m le mélange qu'on doit faire des grandeurs données, en ſorte qu'eſtant mêlangées elles puiſſent valoir le prix moyen b. Soit encore e la premiere difference ou l'excez de a ſur b. Donc $a-e=b$. Et ſoient pareillement f & g chacun des deux differences du prix moyen b à chacun des deux moindres prix c & d. Donc $c+f=b$, & $d+g=b$. Il eſt viſible que pour faire une juſte compenſation des trois prix a, c & d, qui les puiſſe égaler au prix moyen b, il faut que les parties qu'on en prendra ſoient telles que l'excez d'une part détruiſe les defauts de l'autre. Or multipliant chacune des égalitez precedentes, la premiere par les deux dernieres differences f & g, & chacune des deux autres par la premiere difference e, l'on trouve $af-ef+ag-eg=bf+bg$, $ce+cf=be$, & $de+eg=be$. De ſorte que prenant $af-ef+ag-eg$, ou $bf+bg$ qui lui eſt égale, de la grandeur a, plus $ce+ef$ ou be qui lui eſt égale, de la grandeur c, plus encore $de+eg$ ou be qui lui eſt égale, de la grandeur d; la ſomme ſera $af-ef+ag-eg+ce+ef+de+eg$, ou $bf+bg+2be$: Et dans cette ſomme, il eſt viſible que l'excez de ce qu'on prend d'une part détruit les defauts de ce qu'on prend de l'autre, parceque $-ef-eg+ef+eg=0$. Et de plus l'égalité ſe conſerve toûjours avec le prix moyen b. Ainſi il faudra que la partie qu'on prendra de la grandeur qui vaut a, ſoit à ce qu'on prendra des autres grandeurs, comme $bf+bg$ eſt à $2be$, ou diviſant ces parties par b, comme $f+g$ eſt à $2e$, c'eſt à dire reciproquement comme le produit des deux dernieres differences f & g par 1 nombre de l'autre difference e, eſt au produit de la difference unique e par 2 nombre des deux autres f & g. Mais il faudra de plus que la ſomme de ces parties ſoit égale à m. Or ſi les grandeurs $f+g$ & $2e$ ſont multipliées chacune par m, & diviſées par $f+g+2e$, l'on trouvera les deux parties $\frac{fm+gm}{f+g+2e}$ & $\frac{2em}{f+g+2e}$ dont la ſomme eſt égale à m, & qui ſont entr'elles comme $f+g$ eſt à $2e$, c'eſt à dire reciproquement comme $2e$ ſont à $f+g$. Or ces parties ſont les mêmes qu'on auroit trouué par les regles du Probleme. Ces regles ont donc preſcrit ce qu'il falloit faire.

SUITE DES REGLES D'ALLIAGE.

Les Regles que nous venons de donner pour allier enſemble plus de deux grandeurs en tant de differentes manieres que l'on voudra, ſont entierement nouvelles, & je ne ſçai point que perſonne en ait encore donné qui fuſſent tout enſemble ſi courtes & ſi generales. Mais quoique la démonſtration de la Methode accoûtumée des Arithmeticiens ait paſſé chez de ſçavans Auteurs pour l'une des démonſtrations les plus difficiles de toutes les regles d'Arithmetique, je croy pourtant que la démonſtration que nous venons d'apporter des noſtres, ne ſera pas fort difficile à CXXXIII.

concevoir, eſtant preſque la même que celle du Probleme precedent. Or cette démonſtration eſtant bien compriſe, l'on en poura tirer une methode pour réſoudre pluſieurs queſtions aſſez curieuſes qui dépendent de certains alliages ou mélanges qui doivent ſe faire ſans fraction, ſur tout ſi l'on y joint un peu noſtre Analyſe. En voici des exemples.

Premier Exemple.

On me demande qu'avec des ſols marquez & des carolus je faſſe autant de ſols que je prendrai de pieces.

J'appelle le ſol marqué m, le carolus c, & le ſol ſ, & je dis $m-3$ deniers vaut 1ſ, & $c+2$ vaut 1ſ. Donc $m-3+c+2=2\text{ſ}$. Enſuite je multiplie reciproquement $m-3$ par 2 & $c+2$ par 3, & j'ai $2m-6+3c+6=5\text{ſ}$ ou bien $2m+3c=5\text{ſ}$. Deux ſols marquez & trois carolus font 5 ſols en 5 pieces.

Si l'on me demandoit de faire 20 ſols en 20 pieces avec des ſols marquez & des carolus, je n'aurois qu'à multiplier l'égalité trouvée $2m+3c=5\text{ſ}$ par 4, & j'aurois $8m+12c=20\text{ſ}$. Huit ſols marquez, plus 12 carolus, donnent 20 ſols en 20 pieces.

Second Exemple.

On me demande qu'avec des ſols marquez, & des deniers, je faſſe autant de ſols que je prendrai de pieces. Soit le ſol marqué m, le denier d, & le ſol ſ. Je dis $m-3+d+11=2\text{ſ}$. Donc multipliant reciproquement $m-3$ par 11 & $d+11$ par 3, j'ai $11m-33+3d+33=14\text{ſ}$, ou bien $11m+3d=14m$. 11 ſols marquez & 3 deniers font 14 ſols en 14 pieces.

Troiſiéme Exemple.

On me demande qu'avec des écus, des pieces de 30 ſols, de 10, & de 5, je faſſe autant de livres que je prendrai de pieces, j'appelle l'écu e, la piece de 30 ſols t, celle de 10 d, de 5 c, & la livre l, & je dis $e-40+t-10+d+10+c+15=4l$. Enſuite je diviſe 50 ſomme des deux excez 40 & 10 par 25 ſomme des deux defauts 10 & 15, & l'expoſant eſt 2 par qui je multiplie $d+10+c+15$. Ce qui me donne $e-40+t-10+2d+20+2c+30=6l$, ou bien $e+t+2d+2c=6l$. Il y a de part & d'autre 6 livres en 6 pieces.

Quatriéme Exemple.

On me demande qu'avec des écus, des pieces de 30 ſols, de 15, & de 5, je faſſe autant de livres que je prendrai de pieces. J'appelle l'écu e, la piece de 30 ſols t, celle de 15 q, de 5 c, & la livre l, & je dis $e-40+t-10+q+5+c+15=4l$. Et comme je ne puis diviſer ſans fraction 50 par 20, je double $q+5$ & j'ai $e-40+t-10+2q+10+c+15=5l$. Enſuite je diviſe 50 par 25, & je multiplie $2q+c$ par l'expoſant trouvé. Cela me donne $e+t+4q+2c=8l$. Il y a de part & d'autre 8 livres en 8 pieces.

Cinquiéme Exemple.

Un Orféyre a des métaux dont le 1^{er} vaut 63 eſcus le marc, le 2^{e} en vaut 45 & le 3^e 56. On demande combien de marcs il doit prendre de chacun pour en faire autant de marcs de 60 eſcus chacun qu'il aura pris des autres marcs ? J'appelle le marc de 63 eſcus a, celui de 45 b, celui de 56 c, & celui de 60 m, & je dis $a-3+b+15+c+4=3m$. Enſuite parceque 3 ne peut diviſer que 15 & non pas 4, je diviſe ſeulement 15 par 3, & je multiplie $a-3$ par l'expoſant trouvé 5. Je multiplie auſſi reciproquement $a-3$ par 4 & $c+4$ par 3, & je trouve $\left\{\begin{matrix}5a-15\\4a-12\end{matrix}\right.+b+15+c+12=13m$, ou bien $9a+b+3c=13m$. Il y a de part & d'autre 780 eſcus en 13 marcs.

Avertiſſement.

CXXXIV. Il n'eſt pas toûjours facile de bien rapporter aux regles les queſtions qui en dépendent, ſur tout, comme on a remarqué ailleurs, ſi c'eſt d'une maniere un peu éloignée. Car pour les y réduire, il faut beaucoup d'attention pour en bien penetrer le fonds & la nature, & pour trouver les moyens de les réſoudre par ces regles, lorſqu'on juge qu'elles en peuvent avoir quelque dépendance. Voici par exemple des queſtions aſſez difficiles qu'il faut reſoudre par des nombres entiers, & qu'on peut rapporter aux regles d'Alliage. Des Auteurs aſſez eſtimez en ont crû la reſolution impoſſible, & quelques autres l'ont donnée à la verité, mais excepté l'Illuſtre & le ſçavant Monſieur Bachet, je ne ſçai pas qu'aucun d'eux l'ait donnée que tres-imparfaitement. Car ces queſtions pouvant quelquefois ſe reſoudre en pluſieurs differentes manieres par des nombres entiers, car par fractions elles peuvent toûjours l'eſtre en une infinité, ils ont crû neanmoins y ſatisfaire, en donnant ſeulement une reſolution, ſans marquer, ni ſans ſçavoir peut-eſtre ſi l'on pouvoit en donner encore d'autres, ou ſi l'on n'en pouvoit point donner.

Sixiéme Exemple.

Une troupe de 30 perſonnes compoſée d'hommes, de femmes, d'enfans, & de ſerviteurs, ont dépenſé dans un voyage 100 piſtoles; chaque homme en a dépenſé 5, chaque femme 3, chaque enfant 2, & chaque ſerviteur 1. On demande combien il y avoit d'hommes, combien de femmes, combien d'enfans, & combien de ſerviteurs ?

J'appelle chaque homme h, chaque femme f, chaque enfant e, & chaque ſerviteur p, & je diviſe 100 piſtoles par 30, nombre des perſonnes, afin d'avoir un prix milieu entre les prix 5, 3, 2, & 1. Ce prix milieu eſt $\frac{100}{30}$ ou $3\frac{1}{3}$ que j'appelle m. Je dis enſuite $h-1\frac{2}{3}+f+\frac{1}{3}+e+1\frac{1}{3}+p+2\frac{1}{3}=4m$, où j'obſerve déja que $h+f+e=3m$. Et ainſi il reſte d'allier h avec p, ce que je fais en multipliant reciproquement $h-1\frac{2}{3}$ par $2\frac{1}{3}$, & $p+2\frac{1}{3}$ par $1\frac{2}{3}$. Ce qui donne $2\frac{1}{3}h+1\frac{2}{3}p=3m$, dont le produit par 3, pour oſter les fractions, eſt $7h+5p=12m$, & ajoûtant à ce produit l'égalité premierement trouvée $h+f+e=3m$, je trouve $8h+f+e+5p=15m$, & multipliant tout par 2, à cauſe que 2 fois $15m=30m$, je trouve que $16h+2f+2e+10p=30m=100$ piſtoles. Et ainſi la queſtion eſt déja reſoluë. Mais conſiderant ces deux égalitez tirées de la ſuppoſition même $h+p=2f$, &

$f+p=2e$, je connois que la reſolution ſe peut varier differemment. Car je puis oſter pluſieurs fois $h+p$ & mettre autant de fois $2f$, aprés quoi je pourai auſſi oſter pluſieurs fois $f+p$ & mettre autant de fois $2e$. Ce qui me donne moyen d'apporter toutes ces reſolutions differentes, dont chacune ſatisfait à la queſtion.

$h+f+e+p$.	$h+f+e+p$.	$h+f+e+p$.	$h+f+e+p$.
16+2+2+10.	15+4+2+9.	15+3+4+8.	15+2+6+7.
15, 1, 8, 6.	14, 6, 2, 8.	14, 5, 4, 7.	14, 4, 6, 6.
14, 3, 8, 5.	14, 2, 10, 4.	14, 1, 12, 3.	13, 8, 2, 7.
13, 7, 4, 6.	13, 6, 6, 5.	13, 5, 8, 4.	13, 4, 10, 3.
13, 3, 12, 2.	13, 2, 14, 1.	12, 10, 2, 6.	12, 9, 4, 5.
12, 8, 6, 4.	12, 7, 8, 3.	12, 6, 10, 2.	12, 5, 12, 1.
11, 12, 2, 5.	11, 11, 4, 4.	11, 10, 6, 3.	11, 9, 8, 2.
11, 8, 10, 1.	10, 14, 2, 4.	10, 13, 4, 3.	10, 12, 6, 2.
10, 11, 8, 1.	9, 16, 2, 3.	9, 15, 4, 2.	9, 14, 6, 1.
8, 18, 2, 2.	8, 17, 4, 1.	7, 20, 2, 1.	

Autre Suppoſition.

Mais ſuppoſons que la troupe qui a dépenſé les 100 piſtoles, fuſt compoſée de 100 perſonnes. Les hommes ont dépenſé chacun trois piſtoles, les femmes chacune 1, chaque enfant $\frac{1}{2}$, & chaque ſerviteur $\frac{1}{7}$. On demande chaque nombre des hommes, des femmes, des enfans, & des ſerviteurs ?

Je voy que 1 piſtole eſt un prix moyen entre 3 qu'a dépenſé chaque homme & $\frac{1}{2}$ qu'a dépenſé chaque enfant, & $\frac{1}{7}$ qu'a dépenſé chaque ſerviteur : C'eſt pourquoi je fais cette premiere égalité $h-2+e+\frac{1}{2}+p+\frac{6}{7}=4$ piſtoles, qui ſont chacune appellées d. Je dis enſuite $h-2+e+\frac{1}{2}=2d$. Donc multipliant reciproquement $h-2$ par $\frac{1}{2}$ & $e+\frac{1}{2}$ par 2, je trouve $\frac{1}{2}h+2e=2\frac{1}{2}d$ dont le produit par 2 eſt $h+4e=5d$. Je dis auſſi $h-2+p+\frac{6}{7}=2d$, & multipliant reciproquement $h-2$ par $\frac{3}{7}$ moitié de $\frac{6}{7}$, & $p+\frac{6}{7}$ par 1 moitié de 2, je trouve $\frac{3}{7}h+p=1\frac{3}{7}d$, dont le produit par 7 eſt $3h+7p=d$. C'eſt pourquoi joignant les deux égalitez trouvées, plus encore $f=d$, j'ai $4h+f+4e+7p=16d$, ou je connois déja que pour faire ſans fraction l'égalité qu'on demande, je ne puis mettre moins de 4 hommes, ni moins de 4 enfans, ni moins de 7 ſerviteurs. Et cela eſtant le reſte de la reſolution eſt facile & ſe peut varier pluſieurs fois en aſſemblant en pluſieurs differentes manieres, & par les regles des combinaiſons que nous traitterons ailleurs, ces quatre égalitez que nous venons de tirer de la ſuppoſition même.

1^{ere} $4h+f+4e+7p=16d$. 2^{e} $h+4e=5d$. 3^{e} $f=d$. 4^{e} $3h+7p=10d$.

Car des combinaiſons ou des aſſemblages differens de ces quatre équations particulieres, on trouvera comme a fait Monſieur Bachet par une autre methode, toutes les reſolutions ſuivantes.

$h+f+e+p$.	$h+f+e+p$.	$h+f+e+p$.	$h+f+e+p$.
28+5+4+63.	27+5+12+56.	26+10+8+56.	26+5+20+49.
25, 15, 4, 56.	25, 10, 16, 49.	25, 5, 28, 42.	24, 15, 12, 49.
24, 10, 24, 42.	24, 5, 36, 35.	23, 20, 8, 49.	23, 15, 20, 42.
23, 10, 32, 35.	23, 5, 44, 28.	22, 20, 16, 42.	22, 15, 28, 35.
22, 10, 40, 28.	22, 25, 4, 49.	22, 5, 52, 21.	21, 25, 12, 42.
21, 20, 24, 35.	21, 15, 36, 28.	21, 10, 48, 21.	21, 5, 60, 14.
20, 30, 8, 42.	20, 25, 20, 35.	20, 20, 32, 28.	20, 15, 44, 21.
20, 10, 56, 14.	20, 5, 68, 7.	19, 35, 4, 42.	19, 30, 16, 35.
19, 25, 28, 28.	19, 20, 40, 21.	19, 15, 52, 14.	19, 10, 64, 7.
18, 35, 12, 35.	18, 30, 24, 28.	18, 25, 36, 21.	18, 20, 48, 14.
18, 15, 60, 7.	17, 40, 8, 35.	17, 35, 20, 28.	17, 30, 32, 21.
17, 25, 44, 14.	17, 20, 56, 7.	16, 45, 4, 35.	16, 40, 16, 28.
16, 35, 28, 21.	16, 30, 40, 14.	16, 25, 52, 7.	15, 45, 12, 28.
15, 40, 24, 21.	15, 35, 36, 14.	15, 30, 48, 7.	14, 50, 8, 28.
14, 45, 20, 21.	14, 40, 32, 14.	14, 35, 44, 7.	13, 55, 4, 28.
13, 50, 16, 21.	13, 45, 28, 14.	13, 40, 40, 7.	12, 55, 12, 21.
12, 50, 24, 14.	12, 45, 36, 7.	11, 60, 8, 21.	11, 55, 20, 14.
11, 50, 32, 7.	10, 65, 4, 21.	10, 60, 16, 14.	10, 55, 28, 7.
9, 65, 12, 14.	9, 60, 24, 7.	8, 70, 8, 14.	8, 65, 20, 7.
7, 75, 4, 14.	7, 70, 16, 7.	6, 75, 12, 7.	5, 80, 8, 7.
4, 85, 4, 7.			

Autre Suppoſition.

Mais ſuppoſons de nouveau que la troupe ne fuſt que de 60 perſonnes, & qu'elle ait dépenſé les 100 piſtoles. Chaque homme en a dépenſé 2, chaque femme $\frac{2}{3}$, chaque enfant $\frac{3}{5}$, & chaque ſerviteur $\frac{1}{2}$. Cette queſtion ſe peut reſoudre comme au premier exemple, mais je la reſous plus facilement, quoique ce ne ſoit pas ſi methodiquement, en operant comme au ſecond exemple. Je dis donc $h - 1 + f + \frac{1}{3} = 2d$. Donc $\frac{2}{3}h + f = 1\frac{1}{3}d$ & $h + 3f = 4d$. Je dis auſſi $h - 1 + e + \frac{2}{5} = 2d$. Donc $\frac{2}{5}h + e = 1\frac{2}{5}d$ & $2h + 5e = 7d$. Je dis encore $h - 1 + p + \frac{1}{2} = 2d$. Donc $\frac{1}{2}h + p = 1\frac{1}{2}d$, & $h + 2p = 3d$. Enſuite joignant ces trois égalitez trouvées, je trouve $4h + 3f + 5e + 2p = 14d$, où je connois déja que pour faire ſans fraction l'égalité qu'on demande, je ne puis prendre moins de 4 hommes, ni moins de 3 femmes, ni moins de 5 enfans, ni moins de 2 ſerviteurs. Or ayant déja 14 des 60 perſonnes de la ſuppoſition, il n'en faut plus que 46, & n'ayant que 14 des 100 piſtoles de la même ſuppoſition, il en faut encore 86. Il faut donc que 46 perſonnes ajoûtées donnent 86 eſcus. Je mets 46 hommes qui donnent 92 piſtoles, c'eſt à dire 6 plus qu'il ne faut. C'eſt pourquoi j'oſte 3 hommes pour les 6 piſtoles de ſurplus, & encore un homme & ſon prix afin qu'il manque quelque choſe à la ſomme qu'un autre nombre de perſonnes poura remplacer. Je mets donc ſeulement 42 hommes qui donnent 84 piſtoles. Or il faut encore 4 perſonnes, & 2 piſtoles, & c'eſt juſtement le prix de 4 ſerviteurs. Je trouve donc $46h + 3f + 5e + 6p = 100$ piſtoles. Et cette reſolution eſt la ſeule que l'on puiſſe donner ſans fractions, à cauſe qu'une ou pluſieurs fois h plus une ou pluſieurs fois e ne peuvent s'égaler avec autant de fois f. ni qu'une ou pluſieurs fois h plus une ou pluſieurs fois p ne peuvent s'égaler avec autant de fois f, ni qu'enfin une ou pluſieurs fois f plus une ou pluſieurs fois p ne peuvent s'égaler avec autant de fois e, ainſi qu'on l'a pû faire aux deux exemples precedens. Il en eſt ainſi de toutes les autres queſtions ſemblables.

DES REGLES
DE FAUSSE POSITION.

CXXXV. Lorſqu'il arrive que des queſtions propoſées paroiſſent telles que l'on ne ſçait à quelles regles on les doit rapporter, on a coûtume de chercher leur reſolution en ſuppoſant que certaines grandeurs priſes au hazard ſont celles que l'on demande, & les examinant enſuite pour voir ſi elles ſatisfont aux conditions portées par la queſtion. Que ſi elles y ſatisfont, il eſt viſible qu'elles ſont de celles que l'on demande. Mais ſi elles n'y ſatisfont pas, on ordonne une proportion dans laquelle on met les grandeurs ſuppoſées au ſecond terme, celles auſquelles on eſt arrivé en les examinant au premier, & les grandeurs données au troiſiéme terme. Et s'il arrive alors que le quatriéme de la proportion ſatisfaſſe à la queſtion, la regle s'appelle *Regle de ſimple poſition*, ou *d'une fauſſe poſition.*

CXXXVI. Mais ſi ce quatriéme terme ne ſatisfait point à la queſtion, on cherche à la reſoudre par le moyen de la ſuppoſition qu'on a déja faite, & d'une nouvelle que l'on fait encore. Et la regle s'appelle alors *Regle de double poſition* ou *de deux fauſſes poſitions.* Nous expliquerons cette derniere aprés avoir donné les exemples ſuivans pour éclaircir celle d'une poſition ſimple.

Premier Exemple.

Une armée eſtant défaite, il ſe trouve que la ſeptiéme partie eſt perie dans le combat, que le tiers s'eſt ſauvé par la fuite, & que 11000 qui ſont reſtez, ont eſté pris priſonniers. On demande le nombre de tous les ſoldats qui compoſoient l'armée avant le combat, combien de morts, & combien qui ont pris la fuite ?

Examinant un peu la queſtion, l'on reconnoît aſſez qu'elle dépend de la Regle de Trois. Car $\frac{1}{7}+\frac{1}{3}$ de toute l'armée plus 11000 ſoldats la compoſant toute entiere, ſi je retranche $\frac{1}{7}$ & $\frac{1}{3}$, c'eſt à dire $\frac{10}{21}$ de l'unité, car il n'y a qu'une armée, le reſte $\frac{11}{21}$ ſera le nombre des 11000 ſoldats qui ſont reſtez, puiſque 11000 ſoldats avec $\frac{1}{7}$ & $\frac{1}{3}$ de l'armée la compoſent toute entiere. Comme donc $\frac{11}{21}$ parties de l'armée ſont aux 11000 ſoldats, ainſi 1, qui marque l'armée entiere dont les 11000 ſoldats ſont les $\frac{11}{21}$ parties, ſera au nombre de tous les ſoldats qui la compoſent toute entiere, & qui eſt 21000. *parties de l'armée. ſoldats : : armée. ſoldats.*

$\frac{11}{21}$. 11000 : : 1. 21000.

Mais

Mais ſuppoſant que je ne ſçache point rapporter cette queſtion à la regle de Trois, je cherche ainſi à la reſoudre. Je ſuppoſe qu'un certain nombre pris au hazard eſt celui de tous les ſoldats, pour faciliter l'operation j'en choiſis un qui ſoit tel que ſa ſeptiéme & troiſiéme partie, qui ſont les parties données, ſoient chacune un nombre entier, ce que je fais en prenant 21 produit de 7 par 3. Si donc 21 eſt le nombre de tous les ſoldats, il n'y en a eü que 3 de tuez, 7 qui ayent pris la fuite, & 11 de reſte, car 3 la 7^e^ partie de 21, & 7 qui en eſt la 3^e^, eſtant retranchez de 21, laiſſent 11 pour reſte. Or il en doit reſter 11000. J'ordonne donc une proportion, où 21 nombre de la ſuppoſition aura la ſeconde place, le reſte 11 trouvé par ſon moyen la premiere, & le nombre donné 11000 la troiſiéme; & le quatriéme terme 21000 me donne le nombre de tous les ſoldats, dont la 7^e^ partie 3000 ont eſté tuez, le tiers 7000 ont pris la fuite, aprés quoi il en eſt reſté 11000 priſonniers.

reſte trouvé par la ſuppoſition. nombre ſuppoſé : : reſte. armée entiere.
11. 21 : : 11000. 21000.

Second Exemple.

Une perſonne a fait le tiers d'un voyage à cheval, & la 5^e^ partie à pied, & en tout elle a fait 50 lieuës. L'on demande combien le voyage entier a de lieuës?

Cette queſtion ſe rapporte encore à la regle de Trois. Car ſi $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ ou $\frac{8}{15}$ du voyage font 50 lieuës, 1, ou le voyage entier en fera $93\frac{3}{4}$.

parties du voyage. lieuës : : voyage. lieuës.
$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ ou $\frac{8}{15}$. 50 : : 1. $93\frac{3}{4}$.

Mais ſuppoſant que je ne ſçache point rapporter cette queſtion à la regle de Trois, je cherche ainſi à la reſoudre. Je ſuppoſe qu'un certain nombre pris au hazard eſt celui de toutes les lieuës qui ſont le voyage entier, pour faciliter l'operation, je prens 15 produit de 3 par 5, afin que ſa 3^e^ & 5^e^ partie, qui ſont les parties données, ſoient chacune un nombre entier. Si donc 15 eſt le nombre de toutes les lieuës, ſon tiers 5 & ſa 5^e^ partie 3, doivent faire 50 lieuës. Or elles en font ſeulement 8. J'ordonne donc une proportion, où ce nombre trouvé 8 aura la premiere place, le nombre de la ſuppoſition qui eſt 15, aura la ſeconde, & le nombre donné des 50 lieuës aura la troiſiéme. Enſuite dequoi je trouve que le nombre des lieuës de tout le voyage eſt $93\frac{3}{4}$, dont le tiers $31\frac{1}{4}$ a eſté fait à cheval, & la 5^e^ partie $18\frac{3}{4}$ a eſté faite à pied.

nombre trouvé. nombre ſuppoſé : : nombre donné. lieuës de tout le voyage.
8. 15 : : 50. $93\frac{3}{4}$.

Troiſiéme Exemple.

Les âges de trois perſonnes font 144 années, le premier a trois fois l'âge du ſecond, & le ſecond a deux fois l'âge du troiſiéme. Quel eſt chacun de ces trois âges?

Examinant la queſtion, il eſt facile de voir qu'elle dépend de la Regle de Compagnie ; car pour y ſatisfaire, il ne faut que diviſer le nombre donné 144 en trois parties proportionelles aux nombres 1, 2, & 6, qui ſont déterminez, à cauſe qu'ils expriment les rapports connus que les trois âges ont entr'eux. Car le troiſiéme de ces âges eſt au ſecond qui le contient 2 fois, comme 1 à 2 qui contient 2 fois 1, & au troiſiéme comme 1 à 6, à cauſe que le ſecond eſt au premier qui le contient 3 fois comme 2 à 6 qui contient 3 fois 2. Ainſi l'on trouvera par la Regle de Compagnie que les trois âges ſont, le premier 72 années, le ſecond 32, & le troiſiéme 16.

$$9. \quad 144 :: \left\{ \begin{array}{l} 6. \\ 2. \\ 1. \end{array} \right. \quad \begin{array}{r} 72. \\ 32. \\ 16. \end{array}$$

Mais ſuppoſant que je ne ſçache point rapporter cette queſtion à la Regle de Compagnie, je cherche ainſi à la reſoudre. Je ſuppoſe que la troiſiéme perſonne n'ait qu'une année, l'âge de la ſeconde ſera donc 2, & celui de la premiere 6, & ces trois âges doivent faire 144. Or ils ne font que 9 années. J'ordonne donc une proportion où le nombre trouvé 9 aura la premiere place, le nombre de la ſuppoſition qui eſt 1 aura la ſeconde, & le nombre donné 144 la troiſiéme. Le quatriéme terme de cette proportion qui eſt 16, ſera le nombre des années de la troiſiéme perſonne, la ſeconde aura donc 2 fois 16 ou 32 années, & la premiere 3 fois 32 ou 96. Et ces trois âges en font 144.

nombre trouvé. nombre ſuppoſé :: *nombre donné. le plus petit âge.*
9. 1 :: 144. 16.

AVERTISSEMENT.

Il faut remarquer que les plus petits nombres ſont toûjours les plus propres pour faire la ſuppoſition, parceque l'operation en eſt plus courte, & que ſi l'on prend l'unité, il ne faut que diviſer le troiſiéme terme par le premier pour en avoir le quatriéme, ſans qu'il ſoit neceſſaire de faire aucune multiplication. Cependant quand il y a des parties aliquotes déterminées, il eſt à propos de choiſir pour nombres des ſuppoſitions des nombres qui ſoient tels que leurs aliquotes déterminées ſoient des nombres entiers, ainſi que nous l'avons fait au premier & ſecond exemple, afin d'éviter les operations qu'il faudroit faire par fraction en prenant d'autres nombres pour les ſuppoſitions. En tout autre cas je prendrai ſeulement l'unité, ou bien 2.

DE LA REGLE
DE DEUX FAUSSES POSITIONS.

CXXXVII Lorſqu'il y a pluſieurs nombres donnez dans la queſtion, la regle d'une poſition ſimple ne peut ſervir à la reſoudre. Car pour la ſuivre, il faut écrire tout ce que l'on connoît entierement au troiſiéme terme de la proportion, & cependant il ne faut y écrire qu'un nombre. Or en pareilles rencontres, l'on cherche ainſi à reſoudre la queſtion.

L'on ſuppoſe qu'un nombre pris au hazard eſt l'un de ceux que l'on demande, & on l'examine ſelon l'eſtat de la queſtion pour voir s'il y ſatisfait ou non. Que ſi ce nombre n'y ſatisfait pas, l'on marque l'excez ou le defaut qu'on trouve. Enſuite l'on prend un autre nombre au lieu de celui de la premiere ſuppoſition, & on l'examine en la même ſorte. Que ſi ce ſecond nombre ne ſatisfait pas à la queſtion non plus que le premier, l'on marque pareillement l'excez ou le defaut qu'on trouve.

Les excez ſe marquent avec +, les defauts avec —.

Nous appellerons *erreurs* ces excez ou ces defauts, & les nombres pris pour des ſuppoſitions ſeront ſimplement appellez *ſuppoſitions*.

REGLE.

Or pour reſoudre la queſtion par le moyen des ſuppoſitions & des erreurs, l'on met au premier terme de deux proportions la difference des erreurs, au ſecond la difference des ſuppoſitions, & au troiſiéme chacune des erreurs. On ajoûte enſuite le quatriéme terme de la proportion à la ſuppoſition qui a ſervi pour le trouver. Les exemples éclairciront la regle.

Mais on remarquera que la difference des ſuppoſitions ſera priſe en retranchant la premiere ſuppoſition de la ſeconde; Et celle des erreurs en retranchant la ſeconde erreur de la premiere.

Premier Exemple.

Les âges de trois perſonnes font 100 années, le premier âge ſurpaſſe le ſecond de 24 années, & le ſecond ſurpaſſe le troiſiéme de 20 années. Quel eſt chacun de ces trois âges?

Soit 1 année le troiſiéme & le plus petit âge, le ſecond ſera donc 21 années, & le troiſiéme 21+24 ou 45 années, & ces trois âges 1, 21, & 45 doivent faire en tout 100 années. Or ils n'en font que 67. J'ordonne donc une proportion ou 67 aura la premiere place, 1 la ſeconde, mais parcequ'il y a pluſieurs nombres donnez, & qu'il n'en faudroit écrire qu'un au troiſiéme, je connois que la reſolution ne peut ſe trouver par le moyen de ma ſuppoſition ſeule, je me contente donc de voir combien il s'en manque que 67 ne ſoit égal à 100, & je marque le defaut —33, pour la premiere erreur, car 100—33=67. Enſuite je fais une ſuppoſition nouvelle en prenant 2 années pour le troiſiéme âge au lieu de 1 que j'avois pris; le ſecond âge ſera donc 22, & le troiſiéme 66, & ces trois âges font 70 années. Or ils devroient en faire 100; Il y a donc un defaut de 30 années, & je marque —30 pour la ſeconde erreur, car 100—30=70. Cela eſtant, j'écris au premier terme de deux proportions —33+30, c'eſt à dire —3 la difference des deux erreurs —33 & —30; au ſecond terme, j'écris 1 ou la difference des deux ſuppoſitions 2 & 1, & au troiſiéme chacune des erreurs —33 & —30. Le quatriéme terme de la premiere proportion eſt 11, & parceque ce terme vient de la premiere ſuppoſition 1, qui a donné l'erreur ou le defaut —33, j'ajoûte 1 au dernier terme 11, & 12 eſt le nombre des années de la troiſiéme perſonne. Ou bien auſſi le dernier terme de la ſeconde proportion eſt 10, & parceque ce terme 10 vient de la ſeconde ſuppoſition 2, qui a donné le defaut —30, j'ajoûte 2 à 10, & 12 eſt le nombre des années de la troiſiéme perſonne, la ſeconde en aura donc 12+20, c'eſt à dire 32, & la premiere 56, & ces trois âges 12, 32, & 56 font en tout 100 années.

1ere ſuppoſition 1	*1ere erreur* —33	*differ. des ſupp. erreurs.*		*3e âge.*
2e ſuppoſition 2	*2e erreur* —30			
1ere ſuppoſition 1	*differ. des err.* —3.	+1 ::	—33. —30.	11, +1 = 12. 10, +2 = 12.

Second Exemple.

Les âges de trois perſonnes font 100 années, la premiere a 12 années plus que les deux autres enſemble, & la ſeconde a 2 fois les années de la troiſiéme & 8 de ſurplus. Combien chacune en aura-t'elle?

Soit 1 année le troiſiéme & le plus petit âge, le ſecond ſera donc 10 années, & le troiſiéme 23, & ces trois âges font 34 années; Or ils en devroient faire 100, je marque donc le defaut *—66*. Soit pris en ſecond lieu 2 pour les années de la troiſiéme perſonne, la ſeconde en aura donc 12 & la troiſiéme 26, & ces trois âges font 40 années; Or ils devroient en faire 100, j'écris donc encore le defaut *—60*. Cela eſtant, j'écris au premier terme d'une proportion *—66+60*, ou *—6* difference des defauts *—66* & *—60*; je n'ordonne que l'une des deux proportions, car une ſeule ſert autant que les deux; au ſecond terme j'écris 1 difference des ſuppoſitions, & au troiſiéme l'erreur *—66*. Le dernier terme eſt 11, à qui j'ajoûte la premiere ſuppoſition 1 qui a donné le premier defaut *—66*, & 12 eſt le nombre des années de la troiſiéme perſonne, la ſeconde en aura donc 2 fois 12 plus 8, c'eſt à dire 32, & la premiere 12+32, plus 12, qui font 56. Et ces trois âges 12, 32, & 56 font les 100 années.

1ere ſuppoſition 1	*1ere erreur* —66			
2e ſuppoſition 2	*2e erreur* —60	*diff. des ſupp* ::	*1ere erreur.*	*3e âge.*
differ. des ſupp. 1	*differ. des err.* —6.	+1 ::	—66.	11, +1 = 12.

Troiſiéme Exemple.

Une perſonne ayant rencontré des pauvres, & leur voulant donner à chacun 5 ſols, elle a trouvé qu'elle en avoit un de trop peu. Et ainſi ne leur en ayant donné à chacun que 4, il lui en eſt reſté 6. Combien y avoit-il de pauvres, & combien de ſols?

Soit 1 le nombre des pauvres, pour recevoir 5 ſols il faut encore 1 ſol, le nombre des ſols n'eſt donc que 4. Mais s'il reçoit 4 ſols, il en doit reſter 6, le nombre des ſols eſt donc 4+6, c'eſt à dire 10. Or 4 devroit eſtre le même que ce nombre 10. Mais il s'en faut 6. J'écris donc le defaut —6. En ſecond lieu, ſoit 2 le nombre des pauvres, pour recevoir chacun 5 ſols il faut encore 1 ſol, le nombre des ſols eſt donc 2 fois 5 moins 1, c'eſt à dire 9. Mais ſi chacun reçoit 4 ſols, il en doit reſter 6, le nombre des ſols ſera donc 2 fois 4 plus 6, c'eſt à dire 14. Or 9 devroit eſtre le même que ce nombre 14. Mais il s'en faut 5. J'écris donc le defaut —5. Cela eſtant, j'écris au premier terme d'une proportion —1 difference des erreurs —6 & —5. Car —6+5=—1. Au ſecond j'écris 1 difference des ſuppoſitions, & au troiſiéme la premiere erreur —6. Le dernier terme de la proportion eſt 6 à qui j'ajoûte la premiere ſuppoſition 1, à cauſe que la premiere erreur —6 eſt un defaut, & ainſi 7 eſt le nombre des pauvres. Et il y avoit 34 ſols.

1ere *ſuppoſition* 1	1ere *erreur* —6				*nombre des*
2e *ſuppoſition* 2	2e *erreur* —5.	*diff. des ſupp.*		1ere *erreur.*	*pauvres.*
differ. des ſupp. 1	*differ. des err.* —1.	+1	::	—6.	+6, +1=7.

SUITE DE LA REGLE DE DEUX FAUSSES POSITIONS.

CXXXVIII Il y a une infinité de queſtions, où l'on ne donne qu'un nombre entierement connu, leſquelles ne peuvent ſe reſoudre par la regle d'une ſimple poſition, parceque l'on y détermine pluſieurs parties aliquotes, non pas d'une même grandeur, comme dans la regle d'une fauſſe poſition, mais de pluſieurs differentes. Or ces queſtions peuvent ſe rapporter à la regle de deux fauſſes poſitions. En voici des exemples.

Quatriéme Exemple.

On feint qu'une Mule allant avec une Aſneſſe, ſe plaignoit d'eſtre trop chargée, & que la Mule lui dit; ſi je t'avois donné un de mes ſacs, nous en aurions autant l'une que l'autre, & ſi tu m'en avois donné un des tiens, j'en aurois le double de toy. On demande combien chacune portoit de ſacs?

Soit 1 le nombre des ſacs de l'Aſneſſe, ſi elle donne un ſac à la Mule, il ne lui reſtera plus rien, & la Mule en aura 2 fois autant, c'eſt à dire 2 fois rien. Comme donc la Mule ayant receu un ſac, il ne lui reſte rien, le nombre de ſes ſacs eſt —1; Si donc elle donne un ſac à l'Aſneſſe, il lui en reſtera —2, & l'Aſneſſe en aura 2. Or —2 devroit eſtre égal à ce nombre 2, puiſqu'alors elles doivent avoir autant de ſacs l'une que l'autre. Mais il s'en manque 4 que —2 ne ſoit égal à 2. J'écris donc le defaut —4. En ſecond lieu, ſoit 2 le nombre des ſacs de l'Aſneſſe, ſi elle donne un ſac à la Mule, il lui en reſtera encore 1, & la Mule en aura 2 fois autant qu'elle, c'eſt à dire 2. Comme donc la Mule ayant receu un ſac, il ſe trouve qu'elle en a 2, le nombre de ſes ſacs eſt 1. Si donc elle donne un ſac à l'Aſneſſe, il ne lui reſtera plus rien, & l'Aſneſſe en aura 3. Or le rien qui reſte à la Mule devroit eſtre égal à 3. Car elles doivent avoir autant de ſacs l'une que l'autre. Mais il s'en manque 3 que rien ne ſoit égal à 3. J'écris donc le deffaut —3. Cela eſtant, j'écris —1 difference des erreurs —4 & —3 au premier terme d'une proportion, +1 difference des ſuppoſitions au ſecond terme, & la premiere erreur —4 au troiſiéme. Le quatriéme terme eſt 4, à qui j'ajoûte la premiere ſuppoſition 1 qui a donné la premiere erreur ou le defaut —4. Et ainſi 5 eſt le nombre des ſacs de l'Aſneſſe, & 7 celui des ſacs de la Mule.

			nombre des
1ere *ſuppoſition* 1.	1ere *erreur* —4		*ſacs de*
2e *ſuppoſition* 2.	2e *erreur* —3	*diff. des ſupp* : : 1ere *err.*	*l'âneſſe.*
diff. des ſupp. 1	*differ. des err.* —1.	+1 : : —4.	+4, +1 = 5.

Cinquiéme Exemple.

On a cueilli dans un Jardin des pommes, des poires & des prunes. Le nombre des prunes eſt 10000, celui des pommes fait la moitié du nombre des poires & des prunes, & celui des poires le tiers du nombre des pommes & des prunes. L'on demande combien en tout on a cueilli de fruits, combien de pommes & combien de poires ?

Soit 1 le nombre des poires, le nombre des pommes & des prunes ſera donc 3. Or le nombre des prunes eſt 10000. le nombre des pommes ſera donc 3—10000, c'eſt à dire —9997, & ce nombre eſtant pris 2 fois doit faire 10000+1, ou 10001, c'eſt à dire le nombre des poires & des prunes. Or ils font ſeulement —19994. J'écris donc le defaut —29995. En ſecond lieu, ſoit 2 le nombre des poires, celui des pommes & des prunes ſera donc 6, & parceque celui des prunes eſt 10000, celui des pommes ſera 6—10000, c'eſt à dire —9994, & ce nombre eſtant pris 2 fois doit donner 10002 le nombre des poires & des prunes. Or il fait ſeulement —19988, j'écris donc le defaut —29990. Enfin j'écris —5 difference des erreurs au premier terme d'une proportion, +1 difference des ſuppoſitions au ſecond terme, & la premiere difference —1 au troiſiéme. Le dernier terme eſt 5999, à qui j'ajoûte la premiere ſuppoſition 1, & je connois que 6000 eſt le nombre des poires, 8000 le nombre des pommes, & 24000 le nombre de tous les fruits que l'on a cueillis.

Sixiéme Exemple.

Un Pere pauvre venant à mourir, veut par ſon Teſtament que le premier de ſes enfans prenne 1 eſcu ſur tous les biens qu'il laiſſe, & la 7e partie du reſte ; que le ſecond en prenne 2 & la 7e partie du reſte, le troiſiéme 3 & la 7e partie du reſte. Et ainſi de ſuite. Or il ſe trouve que le partage eſtant ainſi fait, tous les enfans ſont également partagez. L'on demande quel eſt le nombre des enfans, & combien leur pere a laiſſé à chacun d'eux ?

Soit 1 eſcu la 7e partie du reſte laquelle le premier des enfans doit prendre, ce reſte ſera donc 7 eſcus, & tous les biens du pere 8, ſur leſquels le premier enfant ayant pris 1 eſcu, il en reſte 7, dont ayant pris encore la 7e partie, c'eſt à dire 1 eſcu, il aura 2 eſcus & le reſte ſera 6 eſcus, ſur leſquels le ſecond doit prendre 2 eſcus, aprés quoi il en reſte 4, dont il doit prendre encore la 7e partie, il aura donc 2 eſcus $+\frac{4}{7}$. Et ce nombre doit eſtre égal aux 2 eſcus que le premier a pris. Mais il y a $\frac{4}{7}$ davantage. J'écris donc l'excez $\frac{4}{7}$. En ſecond lieu, ſoit 2 eſcus la 7e partie du reſte que le premier enfant doit prendre, ce reſte ſera donc 2 fois 7 ou 14 eſcus, & tous les biens du pere 15 eſcus, ſur leſquels le premier ayant pris 1 eſcu, il en reſte 14, dont ayant pris encore la 7e partie 2 eſcus, il aura 3 eſcus, & le reſte ſera 12, ſur leſquels le ſecond doit prendre 2 eſcus, aprés quoi il en reſte 10, dont il doit prendre encore la 7e partie; il aura donc 2 eſcus $+\frac{10}{7}$, c'eſt à dire $3\frac{3}{7}$. Et ce nombre doit eſtre égal aux 3 eſcus que le premier a pris. Mais il y a $\frac{3}{7}$ davantage. J'écris donc l'excez $\frac{3}{7}$. Cela eſtant, j'écris $+\frac{1}{7}$ difference des erreurs ou des excez au premier terme d'une proportion, $+1$ difference des ſuppoſitions au ſecond terme, la premiere erreur ou le premier excez $+\frac{4}{7}$ au troiſiéme. Le quatriéme terme eſt $+4$, que j'ajoûte à la premiere ſuppoſition 1, qui a donné le premier excez $\frac{4}{7}$. Et ainſi 5 eſt la 7e partie du reſte laquelle le premier enfant doit prendre. Ce reſte ſera donc 7 fois 5, c'eſt à dire 35, à qui ajoûtant 1 eſcu qu'il doit prendre avant la 7e partie, le nombre 36 ſera celui de tous les biens que le pere a laiſſé, ſur leſquels le premier ayant pris $1+\frac{35}{7}$, le ſecond $2+\frac{28}{7}$, le troiſiéme $3+\frac{21}{7}$, le quatriéme $4+\frac{14}{7}$, le cinquiéme $5+\frac{7}{7}$, & enfin le dernier $6+\frac{0}{7}$. Il ſe trouvera que le pere avoit 6 enfans, à chacun deſquels il a laiſſé 6 eſcus.

1ere ſuppoſition 1.	*1er excez* $\frac{4}{7}$.			*la 7e partie*
2e ſuppoſition 2.	*2e excez* $\frac{1}{7}$.	*diff. des ſupp* : :	*1er excez.*	*du 1er reſte.*
diff. des ſup. $+1$.	*diff. des excez* $+\frac{1}{7}$.	$+1$: :	$\frac{4}{7}$.	$+4, +1 = 5$.

De même ſi le premier des enfans prenoit 1 eſcu & le tiers du reſte, le ſecond 2 & le tiers du reſte, & ainſi de ſuite, le pere auroit laiſſé 4 eſcus & 2 enfans qui auroient chacun 2 eſcus. Et ſi le premier prenoit 1 eſcu & le quart du reſte, le ſecond 2 & le quart du reſte, & ainſi de ſuite, le pere auroit laiſſé 9 eſcus, & 3 enfans qui auroient chacun 3 eſcus.

Pareillement ſi le premier des enfans prenoit 1 eſcu, $+\frac{1}{13}$ du reſte, le ſecond 2, $+\frac{1}{13}$ du reſte, & ainſi de ſuite, le pere auroit laiſſé 144 eſcus, & 12 enfans qui auroient chacun 12 eſcus. Et ainſi de ſuite à l'infini, le nombre des enfans ſera toûjours celui du ſecond terme de la fraction qui marque la partie du premier reſte, lorſqu'on aura diminué ce terme de l'unité, & le nombre des eſcus ſera toûjours le quarré du nombre des enfans. Ce qui eſt un Theoreme aſſez curieux touchant la nature des quarrez.

De la Démonſtration des Regles.

La Démonſtration de ces Regles doit ſe tirer des queſtions qu'on y rapporte, & des ſuppoſitions par leſquelles on cherche à les reſoudre. Car ſi la difference des erreurs eſt à celle des ſuppoſitions comme les erreurs ſont aux nombres auſquels les ſuppoſitions doivent eſtre ajoûtées ou deſquels elles doivent eſtre retranchées, l'on trouvera en les ſuivant la reſolution que l'on cherche, ſinon elles n'y ſerviront de rien. C'eſt pourquoi lorſque les deux ſuppoſitions que l'on aura faites ne ſerviront pas à reſoudre la queſtion, il ne ſera pas neceſſaire de la chercher par d'autres.

Telles ſont par exemple les deux queſtions que le Pere Tacquet rapporte. Trouver un nombre lequel eſtant diviſé par 2, 3, 4, 5, & 6, il doit toûjours reſter 1, ou quelqu'autre nombre; mais eſtant diviſé par 7 il ne reſte rien. Ou bien encore cet autre. Trouver un nombre lequel eſtant diviſé par 7, il reſte 3, mais eſtant diviſé par 3 il ne reſte rien. L'on peut voir les reſolutions qu'il en donne pag. 312 de ſon Arithmet. pratiq. mais c'eſt en ſuivant d'autres voyes : Ou bien encore ce que dit Schooten ſur les queſtions de même ſorte pag. 407. de ſes Exercit. Mathemat. Au reſte toutes les queſtions que l'on peut reſoudre par le moyen des regles de fauſſe poſition, ſe reſolvent avec une facilité incomparablement plus grande par le moyen de noſtre Analyſe ; de ſorte que ceux qui en ſçauront tant ſoit peu l'uſage n'auront aucun beſoin de ces regles. Ainſi je me diſpenſerai de les expliquer davantage. Si même on examine de bien prés la nature de ces regles de fauſſe poſition, on reconnoîtra facilement qu'elles n'ont rien que ce qu'elles empruntent de l'Analyſe & des égalitez. La ſeule difference eſt preſque celle-ci, que l'on marque dans les unes les grandeurs inconnuës par des nombres connus, & dans l'autre par des lettres inconnuës, & que les raiſonnemens de celles-là ſe font d'une maniere plus embaraſſante & qui éclaire moins l'eſprit que ceux qu'on fait dans l'Analyſe, bien que dans le fonds ces raiſonnemens ſoient les mêmes de part & d'autre.

DES RAPPORTS COMPOSEZ.

CXXXIX. La multiplication, ou le produit de pluſieurs rapports s'appelle un *rapport composé* de ces rapports, & ces rapports *les rapports compoſans* du rapport compoſé. C'eſt ainſi que le rapport $\frac{6}{1}$ eſt appellé compoſé des deux rapports $\frac{2}{1}$ & $\frac{3}{1}$, ſi l'on conſidere $\frac{6}{1}$ comme produit de $\frac{2}{1}$ par $\frac{3}{1}$, & reciproquement $\frac{2}{1}$ & $\frac{3}{1}$ s'appellent rapports compoſans de $\frac{6}{1}$, ſi l'on conſidere $\frac{2}{1}$ & $\frac{3}{1}$ comme les racines de $\frac{6}{1}$. De même le rapport $\frac{1}{6}$ eſt appellé compoſé des deux rapports $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$, ſi l'on conſidere $\frac{1}{6}$ comme produit de $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{3}$, & reciproquement $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ s'appellent les rapports compoſans de $\frac{1}{6}$, ſi l'on conſidere $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ comme les racines de $\frac{1}{6}$.

Pareillement le rapport $\frac{5}{18}$ eſt appellé compoſé des trois rapports $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ & $\frac{5}{3}$, ſi on le conſidere comme un ſolide fait de $\frac{1}{6}$ produit des deux rapports $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$, par le rapport $\frac{5}{3}$. Et il en eſt ainſi des autres.

AVERTISSEMENT.

CXL. *Cette compoſition que nous avons appellée multiplication des rapports, eſt priſe ordinairement pour une addition de ces mêmes rapports. Mais il eſt évident que cette compoſition eſt plûtoſt une multiplication veritable de ces rapports qu'une addition. Car par exemple on ne peut douter que $\frac{2}{1}$ & $\frac{3}{1}$ ne ſoient de veritables rapports. Or la ſomme ou l'addition de ces rapports eſt $\frac{2}{1} + \frac{3}{1} = \frac{5}{1}$, & leur produit ou compoſition, ou multiplication eſt $\frac{6}{1}$ different de $\frac{5}{1}$. Et pareillement $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ ſont de veritables rapports. Or leur ſomme eſt $\frac{5}{6}$, & leur produit $\frac{1}{6}$ different de $\frac{5}{6}$. La compoſition des rapports n'eſt donc pas une addition, mais une multiplication veritable de ces rapports.*

Cette

CXLI. Cette multiplication ou compoſition des rapports n'eſt point autre que la multiplication des fractions, puiſque les fractions & les rapports ne ſont qu'une même choſe énoncée differemment. Ainſi pour trouver un rapport compoſé de pluſieurs autres, on prend le produit des uns par les autres, & ce produit eſt le rapport compoſé que l'on cherche. Par exemple pour trouver le rapport compoſé de $\frac{1}{2}$ par $\frac{5}{3}$, je prends $\frac{5}{6}$ plan de $\frac{1}{2}$ par $\frac{5}{3}$, & $\frac{5}{6}$ eſt le rapport compoſé de $\frac{1}{2}$ & $\frac{5}{3}$. De même pour trouver le rapport compoſé de $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$, & $\frac{2}{9}$, je prends $\frac{8}{105}$ ſolide fait de $\frac{12}{35}$, plan de $\frac{4}{5}$ & $\frac{3}{7}$, par $\frac{2}{9}$; & le ſolide $\frac{8}{105}$ eſt le rapport compoſé de $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$, & $\frac{2}{9}$. Il en eſt ainſi des autres.

DE LA REGLE DE TROIS COMPOSÉE.

CXLII. Cette Regle enſeigne à trouver une grandeur qui ſoit à un rapport compoſé de pluſieurs autres, comme une autre grandeur eſt à un autre rapport qui ſoit auſſi compoſé de pluſieurs. Par exemple le port de 200 livres de marchandiſes apportées de 300 lieuës coûte 4 eſcus, combien le port de 400 livres de marchandiſes apportées de 500 lieuës, doit-il coûter d'écus?

Il eſt évident que dans cette queſtion l'on demande un prix qui ſoit non ſeulement proportionel au poids des marchandiſes qu'on apporte, mais encore à la diſtance des lieuës dont on les apporte.

Dans cette queſtion & dans toute autre ſemblable on propoſe toûjours plus de trois termes connus, mais il n'y en a toutesfois que trois principaux dont tous les autres ſont comme dépendans. Ainſi dans noſtre queſtion, on propoſe les cinq termes connus 200 livres de marchandiſes, 300 lieuës, 4 écus, 400 livres de marchandiſes, & 500 lieuës, deſquels les trois principaux ſont les 200 livres de marchandiſes à qui 300 lieuës ſe rapportent, les 4 eſcus, & les 400 livres de marchandiſes à qui 500 lieuës ſe rapportent. Or ſi les deux termes principaux de la queſtion qui ſont d'un même genre, & auſquels la queſtion ſe rapporte, agiſſent chacun ſur un des termes qui en ſont dépendans, la proportion compoſée eſt renverſée ou reciproque. Mais ſi cela n'eſt point, la proportion eſt droite.

Par exemple, ſi je dis 4 laboureurs cultivent 8 arpens de terre dans 3 jours, dans combien de jours 3 laboureurs en cultiveront-ils 24 arpens?

Les deux termes principaux & de même genre ſont les 4 & les 3 laboureurs. Or parceque les 4 laboureurs agiſſent ſur les 8 arpens qui en ſont un terme dépendant, & les 3 autres ſur les 24 arpens qui en ſont auſſi un terme dépendant, je connois que la queſtion ſe rapporte à la Regle de Trois compoſée & reciproque.

DE LA REGLE DROITE.

SIXIÉME PROBLEME.

CXLIII. Tous les termes d'une proportion droite & compoſée eſtant donnez excepté un, trouver ce terme inconnu.

1°. On écrit le terme principal à qui la queſtion ſe rapporte à la troiſiéme place d'une proportion, & ſous lui tous ceux qui en ſont dépendans, l'autre terme principal & de même genre à la premiere place, & ſous lui tous ceux qui en ſont dépendans, & le terme ſeul & d'un genre different à la ſeconde place.

2°. On écrit ſous chaque place de la proportion le rapport compoſé, ou le produit des termes qui s'y trouvent. Cela réduit tous les termes donnez aux trois premiers d'une proportion droite, dont le quatriéme eſt celui que l'on cherche.

Premier Exemple.

Le port de 200 livres de marchandiſes apportées de 300 lieuës coûte 4 eſcus, combien le port de 400 livres de marchandiſes apportées de 500 lieuës doit-il coûter d'eſcus ?

1°. J'écris les 400 livres de marchandiſes qui ſont le terme principal à qui la queſtion ſe rapporte, à la troiſiéme place d'une proportion, & ſous lui les 500 lieuës qui en ſont le terme dépendant; j'écris les 200 livres de marchandiſes, qui ſont l'autre terme principal de même genre, à la premiere place, & ſous lui les 300 lieuës qui en ſont le terme dépendant; & les 4 eſcus qui ſont le terme ſeul & d'un genre different à la ſeconde place. 2°. J'écris 60000, c'eſt à dire le rapport compoſé ou le produit des 200 livres par les 300 lieuës ſous la premiere place; 4 qui eſt ſeul ſous la ſeconde; & 200000, c'eſt à dire le rapport compoſé ou le produit des 400 livres par les 500 lieuës ſous la troiſiéme place. Cela réduit les cinq termes donnez aux trois premiers d'une proportion droite, dont le quatriéme $13\frac{1}{3}$ marque combien le port des 400 livres doit coûter. Et ainſi ces 400 livres coûteront 13 eſcus plus 20 ſols, eſtant apportées de 500 lieües, ſi l'on ſuppoſe, comme on fait ici, que les 200 livres apportées de 300 lieües chacune coûtent 4 eſcus.

$$\begin{array}{ccccccc} \left\{\begin{array}{l}200 \textit{ livres}\\ 300 \textit{ lieuës}\end{array}\right. & . & 4 \textit{ eſcus} & :: & \left\{\begin{array}{l}400 \textit{ livres}\\ 500 \textit{ lieües}\end{array}\right. & . & ? \\ \hline 60000 & . & 4 \textit{ eſcus} & :: & 200000 & . & 13\frac{1}{3} \textit{ eſcus.} \end{array}$$

Second Exemple.

8 Marchands qui ont chacun 100 pieces de vin à 16 eſcus la piece, gagnent en commun 3200 eſcus, combien 11 Marchands qui ont chacun 128 pieces de vin à 12 eſcus la piece gagneront-ils en commun d'eſcus ?

1°. Connoiſſant comme au premier exemple que la proportion eſt droite, j'écris 11 Marchands, qui ſont le terme principal à qui la queſtion ſe rapporte, à la troiſiéme place d'une proportion, & ſous lui 128 pieces de vin, & encore au deſſous les 12 eſcus de chaque piece; car ces deux termes en ſont comme dépendans; j'écris les 8 Marchands, qui ſont l'autre terme principal & du même genre que les 11 Marchands, à la premiere place, & ſous lui les 100 pieces de vin de chacun de ces Marchands, & encore au deſſous les 16 eſcus de chaque piece, car ces deux termes ſont dépendans des 8 Marchands ; & j'écris enfin les 3200 eſcus qui ſont le terme ſeul & d'un genre different, à la ſeconde place. 2°. J'écris ſous la premiere 12800, c'eſt à dire le rapport compoſé ou le ſolide des trois termes 8, 100 & 16, qui s'y trouvent ; j'écris les 3200 eſcus ſous la ſeconde, & ſous la troiſiéme j'écris 16916 qui eſt le ſolide des trois termes 11, 128 & 12 qui s'y trouvent. Cela réduit tous les termes donnez aux trois premiers d'une proportion droite, & 4204 qui eſt le dernier terme de cette proportion, ſera le nombre des eſcus que doivent gagner les 11 Marchands.

$$\left\{\begin{array}{l}8 \textit{ Marchands}\\ 100 \textit{ pieces}\\ 16 \textit{ eſcus}\end{array}\right. .\ 3200 \textit{ eſcus} :: \left\{\begin{array}{l}11 \textit{ Marchands}\\ 128 \textit{ pieces}\\ 12 \textit{ eſcus}\end{array}\right. .$$

$$\overline{12800 \quad .\ 3200 \textit{ eſcus} :: 16916 \quad .\ 4204 \textit{ eſcus}.}$$

Troiſiéme Exemple.

L'on trouvera pareillement, ſi 8 Marchands avec 1000 eſcus gagnent en 2 mois 700 eſcus, que 10 Marchands avec 4000 eſcus en gagneront dans 4 mois 7000. Il en eſt ainſi des autres.

$$\left\{\begin{array}{l}8 \textit{ Marchands}\\ 1000 \textit{ eſcus}\\ 2 \textit{ mois}\end{array}\right. .\ 700 \textit{ eſcus} :: \left\{\begin{array}{l}10 \textit{ Marchands}\\ 4000 \textit{ eſcus}\\ 4 \textit{ mois}\end{array}\right.$$

$$\overline{16000 \quad .\ 700 \textit{ eſcus} :: 160000 \quad .\ 7000}$$

Démonſtration du Problcme.

Soit priſe la queſtion precedente. Il eſt viſible que c'eſt une même choſe de dire 8 Marchands avec 1000, ou bien 1 Marchand avec 8000 eſcus ; Et pareillement c'eſt la même choſe de dire 10 Marchands avec 4000 eſcus, ou bien 1 Marchand avec 40000 eſcus. De ſorte que ſans changer la queſtion elle eſt réduite aux 5 termes 8000 eſcus, 2 mois, 700 eſcus, 40000 eſcus & 4 mois. Et de nouveau il eſt égal de dire 1 Marchand avec 8000 eſcus en 2 mois, ou bien 1 Marchand avec 16000 eſcus dans 1 mois ; Et pareillement 1 Marchand avec 40000 eſcus dans 4 mois, ou bien 1 Marchand avec 16000 eſcus dans 1 mois. De ſorte encore que la queſtion demeurant toûjours la même, tous ſes termes connus ſont neanmoins réduits aux trois d'une proportion droite, & ainſi le quatriéme terme de cette proportion doit donner le terme inconnu que l'on cherche.

$$\left\{\begin{array}{l}\quad 8 \textit{ Marchands}\\ \textit{avec } 1000 \textit{ eſcus}\\ \quad \textit{en } 2 \textit{ mois gagnent}\end{array}\right. .\ 700 \textit{ eſcus} :: \left\{\begin{array}{l}\quad 10 \textit{ Marchands}\\ \textit{avec } 4000 \textit{ eſcus}\\ \quad \textit{en } 4 \textit{ mois gagnent ?}\end{array}\right. .$$

$$\left\{\begin{array}{l}\quad 1 \textit{ Marchand}\\ \textit{avec } 8000 \textit{ eſcus}\\ \quad \textit{en } 2 \textit{ mois gagne}\end{array}\right. .\ 700 \textit{ eſcus} :: \left\{\begin{array}{l}\quad 1 \textit{ Marchand}\\ \textit{avec } 40000 \textit{ eſcus}\\ \quad \textit{en } 4 \textit{ mois gagne ?}\end{array}\right. .$$

$$\left\{\begin{array}{l}\quad 1 \textit{ Marchand}\\ \textit{avec } 16000 \textit{ eſcus}\\ \quad \textit{en } 1 \textit{ mois gagne}\end{array}\right. .\ 700 \textit{ eſcus} :: \left\{\begin{array}{l}\quad 1 \textit{ Marchand}\\ \textit{avec } 160000 \textit{ eſcus}\\ \quad \textit{en } 1 \textit{ mois gagne}\end{array}\right. .\ 7000 \textit{ eſcus}.$$

SEPTIE'ME PROBLEME.

CXLIV. Tous les termes d'une proportion compoſée & reciproque eſtant donnez, excepté un, trouver ce terme inconnu.

1°. On écrit le terme principal à qui la queſtion ſe rapporte, à la premiere place, & ſous lui tous ceux qui ſont dépendans de l'autre terme principal & du même genre; & l'on écrit reciproquement cet autre terme à la troiſiéme place, & ſous lui tous ceux qui dépendent du terme principal à qui la queſtion ſe rapporte; & le terme ſeul & d'un genre different à la ſeconde.

2°. On écrit ſous chaque place de la proportion le rapport compoſé ou le produit des termes qui s'y trouvent. Cela réduit tous les termes donnez aux trois premiers d'une proportion droite, dont le quatriéme eſt celui que l'on cherche.

Premier Exemple.

4 Laboureurs cultivent 8 arpens de terre dans 3 jours; dans combien de jours 3 Laboureurs en cultiveront-ils 24 arpens?

1°. Connoiſſant par 142 S. que la proportion compoſée eſt reciproque, j'écris les 3 Laboureurs, qui ſont le terme principal à qui la queſtion ſe rapporte, à la premiere place d'une proportion droite, & ſous eux les 8 arpens qui ſont un terme dépendant des 4 autres Laboureurs. Et reciproquement j'écris les 4 Laboureurs qui ſont l'autre terme principal & de même genre à la troiſiéme place, & au deſſous les 24 arpens que cultivent les 3 Laboureurs; & les 3 jours qui ſont le terme ſeul & d'un genre different à la ſeconde place. 2°. J'écris 24, c'eſt à dire le rapport compoſé ou le produit des 3 Laboureurs par les 8 arpens que les 4 autres cultivent, ſous la premiere place; les 3 jours ſous la ſeconde, & 96 ou le produit des 4 Laboureurs par les 24 arpens que les 3 autres cultivent, ſous la troiſiéme place. Cela réduit les cinq termes donnez aux trois premiers d'une proportion droite, dont le quatriéme terme 12 marque le nombre des jours pendant leſquels 3 Laboureurs cultiveront 24 arpens de terre, ſi l'on ſuppoſe, comme on le fait dans la queſtion, que 4 Laboureurs en cultivent 8 arpens dans 3 jours.

$$\begin{array}{llll} \left\{\begin{array}{l}3 \textit{ Laboureurs}\\ 8 \textit{ arpens}\end{array}\right. \quad . & 3 \textit{ jours} :: & \left\{\begin{array}{l}4 \textit{ Laboureurs}\\ 24 \textit{ arpens}\end{array}\right. \quad . & ? \\ \hline 24 \quad . & 3 \textit{ jours} :: & 96 \quad . & 12 \textit{ jours.}\end{array}$$

Second Exemple.

Si 100 hommes boivent 12 pieces de vin de 500 pintes chaque piece dans un mois qui fait 30 jours; dans combien de jours 1240 hommes boiront-ils 64 pieces de vin de 600 pintes chaque piece?

1°. Connoiſſant comme au premier exemple que la proportion doit eſtre renverſée, j'écris les 1240 hommes à qui la queſtion ſe rapporte, à la premiere place d'une proportion droite, & au deſſous les 12 pieces que les autres 100 hommes boivent, & encore au deſſous les 500 pintes de chacune de ces pieces ; Et reciproquement , j'écris les 100 hommes à la troiſiéme place, & au deſſous les 64 pieces de vin que les 1240 boivent, & encore au deſſous les 600 pintes de chacune de ces pieces. 2°. J'écris 7440000 ou le ſolide des trois termes 1240, 12, & 500 ſous la premiere place ; le mois ou les 30 jours qui lui ſont égaux ſous la ſeconde ; & 3840000 ou le ſolide des trois autres termes 100, 64, & 600 ſous la troiſiéme. Cela réduit tous les termes donnez aux trois premiers d'une proportion droite, dont le quatriéme $15\frac{15}{31}$ marque le nombre des jours pendant leſquels les 1240 hommes boiront leurs 64 pieces de 600 pintes chacune.

$$\begin{Bmatrix}1240\ \textit{hommes}\\ 12\ \textit{pieces}\\ 500\ \textit{pintes}\end{Bmatrix} .\ 30\ \textit{jours} :: \begin{Bmatrix}100\ \textit{hommes}\\ 64\ \textit{pieces}\\ 600\ \textit{pintes}\end{Bmatrix} .\ ?$$

$$7440000\ .\ 30\ \textit{jours} :: 3840000\ .\ 15\tfrac{15}{31}\ \textit{jours}.$$

Démonſtration du Probleme.

Soit priſe la premiere queſtion des Laboureurs & des arpens. Il eſt viſible que c'eſt une même choſe de dire, 4 Laboureurs cultivent 8 arpens dans 3 jours, ou bien 1 Laboureur en cultive 8 arpens dans 12 jours ; Et pareillement 3 Laboureurs cultivent 24 arpens dans un certain nombre de jours, ou bien 1 Laboureur en cultive 24 arpens dans 3 fois ce nombre de jours qui eſt inconnu. De ſorte que la queſtion demeurant la même eſt neanmoins réduite à ces trois termes 8 arpens, 12 jours, & 24 arpens. Or le ſecond de ces termes 12 jours eſt le rapport compoſé des 4 Laboureurs & des 3 jours, le dernier terme 36 ſera donc auſſi le rapport compoſé des 3 autres Laboureurs par le nombre inconnu des jours. Si donc l'on diviſe 36 par le nombre des 3 Laboureurs qui ſont l'une de ſes racines ou des rapports qui le compoſent, l'expoſant 12 en ſera l'autre racine ou rapport compoſant, & le nombre cherché des jours pendant leſquels les 3 ouvriers peuvent cultiver les 24 arpens.

On bien encore, ſi 4 Laboureurs cultivent 8 arpens en 3 jours, 1 Laboureur n'en cultivera que 2 pendant le même temps. Et ſi 3 Laboureurs en cultivent 24 arpens pendant un certain nombre de jours, 1 Laboureur n'en cultivera que 8 pendant ce même temps. Or ſi un laboureur cultive 2 arpens pendant 3 jours, dans combien de jours en cultivera-t'il 8 arpens ? Le dernier terme 12 en marque le nombre.

4 *Laboureurs.* 8 *arpens* :: 1 *Laboureur.* 2 *arpens.*
3 *Laboureurs.* 24 *arpens* :: 1 *Laboureur.* 8 *arpens.*
2 *arpens.* 3 *jours* :: 8 *arpens.* 12 *jours.*

DE LA REGLE
DE COMPAGNIE COMPOSÉE.

HUITIÉME PROBLEME

Cette Regle enſeigne à diviſer toute grandeur donnée en pluſieurs parties CXLV.

proportionelles à pluſieurs rapports compoſez & qui ſont connus.

Par exemple, 4 Marchands ont fait une bourſe où le premier a mis 20 eſcus pour 4 mois, le ſecond 40 pour 5 mois, le troiſiéme 60 pour 6 mois, & le quatriéme 80 pour 7 mois, avec cela ils ont gagné 240 eſcus. On demande quel eſt le gain de chaque Marchand à proportion de l'argent qu'il a fourni, & du temps pendant lequel il l'a fourni ?

On voit facilement que pour reſoudre cette queſtion, il faut prendre chacun des rapports compoſez de l'argent qu'a fourni chaque Marchand, & du temps pendant lequel il l'a fourni, c'eſt à dire le produit de chaque argent par le temps qu'il a demeuré dans la bourſe. On prend donc les 4 produits 80, 200, 360, 560, dont la ſomme eſt 1200. L'on écrit cette ſomme à la premiere place d'une proportion, le gain total 240 à la ſeconde, & chacun des rapports compoſez à la troiſiéme. Les quatriémes termes de ces proportions donnent 14 eſcus pour le gain du premier Marchand, 48 pour le gain du ſecond, 72 pour celui du troiſiéme, & 112 pour le gain du quatriéme.

$$\left\{\begin{array}{l}1^{er}\ 20\ \textit{eſcus}\\ \textit{pour } 4 \textit{ mois.}\end{array}\right. \left\{\begin{array}{l}2^{e}\ 40\ \textit{eſcus}\\ \textit{pour } 5 \textit{ mois.}\end{array}\right. \left\{\begin{array}{l}3^{e}\ 60\ \textit{eſcus}\\ \textit{pour } 6 \textit{ mois.}\end{array}\right. \left\{\begin{array}{l}4^{e}\ 80\ \textit{eſcus}\\ \textit{pour } 7 \textit{ mois.}\end{array}\right.$$

$$\textit{Produits} \quad 80 + 200 + 360 + 560 = 1200.$$

$$\begin{array}{cccc} \textit{ſomme des produits.} & \textit{gain total} :: & \textit{produits} \ . & \textit{gains particuliers.} \\ 1200 \ . & 240 :: & \left\{\begin{array}{l} 80 \\ 200 \\ 360 \\ 560 \end{array}\right. \begin{array}{c} . \\ . \\ . \\ . \end{array} & \begin{array}{l} 14 \textit{ gain du } 1^{er} \\ 48 \textit{ gain du } 2^{e} \\ 72 \textit{ gain du } 3^{e} \\ 112 \textit{ gain du } 4^{e} \end{array} \end{array}$$

Démonſtration du Probleme.

Je ſuppoſe que le premier Marchand fournit a pendant b, le ſecond c pendant d, & le troiſiéme e pendant f, & j'appelle tout leur gain g. Pour trouver le gain de chacun, 1°. je prends ab, cd, ef, & j'écris leur ſomme $ab+cd+ef$ au premier terme d'une proportion, le gain g au ſecond, & chaque rapport compoſé ab, cd, ef, au troiſiéme, & tous les derniers termes de cette proportion me donnent les gains particuliers que je cherche. Car leur ſomme eſt a, & le rapport des uns aux autres eſt égal à celui des trois produits ab, cd, ef, qui ſont les rapports compoſez de chaque argent par le temps qu'il a demeuré dans la bourſe ; car ces derniers termes ne ſont que ces produits mêmes multipliez chacun également par g, & diviſez par $ab+cd+ef$. Ce qui ne change en rien leur rapport.

$$ab+cd+ef. \quad g :: \left\{\begin{array}{l} ab. \\ cd. \\ ef. \end{array}\right. \begin{array}{c} \frac{abg}{ab+cd+ef} \\ \frac{cdg}{ab+cd+ef} \\ \frac{efg}{ab+cd+ef} \end{array}$$

On trouvera dans le même ordre que les 4 parties de tout gain g proportionelles aux 4 produits ou rapports compoſez *ab, cd, ef, hl,* ſeront $\frac{abg}{ab+cd+ef+hl}$ $\frac{cdg}{ab+cd+ef+hl}$ $\frac{efg}{ab+cd+ef+hl}$ & $\frac{ghl}{ab+cd+ef+hl}$. Et ainſi de ſuite, comme on a vû déja pour la regle de compagnie ſimple.

DES NOMBRES
MULTIPLES.

Avant que je quitte le traitté des proportions geometriques, pour entrer dans les progreſſions, il faut que je diſe ici quelque choſe des nombres multiples, qui a quelque rapport aux proportions dont la connoiſſance ſert beaucoup en pluſieurs rencontres. Ce que j'en dois dire ſuppoſe la connoiſſance de certains nombres appellez ordinairement premiers, ou abſolument ou par rapport les uns aux autres.

CXLVI. L'on appelle abſolument *nombres premiers* ceux qui n'ont point d'autre diviſeur que l'unité ou qu'eux-mêmes. Tels ſont par exemple 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, & les autres.

CXLVII. Mais l'on dit que deux nombres ſont *premiers entr'eux,* lorſqu'ils n'ont point d'autre diviſeur commun que l'unité, quoique chacun d'eux puiſſe avoir neanmoins pluſieurs diviſeurs. Par exemple 8, 9, & 35, ſont premiers entr'eux, parcequ'aucun diviſeur de quelqu'un des trois ne peut diviſer ſans reſte ni l'un ni l'autre des deux qui reſtent, 2 & 4 diviſeurs de 8 ne peuvent diviſer 9, ni 35 ; de même 3 diviſeur de 9 ne peut diviſer 8, ni 35 ; & pareillement 5 & 7 diviſeurs de 35 ne peuvent diviſer 8 & 9. Ainſi ces nombres ſont appellez premiers entr'eux.

CXLVIII. D'où il s'enſuit que les deux termes de l'expoſant de tout rapport ou fraction ſont premiers entr'eux. Car ces deux termes ſont toûjours tels qu'ils n'ont aucun diviſeur commun, puiſque s'ils en avoient, en diviſant également chaque terme par ce diviſeur, l'expoſant ſeroit réduit à de plus ſimples termes. Or cela eſt contraire à la définition d'un expoſant par *II. 6.* Donc &c.

NEUVIE'ME PROBLEME.

CXLIX. Cela eſtant ainſi, lorſqu'on voudra trouver un nombre entier le plus petit, qui puiſſe eſtre exactement diviſé par deux nombres donnez.

On conſiderera ces deux nombres comme les deux termes d'une fraction, on réduira cette fraction à ſon expoſant, & alors le produit du premier terme de la fraction par le ſecond terme de ſon expoſant, ou bien ce qui ſera la même choſe, le produit du ſecond terme de la fraction par le premier terme de l'expoſant, ſera le plus petit nombre qu'on cherche.

Premier Exemple.

Pour trouver le plus petit nombre qui puiſſe eſtre diviſé ſans reſte par 8 & par 9. Ecrivant $\frac{8}{9}$, je voy que cette fraction eſt ſon expoſant à ſoy-même, c'eſt pourquoy je multiplie 8 conſideré comme premier terme de la fraction par 9 conſideré comme le ſecond terme de ſon expoſant, ou bien 9 conſideré comme le ſecond terme de la fraction par 8 conſideré comme le premier de ſon expoſant, & le produit 72 eſt le plus petit nombre qui puiſſe eſtre exactement diviſé par 8 & par 9.

$\frac{8}{9}=\frac{8}{9}$. ou 8. 9 : : 8. 9. *Et 72 eſt le nombre cherché.*

Second Exemple.

Pour trouver le plus petit nombre qui puiſſe eſtre diviſé ſans reſte par 9 & par 15, j'écris $\frac{9}{15}$ ou $\frac{15}{9}$, il n'importe lequel, pour me déterminer j'écris $\frac{9}{15}$, & je réduis cette fraction à ſon expoſant $\frac{3}{5}$. Je multiplie enſuite le premier terme de la fraction par le ſecond de ſon expoſant, c'eſt à dire 9 par 5, & le produit 45 eſt le plus petit nombre qui peut eſtre exactement diviſé par 9 & par 15, ou bien auſſi, ce qui revient au même, je multiplie le ſecond terme de la fraction par le premier de ſon expoſant, c'eſt à dire 15 par 3, & le produit eſt 45 que nous avions déja trouvé, dont la raiſon eſt que $\frac{9}{15}$ & $\frac{3}{5}$ ſont en proportion, puiſque la fraction eſt égale à ſon expoſant, & qu'ainſi 9. 15 : : 3. 5. Donc le produit des extrêmes 9 & 5 eſt égal au produit des moyens 15 & 3.

$\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$. *ou* 9. 15 : : 3. 5. *Et 45 eſt le nombre cherché.*

Démonſtration.

Soient a & b deux nombres premiers entr'eux, leur produit peut eſtre diviſé ſans reſte par chacun d'eux ; car ſi ab eſt diviſé par a, l'expoſant ſera le nombre entier b, & s'il eſt diviſé par b, l'expoſant ſera le nombre entier a. Et ce produit ab eſt le plus petit nombre que les deux a & b puiſſent chacun diviſer ſans reſte. Mais ſi l'on ſuppoſe qu'il y ait un autre nombre plus petit que ab, que les deux a & b puiſſent diviſer ſans reſte; ſoit ce nombre appellé n, ſoit auſſi le nombre entier e l'expoſant de n à a, & le nombre entier f l'expoſant de n à b. Donc $ae=n$, & $bf=n$, *par I. 123.* Donc $ae=bf$, & ainſi $a. b : : e. f.$ *par 97. S.* Or a & b eſtant premiers entr'eux, ſont les termes les plus ſimples qui ſont l'expoſant du rapport de e à f. Donc le premier antecedent a eſt plus petit que le ſecond antecedent e, & le premier conſequent b eſt pareillement plus petit que le ſecond conſequent f. Or a par b fait ab, & a par e fait ae. Et il eſt clair que $b. e : : ab. ae.$ *par II. 24. & 3.* Si donc, comme on le vient de voir, le terme b eſt plus petit que e, le terme ab ſera neceſſairement plus petit que ae. Or $ae=n$. Donc ab ſera plus petit que n. L'on a donc ſuppoſé une contradiction ; Et ainſi ab ſera le plus petit nombre que a & b puiſſent chacun diviſer ſans reſte.

Mais ſi a & b n'eſtoient pas premiers entr'eux, ſoit leur rapport $\frac{a}{b}$ réduit à ſon expoſant $\frac{c}{d}$. Donc $a. b : : c. d.$ Et $ad=bc$ *par 95. S.* le produit ad peut eſtre diviſé par a, car l'expoſant eſt b, il peut l'eſtre auſſi par b, car bc qui luy eſt égal eſtant diviſé par b, donne pour expoſant le nombre entier c. Or je dis que ab, ou bc qui luy eſt égal, eſt le plus petit nombre que a & b puiſſent exactement diviſer. Car ſi l'on dit que a & b peuvent

peuvent auſſi diviſer ſans reſte le nombre *n* qui eſt plus petit que *ad*, je prouveray par un raiſonnement ſemblable au precedent, que *ad* eſt plus petit que *n*, c'eſt à dire qu'on ſuppoſe une abſurdité.

DIXIE'ME PROBLEME.

Trouver un nombre le plus petit qui puiſſe eſtre exactement diviſé par trois nombres donnez. CL.

L'on cherche par le probleme precedent le plus petit que les deux premiers peuvent exactement diviſer, ſi le troiſiéme le diviſe auſſi, il eſt évident qu'il eſt celuy qu'on cherche.

Mais ſi le troiſiéme ne peut le diviſer ſans reſte, l'on cherchera en même ſorte le plus petit que ce nombre trouvé & le troiſiéme de ceux qu'on donne peuvent exactement diviſer chacun. Et le nombre qu'on trouve eſt le plus petit qui puiſſe eſtre exactement diviſé par chacun des trois.

Car ſoient les trois nombres donnez a, b, & c. Soit d le plus petit que a & b puiſſent exactement diviſer, & p le plus petit que d & c puiſſent exactement diviſer. Soit encore e l'expoſant de d à a, & f l'expoſant de d à b. Donc $ae=d=bf$. *par I.* 123. Soit pareillement g l'expoſant de p à c, & h l'expoſant de p à d. Donc $cg=p=dh$. *par I.* 123. Or $ae=d=bf$. Donc p ou $dh=aeh=bfh$. Le nombre p ſera donc diviſé ſans reſte par chacun des trois nombres donnez a, b, & c. Car p ou aeh qui luy eſt égal, eſtant diviſé par a, donne pour expoſant le nombre entier eh; de même p, ou bfh qui luy eſt égal, eſtant diviſé par b, donne pour expoſant le nombre entier fh; & pareillement p ou cg qui luy eſt égal, eſtant diviſé par c, donne pour expoſant le nombre entier g. Or que p ſoit auſſi le plus petit nombre que a, b, & c puiſſent chacun diviſer ſans reſte, cela ſe prouve par un raiſonnement pareil à celuy de la démonſtration du probleme precedent, ou bien encore en cette ſorte. Le nombre cherché devant eſtre diviſé par a & par b, doit neceſſairement l'eſtre par le plus petit nombre d, dont a & b ſont diviſeurs; & il doit l'eſtre encore par c, ſelon la ſuppoſition. Or le nombre p eſt le plus petit que d & c puiſſent exactement diviſer. Il eſt donc celuy qu'on demande.

$$a=8,\ b=9,\ c=15,\ d=72.\ \text{Or}\ \tfrac{72}{15}=\tfrac{24}{5}\ \text{ou}\ 72.\ 15::24.\ 5.$$

$$\text{Donc}\ p=360.\quad e=9.\quad f=8.\quad g=24.\quad h=5.$$

PREMIER COROLLAIRE.

L'on poura trouver dans le même ordre le plus petit nombre que plusieurs autres qu'on aura donné pouront chacun diviſer ſans reſte. CLI.

SECOND COROLLAIRE.

Et quand l'on aura ce plus petit nombre, on en poura trouver ſucceſſivement & par ordre d'autres à l'infini qui peuvent eſtre auſſi diviſez ſans reſte par chacun des nombres donnez. Car pour cela l'on n'aura qu'à multiplier ſucceſſivement & par ordre le plus petit nombre qu'on aura trouvé par chacun des nombres 2, 3, 4, 5, 6, &c.

ONZIE'ME PROBLEME.

CLII. Si donc il faut trouver le plus petit nombre dont telles & tant de ſes parties qu'on voudra ſoient des nombres entiers ; le plus petit nombre que tous les ſeconds termes des fractions qui marquent les parties propoſées pouront chacun diviſer ſans reſte, ſera celuy qu'on cherche. Ce n'eſt qu'un Corollaire des deux problemes qui precedent, ou plûtoſt ce ne ſont que ces deux mêmes problemes enoncez differemment. Ainſi voulant trouver le plus petit nombre dont $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, & $\frac{1}{15}$, ſoient des nombres entiers, (l'on ne changeroit rien pour la queſtion, ſi au lieu de 1 au premier terme, l'on mettoit quelqu'autre nombre,) on prendra 360 le plus petit nombre que tous les ſeconds termes 8, 9, & 15 peuvent chacun diviſer ſans reſte, & ce nombre 360 ſera le plus petit dont les parties propoſées ſoient des nombres entiers ; Et ſi ce nombre eſt ſucceſſivement multiplié par 2, par 3 &c. les produits 720, 1080, &c. ſeront auſſi de ceux dont les parties propoſées ſont des nombres entiers.

Pareillement pour trouver la plus petite grandeur dont les parties $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, & $\frac{e}{f}$ ſoient des grandeurs entieres, ſi l'on ſuppoſe que *bdf* ſoit la plus petite grandeur que *b, d,* & *f* puiſſent chacune diviſer ſans reſte, elle ſera auſſi la plus petite dont les parties propoſées ſeront des grandeurs entieres.

DES PROGRESSIONS GEOMETRIQUES.

DEFINITIONS.

CLIII. Tout rapport compoſé de deux rapports égaux, s'appelle *un rapport doublé* de chacun de ces rapports. Ainſi le rapport $\frac{2}{8}$ compoſé des deux rapports égaux $\frac{2}{4}$ & $\frac{4}{8}$, s'appelle doublé de $\frac{2}{4}$ ou $\frac{4}{8}$.

CLIV. Tout rapport compoſé de trois rapports égaux, s'appelle *un rapport triplé* de chacun de ces rapports. Ainſi le rapport $\frac{3}{81}$ eſt compoſé de trois rapports égaux $\frac{3}{9}$, $\frac{9}{27}$ & $\frac{27}{81}$, & ce rapport $\frac{3}{81}$ eſt appellé triplé de $\frac{3}{9}$, ou de $\frac{9}{27}$, ou de $\frac{27}{81}$.

CLV. On appellera dans le même ordre tout rapport compoſé de quatre rapports égaux, *un rapport quadruplé* de chacun de ces rapports ; tout rapport compoſé de 5 rapports égaux, *un rapport quintuplé* de chacun de ces rapports. Et ainſi des autres.

CLVI. L'on remarquera que les rapports doubles, triples, quadruples & les autres, different beaucoup des rapports doublez, triplez, quadruplez &c. car dans ceux-là le premier terme eſt double ou triple ou quadruple du ſecond, mais ceux-ci ſont les produits de deux ou de trois ou de quatre rapports égaux.

PREMIER THEOREME.

Les plans ſont entr'eux dans un rapport compoſé de leurs racines. CLVII.

Soient deux plans donnez bc & de. Je dis que leur rapport eſt compoſé des rapports de b à d & de c à e, ou de b à e & de c à d, ou ce qui eſt le même, que $\frac{bc}{de}$ eſt compoſé de $\frac{b}{d}$ & $\frac{c}{e}$, ou de $\frac{b}{e}$ & $\frac{c}{d}$. Tout cela eſt clair, & ce n'eſt même qu'une repetition de la definition des rapports compoſez.

Par la même raiſon les ſolides ou ſurſolides ou les autres produits ont un rapport compoſé de leurs racines. Par exemple le ſolide abc eſt au ſolide def dans un rapport compoſé de $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{e}$ & $\frac{c}{f}$, ou de $\frac{a}{e}$, $\frac{b}{d}$ & $\frac{c}{f}$, ou de $\frac{a}{e}$, $\frac{b}{f}$ & $\frac{c}{e}$.

COROLLAIRE.

Les quarrez ſont entr'eux dans un rapport doublé de leurs racines, les CLVIII. cubes dans un rapport triplé, les quarrez de quarré dans un rapport quadruplé &c. Par exemple, le rapport de bb à cc, ou $\frac{bb}{cc}$, eſt doublé de $\frac{b}{c}$. Le rapport de b^3 à c^3 ou $\frac{b^3}{c^3}$, eſt triplé de $\frac{b}{c}$, celui de b^4 à c^4 ou $\frac{b^4}{c^4}$, eſt quadruplé de $\frac{b}{c}$. Et ainſi des autres.

SECOND THEOREME.

Si trois grandeurs ſont diſpoſées de ſuite, l'expoſant de la premiere à CLIX. la troiſiéme eſt égal au rapport compoſé des deux rapports, l'un de la premiere à la ſeconde, & l'autre de la ſeconde à la troiſiéme.

Soient ces grandeurs a, b, c, je dis que $\frac{a}{c} = \frac{ab}{bc}$. Cela eſt évident, car l'expoſant de chacun eſt $\frac{a}{c}$.

TROISIE'ME THEOREME.

Le rapport d'une grandeur à toute autre eſt compoſé de tous les rap- CLX. ports des grandeurs interpoſées.

Soient les deux grandeurs a & g, entre leſquelles toutes les grandeurs b, c, d, e, f, ſont interpoſées. Je dis que le rapport qui eſt entre a & g eſt compoſé de tous les rapports qui ſont entre a & b, b & c, c & d, d & e, e & f, f & g, ou ce qui eſt le même que $\frac{a}{g}$ eſt compoſé de $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{d}{e}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{f}{g}$, ou ce qui eſt encore le même que $\frac{a}{g} = \frac{abcdef}{bcdefg}$. Cela eſt évident, car l'expoſant de chacun eſt $\frac{a}{g}$.

COROLLAIRE.

En toute progreſſion, ſi deux termes ſont conſecutifs, leur rapport eſt CLXI. ſimple; s'ils ont un terme interpoſé, leur rapport eſt doublé; s'ils en ont deux interpoſez, leur rapport eſt triplé; s'ils en ont trois, quadruplé; s'ils en ont quatre, quintuplé; & ainſi à l'infini. Car, 1°. ce qui fait qu'une progreſſion eſt geometrique, c'eſt que le même rapport du premier au ſecond terme, regne dans toute la progreſſion de chaque terme à celui qui le ſuit.

2°. Par le Theoreme precedent le rapport d'une grandeur à toute autre eſt composé de tous les rapports des grandeurs interpoſées. Or nous ſuppoſons qu'entre les deux termes de la progreſſion deſquels on examine le rapport il y ait un, ou deux, ou trois, ou pluſieurs autres termes interpoſez, & le rapport de chacun de ces termes à celui qui le ſuit eſt le même ; le rapport des deux termes comparez eſt donc composé de deux, ou de trois, ou de pluſieurs autres rapports égaux, ou ce qui eſt le même ſelon les definitions premiere & ſeconde, ce rapport eſt doublé, ou triplé, ou quadruplé, doublé s'il n'y a qu'un terme interpoſé, triplé s'il y en a deux, quadruplé s'il y en a trois. Et ainſi de ſuite à l'infini.

PREMIER PROBLEME.

CLXII. Continuer une progreſſion geometrique, dont le premier & le ſecond terme ſont donnez.

Le ſecond terme doit occuper auſſi la place du troiſiéme. Donc en donnant les deux premiers termes, on donne auſſi trois termes, & par conſequent la regle de Trois donnera le quatriéme qui doit tenir auſſi la place d'un cinquiéme. Et par conſequent la regle de trois donnera le ſixiéme, qui devant tenir auſſi la place d'un ſeptiéme, la regle de trois donnera encore le huitiéme. Et ainſi de ſuite à l'infini.

Soient par exemple *a* & *b* les premier & ſecond terme d'une progreſſion geometrique. Par la definition de cette progreſſion, $∺\, a.\, b.$ eſt le même que $a.\, b :: b.$ le quatriéme terme ſera donc $\frac{bb}{a}$. Et ainſi $a.\, b :: b.\, \frac{bb}{a}$ ou bien en l'exprimant ainſi $∺\, a.\, b.\, \frac{bb}{a}$, où le quatriéme terme $\frac{bb}{a}$ ne fait que le troiſiéme de la progreſſion. Pareillement avec $b.\, \frac{bb}{a} :: \frac{bb}{a}$ la regle de Trois donnera $\frac{b3}{aa}$ qui ſera le terme ſuivant de la progreſſion ; Et ſe ſervant dans le même ordre des termes découverts, on trouvera que la progreſſion eſt $a.\, b :: b.\, \frac{bb}{a} :: \frac{bb}{a}.\, \frac{b3}{aa} :: \frac{b3}{aa}.\, \frac{b4}{a3} :: \frac{b4}{a3}.\, \frac{b5}{a4} :: \frac{b5}{a4}.\, \frac{b6}{a5}$ &c. ou bien en l'exprimant ainſi $\frac{a}{b} = \frac{ab}{bb} = \frac{abb}{b3} = \frac{ab3}{b4} = \frac{b4}{b5} = \frac{ab5}{b6}$ &c. ou bien encore en l'exprimant ainſi $∺\, a.\, b.\, \frac{bb}{a}.\, \frac{b3}{aa}.\, \frac{b4}{a3}.\, \frac{b5}{a4}.\, \frac{b6}{a5}$ &c.

Toutes ces trois expreſſions differentes ne ſignifient qu'une même choſe ſelon nos definitions de la proportion & progreſſion geometrique, mais la derniere eſt la plus courte, & la plus ordinaire.

Application du Probleme pour la Regle d'intereſt.

Les biens d'un Pupille ſe montant à 8000 livres, s'il n'en a rien dépenſé pendant 6 années, & que ce capital lui doive profiter au denier 20. L'on demande combien ſon Tuteur lui doit d'arrerages à la fin de la ſixiéme année ?

Je diviſe 8000 par 20, & l'expoſant eſt 400, lequel eſtant diviſé pareillement par 20, l'expoſant eſt 20. C'eſt pourquoi je prends les ſix premiers termes de la progreſſion geometrique de 400 à 20. Ces termes ſont ∺ 400. 20. 1. $\frac{1}{20}$. $\frac{1}{400}$. $\frac{1}{8000}$. Enſuite je multiplie le premier terme par 6 nombre de toutes les années, plus le ſecond terme 20 par 5, nombre de toutes les années moins 1, plus le troiſiéme 1 par $4=6-2$, plus le quatriéme $\frac{1}{20}$ par $3=6-3$, plus le cinquiéme $\frac{1}{400}$ par $2=6-4$, plus enfin le ſixiéme $\frac{1}{8000}$ par $1=6-5$; & j'ajoûte en une ſomme les ſix produits que j'ai trouvé Cette ſomme qui monte à 2504 livres 3 ſols & un peu plus d'un denier, eſt auſſi celle de tous les arrerages que le Tuteur doit à ſon Pupille à la fin de la ſixiéme année, outre le capital des 8000 livres. Toutes ſortes d'arrerages échûs pendant pluſieurs années, pouront ſe déterminer en même ſorte.

8000. *ſomme capitale.*
$400.$ *les arrerages échûs pour la* 1^{ere} *année.*
$400+20.$ *pour la* 2^e.
$400+20+1.$ *pour la* 3^e.
$400+20+1+\frac{1}{20}.$ *pour la* 4^e.
$400+20+1+\frac{1}{20}+\frac{1}{400}.$ *pour la* 5^e.
$400+20+1+\frac{1}{20}+\frac{1}{400}+\frac{1}{8000}.$ *pour la* 6^e.

$2400+100+4+\frac{3}{20}+\frac{2}{400}+\frac{1}{8000}=2504$ *livres* 3 *ſols* & $\frac{41}{400}$ *d'un ſol.*

QUATRIÉME THEOREME.

CLXIII. Chaque terme de la progreſſion eſt moyen proportionel entre deux autres qui en ſont également éloignez. Ainſi dans noſtre progreſſion ∺ a. b. $\frac{bb}{a}$. $\frac{b3}{aa}$. $\frac{b4}{a3}$. $\frac{b5}{a4}$, les deux termes b & $\frac{b5}{a4}$ ſont chacun également éloignez de $\frac{b3}{aa}$, & $\frac{b3}{aa}$ eſt moyen proportionel entre b & $\frac{b5}{a4}$, ∺ b. $\frac{b3}{aa}$. $\frac{b5}{a4}$, car le rapport du terme b au terme moyen $\frac{b3}{aa}$ eſt $\frac{aab}{b3}$, qui eſt auſſi le rapport de $\frac{b3}{aa}$ au terme $\frac{b5}{a4}$. Ou bien encore b. $\frac{b3}{a4}$ :: $\frac{b3}{aa}$. $\frac{b5}{a4}$; car le quarré du moyen $\frac{b3}{aa}$ eſt auſſi le produit des extrêmes b & $\frac{b5}{a4}$. Il en eſt ainſi des autres.

CINQUIÉME THEOREME.

CLXIV. Le produit de deux termes de la progreſſion tels qu'on voudra eſt égal au produit de deux autres pris l'un vers la droite, & l'autre vers la gauche de ces termes, chacun dans un éloignement égal.

Noſtre progreſſion eſt ∺ a. b. $\frac{bb}{a}$. $\frac{b3}{aa}$. $\frac{b4}{a3}$. $\frac{b5}{a4}$. $\frac{b6}{a5}$. $\frac{b7}{a6}$. Soient pris deux de ſes termes à diſcretion, comme $\frac{bb}{a}$ & $\frac{b4}{a3}$, & deux autres a & $\frac{b6}{a5}$ pris l'un vers la droite & l'autre vers la gauche des deux termes $\frac{bb}{a}$ & $\frac{b4}{a3}$, & chacun dans un éloignement égal. Le produit de $\frac{bb}{a}$ par $\frac{b4}{a3}$ eſt $\frac{b6}{a4}$, qui eſt auſſi celui des termes a & $\frac{b^6}{a^5}$, ou bien encore des deux autres b & $\frac{b^5}{a^4}$ qui ſont auſſi chacun dans un éloignement égal.

COROLLAIRE.

CLXV. Le produit du premier par le dernier terme, ou du ſecond par le penultiéme, ou du troiſiéme par l'antepenultiéme, ou du quatriéme par le præantepenultiéme, ſi ce mot ſe peut dire, ou tout autre produit de deux termes pris chacun dans un éloignement égal l'un du premier, & l'autre du dernier terme, ſont tous égaux entr'eux.

SIXIE'ME THEOREME.

CLXVI. Les quarrez, ou les cubes, ou les autres puiſſances des termes d'une progreſſion, ſont auſſi en progreſſion.

Par exemple les termes de noſtre progreſſion ſont $a. b. \frac{bb}{a}. \frac{b^3}{aa}. \frac{b^4}{a^3}. \frac{b^5}{a^4}.$ &c. & leurs quarrez $aa. bb. \frac{b^4}{aa}. \frac{b^6}{a^4}. \frac{b^8}{a^6}. \frac{b^{10}}{a^8}$ &c. qui ſont auſſi en progreſſion. Car l'expoſant de chaque terme à celui qui le ſuit eſt $\frac{aa}{bb}$.

Pareillement les cubes des termes donnez ſont $a^3. b^3. \frac{b^6}{a^3}. \frac{b^9}{a^6}. \frac{b^{12}}{a^9}. \frac{b}{a^{12}}$ &c. qui ſont en progreſſion. Car l'expoſant de chaque terme à celui qui le ſuit, eſt $\frac{a^3}{b^3}$. Il en eſt ainſi des autres puiſſances.

CLXVII. On peut eſtre encore ſenſiblement convaincu par le moyen de noſtre progreſſion que ſi deux termes ſont conſecutifs, leur rapport eſt ſimple; s'ils ont un terme interpoſé, que leur rapport eſt doublé; s'ils en ont trois interpoſez, que leur rapport eſt triplé, &c. Car ſoit noſtre progreſſion geometrique $\div\!\!\div\; a. b. \frac{bb}{a}. \frac{b^3}{aa}. \frac{b^4}{a^3}. \frac{b^5}{a^4}. \frac{b^6}{a^5}. \frac{b^7}{a^6}$ &c. Le premier terme eſt a, & le ſecond eſt b, & leur rapport eſt $\frac{a}{b}$ qui eſt ſimple. De même le premier terme eſt a, & le troiſiéme $\frac{bb}{a}$, & leur rapport, c'eſt à dire a diviſé par $\frac{bb}{a}$ eſt $\frac{aa}{bb}$, qui eſt doublé de $\frac{a}{b}$. De même le rapport du premier au quatriéme eſt $\frac{a^3}{b^3}$ qui eſt triplé de $\frac{a}{b}$. Et ainſi de ſuite à l'infini.

COROLLAIRE.

CLXVIII. On peut conclure par de ſemblables raiſonnemens que chacun de ces rapports doublez, ou triplez, ou quadruplez, a pour expoſant le quarré ou le cube, ou le quarré du quarré de l'expoſant de chacun des rapports dont il eſt doublé, ou triplé, ou quadruplé. Ou, ce qui eſt le même, qu'en toute progreſſion le premier terme eſt au troiſiéme comme le quarré du premier eſt au quarré du ſecond. Que le premier eſt au quatriéme comme le cube du premier eſt au cube ſecond. Que le premier eſt au cinquiéme comme le quarré du quarré du premier eſt au quarré du quarré du ſecond. Et ainſi de ſuite à l'infini. Tout cela n'eſt preſque que le Theoreme precedent differemment énoncé.

SEPTIE'ME THEOREME.

En toute progreſſion dont le premier terme a eſt l'unité, & le ſecond b un nombre commenſurable entier ou rompu, le troiſiéme terme ſera le quarré de ce nombre, le quatriéme ſon cube, le cinquiéme ſon quarré de quarré, le ſixiéme ſa 5^e puiſſance; & ainſi à l'infini. CLXIX.

Cela eſt évident, car dans noſtre progreſſion $\div\!\div\ a.\ b.\ \frac{bb}{a}.\ \frac{b^3}{aa}.\ \frac{b^4}{a_3}$ &c. Si $a = 1.\ \frac{bb}{a}$ ſera le même que bb, $\frac{b^3}{aa}$ le même que b^3, & ainſi la progreſſion ſera la même que $\div\!\div\ a.\ b.\ bb.\ b^3.\ b^4.\ b^5.\ b^6.\ b^7.$

Si par exemple $b = 2$, la progreſſion ſera $\div\!\div$ 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c.

Si $b = \frac{1}{2}$, la progreſſion ſera $\div\!\div\ 1.\ \frac{1}{2}.\ \frac{1}{4}.\ \frac{1}{8}.\ \frac{1}{16}.\ \frac{1}{32}.\ \frac{1}{64}.\ \frac{1}{128}$ &c.

Si $b = 3$, la progreſſion ſera $\div\!\div$ 1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187. &c.

Et ſi $b = \frac{1}{3}$, la progreſſion ſera $\div\!\div\ 1.\ \frac{1}{3}.\ \frac{1}{9}.\ \frac{1}{27}.\ \frac{1}{81}.\ \frac{1}{243}.\ \frac{1}{729}.\ \frac{1}{2187}.$ &c.

Si $b = 4$, la progreſſion ſera $\div\!\div$ 1. 4. 16. 64. 256. 1024. 4096. 16384. &c.

Et ſi $b = \frac{1}{4}$, la progreſſion ſera $\div\!\div\ 1.\ \frac{1}{4}.\ \frac{1}{16}.\ \frac{1}{64}.\ \frac{1}{256}.\ \frac{}{1024}.\ \frac{1}{4096}.\ \frac{}{16384}.$ &c.

COROLLAIRE.

Dans chacune de ces progreſſions le troiſiéme, cinquiéme, ſeptiéme, neuviéme, onziéme terme, & ainſi de deux en deux, ſont des quarrez qui ſont auſſi en progreſſion. CLXX.

Le quatriéme, ſeptiéme, dixiéme, treiziéme, & ainſi de trois en trois, ſont des cubes qui ſont auſſi en progreſsion.

Le cinquiéme, neuviéme, treiziéme, dix-ſeptiéme, & ainſi de quatre en quatre, ſont des quarrez de quarré qui ſont auſsi en progreſsion. Et ainſi de ſuite pour les autres puiſſances qui ſeront auſsi en progreſsion.

DES PROGRESSIONS

MULTIPLE ET SOÛMULTIPLE.

Ces progreſsions geometriques s'appellent *multiples* ſi le ſecond terme eſt plus grand que le premier, & *ſoûmultiples* s'il eſt plus petit. Les multiples peuvent ſe continuer à l'infini en augmentant, & les ſoûmultiples en diminuant. CLXXI.

Chacune de ces progreſsions eſtant renverſée, c'eſt à dire ſes premiers termes devenant les derniers, & les derniers devenant les premiers, la progreſsion ſera renduë ſoûmultiple de multiple, & multiple de ſoûmultiple. C'eſt ainſi que les deux progreſsions double & ſoûdouble deviennent l'une ſoûdouble, & l'autre double, & chacune ſe continuë à l'infini.

Progreſsion ſoûdouble $\div\!\div$ 128. 64. 32. 16. 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}.\ \frac{1}{4}.\ \frac{1}{8}.\ \frac{1}{16}.\ \frac{1}{32}.\ \frac{1}{64}.\ \frac{1}{128}$ &c.

Progreſsion double $\div\!\div\ \frac{1}{128}.\ \frac{1}{64}.\ \frac{1}{32}.\ \frac{1}{16}.\ \frac{1}{8}.\ \frac{1}{4}.\ \frac{1}{2}.$ 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64 128. &c.

On voit dans cet exemple comment l'on paſſe de la progreſsion multiple à la ſoûmultiple, & de la ſoûmultiple à la multiple.

CLXXII. Dans toute progreſsion multiple il y a une contradiction égale que l'on puiſſe jamais arriver à ſon premier ni à ſon dernier terme, ſi ce n'eſt aprés des operations infinies qui ne pouront jamais ſe faire. Nous concevons pourtant que le dernier de ces termes auquel on n'arrive jamais, eſt celui qui ne pouvant eſtre augmenté, eſt infiniment grand, & au delà duquel on ne peut paſſer outre. Car s'il y en avoit encore un autre au delà, ce ſeroit lui qui ſeroit le dernier. Ce terme doit donc eſtre infiniment grand, car il eſt infiniment au deſſus de l'unité: Et comme tous les nombres finis n'ont qu'un rapport fini & déterminé avec l'unité, ce terme eſt encore infiniment au deſſus de tout nombre fini, & il les peut tous renfermer, mais il ne peut eſtre renfermé par aucun quelque immenſe qu'il puiſſe eſtre.

Et nous concevons au contraire que le premier de ces termes auquel on n'arrive jamais, eſt celui qui ne pouvant eſtre diminué eſt infiniment petit, & au delà duquel on ne peut paſſer outre. Car s'il y en avoit un autre au delà, ce ſeroit celui-là qui ſeroit le dernier. Or comme toute grandeur eſt diviſible, & qu'on peut aller en diminuant au deſſous, le premier terme auquel on n'arrive jamais, ne peut donc eſtre que zero, & ne peut eſtre un nombre. Car eſtant infiniment petit, il eſt infiniment au deſſous de l'unité. Or tout nombre plus petit que l'unité & qu'on peut encore diminuer, n'a qu'un rapport fini & déterminé avec cette unité. Ce terme infiniment petit eſt donc encore infiniment au deſſous de tout nombre, & il n'en peut renfermer aucun, c'eſt pourquoi ce premier terme ne peut eſtre que zero. Ces choſes ſont du genre de celles qu'on peut bien concevoir, mais qu'on ne peut pas comprendre, parcequ'elles tiennent de l'infini.

HUITIE'ME THEOREME.

CLXXIII. En toute progreſsion multiple le premier terme moins le ſecond diviſé par le ſecond, eſt à l'unité, comme le premier terme moins le dernier, eſt à la ſomme de tous ceux qui ſuivent le premier.

Démonſtration. Soit noſtre progreſsion ∺ a. b. $\frac{bb}{a}$. $\frac{b^3}{aa}$. $\frac{b^4}{a^3}$. &c. ſon premier terme eſt a, le ſecond b, & la ſomme de tous les termes qui ſuivent a eſt $\frac{a^3b+aabb+ab^3+b^4}{a^3}$. Or $\frac{a-b}{b}.\ 1 :: \frac{a^4-b^4}{a^3}$ eſt l'expreſsion des trois premiers termes d'une proportion déterminez par la ſuppoſition, & qui marquent que le premier terme a moins le ſecond b, diviſé par b, eſt à l'unité, comme le premier $\frac{a^4}{a^3}=a$, moins le dernier $\frac{b^4}{a_3}$, eſt à un quatriéme terme inconnu. Or on trouve par la Regle de Trois que ce quatriéme inconnu eſt $\frac{a^4b-b^5}{a^4-a^3b}$.

$$\frac{a-b}{b}.\ 1 :: \frac{a^4-b^4}{a^3}.\ \frac{a^4b-b^5}{a^4-a^3b}.$$

Et ce quatriéme terme eſtant réduit à ſon expoſant en diviſant également ſon antecedent & ſon conſequent par $a-b$ eſt $\frac{a^3b+aabb+ab^3+b^4}{a^3}$, qui eſt auſsi la ſomme de tous les termes qui ſuivent a. Et il en eſt ainſi de toute

toute autre progreſſion. Donc en toute progreſſion le premier terme moins le ſecond, diviſé par le ſecond, eſt à l'unité, comme le premier terme moins le dernier, eſt à la ſomme de tous les termes qui ſuivent le premier.

PREMIER COROLLAIRE.

Comme toute progreſſion droite eſtant renverſée, ſes premiers termes deviennent les derniers, & les derniers les premiers, il ſuit de ce Theoreme qu'en toute progreſſion multiple, le dernier terme moins le penultiéme, diviſé par ce penultiéme, eſt à l'unité, comme le dernier terme moins le premier, eſt à la ſomme de tous les termes qui precedent le dernier. CLXXIV.

SECOND COROLLAIRE.

La ſomme des termes infinis d'une progreſſion ſoûdouble, vaut 2 fois le premier terme. Soit par exemple cette progreſsion ∺ 16. 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. continuée à l'infini, le premier terme moins le ſecond eſt $\frac{16-8}{8}=1$, & le dernier de ſes termes infinis eſt zero. Donc $\frac{16-8}{8}$. 1 : : 16—0, ou ce qui eſt le même 1. 1 :: 16. ? ſeront les trois termes d'une proportion, dont le quatriéme proportionel 16 eſt la ſomme de tous les termes infinis qui ſuivent le premier terme 16. Or cette ſomme 16, plus le premier terme 16, font tous les termes de la progreſsion qui valent 32, c'eſt à dire 2 fois le premier terme 16. Donc &c. CLXXV.

TROISIE'ME COROLLAIRE.

La ſomme des termes infinis d'une progreſsion ſoûtriple, vaut une fois, plus la moitié du premier terme. Car ſoit cette progreſsion ∺ 9. 3. 1. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{9}$. continuée à l'infini, le premier terme moins le ſecond, diviſé par le ſecond, eſt $\frac{9-3}{3}=\frac{6}{3}=2$, & le dernier de ſes termes infinis eſt zero. Donc 2. 1 :: 9. $4\frac{1}{2}$, eſt une proportion dont le quatriéme terme $\frac{9}{2}$ ou $4\frac{1}{2}$ eſt la ſomme de tous les termes infinis qui ſuivent 9. Or cette ſomme $4\frac{1}{2}$, plus le premier terme 9, vaut $13\frac{1}{2}$, c'eſt à dire le premier terme 9, plus ſa moitié $4\frac{1}{2}$. Donc &c. CLXXVI.

On reconnoîtra en ſuivant le même ordre, que tous les termes infinis de la progreſsion ſoûquadruple ou de 4 à 1, valent 1 fois plus le tiers du premier terme. Que tous ceux de la progreſsion de 5 à 1, valent une fois plus le quart du premier terme. CLXXVII.

Que tous ceux de la progreſsion de 6 à 1 valent une fois plus la 5^e partie du premier terme. Et ainſi des autres à l'infini. CLXXVIII

D'où il eſt évident que ſi on prend la moitié d'un tout, plus la moitié de cette moitié, plus la moitié de cette nouvelle moitié, plus encore la moitié de cette derniere moitié, & ainſi à l'infini; que toutes ces moitiez enſemble font le tout. Et ſi on prend le tiers d'un tout, plus le tiers de ce tiers, plus le tiers de ce nouveau tiers, & ainſi à l'infini; que tous ces tiers enſemble font la moitié du tout. CLXXIX.

Et tous les quarts pris de la même ſorte en font le tiers.

Toutes les cinquiémes un quart.

Les ſixiémes une cinquiéme. Et ainſi de ſuite à l'infini.

Premier Exemple.

On voit par la ſolution du ſophiſme des anciens contre le mouvement. Suppoſant, diſoient-ils, qu'Achille aille dix fois plus viſte qu'une Tortuë, ſi la Tortuë a une lieuë d'avance, jamais Achille ne l'attrapera. Car tandis qu'Achille fera la premiere lieuë, la Tortuë fera la 10^e de la même lieuë, & tandis qu'Achille fera la 10^e de la ſeconde lieuë, la Tortuë fera la 10^e de cette 10^e, & ainſi à l'infini.

Tout cela ſuppoſe que toutes ces dixiémes de dixiémes à l'infini, faſſent un eſpace infini de lieuës, qui pourtant ne font toutes enſemble qu'une 9^e, de lieuë, ſelon les Corollaires precedens.

Et c'eſt pourquoi Achille doit attraper la Tortuë à la premiere 9^e de la ſeconde lieuë. Car allant 10 fois plus viſte que la Tortuë, il doit avoir fait 10 fois autant de chemin dans le même temps. Donc pendant que la Tortuë parcourra une 9^e de lieuë, Achille en doit parcourir $\frac{10}{9}$, qui font $1\frac{1}{9}$.

Second Exemple.

Si un Horloge a deux aiguilles, l'une des heures qui fait ſon tour en 12 heures, & l'autre des minutes qui fait le même tour en une heure, marquer tous les points auſquels ces deux aiguilles ſe rencontreront.

Pendant que l'aiguille des heures fera ſon tour, celle des minutes fera $\frac{1}{12}$ de ce même tour, & pendant que l'aiguille des heures fera $\frac{1}{12}$ de ce tour, c'eſt à dire 1 heure, celle des minutes fera $\frac{1}{12}$ de cette $\frac{1}{12}$. Et ainſi à l'infini. De ſorte que l'aiguille des heures attrapera celle des minutes à la $\frac{1}{11}$ minute aprés la premiere heure. Et ainſi du reſte. Les aiguilles ſe rencontreront donc à ces heures ici. $1\frac{1}{11}$. $2\frac{2}{11}$. $3\frac{3}{11}$. $4\frac{4}{11}$. $5\frac{5}{11}$. $6\frac{6}{11}$. $7\frac{7}{11}$. $8\frac{8}{11}$. $9\frac{9}{11}$. $10\frac{10}{11}$. $11\frac{11}{11}$, c'eſt à dire 12 heures.

Troiſiéme Exemple.

Ceci peut ſervir encore pour déterminer les conjonctions des Planetes. Par exemple mars fait ſon cours en 2 ans, & jupiter fait le ſien en 12, s'ils ſe rencontrent tous deux conjoints au premier degré du Zodiaque, où eſt le ſigne du Belier. L'on demande le temps de leur premiere conjonction, & les degrez du Zodiaque où elle doit arriver.

Puiſque mars fait ſon cours en 2 années, & jupiter le ſien en 12. pendant que mars parcourera tout le Zodiaque, jupiter en parcourera ſeulement la ſixiéme partie, pendant que mars parcourera cette ſixiéme partie, jupiter parcourera $\frac{1}{6}$ de cette ſixiéme. Et ainſi à l'infini. De ſorte que mars attrapera jupiter à la cinquiéme partie du Zodiaque, c'eſt à dire aprés en avoir parcouru les $360, + 72$ degrez. Car 72 eſt la cinquiéme partie des 360 degrez du Zodiaque. La premiere conjonction arrivera donc au 72^e. degré qui ſe rencontre au 12^e. des Jumeaux.

Or ſi jupiter acheve ſon cours en 12 années, dans combien d'années en achevera-t'il la cinquiéme partie. La regle de Trois donne $\frac{12}{5}$ ou $2\frac{2}{5}$, c'eſt à dire 2 années plus 146 jours. En ſuite dequoy l'on pouroit determiner en même ſorte tous les autres points de leurs conjonctions, juſqu'à ce qu'ils ſoient de nouveau conjoints au premier degré. Les degrez du Zodiaque où ils ſe joindront ſeront ceux-cy. 72. 144. 216. 288. 360. 72. 144. 216. 288. 360. 72. &c. & chacune de ces conjonctions arrivera 2 années plus 146 jours aprés la precedente. Il en eſt ainſi des autres.

NEUVIÉME THEOREME.

En toute progreſsion où le premier terme eſt au ſecond comme nombre à nombre. CLXXX.

1°. Le premier & le troiſiéme, ou le ſecond & le quatriéme, ou le troiſiéme & le cinquiéme, &c. ſont entr'eux comme deux nombres quarrez.

2°. Le premier & le quatriéme, ou le ſecond & le cinquiéme, ou le troiſiéme & le ſixiéme, &c. ſont entr'eux comme deux nombres cubes.

3°. Le premier & le cinquiéme, ou le ſecond & le ſixiéme, ou le troiſiéme & le ſeptiéme, &c. ſont entr'eux comme deux nombres quarrez de quarré. Et ainſi des autres.

Démonſtration. Lorſque deux grandeurs comme a & b ſont entr'elles comme nombre à nombre, leurs quarrez aa & bb ſont entr'eux comme deux nombres quarrez, & leurs cubes a^3 & b^3 comme deux nombres cubes. Or dans noſtre progreſsion le rapport de deux termes qui en ont un interpoſé comme le premier & le troiſiéme, le ſecond & le quatriéme &c. eſt $\frac{aa}{bb}$ qui eſt doublé du rapport ſimple $\frac{a}{b}$. Le rapport de deux termes qui en ont deux interpoſez comme le premier & le quatriéme, le ſecond & le cinquiéme &c. eſt $\frac{a^3}{b^3}$, qui eſt triplé de $\frac{a}{b}$. Or les deux termes de $\frac{a}{b}$ ſont chacun commenſurables ſelon la ſuppoſition. Donc les deux termes de $\frac{aa}{bb}$ ſeront entr'eux comme deux nombres quarrez, les deux termes de $\frac{a^3}{b^3}$ comme deux nombres cubes. Et ainſi des autres. Ou bien, ce qui eſt le même, le premier & le troiſiéme, ou le ſecond & le quatriéme &c. ſont entr'eux comme deux nombres quarrez. Le premier & le quatriéme, ou le ſecond & le cinquiéme &c. ſont entr'eux comme deux nombres cubes. Et ainſi des autres. Ce qu'il falloit démontrer.

DIXIÉME THEOREME.

On prouvera par une démonſtration reciproque qu'en toute progreſ- CLXXXI.
ſion où le premier terme & le troiſiéme ſont entr'eux comme deux nombres quarrez, ou le premier & le quatriéme comme deux nombres cubes, où le premier & le cinquiéme comme deux nombres quarrez de quarré &c. le premier ſera au ſecond, ou le ſecond au troiſiéme comme nombre à nombre. Car ces quarrez, ou cubes, ou quarrez de quarré &c. ne ſont que les rapports doublez ou triplez, ou quadruplez du rapport ſimple du premier au ſecond terme qui eſtant la racine quarrée, ou

cubique, ou quarrée de la racine quarrée, doit neceſſairement eſtre commenſurable, & ſes deux premiers termes doivent par conſequent eſtre entr'eux comme nombre à nombre.

ONZIE'ME THEOREME.

CLXXXII. En toute progreſſion où le premier terme n'eſt pas au ſecond comme nombre à nombre, 1°. le premier & le troiſiéme ne ſont pas entr'eux comme deux nombres quarrez.

2°. le premier & le quatriéme ne ſont pas entr'eux comme deux nombres cubes. Et ainſi de ſuite. Car le rapport du premier au ſecond terme eſt incommenſurable par la ſuppoſition. Le rapport du premier au troiſiéme ne ſera donc pas un nombre quarré, puiſqu'il a pour racine ce rapport incommenſurable dont il eſt doublé. C'eſt la méme choſe du rapport du premier au quatriéme ou au cinquiéme &c.

DOUZIE'ME THEOREME.

CLXXXIII On prouvera par une démonſtration reciproque qu'en toute progreſſion, où le premier & le troiſiéme ne ſont pas entr'eux comme deux nombres quarrez, ou le premier & quatriéme comme deux nombres cubes, & ainſi de ſuite, le premier ne ſera pas au ſecond comme nombre à nombre. Car le rapport du premier au ſecond terme eſt la racine quarrée ou cubique &c. de ces rapports qui ne ſont pas quarrez ou cubes &c. cette racine eſt donc incommenſurable, & ces deux termes ne ſont pas entr'eux comme nombre à nombre.

TREIZIE'ME THEOREME.

CLXXXIV. En toute progreſſion où le premier & le troiſiéme terme ſont entr'eux comme deux nombres non quarrez, ou le premier & le quatriéme comme deux nombres non cubes, ou le premier & le cinquiéme comme deux nombres non quarrez de quarrez &c. le premier & le ſecond terme ſont incommenſurables entr'eux comme on le vient de démontrer, mais on dit qu'ils ſont commenſurables en puiſſance, c'eſt à dire que le quarré du premier terme eſt au quarré du ſecond comme nombre à nombre. Car le quarré du premier terme eſt au quarré du ſecond comme le premier eſt au troiſiéme. Or par la ſuppoſition le premier eſt au troiſiéme comme nombre à nombre. Donc le quarré du premier eſt au quarré du ſecond comme nombre à nombre.

QUATORZIE'ME THEOREME.

CLXXXV. En toute progreſſion où le premier & le troiſiéme terme ne ſont pas entr'eux comme nombre à nombre, le premier & ſecond terme ſont incommenſurables en puiſſance, c'eſt à dire que leurs quarrez ne ſont pas comme nombre à nombre. Car le quarré du premier eſt au quarré du ſecond comme le premier eſt au troiſiéme. Or on ſuppoſe que le premier n'eſt pas au troiſiéme comme nombre à nombre. Donc le quarré du premier n'eſt pas au quarré du ſecond comme nombre à nombre.

QUINZIE'ME THEOREME.

En toute progreſſion où la premiere grandeur n'eſt pas à la quatriéme comme nombre à nombre, la premiere & la ſeconde ſont incommenſurables entr'elles en ſeconde puiſſance, c'eſt à dire que leurs cubes ſont incommenſurables. Car le cube de la premiere eſt au cube de la ſeconde comme la premiere eſt à la quatriéme. Or on ſuppoſe qne la premiere n'eſt pas à la quatriéme comme nombre à nombre. Donc le cube de la premiere n'eſt pas au cube de la ſeconde comme nombre à nombre.

Pareillement ſi la premiere grandeur n'eſt pas à la cinqniéme comme nombre à nombre, la premiere eſt incommenſurable à la ſeconde en troiſiéme puiſſance.

Si la premiere n'eſt pas à la ſixiéme comme nombre à nombre, la premiere eſt incommenſurable à la ſeconde en quatriéme puiſſance. Et ainſi de ſuite.

SECOND PROBLEME.

Le premier & ſecond terme d'une progreſſion geometrique eſtant donnez, trouver tel autre de ſes termes qu'on voudra. CLXXXVI

1°. on éleve l'expoſant du ſecond au premier terme à une puiſſance qui ait autant de degrez moins deux que le nombre expoſant du terme qu'on demande à d'unitez.

2°. On multiplie cette puiſſance par le ſecond terme, & le produit eſt le terme qu'on cherche. Les exemples ſuivans éclairciront ces regles.

Premier Exemple.

Un riche Orfevre ayant travaillé pour ſon Prince une couronne d'or enrichie de 26 pierreries d'un tres-grand prix, & qui luy coûtent tout ſon bien, & le Prince le voulant liberalement recompenſer de ſes avances & de ſon travail, commande qu'on luy donne tout ce qu'il demandera. L'Orfevre dit qu'il ſe contente ſi on luy paye la couronne à telle condition que ſi on luy donnoit un ſol pour la premiere pierrerie, 2 pour la ſeconde, 4 pour la troiſiéme. Et ainſi de ſuite en doublant juſqu'à la vingt-ſixiéme, on luy payera ſeulement la vingt-ſixiéme pierrerie, en prenant toutes les autres pierreries, tout l'or de la couronne, & tout ſon travail par deſſus le marché. On demande quel eſt le prix de cette vingt-ſixiéme pierrerie dont l'Orfevre ſe contente.

Cette queſtion dépend d'une progreſſion de 26 termes, dont les deux premiers ſont 1 & 2, & l'on demande quel en eſt le vingt-ſixiéme terme? Pour donc trouver ce terme. 1°. J'éleve 2 expoſant du ſecond terme 2 au premier terme 1, à la vingt-quatriéme puiſſance, qui à deux degrez moins que 26 nombre des termes de la progreſſion. Cette puiſſance eſt 16777216. 2°. Je multiplie encore cette puiſſance par le ſecond terme 2, & le produit 33554432 eſt le nombre des ſols que demande l'Orfevre. Et ces ſols reduits à des livres ſont 1677721 livres 6 ſols, c'eſt à dire un million & demy, plus 177721 livres & 6 ſols.

Second Exemple.

On ſuppoſe qu'au premier ſiecle du monde il y ait eü 8 perſonnes engendrées, qu'au ſecond il y en ait eü 8 fois autant, au troiſiéme 8 fois autant qu'au ſecond & ainſi de ſuite. On demande combien il y avoit eü de perſonnes engendrées au ſeiziéme ſiecle du monde, auquel Noé commença de bâtir l'Arche du déluge.

Comme cette queſtion dépend d'une progreſſion de 16 termes, dont les deux premiers ſont 8 & 64, & qu'on demande quel en eſt le ſeiziéme? 1°. j'éleve 8 expoſant du ſecond au premier terme à la puiſſance quatorziéme, qui a deux degrez moins que 16 nombre des termes de la progreſſion, cette puiſſance eſt 35128682795232. 2°. je multiplie cette puiſſance par le ſecond terme 64, & le produit 1978235118884848 eſt le ſeiziéme terme que je cherche, & le nombre des perſonnes qui auroient eſté engendrées au ſeiziéme ſiecle. Ce nombre comme on voit ſurpaſſe beaucoup 19 cent millions de millions de perſonnes.

Troiſiéme Exemple.

Monſieur de Brebœuf pour donner une idée forte de l'éternité par une conception neanmoins bornée, fait concevoir un nombre dont les chiffres s'étendent d'un pole à l'autre. On ſuppoſe que les Anges employent une heure pour écrire ainſi tous ces chifres en les étendant méme au delà des poles. La premiere minute ils écrivent 10 chifres, la ſeconde 10 fois autant que la premiere, la troiſiéme 10 fois autant que la ſeconde. Et ainſi juſqu'à la ſoixantiéme minute qui finit l'heure. On demande combien il y aura de chiffres écrits la ſoixantiéme ou derniere minute par qui l'heure finit.

Pour reſoudre cette queſtion qui dépend de la progreſſion de 1 à 10, il ne faut qu'élever 10 à la cinquante-neuviéme puiſſance, en écrivant l'unité & 59 zero de ſuite. Cela donne 10000 000000000 000000000 000000000 000000000 000000000 0000000000. c'eſt à dire cent mille milliars de milliars de milliars de milliars de milliars de milliars de chiffres. Et ce nombre eſt celuy de tous les chiffres ècrits ſeulement la derniere minute. Et pour concevoir la force de la progreſſion, & combien ce ſeul nombre ſeroit immenſe & prodigieux, on peut remarquer que le chiffre écrit icy eſt tel, quoy qu'il n'ait rien que 60 chiffres, qu'il ſurpaſſe un grand nombre de fois tous les grains de ſable qu'il faudroit pour remplir entierement le monde depuis le centre de la terre juſqu'au ciel où eſt le Soleil. Quel ſurprenant ſeroit donc tout le nombre écrit par les Anges? Cela nous eſt incomprehenſible & comme inconcevable. Car quoyqu'il ſoit vray dedire que tout ce nombre immenſe n'eſt qu'un point & comme rien au regard de l'éternité, qui n'ayant point de bornes s'étend encore infiniment au delà, il a cependant une étenduë ſi vaſte par rapport à nous que nous le confondons preſque avec l'éternité, quoyque nous l'enviſagions attentivement, & que nous faſſions méme effort afin de le comprendre.

Démonſtration du Probleme.

Cette démonſtration eſt ſenſible par la veuë ſeule de noſtre progreſsion $\div\!\!\div a.\ b.\ \frac{bb}{a}.\ \frac{b3}{aa}.\ \frac{b4}{a3}$ &c. Car on voit que chaque terme eſt une puiſſance de l'expoſant $\frac{b}{a}$, laquelle a deux degrez moins que le nombre expoſant de ce terme, & qui eſt multipliée par le ſecond terme. Par exemple le cinquiéme terme eſt $\frac{b4}{a3}$, c'eſt à dire $\frac{b3}{a3}$ la troiſiéme puiſſance de $\frac{b}{a}$, multipliée par le ſecond terme *b*.

TROISIE'ME PROBLEME.

Le nombre des termes d'une progreſſion multiple, & ſes deux premiers termes eſtant donnez, trouver la ſomme de toute la progreſſion. CLXXXVII.

1°. On cherche ſon dernier terme par le probleme precedent.

2°. On écrit le premier terme moins le ſecond, diviſé par le ſecond à la premiere place d'une proportion, l'unité à la ſeconde place, & le premier moins le dernier à la troiſiéme. Le quatriéme terme de cette proportion, plus le premier de la progreſſion ſeront la ſomme que l'on cherche.

Ainſi le premier terme eſtant *a*, le ſecond *b*, & le dernier *t*, la proportion ſera $\frac{a-b}{b}.\ 1 :: a-t.\ \frac{ab-bt}{a-b}$. Et ſon dernier terme $\frac{ab-bt}{a-b}$, plus *a* le premier terme de la progreſſion, c'eſt à dire $\frac{aa-at}{a-b}$, ſera la ſomme totale de la progreſſion. Cela eſt évident par 173. S.

Exemple.

Par exemple, on ſuppoſe que le Saint Patriarche Abraham importuné par le mauvais riche, & ne luy pouvant envoyer le Lazare, laiſſe enfin diſtiller une goutte d'eau, qui eſt l'éternité toute entiere à tomber en cette ſorte. La premiere minute cette goutte d'eau deſcend de 100 lieuës, la ſeconde de 99, la troiſiéme de $98\frac{1}{100}$. Et ainſi de ſuite ſelon la progreſsion de 100 à 99. On demande combien cette goutte en tombant ainſi, deſcendra de lieuës pendant toute l'éternité.

Le premier terme $a=100$, le ſecond $b=99$, & le dernier *t* auquel la goutte n'arrivera jamais, eſt zero, toute la ſomme de la progreſsion ſera donc $\frac{aa-at}{a-b}=10000$. Ainſi la goutte d'eau en tombant pendant toute l'éternité, ne poura deſcendre que de 10000 lieuës.

COROLLAIRE.

Le nombre de tous les termes d'une progreſſion multiple, & ſes deux derniers termes étant donnez, on trouvera la ſomme de tous les termes en renverſant la progreſſion & ſuivant les regles de ce probleme, comme il eſt évident par 173. & 174. S. CLXXXVIII.

QUATRIE'ME PROBLEME.

Deux termes d'une progreſſion, & le nombre des moyens proportio- CLXXXIX.

nels interpoſez étant determinez, trouver tous ces moyens proportionels, ou ce qui eſt le méme, trouver autant de moyennes proportionnelles entre deux grandeurs données que l'on voudra.

1°. On multiplie la derniere de ces grandeurs par la puiſſance de la premiere qui a autant de degrez que l'on cherche de moyennes.

2°. On tire la racine de ce produit marquée par le nombre des moyennes augmenté de l'unité, & l'on a le ſecond terme de la progreſſion. Or le premier terme eſtant donné & le ſecond eſtant découvert, il eſt facile en continuant la progreſſion de marquer toutes les autres moyennes qu'on cherche.

Soient par exemple donnez les deux termes d'une progreſsion a & f, entre leſquels on demande quatre moyennes proportionelles. 1°. Je multiplie f par a^4 qui eſt la quatriéme puiſſance de a, parcequ'on demande 4 moyennes entre a & f. 2°. Je tire du produit a^4f la racine 5^e^. marquée par le nombre 5, plus grand de l'unité que le nombre 4 des moyennes cherchées. Cela me donne $\surd 5^e . a^4 f$ pour le ſecond terme de la progreſsion.

Démonſtration. Le premier terme eſt a, & j'appelle le ſecond x. Or continuant par ſon moyen la progreſsion juſqu'au terme donné f. Il eſt clair que le ſixiéme terme égal au terme donné f, eſt $\frac{x^5}{a^4}$. Donc $\frac{x^5}{a^4} = f$, & $x^5 = a^4 f$. Donc $x = \surd 5^e . a^4 f$.

Premier Exemple.

Pour avoir la moyenne proportionelle entre les deux grandeurs a & c on prend leur plan ac, & la racine de ce plan eſt la moyenne qu'on cherche. ∺ a. $\surd ac$. c. C'eſt ainſi que pour avoir la moyenne entre 3 & 12, je prends 36 plan de 3 par 12, & 6, racine de 36, eſt moyenne entre 3 & 12. ∺ 3. 6. 12.

Second Exemple.

Pour avoir la premiere des deux moyennes proportionelles entre les deux grandeurs a & d, on prend le ſolide fait du quarré de a par d, & la racine cubique de ce ſolide eſt la premiere des moyennes qu'on cherche. ∺ a. $\surd C.ad$. $\frac{\surd C.aadd}{a}$. d.

C'eſt ainſi que pour avoir deux moyennes proportionelles entre 2 & 16, je prends 64 ſolide fait de 4 quarré de 2 par 16, & 4 racine cubique de 64 eſt la premiere des deux moyennes entre 2 & 16, & la ſeconde ſera 8. ∺ 2. 4. 8. 16.

Troiſiéme Exemple.

On trouvera dans le même ordre que la premiere des trois moyennes entre a & e, eſt $\surd\surd a^3 e$.

La premiere des quatre moyennes entre a & f, eſt $\surd 5^e . a^4 f$.

La premiere des cinq moyennes entre a & g, eſt $\surd 6^e . a^5 g$. Et ainſi de ſuite à l'infini.

PREMIER COROLLAIRE.

Si chaque grandeur donnée eſt un quarré, le plan de la racine de l'un CXC. par la racine de l'autre eſt moyen entre ces deux grandeurs. Soient par exemple ces deux quarrez aa & bb, le plan ab eſt moyen proportionel entr'eux. $\dotsminusdots\ aa.\ ab.\ bb.$ Car l'expoſant du premier au ſecond terme eſt égal à celuy du ſecond au troiſiéme. L'un & l'autre de ces deux expoſans eſt $\frac{a}{b}$.

SECOND COROLLAIRE.

Si chacune des deux grandeurs données eſt un cube, le ſolide fait du CXCI. quarré de la racine cubique du premier par la racine cubique du ſecond, eſt la premiere des deux moyennes qui ſont entre ces grandeurs, & le ſolide fait de la racine cubique du premier des deux cubes par le quarré de la racine cubique du ſecond, eſt la ſeconde de ces deux moyennes. a^3 & b^3 ſont par exemple les deux cubes, & les ſolides aab & abb ſont les deux moyennes proportionelles entre a^3 & b^3. Car $\dotsminusdots\ a^3.\ aab.\ abb.\ b^3.$ puiſque l'expoſant de chacun de ces termes à celuy qui le ſuit, eſt le même.

Et ſi chaque grandeur eſt un quarré de quarré, le ſurſolide a^3b ſera la premiere des trois moyennes entre ces deux grandeurs, la ſeconde ſera $aabb$, & la troiſiéme ab^3.

De même les quatre moyennes entre a^5 & b^5, ſeront $a^4b.\ a^3bb.\ aab^3.\ ab^4.$ Il en eſt ainſi pour les autres puiſſances à l'infini.

TROISIE'ME COROLLAIRE.

Et ſi les produits ac, ou aad, ou a^3e, ou a^4f, ou a^5g &c. ne ſont pas CXCII. quarrez, ou cubes, ou quarrez de quarrez, ou des puiſſances parfaites dans le genre de leurs degrez, la racine qui doit eſtre la premiere des moyennes qu'on cherche, ne poura eſtre qu'une grandeur incommenſurable.

Application du Probleme pour les Regles d'intereſt.

Une perſonne eſtant obligée de payer à une autre 17579 livres 12 ſols 6 deniers au bout d'une année, elle convient avec elle de luy payer cette ſomme au bout de 6 mois, à condition qu'elle rabattra les intereſts à raiſon du denier 20 dans une année. L'on demande combien elle eſt obligée de payer au bout de 6 mois?

Premierement, ſi 20 fois 12 ou 240 deniers ſont 1 livre, 12 ſols 6 deniers, ou 150 deniers, feront $\frac{5}{8}$ d'une livre, & la ſomme totale qu'on doit payer au bout des 12 mois ſera $17579\frac{5}{8}$ de livres.

Pour operer facilement & ſans fraction, je multiplie cette ſomme en même temps par 1000 & par a^3, que je ſuppoſe égal à $\frac{1}{1000}$, ce qui ne change rien. Or 17579 par 1000 fait 17579000, & $\frac{5}{8}$ par 1000 fait 625, qui eſtant ajoûtez à 17579000, la ſomme entiere qu'on doit payer au bout des 12 mois ſera $17579625a^3$.

deniers. livre :: deniers. livre.

$$140.\quad 1 :: \quad 250.\quad \frac{5}{8} = \frac{5000a}{8} = 625.$$

Or ſi 21 livres payées au bout de 12 mois, viennent de 20 livres payées argent contant, la ſomme 17579625a^3 payée au bout de 12 mois, de combien viendra-t'elle ? La regle de Trois droite donnera la ſomme 16742500a^3 pour celle qu'il faudroit payer argent contant. Cela eſtant ainſi, il eſt viſible que la ſomme 16742500a^3 payée argent contant, doit profiter en même proportion dans 6 mois, que la ſomme à payer au bout des 6 premiers mois doit profiter pendant les 6 autres qui reſtent. Ainſi cette ſomme à payer au bout des 6 mois eſt moyenne proportionelle entre 17579625a^3 & 16742500a^3. Prenant donc le produit des extrêmes & celuy des moyens, l'on aura 294326871562500$aa^6 = zz$, & tirant la racine quarrée de part & d'autre, l'on trouvera que 17155057a^3 eſt la racine du plus grand quarré entier renfermé dans 294326871562500$aa^6 = zz$, & ainſi $z =$ 17155957a^3. Effaçant donc a^3, & diviſant cette ſomme par 1000, l'on aura 17155 livres plus $\frac{1000}{957}$. Multipliant donc 957 livres par 20 pour en faire des ſols, l'on aura 19140, qui eſtant diviſé par 1000, donne 19 ſols plus $\frac{7}{50}$. Multipliant donc 7 ſols par 12 pour en faire des deniers, l'on aura 84, qui eſtant diviſé par 50, donne 1 denier plus $\frac{17}{25}$, c'eſt à dire preſque 2. La ſomme à payer au bout de 6 mois, ſera donc 17155 livres 19 ſols & environ 2 deniers.

Mais ſi la perſonne eſtoit convenuë de payer la ſomme precedente 17579625a^3 au bout de 4 mois, en rabattant les intereſts à raiſon du denier 20 dans une année. L'on demande combien elle ſeroit obligée de payer alors ?

Si 21 livres payées au bout de 12 mois, viennent de 20 livres payées argent contant, la ſomme 17579625a^3 payée au bout de 12 mois, viendra de 16742500a^3 payée argent contant. Or la ſomme 1674250a^3 payée argent contant, doit autant profiter pendant les 4 premiers mois, que celle qu'on doit payer au bout de 4 mois doit profiter pendant les 4 ſuivans, c'eſt à dire juſqu'au huitiéme, ou bien autant que la ſomme qu'on payeroit au bout de 8 mois devroit profiter juſqu'au bout du 12^e. auquel temps ſe fait le payement 17579625a^3. D'où il eſt clair que les deux payemens qu'on feroit au bout du quatriéme & du huitiéme mois, ſont deux moyens proportionels entre 16742500a^3 & 17579625a^3. Or pour en trouver le premier, qui eſt celuy qu'on doit payer au bout des 4 mois, il faut multiplier le quarré de 16742500a^3 par 17579625a^3, & tirer la racine cubique du produit 4927767647135156250000a^9. Cette racine eſt 17017016a^3. Diviſant donc 17017016 par 1000, l'on trouvera que le payement qu'on doit faire eſt 17017 livres & environ 4 deniers.

aprés 12 mois. argent contant :: aprés 12 mois. argent contant.
21 *livres.* 20 *livres ::* 17579625a^3. 16742500a^3. *racine.*

280311306250000a^6. *quarré.*
par 17579625a^3.
4|927|767|647|135|156|250|000a^9. *Produit.*
1| 7| 0| 1| 7| 0| 1| 6a^3. *rac. cub.*

livres 17017|016
|20
ſols 0|320
|12
|640
3|20
deniers 3|840

Et ſi la perſonne eſtoit convenuë de payer la ſomme au bout de 8 mois, il faudroit prendre la ſeconde des ſommes proportionelles entre 1674500a^3 & 17579625a^3. Ce qui ſe fait en multipliant le quarré de celuy-cy par 1674500a^3, & tirant la racine cubique du produit, cette racine cubique eſt 17296033a^3. Diviſant donc 17296033 par 1000, l'on trouvera que le payement qu'on doit faire au bout des 8 mois eſt 17296 livres & preſque 8 deniers.

argent contant. au bout de 12 mois :: argent contant. au bout de 12 mois.
20 *livres.* 21 *livres.* 16742500a^3. 17579625a^3. *racine.*

309043215140625a^6. *quarré.*
par 16742500a^3.
5|174|156|029|491|914|062|500a^9. *produit.*
1| 7| 2| 9| 6| 0| 3| 3a^3. *rac. cub.*

livres 17296|033
|20
ſols 0|660
|12
1|320
6|60
deniers 7|920

De méme s'il falloit trouver combien la perſonne devroit payer au bout de trois mois, parce que l'année eſt compoſée de 4 fois trois mois, la progreſſion auroit 5 termes, & il faudroit trouver la premiere des trois ſommes moyennes proportionelles entre celle qu'on payeroit argent contant qui fait le premier des 5 termes de la progreſſion, & l'autre ſomme qu'il faudroit payer au bout des 12 mois, qui en fait le cinquiéme terme; ou bien parce que la ſomme moyenne entre ces deux eſt celle qu'il faudroit payer au bout de ſix mois, c'eſt à dire la ſeconde des trois ſommes moyennes, on chercheroit ſeulement la moyenne entre la ſomme à payer argent contant & celle qu'il faudroit payer au bout des 6 mois, pour avoir celle qu'il faudroit payer au bout des 3 mois. Et tout cecy ſe feroit ſans autre extraction que de racines quarrées.

Mais ſi le payement devoit ſe faire au bout de 75 jours, c'eſt à dire aprés la cinquiéme partie de l'année, il faudroit trouver la premiere des 4 moyennes entre les ſommes connuës, ce qu'on ne pourroit faire ſans extraire une racine cinquiéme.

Or comme ces operations ſont extrêmement longues & ennuyeuſes ſur tout ſi la progreſſion doit avoir pluſieurs termes, & qu'on a cependant fort ſouvent beſoin dans les contes de trouver de ſemblables ſommes, l'on a trouvé moyen de les faire aſſez facilement par une ſeule operation, en ſe ſervant pour cela de certaines Tables qui ſe forment ſelon les differens intereſts dont on veut convenir. Voici comment. L'on ſuppoſe qu'un nombre fort grand de la progreſſion decuple comme 10000000 eſt une ſomme capitale jointe avec l'intereſt qu'elle produit dans une année, & l'on appelle ce nombre la racine des Tables. Aprés quoy, ſi l'on convient de l'intereſt, comme par exemple du dernier 20 dans une année, le capital avec ſon intereſt ſera 21 au bout d'une année. C'eſt pourquoy l'on dit ſi 21 viennent de 20, de combien viendra 10000000? La regle de trois droite donne $9523809\frac{11}{21}$, comme les nombres ſont choiſis fort grands, l'on ne laiſſe aucune fraction lorſqu'il s'en trouve, mais ſi elle eſt plus grande que $\frac{1}{2}$, comme icy où $\frac{11}{21}$ ſurpaſſe $\frac{1}{2}$, l'on ajoûte l'unité à l'expoſant trouvé, ſinon, l'on rejette la fraction comme peu importante, puiſqu'elle ne vaut pas la cent milliéme ou la millionniéme partie de l'unité, & quainſi toute l'erreur qui pourroit provenir de là ne peut eſtre aſſez grande pour cauſer ſeulement la perte d'un denier, l'on aura donc 952 810 pour la ſomme capitale qui jointe avec ſon intereſt donne 10000000 au bout d'une année. En ſuite l'on diviſe le quarré de cette ſomme par 10000000, ou ce qui revient au méme & pour abreger l'on multiplie 9523810 par 20, & l'on diviſe le produit par 21, & l'expoſant 9070295 eſt la ſomme capitale qui jointe avec ſon intereſt donne 10000000 au bout de 2 ans. Et parce que les ſommes capitales, qui d'une année à l'autre donnent toûjours la méme ſomme 10000000 pour le capital joint avec ſon intereſt, ſont les termes d'une progreſſion geometrique, dont les deux premiers 9523810 & 9070295 ſont déja connus, ſi on la continuë, ſon troiſiéme terme 8638376 ſera le capital, qui joint avec ſon intereſt donne 10000000 au bout de 3 ans; le quatriéme 8227025, celuy qui donne la méme ſomme au bout de 4. & ainſi des autres. Et comme le rapport d'un terme à celuy qui le ſuit eſt toûjours le méme que celuy de 21 à 20, il ſuffira pour trouver par ordre chacun de ces termes de multiplier toûjours le dernier trouvé par 20, & de diviſer le produit par 21, pour avoir celuy de l'année qui ſuit immediatement.

La raiſon de tout cela eſt évidente. Car de méme que la ſomme à payer argent contant que nous appellons capitale, demeurant toûjours la méme, les ſommes qu'il faudroit payer au bout de certains temps égaux ſont les termes d'une progreſſion geometrique. De méme auſſi la ſomme à payer au bout de tous ces temps égaux demeurant toûjours la méme, il faut par une mutuation reciproque que les ſommes capitales ſoient auſſi les termes d'une progreſſion geometrique.

Les autres tables ſeront formées en méme ſorte que celle-cy, car ſi l'intereſt eſtoit au dernier 16 pour une année, l'on multiplieroit 10000000 par 16, & l'on diviſeroit le produit par le capital 16 plus ſon intereſt 1, c'eſt à dire par 17. enſuite on multiplieroit l'expoſant trouvé par 16, & l'on diviſeroit le produit par 17, &c. Et ſi l'intereſt eſtoit du denier 15, l'on multipliera toûjours par 15 & l'on diviſeroit par 16. il en eſt ainſi des autres.

Stevin a calculé ces Tables pour 30 années ſelon les intereſts de 1, 2, 3, &c. juſqu'a 16, pour 100, & ſelon ceux des deniers 15, 16, 17, 18, 19, & la Table de 5 pour 100 eſt la méme que celle du denier 20, car comme 1 vient de 20, ainſi 5 vient de 100. Si l'on ſuppoſe pour l'intereſt de chaque année le denier 10, ou 15, ou 16, ou 20. Cette Table ſervira pour 10 années.

années.	*au denier* 10.	*au denier* 15.	*au denier* 16.	*au denier* 20.
1.	9090909	8695652	8620690	9523810
2.	8264463	7561437	7431629	9070295
3.	7513148	6575163	6406577	8638376
4.	6830135	5717533	5522911	8227025
5.	6209214	4971768	4761130	7835262
6.	5644740	4323277	4104422	7462154
7.	5131582	3759371	3538295	7106813
8.	4665075	3269018	3050254	6768393
9.	4240977	2842624	2629529	6446089
10.	3855434	2471847	2266835	6139132

Or voicy comment l'on ſe ſert de ces Tables. Si tous les biens d'un Pupille ſe montent à 1600 livres, & qu'ils profitent au denier 20 par année. L'on demande à quoy montera cette ſomme avec ſes intereſts au bout de 8 années?

L'on verra dans la colomne du denier 20 dont l'on convient, quelle ſomme répond à 8 nombre des 8 années. Ce nombre eſt 6768393. L'on dira donc; ſi la ſomme capitale 6768393 avec ſes intereſts monte à 10000000 livres (qui ſont la racine des Tables) en 8 années, à combien montera le capital des 1600 livres pendant le méme temps, l'on trouvera 2363 livres plus $\frac{6287341}{6768893}$ qui vaut environ 18 ſols 6 deniers.

Et l'on remarquera dans ces ſortes de queſtions que ſi les ſommes ſont petites, l'on poura retrancher de la racine 10000000 & du nombre qu'on aura pris dans quelque colomne, deux ou trois chiffres à droite autant de part & d'autre, car ceci ne peut gueres donner de perte qui ſoit de la valeur d'un double ou d'un denier. Ceux qui voudront voir plus au long l'uſage & la conſtruction de ces Tables pourront lire ce qu'en dit Stevin.

DES LOGARITHMES.

CXCIII. Lorſque deux progreſſions, l'une arithmetique, & l'autre geometrique, ſont tellement diſpoſées, que les termes de l'une répondent aux termes de l'autre, chacun à chacun & dans un même ordre, les termes de la progreſſion arithmetique ſont appellez *logarithmes* ou *expoſans* de ceux qui leur répondent dans la geometrique.

Ainſi dans ces deux progreſſions qui ſuivent, le nombre a eſt le logarithme de l'unité, $a+d$ eſt le logarithme du terme b, $a+2d$ celuy de bb, $a+6d$ celuy de b^6. Et ainſi des autres.

Progr. arith.	a.	$a+d$.	$a+2d$.	$a+3d$.	$a+4d$.	$a+5d$.	$a+6d$.	$a+7d$.	&c.
Progr. geom. ∺ {	1.	b.	bb.	b^3.	b^4.	b^5.	b^6.	b^7.	&c.
	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	&c.

CXCIV. La principale proprieté de ces progreſſions, c'eſt que ſi l'on choiſit quelques termes de la geometrique qui ſoient en proportion pareillement geometrique, les logarithmes qui leur répondront ſeront auſſi en proportion arithmetique, continuë ſi la geometrique eſt continuë; & non continüe, ſi la geometrique n'eſt point continüe.

Par exemple, ſi l'on prend la proportion geometrique continüe ∺ 2. 8. 32. les logarithmes de ſes termes feront la proportion arithmetique continüe ÷ $a+d$. $a+3d$. $a+5d$. Et ſi la proportion geometrique eſt 2. 4 :: 16. 32. qui n'eſt point continüe, les logarithmes de ſes termes donneront auſſi la proportion arithmetique $a+d$. $a+3d$: $a+4d$. $a+6d$. qui n'eſt point continüe, puiſque la difference des deux premiers termes, ou celle des deux derniers qui luy eſt égale, n'eſt pas la même que celle du ſecond au troiſiéme, ainſi que dans la precedente, où il y a même difference entre le premier & ſecond terme $a+d$. & $a+3d$. qu'entre le ſecond & le troiſiéme $a+3d$ & $a+5d$.

CXCV. Il s'enſuit delà que tous les termes d'une proportion geometrique eſtant donnez, la ſomme des logarithmes des deux extrêmes réduits en une ſomme, égaleront les logarithmes des deux moyens réduits pareillement en une ſomme, & ſi la proportion eſt continüe, le logarithme du terme moyen ſera la moitié de la ſomme des deux autres logarithmes. Ainſi la proportion eſtant 2. 4 :: 16. 32. dont les logarithmes ſont $a+d$. $a+3d$: $a+4d$. $a+6d$. la ſomme du logarithme $a+d$ & du logarithme $a+6d$, égalera celle des logarithmes $a+3d$ & $a+4d$. Chacune de ces ſommes eſt $2a+7d$. Et dans la proportion ∺ 2. 8. 32. dont les logarithmes ſont ÷ $a+d$. $a+3d$. $a+5d$. le logarithme moyen $a+3d$, eſt la moitié des deux autres $a+d$ & $a+5d$ réduits en une ſomme $2a+6d$.

C'eſt pourquoy ſi l'on avoit une Table des logarithmes des nombres naturels 1. 2. 3. 4. &c. continuée autant que l'on voudroit, lorſqu'on voudroit trouver le quatriéme terme d'une proportion droite & geometrique, il ne faudroit que retrancher le logarithme du premier terme de la ſomme des deux logarithmes des deux nombres donnez, & l'on auroit pour reſte le logarithme du nombre cherché ; de ſorte que conſultant la Table, le nombre qui répondroit à ce logarithme ſeroit celuy qu'on cherche.

Par exemple, ſi l'on vouloit multiplier 8 par 64, ce qui eſt fort ennuyeux ſi les nombres ſont grands, l'on pouroit écrire 1. 4 : : 8. ? & alors retranchant a le logarithme du premier terme 1, de la ſomme des deux autres, qui eſt $2a+7d$, le reſte $a+7d$ ſeroit le logarithme du nombre cherché 128 qui luy répond.

Pour operer plus facilement, ceux qui font des Tables ſuppoſent $a=0$, afin que le logarithme de l'unité qui devroit eſtre retranché fort ſouvent dans les operations qu'on fait par logarithmes, ne cauſe point de difficulté; & pour la difference d ils prennent 10000000, ils choiſiſſent un grand nombre, à cauſe que pour trouver leurs logarithmes ils ont beſoin de chercher pluſieurs moyens proportionels entre les nombres qui comme 1. 2. 3. 4. &c. ne font pas une progreſſion geometrique, ce qui ne peut ſe faire ſans tirer beaucoup de racines ſeulement par approximation, à cauſe que les veritables ſont ſourdes.

Et pour commencer ces Tables, l'on choiſit la progreſſion geometrique de 1 à 10. & l'on prend zero pour le logarithme de l'unité, 10000000 pour celuy de 10, 20000000 pour celuy de 100, 30000000 pour celuy de 1000, & ainſi de ſuite, comme on le voit icy. Et l'on trouve que les logarithmes de tous les nombres qui ſont entre 10 & 100, commencent par 1. tous ceux qui ſont entre 100 & 1000 commencent par 2. ceux qui ſont entre 1000 & 10000 par 3. & ainſi de ſuite, & ces nombres 1. 2. 3. &c. ſont appellez caracteriſtiques des logarithmes qui commencent par eux.

1.	00000000
10.	1 0000000
100.	20000000
1000.	3 0000000
10000.	40000000
100000.	5 0000000
1000000.	60000000
10000000.	70000000
100000000.	8 0000000
1000000000.	9 0000000
10000000000.	100000000

Mais cela ne donnant pas les logarithmes des nombres interpoſez comme 2. 3. 4. 11. 12. &c. on les peut chercher par la Methode que donne Ulacq qui en a fait des Tables. Cette Methode eſt telle.

Pour trouver le logarithme de tout nombre donné comme 9, qui ſe rencontre entre 1 & 10, dont les logarithmes 0000000 & 10000000 ſont déja connus, l'on ajoûte à chacun de ces deux nombres 1 & 10 autant de zero que le logarithme de 10 en renferme, c'eſt à dire 7, ou 8, ou davan-

Prop. Geom.		Logarith.
A	10000000	000000000
C	31 622777	05 0000000
B	1 00000000	1 00000000
B	1 00000000	1 00000000
D	5 6234132	07 5000000
C	31 622777	05 0000000

tage, ſi pour une plus grande exactitude, ce logarithme en renferme davantage. Enſuite on multiplie l'un par l'autre ces deux nombres ainſi augmentez, & du produit 100000000000000 l'on extrait la racine approchée 31622777. Cette racine eſtant diviſée par l'unité ſuivie de 7 zero par qui l'on a multiplié les deux nombres 1 & 10, eſt moyenne proportionelle entre 1 & 10. ſon logarithme ſera donc 50000000, c'eſt à dire la moitié des deux logarithmes 00000000 & 100000000. Or ſi cette racine approchée eſtoit égale à 9 augmenté d'autant de zero que le ſont 1 & 10, le logarithme cherché ſeroit connu ; Mais comme elle eſt plus petite, & qu'elle en approche cepẽdant davãtage que $A = 10000000$, entre $B = 100000000$ & la racine $C = 31622777$, l'on cherche de nouveau par approximation le nombre moyen proportionel *D*, qui eſt plus petit que 90000000, mais qui en approche davantage que *C*. C'eſt pourquoy entre *B* & *D* l'on cherche en même ſorte le moyen proportionel *E*, lequel eſtant encore plus petit que 90000000, entre luy & *B* l'on cherche encore le nombre moyen *F*, qui eſt auſſi plus petit que 90000000. L'on cherche donc entre *B* & *F* le nombre moyen *G*. Et ce nombre eſt plus grand que 90000000, & parcequ'il en approche davantage que *B*, l'on cherche entre luy & *F*, qui en approche le plus au deſſous, le nombre moyen *H*, qui eſt plus petit que 90000000, mais qui en approche davantage que *F*. C'eſt pourquoy entre *G* qui en approche le plus au deſſus, & *H* qui en approche le plus au deſſous, l'on cherche en même ſorte le nombre moyen *I*, qui eſt plus grand que 90000000, mais qui en approche davantage que *G*. C'eſt pour-

	Proport. Geom.	*Logarith.*
B	100000000	100000000
E	74989421	087500000
D	56234132	075000000
B	100000000	100000000
F	86596432	093750000
E	74989421	087500000
B	100000000	100000000
G	93057204	096875000
F	86596432	093750000
G	93057204	096875000
H	89768713	095312500
F	86596432	093750000
G	93057204	096875000
I	91398170	096093750
H	89768713	095312500
I	91398170	096093750
K	90579777	095703125
H	89768713	095312500
K	90579777	095703125
L	90173533	095507812
H	89768713	095312500
L	90173333	095507812
M	89970796	095410156
H	89768713	095312500
L	90173333	095507812
N	90072008	095458984
M	89970796	095410156
N	90072008	095458984
O	90021388	095434570
M	89970796	095410156
O	90021388	0954 4570
P	89996088	095422363
M	89970796	095410156
O	90021388	095434570
Q	90008737	095428467
P	89996088	095422363
Q	90008737	095428467
R	90002412	095425415
P	89996088	095422363

quoy cherchant en même ſorte par approximation des nombres moyens proportionels entre le plus proche au deſſus & le plus proche au deſſous du nombre propoſé, l'on en approchera toûjours de plus en plus, de ſorte qu'à la fin l'on y arrivera. Comme icy l'on trouve enfin le nombre propoſé 9000000 aprés avoir cherché 25 moyens geometriquement proportionels. Or ce nombre & les autres ſemblables eſtant ainſi découverts, leurs logarithmes le ſont auſſi; car de même que la moitié des deux logarithmes de *A* & de *C* ſert de logarithme à *B*, de même la moitié des deux logarithmes de *B* & de *C* ſert de logarithme à *D*. Et ainſi de ſuite. De ſorte enfin que la moitié des deux logarithmes de *BB* & de *CC*, qui eſt 95424251, ſera le logarithme cherché de $\frac{9000000}{10000000}$, c'eſt à dire de 9.

	Proport. Geom.	*Logarith.*
R	90002412	095425415
S	89999250	095423889
P	89996088	095422363
R	90002412	095425415
T	90000831	095424652
S	89999250	095423889
T	90000831	095424652
V	90000041	095424271
S	89999250	095423889
V	90000041	095424271
X	89999650	095424080
S	89999250	095423889
V	90000041	095424271
Y	89999845	095424217
X	89999650	095424080
V	90000041	095424271
Z	89999943	095424223
Y	89999845	095424217
V	90000041	095424271
&	89999992	095424247
Z	89999943	095424223
V	90000041	095424271
AA	90000016	095424259
&	89999992	095424247
AA	90000016	095424259
BB	90000004	095424253
&	89999992	095424247
BB	90000004	095424253
CC	89999998	095424250
&	89999992	095424247
BB	90000004	095424253
DD	90000000	095424251
CC	89999992	095424250

De même pour trouver le logarithme de 2, l'on ajoûte 7 ou 8 zero à chacun des deux nombres 1 & 10, dont on connoit les logarithmes, enſuite dequoy l'on cherche des moyens proportionels, comme on a fait pour 9, & l'on trouve aprés 23 operations que 3010300 eſt le logarithme de 2.

Or ayant zero pour le logarithme de l'unité, & 3010300 pour logarithme de 2, tous les logarithmes de la progreſſion double ∺ 1. 2. 4. 8. 16. &c. ſont donnez. Car le premier terme eſtant zero, & la difference $d = 3010300$, le troiſiéme terme $2d = 6020600$ ſera le logarithme de 4, le quatriéme terme $3d = 9030900$ ſera celuy de 8, le quatriéme $4d = 12041200$ celuy de 16. Et ainſi des autres.

Et pour trouver le logarithme de 3, l'on ajoûte 7 zero à chacun des deux nombres 1 & 4 dont on connoit les logarithmes, enſuite dequoy l'on cherche entr'eux des moyens proportionels, comme on a fait enrre 1 & 10 pour avoir le logarithme de 2, juſqu'à ce qu'on ſoit enfin arrivé au nombre 30000000, aprés quoy l'on connoît que ſon logarithme eſt 4771212, & ainſi celui de ſon quarré 9 ſera le double de ce nombre, c'eſt à dire 9542424, celui de 27 en ſera le triple, c'eſt à dire 14313636, celui de 81 ſera 19084848. Et ainſi des autres.

Or le logarithme de 2 & celui de 3 eſtant connus, ſi on les ajoûte en une ſomme, l'on aura celuy de 6 produit de 2 par 3, & l'on aura en méme ſorte ceux de tous les nombres multipliez ſeulement par 2 & par 3, comme ceux de 12, de 18, 24, 36, 48, & les autres. Car c'eſt une regle generale que pour avoir le logarithme de quelque nombre compoſé, il ne faut que prendre la ſomme des logarithmes des nombres qui le compoſent.

CXCVI. De ſorte que pour trouver tous les logarithmes des nombres, il ſuffit de chercher ceux des nombres premiers qui n'ont point d'autres diviſeurs qu'eux-mémes ou l'unité. Et pour le faire non ſeulement avec toute la facilité poſſible, mais encore ſelon l'ordre naturel & avec methode, il faut toûjours ſe ſervir des deux nombres l'un au deſſus & l'autre au deſſous de celui dont on veut trouver le logarithme. Ainſi pour trouver celui de 5, l'on choiſira les nombres 4 & 6, dont les logarithmes ſont déja ſuppoſez connus, & l'on cherchera des moyens proportionels comme on a fait pour 2. De méme pour trouver celuy de 7 l'on ſe ſervira des deux nombres 6 & 8, pour trouver celuy de 11 des deux 10 & 12. Et ainſi des autres. Où il faut remarquer que cette methode a cet avantage que plus les nombres ſeront grands au moins juſques à 10 ou 100 mille, plus leurs logarithmes ſeront faciles à trouver, parce qu'ordinairement il faudra chercher moins de moyens proportionels pour eux que pour les plus petits.

Et ſi la ſomme de deux logarithmes eſt impaire, ſa moitié qui fait un autre logarithme ſe prend ſans fraction, c'eſt à dire qu'on en prend la plus grande ou la plus petite moitié. Mais pour une plus grande exactitude lors qu'on double ce logarithme pour en avoir un autre, l'on ajoûte l'unité à ce double, comme en doublant 4771212 le logarithme de 3, pour avoir celuy de 9, l'on ajoûte 1 à 9542424, & 9542425 eſt le logarithme de 9.

CXCVII. Or connoiſſant les logarithmes des nombres entiers, ceux des fractions ſont auſſi connus. Car ſi l'on avoit par exemple $\frac{3}{2}$, en retranchant le logarithme de 2 du logarithme de 3, le reſte 1760912 eſt celuy de $\frac{3}{2}$, & ſi l'on avoit $\frac{2}{3}$ en retranchant le logarithme de 3 de celuy de 2, le nombre negatif —1760912 ſeroit celuy de $\frac{2}{3}$, & ainſi des autres. Si les fractions ſurpaſſent l'unité, leur logarithme ſera un nombre poſitif, mais ſi elles en ſont ſurpaſſées, leur logarithme ſera negatif, puiſque celui de l'unité n'eſt que zero.

Pour ce qui eſt de l'uſage des logarithmes, il eſt tres-grand & merveilleuſement eſtendu pour faire les multiplications, diviſions, & extractions des racines par une ſimple addition ou ſouſtraction des logarithmes des nombres ſur leſquels on opere. Tout cela eſt trop clair à ceux qui ont ces Tables, pour nous arréter davantage ici.

DE LA PROGRESSION HARMONIQUE.

CXCVIII. Lors que trois termes ſont tels que la difference du premier & du ſecond eſt à celle du ſecond & du troiſiéme, comme le premier terme eſt au troiſiéme, cela s'appelle *proportion harmonique*, comme 60, 30, 20, font une proportion harmonique, car la difference de 60 & de 30 eſt 30, & celle de 30 & de 20 eſt 10. Or 30. 10. : : 60. 20. la difference 30 eſt à la difference 10, comme le premier terme 60 eſt au troiſiéme 20. De méme les trois termes $aa+3ad+2dd.$ $aa+2ad.$ $aa+ad.$ font une proportion harmonique, parce que $ad+2dd$ difference des deux premiers termes eſt à ad difference du ſecond au troiſiéme, comme le premier terme eſt au troiſiéme. $ad+2dd.\ ad :: aa+3ad+2dd.\ aa+ad.$ Et dans cette proportion harmonique le premier terme ſurpaſſe le ſecond. C'eſt le contraire de celles-ci 20. 30. 60. ou bien $aa-ad.$ $aa-dd.$ $aa+ad.$ dans chacune deſquelles le ſecond terme ſurpaſſe le premier, en ſuppoſant que a ſoit plus grand que d. Car s'il eſtoit plus petit, les deux premiers termes ſeroient chacun negatifs.

CXCIX. Si les termes ſont continuez plus loin que trois, c'eſt une progreſſion harmonique, ſi ſon premier terme eſt le plus grand, appellant a le ſecond terme, & d la difference du premier au ſecond. La progreſſion ſera
$a+d.\ a.\ \frac{aa+ad}{a+2d}.\ \frac{aa+ad}{a+3d}.\ \frac{aa+ad}{a+4d}.\ \frac{aa+ad}{a+5d}.\ \frac{aa+ad}{a+6d}.$ &c.

Si $a=20$, & $d=10$, la progreſſion harmonique ſera celle qui ſuit.

$30.\ 20.\ 15.\ 12.\ 10.\ 8\frac{4}{7}.\ 7\frac{1}{2}.\ 6\frac{2}{3}.\ 6.\ 5\frac{10}{11}.$ &c.

CC. Ces progreſſions peuvent eſtre infiniment continuées. Elles ont auſſi pluſieurs proprietez qui conviennent aux progreſſions arithmetique & geometrique Par exemple, ſi l'on prend leurs termes dans des intervalles égaux, comme le premier, troiſiéme, cinquiéme; & le ſecond, quatriéme, ſixiéme, &c. ou bien le premier, quatriéme, ſeptiéme, & ainſi de trois en trois, ces termes ſeront en progreſſion harmonique, comme

$a+d.\ \frac{aa+ad}{a+2d}.\ \frac{aa+ad}{a+4d}.\ \frac{aa+ad}{a+6d}.\ \frac{aa+ad}{a+8d}.\ \frac{aa+ad}{a+10d}.$ &c.

$a.\ \frac{aa+ad}{a+3d}.\ \frac{aa+ad}{a+5d}.\ \frac{aa+ad}{a+7d}.\ \frac{aa+ad}{a+9d}.\ \frac{aa+ad}{a+11d}.$ &c.

$a+d.\ \frac{aa+ad}{a+3d}.\ \frac{aa+ad}{a+6d}.\ \frac{aa+ad}{a+9d}.\ \frac{aa+ad}{a+12d}.\ \frac{aa+ad}{a+15d}.$ &c.

DE LA PROPORTION CONTR'HARMONIQUE.

CCI. Il y a encore une proportion contr'harmonique. Et c'eſt lors que la difference du premier & du ſecond terme eſt à celle du ſecond au troiſiéme, comme le troiſiéme terme eſt au premier. Par exemple 6. 5. 3 eſt une proportion contr'harmonique, car la difference de 6 à 5 eſt 1, & celle de 5 à 3 eſt 2, Or 1. 2 :: 3. 6. la premiere eſt à la ſeconde, comme le dernier terme 3 eſt au premier 6. De méme 3. 5. 6. eſt une proportion contr'harmonique. Car 2. 1 :: 6 3.

De méme encore 6. 5. 2. & 2. 5. 6. ſont les termes d'une proportion cont'harmonique.

Si le premier terme de ces proportions ſurpaſſe le ſecond, elles pouront avoir telle forme. $bb+bd.$ $bb+dd.$ $bd+dd.$ Car la difference du premier au ſecond terme eſt $bd-dd$, & celle du ſecond au troiſiéme eſt $bb-bd$. Or $bd-dd.$ $bb-bd.$ :: $bd+dd.$ $bb+bd.$ La premiere difference eſt à la ſeconde, comme le troiſiéme terme eſt au premier. Car l'expoſant de $bd-dd$ à $bb-bd$ eſt $\frac{d}{b}$ qui eſt auſſi celuy de $bd+dd$ à $bb+bd$. Il faut icy que b ſurpaſſe d.

Or cette proportion renverſée, c'eſt à dire $bd+dd.$ $bb+dd.$ $bb+bd.$ ſervira de modele pour les proportions contr'harmoniques, donc le ſecond terme ſurpaſſe le premier, & le troiſiéme terme ſurpaſſe le ſecond, en ſuppoſant toûjours que b ſoit plus grand que d.

Fin de la premiere Partie.

ELEMENS
DES
MATHEMATIQUES.
SECONDE PARTIE.

LIVRE PREMIER.
DE L'ANALYSE,
ET DE SES PRINCIPAUX USAGES.

CE Livre ſervira pour faire voir comme on ſe ſert de l'Analyſe non ſeulement pour apprendre les Sciences, mais encore pour les inventer, & pour reſoudre par ſon moyen une infinité de queſtions de genres & d'eſpeces tout-à-fait differentes.

DES DIFFERENTES VOYES DE L'ANALYSE.

I. Il y a trois ſortes de voyes generales pour reſoudre toute ſorte de queſtions. La premiere eſt une voye qu'on peut appeller *purement Analytique.* La ſeconde peut eſtre appellée *Syntethique* ou *de Compoſition.* Et la troiſiéme, qui participant des deux premieres eſt en partie Analytique & en partie Syntethique, peut s'appeller une *voye mixte.*

DE LA VOYE PUREMENT ANALYTIQUE.

II. Cette voye eſt celle qui tend aux reſolutions qu'elle cherche ſans ſuppoſer aucune connoiſſance autre que celles qui ſont accordées par les ſuppoſitions, & ſans tirer aucun de ſes raiſonnemens que des égalitez qu'elle forme. Telle eſt par exemple la voye dans laquelle chaque grandeur inconnüe eſt exprimée par une lettre inconnüe qui ne marque qu'elle ſeule. Les reſolutions données au commencement du Cinquiéme Livre en peuvent déja fournir des exemples. Cette voye, quoy qu'elle ſoit la plus univerſelle de toutes, n'eſt pas toûjours la plus facile, à cauſe du grand nombre des égalitez qu'elle forme, & des ſubſtitutions frequentes qu'il faut y faire de certaines grandeurs à la place de quelques autres qui leur ſont égales, mais qui ſont exprimées differemment. Voicy une autre Regle qui poura rendre cette voye plus facile, en rendant ſes calculs plus courts & moins embaraſſans que ceux de la Regle generale expliquée V. 27. de la premiere Partie.

AUTRE REGLE GENERALE,

Pour la reſolution des Problemes qui ſont exprimez par pluſieurs égalitez dans leſquelles il y a pluſieurs lettres inconnuës.

III. 1°. Lorſqu'on a tiré des ſuppoſitions autant d'égalitez que l'on employe de lettres inconnuës, l'on cherche par la premiere égalité une valeur de la premiere inconnüe qui s'y trouve, & l'on cherche auſſi la valeur de la même inconnüe dans chaque autre égalité où elle ſe trouve.

2°. L'on compare entr'elles deux à deux les valeurs découvertes, il n'importe pas dans quel ordre, & l'on trouve d'autres égalitez, où l'inconnüe dont on a cherché la valeur ne ſe rencontre plus. L'on réïtere enſuite une ſemblable operation, par le moyen de ces égalitez ; ce qui fait évanoüir une autre inconnüe, & donne encore de nouvelles égalitez, ſur leſquelles on réïtere encore une ſemblable operation. Et ainſi de ſuite juſques à ce qu'on ſoit enfin arrivé à une égalité qui n'ait qu'une lettre inconnüe. Aprés quoy le reſte de l'operation ſe continüe comme on l'a enſeigné dans la Regle cinquiéme & generale V. 27.

Mais quoyqu'il n'importe pas dans quel ordre les valeurs ſoient comparées deux à deux, il eſt neanmoins à propos de les comparer en telle ſorte que l'on en tire une égalité hors de laquelle on puiſſe chaſſer une inconnüe. Cela ſe fera ſi l'on a ſoin de comparer celles où les mêmes inconnües ſe trouvent également, & avec le même ſigne + ou —. Tout cecy s'éclaircira par les exemples ſuivans.

Premier Exemple.

Les âges de deux perſonnes font 100 années, & le premier âge ſurpaſſe le ſecond de 40.

Soit le premier âge y & le ſecond z. Donc $y+z=100$, & $y-z=40$. Cela eſtant je cherche par chaque égalité la valeur de y, & je trouve par la premiere $y=100-z$, & par la ſeconde $y=40+z$. Or y eſtant égal à y, la premiere valeur de cette inconnüe, c'eſt à dire $100-z$, ſera égale à la ſeconde $40+z$, j'auray donc l'égalité $100-z=40+z$, & par tranſpoſition $60=2z$. Donc $z=30$. Aprés quoy l'on connoît facilement y.

$$\left.\begin{array}{l} y+z=100.\ \text{Donc}\ y=100-z \\ y-z=40.\ \text{Donc}\ y=40+z \end{array}\right\{ \text{Donc}\ 100-z=40+z.\ \text{Et}\ 60=2z.$$

Second Exemple.

Trois perſonnes ont chacune un nombre d'écus, la premiere & la ſeconde ont a plus que la troiſiéme, la premiere & la troiſiéme ont b plus que la ſeconde, & la ſeconde & troiſiéme c plus que la premiere. Que doit avoir chaque perſonne?

Soit x le nombre des écus de la premiere, y celuy de la ſeconde, & z celuy de la troiſiéme. Donc $x+y=z+a$. $x+z=y+b$. & $y+z=x+c$. Cela eſtant, je cherche par chaque égalité la valeur de l'inconnüe x. Et je trouve par la premiere $x=z+a-y$, par la ſeconde $x=y+b-z$, & par la troiſiéme $x=y+z-c$. Or ſi je compare la premiere valeur de x avec la ſeconde, c'eſt à dire $z+a-y$ avec $y+b-z$, je connois que j'auray une égalité hors de laquelle aucune des deux inconnües y & z ne poura eſtre chaſſée, parcequ'elles ſont une fois chacune de part & d'autre ſous differens ſignes. Mais ſi je compare la premiere valeur avec la troiſiéme, je connois que j'auray une égalité hors de laquelle l'inconnüe z doit eſtre chaſſée, parcequ'elle eſt une fois dans chacune avec le ſigne $+$. Et pareillement ſi je compare la ſeconde valeur avec la troiſiéme, je connois que j'auray une égalité hors de laquelle l'inconnüe y doit eſtre chaſſée, parcequ'elle eſt une fois dans chacune avec $+$. Je compare donc la premiere valeur avec la troiſiéme, & j'ay l'égalité $z+a-y=y+z-c$, qui ſe réduit à $a+c=2y$. Donc $y=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c$. Ou bien je compare la ſeconde valeur avec la troiſiéme, & j'ay l'égalité $y+b-z=y+z-c$, qui ſe réduit à $b+c=2z$. Donc $z=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$. Et connoiſſant entierement l'une ou l'autre valeur, le reſte eſt facile à connoître.

$$x+y=z+a. \text{ Donc } x=z+a-y.$$
$$x+z=y+b. \text{ Donc } x=y+b-z.$$
$$y+z=x+c. \text{ Donc } x=y+z-c.$$

$$\text{Donc}\left\{\begin{array}{lll} z+a-y=y+b-z & \text{Donc } 2z+a=2y+b. & \text{Et } z=y-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b. \\ z+a-y=y+z-c. & \text{Donc } a+c=2y. & \text{Et } y=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c. \\ y+b-z=y+z-c. & \text{Donc } b+c=2z. & \text{Et } z=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c. \end{array}\right.$$

Troiſiéme exemple.

Trois perſonnes ont chacun un nombre d'écus, le premier & le ſecond ont a, le premier & le troiſiéme ont b, & le ſecond & troiſiéme ont c. Combien chacun a-t'il d'écus?

Soit le nombre de la premiere perſonne x, celuy de la ſeconde y, & de la troiſiéme z. Donc ſelon les trois ſuppoſitions, je dois avoir les trois égalitez $x+y=a$. $x+z=b$. & $y+z=c$. Or par la premiere, $x=a-y$, & par la ſeconde, $x=b-z$. Donc $a-y=b-z$. Et par reduction, $z=b-a+y$. Or ayant par cette égalité une valeur de z, j'en cherche encore une autre par la troiſiéme égalité $y+z=c$, que j'avois laiſſée, à cauſe que x ne s'y rencontre point. Et je trouve $z=c-y$. Comparant donc cette valeur de z avec la precedente, j'ay $b+y-a=c-y$. Et par reduction $2y=a+c-b$. Donc $y=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$. Or j'avois trouvé $z=c-y$. Donc $z=-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$. J'avois auſſi trouvé $x=b-z$. Donc $x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c$. Et la queſtion eſt univerſellement reſoluë.

$$\begin{array}{l} x+y=a. \\ x+z=b. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Donc } x=a-y \\ \text{Donc } x=b-z \end{array} \right. \text{. Donc} \left\{ a-y=b-z. \text{ Et } z=b-a+y. \right.$$

$y+z=c$. Donc $z=c-y$. Donc $b-a+y=c-y$. Et $2y=a-b+c$. Donc $x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c$. $y=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$. Et $z=-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$.

Soit $a=20$, $b=40$, & $c=30$. La premiere perſonne aura donné 15 écus, la ſeconde 5, & la troiſiéme 25. Les 15 écus de la premiere plus les 5 de la ſeconde en font 20, & plus les 25 de la troiſiéme en font 40. Et les 5 écus de la ſeconde plus les 25 de la troiſiéme en font 30.

DES RESOLUTIONS NEGATIVES.

Il faut remarquer que les queſtions peuvent ſouvent ſe propoſer de telle ſorte que leur reſolution ne peut eſtre poſitive, c'eſt à dire qu'on ne peut trouver des grandeurs poſitives leſquelles y ſatisfaſſent. Si par exemple nous ſuppoſons dans la queſtion precedente $a=20$, $b=40$, & $c=80$. La premiere perſonne auroit -10 écus, c'eſt à dire qu'elle ſeroit redevable de cette ſomme, la ſeconde en auroit 30, & la troiſiéme 50.

Or ſi les queſtions ſont reſoluës generalement, il eſt facile de connoître d'abord comment les queſtions doivent eſtre propoſées afin que leurs reſolutions puiſſent eſtre poſitives. Par exemple, il eſt bien viſible dans la reſolution precedente, que ſi a ſurpaſſe $b+c$, la troiſiéme grandeur $-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$ doit eſtre negative. De même ſi b ſurpaſſe $a+c$, la ſeconde grandeur $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$ ſera negative. Et pareillement ſi c ſurpaſſe $a+b$, ce ſera la premiere grandeur $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c$ qui ſera negative.

Il faut remarquer auſſi que les queſtions peuvent ſe propoſer de telle ſorte que l'on ne peut ſatisfaire pleinement à toutes leurs conditions, à cauſe que l'on y ſuppoſe quelque contradiction, ou à deſſein, ou bien par ignorance, parce que l'on n'en connoît pas la nature. Mais cela ſe connoit auſſi quand on a fini ſes operations. Par exemple, ſi outre les conditions de la queſtion precedente on avoit encore ſuppoſé celle-cy que les trois nombres inconnus fuſſent égaux à d, cette condition ne ſerviroit de rien. Car les trois premieres égalitez eſtant entierement reſoluës determinent les valeurs de chaque grandeur, de ſorte que ſi d eſt different de leur ſomme, l'on ne pouroit ſatisfaire à la quatriéme condition, & ſi elle luy eſtoit égale, la derniere condition n'auroit de rien ſervi pour trouver aucune des grandeurs. Ainſi elle eſt entierement inutile ; ſi l'on veut qu'elle ſerve, il en faut retrancher quelqu'autre.

Quatriéme

Quatriéme Exemple.

Quatre perſonnes ont chacune un nombre d'écus, les trois premiers ont a, les deux premiers & le quatriéme ont b, le premier & les deux derniers ont d, & les trois derniers ont e, quel nombre d'écus aura chaque perſonne ?

Soit le premier nombre appellé v, le ſecond x, le troiſiéme y, & le quatriéme z. Les ſuppoſitions donneront donc quatre égalitez. La premiere $v+x+y=a$, la ſeconde $v+x+z=b$, la troiſiéme $v+y+z=c$, & la quatriéme $x+y+z=d$.

Or par la premiere, $v=a-x-y$. Par la ſeconde, $v=b-x-z$, par la troiſiéme $v=c-y-z$. Je laiſſe la quatriéme comme elle eſt, parce que l'inconnuë v ne s'y rencontre point. Enſuite j'égale la premiere & ſeconde valeur de v, d'où je tire $z=b-a+y$. J'égale auſſi la premiere & troiſiéme valeur d'où je tire $z=c-a+x$. Aprés cela, je tire encore de la quatriéme égalité la valeur de la méme inconnüe z, & je trouve $z=d-x-y$. J'ai donc trois valeurs de z exprimées differemment dans leſquelles ni v ni z ne ſe rencontrent plus. La premiere valeur eſt $b-a+y$, la ſeconde $c-a+x$, & la troiſiéme $d-x-y$. J'égale donc ces valeurs, la premiere avec la ſeconde, d'où je tire $y=c+x-b$, & la ſeconde avec la troiſiéme, d'où je tire $y=d-c+a-2x$. L'on peut remarquer que je n'égale pas la premiere avec la troiſiéme, parce que je trouverois une égalité qui ne pouroit ſe reduire ſans fraction. Or ayant de nouveau deux valeurs de y, où la ſeule inconnüe x ſe rencontre, c'eſt à dire $c+x-b$, & $d-c+a-2x$, je trouve enfin l'égalité $3x=a+b-2c+d$, Aprés quoy le reſte de la reſolution eſt facile à trouver. Car mettant la valeur de x dans l'égalité $y=d-c+2x$, ou bien dans l'autre $y=c+x-b$, la valeur de y deviendra entierement connüe ; apres quoy mettant les valeurs toutes connües des grandeurs x & y dans l'une des trois valeurs de z, la grandeur z ſera toute connüe ; & enfin mettant les valeurs connües des grandeurs x, y, & z, dans l'une ou l'autre des trois valeurs de v, il vaut toûjours mieux choiſir la plus ſimple, l'on connoîtra la grandeur v, & la queſtion ſera univerſellement reſolüe. Les quatre grandeurs ſeront celles-ci diviſées chacune par 3. La premiere $a+b+c-2d$, la ſeconde $a+b-2c+d$, la troiſiéme $a-2b+c+d$, & la quatriéme $-2a+b+c+d$.

$$\left.\begin{array}{r} 1^{\text{ere}}\ \textit{égalité}\ v=a-x-y. \\ 2^{e}.\ v=b-x-z. \end{array}\right\}\ \text{Donc } a-x-y=b-x-z.\ \text{Et } z=b-a+y.$$

$$3^{e}.\ v=c-y-z.\quad \text{Donc } a-x-y=c-y-z.\ \text{Et } z=c-a+x.$$

$$4^{e}.\ \textit{égalité}\quad x+y+z=d.\quad \text{Donc } z=d-x-y.$$

$$\text{Donc}\left\{\begin{array}{l} b-a+y=c-a+x.\ \ \text{Et } y=c+x-b \\ c-a+x=d-x-y.\ \ \text{Et } y=d-c+a-2x. \end{array}\right.$$

$$\text{Donc } c+x-b=d-c+a-2x.\ \text{Et } 3x=d-2c+a+b.$$

Soit $a=27$, $b=24$, $c=22$, & $d=20$. La premiere perſonne aura donc 11 écus, la ſeconde 9, la troiſiéme 7, & la quatriéme 4.

Il eſt viſible par la formule que la reſolution ne peut eſtre poſitive, ſi chacune des grandeurs données priſe 2 fois n'eſt plus petite que la ſomme des trois autres. Ou ce qui revient au méme, ſi chacune n'eſt plus petite que le tiers de la ſomme des quatre.

Pareillement ſi l'on demandoit cinq grandeurs, dont les quatres premieres fuſſent a, les trois premieres & la cinquiéme b, les deux premieres & les deux dernieres c, la premiere & les trois dernieres d, & enfin les quatres dernieres e; les cinq grandeurs ſeroient celles qui ſuivent diviſées chacune par 4.

La 1^ere^ $\overline{a+b+c+d-3e}$. La 2^e^. $\overline{a+b+c-3d+e}$. La 3^e^. $\overline{a+b-3c+d+e}$.

La 4^e^. $\overline{a-3b+c+d+e}$. Et la 5^e^. $\overline{-3a+b+6+d+e}$.

Il en eſt ainſi des autres à l'infini. Car ſi l'on demande pluſieurs grandeurs telles qu'eſtant priſes alternativement toutes enſemble moins une, les ſommes ſoient certaines grandeurs déterminées, l'on fera des ſommes ſemblables aux precedentes, qui ſeront diviſées chacune par le nombre des grandeurs diminué de l'unité, & où chaque grandeur ſera alternativement retranchée autant de fois moins une, que le diviſeur aura d'unitez. Ou bien ce qui revient au même, l'on diviſera la ſomme de toutes les grandeurs données par le nombre de ces grandeurs diminué de l'unité, & l'expoſant ſera la ſomme de toutes les grandeurs cherchées, de laquelle retranchant chaque grandeur donnée alternativement & dans un ordre retrograde, les reſtes donneront celles que l'on cherche.

Cinquiéme Exemple.

Pour la reduction des monnoyes & des meſures.

L'on peut encore rapporter icy le ſecret de la réduction des monnoyes & des meſures de tous les differens pays.

Par exemple, ſi 27 pieces d'une monnoye de France en valent 16 d'une monnoye d'Italie, que trois pieces de cette monnoye d'Italie en valent 5 d'une monnoye d'Eſpagne, & que quatre pieces de cette monnoye d'Eſpagne en valent 5 d'une monnoye d'Allemagne. Combien faudroit-il de pieces de la monnoye de France pour en faire 200 de celle d'Allemagne?

Soit la monnoye de France appellée f, celle d'Italie appellée i, celle d'Eſpagne appellée e, & d'Allemagne appellée a. (il eſt ſouvent utile de nommer les grandeurs par la premiere lettre du mot qui les ſignifie, d'appeller par exemple les poids p, les viteſſes v, les mouvemens m, les temps t, & ainſi des autres.) Nous aurons donc trois égalitez, la premiere $27f=16i$, la ſeconde $3i=5e$, & la troiſiéme $4e=5a$. Et enſuite il faudra faire ſortir les deux inconnües i & e, & ne laiſſer que les deux autres f & a, que l'on doit comparer enſemble. Or la premiere égalité eſt $27f=16i$. Donc $i=\frac{27}{16}f$. La ſeconde eſt $3i=5e$. Donc $i=\frac{5}{3}e$. Et comparant les deux valeurs de i, l'on aura $\frac{5}{3}e=\frac{27}{16}f$. Et multipliant le tout par 3, & le diviſant par 5, l'on aura $e=\frac{81}{80}f$. Or la troiſiéme égalité eſt $4e=5a$. Donc $e=\frac{5}{4}a$. Donc $\frac{5}{4}a=\frac{81}{80}f$. Et multipliant le tout par 4, & le diviſant par 5, l'on aura $a=\frac{81}{100}f$. Donc $200a=162f$. Il faut 162 pieces de la monnoye de France pour en faire 200 de celle d'Allemagne.

Pareillement ſi 16 aulnes de Lyon en valent 27 d'Amſterdam, que 3 aulnes de Lyon en valent 5 d'Anvers, & 4 d'Anvers 5 de Cologne, on trouvera qu'il faut 162 aulnes d'Amſterdam pour en faire 200 de Cologne.

Autre Exemple.

7 livres de ſucre valent 2 livres de gerofles, 3 livres de gerofles valent 13 livres de poivre. Si la livre de poivre vaut 12 ſols, combien vaudront 476 livres de ſucre?

Soit la livre de ſucre appellée $ſ$, celle de gerofle appellée g, celle de poivre appellée p, & le ſol appellé a pour le diſtinguer de la livre de ſucre $ſ$. Donc $7ſ=2g$. $3g=13p$. & $1p=12a$. Il faut faire ſortir les deux inconnües g & p, & laiſſer les deux autres $ſ$ & a. Or $7ſ=2g$. Donc $1g=\frac{7}{2}ſ$. Or $3g=13p$. Donc $1g=\frac{13}{3}p$. Donc $\frac{13}{3}p=\frac{7}{2}ſ$. & $p=\frac{21}{26}ſ$. Or $1p=12a$. Donc $12a=\frac{21}{26}ſ$. Et diviſant le tout par 12, l'on aura $a=\frac{7}{108}ſ$. ou bien $ſ=\frac{108}{7}a$. Donc $476ſ=476$ fois $\frac{108}{7}a$, c'eſt à dire que $476ſ$ vaudront 7344 ſols, ou 367 livres 2 ſols. Il en eſt ainſi de toutes les queſtions ſemblables.

Sixiéme Exemple.

Quatre perſonnes ont chacune un nombre d'écus, les trois premieres ont a plus que la quatriéme, les deux premieres & la quatriéme ont b plus que la troiſiéme, la premiere & les deux dernieres ont c plus que la ſeconde, & les trois dernieres e plus que la premiere.

Les quatre ſuppoſitions fourniront quatre égalitez, de chacune deſquelles on tirera la valeur de la grandeur v. Enſuite l'on fera deux égalitez des quatre valeurs, l'une des deux premieres, & l'autre des deux dernieres. L'on tirera en même ſorte la valeur de $2z$ de chacune de ces deux égalitez, aprés quoy l'on fera une égalité des deux valeurs découvertes, qui ſe réduira à $4y=a-b+c+d$. Or $4y$ eſtant connu, y l'eſt auſſi, & le reſte eſt facile à reſoudre. Nous en avons donné la formule ailleurs.

$$\begin{array}{l} v=z+a-x-y \\ v=y+b-x-z \end{array} \left\{ \text{Donc } z+a-y=y+b-z. \quad \text{Et } 2z=2y+b-a \right.$$

$$\begin{array}{l} v=x+c-y-z \\ v=x+y+z-d \end{array} \left\{ \text{Donc } c-y-z=y+z-d. \quad \text{Et } 2z=c+d-2y. \right.$$

$$\text{Donc } 2y+b-a=c+d-2y. \quad \text{Et } 4y=a-b+c+d.$$

COROLLAIRE.

Il en eſt ainſi des autres. De ſorte que ſi l'on a trois égalitez ou bien quatre, qui renferment chacune une même inconnuë, on les réduit à deux, qui ſe réduiſent à une. Et ſi l'on en a cinq ou bien ſix, on les réduit à trois, ces trois à deux; qui ſe réduiſent à une. Pareillement ſi l'on en avoit 11 ou bien 12, on les réduiroit à ſix, ces ſix à trois, &c.

AVERTISSEMENT.

Il n'y a point de Regle plus importante ny plus feconde que celle-cy pour découvrir des veritez. Les Mathematiques, & generalement toutes les autres Sciences, ne peuvent eſtre pouſſées ny perfectionnées ſans elle, & toutes peuvent l'eſtre d'autant plus qu'on aura ſoin de l'obſerver plus exactement. Car c'eſt par ſon moyen que l'on peut comparer les veritez éloignées les unes avec les autres, & les rappeller à leurs principes.

DES MOYENS

QUI PEUVENT FACILITER LA VOYE ANALYTIQUE.

IV. L'on peut toûjours former autant d'égalitez que l'on demande de grandeurs, puiſqu'on peut toûjours exprimer chacune par une lettre inconnuë qui ne marquera qu'elle ſeule. Mais la pluſpart de ces égalitez peuvent ſe faire fort ſouvent par la veuë ſeule de l'eſprit, ſecouruë ſi l'on veut par l'imagination, ſans qu'il ſoit beſoin de les exprimer. Et c'eſt ce qui arrive, lorſqu'au lieu d'employer quelques ſuppoſitions pour marquer ſenſiblement des égalitez, l'on s'en ſert pour exprimer les grandeurs cherchées avec un nombre plus petit de lettres inconnuës.

Par exemple, la ſomme de trois grandeurs eſt a, la premiere ſurpaſſe la ſeconde de b, & la ſeconde ſurpaſſe la troiſiéme de c. Si j'appelle z la troiſiéme qui eſt la plus petite, la ſeconde ſera $z+c$ par la troiſiéme ſuppoſition, puiſqu'elle doit ſurpaſſer de c la troiſiéme grandeur z. La premiere ſera pareillement $z+b+c$, par la ſeconde ſuppoſition, puiſqu'elle doit ſurpaſſer de b la ſeconde $z+c$. Les trois grandeurs eſtant donc exprimées par le moyen d'une ſeule lettre inconnuë, il ne me reſtera plus qu'à ſatisfaire à la premiere condition, en égalant la ſomme des trois grandeurs z, $z+c$, & $z+b+c$ à la grandeur connuë a, ce qui fait $3z+b+2c=a$, qui ſe réduit à $z=\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}b-\frac{2}{3}c$. Et pour les deux autres égalitez qui ſemblent avoir eſté ſupprimées, elles ont eſté faites par la ſeule vûe de l'eſprit, en égalant la ſeconde grandeur à $z+c$, par un raiſonnement tiré de la troiſiéme ſuppoſition; & la premiere grandeur à $z+b+c$, par un raiſonnement tiré de la ſeconde. Or il ne faut pas s'imaginer que l'on raiſonne autrement en formant ces égalitez de la ſorte que l'on feroit, ſi l'on avoit marqué chaque grandeur par un caractere propre. Car appellant dans noſtre exemple la premiere grandeur x, la ſeconde y, & la troiſiéme z, la ſeconde ſuppoſition donnera $x=y+b$, ou bien par tranſpoſition $y=x-b$; & la troiſiéme donnera $y=z+c$. Je paſſe icy la premiere ſuppoſition, parcequ'elle n'a point ſervi pour en tirer quelque égalité par la veuë ſeule de l'eſprit. Or égalant les deux valeurs de la même inconnuë y, l'on aura $x-b=z+c$. Donc par tranſpoſition $x = z + b + c$. La premiere grandeur x eſt donc égale à $z + b + c$, & la ſeconde y à $z + c$. Il en eſt ainſi des autres.

$$\begin{array}{l} 1^{ere}\ x = y + b.\ \text{Donc}\ y = x - b. \\ \quad 2^{e}\ \textit{égalité}\ y = z + c. \end{array} \left\{ \text{Donc}\ x - b = z + c.\ \text{Et}\ x = z + b + c. \right.$$

Il eſt donc viſible que les raiſonnemens que l'on fait par la veuë ſeule de l'eſprit ne different point de ceux que l'on fait par les operations, ſi ce n'eſt que l'eſprit opere plus promptement que la plume. Ainſi les calculs de l'Analyſe ne ſe font point à taſtons, comme diſent quelques-uns ; au contraire elles ſont des expreſſions les plus ingenieuſes que l'on puiſſe inventer des raiſonnemens les plus exacts & les plus methodiques que l'on fait ſur les grandeurs.

L'on ne peut rien fournir à l'eſprit qui luy ſoit d'un plus grand ſecours pour découvrir des veritez, elles ſoulagent ſa memoire & elles la ſoûtiennent, parcequ'elles luy repreſentent ſenſiblement & en abregé le grand nombre des idées qu'il faut appercevoir, & des raiſonnemens par leſquels ces idées doivent eſtre comparées les unes avec les autres. Leur uſage eſt encore merveilleux pour rendre l'eſprit attentif, car elles tournent ſa veuë préciſement ſur ſon ſujet, elles luy en repreſentent toutes les parties, & luy marquent l'ordre naturel qui doit le conduire & le regler dans l'examen de ces parties, & enfin toutes les comparaiſons qu'il en doit faire, & en la maniere qu'il les doit faire pour arriver aux connoiſſances qu'il cherche, ou pour connoître au moins quels ſont les milieux qui luy manquent pour y arriver, lorſqu'elles paſſent ſa portée. C'eſt à mon avis pour cela qu'entre ceux qui ſçavent l'Analyſe, les plus habiles luy donnent le premier rang entre toutes les parties des Mathematiques, & qu'ils tombent d'accord que ſans ſon ſecours il eſt impoſſible d'en traitter aucune comme il faut. Il eſt vray que pluſieurs perſonnes luy preferent la Geometrie, mais il eſt facile de voir que leur jugement n'eſt pas fondé ſur une connoiſſance aſſez claire de ces deux Sciences, & de ce qu'elles ont de plus avantageux l'une que l'autre. Car la maniere de raiſonner dans la Geometrie des Anciens, & la maniere de raiſonner dans l'Analyſe, different ſeulement en ce que celle-là met d'ordinaire en pluſieurs pages, ce que celle-cy peut renfermer en tres-peu de lignes. C'eſt pourquoy l'eſprit ſe fatigue & ſe rebutte dans l'une, parcequ'il n'y peut preſque rien apprendre ſans des peines & des efforts d'imagination incroyables ; Mais dans l'autre au contraire l'eſprit prend plaiſir à voir réunies d'une maniere ſenſible & extrêmement abregée, un grand nombre d'idées & de veritez, dont la veuë luy eſt d'autant plus agreable qu'il a moins de peine à ſe les repreſenter, & qu'il les peut penetrer plus facilement. Ceux qui ont appris la Geometrie de Monſieur Deſcartes, ont une belle preuve de ce que je dis ; car ils voyent avec admiration plus de veritez recueillies dans ce petit Livre, & de plus fecondes que l'on n'en peut trouver dans pluſieurs gros volumes des Geometres qui l'ont precedé, & que l'on n'a pû même en découvrir avant luy, faute d'avoir aſſez connu ou ſuivi ſa methode, c'eſt à dire, faute d'avoir employé davantage l'Analyſe que l'on n'a fait. Il eſt vray que c'eſt un ſentiment aſſez commun que les plus ſçavans Mathematiciens ou Geometres de l'Antiquité ſe ſervoient de l'Analyſe pour découvrir la pluſpart de leurs propoſitions, & pour en démontrer la conſtruction; & qu'enſuite aprés s'en eſtre ſervi en particulier, ils la ſupprimoient. Si cela eſt, comme il paroiſt fort vray-ſemblable, quoyque je ne veüille pas l'aſſurer poſitivement; N'eſt-ce point que ces Auteurs vouloient que ceux qui liroient leurs Ecrits, les admiraſſent d'autant plus qu'ils auroient plus de peine à les apprendre, & que par conſequent la methode dont ils ſe ſervoient leur paroiſtroit plus difficile à inventer & à ſuivre?

Mais pour revenir à l'explication de nos Regles, s'il eſt plus general d'appeller chaque inconnuë par ſon caractere propre, cette methode a pourtant ſes difficultez particulieres qui ne ſont pas petites, ſur tout ſi les queſtions ſont difficiles, & ſi elles renferment pluſieurs conditions. Ainſi il vaut mieux marquer les grandeurs ſans employer que le plus petit nombre d'inconnües que l'on poura. Nous tâcherons de donner dans ce Livre les connoiſſances generales qui ſont les plus neceſſaires à ce deſſein. Et pour le faire dans un ordre plus naturel, nous ne ſuppoſerons d'abord aucune de ces connoiſſances, mais nous chercherons à les découvrir auparavant par la voye Analytique, & aprés les avoir ainſi découvertes, nous nous en ſervirons pour en découvrir encore d'autres qui nous en découvriront de nouvelles. Et ainſi de ſuite. Et toutes ces connoiſſances acquiſes par differens degrez nous fourniront autant de Theoremes ou de Problemes generaux qui pouront ſervir à reſoudre immediatement les queſtions infinies qui s'y rapporteront.

PREMIER PRINCIPE.

V. La ſomme de pluſieurs grandeurs eſtant donnée, & la ſomme de toutes les autres moins une l'eſtant auſſi, trouver chaque grandeur.

Soit $ſ$ la ſomme totale de trois grandeurs, a la ſomme des deux premieres, b la ſomme de la premiere & troiſiéme, & c la ſomme de la ſeconde & troiſiéme. Puiſque les trois ſont $ſ$, & les deux premieres a, la troiſiéme eſt donc $ſ-a$. De même puiſque les trois ſont $ſ$, & la premiere & troiſiéme b, la ſeconde ſera donc $ſ-b$. Et par un ſemblable raiſonnement, la premiere ſera $a-c$. Les trois grandeurs ſeront donc $ſ-c$, $ſ-b$, & $ſ-a$.

Si donc trois perſonnes avoient 45 eſcus, que les deux premieres en euſſent 20, la premiere & troiſiéme 40, & la ſeconde & troiſiéme 30. Puiſque $ſ=45$, $a=20$, $b=40$, & $c=30$; l'on aura $ſ-c=15$, $ſ-b=5$, $ſ-a=25$. La premiere perſonne aura 15 eſcus, la ſeconde 5, & la troiſiéme 25.

PREMIERE QUESTION.

VI. Trouver trois grandeurs dont les deux premieres faſſent a, la premiere & troiſieme b, & la ſeconde & troiſiéme c.

Soit z la ſomme inconnuë des trois grandeurs. Donc par le principe qui precede, la premiere ſera $z-c$, la ſeconde $z-b$, la troiſiéme $z-a$, & la ſomme des trois $3z-a-b-c$. Or z eſt auſſi la ſomme de ces mêmes grandeurs. Donc $3z-a-b-c=z$. Et par tranſpoſition, $2z=a+b+c$. Et le tout eſtant diviſé par 2, $z=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$. Mettant donc au lieu de z cette valeur toute connuë qui luy eſt égale dans l'expreſſion des trois grandeurs $z-c$, $z-b$, & $z-a$, la premiere ſera $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$, la ſeconde $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$, & la troiſiéme $-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$. Ce qui nous fournit le Theoreme, ou Probleme ſuivant, qui peut ſ'appeller auſſi une Regle ou Formule generale.

Regle. La moitié des trois ſommes alternatives, moins la troiſiéme, eſt égale à la premiere grandeur; moins la ſeconde, elle eſt égale à la ſeconde grandeur; & moins la premiere, elle eſt égale à la troiſiéme.

Soit $a=20$, $b=40$, & $c=30$. Donc $z-c=15$, $z-b=5$, & $z-a=25$.

J'ay marqué plus haut les progrez infinis des queſtions de cette ſorte. Voyez pag.

SECONDE QUESTION.

VII. Trouver cinq grandeurs dont les deux premiers ſoient a, la ſeconde & troiſiéme b, la troiſiéme & quatriéme c, la quatriéme & la cinquiéme d. & la cinquiéme plus la premiere ſoit e.

Soit z la ſomme des cinq grandeurs. Puiſque la premiere & ſeconde font a, & la troiſiéme & quatriéme c, la ſomme des quatre premieres ſera donc $a+c$, laquelle eſtant retranchée de la ſomme entiere des cinq grandeurs qui eſt z, laiſſera pour la cinquiéme $z-a-c$. Et par de ſemblables raiſonnemens la quatriéme ſera $z-b-e$, la troiſiéme $z-a-d$, la ſeconde $z-c-e$, la premiere $z-b-d$, & la ſomme des cinq ſera $5z-2a-2b-2c-2d-2e$. Or z eſt auſſi la ſomme de ces mêmes grandeurs. Donc $5z-2a-2b-2c-2d-2e=z$. Donc $4z=2a+2b+2c+2d+2e$. Et z ſera la moitié de la ſomme entiere $\overline{a+b+c+d+e}$. Si donc on met cette valeur au lieu de z qui luy eſt égale, dans l'expreſſion des cinq grandeurs $z-a-c$, &c. ces grandeurs ſeront celles-cy diviſées chacune par 2. La premiere $\overline{a-b+c-d+e}$, la 2^e. $\overline{a+b-c+d-e}$, la 3^e. $\overline{-a+b+c-d+e}$, la 4^e. $\overline{a-b+c+d-e}$, & la 5^e. $\overline{-a+b-c+d+e}$.

Les queſtions ſemblables ſe reſoudront en même ſorte, pourveu que le nombre des grandeurs ſoit pair; car ſ'il eſtoit impair, Monſieur Bachet remarque que la reſolution ſeroit indéterminée, c'eſt à dire qu'elle pouroit recevoir pluſieurs reſolutions differentes, au moins ſi elle eſtoit poſſible. Par exemple, dit-il, ſi l'on demandoit ſix nombres tels que le premier & le ſecond fiſſent 13, le ſecond & troiſiéme 15, le troiſiéme & quatriéme 19, le quatriéme & cinquiéme 11, le cinquiéme & ſixiéme 10, & enfin le ſixiéme avec le premier 16, les ſix nombres pouront eſtre 8. 5. 10. 9. 2. 8. ou bien 7. 6. 9. 10. 1. 9. ou bien encore d'autres. Je reſerve à parler ailleurs de ces ſortes de reſolutions qui ſont indéterminées.

TROISIEME QUESTION.

VIII. La ſomme de deux grandeurs eſtant donnée, & leur difference l'eſtant auſſi, trouver ces grandeurs.

Soit a la ſomme des deux grandeurs, & b leur difference. Si j'appelle z la plus petite des deux inconnües, la plus grande ſera $a-z$ par la premiere ſuppoſition, & par le principe qui precede, & la difference des deux grandeurs ſera $a-z-z$, ou $a-2z$. Or b eſt auſſi la difference de ces mêmes grandeurs. Donc $a-2z=b$. Et par tranſpoſition $a-b=2z$. Ou bien en raiſonnant d'une autre ſorte. Puiſque z eſt la plus petite, & b la difference ou l'excez donr la plus grande ſurpaſſe z, la plus grande ſera $z+b$, & la ſomme des deux $2z+b$. Or a eſt auſſi la ſomme de ces mêmes grandeurs. Donc $2z+b=a$. Et par tranſpoſition $2z=a-b$, qui eſt la même égalité que j'avois déja trouvée. Diviſant donc le tout par 2, j'auray $z=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$.

Ou bien ſoit y la premiere grandeur, l'autre qui eſt la plus petite ſera donc $y-b$, & leur ſomme $2y-b=a$. Et par tranſpoſition, $2y=a+b$. Et diviſant le tout par 2, $y=\frac{1}{2}a+\frac{}{2}b$. La plus grande ſera donc $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$, & la plus petite $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$. Ou bien ſi j'appelle la ſomme $2a$, & la difference $2b$ pour n'avoir point de fraction, la plus grande ſera $a+b$, & la plus petite $a-b$. Ce qui nous fournit la Regle ſuivante qui nous ſervira dans la ſuite d'un ſecond Principe.

Regle.

La moitié de la ſomme de deux grandeurs, plus la moitié de leur difference, eſt égale à la plus grande; & la moitié de la ſomme moins la moitié de la difference, eſt égale à la plus petite.

Si donc les deux âges de deux perſonnes font 100 années, & que l'une ait 40 années plus que l'autre, la ſomme $2a=100$, & la difference $2b=40$. Donc $a+b=50+20=70$, & $a-b=50-20=30$. Le premier âge ſera 70, & le ſecond 30.

QUATRIE'ME QUESTION.

IX. Connoiſſant la difference de deux grandeurs, & le rapport de l'une à l'autre, trouver chaque grandeur.

Soit la difference b, le rapport de la grande à la petite comme g à p, & la plus petite grandeur ſoit appellée z. La plus grande ſera donc $z+b$, & la progreſſion $z+b . z :: g . p$. ou bien *permutando* $z . z+b :: p . g$. Donc $gz=pz+bp$. Et par tranſpoſition $gz-pz=bp$. Et le tout eſtant diviſé par $g-p$, l'on aura $z . 1 :: bp . g-p$. c'eſt à dire $z=\frac{bp}{g-p}$.

Ou bien ſoit la plus grande appellée y. La plus petite ſera donc $y-b$. Et la proportion $y . y-b :: g . p$. Donc $py=gy-bg$. Et par tranſpoſition $gy-py=bg$. Et le tout eſtant diviſé par $g-p$, l'on aura $y . 1 :: bg . g-p$.

Ainſi pour trouver deux nombres dont la difference ſoit 30, & le plus grand triple du plus petit. Le rapport de ces nombres eſt 3 à 1. Donc

$y . z :: 3 . 1$.

$y.z::3.1$. Donc $1y=3z$, & la difference $y-z=3z-z=2z$. Or 30 eſt auſſi la difference des grandeurs. Donc $2z=30$, & $z=15$. Or $y=3z$. Donc $y=45$. Les deux nombres ſont donc 45 & 15.

Regle. Le produit de la difference de deux grandeurs par le plus grand terme de leur rapport, diviſé par la difference des termes de ce même rapport, eſt égal à la plus grande; Et le produit de la difference des grandeurs par le plus petit terme du rapport, diviſé par la difference de ſes deux termes, eſt égal à la plus petite.

Soit $b=12$, $g=3$, $p=2$. Donc $y=36$, & $z=24$.

CINQUIÉME QUESTION.

Connoiſſant deux grandeurs qui ſoient chacune au deſſous de la juſte grandeur, & le rapport des deux deffauts, trouver la juſte grandeur. X.

Soient les grandeurs connües la plus grande a, & la plus petite b. Puiſque chacune eſt au deſſous de la juſte grandeur, il eſt viſible que le deffaut de la petite ſurpaſſe le deffaut de la grande, puiſqu'il s'en manque davantage qu'elle ne ſoit égale à la juſte grandeur. Soit donc le rapport du deffaut de la grandeur b au deffaut de la grandeur a comme g à p, & ſoit la juſte grandeur appellée z, le plus petit deffaut ſera donc $z-a$, le plus grand $z-b$, & la proportion $z-a.\ z-b::p.g$. Donc $gz-ag=pz-bp$. Et par tranſpoſition $gz-pz=ag-bp$. Diviſant donc le tout par $g-p$, l'on aura $z.1::ag-bp.\ g-p$.

Regle. Donc le produit de la plus grande des deux données par le plus grand terme du rapport des deux deffauts, moins le produit de la plus petite grandeur par le plus petit terme du rapport, eſtant diviſé par la difference des deux termes du rapport, l'expoſant ſera la juſte grandeur.

Soit $a=40$, $b=30$, $g=3$, & $p=2$. Donc la juſte grandeur $z=60$.

SIXIÉME QUESTION. XI.

Connoiſſant deux grandeurs qui ſoient chacune au deſſus de la juſte grandeur, & le rapport des deux excez, trouver la juſte grandeur.

Soient les grandeurs connuës la plus grande a, & la plus petite b. Puiſque chacune eſt au deſſus de la juſte grandeur, il eſt viſible que l'excez de la plus grande ſurpaſſe l'excez de la plus petite, car la juſte grandeur eſt plus éloignée de celle-là que de celle-cy. Soit donc le rapport de l'excez de la grandeur a à l'excez de la grandeur b, comme g à p, & ſoit la juſte grandeur appellée z, le plus grand excez ſera donc $a-z$, le plus petit $b-z$, & la proportion $a-z.\ b-z::g.p$. Donc $ap-pz=bg-gz$. Et par tranſpoſition, $gz-pz=bg-ap$. Diviſant donc le tout par $g-p$, l'on aura la juſte grandeur $z.1::bg-ap.\ g-p$.

Regle. Donc le produit de la plus petite grandeur par le plus grand terme du rapport des excez, moins le produit de la plus grande par le plus petit terme du même rapport, eſtant diviſé par la difference des deux termes du rapport, l'expoſant ſera la juſte grandeur.

Soit $a=140$, $b=60$, $g=3$ & $p=1$. Donc $z=20$.

La Formule $z.1::bg-ap.\ g-p$. fait aſſez voir que la juſte grandeur ne poura eſtre poſitive, ſi bg n'eſt plus grand que ap.

Soit par exemple $a=140$, $b=60$, $g=3$, & $p=2$. La juſte grandeur ſelon noſtre formule eſt -100, & l'on n'en peut trouver de poſitive; Les deux excez ſont 240 & 160 qui ont entr'eux même rapport que 3 à 2.

SEPTIE'ME QUESTION.

XII. Connoiſſant deux grandeurs, l'une au deſſus, l'autre au deſſous de la juſte grandeur, trouver la juſte grandeur.

Soient les grandeurs connuës la plus grande a, à qui appartient l'excez, & la plus petite b à qui appartient le deffaut, comme l'excez de la premiere peut eſtre ou plus grand ou plus petit que le deffaut de la ſeconde, ſoit le rapport de l'excez au deffaut comme e à d, il n'importe lequel des deux ſoit le plus grand : & ſoit la juſte grandeur appellée z. L'excez ſera donc $a - z$, le deffaut $z - b$, & la proportion $a - z . z - b :: e . d$. Donc $ad - dz = ze - be$. Et par tranſpoſition, $ze + dz = ad + be$. Diviſant donc le tout par $e + d$, l'on aura la juſte grandeur $z . 1 :: ad + be . e + d$.

Regle. Donc le produit de la plus grande des deux grandeurs données par le ſecond terme du rapport, plus le produit de la plus petite grandeur par l'autre terme, eſtant diviſé par la ſomme des deux termes de ce même rapport, l'expoſant ſera la juſte grandeur.

Soit $a = 180$, $b = 60$, $e = 5$, & $d = 1$. Donc $z = 80$.

HUITIE'ME QUESTION.

XIII. Connoiſſant la ſomme de deux grandeurs, & la ſomme de quelques parties déterminées de l'une ajoûtées à quelques autres parties déterminées de l'autre, trouver chaque grandeur.

Soit a la ſomme des grandeurs, b celle de leurs parties déterminées, & que la fraction $\frac{c}{d}$ détermine les parties que doit fournir la premiere grandeur, ou pour parler comme Viete que c ſoit à d comme ces parties à leur grandeur. Et pareillement que la fraction $\frac{e}{f}$ détermine les parties que doit fournir la ſeconde grandeur, je ſuppoſe que la fraction $\frac{c}{d}$ ait une moindre valeur que $\frac{e}{f}$; pour les grandeurs il n'importe pas laquelle ſoit la plus grande ou la plus petite. Soient les parties que doit fournir la premiere grandeur appellées z, les parties que la ſeconde fournira ſeront donc $b - z$, puiſque b eſt la ſomme entiere de toutes les parties contribuées par les deux grandeurs. Or $c . d :: z . \frac{dz}{c}$. C'eſt pourquoy la premiere des deux grandeurs que l'on cherche ſera $\frac{dz}{c}$. Et pareillement $e . f :: b - z . \frac{bf - fz}{e}$. La ſeconde grandeur ſera donc $\frac{bf - fz}{e}$. Or a eſt la ſomme des deux grandeurs. L'égalité ſera donc $\frac{dz}{c} + \frac{bf - fz}{e} = a$. Et le tout eſtant multiplié par ec, elle ſera $edz + bcf - cfz = ace$. Et par tranſpoſition $edz - cfz = ace - bcf$. Diviſant donc le tout par $ed - cf$, l'on aura $z . 1 :: ace - bcf . ed - cf$. Mettant donc cette valeur $\frac{ace - bf}{de - cf}$

au lieu de z qui luy eſt égale dans les deux expreſſions de la premiere grandeur $\frac{dz}{c}$, & de la ſeconde $\frac{bf-fz}{e}$. La premiere ſera $\frac{ade-bdf}{de-cf}$, & la ſeconde $\frac{bdf-acf}{de-cf}$.

Où il faut remarquer que la reſolution ſeroit negative ſi bf eſtoit plus grand que ae, ou bd plus petit que ac. L'Analyſe de cette queſtion paroiſt moins ſimple ici que dans Viete. Cependant elle l'eſt davantage, car la formule qu'elle fournit, ou les expreſſions qu'elle marque, ſont plus commodes pour en faire les applications particulieres, dont elles abregent extrêmement les ſupputations, au lieu que celles de Viete les rendent plus laborieuſes, comme on le peut voir facilement. Et c'eſt la même choſe des queſtions ſuivantes.

Si donc il falloit partager 60 en deux nombres tels que $\frac{1}{5}$ du premier plus $\frac{1}{3}$ du ſecond fiſſent 14. Par les ſuppoſitions $1.\,5 :: z.\,5z$, & $1.\,3 :: 14-z.\,42-3z$, le premier nombre eſt donc $5z$, le ſecond $42-3z$, & leur ſomme $2z+42=60$. Donc $2z=18$, & $z=9$. Donc le premier nombre $5z=45$, & le ſecond $42-15$, ou plûtoſt $60-45=15$. Les nombres ſont donc 45 & 15 ; leur ſomme eſt 60, & la cinquiéme partie de 45, qui eſt 9, plus le tiers de 15, qui eſt 5, font la ſomme 14.

Regle. Le produit de la ſomme de deux grandeurs par le premier terme de la ſeconde fraction, (j'entens par ſeconde fraction celle qui vaut davantage) moins un autre produit de la ſomme des parties contribuées par le ſecond terme de la même fraction, eſtant multiplié par le ſecond terme de la premiere ; & le ſolide qu'on trouve eſtant diviſé par le produit du ſecond terme de la premiere fraction par le premier de la ſeconde, moins le produit du premier terme de la premiere par le ſecond de la ſeconde, l'expoſant ſera l'une des deux grandeurs cherchées. Et cette grandeur eſtant retranchée de la ſomme des deux, le reſte ſera l'autre grandeur cherchée.

Soit $a=60$, $b=14$, $c=1$, $d=5$, $e=1$, & $f=3$. Donc $x=45$, & $y=15$. Soit auſſi $a=43$, $b=27$, $c=2$, $d=5$, $e=3$, & $f=4$. Donc $x=15$, & $y=28$. Dans l'un le premier nombre 45 ſurpaſſe le ſecond 15, & dans l'autre le ſecond 28 ſurpaſſe le premier 15. Pour les fractions, les premieres $\frac{1}{5}$ & $\frac{2}{5}$ ſont toûjours moindres que les ſecondes $\frac{1}{3}$ & $\frac{3}{4}$. Que ſi l'on vouloit mettre les plus grandes les premieres, la formule auroit lieu, en changeant ſeulement les ſignes, $+$ en $-$, & $-$ en $+$.

Mais ſi $a=60$, $b=14$, $c=1$, $d=6$, $e=1$ & $f=5$. La grandeur x ſeroit le nombre negatif -60, & y le nombre poſitif 120. Et la ſixiéme partie de -60, qui eſt -10, plus la cinquiéme de 120, qui eſt 24, font la ſomme $-10+24$, c'eſt à dire 14.

Et pareillement ſi $a=60$, $b=14$, $c=2$, $d=3$, $e=5$, & $f=6$. La grandeur x ſera le nombre poſitif 216, & y le nombre negatif -156. La ſomme de ces deux nombres eſt 60, & les 2 tiers du premier 216, qui ſont

144, plus les 5 ſixiémes du ſecond -156, qui ſont $\overline{-130}$, font $\overline{144-130}$, c'eſt à dire 14.

Et dans ces deux cas la reſolution ne peut eſtre poſitive, car au premier bf eſt plus grand que ae, & au ſecond bd eſt plus petit que ac.

NEUVIE'ME QUESTION.

XIV. Connoiſſant la ſomme de deux grandeurs & la difference de quelques parties déterminées de l'une à quelques parties déterminées de l'autre, trouver chaque grandeur.

Soit a la ſomme des grandeurs, b la difference des parties déterminées, & que la fraction $\frac{c}{d}$ détermine les plus grandes parties que doit fournir l'une des deux grandeurs que je mets la premiere, que la fraction $\frac{e}{f}$ détermine les autres parties de la ſeconde grandeur qui doivent eſtre retranchées pour avoir la difference b. Quoyque les parties déterminées par $\frac{c}{d}$ ſoient plus grandes que celles qui ſont déterminées par $\frac{e}{f}$, cependant la fraction $\frac{c}{d}$ peut eſtre plus petite que $\frac{e}{f}$. Cela eſtant, ſoient les parties de la premiere grandeur appellees z, celles de la ſeconde ſeront donc $z-b$. Or $c.d::z.\frac{dz}{c}$. Et $e.f::z-b.\frac{fz-bf}{e}$. La premiere grandeur ſera donc $\frac{dz}{c}$, & la ſeconde $\frac{fz-bf}{e}$. Et parceque a eſt la ſomme des deux, l'égalité ſera $\frac{dz}{c}+\frac{fz-bf}{e}=a$. Et le tout eſtant multiplié par ec, elle ſera $edz+cfz-bcf=ace$. Et par tranſpoſition, $dez+cfz=ace+bcf$. Diviſant donc le tout par $de+cf$, l'on aura $z.1::ace+bcf.\ de+cf$. Et mettant cette valeur de z dans les deux expreſſions de la premiere grandeur $\frac{dz}{c}$, & de la ſeconde $\frac{fz-bf}{e}$, l'on aura la premiere grandeur $x.1::ade+bdf.\ de+cf$, & la ſeconde $y.1::acf-bdf.\ de+cf$.

Regle. Donc le produit de la ſomme de deux grandeurs par le premier terme de la ſeconde fraction, plus un autre produit de la difference des parties déterminées par le ſecond terme de la méme fraction, eſtant multiplié par le ſecond terme de la premiere; & le produit qu'on trouve eſtant diviſé par le produit du ſecond terme de la premiere fraction par le premier de la ſeconde, plus celuy du premier terme de la premiere, par le ſecond de la ſeconde, l'expoſant ſera l'une des deux grandeurs cherchées. Et cette grandeur eſtant retranchée de la ſomme des deux, le reſte ſera l'autre grandeur cherchée.

Ainſi pour partager 84 en deux nombres tels que $\frac{1}{3}$ du premier moins $\frac{1}{4}$ du ſecond donne 7. La ſomme $a=84$, la difference $b=7$, $c=1$, $d=3$, $e=1$, & $f=4$. Les nombres ſeront donc $x=48$, & $y=36$. Le tiers du premier eſt 16, le quart du ſecond 9, la difference de 16 à 9 eſt 7 ; & la ſomme des nombres 48 & 36 eſt 84. Icy la premiere fraction $\frac{1}{3}$ ſurpaſſe la ſeconde $\frac{1}{4}$.

Et pour partager 84 en deux nombres tels que $\frac{1}{4}$ du premier moins $\frac{1}{3}$ du ſecond faſſe 7. La ſomme $a=84$, la difference $b=7$, $c=1$, $d=4$, $e=1$, & $f=3$. Les nombres ſeront donc 60 & 24. Le quart du premier eſt 15, le tiers du ſecond eſt 8, la difference de 15 à 8 eſt 7, & la ſomme des nombres 60 & 24 eſt 84. Icy la premiere fraction $\frac{1}{4}$ eſt ſurpaſſée par la ſeconde $\frac{1}{3}$.

Mais ſi ac eſtoit plus petit que bd, la formule fait voir que la ſeconde grandeur ſeroit negative.

DIXIE'ME QUESTION.

Connoiſſant la difference de deux grandeurs, & la ſomme de quelques parties déterminées de l'une ajoûtées à quelques autres parties déterminées de l'autre, trouver chaque grandeur. XV.

Soit a la difference des grandeurs, b la ſomme des parties déterminées, $\frac{c}{d}$ la fraction qui détermine les parties de la plus grande que je mets la premiere, & $\frac{e}{f}$ la fraction qui détermine les parties de la ſeconde, il n'importe pas que la premiere fraction ſoit plus grande ou plus petite que la ſeconde. Soient les parties déterminées de la premiere grandeur appellées z, celles de la ſeconde ſeront donc $b-z$. Or $c.d::z.\frac{dz}{c}$. Et $e.f::b-z.\frac{bf-fz}{e}$. La premiere grandeur ſera donc $\frac{dz}{c}$, & la ſeconde $\frac{bf-fz}{e}$. Et parceque a eſt la difference de la premiere à la ſeconde, l'égalité ſera $\frac{dz}{c}-\frac{bf+fz}{e}=a$. Et le tout eſtant multiplié par ec, elle ſera $dez-bcf+cfz=ace$. Tranſpoſant donc à l'ordinaire, & diviſant le tout par $de+cf$, l'on aura $z.1::ace+bcf.\ de+cf$. Les grandeurs ſeront donc la premiere $x.1::ade+bdf.\ de+cf$, & la ſeconde $y.1::bdf-acf.\ de+cf$.

Regle. Le produit de la difference de deux grandeurs par le premier terme de la ſeconde fraction, plus un autre produit de la ſomme des parties déterminées par le ſecond terme de la même fraction, eſtant multiplié par le ſecond terme de la premiere ; & le ſolide qu'on trouve eſtant diviſé par le produit du ſecond terme de la premiere fraction par le premier de la ſeconde, augmenté du produit du premier terme de la premiere par le ſecond de la ſeconde, l'expoſant donnera la premiere grandeur.

Et la difference des deux eſtant retranchée de cette premiere grandeur, le reſte donnera la ſeconde.

Ainſi pour trouver deux nombres dont la difference ſoit 84, & tels que $\frac{1}{3}$ du premier, plus $\frac{1}{4}$ du ſecond faſſent 98. La difference $a=84$, la ſomme $b=98$, $c=1$, $d=3$, $e=1$, & $f=4$. Donc $x=204$, & $y=120$. La difference de ces deux nombres eſt 84, & le tiers du premier, qui eſt 68, plus le quart du ſecond qui eſt 30, donne la ſomme 98. Icy la premiere fraction $\frac{1}{3}$ ſurpaſſe la ſeconde $\frac{1}{4}$.

Et pour trouver deux nombres dont la difference ſoit 84, & tels que $\frac{1}{4}$ du premier, que je prends toûjours pour le plus grand, plus $\frac{1}{3}$ du ſecond faſſent la ſomme 98. La difference $a=84$, la ſomme $b=98$, $c=1$, $d=4$, $e=1$, & $f=3$. Donc $x=216$, & $y=132$. La difference de ces nombres eſt 84, & le quart du premier, qui eſt 54, plus le tiers du ſecond qui eſt 44, font la ſomme 98.

Mais ſi bd eſtoit ſurpaſſé par ac, la regle fait voir que la ſeconde grandeur ſeroit negative.

ONZIE'ME QUESTION.

XVI. Connoiſſant la difference de deux grandeurs, & la difference de quelques parties déterminées de l'une, à quelques autres parties déterminées de l'autre, trouver chaque grandeur.

Soit a la difference des grandeurs, b celle de leurs parties déterminées, $\frac{c}{d}$ les parties déterminées de la premiere, & $\frac{e}{f}$ les parties déterminées de la ſeconde. Suppoſant toûjours que la plus grande ſoit celle que je mets la premiere, la queſtion peut avoir deux cas qui doivent avoir chacun leur détermination particuliere. Le premier cas, c'eſt lorſque les parties que l'on prend de la plus grande ou premiere grandeur, ſurpaſſent celles qu'on prend de la ſeconde. Et le ſecond cas, c'eſt lorſque les parties que l'on prend de la ſeconde qui eſt la plus petite, ſurpaſſent celles que l'on prend de la premiere.

Premier Cas.

Pour le premier cas, ſoient z les parties déterminées de la premiere grandeur, qui ſurpaſſent les autres. Puiſque b eſt la difference des parties, celles de la ſeconde grandeur ſeront donc $z-b$. Or $c.d::z.\frac{dz}{c}$. Et $e.f::z-b.\frac{fz-bf}{e}$. La premiere grandeur ſera donc $\frac{dz}{c}$, & la ſeconde $\frac{fz-bf}{e}$. Et parceque a eſt la difference de la premiere à la ſeconde, l'égalité ſera $\frac{dz}{c}\frac{-fz+bf}{e}=a$. Et le tout eſtant multiplié par ec, elle ſera $dez-cfz+bcf=ace$. Tranſpoſant donc à l'ordinaire, & diviſant le tout par $de-cf$, l'on aura $z.1::ace-bcf.de-cf$. Les grandeurs ſeront donc la plus grande $x.1::ade-bdf.de-cf$, & la plus petite $y.1::acf-bdf.de-cf$. Si toutefois la fraction $\frac{c}{d}$ eſt plus petite que $\frac{e}{f}$, car ſi elle eſtoit plus grande, il faudroit renverſer les ſignes, & au lieu des grandeurs $x.1::ade-bdf.\ de-cf$, & $y.1::acf-bdf.\ de-cf$, il faudroit écrire $x.1::bdf-ade.\ cf-de$. & $y.1::bdf-acf.\ cf-de$.

Regle. Si donc la premiere fraction eſt plus petite que la ſeconde, le produit de la difference des deux grandeurs par le premier terme de la ſeconde fraction, moins un autre produit de la difference des parties déterminées par le ſecond terme de la même fraction, eſtant multiplié par le ſecond terme de la premiere; & le ſolide qu'on trouve eſtant diviſé par le produit du ſecond terme de la premiere fraction par le premier de la ſeconde, moins un autre produit du premier terme de la premiere fraction par le ſecond de la ſeconde, l'expoſant ſera la premiere grandeur.

Et la difference des deux eſtant retranchée de cette grandeur, le reſte donnera la premiere.

Mais ſi la premiere fraction eſt plus grande que la ſeconde, cette formule aura lieu, ſi l'on y met par tout moins au lieu de plus, & plus au lieu de moins, ainſi que nous l'avons déja dit.

Au reſte les formules literales font aſſez voir ſi la reſolution peut eſtre poſitive ou non. Ainſi je n'en diray rien davantage.

Si donc il falloit trouver deux nombres tels que leur difference fuſt 84, & que $\frac{1}{4}$ du plus grand moins $\frac{1}{3}$ du plus petit fuſt 10. La difference des grandeurs $a=84$, celle des parties $b=10$, $c=1$, $d=4$, $e=1$, & $f=3$. Et parceque la premiere fraction $\frac{1}{4}$ eſt plus petite que la ſeconde $\frac{1}{3}$, je me ſers de la premiere formule. Les deux nombres ſeront donc le premier $x=216$, & le ſecond $y=132$. La difference de ces deux nombres eſt 84, & le quart du premier qui eſt 54, moins le tiers du ſecond, qui eſt 44, donne la difference 10.

Et pour trouver deux nombres dont la difference ſoit 84, & tels que $\frac{1}{3}$ du plus grand, moins $\frac{1}{4}$ du plus petit fuſt 38. La difference $a=84$, l'autre $b=38$, $c=1$, $d=3$, $e=1$, & $f=4$. Et parceque la premiere fraction $\frac{1}{3}$ eſt plus grande que la ſeconde $\frac{1}{4}$, je prends la ſeconde formule $x.1::bdf-ade.\ cf-de$, & $y.1::bdf-acf.\ cf-de$. Les deux nombres ſeront donc $x=204$, & $y=120$. Leur difference eſt 84, & le tiers du premier, qui eſt 68, moins le quart du ſecond qui eſt 30, donne la difference 38.

Second Cas.

Et lorſque les parties qu'on prend de la plus petite grandeur ſurpaſſent celles qu'on prend de la premiere & plus grande, l'operation varie tant ſoit peu. Soit donc a la difference de la premiere grandeur à la ſeconde, ou l'excez de la premiere ſur la ſeconde, & b l'excez des parties déterminées de la ſeconde aux autres parties déterminées de la premiere. Soit $\frac{c}{d}$ la fraction qui détermine les parties de la ſeconde qui ſont les plus grandes,

& $\frac{e}{f}$ la fraction qui détermine les parties de la premiere. Si j'appelle z les parties déterminées de la ſeconde grandeur, celles de la premiere ſeront donc $z-b$. Or $c.\ d :: z.\ \frac{dz}{c}$. Et $e.\ f :: z-b.\ \frac{fz-bf}{e}$. La ſeconde grandeur ſera donc $\frac{dz}{c}$, & la premiere $\frac{fz-bf}{e}$. Et parceque a eſt la difference de la premiere à la ſeconde, l'égalité ſera $\frac{fz-bf}{e} - \frac{dz}{c} = a$. Et le tout eſtant multiplié par ec, & la tranſpoſition faite à l'ordinaire, elle ſera $cfz - edz = ace + bcf$. Donc le tout eſtant diviſé par $cf - de$, l'on aura $z.\ 1 :: ace + bcf.\ cf - de$. Les grandeurs ſeront donc la plus grande $x.\ 1 :: acf + bdf.\ cf - de$, & la plus petite $y.\ 1 :: ade + bdf.\ cf - de$. Et afin que la reſolution ſoit réelle & poſitive, il eſt viſible que la fraction $\frac{c}{d}$ doit ſurpaſſer $\frac{e}{f}$. Car eſtant réduites à un même ſecond terme, elles ſont $\frac{cf}{df}$ & $\frac{de}{df}$, de ſorte que ſi cf ne ſurpaſſoit de, la premiere fraction ne ſurpaſſeroit pas la ſeconde, & ainſi le diviſeur ou ſecond terme des valeurs de x & de y, qui eſt $cf - de$, ne ſeroit pas poſitif. Que ſi les fractions $\frac{c}{d}$ & $\frac{e}{f}$ eſtoient égales dans cette queſtion & dans les precedentes, ces queſtions ne ſeroient aucunement conſiderables, ainſi je n'en diray rien.

Regle. Le produit de la difference de deux grandeurs par le premier terme de la premiere fraction, c'eſt à dire de celle qui détermine les parties de la plus petite grandeur, plus un autre produit de la difference des parties déterminées par le ſecond terme de la même fraction, eſtant multiplié par le ſecond terme de la ſeconde; & le ſolide qu'on trouve, eſtant diviſé par le produit du premier terme de la premiere fraction par le ſecond de la ſeconde, moins un autre produit du ſecond terme de la premiere par le premier de la ſeconde, l'expoſant ſera la premiere grandeur.

Et la difference des deux eſtant retranchée de cette grandeur, le reſte donnera la premiere.

Ainſi pour trouver deux nombres dont la difference ſoit 84, & tels que $\frac{1}{3}$ du ſecond moins $\frac{1}{4}$ du premier ſoit 10. La difference des nombres $a = 84$, celles des parties $b = 10$, $c = 1$, $d = 3$, $e = 1$, & $f = 4$. Les deux nombres ſeront donc le plus grand $x = 456$, & le plus petit $y = 372$. Leur difference eſt 84, & le tiers du plus petit, qui eſt 124, moins le quart du plus grand, qui eſt 114, donne la difference 10.

Mais pour trouver deux nombres dont la difference ſoit 84, & tels que $\frac{1}{4}$ du ſecond moins $\frac{1}{3}$ du premier ſoit 10. La difference $a = 84$, $b = 10$, $c = 1$, $d = 4$, $e = 1$, & $f = 3$. Les deux nombres ſeront donc les deux nombre negatifs $x = \frac{372}{-1}$, c'eſt à dire -372, & $y = \frac{456}{-1}$, c'eſt à dire -456. Leur difference eſt -372 moins -456, c'eſt à dire $+84$, & le tiers du

ſecond

ſecond, qui eſt -114, moins le quart du premier, qui eſt -124, c'eſt à dire -114 moins -124, donne le reſte ou la difference $+10$, ſi toutefois cela peut s'appeller reſte ou difference.

Douzie'me Question.

XVII. Connoiſſant la ſomme des quarrez de trois grandeurs geometriquement proportionelles, & l'une ou l'autre des deux extrêmes, trouver l'autre extrême.

Soit la premiere des extrêmes appellée z, je ſuppoſe la premiere inconnuë, & je ne me mets point en peine de ſçavoir ſi elle eſt plus grande ou plus petite que l'autre. Soit l'autre extrême qui eſt connuë appellée a, & la ſomme de tous les quarrez appellée b. Comme en toute proportion geometrique continuë le quarré de la moyenne eſt égal au produit des extrêmes, le quarré de la moyenne ſera az, la moyenne ſera par conſequent $\sqrt{az}$, la proportion ∺ z. $\sqrt{az}$. a. & la ſomme des trois quarrez ſera $zz+az+aa$. Or b eſt auſſi la ſomme des quarrez. Donc $zz+az+aa=b$. qui eſt une égalité compoſée.

Si pourtant on la vouloit reſoudre ſans ſuppoſer la connoiſſance de ces égalitez, cela ſeroit tres-facile. Car il n'y a qu'à voir par quelle ſouſtraction ou diviſion, ou par quelle autre operation le premier membre poura eſtre une puiſſance parfaite, au moins literale, ſans toutefois rien rejetter d'inconnu au ſecond membre. Cela ſe voit d'abord, car le premier terme zz eſtant le quarré de z, ſi l'on diviſe par 2 fois z la ſeconde partie az, l'expoſant ſera $\frac{1}{2}a$. Or ſi la derniere partie aa eſtoit le quarré de l'expoſant $\frac{1}{2}a$, la puiſſance ſeroit parfaite. Comme donc il s'en manque $\frac{3}{4}aa$ que le quarré de $\frac{1}{2}a$, qui eſt $\frac{1}{4}aa$, ne ſoit égal à aa, en retranchant $\frac{3}{4}aa$ de part & d'autre, l'égalité ſera $zz+az+\frac{1}{4}aa=b-\frac{3}{4}aa$. Et tirant la racine quarrée de part & d'autre, elle ſera $z+\frac{1}{2}a=\sqrt{b-\frac{3}{4}aa}$. Et par tranſpoſition $z=\sqrt{b-\frac{3}{4}aa}-\frac{1}{2}a$. Et la queſtion eſt reſoluë.

Regle. Si l'on prend donc la racine de la ſomme des quarrez diminuée des trois quarts du quarré de l'extrême connuë, & qu'enſuite l'on en retranche la moitié de cette extrême, le reſte ſera l'autre extrême; & la moyenne ſera la racine du produit des extrêmes.

Soit $a=4$, & $b=21$. Donc $z=\sqrt{21-12}-2=1$. La plus grande extrême eſt donc 4, la plus petite 1, & la moyenne $\sqrt{1 \text{ fois } 4}$, c'eſt à dire 2. ∺ 4. 2. 1.

Et ſi $a=1$, $b=21$. Donc $z=\sqrt{21-\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{81}{4}}-\frac{1}{2}$, c'eſt à dire 4. La proportion eſt donc ∺ 1. 2. 4.

Second Principe.

XVIII. Ce Principe n'eſt autre que le Theoreme ou la Regle, dont la reſolution de la queſtion troiſiéme nous a donné la connoiſſance.

Que la moitié de la ſomme de deux grandeurs, plus la moitié de leur difference, eſt égale à la plus grande; & moins cette même moitié, qu'elle eſt égale à la plus petite.

De ſorte que ſi la ſomme eſt $2a$, & la difference $2b$, la plus grande ſera $a+b$, & la plus petite $a-b$. Ou bien ſi la ſomme eſt $2y$, & la difference $2z$, la plus grande ſera $y+z$, & la plus petite $y-z$.

Ce Principe eſt tres-utile, & d'une grande étenduë. Pour commencer à en montrer l'uſage, je vay reſoudre par ſon moyen les queſtions ſuivantes. Elles ſont tirées la pluſpart du ſecond & troiſiéme Livre des Zetetiques de Viete. Je les ay choiſies plûtoſt que d'autres, à cauſe que le choix qu'il en a fait eſt tres-judicieux; car les Theoremes ou les Regles generales que leurs reſolutions fourniſſent ſont des plus conſiderables dans les Mathematiques. Cependant je ne les reſous pas ſelon ſa methode, parcequ'elle ne me ſemble ny aſſez ſimple ny aſſez facile.

PREMIERE QUESTION.

XIX. Connoiſſant la ſomme de deux grandeurs, & le produit de l'une par l'autre, trouver chaque grandeur.

Soit la ſomme connuë $2a$, & le produit c. Si j'appelle leur difference $2z$, il eſt évident par la formule precedente, que la plus grande ſera $a+z$, & la plus petite $a-z$; & le produit de l'une par l'autre ſera $aa-zz$. Or c eſt auſſi le produit de ces mêmes grandeurs. Donc $aa-zz=c$. Et par tranſpoſition, $zz=aa-c$.

Formule. Donc le quarré de la moitié de la ſomme de deux grandeurs moins le produit de l'une par l'autre, eſt égal au quarré de la moitié de leur difference.

Or la moitié de la difference eſtant connüe, chacune des deux grandeurs eſt pareillement connüe, par la formule qui precede.

Exemple.

La moyenne de trois grandeurs qui ſont en proportion geometrique continüe eſtant donnée, & la ſomme des extrêmes l'eſtant auſſi, trouver chaque grandeur.

Soit la moyenne appellée m, la ſomme des extrêmes $2a$, & leur difference inconnuë $2z$; la plus grande ſera donc $a+z$, la plus petite $a-z$, & la proportion continuë ſera ∺ $a+z.\ m.\ a-z$. Or en toute proportion geometrique continuë, le produit des extrêmes eſt égal au quarré de la moyenne. Donc $aa-zz=mm$. Et par tranſpoſition, $aa-mm=zz$.

Soit la moyenne $m=12$, & la ſomme des extrêmes $2a=26$. Donc $zz=169-144=25$, & $z=5$. Donc la proportion continuë ∺ $a+z.\ m.\ a-z$, ſera ∺ $18.\ 12.\ 8$. Et la queſtion eſt reſoluë.

SECONDE QUESTION.

XX. L'on peut remarquer en reſolvant les queſtions par l'Analyſe, que chaque trait de plume y fait découvrir ordinairement quelque nouveau Theoreme avec une grande facilité.

Par exemple la reſolution precedente $zz = aa - c$, nous vient de faire connoître que le quarré de la moitié de la ſomme de 2 grandeurs moins leur produit, eſt égal au quarré de la moitié de leur difference. Or ſi nous ſuppoſons que la ſomme ſoit inconnuë, & que la difference ſoit connuë, & que nous appellions la ſomme inconnuë $2z$, & la difference $2b$, au lieu de $zz = aa - c$, nous pourons écrire $bb = yy - c$. Et par tranſpoſition $bb + c = yy$; ce qui nous donne par un trait de plume un Theoreme ou bien une Regle inverſe de la precedente.

Regle. Car $bb + c = yy$ nous fait voir que le quarré de la moitié de la difference de deux grandeurs plus le produit de l'une par l'autre, eſt égal au quarré de la moitié de leur ſomme.

Soit $2b = 2$, & $c = 24$. L'on aura $yy = 25$, & $y = 5$. Donc $y + b = 6$, & $y - b = 4$.

Exemple.

La moyenne de trois grandeurs qui ſont en proportion geometrique continuë eſtant donnée, & la difference des extrêmes l'eſtant auſſi, trouver chaque grandeur.

Soit la moyenne appellée m, la difference des extrêmes $2b$, & leur ſomme inconnüe $2y$. La plus grande ſera donc $y + b$, la plus petite $y - b$, & la proportion continüe ſera $\div\div\, y + b.\ m.\ y - b$. Or en toute proportion geometrique continüe, le produit des extrêmes eſt égal au quarré de la moyenne. Donc $yy - bb = mm$, & par tranſpoſition $yy = mm + bb$.

Soit la moyenne $m = 12$, & la difference des extrêmes $2b = 10$. Donc $yy = 144 + 25 = 169$, & $y = 13$. Donc la proportion continüe $\div\div\, y + b.\ m.\ y - b$, ſera $\div\div\, 18.\ 12.\ 8$. Et la queſtion eſt reſolue.

TROISIÉME QUESTION.

Connoiſſant la ſomme de deux grandeurs, & la ſomme de leurs quarrez, trouver chaque grandeur. XXI.

Soit $2a$ la ſomme des grandeurs, & c la ſomme de leurs quarrez. Si j'appelle $2z$ la difference des deux grandeurs, la plus grande ſera $a + z$, la plus petite $a - z$, & leurs quarrez ſeront $aa + 2az + zz$, & $aa - 2az + zz$; & la ſomme de ces quarrez ſera $2aa + 2zz$. Or c eſt auſſi la ſomme de ces mêmes quarrez. Donc $2aa + 2zz = c$. Et par tranſpoſition, $2zz = c - 2aa$. Et diviſant le tout par 2, $zz = \frac{1}{2}c - 2aa$.

Regle. Donc la moitié de la ſomme des quarrez de deux grandeurs moins le quarré de la moitié de la ſomme de ces mêmes grandeurs, eſt égale au quarré de la moitié de leur difference.

Soit la ſomme des grandeurs $2a = 12$, & la ſomme des quarrez $2c = 104$, l'on aura $zz = 16$, & $z = 4$. Donc $a + z = 10$, & $a - z = 2$.

QUATRIÉME QUESTION.

Et ſi nous ſuppoſons que la ſomme des grandeurs ſoit inconnüe, & que leur difference ſoit connüe, appellant la ſomme inconnüe $2y$, & la difference $2b$, au lieu de la reſolution precedente $zz = \frac{1}{2}c - aa$, nous pourons XXII.

écrire $bb=\frac{1}{2}c-yy$. Et par tranſpoſition $yy=\frac{1}{2}c-bb$.

Regle. Donc la moitié de la ſomme des quarrez de deux grandeurs moins le quarré de la moitié de la difference de ces mêmes grandeurs, eſt égale au quarré de la moitié de leur ſomme.

Soit la difference des grandeurs $2b=8$, & la ſomme des quarrez $c=104$, l'on aura $yy=36$, & $y=6$. Donc $y+b=10$, & $y-b=2$.

CINQUIE'ME QUESTION.

XXIII. Connoiſſant la ſomme de deux grandeurs, & la difference de leurs quarrez, trouver chaque grandeur.

Soit $2a$ la ſomme des grandeurs, & d la difference de leurs quarrez. Si j'appelle $2z$ la difference des deux grandeurs, la plus grande ſera $a+z$, la plus petite $a-z$, & leurs quarrez ſeront $aa+2az+zz$, & $aa-2az+zz$; & la difference de ces quarrez ſera $4az$. Or d eſt auſſi la difference de ces mêmes quarrez. Donc $4az=d$. Et diviſant le tout par $4a$, $z=\frac{d}{4a}$.

Regle. Donc la difference des quarrez de deux grandeurs diviſée par le double de la ſomme de ces mêmes grandeurs, eſt égale à la moitié de leur difference. Ou ce qui revient au même, la difference des quarrez de deux grandeurs diviſée par la ſomme de ces mêmes grandeurs, eſt égale à leur difference. Car ſi $4az=d$. Donc $2z=\frac{d}{2a}$.

Soit la ſomme des grandeurs $2a=12$, & la difference de leurs quarrez $d=96$. L'on aura $z=\frac{96}{24}=4$. Donc $a+z=10$, & $a-z=2$.

SIXIE'ME QUESTION.

XXIV. Et ſi nous ſuppoſons que la ſomme des grandeurs ſoit inconnüe, & que leur difference ſoit connüe, appellant la ſomme inconnüe $2y$, & la difference $2b$, au lieu de l'égalité $4az=d$, nous aurons $4yb=d$. Et le tout eſtant diviſé par $4b$, $y=\frac{d}{4b}$.

Regle. Donc la difference des quarrez de deux grandeurs diviſée par le double de la difference de ces mêmes grandeurs, eſt égale à la moitié de leur ſomme. Ou bien, ce qui revient au même, la difference des quarrez de deux grandeurs diviſée par la difference de ces mêmes grandeurs, eſt égale à leur ſomme. Car ſi $4yb=d$. Donc $2y=\frac{d}{2b}$.

Soit la difference des grandeurs $2b=8$, & la difference de leurs quarrez $d=96$. L'on aura $y=\frac{96}{16}=6$. Donc $y+b=10$, & $y-b=2$.

SEPTIE'ME QUESTION.

XXV. Connoiſſant la ſomme de deux grandeurs, & la ſomme de leurs cubes, trouver chaque grandeur.

Soit $2a$ la ſomme des grandeurs, & c la ſomme de leurs cubes, appellant $2z$ la difference des grandeurs, la plus grande ſera $a+z$, la plus petite $a-z$, & leurs cubes ſeront $a^3+3aaz+3azz+z^3$ & $a^3-3aaz+3azz-z^3$.

Et la ſomme de ces cubes ſera $2a^3+6azz$. Or c eſt auſſi la ſomme de ces mêmes cubes. Donc $2a^3+6azz=c$. Et par tranſpoſition $6azz=c-2a^3$. Et le tout eſtant diviſé par $6a$, $zz=\frac{c-2a^3}{6a}$.

Regle. Donc la ſomme des cubes de deux grandeurs moins deux fois le cube de la moitié de leur ſomme, diviſée par 3 fois la même ſomme de ces grandeurs, eſt égale au quarré de la moitié de leur difference.

Soit la ſomme des grandeurs $2a=12$, & la ſomme de leurs cubes $c=1008$. $zz=\frac{c-2a^3}{6a}$ ſera 16. Donc $z=4$, $a+z=10$, & $a-z=2$.

HUITIE'ME QUESTION.

Et ſi la ſomme des grandeurs eſtoit inconnüe, & que leur difference fuſt connüe; appellant la ſomme $2y$, & la difference $2b$, l'égalité $2a^3+6azz=c$, ſeroit $2y^3+6ybb=c$. Or cette égalité eſt compoſée, parceque l'inconnüe y a differens degrez. Ainſi nous reſerverons à la reſoudre en traittant de ces égalitez. XXVI.

NEUVIE'ME QUESTION.

Connoiſſant la ſomme de deux grandeurs, & la difference de leurs cubes, trouver chaque grandeur. XXVII.

Soit $2a$ la ſomme des grandeurs, & d la difference de leurs cubes; appellant $2z$ la difference des deux grandeurs, la plus grande ſera $a+z$, la plus petite $a-z$, & leurs cubes $a^3+3aaz+3azz+z^3$, & $a^3-3aaz+3azz-z^3$, & la difference de ces cubes ſera $6aaz+2z^3$. Or d eſt auſſi la difference de ces mêmes cubes. Donc $6aaz+2z^3=d$, qui eſt une égalité compoſée.

DIXIE'ME QUESTION.

Mais ſi la ſomme des grandeurs eſtoit inconnüe, & que leur difference fuſt connüe; appellant la ſomme $2y$, & la difference $2b$, l'égalité $6aaz+2z^3=d$ ſeroit $6yyb+2b^3=d$. Et par tranſpoſition, $6yyb=d-2b^3$. Et diviſant le tout par $6b$, $yy=\frac{d-2b^3}{6b}$. XXVIII.

Regle. Donc la difference des cubes de deux grandeurs moins 2 fois le cube de la moitié de leur difference, diviſée par 3 fois la même difference de ces grandeurs, eſt égale au quarré de la moitié de leur ſomme.

Soit la difference des grandeurs $2b=8$, & la difference de leurs cubes $d=992$. $yy=\frac{d-2b3}{6b}$ ſera 36. Donc $y=6$, $y+b=10$, & $y-b=2$.

ONZIE'ME QUESTION.

Connoiſſant la ſomme de deux grandeurs, & la ſomme de leurs quatriémes puiſſances, trouver chaque grandeur. XXIX.

Soit $2a$ la ſomme des grandeurs, & c la ſomme de leurs quatriémes puiſſances; appellant $2z$ la difference des grandeurs, la plus grande ſera $a+z$, la plus petite $a-z$, & leurs quatriémes puiſſances ſeront $a^4+4a^3z+6aazz+4az^3+z^4$ & $a^4-4a^3z+6aazz-4az^3+z^4$. Et la ſomme de ces puiſſances ſera $2a^4+12aazz+2z^4$. Or c en eſt auſſi la ſomme. Donc

$2a^4 + 12aazz + 2z^4 = c$. Et par tranſpoſition, $12aazz + 2z^4 = c - 2a^4$, qui eſt une égalité compoſée, dont la reſolution ſera expliquée dans ſon lieu.

Douziéme Question.

XXX. Et connoiſſant la difference de deux grandeurs, & la ſomme de leurs quatriémes puiſſances, s'il faut trouver chaque grandeur.

Appellant la difference des grandeurs $2b$, la ſomme de leurs quatriémes puiſſances c, & la ſomme inconnüe des grandeurs $2y$, l'on trouvera l'égalité compoſée $2y^4 + 12yybb + 2b^4 = c$, ou par tranſpoſition, $2y^4 + 12yybb = c - 2b^4$.

Treiziéme Question.

XXXI. De même connoiſſant la ſomme des grandeurs, & la difference de leurs quatriémes puiſſances, s'il faut trouver chaque grandeur,

Appellant la ſomme des grandeurs $2a$, la difference de leurs quatriémes puiſſances d, & la difference de ces grandeurs $2z$, l'on trouvera l'égalité compoſée $8a^3z + 8az^3 = d$.

Quatorziéme Question.

XXXII. Et connoiſſant la difference des grandeurs, & la difference de leurs quatriémes puiſſances, s'il faut trouver chaque grandeur.

Appellant leur difference $2b$, la difference de leurs puiſſances d, & la ſomme de ces grandeurs $2y$, l'on trouvera l'égalité compoſée $8y^3b + 8yb^3 = d$. La reſolution de chacune de ces égalitez ſera generalement expliquée dans ſon lieu.

Quinziéme Question.

XXXIII. Connoiſſant la ſomme des quarrez de deux grandeurs, & la difference de ces mêmes quarrez, trouver chaque grandeur.

Appellant $2a$ la ſomme des quarrez, & $2b$ leur difference, le plus grand quarré ſera $a + b$, & le plus petit $a - b$, par 18. S. Or les quarrez eſtant connus, leurs racines le ſont auſſi.

Soit la ſomme des quarrez $2a = 104$, & leur difference $2b = 96$. Donc le plus grand quarré $a + b = 100$, & le plus petit $a - b = 4$. Les grandeurs ſeront donc $\sqrt{a+b} = 10$, & $\sqrt{a-b} = 2$.

Il en eſt de même pour les autres puiſſances de deux grandeurs, lorſque l'on connoît la ſomme de ces puiſſances & leur difference.

Soit par exemple la ſomme de deux cubes $2a = 1008$, & leur difference $2b = 992$. Les deux cubes ſeront donc $a + b = 1000$, & $a - b = 8$. Et les deux grandeurs $\sqrt{C.a+b} = 10$, & $\sqrt{C.a-b} = 2$.

Seiziéme Question.

XXXIV. Connoiſſant le produit de deux grandeurs, & la ſomme de leurs quarrez, trouver chaque grandeur.

La queſtion ne ſuppoſant d'abord aucune connoiſſance de chaque grandeur, ni de leur ſomme, ni de leur difference, leur ſomme inconnüe peut s'appeller $2y$ & leur difference $2z$, & alors la plus grande ſera $y + z$, & la plus petite $y - z$, leur produit $yy - zz$, & la ſomme de leurs quarrez

$2yy+2zz$. Donc appellant b le produit de ces deux grandeurs, & c la ſomme de leurs quarrez, l'on aura les deux égalitez $yy-zz=b$, & $2yy+2zz=c$. Or la premiere $yy-zz=b$, ſe réduit à $yy=b+zz$. Et la ſeconde égalité $2yy+2zz=c$, ſe réduit à $yy=\frac{1}{2}c-zz$. Donc $b+zz=\frac{1}{2}c-zz$. Et par tranſpoſition, $2zz=\frac{1}{2}c-b$. Et le tout eſtant diviſé par 2, l'on a $zz=\frac{1}{4}c-\frac{1}{2}b$. Mettant donc $\frac{1}{4}c-\frac{1}{2}b$, au lieu de zz qui luy eſt égal, dans la premiere égalité $yy=b+zz$, cette égalité ſera $yy=b+\frac{1}{4}c-\frac{1}{2}b$, c'eſt à dire $yy=\frac{1}{4}c+\frac{1}{2}b$. Et ainſi le quarré de la moitié de la ſomme des deux grandeurs ſera $\frac{1}{4}c+\frac{1}{2}b$, & le quarré de la moitié de leur difference ſera $\frac{1}{4}c-\frac{1}{2}b$.

Regle. Donc le quarré de la moitié de la ſomme de deux grandeurs eſt égal au quart de la ſomme de leurs quarrez, plus la moitié de leur produit. Et le quarré de la moitié de la difference des mêmes grandeurs, eſt égal au quart de la ſomme de leurs quarrez, moins la moitié de leur produit.

J'aurois pû chercher autrement la même reſolution en appellant chaque grandeur par une lettre inconnüe. Car ſi la grande eſt y & la petite z, leur produit ſera yz, & la ſomme de leurs quarrez $yy+zz$. Or b eſt le produit de ces mêmes grandeurs, & c la ſomme de leurs quarrez, j'auray donc les deux égalitez $yz=b$, & $yy+zz=c$. Or la premiere $yz=b$ peut ſe réduire à $y=\frac{b}{z}$. Mettant donc $\frac{b}{z}$ au lieu de y qui luy eſt égale, dans la ſeconde égalité $yy+zz=c$, c'eſt à dire mettant dans cette égalité $\frac{bb}{zz}$ quarré de $\frac{b}{z}$, au lieu du quarré yy qui luy eſt égal, l'on aura $\frac{bb}{zz}+zz=c$. Et multipliant le tout par zz, l'on aura $bb+z^4=czz$. Et par tranſpoſition, $bb=czz-z^4$, qui eſt une égalité compoſée.

En quoy l'on peut déja remarquer, que les reſolutions ſe trouvent ſouvent d'une maniere plus ſimple, & avec une facilité plus grande, par certaines dénominations que par d'autres.

AUTRE RESOLUTION DE LA MÊME QUESTION

PAR LA VOYE SYNTETHIQUE.

La ſeconde voye que nous appellons Syntethique, eſt celle qui reſout les queſtions ſans former aucune égalité, en ſuppoſant quelques connoiſſances autres que celles qui ſont accordées par les ſuppoſitions, mais qui ont neanmoins quelque ſorte de rapport & de liaiſon avec elles.

Par exemple, connoiſſant le produit de deux grandeurs, & la ſomme de leurs quarrez, trouver chaque grandeur.

Pour reſoudre cette queſtion par la voye Syntethique, la connoiſſance du produit des deux grandeurs, plus celle de la ſomme de leurs quarrez, ſont toutes les connoiſſances accordées par les ſuppoſitions. Or ſi à l'exemple de Viete, outre ces deux connoiſſances, l'on ſuppoſe encore celles-cy tirées de la formation des quarrez ; Que la ſomme des quarrez de deux grandeurs, plus 2 fois le produit de l'une par l'autre, eſt égale au quarré de la ſomme entiere des grandeurs ; Et que la même ſomme des quarrez, moins 2 fois le produit, eſt égale au quarré de leur difference : Il eſt bien viſible que le quarré de la ſomme entiere des grandeurs, & le quarré de la difference eſtant connus, la ſomme & la difference qui ſont les racines de ces deux quarrez, ſeront pareillement connuës, & par conſequent chaque grandeur, ſans qu'il ſoit beſoin de recourir aux égalitez.

Mais auſſi en ſuppoſant les deux connoiſſances tirées de la formation des quarrez, outre les deux autres accordées par les ſuppoſitions, l'on ſuppoſe déja pour connu ce que la queſtion ſuppoſe inconnu. Ainſi la voye Syntethique n'eſt point une voye generalement legitime pour des recherches, cependant elle eſt merveilleuſement utile en pluſieurs rencontres ; La premiere, lorſque l'on a déja aſſez de lumiere & de connoiſſance pour découvrir par ſon moyen les reſolutions que l'on cherche ; La ſeconde, lorſqu'en cherchant ces reſolutions par la voye Analytique, l'on arrive à des égalitez qui ſont trop compoſées, car alors pour rendre ces égalitez plus ſimples, il faut, ſi l'on peut, joindre la voye Syntethique à l'Analytique, ce qui en fait une nouvelle compoſée de toutes les deux, que nous avons appellée une voye mixte pour la diſtinguer des autres ; Et enfin la troiſiéme rencontre où la voye Syntethique eſt abſolument neceſſaire, c'eſt lorſque les queſtions ne peuvent ſe rapporter en aucune ſorte à la voye Analytique, ou bien lorſqu'elles ne peuvent s'y rapporter qu'en partie. Nous parlerons de cette voye Syntethique dans le Livre ſuivant.

XXXV. DIX-SEPTIE'ME QUESTION.

Connoiſſant le produit de deux grandeurs, & la difference de leurs quarrez, trouver chaque grandeur.

Chaque grandeur, ny leur ſomme, ny leur difference n'eſtant connuë, ſoit leur ſomme appellée $2y$, leur difference $2z$, leur produit b, & la difference connuë de leurs quarrez d. La plus grande ſera donc $y+z$, la plus petite $y-z$, leur produit $yy-zz$, & la difference de leurs quarrez $yy+2yz+zz-yy+2yz+zz$, c'eſt à dire $4yz$. Or b eſt auſſi le produit de ces mêmes grandeurs, & d la difference de leurs quarrez, l'on aura donc les deux égalitez $yy-zz=b$ & $4yz=d$. Or la premiere ſe réduit à $yy=b+zz$. Donc $y=\sqrt{b+zz}$. Et par la ſeconde $y=\frac{d}{4z}$. Donc $\sqrt{b+zz}=\frac{d}{4z}$. Et le tout eſtant multiplié quarrément pour oſter l'incommenſurabilité, l'on trouve $b+zz=\frac{dd}{16zz}$, laquelle eſtant multipliée par $16zz$ ſecond terme du dernier membre, où l'inconnuë ſe trouve, l'on arrive enfin à l'égalité compoſée $16bzz+16z=dd$.

Ie ne m'arreſte point à reſoudre icy ces queſtions compoſées comme l'a fait Viete en ſe ſervant de la voye Syntethique, parcequ'elle eſt peu propre pour expliquer l'uſage de l'Analyſe.

Par exemple pour reſoudre cette dix-ſeptiéme queſtion, voicy comment il raiſonne. Soit B le produit des grandeurs, D la difference de leurs quarrez, & A la ſomme inconnuë des quarrez. Donc le quarré de la ſomme des grandeurs ſera $A + 2B$, & le quarré de la difference $A - 2B$. Or la ſomme des grandeurs multipliée par leur difference, fait la difference des quarrez. C'eſt pourquoy le quarré de la ſomme des grandeurs multiplié par le quarré de leur difference, ſera la difference des quarrez multipliée par elle-même. Ainſi A par A, -4 fois B par B, ſera égal à D par D. Et ordonnant l'égalité, A par A ſera égal à D par D, plus 4 fois B par B. Or la ſomme des quarrez & leur difference, ou le produit des deux grandeurs eſtant donnez, les grandeurs ſont données.

Regle. Car le quarré de la difference des quarrez, ajoûté au quarré de 2 fois le produit, eſt égal au quarré de la ſomme des quarrez.

Soit le produit $B = 20$, la difference des quarrez $D = 96$; la ſomme des quarrez A, ou bien N. Donc $1Q = 10816$.

Je laiſſe à juger ſi une perſonne qui entreprend une recherche eſt capable de raiſonner ainſi, & s'il ne faut pas déja connoître ce que l'on cherche, au moins en partie, pour ſuivre une pareille methode.

AVERTISSEMENT.

Pour les lettres que j'ay marquées à la façon de Viete, on remarquera que luy & les anciens Algebraiſtes ſe ſervent des lettres capitales pour exprimer les grandeurs. Les inconnuës chez eux ſont les voyelles A, E, I, O, V, & la conſonne N, qui ſignifie un nombre ou une racine inconnuë, dont ils appellent le quarré Q. le cube C. la 4

DIX-HUITIE'ME QUESTION.

Connoiſſant la ſomme de deux grandeurs, & ce que vaut leur produit ajoûté à la ſomme de leurs quarrez, trouver chaque grandeur. XXXVI.

Soit la ſomme connuë des grandeurs $2a$, & leur difference $2z$, & le produit ajoûté à la ſomme des quarrez c. La plus grande ſera donc $a + z$, la plus petite $a - z$, leur produit $aa - zz$, la ſomme de leurs quarrez $2aa + 2zz$, & le produit ajoûté à cette ſomme ſera $3aa + zz$. Or c eſt auſſi le produit ajoûté à la ſomme des quarrez Donc $3aa + zz = c$. Et par tranſpoſition, $zz = c - 3aa$.

Formule. Donc le produit de deux grandeurs ajoûté à la ſomme de leurs quarrez, moins 3 fois le quarré de la moitié de la ſomme des grandeurs, eſt égal au quarré de la moitié de leur difference.

Soit $c = 124$, $2a = 12$. Donc zz ou $c - 3aa = 124 - 108 = 16$. Et $z = 4$. Donc $a + z = 10$, & $a - z = 2$.

DIX-NEUVIE'ME QUESTION.

Connoiſſant le produit de deux grandeurs, & ce que vaut ce produit XXXVII.

ajoûté à la ſomme de leurs quarrez, trouver chaque grandeur.

Soit la ſomme inconnuë des grandeurs $2y$, leur difference $2z$, leur produit connu b, & c la valeur de ce produit ajoûté à la ſomme des quarrez. La plus grande ſera donc $y+z$, la plus petite $y-z$, leur produit $yy-zz$, & la ſomme de ce produit ajoûté à celle des quarrez $3yy+zz$. Or b eſt auſſi le produit des grandeurs, & c la ſomme de ce produit ajoûté à la ſomme de leurs quarrez. Donc $yy-zz=b$ & $3yy+zz=c$. Or par la premiere égalité, $zz=yy-b$, & par la ſeconde, $zz=c-3yy$. Donc $yy-b=c-3yy$. Et par tranſpoſition, $4yy=b+c$. Donc $yy=\frac{1}{4}b+\frac{1}{4}c$. Or nous avions trouvé $zz=yy-b$. Donc $zz=\frac{1}{4}b+\frac{1}{4}c-b=\frac{1}{4}c-\frac{3}{4}b$.

Regle. Donc le quart du produit de deux grandeurs, plus le quart de ce même produit ajoûté à la ſomme des quarrez, eſt égal au quarré de la moitié de la ſomme des deux grandeurs; Et le quart du produit ajoûté à la ſomme des quarrez, moins les trois quarts du produit, eſt égal au quarré de la moitié de leur difference.

Soit le produit $b=20$, ce produit ajoûté à la ſomme des quarrez $c=124$. Donc yy ou $\frac{1}{4}b+\frac{1}{4}c=5+31=36$, & $zz=\frac{1}{4}c-\frac{3}{4}b=31-15=16$. Donc $y=6$, $z=4$, $y+z=10$, & $y-z=2$.

VINGTIÉME QUESTION.

XXXVIII. Connoiſſant le produit de deux grandeurs, & la ſomme de leurs cubes, trouver chaque grandeur.

Soit la ſomme des grandeurs $2y$, leur difference $2z$, leur produit b, & la ſomme de leurs cubes c. La plus grande ſera donc $y+z$, la plus petite $y-z$, leur produit $yy-zz$, & la ſomme des cubes $2y^3+6yzz$. Or b eſt auſſi le produit des deux grandeurs, & c la ſomme de leurs cubes. Donc $yy-zz=b$. & $2y^3+6yzz=c$. Or par la premiere égalité, l'on a $zz=yy-b$. Si donc l'on met $yy-b$ au lieu du quarré zz qui luy eſt égal, dans la ſeconde égalité $2y^3+6yzz=c$, l'on aura l'égalité composée $y^3+3y^3-3by=\frac{1}{2}c$, c'eſt à dire $4y^3-3by=\frac{1}{2}c$.

VINGT-UNIÉME QUESTION.

Connoiſſant le produit de deux grandeurs, & la difference de leurs cubes, trouver chaque grandeur.

Si la ſomme des grandeurs eſt $2y$, leur difference $2z$, leur produit b, & la difference de leurs cubes d, l'operation conduira à l'égalité composée $4z^3+3bz=\frac{1}{2}d$.

Si l'on me demande pourquoy je conduis à des égalitez que je ne reſous point icy, je répondray que l'un de mes principaux deſſeins dans ce Livre, eſt d'apprendre le moyen d'arriver aux égalitez, & comme je ne ſuppoſe point d'abord que l'on ſçache ſi les égalitez qu'on cherche ſeront composées, ou ſi elles ne le ſeront point, je marque ſeulement les moyens d'y arriver, & lorſqu'il arrive qu'elles ſont ſimples, j'en donne la reſolution, & j'en déduis des Theoremes.

Mais pourtant en attendant que je donne des Regles generales pour reſoudre ces ſortes d'égalitez compoſées ; voicy une Regle qui poura ſervir à les rendre plus ſimples par les operations ordinaires, en enveloppant neanmoins quelquefois les grandeurs qui en ſont les membres, c'eſt à dire en élevant chacun de ces membres à des puiſſances compoſées, qui ſoient telles que les parties de chaque égalité ayent chacune un pareil nombre de dimenſions. Cette Regle peut eſtre fort utile pour ceux-là ſur tout qui entreprennent des recherches difficiles.

REGLE.

XXXIX. Si les égalitez ont differens degrez, on les éleve reciproquement aux degrez marquez par le nombre des dimenſions qu'elles ont, la premiere par exemple au degré marqué par le nombre des dimenſions de la ſeconde, & la ſeconde au degré marqué par le nombre de la premiere. Cette operation donne d'autres égalitez plus compoſées que les premieres, mais dont les dimenſions ſont les mêmes. Enſuite lorſqu'on les a ainſi élevées, ou ſi elles ont déja leurs dimenſions égales, l'on joint ou bien l'on retranche les membres inconnus de ces égalitez les uns des autres, & l'on fait ſur leurs membres connus la même choſe que ſur les inconnus ; ce qui fournit encore de nouvelles égalitez. L'on tâche à reſoudre ces égalitez par les réductions ordinaires. Et ſi les réductions peuvent ſe faire, on a des égalitez nouvelles, que l'on compare en même ſorte avec les premieres que l'on avoit trouvées auparavant. Et ces ſortes de comparaiſons ſe continüent juſques à ce qu'on ait la reſolution cherchée, ou bien juſques à ce qu'on n'ait plus aucun moyen de la trouver par cette voye.

Premier Exemple.

Connoiſſant le produit de deux grandeurs, & la ſomme de leurs cubes, trouver chaque grandeur.

Nous avions trouvé dans la queſtion vingtiéme les deux égalitez $yy - zz = b$, & $y^3 + 3yzz = \frac{1}{2}c$, dont les membres inconnus $yy - zz$, & $y^3 + 3yzz$ ont differens degrez, car les termes de l'un ſont plans, & les termes de l'autre ſont ſolides. J'éleve donc les deux membres de la premiere égalité à la ſixiéme dimenſion en cubant chacun de ſes membres, & j'éleve auſſi les deux membres de la ſeconde égalité à la ſixiéme dimenſion en quarrant chacun de ſes membres. Et j'ay par cette operation les deux autres égalitez $y^6 - 3y^4zz + 3yyz^4 - z^6 = b^3$, & $y^6 + 6y^4zz + 9yyz^4 = \frac{1}{4}cc$. Enſuite je retranche le membre inconnu de la premiere de ces deux égalitez, du membre inconnu de la ſeconde, & j'en fais de même de leurs membres connus, ce qui me donne l'égalité $9y^4zz + 6yyz^4 + z^6 = \frac{1}{4}cc - b^3$. Et tirant de part & d'autre la racine quarrée, j'ay $3yyz + z^3 = \sqrt{\frac{1}{4}cc - b^3}$. Or ſi je compare cette égalité avec celle des deux premieres qui a un nombre pareil de dimenſions, & que je joigne les deux membres inconnus enſemble, & les deux connus pareillement, j'auray l'égalité nouvelle

$y^3+3yzz+3yyz+z^3=\frac{1}{2}c+\sqrt{\frac{1}{4}cc-b^3}$. Et tirant la racine cubique de part & d'autre, $y+z=\sqrt{C.\frac{1}{2}c+\sqrt{\frac{1}{4}cc-b^3}}$. Or nous avions $yy-zz=b$. Diviſant donc de part & d'autre par $y+z$, ou par ſa valeur que nous venons de découvrir, nous trouverons $y-z=\frac{b}{\sqrt{C.\frac{1}{2}c+\sqrt{\frac{1}{4}cc-b^3}}}$. Et la queſtion eſt reſoluë.

Second Exemple.

Connoiſſant le produit de deux grandeurs, & la difference de leurs cubes, trouver chaque grandeur.

Nous avions dans la derniere queſtion les deux égalitez $yy-zz=b$, & $3yyz+z^3=\frac{1}{2}d$. Je multiplie donc cubiquement chaque membre de la premiere égalité, & quarrément chacun de la ſeconde, ce qui me donne $y^6-3y^4zz+3yyz^4-z^6=b^3$, & $9y^4zz+6yyz^4+z^6=\frac{1}{4}dd$. Enſuite je joins enſemble les deux membres inconnus, & j'en fais de même des deux connus, aprés quoy j'ay l'égalité nouvelle $y^6+6y^4zz+9yyz^4=\frac{1}{4}dd+b^3$. Et tirant la racine quarrée de part & d'autre, $y^3+3yzz=\sqrt{\frac{1}{4}dd+b^3}$. Or nous avions $3yyz+z^3=\frac{1}{2}d$. Donc $y^3+3yzz+3yyz+z^3=\frac{1}{2}d+\sqrt{\frac{1}{4}dd+b^3}$. Donc $y+z=\sqrt{C.\frac{1}{2}d+\sqrt{\frac{1}{4}dd+b^3}}$. Or $yy-zz=b$. Donc $y-z=\frac{b}{\sqrt{C.\frac{1}{2}d+\sqrt{\frac{1}{4}dd+b^3}}}$.

L'on verra dans la ſuite que ces deux reſolutions ont quelque rapport avec l'invention de la Regle de Cardan, dont il eſt parlé dans Monſieur Deſcartes.

Troiſiéme Exemple.

L'on remarquera que cette regle peut auſſi ſervir quelquefois pour les égalitez qui ont un même degré, en les élevant chacune à une autre dimenſion.

Par exemple, pour trouver quelles ſont deux grandeurs lorſque l'on en connoît le produit & la difference de leurs quarrez.

Soit b le produit des grandeurs, & d la difference des quarrez, $2y$ la ſomme des grandeurs, & $2z$ leur difference. Donc $yy-zz=b$, & $4yz=d$. Ces deux égalitez comparées comme à l'ordinaire, conduiſent à une égalité compoſée. Mais ſi nous élevons chacune à ſon quarré, nous aurons $y^4-2yyzz+z^4=bb$, & $16yyzz=dd$. Et ſi nous ajoûtons le quart de cette derniere égalité à celle qui precede, nous aurons $y^4+2yyzz+z^4=bb+\frac{1}{4}dd$. Donc tirant de part & d'autre la racine quarrée, $yy+zz=\sqrt{bb+\frac{1}{4}dd}$. Et ſi nous comparons ſelon la regle cette nouvelle égalité avec $yy-zz=b$, en les joignant toutes deux en une, nous aurons $2yy=b+\sqrt{bb+\frac{1}{4}dd}$. Donc $yy=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\sqrt{bb+\frac{1}{4}dd}$. Or nous avions $yy+zz=\sqrt{bb+\frac{1}{4}dd}$. Donc $zz=\frac{1}{2}\sqrt{bb+\frac{1}{4}dd}-\frac{1}{2}b$. Et la queſtion eſt reſoluë. Il en eſt ainſi pour les autres ſemblables.

VINGT-DEUXIÉME QUESTION.

Connoiſſant deux ſolides, l'un fait du produit de la ſomme de deux grandeurs par la ſomme de leurs quarrez, & l'autre du produit de la difference des grandeurs par la difference de leurs quarrez, trouver chaque grandeur. XL.

Soit le premier ſolide appellé c, le ſecond d, la ſomme des grandeurs $2y$, & leur difference $2z$. La plus grande ſera donc $y+z$, la plus petite $y-z$, la ſomme des quarrez $2yy+2zz$, dont le produit par la ſomme $2y$, eſt $4y^3+4yzz$, & la difference des quarrez $4yz$ dont le produit par la difference $2z$ eſt $8yzz$. Or c eſt auſſi le premier de ces produits, & d le ſecond. Donc $4y^3+4yzz=c$, & $8yzz=d$. Or la premiere égalité donne $yzz=\frac{1}{4}c-y^3$, & la ſeconde $yzz=\frac{1}{8}d$. Donc $\frac{1}{4}c-y^3=\frac{1}{8}d$. Et par tranſpoſition $y^3=\frac{1}{4}c-\frac{1}{8}d$. Or y eſtant connu, z l'eſt auſſi. Car $yzz=\frac{1}{8}d$.

Formule. Donc le quart du ſolide fait de la ſomme de deux grandeurs par la ſomme de leurs quarrez, moins la huitiéme partie d'un autre ſolide fait de la difference des deux grandeurs par la difference de leurs quarrez, eſt égal au cube de la moitié de la ſomme des deux grandeurs.

Soit le premier ſolide $c=272$, & le ſecond $d=32$. Donc $y^3=64$, & $y=4$. Or yzz ou $\frac{1}{8}d=\frac{32}{8}=4$. Donc $4zz=4$, ou $zz=1$, & $z=1$. Donc $y+z=5$, & $y-z=3$.

VINGT-TROISIÉME QUESTION.

Connoiſſant la ſomme des quarrez de deux grandeurs, & le rapport de leur produit au quarré de leur difference, trouver chaque grandeur. XLI.

Soit la ſomme des quarrez appellée c, & ſoit le rapport du produit au quarré de la difference, comme d eſt à e. Soit auſſi $2y$ la ſomme inconnuë des grandeurs, & $2z$ leur difference. La premiere ſera donc $y+z$, la ſeconde $y-z$, la ſomme de leurs quarrez $2yy+2zz$, leur produit $yy-zz$, & le quarré de leur difference $4zz$. Or c eſt la ſomme des quarrez. Donc $2yy+2zz=c$. Et parceque $yy-zz.\ 4zz :: d.\ e.$ l'autre égalité ſera $eyy-ezz=4dzz$. Or la premiere égalité donne $yy=\frac{1}{2}c-zz$, & la ſeconde $yy=\frac{4dzz+ezz}{e}$. Donc $\frac{1}{2}c-zz=\frac{4dzz+ezz}{e}$. Et le tout eſtant multiplié par e, l'on a $\frac{1}{2}ce-ezz=4dzz+ezz$. Et par tranſpoſition $\frac{1}{2}ce=4dzz+2ezz$. Et diviſant le tout par $4d+2e$, l'on a $zz=\frac{ce}{8d+4e}$.

Or nous avions $yy = \frac{1}{2}c - zz$. Donc $yy = \frac{4cd + ce}{8d + 4e}$.

Regle. Donc le produit de 4 fois la ſomme des quarrez par le premier terme du rapport, plus le produit de la même ſomme par le ſecond terme du rapport, eſtant diviſé par 8 fois le premier terme plus 4 fois le ſecond, l'expoſant ſera le quarré de la moitié de la ſomme des deux grandeurs. Et le produit de la ſomme des quarrez par le ſecond terme, eſtant diviſé par 8 fois le premier plus 4 fois le ſecond, l'expoſant ſera le quarré de la moitié de la difference.

Soit la ſomme des quarrez $c = 20$. Et le rapport de d à e comme 2 à 1, c'eſt à dire $d = 2$, & $e = 1$. Donc $yy = \frac{180}{20} = 9$, & $zz = \frac{20}{20} = 1$. Donc $y = 3$, $z = 1$, $y + z = 4$, & $y - z = 2$.

VINGT-QUATRIE'ME QUESTION.

XLII. Connoiſſant la ſomme des quarrez de trois grandeurs proportionelles, & la ſomme des extrêmes, trouver chaque grandeur.

Soit $2a$ la ſomme des extrêmes, & c la ſomme des quarrez. Si la difference des extrêmes eſt appellée $2z$, la plus grande ſera $a + z$, la plus petite $a - z$, la moyenne $\sqrt{aa - zz}$, & la ſomme des quarrez qui ſont $aa + 2az + zz$, $aa - 2az + zz$, & $aa - zz$ ſera $3aa + zz$. Donc $3aa + zz = c$. Et par tranſpoſition, $zz = c - 3aa$.

Regle. Donc la ſomme des quarrez moins trois fois le quarré de la moitié de la ſomme des extrêmes, eſt égale au quarré de la moitié de leur difference.

Soit $2a = 5$, $c = 21$. Donc $zz = 21 - \frac{75}{4} = \frac{9}{4}$. Donc $z = \frac{3}{2}$. La plus grande des deux extrêmes ſera donc $a + z = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}$, c'eſt à dire 4, la plus petite $a - z = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}$, c'eſt à dire 1, & la moyenne 2. ∺ 4. 2. 1.

Si au lieu d'avoir pris $a + z$ & $a - z$ pour les extrêmes, je les euſſe autrement dénommées, l'operation auroit eſté un peu plus courte, mais elle m'auroit conduit à une égalité compoſée. Comme la ſomme eſtoit connuë, & qu'il n'importoit point que la plus grande extrême fuſt miſe la premiere ou la derniere, il eſtoit plus de l'ordre de me ſervir du ſecond principe que d'aucun autre. Il en eſt ainſi des queſtions ſuivantes, quand même la ſomme des grandeurs ny leur difference n'y ſeroit point connuë.

VINGT-CINQUIE'ME QUESTION.

XLIII. Connoiſſant la ſomme des quarrez de trois grandeurs proportionelles, & leur moyenne, trouver chaque grandeur.

Soit c la ſomme des quarrez, b la moyenne, $2y$ la ſomme des extrêmes, & $2z$ leur difference; la plus grande extrême ſera donc $y + z$, la plus petite $y - z$, la proportion ſera ∺ $y + z$. b. $y - z$. & la ſomme des quarrez $2yy + 2zz + bb$. Donc $2yy + 2zz + bb = c$. Et $yy = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}bb - zz$.

Or le quarré bb de la moyenne eſt égal au produit des extrêmes. Donc

$yy-zz=bb$. Et $yy=bb+zz$. Donc $\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}bb-zz=bb+zz$. Et par tranſpoſition $\frac{1}{2}c-\frac{3}{2}bb=2zz$, ou diviſant le tout par 2, $zz=\frac{1}{4}c-\frac{3}{4}bb$ Or $yy=bb+zz$. Donc $yy=\frac{1}{4}c+\frac{1}{4}bb$.

Regle. Donc le quarré de la moitié de la ſomme des extrêmes eſt égal au quart de la ſomme des quarrez, plus le quart du quarré de la moyenne. Et le quarré de la moitié de leur difference eſt égal au quart de la ſomme des quarrez, moins les trois quarts du quarré de la moyenne.

Soit $c=21$, $b=2$. Donc $yy=\frac{21}{4}+\frac{4}{4}=\frac{25}{4}$, & $zz=\frac{21}{4}-\frac{12}{4}=\frac{9}{4}$. Donc $y=\frac{5}{2}$, $z=\frac{3}{2}$, $y+z=4$, & $y-z=1$. $∺ 4.\ 2.\ 1.$

VINGT-SIXIE'ME QUESTION.

Connoiſſant la ſomme des extrêmes, & la ſomme des moyennes d'une progreſſion geometrique de quatre termes, trouver chacun des termes. **XXVI**

Soit $2a$ la ſomme des extrêmes, $2z$ leur difference, $2b$ la ſomme des moyennes, & $2y$ leur difference. La plus grande extrême ſera donc $a+z$, & la plus petite $a-z$; la plus grande moyenne $b+y$, & la plus petite $b-y$; & la progreſſion $∺ a+z.\ b+y::b-y.\ a-z$. Or en conſiderant ſeulement les trois premiers termes, le quarré du ſecond doit égaler le produit du premier & troiſiéme; & conſiderant ſeulement les trois derniers, le quarré du troiſiéme doit égaler le produit du ſecond par le quatriéme; & enfin en les conſiderant tous quatre, le produit des extrêmes doit égaler le produit des moyens. Ce qui nous donne trois égalitez, la premiere $bb+2by+yy=ab+bz-ay-yz$, la ſeconde $bb-2by+yy=ab-bz+ay-yz$, & la troiſiéme $aa-zz=bb-yy$. Or comparant les deux premieres valeurs du quarré yy, trouvées l'une par la premiere égalité, & l'autre par la ſeconde, l'on tronve $ay+2by=bz$. Et diviſant chaque membre par $a+2b$, l'on a $y=\frac{bz}{a+2b}$. Or par la troiſiéme égalité, $yy=zz+bb-aa$. Donc $y=\sqrt{zz+bb-aa}=\frac{bz}{a+2b}$. Et quarrant chaque membre pour oſter l'incommenſurabilité, l'on a $zz+bb-aa=\frac{bbzz}{aa+4ab+4bb}$, & par tranſpoſition $zz-\frac{bbzz}{aa+4ab+4bb}=aa-bb$. Et le tout eſtant multiplié par $aa+4ab+4bb$, l'on aura zz par $\overline{aa+4ab+4bb}$ moins $bbzz$, égal à $\overline{aa-bb}$ par $\overline{aa+4ab+4bb}$. Et le tout eſtant diviſé par $\overline{aa+4ab+4bb,-bb}$, l'on aura enfin $zz=\frac{a^4+4a^3b+3aabb-4ab^3-4b^4}{aa+4ab+3bb}$. Et remettant la valeur de zz dans l'égalité déja trouvée $yy=zz+bb-aa$, l'on aura $yy=\frac{aabb-b_4}{aa+4ab+3bb.}$

Regle. Donc la difference du quarré de la moitié des extrêmes au quarré de la moitié des moyennes, eſtant multipliée par le quarré de la moitié des extrêmes ajoûtée à la ſomme des deux moyennes, & le ſurſolide qu'on trouve, eſtant diviſé par ce même quarré, diminué du quarré de la moitié des moyennes, l'expoſant ſera le quarré de la moitié de la difference des extrêmes. Et la difference du quarré de la moitié des extrêmes au quarré de la moitié des moyennes, eſtant multiplié par le quarré de la moitié des moyennes, & le ſurſolide qu'on trouve, eſtant diviſé par le quarré de la moitié des extrêmes ajoûtée à la ſomme des moyennes, diminué du quarré de la moitié des moyennes, l'expoſant ſera le quarré de la moitié de la difference des moyennes.

Soient $2a = 9$, & $2b = 6$. Donc $zz = \frac{19}{4}$, & $yy = 1$. Donc $z = \frac{7}{2}$, $y = 1$, $a + z = 8$, $a - z = 1$, $b + y = 4$, & $b - y = 2$. ∺ 8. 4. 2. 1.

Que ſi l'on connoiſſoit la ſomme des extrêmes & leur produit, & qu'on vouluſt chercher les moyennes. Soit $2a$ la ſomme des extrêmes, & c leur produit, ſi leur difference eſt $2z$. Donc $aa - zz = c$. Et $zz = aa - c$. Donc $z = \sqrt{aa - c}$. Et ſi la plus grande moyenne eſt appellée y, la progreſſion ſera ∺ $a\sqrt{aa - c}$. y. $\frac{yy}{a + \sqrt{aa - c}}$. $a - \sqrt{aa - c}$. Egalant donc le produit des extrêmes au produit des moyennes, & multipliant chacun par $a + \sqrt{aa - c}$, l'on aura $y^3 = ac + c\sqrt{aa - c}$.

Soient $2a = 9$, & $c = 8$. Donc $y^3 = 64$, & $y = 4$. ∺ 8. 4. 2. 1.

VINGT-SEPTIE'ME QUESTION.

XLV. Connoiſſant la difference des extrêmes & la difference des moyennes, trouver chacun des termes.

Soit $2c$ la difference des extrêmes, & $2z$ leur ſomme, $2d$ la difference des moyennes, & $2y$ leur ſomme. La proportion ſera donc ∺ $z + c$. $y + d$. $y - d$. $z - c$. Et l'on en tirera ces trois égalitez ;

La 1^ere^ $yy + 2dy + dd = zy + cy - dz - dc$. Et $yy = zy + cy - dz - dc - 2dy - dd$.
La 2^e^. $yy - 2dy + dd = zy - cy + dz - dc$. Et $yy = zy - cy + dz - dc + 2dy - dd$.
Et la troiſiéme $zz - cc = yy - dd$. Et $yy = zz - cc + dd$.

Or l'on a par les deux premieres, $2cy - 4dy = 2dz$. Donc $y = \frac{dz}{c - 2d}$.

Or l'on a par la 3^e^. $yy = zz - cc + dd$. Donc $y = \sqrt{zz - cc + dd} = \frac{dz}{c - 2d}$. Quarrant donc chaque membre pour oſter l'incommenſurabilité, tranſpoſant à l'ordinaire, multipliant enſuite chaque membre par $cc - 4cd + 4dd$, & diviſant le tout par $cc - 4cd + 4dd, - dd$, l'on trouvera enfin $zz = \frac{c^4 - 4c^3d + 3ccdd + 3cd^3 - 4d^4}{cc - 4cd + 3dd}$. Et mettant cette valeur de zz dans l'égalité $yy = zz - cc + dd$, l'on aura $yy = \frac{ccdd - d^4}{cc - 4cd + 3dd}$.

Regle. Donc la difference du quarré de la demie difference des extrêmes au quarré de la demie difference des moyennes, eſtant multipliée par le quarré de la demie difference des extrêmes diminuée de la difference entiere des moyennes ; & le ſurſolide qu'on trouve, eſtant diviſé par ce même quarré diminué du quarré de la demie difference des moyennes, l'expoſant ſera le quarré de la moitié de la ſomme des extrêmes. Et la difference du

quarré

quarré de la demie difference des extrêmes au quarré de la demie difference des moyennes , eſtant multiplié par le quarré de la demie difference des moyennes ; & le ſurſolide qu'on trouve , eſtant diviſé par le quarré de la demie difference des extrêmes diminuée de la difference des moyennes, moins le quarré de cette même difference, l'expoſant ſera le quarré de la moitié de la ſomme des moyennes.

Soit $2c = 7$, & $2d = 2$. Donc $zz = \frac{81}{4}$ & $yy = 9$. Donc $z = \frac{9}{2}$, $y = 3$. $z + c = 8$, $z - c = 1$, $y + d = 4$, & $y - d = 2$. ∺ 8. 4. 2 1.

Que ſi l'on connoiſſoit la difference des extrêmes $2c$, & leur produit que j'appelle b. Si $2z$ ſont la ſomme des extrêmes , & y la plus grande moyenne. Donc $zz - cc = b$. Et $z = \sqrt{b + cc}$. Donc ∺ $\sqrt{b + cc} + c$. y. $\frac{yy}{\sqrt{b+cc} + c}$. $\sqrt{b + cc} - c$. Donc $y^3 = bc + b\sqrt{b + cc}$.

Soit $2c = 7$, $b = 8$. Donc $y^3 = 64$, & $y = 4$. ∺ 8. 4. 2. 1.

Reſolution de la Queſtion precedente par la Methode de Viete.

Soit , dit-il , la difference donnée des deux extrêmes D, & la difference des deux moyennes B, il faut trouver les quatre proportionelles.

La ſomme des extrêmes ſoit A. Donc $A + D$ ſera le double de la plus grande extrême , & $A - D$ le double de la plus petite. Lors donc que l'on multipliera $A + D$ par $A - D$, l'on aura le quadruple du rectangle fait par les extrêmes , ou par les moyennes. C'eſt pourquoy A quarré $-D$ quarré, diviſé par 4, ſera ce rectangle , lequel eſtant multiplié par la plus grande extrême , donnera le cube de la plus grande moyenne ; & par la plus petite extrême , il donnera le cube de la plus petite moyenne. Et enfin lorſqu'on multipliera ce rectangle par la difference des extrêmes , l'on aura le cube de la difference des moyennes. C'eſt pourquoy D par A quarré $-D$ cube diviſé par 4, eſt égal à la difference des cubes des moyennes. Or ſi de la difference des cubes on oſte le cube de la difference des grandeurs , le reſte eſt égal à 3 fois le ſolide de la difference des grandeurs par le rectangle de ces mêmes grandeurs , ainſi qu'il eſt viſible par la generation du cube de la difference de deux grandeurs.

C'eſt pourquoy le quart de D par A quarré $-D$ cube $-4B$ cube , eſt égal à 3 ſolides de la difference des moyennes par le rectangle des moyennes, c'eſt à dire au quart de $3B$ par A quarré , $-3B$ par D quarré. Et l'égalité eſtant ordonnée, D cube , $+4B$ cube , $-3B$ par D quarré , eſtant diviſez par $D - 3B$, ſera égal au quarré de A.

Donnant donc la difference des extrêmes , & la difference des moyennes d'une progreſſion de quatre termes , on trouve les termes de la proportion.

Regle. Car lorſque le cube de la difference des extrêmes , plus 4 fois le cube de la difference des moyennes , moins trois ſolides faits de la difference des moyennes par 4 fois le quarré de la difference des extrêmes , ſera appliqué à la difference des extrêmes, moins 3 fois la difference des moyennes; le plan qu'on trouvera eſt égal au quarré de la ſomme des extrêmes.

Soit *D*7. *B*2. *A*1*N*. 1*Q* eſt égal à 81, & l'on a 1*N*√81, c'eſt à dire la ſomme des extrêmes 1 & 8, & les moyennes 2 & 4.

I. II. III. IIII.
1. 2. 4. 8.

Cette methode ne peut gueres ſervir pour bien conduire ſon eſprit dans des recherches par la voie la plus ſimple. Car tous ces Theoremes ſuppoſez ſont preſque auſſi difficiles à appercevoir que la reſolution même que l'on cherche, & peut eſtre le ſont-ils encore davantage. Car en ne les ſçachant point, comment l'eſprit peut-il ſe tourner vers elles, & juger que les reſolutions qu'il cherche en dépendent? Et s'il les a ſçeuës auparavant, eſt-ce qu'il aura une memoire aſſez bonne pour s'en ſouvenir? Ie veux même qu'il s'en ſouvienne, les diſtinguera-t'il bien parmi toutes ſes autres connoiſſances, en telle ſorte qu'il ſoit aſſuré que ce ſont plûtoſt elles qui doivent lui ſervir, que ces autres? L'on me dira peut-eſtre qu'en examinant les proprietez generales des puiſſances, & celles des progreſſions dont nous parlons, il ſera aiſé d'y remarquer les communications mutuelles dont Viete a ſuppoſé qu'on eut déja la connoiſſance. Ce ne ſont donc plus de ſimples recherches qu'il faut faire, mais de nouveaux études, & ces études ne demandent pas une application mediocre, ſur tout ſi les queſtions ſont un peu difficiles, & ſi elles renferment pluſieurs conditions.

XLVI. *Mais avant que je quitte ici le ſecond Principe, j'avertirai qu'il eſt tres-fecond, & que toutes les connoiſſances de l'Analyſe qui ſont les plus univerſelles en dépendent, comme on verra dans les derniers Livres. Et pour ce qui eſt des reſolutions particulieres, l'uſage ſeul poura faire connoître combien ſon application peut avoir d'étenduë pour les queſtions mêmes les plus difficiles, lorſqu'il faut arriver à la derniere égalité qui en doit renfermer toutes les conditions, & de qui la reſolution donne auſſi celle que l'on veut avoir. Ie me contenteray d'en marquer un ſeul exemple outre les precedens.*

Chap. 31. *queſt.* 58. Le Pere Clavius dans ſon Traitté d'Algebre, aprés eſtre arrivé par le moyen d'une figure, & en ſuivant une Methode aſſez difficile, à une égalité où l'inconnuë a deux degrez, & qui doit ſervir pour reſoudre quelque queſtion qu'il eſtime extrêmement difficile, il tire un tel Corollaire de ſon operation.

Cet enigme, dit-il, *fait facilement voir que celui qui pretend reſoudre les queſtions par Algebre, doit eſtre parfaitement verſé dans la ſcience de la Geometrie, comme nous l'avons dit au premier chapitre. Car il eſt viſible que la reſolution de cet enigme eſt extrêmement difficile, ou tout à fait impoſſible à trouver à celui qui ne ſçait point de Geometrie. La queſtion eſt celle-ci.*

Deux perſonnes ont chacune un nombre d'écus. La ſomme de tous leurs écus eſtant retranchée de la ſomme des quarrez formez par chacun des deux nombres, laiſſe 78. Mais eſtant ajoûtée au produit de ces mêmes nombres, elle donne 39. L'on demande combien chacun avoit d'écus?

Juſques-icy nous n'avons fait aucune ſuppoſition tirée de la Geometrie, & nous n'en ferons point encore icy. Cependant nous arriverons facilement à l'égalité en nous ſervant du ſecond Principe. Voicy comment. Soit pour abbreger le nombre connu 78 appellé $2a$, & le nombre connu 39 appellé a, parcequ'il vaut la moitié de 78 que nous appellons $2a$. Soit enſuite $2y$ la ſomme des deux nombres inconnus des écus, & leur difference $2z$. Le plus grand eſt donc $y+z$, le plus petit $y-z$, la ſomme de leurs quarrez $2yy+2zz$, & leur produit $yy-zz$. Or la ſomme des quarrez moins la ſomme des nombres, eſt égale à $2a$ par la premiere ſuppoſition; & le produit des mêmes nombres moins leur ſomme, eſt égal à a. L'on aura donc les deux égalitez $2yy+2zz-2y=2a$, ou bien $yy+zz-y=a$, & $yy-zz+2y=a$. Comme zz ſe trouve une ſeule fois dans chacune, ſans que ſa racine z s'y rencontre, je prens ſa valeur par chaque égalité, & j'ay par la premiere $zz=a-yy+y$. Et par la ſeconde $zz=yy+2y-a$. Donc $a-yy+y=yy+2y-a$. Et par réduction $2a=2yy+y$, ou bien $yy+\frac{1}{2}y=a$. Et remettant 39 au lieu de a qui luy eſt égal, $yy+\frac{1}{2}y=39$ qui eſt une égalité plus ſimple & plus facile à reſoudre que celle à laquelle le Pere Clavius arrive en ſe ſervant de figure. Et pour la reſolution de cette égalité, nous l'expliquerons generalement dans ſon lieu.

L'on poura neanmoins la reſoudre en cette ſorte. $yy+\frac{1}{2}y$ n'eſt pas quarré, la partie yy eſtant le quarré de y, ſi l'on diviſe $\frac{1}{2}y$ par 2, l'expoſant $\frac{1}{4}$ ſera la racine du quarré $\frac{1}{16}$, lequel eſtant ajoûté à $yy+\frac{1}{2}y$, donnera le quarré $yy+\frac{1}{2}y+\frac{1}{16}$, dont la racine eſt $y+\frac{1}{4}$. Si donc à chaque membre de l'égalité $yy+\frac{1}{2}y=39$ que nous avions trouvée, l'on ajoûte $\frac{1}{16}$, l'égalité ſera $yy+\frac{1}{2}y+\frac{1}{16}=39\frac{1}{16}$. Tirant donc la racine quarrée de part & d'autre, l'on aura $y+\frac{1}{4}=\sqrt{39\frac{1}{16}}$. Et parceque $\sqrt{39\frac{1}{16}}=\frac{25}{4}=6\frac{1}{4}$, nous aurons $y+\frac{1}{4}=6\frac{1}{4}$, c'eſt à dire $y=6$. Or nous avions $yy-zz+2y=a=39$. Donc $36-zz+12=39$. Et $-zz+9=0$. Donc $zz=9$, & $z=3$. Les deux nombres d'écus ſeront donc $y+z=6+3=9$, & $y-z=3$. La ſomme de leurs quarrez $81+9$ eſt 90, & la ſomme $9+3$, ou 12, en eſtant retranchée, laiſſe 78; Et le produit de 9 par 3 eſt 27, à qui 12 eſtant ajoûté, la ſomme eſt 39.

L'on peut remarquer en paſſant que toutes les égalitez de deux degrez ſe peuvent reſoudre comme j'ay reſoluë celle-cy.

DES QUESTIONS INDETERMINE'ES.

Avant que d'expoſer un troiſiéme Principe, il faut que nous donnions quelques idées des queſtions indeterminées, c'eſt à dire de celles qui reçoivent pluſieurs reſolutions differentes. Car c'eſt principalement pour ces ſortes de queſtions que doit ſervir le troiſiéme Principe.

XLVII. L'on juge ordinairement qu'une queſtion eſt indéterminée, lorſqu'ayant ſatisfait à toutes les conditions qu'elle renferme, la derniere égalité à laquelle on arrive ſe réduit à deux membres entierement connus.

Exemple.

Par exemple pour trouver quatre grandeurs dont les deux premieres ſoient a, la ſeconde & troiſiéme b, la troiſiéme & quatriéme c, & la quatriéme enfin avec la premiere d.

Soit la premiere appellée z, la ſeconde y, la troiſiéme x, & la quatriéme v. Les ſuppoſitions donneront donc ces quatre égalitez.

$$\left.\begin{array}{l}\text{La } 1^{re}\ z+y=a.\ \text{Donc } y=a-z.\\ \text{La } 2^{e}.\ y+x=b.\ \text{Donc } y=b-x.\end{array}\right\}\ \text{Donc } x=z-a+b.$$

La 3^{e}. $x+v=c$. Donc $x=c-v=z-a+b$. Et $z=a-b+c-v$.

Et la 5^{e}. $v+z=d$. Donc $z=d-v=a-b+c-v$. Et $d=a-b+c$.

Comme les deux membres de la derniere égalité $d=a-b+c$, ne renferment que des grandeurs entierement connuës, la queſtion eſt indeterminée. Il faut toutefois remarquer qu'elle peut eſtre tout-à-fait contradictoire, ſi par exemple la grandeur d eſtoit inégale aux grandeurs connuës $a-b+c$. Mais il ne faut point ſe mettre en peine de ſçavoir ſi les queſtions ſont contradictoires, ou non ; l'operation le fait aſſez connoître. Or ſuppoſant que leur reſolution ſoit poſſible, & qu'on la puiſſe même donner poſitivement, il faut marquer en rétrogradant les valeurs des inconnuës x, y, & z, en telle ſorte que la ſeule inconnuë v ſe trouve dans leurs expreſſions. Or comme on a déja $x=c-v$, il ne faut rien changer dans cette égalité. Mais dans l'égalité $y=b-x$, il y faut mettre au lieu de x ſa valeur $c-v$, ou bien dans l'autre $y=a-z$, au lieu de z ſa valeur $d-v$. Aprés quoy les quatre grandeurs ſeront $z=d-v$, $y=a-d+v$, $x=c-v$, ou bien ce qui doit eſtre la même choſe $x=-a+b+d-v$, & remettant $d-v$ au lieu de z qui luy eſt égale dans l'égalité $x=z-a+b$, où l'on voit que ſi c n'eſtoit point égal à $-a+b+d$, il y auroit contradiction dans la queſtion. Or dans ces trois grandeurs $d-v$, $a-d+v$, $c-v$, ou bien $-a+b+d-v$, & la quatriéme v, l'on n'y trouve qu'une ſeule inconnuë. Et comme ces grandeurs ainſi indeterminées ſatisfont à toutes les conditions qu'on demande, la reſolution peut varier differemment, à cauſe que les inconnuës ne ſont pas tout-à-fait exprimées par le moyen des grandeurs connuës. Cependant comme les ſignes $+$ & $-$ ſe trouvent pluſieurs fois dans les expreſſions de ces inconnuës, il peut arriver que la reſolution quoy qu'indeterminée preſcrit neanmoins quelques bornes pour eſtre poſitive. Mais pour reconnoître ces bornes, il faut remettre auparavant au lieu des grandeurs *a*, *b*, *c* & *d*, les nombres qui leur ſont égaux. Si par exemple l'on ſuppoſe $a=13$, $b=15$, $c=19$, & $d=17$. En remettant ces nombres au lieu des lettres qui les valent, nous aurons pour quatre valeurs des inconnuës $17-v$, $-4+v$, $19-v$, & $+v$. Et alors il eſt facile de voir que v doit ſurpaſſer 4, afin que le nombre $-4+v=y$ ait une valeur poſitive; Et pareillement il eſt viſible que v doit eſtre ſurpaſſée par 17, afin que le nombre $17-v=z$ puiſſe auſſi eſtre poſitif, c'eſt à dire qu'il faut dans les valeurs découvertes en examiner deux, l'une où l'inconnuë $+v$ ſe trouve avec le moindre nombre negatif comme -4, & l'autre où $-v$ ſe trouve avec le moindre nombre poſitif comme 17. Et alors l'on peut preſcrire les bornes du nombre entre 4 & 17 plus grand que celuy-là, mais plus petit que celuy-cy. Or comme il y a 12 nombres entiers entre 4 & 17, l'on peut donner 12 reſolutions differentes de la queſtion, en prenant ſucceſſivement pour v, chacun des nombres 5, 6, 7, 8, &c. Ce qui donnera pour les nombres cherchez 12, 1, 14, 5. ou bien 11, 2, 13, 6. ou bien 10, 3, 12, 7. ou 9, 4, 11, 8. ou 8, 5, 10, 9. &c.

$$\begin{aligned} d-v&=\quad 17-v=z\\ a-d+v&=-4+v=y\\ c-v=-a+d-v&=\quad 19-v=x\\ \text{Et } v&=\quad +v=v \end{aligned}$$

Second Exemple.

Et ſi l'on demandoit ſix grandeurs qui eſtant priſes en même ſorte deux à deux, donnaſſent les ſix ſommes $a=13$, $b=15$, $c=19$, $d=11$, $e=10$, & $f=16$, les ſix expreſſions de ces grandeurs ſeroient celles qui ſuivent, où l'on voit que la reſolution ſeroit entierement impoſſible, ſi *e* n'eſtoit pas égale à $d-c+b-a+f$. Et pour marquer les limites entre leſquelles le nombre ſ doit eſtre choiſi, afin que la reſolution ſoit poſitive en nombres entiers, il faut prendre les deux expreſſions $-3+\text{ſ}$ & $10-\text{ſ}$, l'une où le plus petit nombre negatif -3 ſe trouve avec $+\text{ſ}$, & l'autre où le plus petit nombre poſitif 10 ſe trouve avec $-\text{ſ}$, & alors l'on peut determiner le nombre ſ plus grand que 3 & plus petit que 10, & aſſurer que la queſtion ne peut recevoir ny plus ny moins de 6 reſolutions poſitives en nombres entiers, car par fraction l'on en pouroit trouver une infinité. Si l'on prend donc ſucceſſivement pour v chacun des nombres 4, 5, 6, 7, 8, 9. les ſix nombres cherchez ſeront 12. 1. 14. 5. 6. 4. ou bien 11. 2. 13. 6. 5. 5. ou 10. 3. 12. 7. 4. 6. ou 9. 4. 11. 8. 3. 7. ou 8. 5. 10 9. 2. 8. ou enfin 7. 6. 9. 10. 1. 9. Il en eſt ainſi des autres queſtions ſemblables.

$$\begin{aligned} f-\text{ſ}&=\quad 16-\text{ſ}=z\\ a-f+\text{ſ}&=-3+\text{ſ}=y\\ b-a+f-\text{ſ}&=\quad 18-\text{ſ}=x\\ c-b+a-f+\text{ſ}&=\quad 1+\text{ſ}=v\\ e-\text{ſ}=d-c+b-a+f-\text{ſ}&=\quad 10-\text{ſ}=t\\ \text{Et } \text{ſ}&=\text{ſ} \end{aligned}$$

Ie ne doute point que l'on ne m'accuſe d'eſtre trop diffus, & de trop m'arreſter aux choſes faciles, mais je prie ceux qui liront cet ouvrage *de conſiderer que mon intention n'eſt pas tant d'écrire pour les perſonnes ſçavantes que pour celles qui ont peu d'ouverture & de lumiere. Comme elles ne pouroient peut-eſtre pas avoir toûjours l'eſprit aſſez preſent pour faire attention aux differens cas qui ſe rencontrent ordinairement en reſolvant leurs queſtions, je tâche de les expoſer à leurs yeux, & de leur en faire remarquer autant qu'il m'eſt poſſible les particularitez mêmes les plus legeres. Car l'experience m'a fait aſſez connoître qu'elles ne doivent point eſtre negligées, & que leur conſideration apporte plus de lumiere à l'eſprit que l'on ne penſe. Ie le fais auſſi afin que l'on puiſſe remarquer l'uſage de la methode generale expliquée cy-devant 3. S. Car on découvre par ſon moyen tous les cas des reſolutions, ſi on les propoſe déterminées ou indéterminées, poſitives ou negatives, & enfin poſſibles, ou bien impoſſibles & contradictoires, il faut diſtinguer ces dernieres des reſolutions negatives. Et pourvû qu'on ſuive ſimplement cette methode ſans aucune autre addreſſe particuliere, qu'il eſt pourtant bon que l'on aye, l'on trouve d'abord la maniere d'établir ſes poſitions à la mode de Diophante. Car cette ſeule methode en découvre preſque toûjours les raiſons, & cependant elle n'oblige point de ſe charger la memoire de toutes celles qu'en apportent ordinairement ſes Commentateurs. Elle fait encore éviter un deffaut où ils ſont tombez fort ſouvent faute d'avoir aſſez bien apperçeu ou ſuivi cette methode. Car ils ſe mettent fort en peine pour faire remarquer en combien de differentes manieres l'on peut dénommer ſes grandeurs, en quoy cependant ils ne réüſſiſſent pas toûjours. L'on pouroit bien en remarquer encore d'autres qui leur ſont échappées, mais ce ſeroit perdre ſon temps, puiſque cela eſt entierement inutile. Il ſuffit de connoiſtre la voye la plus courte qui doit nous conduire où nous devons aller, & n'en point chercher d'autre. Celuy qui voudroit aller de Paris à Rome, peut le faire en une infinité de differentes manieres, car il peut prendre tant de détours & de ſi longs qu'il le voudra. Eſt-il donc neceſſaire pour cela que ceux qui voudront faire un tel voyage apprennent exactement la Carte de tout le monde, afin de ſçavoir tous les chemins qui vont à Rome? L'on ſe contente d'en apprendre un ſeul, le plus commun, ou le plus court chemin doit ſuffire.*

AUTRE MOYEN POUR DISCERNER SI LES QUESTIONS SONT INDETERMINÉES.

XLVIII. L'on connoît encore que la reſolution d'une queſtion eſt indeterminée, lorſqu'ayant ſatisfait à toutes ſes conditions, la derniere égalité à laquelle on arrive, enferme pluſieurs inconnües. Alors on a la liberté de ſuppoſer telles grandeurs que l'on voudra à la place de ces inconnües, pourvû ſeulement qu'il en reſte encore une. Cecy s'éclaircira par les queſtions ſuivantes.

PREMIERE QUESTION.

XLIX. Trouver deux grandeurs dont la ſomme ajoûtée au produit de l'une par l'autre, ſoit une grandeur donnée.

Soit a la grandeur donnée, la ſomme des grandeurs ny leur difference, ny leur produit, ou quelque ſomme ou difference de leurs puiſſances, n'eſtant point déterminée, j'appelle la premiere y & la ſeconde z. Le produit ſera donc yz, & leur ſomme $y+z$ eſtant ajoûtée à ce produit, l'on aura l'égalité $yz+y+z=a$. Il eſt viſible que toutes les conditions portées par la queſtion ſont parfaitement remplies Comme donc avec cela, l'égalité renferme les deux inconnuës y & z, je juge que la queſtion eſt indéterminée. Et alors ſa reſolution eſt facile; car je n'ay qu'à conſiderer l'une des deux grandeurs, comme y, de même que ſi elle eſtoit connuë, & chercher enſuite la valeur de l'autre inconnuë z. Je tranſpoſe donc au membre entierement connu ce qui n'enferme point z, & j'ay $yz+1z=a-y$, & diviſant par $y+1$ chaque membre, $z=\frac{a-y}{y+1}$, les deux grandeurs ſont donc y & $\frac{a-y}{y+1}$. Et la queſtion eſt infiniment reſoluë. Car leur produit $\frac{ay-yy}{y+1}$ plus leur ſomme qui eſt $\frac{a+yy}{y+1}$, donne la ſomme totale $\frac{ay+a}{y+1}$, c'eſt à dire a. Ainſi donc pour trouver deux nombres dont le produit plus la ſomme des deux faſſe 8, ſi l'on ſuppoſe $y=1$, l'autre nombre $\frac{a-y}{y+1}$, c'eſt à dire $\frac{8-1}{1+1}$ ſera $\frac{7}{2}$. Et ces deux nombres ſatisferont à la queſtion, car leur produit $\frac{7}{2}$, plus leur ſomme qui eſt $\frac{9}{2}$, donneront 8. Et ſi je ſuppoſe $y=2$, les deux nombres ſeront 2 & 2. Et ſi $y=3$, ils ſeront 3 & $\frac{5}{4}$. Mais $a-y$ marque que le nombre y doit eſtre plus petit que a.

SECONDE QUESTION.

Trouver deux grandeurs dont le produit eſtant diminué de leur ſomme, L. le reſte ſoit une grandeur donnée.

Soit a la grandeur donnée, la premiere inconnüe y, & la ſeconde z. Donc $yz-y-z=a$. Et par réduction $yz-z=a+y$. Et diviſant par $y-1$ chaque membre, $z=\frac{a+y}{y-1}$. Et la queſtion eſt infiniment reſoluë, 1 pourtant doit eſtre plus petit que y. Mais chaque terme de la valeur de z renfermant la grandeur arbitraire y, avec $+a$ au premier terme, & -1 au ſecond, ſi l'on deſiroit que la ſeule y ſe trouvaſt au ſecond terme, il ne faudroit que dénommer autrement ſes grandeurs en ajoûtant à la premiere inconnüe l'unité qui ſe trouve au ſecond terme avec $-$. Soit donc la premiere grandeur $y+1$, & la ſeconde z, leur produit eſt $yz+1z$, & leur ſomme $y+1+1z$ eſtant retranchée du produit, laiſſe $yz+1z-y-1-1z=a$, c'eſt à dire $yz-1y-1=a$. Et par tranſpoſition $yz=a+1y+1$. Et diviſant par y chaque membre, $z=\frac{a+1y+1}{y}$, ou bien pour l'exprimer à peu prés comme fait Diophante $z=1\frac{+a+1}{y}$. Soit $a=8$, & $y=1$, le premier nombre ſera 2, & le ſecond 10. Leur produit 20 moins leur ſomme 12, laiſſe 8. Soit encore $y=2$. Le premier nombre ſera donc 3, & le ſecond $\frac{11}{2}$, leur produit $\frac{33}{2}$ moins leur ſomme $\frac{17}{2}$, laiſſe le nombre 8. Et ſi $y=3$, le premier ſera 4 & le ſecond 4.

TROISIÉME QUESTION.

LI. Trouver deux grandeurs dont le produit ait un rapport donné avec leur ſomme.

Soit $\frac{a}{b}$ le rapport donné, la premiere inconnuë y, & la ſeconde z. Leur produit yz eſt à leur ſomme $y+z$ comme a eſt à b. Donc $byz = ay+az$. Et par tranſpoſition, $byz-az=ay$. Et diviſant le tout par $by-a$, l'on aura $z=\frac{ay}{by-a}$. Et la queſtion eſt infiniment reſolue.

Soit $a=3$, & $b=1$, le nombre z ſera $\frac{1y}{1y-3}$, ainſi y ſera pris plus grand que 3, afin que le diviſeur $1y-3$ ſoit poſitif. Et ſi $a=3$ & $b=2$, l'on aura $z=\frac{1y}{2y-3}$, & l'on prendra y au deſſus de $1\frac{1}{2}$, afin que $2y-3$ ſoit poſitif, c'eſt à dire en diviſant $2y-3$ par 2, afin que $y-\frac{3}{2}$ ſoit poſitif. Et ainſi des autres.

Ces ſortes de queſtions reſoluës infiniment, permettent qu'on y puiſſe ajoûter encore des conditions nouvelles auſquelles on puiſſe ſatisfaire. Et c'eſt ce qui les rend d'autant plus ingenieuſes que l'on en peut ajoûter davantage.

Les unes ſont de telle nature que l'on ne peut y en ajoûter qu'une, à d'autres l'on ne peut en ajoûter que deux, & à d'autres on en peut ajoûter davantage, & la reſolution de celles-cy eſt la plus difficile.

L'on ne pouroit par exemple ajoûter qu'une condition à cette queſtion, trouver quatre nombres dont les deux premiers faſſent 13, le ſecond & troiſiéme 15, le troiſiéme & quatriéme 19, & le quatriéme avec le premier 17, car tous ces nombres eſtant marquez indefiniment ſeront $17-v$, $-4+v$, $19-v$, & v, qui ne peuvent plus permettre qu'une égalité. Ainſi en demandant que le quatriéme ſoit quintuple du ſecond, le ſecond eſt $-4+v$, & ce nombre eſtant pris 5 fois, l'on aura $-20+5v=v$. Et par tranſpoſition $4v=20$. Donc $v=5$, le dernier nombre ne peut eſtre que 5, & ſatisfaire à la derniere condition. Et ſi l'on vouloit que v ne ſurpaſſaſt le premier que de l'unité, le premier eſt $17-v$. Donc $17-v+1=v$. Et par tranſpoſition $18=2v$. Donc $v=9$, le quatriéme alors ne peut eſtre que 9. Et ainſi des autres.

Mais ſi l'on vouloit augmenter le nombre des quatre grandeurs precedentes, & en ajoûter par exemple encore deux, l'on pouroit ajoûter encore deux conditions outre les cinq precedentes, & demander que la quatriéme grandeur avec la cinquiéme fiſt 11, & la cinquiéme avec la ſixiéme 10, & alors les ſix grandeurs ſeroient 12, 1, 14, 5, 6 & 4, qui ſatisfont aux cinq conditions precedentes, & aux deux que nous venons d'y ajoûter. Ce qu'on trouve

trouve en cette ſorte. L'on prend déja, comme on vient de le faire, les quatre nombres 12. 1. 14. 5. qui ſatisfont aux cinq conditions precedentes, & l'on cherche par l'Analyſe à ſatisfaire aux deux autres en diſant; le quatriéme nombre qui eſt 5, plus le cinquiéme inconnu t, font 11, ou $t+5=11$. Donc $t=6$, le cinquiéme ne peut eſtre que 6. Et pareillement le cinquiéme 6 plus le ſixiéme v doivent faire 10. Donc $v+6=10$. Et $v=4$. le ſixiéme ne peut eſtre que 4.

QUATRIE'ME QUESTION.

Pareillement pour trouver trois nombres tels que la ſomme des deux LII. premiers ajoûtée au produit de l'un par l'autre ſoit 8, la ſomme du premier & troiſiéme ajoutée au produit de l'un par l'autre ſoit 24, & la ſomme du ſecond & troiſiéme plus leur produit ſoit 15.

Soit le premier nombre appellé x, le ſecond y, & le troiſiéme z, la ſomme du premier & ſecond ajoûtée à leur produit eſt 8. Donc $xy+x+y=8$. Donc $y=\frac{8-x}{x+1}$. Pareillement la ſomme du premier & troiſiéme plus leur produit fait 24. Donc $yz+x+z=24$. Donc $z=\frac{24-x}{x+1}$. Les trois nombres ſont donc x; $\frac{8-x}{x+1}$, & $\frac{24-x}{x+1}$, & ils ſatisfont déja à deux conditions, il reſte à remplir la troiſiéme, qui eſt que le ſecond & troiſiéme nombre ajoûtez à leur produit faſſe 15. Or leur produit eſt $\frac{192-32x+xx}{xx+2x+1}$, & leur ſomme eſt $\frac{32-2x}{x+1}$, ou bien multipliant chaque terme de cette fraction par $x+1$, afin qu'elle ait un même ſecond terme que le produit auquel il la faut ajoûter. Cette ſomme ſera $\frac{30x+32-2xx}{xx+2x+1}$, laquelle eſtant ajoûtée au produit, c'eſt à dire $30x+32-2xx$ eſtant ajouté à $192-32x+xx$, & le tout diviſé par $xx+2x+1$, l'on aura $\frac{224-2x-xx}{xx+2x+1}=15$. Et multipliant par $xx+2x+1$ chaque membre, l'on aura $224-2x-xx=15xx+30x+15$. Et par tranſpoſition, $224=16xx+32x+15$ qui eſt une égalité compoſée. Cependant ſi on la vouloit reſoudre, comme $32x$ eſt un produit de 2 fois 4 par $4x$ racine du quarré $16xx$, & qu'il ne manque que l'unité ſeule à 15 pour en faire le quarré de 4, & qu'il ne manque auſſi que la même unité au membre 224 pour avoir le quarré 225, j'ajoute 1 à chaque membre, & j'ay $225=16xx+32x+16$. Et tirant la racine quarrée de part & d'autre, $15=4x+4$. Donc $11=4x$, & $\frac{11}{4}=x$. Or le ſecond nombre eſt $\frac{8-x}{x+1}$, & le troiſiéme $\frac{24-x}{x+1}$, remettant donc $\frac{11}{4}$ au lieu de x, le ſecond ſera $\frac{7}{5}$, & le troiſiéme $\frac{17}{3}$. Et la queſtion eſt reſoluë.

CINQUIE'ME QUESTION.

LIII. Trouver trois nombres tels que la ſomme des deux premiers eſtant retranchée du produit de l'un par l'autre, il reſte 8; que la ſomme du premier & troiſiéme eſtant retranchée du produit de l'un par l'autre, il reſte 24, & que la ſomme du ſecond & troiſiéme eſtant retranchée du produit de l'un par l'autre, il reſte 15.

Soit le premier x, le ſecond y, & le troiſiéme z. Le produit des deux premiers moins leur ſomme doit laiſſer 8. Donc $xy-x-y=8$. Et $xy-y=8+x$. Donc $y=\frac{8+x}{x-1}$. De même le produit du premier x & du troiſiéme z moins leur ſomme doit laiſſer 24. Donc $xz-x-z=24$. Et $xz-z=24+x$. Donc $z=\frac{24+x}{x-1}$. Il reſte à faire que le produit du ſecond par le troiſiéme moins la ſomme des deux ſoit 15. Or le produit eſt $\frac{192+32x+xx}{xx-2x+1}$, & la ſomme eſt $\frac{30x-32+2xx}{xx-2x+1}$, laquelle eſtant retranchée du produit laiſſe $\frac{224+2x-xx}{xx-2x+1}=15$. Et multipliant par $xx+2x+1$, chaque membre pour oſter la fraction, $224+2x-xx=15xx-30x+15$. Retranchant donc $2x$ & ajoutant xx de part & d'autre, il vient $224=16xx-32x+15$, ou ſi l'on ajoute 1 de part & d'autre, on aura $225=16xx-32x+16$. Donc tirant la racine quarrée de chaque membre, l'on aura $15=4x-4$. Et $19=4x$. Donc $x=\frac{19}{4}$. $y=\frac{17}{5}$, & $z=\frac{23}{5}$. Et la queſtion eſt reſoluë.

SIXIE'ME QUESTION.

LIV. Trouver trois nombres tels que le produit des deux premiers ſoit triple des deux, que le produit du premier & troiſiéme ſoit quintuple des deux, & que le produit du ſecond & troiſiéme, ſoit quadruple des deux.

Soit le premier x, le ſecond y, & le troiſiéme z. Par la premiere ſuppoſition $xy=3x+3y$. Donc $xy-3y=3x$, & $y=\frac{3x}{x-3}$. De même par la ſeconde ſuppoſition $xz=5x+5z$. Donc $xz-5z=5x$. Et $z=\frac{5x}{x-5}$. Il reſte que le produit du ſecond & troiſiéme ſoit quadruple de leur ſomme. Donc $\frac{15xx}{xx-8x+15}=\frac{32xx-120x}{xx-8x+15}$. Et multipliant le tout par le commun diviſeur, $15xx=32xx-120x$. Ajoutant donc $120x$, & retranchant $15xx$ de part & d'autre, $120x=17xx$. Et $120=17x$. Donc $x=\frac{120}{17}$, $y=\frac{120}{23}$, & $z=\frac{120}{7}$. Et la queſtion eſt reſoluë.

SEPTIE'ME QUESTION.

LV. Multiplier un nombre par un quarré & par ſa racine, & faire un cube du ſecond produit, qui ait le premier produit pour ſa racine.

Soit zz le quarré, z ſa racine, & y le nombre qui doit multiplier l'un & l'autre.

Puiſque le produit de y par z doit donner un cube, ſoit ce cube appellé x^3. Donc $yz=x^3$, & $y=\frac{x^3}{z}$. Or il faut que ce nombre $\frac{x^3}{z}$ multiplié par le quarré zz, ſoit la racine du cube x^3. Donc $x^3z=x$. Et $xxz=1$. Donc $z=\frac{1}{xx}$. Le quarré zz ſera donc $\frac{1}{x^4}$, ſa racine $\frac{1}{xx}$, & y ou $\frac{x^3}{z}$ qui doit multiplier l'un & l'autre ſera x^5. Et la queſtion eſt infiniment reſoluë. L'on peut prendre pour x tel nombre qu'on voudra. Soit donc $x=3$, le quarré ſera $\frac{1}{81}$, ſa racine $\frac{1}{9}$, & x^5 qui les doit multiplier ſera 243, lequel eſtant multiplié par $\frac{1}{81}$ donne 3, & l'eſtant par $\frac{1}{9}$ il donne le cube 27 dont la racine eſt 3.

HUITIE'ME QUESTION.

Multiplier un nombre par un quarré & par ſa racine, & faire un cube du premier produit, qui ait le ſecond produit pour ſa racine. LVI.

Soit zz le quarré, z ſa racine, & y le nombre qui doit multiplier chacun d'eux Puiſque le produit de y par zz doit donner un cube, ſoit ce cube appellé x^3. Donc $yzz=x^3$. Et $y=\frac{x^3}{zz}$. Or il faut que ce nombre $\frac{x^3}{zz}$ multiplié par la racine z ſoit la racine du cube x^3. Donc $\frac{x^3}{z}=x$. Et $\frac{xx}{z}=1$. Donc $xx=1z$. Le quarré zz ſera donc x^4, ſa racine xx, & y ou $\frac{x^3}{zz}$ qui doit multiplier l'un & l'autre ſera $\frac{1}{x}$. Et la queſtion eſt infiniment reſoluë. L'on peut prendre pour x tel nombre qu'on voudra.

Soit $x=3$, le quarré ſera 81, ſa racine 9, & le nombre qui les doit multiplier ſera $\frac{1}{3}$, ſon produit par 81 donne le cube 27, & par 9 il donne 3 la racine cubique de 27.

Il faut remarquer icy que quand tous les nombres ont eſté découverts univerſellement, l'on peut mettre les entiers en fractions & les fractions en entiers ſans changer la reſolution. Par exemple nous venons de trouver x^4, xx, & $\frac{1}{x}$ qui ſatisfont generalement à la queſtion, & $\frac{1}{x_4}$, $\frac{1}{xx}$, & x y ſatisferont auſſi.

De même dans la reſolution precedente où nous avions trouvé $\frac{1}{x^4}$, $\frac{1}{xx}$, & x^5, nous pourions prendre au lieu d'eux x^4, xx, & $\frac{1}{x^5}$, qui ſatisferoient pareillement à la queſtion.

NEUVIE'ME QUESTION.

Multiplier un nombre par un cube & par ſa racine, & faire que le LVII.

ſecond produit ſoit un quarré de quarré, qui ait le premier produit pour ſa racine quatriéme.

Soit z^3 le cube, z ſa racine, & y le nombre qui les doit multiplier l'un & l'autre. Puiſque le produit de y par z doit donner un quarré de quarré, ſoit ce quarré de quarré appellé x^4. Donc $yz = x^4$, & $y = \frac{x^4}{z}$. Or il faut que ce nombre $\frac{x^4}{z}$ multiplié par le cube z^3 ſoit la racine quatriéme du quarré de quarré x^4. Donc $x^4zz = x$. Et $x^3zz = 1$. Donc $zz = \frac{1}{x^4}$. Or afin que la reſolution ſe puiſſe donner par nombre commenſurable, il faut que la racine quarrée puiſſe ſe tirer de part & d'autre, il faut donc que le cube x^3 ſoit auſſi un quarré. Soit donc $x^4 = v^6$, afin que la racine ſe puiſſe extraire de $\frac{1}{x^3}$. Donc $zz = \frac{1}{v^6}$. Et $z = \frac{1}{v^3}$. Le cube z^3 ſera donc $\frac{1}{v^9}$, ſa racine $z = \frac{1}{v^3}$, & le nombre y ou $\frac{x^4}{z}$ ſera $\frac{v^8}{z}$, c'eſt à dire v^{11}. Et la queſtion eſt infiniment reſoluë. Les trois nombres peuvent eſtre auſſi v^9, v^3, & $\frac{1}{v^{11}}$.

Soit $v = 2$. Donc $\frac{1}{v^9} = \frac{1}{512}$, ſa racine cubique $\frac{1}{8}$, & le nombre v^{11} qui les doit multiplier ſera 2048, ſon produit par le cube eſt 4, & par la racine du cube, il eſt 256 quarré du quarré de 4. Il en eſt de même pour les queſtions infinies de cette ſorte. Ainſi je ne m'y dois pas arreſter davantage.

DIXIE'ME QUESTION.

XLVIII. Multiplier un nombre par un cube & par ſa racine, & faire que le ſecond produit ſoit un quarré de quarré qui ait le premier produit pour ſa racine quatriéme. Et de plus que l'expoſant du cube à ſa racine ſoit égal à 64.

Je prens premierement les trois nombres v^9, v^3, & $\frac{1}{v^{11}}$ trouvez par la reſolution precedente, qui ſatisfont aux deux premieres conditions, & pour remplir la troiſiéme, je diviſe le cube v^9 par ſa racine cubique v^3, & j'égale l'expoſant v^6 avec 64. Or ſi $v^6 = 64$. Donc $v^3 = 8$, & $v = 2$. Les trois nombres ſeront donc 512, 8, & $\frac{1}{2048}$. Et la queſtion qui n'eſt plus indéterminée, eſt reſoluë.

TROISIE'ME PRINCIPE.

XLIX. Trouver deux quarrez égaux à un quarré donné.

Soit aa le quarré donné, yy le premier inconnu, & zz le ſecond. Donc $yy + zz = aa$. Et $yy = aa - zz$. La queſtion ſe réduit donc là, qu'il faut trouver un nombre quarré qui ſoit tel qu'eſtant retranché du quarré aa, le reſte ſoit un nombre quarré. Et pour le faire generalement, je conſidere que le quarré $aa - zz$ eſt plus petit que le quarré aa, & ſa racine par conſequent plus petite que la racine a. Mais il faut que cette racine ſoit telle que formant une égalité de ſon quarré avec $aa-zz$, l'inconnüe z puiſſe n'avoir qu'un ſeul degré. Soit donc pour cet effet la racine inconnüe du quarré $aa-zz$, appellée $cz-a$, la grandeur c eſt arbitraire, pourveu qu'elle ſoit un nombre entier plus grand que l'unité, j'en diray la raiſon plus bas. Et quand bien c ſeroit plus grand de beaucoup que a, $cz-a$ ſera neanmoins plus petit que a, parceque la valeur de z que nous découvrirons ſera une fraction qui rendra le produit cz d'autant plus petit que le nombre c ſera pris plus grand. Or le quarré de cette racine $cz-a$ eſt $cczz-2acz+aa$, qui devant eſtre égal au quarré $aa-zz$, l'on aura l'égalité $cczz-2acz+aa=aa-zz$. Et effaçant aa de part & d'autre, $cczz-2acz=-zz$. Et par tranſpoſition, $cczz+1zz=2acz$. Or diviſant le tout par z, l'on a $ccz+1z=2ac$. Et diviſant le tout par $cc+1$, l'on a $z=\frac{2ac}{cc+1}$. Or $yy=aa-zz$. Et $aa-zz$ eſt le quarré de $cz-a$. Donc $y=cz-a$. ou bien remettant au lieu de z ſa valeur qu'on vient de trouver, $y=\frac{acc-a}{cc+1}$. Les quarrez de ces deux racines ſont $yy=\frac{aac^4-2aacc+aa}{c^4+2cc+1}$ & $zz=\frac{4aacc}{c^4+2cc+1}$. Et la ſomme de ces deux quarrez eſt $\frac{aac^4+2aacc+aa}{c^4+2cc+1}$, c'eſt à dire aa. Il eſt viſible que ſi c eſtoit l'unité, la racine y n'auroit nulle valeur, puiſque $acc-a$ ſeroit le même que $a-a$, c'eſt à dire zero. Et ſi c eſtoit moindre que l'unité, la racine y ſeroit negative, puiſque acc ſeroit moindre que a, & par conſequent $acc-a$ moindre que l'unité. Cependant la reſolution dans ce cas ne laiſſeroit pas d'eſtre poſitive, parceque le quarré de la racine negative ſeroit poſitif. Or la reſolution nous fournit cette regle.

Regle. Le produit de la racine du quarré donné par 2 fois tel nombre qu'on voudra plus grand que l'unité, eſtant diviſé par la ſomme de l'unité ajoûtée au quarré du nombre que l'on aura pris, l'expoſant ſera la racine de l'un des quarrez.

Et un autre produit de la racine du quarré donné par le quarré du nombre que l'on aura pris, diminué de l'unité, eſtant pareillement diviſé par la ſomme de l'unité ajoûtée au quarré de ce même nombre, l'expoſant ſera la racine de l'autre quarré.

Soit $aa=100$. Si $c=2$. Donc $a=10$, $y=\frac{acc-a}{cc+1}=\frac{30}{5}$, & $z=\frac{2ac}{cc+1}=\frac{40}{5}$, c'eſt à dire $y=6$, $z=8$, & leurs quarrez $yy=36$, $zz=64$, & $yy+zz=36+64=100$. Et ſi $c=3$. Donc $y=\frac{80}{10}$, & $z=\frac{60}{10}$, c'eſt à dire $y=8$, & $z=6$. Où l'on voit que la valeur de y de la reſolution precedente devient icy la valeur de z, & reciproquement que la valeur de z devient celle de y. Et ſi l'on ſuppoſoit $c=4$, l'on auroit $y=\frac{150}{17}$, & $z=\frac{80}{17}$. Et leurs quarrez $\frac{22500}{289}+\frac{6400}{289}$ font $\frac{28900}{289}$, c'eſt à dire 100.

PREMIERE QUESTION.

Trouver en nombres entiers deux quarrez égaux à un quarré. LX.

Nous n'avons qu'à oſter le ſecond terme de chacun des quarrez precedens, & à les diviſer chacun par aa, & nous aurons les trois quarrez $c^4 - 2cc + 1$, $4cc$, & $c^4 + 2cc + 1$, dont les deux premiers ſont égaux au troiſiéme. Les racines de ces quarrez ſeront $cc - 1$, $2c$, & $cc + 1$, je ſuppoſe toûjours que c ſurpaſſe l'unité, afin que le premier quarré ne ſoit point égal à zero, ou ſa racine $cc - 1$ negative. L'on poura neanmoins, & même il ſera plus utile quelquefois de les exprimer plus indéterminément, en laiſſant aa au lieu de l'unité, & prenant pour racines $cc - aa$, $2ac$, & $cc + aa$.

Surquoy nous pourons remarquer une proprieté aſſez conſiderable dont parle Schooten dans la Section 6^e. de ſes Exercitations Mathematiques, c'eſt de la maniere d'exprimer certaines progreſſions arithmetiques dont chaque terme ſert à trouver un triangle rectangle, c'eſt à dire deux quarrez égaux à un quarré. Il apporte pour exemple ces deux progreſſions tirées de Stifelius.

La 1^{ere} $1\frac{1}{3}$. $2\frac{2}{5}$. $3\frac{3}{7}$. $4\frac{4}{9}$. $5\frac{5}{11}$. $6\frac{6}{13}$. $7\frac{7}{15}$. $8\frac{8}{17}$. $9\frac{9}{19}$. $10\frac{10}{21}$. $11\frac{11}{23}$. &c.

Et la 2^e. $1\frac{7}{8}$. $2\frac{11}{12}$. $3\frac{15}{16}$. $4\frac{19}{20}$. $5\frac{23}{24}$. $6\frac{27}{28}$. $7\frac{31}{32}$. $8\frac{35}{36}$. $9\frac{39}{40}$. $10\frac{43}{44}$. &c.

Il y a trois ſortes de progreſſions arithmetiques à obſerver dans chacune de ces progreſſions. La premiere eſt des nombres entiers qui ſe ſurpaſſent ſucceſſivement de l'unité dans chacune. La ſeconde eſt des premiers termes de chaque fraction qui ſe ſurpaſſent ſucceſſivement de l'unité dans la premiere progreſſion, & de 4 dans la ſeconde progreſſion. La troiſiéme enfin qui reſte à obſerver, c'eſt celle des ſeconds termes des fractions qui ſe ſurpaſſent ſucceſſivement de 2 unitez dans la premiere progreſſion, & de 4 dans la ſeconde.

Et pour avoir les deux quarrez égaux à un par le moyen de ces progreſſions, il faut réduire tout le terme que l'on y veut faire ſervir à une fraction, & alors les deux quarrez l'un du premier terme, & l'autre du ſecond, eſtant réduits en une ſomme, donneront un troiſiéme nombre qui ſera quarré. Par exemple prenant le ſecond terme $2\frac{11}{12}$ de la ſeconde progreſſion, je réduis tout ce terme à la fraction $\frac{35}{12}$, ce qui ſe fait, comme l'on ſçait, en multipliant 2 par 12, & ajoutant 11 au produit 24, afin d'avoir 35 pour premier terme de la fraction $\frac{35}{12}$. Et alors quarrant 35 & 12, & ajoutant les deux quarrez 1225 & 144 en une ſomme, l'on aura 1369, qui eſt un quarré dont la racine eſt 17. Il en eſt ainſi des autres.

Simon Iacobi Coburgenſis in Arithmetica ſuâ majori.

Mais parcequ'au rapport de Schooten, un Auteur habile ajoute ſix autres progreſſions de ſemblable nature, à ces deux de Stifelius, & qu'il aſſure en pouvoir trouver mille autres, ſans expoſer toutefois quelle eſt ſa methode; Schooten rapporte quelques regles inventées par un ſçavant Arithmeticien, pour trouver ces ſortes de progreſſions. Mais comme ces regles ne m'ont point paru naturelles, ny tirées de principes aſſez ſimples, je marqueray icy un moyen facile pour trouver une infinité de progreſſions de ſemblable nature. Il ne faut ſeulement que prendre l'expreſſion generale de deux quarrez égaux à un, que nous venons de trouver icy, c'eſt à dire $cc-1$, & $2c$, & l'écrire en fraction de cette ſorte $\frac{cc-1}{2c}$. Enſuite ſi l'on ſubſtituë ſucceſſivement au lieu de c, chacun des nombres impairs de la progreſſion arithmetique 3. 5. 7. 9. 11. &c. où la difference eſt 2, l'on aura la premiere progreſſion de Stifelius. Mais ſi l'on ſubſtituë ſucceſſivement au lieu de c chacun des nombres de la progreſſion arithmetique des nombres pairs, où la difference eſt encore 2, l'on aura la ſeconde progreſſion de Stifelius. Et ſi l'on ſubſtituë au lieu de c chacun des nombres de la progreſſion arithmetique $\frac{3}{2}$. $\frac{7}{2}$. $\frac{11}{2}$. &c. où la difference eſt pareillement $\frac{4}{2}$, l'on aura cette autre progreſſion $\frac{5}{12}$. $1\frac{17}{28}$. $2\frac{29}{44}$. $3\frac{41}{60}$. $4\frac{53}{76}$. $5\frac{65}{92}$. &c. qui eſt l'une des autres que Schooten rapporte. Et ſi l'on ſubſtituë au lieu de c chacun des nombres de la progreſſion $\frac{5}{2}$. $\frac{9}{2}$. $\frac{13}{2}$. &c. où la difference eſt encore $\frac{4}{2}$ c'eſt à dire le nombre 2, l'on aura cette autre progreſſion $1\frac{1}{20}$. $2\frac{5}{36}$. $3\frac{9}{52}$. $4\frac{13}{68}$. $5\frac{17}{84}$. $6\frac{21}{100}$. &c. qui eſt encore une autre de celles que Schooten apporte. Et ſi l'on choiſit en même ſorte d'autres progreſſions arithmetiques exprimées par fractions, dont la difference ſoit 2, l'on poura trouver d'autres progreſſions ſemblables. Par exemple en ſubſtituant ſucceſſivement au lieu de c chaque terme de la progreſſion $\frac{5}{3}$. $\frac{11}{3}$. $\frac{17}{3}$. &c. où la difference eſt $\frac{6}{3}$, c'eſt à dire 2, l'on aura la premiere des progreſſions que donne Schooten. Et ainſi des autres. De ſorte qu'on poura trouver ſans peine tant de ces progreſſions que l'on voudra. Car ſi-toſt qu'on aura les deux premiers termes de quelqu'une qui vaudront plus chacun que l'unité, il ne faudra plus rien ſubſtituer au lieu de c, mais ſeulement continuer chacune des trois progreſſions particulieres dont nous avons déja parlé.

SECONDE QUESTION.

LXI. Trouver deux quarrez dont la difference ſoit donnée.

Soit b la difference donnée, z la racine du plus petit quarré, & $z+a$ la racine du plus grand, les quarrez ſeront donc zz, & $zz+2az+aa$, & leur difference ſera $zz+2az+aa-zz$, c'eſt à dire $2az+aa$. Donc $2az+aa=b$. Et $2az=b-aa$. Où l'on voit que le quarré aa doit eſtre neceſſairement plus petit que b, pour avoir une reſolution poſitive. Diviſant donc de part & d'autre par $2a$, l'on aura $z=\frac{b-aa}{2a}$, & l'autre racine ſera $\frac{b+aa}{2a}$. Le plus grand quarré ſera donc $\frac{bb+2aab+a^4}{4aa}$, & le plus petit $\frac{bb-2aab+a^4}{4aa}$, leur difference eſt b. Et la queſtion eſt indéterminément reſoluë. L'on peut prendre pour a tel nombre au deſſous de $\sqrt{b}$ que l'on voudra

Soit $b=60$. Si $a=3$, la racine du plus grand quarré ſera donc $11\frac{1}{2}$, celle du plus petit $8\frac{1}{2}$, & leurs quarrez ſont $132\frac{1}{4}$ & $72\frac{1}{4}$ dont la difference eſt 60.

TROISIÉME QUESTION.

LXII. Ajoûter un petit quarré à une grandeur donnée, & en faire un quarré.

Je ſuppoſe toûjours que les grandeurs données ſoient commenſurables. Pour bien faire comprendre cette reſolution, je me contenteray de l'expliquer ſeulement par nombres. Soit 17 un nombre donné, & qu'il faille luy ajoûter un petit quarré en ſorte que la ſomme totale ſoit un quarré. J'appelle $\frac{1}{zz}$ le petit quarré, donc $17+\frac{1}{zz}$ doit eſtre un quarré, je prens pour racine de ce quarré $4+\frac{1}{z}$, je prens le nombre 4 pluſtoſt qu'aucun autre, parceque ſon quarré 16 eſt le plus proche de 17, mais j'ajoûte $\frac{1}{z}$ à 4, parceque la racine du quarré que je cherche doit ſurpaſſer 16 quarré de 4, je le fais auſſi afin que dans la comparaiſon des deux membres de mon égalité, le quarré $\frac{1}{zz}$ puiſſe s'effacer de part & d'autre, & qu'ainſi z n'ait plus qu'une dimenſion lineaire. Soit donc $4+\frac{1}{z}$ la racine de noſtre quarré, le quarré ſera donc $16+\frac{8}{z}+\frac{1}{zz}$, & l'égalité $16+\frac{8}{z}+\frac{1}{zz}=17+\frac{1}{zz}$. Retranchant donc $16+\frac{1}{zz}$ de part & d'autre, on aura $\frac{8}{z}=1$. Donc multipliant par z chaque membre $8=1z$. La racine $4+\frac{1}{z}$ ſera donc $4\frac{1}{8}$, & ſon quarré $17\frac{1}{64}$. Dans ce premier exemple le quarré 16 dont on a pris la racine 4, eſt au deſſous de 17.

Mais ſi le quarré le plus proche du nombre propoſé eſtoit au deſſus du nombre dont l'on auroit pris la racine, il faudroit retrancher de ce nombre, $\frac{1}{z}$ racine du petit quarré, & non pas la luy ajouter. Ainſi pour trouver un petit quarré, lequel eſtant ajouté à 15 faſſe un quarré, je prens pour racine de ce quarré $4-\frac{1}{z}$ la racine du quarré 16, qui eſt le plus proche de 15, car il vaut toujours mieux choiſir le plus proche, ſoit que ce quarré ſe trouve au deſſus, ſoit qu'il ſe trouve au deſſous du nombre propoſé. Le quarré de cette racine $16-\frac{8}{z}+\frac{1}{zz}=15+\frac{1}{zz}$. Donc retranchant $15+\frac{1}{zz}$ de part & d'autre, il reſte $1-\frac{8}{z}=0$. Et par tranſpoſition, $1=\frac{8}{z}$. Donc multipliant le tout par z, $1z=8$. La racine du quarré ſera donc $3\frac{7}{8}$, dont le quarré eſt $15\frac{1}{64}$. Et la queſtion eſt reſoluë.

Pareillement

Pareillement pour ajouter $\frac{1}{zz}$ à 1, & en faire un quarré, je prens $2-\frac{1}{z}$ pour racine de ce quarré. Donc $4-\frac{4}{z}+\frac{1}{zz}=1+\frac{1}{zz}$. Et retranchant $1+\frac{1}{zz}$ de part & d'autre, $3-\frac{4}{z}=0$. Et $3=\frac{4}{z}$. Donc $3z=4$, & $z=\frac{4}{3}$, $\frac{1}{zz}$ ſera donc $\frac{9}{16}$, qui eſtant ajouté à 1 donnera le quarré $1\frac{9}{16}$, dont la racine eſt $1\frac{1}{4}$.

QUATRIE'ME QUESTION.

Deux grandeurs eſtant données, en trouver une troiſiéme, qui eſtant ajoutée à l'une & à l'autre, faſſe un quarré de chaque ſomme. LXIII.

Soient a & b les grandeurs données, a la plus grande & b la plus petite, z la grandeur qu'il faut ajouter, & yy le quarré que doit faire la premiere ſomme $a+z$. Donc $a+z=yy$, & $z=yy-a$. La grandeur z qu'il faut ajouter ſera donc $yy-a$, & cette grandeur $yy-a$ ajoutée à la grandeur a, fait un quarré. Mais il faut encore qu'eſtant ajoutée à b, elle faſſe un autre quarré. Donc $yy-a+b$ doit eſtre un quarré. Comme a eſt plus grand que b, ce quarré eſt plus petit que yy. Soit donc $y-c$ la racine de ce quarré. Donc $yy-2yc+cc=yy-a+b$. Et par tranſpoſition, $a-b+cc=2yc$. Donc $y=\frac{a-b+cc}{2c}$. La grandeur z que l'on doit ajouter ſera donc $\frac{aa-2ab+bb-2acc-2bcc+c^4}{4cc}$. Et la queſtion eſt indéterminément reſoluë. L'on peut prendre pour c tel nombre qu'on voudra, pourveu que $aa+bb+c^4$ ne ſoit point au deſſous de $2ab+2acc+2bcc$, car autrement la reſolution ſeroit negative.

Regle. L'on prend donc le quarré de la difference des deux grandeurs données, l'on en retranche le produit de la ſomme de ces deux grandeurs diminuée du quarré d'une grandeur arbitraire par ce même quarré. L'on diviſe ce qui reſte par 4 fois ce même quarré. Et l'expoſant qu'on trouve eſt une grandeur qui ſatisfait à la queſtion.

Soient les grandeurs données $a=18$, $b=9$, & la grandeur arbitraire $c=1$. Donc $z=\frac{28}{4}$, c'eſt à dire 7, qui eſtant ajoutée à 18 & à 9, donne les deux quarrez $18+7=25$, & $9+7=16$. Et ſi la grandeur arbitraire $c=2$, parceque $aa+bb+c^4=324+81+16$, eſt au deſſous de $2ab+2acc+2bcc=324+144+72$, la reſolution ne peut eſtre poſitive, la grandeur $z=-\frac{119}{16}=-7\frac{7}{16}$, laquelle eſtant ajoutée à chacun des nombres 18 & 9, c'eſt à dire $+7\frac{7}{16}$ eſtant retranchée de chacun, les reſtes ſeront les quarrez $18-7\frac{7}{16}=10\frac{9}{16}$ dont la racine eſt $3\frac{1}{4}$, & $9-7\frac{7}{16}=1\frac{9}{16}$ dont la racine eſt $1\frac{1}{4}$.

CINQUIE'ME QUESTION.

Deux grandeurs eſtant données, en trouver une troiſiéme qui eſtant retranchée de chacune, faſſe un quarré de chaque reſte. LXIV.

Soient a & b les grandeurs données, a la plus grande, b la plus petite, z la grandeur qu'il faut retrancher, & yy le quarré que doit faire le premier reſte. Donc $a - z = yy$. Et par tranſpoſition $a - yy = z$. La grandeur z qu'il faut retrancher ſera donc $a - yy$, & cette grandeur eſtant retranchée de a donne $a - a + yy$, c'eſt à dire le quarré yy. Mais il faut encore qu'eſtant retranchée de b elle faſſe un autre quarré. Donc $b - a + yy$ doit eſtre un quarré. Comme a eſt plus grand que b, ce quarré doit eſtre au deſſous de yy. Soit donc $y - c$ la racine de ce quarré. Donc $yy - 2yc + cc = b - a + yy$. Donc $a - b + cc = 2yc$. Et $y = \frac{a - b + cc}{2c}$. La grandeur z ſera donc $\frac{2acc - aa + 2ab - bb + 2bcc - c4}{4cc}$. Et la queſtion eſt indéterminément reſoluë. L'on peut prendre pour c tel nombre qu'on voudra, pourveu que $aa + bb + c^4$ ſoit plus petit que $2ab + 2acc + 2bcc$, car autrement la reſolution ſeroit negative.

Regle. L'on prend donc le produit de 2 fois la ſomme des grandeurs données, diminuée du quarré d'une grandeur arbitraire, par ce même quarré, l'on en retranche le quarré de la difference des grandeurs données. L'on diviſe ce qui reſte par 4 fois le quarré de la grandeur arbitraire. Et l'expoſant qu'on trouve ſatisfait à la queſtion.

Soit $a = 44$, $b = 36$, & la grandeur arbitraire $c = 2$. Donc $z = \frac{560}{16}$, c'eſt à dire 35. Et 35 eſtant retranché de chaque nombre, laiſſe les deux quarrez $44 - 35 = 9$, & $36 - 35 = 1$.

SIXIÉME QUESTION.

LXV. Deux grandeurs eſtant données, en trouver une troiſiéme, dont chacune eſtant retranchée, chaque reſte ſoit un quarré.

Soient a & b les grandeurs données, a la plus grande, b la plus petite, z la grandeur dont il faut retrancher chacune, & yy le quarré que doit donner le premier reſte. Donc $z - a = yy$, & $z = yy + a$. Si l'on retranche a de la grandeur $yy + a$, le reſte ſera le quarré yy; & ſi l'on en retranche b, le reſte ſera l'autre quarré $yy + a - b$. Je prens pour ſa racine $y + c$. Donc $yy + 2yc + cc = yy + a - b$. Donc $2yc = a - b - cc$. Et $y = \frac{a - b - cc}{2c}$. La grandeur z ſera donc $\frac{aa - 2ab + bb + 2acc + 2bcc + c4}{4cc}$. Et la queſtion eſt infiniment reſoluë. L'on peut prendre pour c tel nombre qu'on voudra.

Regle. L'on prend donc le quarré de la difference des grandeurs données, on luy ajoute le produit de la ſomme des grandeurs priſes 2 fois, augmentée du quarré d'une grandeur arbitraire, par ce même quarré. L'on diviſe le tout par 4 fois le même quarré. Et l'expoſant ſatisfait à la queſtion.

SEPTIÉME QUESTION.

LXVI. Trouver deux grandeurs telles que la ſomme de leurs quarrez, plus leur produit, faſſe un quarré.

Soit z la premiere, & y la ſeconde. Donc $yy + zz + yz$ doit donner un quarré. Soit ſa racine $a-z$. Donc $aa-2az+zz=yy+zz+yz$. Et $aa-yy=2az+yz$. Donc $z=\frac{aa-yy}{2a+y}$. Et la queſtion eſt indéterminément reſoluë. L'on prendra pour a tout nombre au deſſus de celuy que l'on prendra pour y, car il faut que $aa-yy$ ſoit poſitif. Et comme la queſtion toute reſoluë eſt encore tellement indéterminée que toutes les grandeurs a & y qui s'y trouvent ſont arbitraires, l'on poura tout multiplier par le quarré de $2a+y$, & l'on aura pour les deux grandeurs qu'on demande, $aa-yy$ pour la premiere, & $2ay+yy$ pour la ſeconde. Leurs quarrez ſont $a^4-2aayy+y^4$ & $4aayy+4ay^3+y^4$; & leur produit $2a^3y-2ay^3+aayy-y^4$ eſtant ajouté à la ſomme de leurs quarrez, donne $a^4+3aayy+2a^3y+2ay^3+y^4$, qui eſt un quarré dont la racine eſt $aa+ay+yy$.

Soit $a=2$, & $y=1$. Donc $aa-yy=3$, & $2ay+yy=5$. La ſomme de leurs quarrez 9 & 25, eſt 34, à qui ajoutant leur produit 15, la ſomme totale eſt le quarré 49.

HUITIÉME QUESTION.

Trouver trois grandeurs en proportion geometrique tels que la ſeconde ajoutée à la premiere ou à la troiſiéme, donne un quarré. LXVII.

Soit la premiere grandeur z, la ſeconde zz, & la troiſiéme z^3. Car ainſi l'on ſatisfait à la premiere condition qui demande que les trois grandeurs ſoient en proportion geometrique. Or la premiere ajoutée à la ſeconde fait $zz+z$ qui doit eſtre un quarré. Soit donc ſa racine $a-z$. Donc $aa-2az+zz=zz+z$. Donc $aa=2az+z$. Et $z=\frac{aa}{2a+1}$. Or il faut auſſi que la ſeconde grandeur ajoûtée à la troiſiéme faſſe un quarré, $+z^3+zz$ doit donc eſtre un quarré. Et parceque tout quarré diviſé par un quarré, donne encore un quarré, ſi nous diviſons z^3+zz par le quarré zz, l'expoſant $z+1$ ſera donc un quarré. Or nous avons trouvé $z=\frac{aa}{2a+1}$, à qui ajoûtant l'unité, l'on aura $\frac{aa+2a+1}{2a+1}$, dont le premier terme $aa+2a+1$ eſt un quarré, qui a pour racine $a+1$. Or le ſecond terme $2a+1$ doit eſtre auſſi égal à un quarré. Soit ce quarré bb. Donc $2a+1=bb$. Donc $a=\frac{bb-1}{2}$. Et la queſtion eſt indéterminément reſoluë. L'on peut prendre pour b tel nombre qu'on voudra, autre toutefois que l'unité. Il eſt bon de choiſir un nombre impair pluſtoſt qu'un autre, afin que ſon quarré qui ſera impair, eſtant diminué de l'unité, puiſſe eſtre diviſé ſans reſte par 2.

L'on peut encore reſoudre ainſi cette même queſtion.

Soit la grandeur moyenne z. Si elle prend la premiere grandeur, l'on aura le quarré xx. La premiere grandeur ſera donc $xx-z$, & ſi elle prend la ſeconde grandeur, l'on aura l'autre quarré yy. La troiſiéme grandeur ſera donc $yy-z$. Et la proportion geometrique continuë ſera $\div\, xx-z.\ z.\ yy-z$. Or le produit des extrêmes eſt égal au quarré du milieu. Donc $xxyy-xxz-yyz+zz=zz$. Donc $xxyy-xxz-yyz=0$. Et par tranſpoſition $xxyy=xxz+yyz$. Donc $z=\frac{xxyy}{xx+yy}$. La proportion ſera donc ∺ $\frac{x^4}{xx+yy}$. $\frac{xxyy}{xx+yy}$. $\frac{y^4}{xx+yy}$. ou bien multipliant chaque terme par le quarré $x^4+2xxyy+y^4$, la proportion continuë ſera ∺ x^6+x^4yy. $x^4yy+xxy^4$. xxy^4+y^6. Et la queſtion eſt infiniment reſoluë. Il faut toutefois prendre garde que le nombre x doit eſtre different de y. Et ſi l'on veut que la proportion ait ſon premier terme le plus petit, y doit ſurpaſſer x.

Regle. L'on prend donc la ſomme des quarrez de deux differentes grandeurs, on la multiplie par la quatriéme puiſſance de la plus petite grandeur, & l'on a le premier terme de la proportion. Enſuite on prend la ſomme des quarrez des deux grandeurs, on la multiplie par le produit de l'un par l'autre, & le produit donne le ſecond terme de la proportion. Enfin l'on prend la ſomme des mêmes quarrez, on la multiplie par la quatriéme puiſſance de la plus grande des grandeurs qu'on a priſe. Et le produit donne le troiſiéme terme de la proportion.

Soit $x=1$, & $y=2$. Donc la proportion ſera ∺ 5. 20. 80. Le ſecond terme 20 plus le premier 5 donne le quarré 25, & plus le ſecond 80, il donne le quarré 100. Et ces trois termes font une proportion geometriquement continuë, dont le rapport eſt comme 1 à 4.

NEUVIÉME QUESTION.

LXVIII. Trouver deux quarrez dont la ſomme ſoit égale à la ſomme de deux autres quarrez donnez.

Soient aa & bb les deux quarrez donnez, je ſuppoſe aa plus grand que bb. L'un des deux que l'on cherche doit donc neceſſairement ſurpaſſer le quarré bb, & l'autre doit eſtre ſurpaſſé par aa. Soit donc la racine de celuy-cy $cz-a$, & celle du premier $z+b$. Il faut égaler les quarrez de ces deux racines aux quarrez aa & bb. Donc $cczz-2acz+aa+zz+2bz+bb=aa+bb$. Effaçant donc $aa+bb$ de chaque coſté, l'on a $cczz-2acz+zz+2bz=0$. Diviſant donc tout par z, & tranſpoſant à l'ordinaire, $ccz+z=2ac-2b$. Donc $z=\frac{2ac-2b}{cc+1}$. Les racines ſeront donc $cz-a=\frac{acc-2bc-a}{cc+1}$ & $z+b=\frac{2ac+bcc-b}{cc+1}$. Et la queſtion eſt infiniment reſoluë. L'on peut prendre pour c tel nombre qu'on voudra autre que l'unité. Car ſi l'on prenoit l'unité pour c, l'on retrouveroit les deux quarrez donnez & non pas deux autres. Et il n'importe pour donner une reſolution poſitive, que l'une des racines des deux quarrez cherchez ſoit negative. Si l'on ne vouloit pas cependant qu'elle fuſt negative, il faudroit prendre pour c un nombre tel que acc fuſt plus grand que $2bc+a$.

Soit $aa+bb=13$, c'eſt à dire $aa=9$, & $bb=4$. Si $c=2$. Donc $z=\frac{8}{5}$. Les deux racines ſeront donc $cz-a=\frac{1}{5}$. Et ſon quarré $\frac{1}{25}$ eſtant retranché de 13, laiſſe pour l'autre quarré $12\frac{24}{25}$, dont la racine $z+b=\frac{18}{5}=3\frac{3}{5}$.

DIXIE'ME QUESTION.

LXIX. Trouver trois grandeurs dont la ſomme ſoit un quarré, & de plus qu'eſtant joints alternativement deux à deux les ſommes alternatives ſoient pareillement des quarrez.

Soit zz le quarré qui fait la ſomme des trois, & yy celuy qui fait la ſomme des deux premieres, il reſtera donc $zz-yy$ pour la troiſiéme grandeur Soit encore xx le quarré que fait la premiere avec la troiſiéme, la ſeconde ſera donc $zz-xx$. Or la premiere & la ſeconde $zz-xx$ font le quarré yy. Retranchant donc la ſeconde du quarré xx, il reſtera $xx-zz+yy$ pour la premiere, & l'on a déja ſatisfait à trois conditions de la queſtion. Car la ſomme des trois fait le quarré zz, les deux premieres font le quarré yy, & la premiere avec la troiſiéme fait le quarré xx, il reſte que la ſeconde avec la troiſiéme faſſe un quarré. Donc $2zz-xx-yy$ eſt un quarré. Or ne voyant point d'abord comment je puis former la racine d'un tel quarré, parceque la ſomme $2zz-xx-yy$ n'enferme aucun quarré poſitif, puiſque zz y eſt mis deux fois, & que 2 n'a point de racine quarrée. C'eſt pourquoy j'examine à quelle reſolution des queſtions precedentes je la puis rapporter; Et premierement il eſt viſible que ſi je pouvois trouver un quarré moindre que l'unité, lequel eſtant oſté de 2 me laiſſaſt un autre quarré, je pourois mettre au lieu de xx ou de yy ce petit quarré multiplié par zz, & alors la ſomme auroit un quarré poſitif dont la racine ſerviroit à mon deſſein. Il faut donc diviſer 2 en deux quarrez, dont l'un ſoit au deſſous de l'unité. Or 2 eſt composé des deux quarrez 1 & 1, c'eſt pourquoy je puis partager cette ſomme en deux autres quarrez par le moyen de la Formule $\frac{acc-2bc-a}{cc+1}$ de la Neuviéme Queſtion 68. S. mettant au lieu de a & de b, leurs valeurs 1 & 1, & prenant 2 pour c, la racine du quarré que je dois retrancher de 2 ſera $-\frac{1}{5}$, il n'importe pas encore qu'elle ſoit negative, car ſon quarré $\frac{1}{25}$ ſera poſitif. Or $\frac{1}{5}$ eſtant retranché de 2, laiſſe le quarré $\frac{49}{25}$. Je reviens donc à ce que je m'eſtois propoſé de faire, & parceque xx eſt indéterminé, je l'appelle $\frac{1}{25}zz$. Ainſi la ſomme que je dois égaler à un quarré ſera $2zz-\frac{1}{25}zz-yy$, c'eſt à dire $\frac{49}{25}zz-yy$, qui doit eſtre un quarré. Soit $a-\frac{7}{5}z$ la racine de ce quarré. Donc $aa-\frac{14}{5}z+\frac{49}{25}zz=\frac{49}{25}zz-yy$. Donc $aa+yy=\frac{14}{5}z$. Et $z=\frac{5aa+5yy}{14}$. Et la queſtion eſt infiniment reſoluë.

Cependant comme les nombres eſtant trop grands, nos Formules donneroient une regle trop difficile, nous changerons l'operation, & nous la ferons ainſi à peu prés comme Diophante & Viete.

Soit le quarré donné par la ſomme des trois $zz+2az+aa$, & la ſomme des deux premiers $zz-2az+aa$. Cette ſomme retranchée de la ſomme des trois laiſſera donc pour le troiſiéme $4az$. Enſuite ſoit zz la ſomme de la premiere & troiſiéme, la ſeconde ſera donc $2az+aa$. Et parceque la premiere avec la ſeconde fait $zz-2az+aa$, ſi nous en retranchons $2az+aa$ qui eſt la ſeconde, il reſtera pour la premiere $zz-4az$. Les trois grandeurs ſeront donc déja $zz-4az$, $2az+aa$, & $4az$, & la ſomme des trois fait un quarré, la premiere avec la ſeconde en fait un autre, la premiere avec la troiſiéme en fait auſſi un, mais il reſte que la ſeconde avec la troiſiéme en faſſe encore un. Or cette ſomme eſt $6az+aa$. Soit donc $6az+aa=bb$. Donc $z=\frac{bb-aa}{6a}$. Les trois grandeurs délivrées de fractions ſeront donc $b^4-26aabb+25a^4$, $12aabb+24a^4$, & $24aabb-24a^4$. L'on voit que a doit eſtre plus petit que b, & $26aabb$ plus petit que b^4+25a^4.

Soit $b=6$, & $a=1$, le premier nombre ſera 385, le ſecond 456, & le troiſiéme 840.

Soit $b=11$, & $a=1$. Le premier nombre ſera 11520, le ſecond 1476, & le troiſiéme 2880. Et ſi chacun eſt diviſé par quelque quarré comme 36, les expoſans 320, 41, & 80, ſatisfont auſſi à la queſtion.

ONZIE'ME QUESTION.

LXX. Trouver trois nombres quarrez qui ſoient en proportion arithmetique continuë.

Soit le premier xx, le ſecond afin qu'il ſoit quarré $xx+2ax+aa$, le troiſiéme ſera donc $xx+4ax+2aa$. Soit ſa racine $b-x$. Donc $bb-2x+xx=xx+4ax+2aa$. Donc $bb-2aa=4ax+2bx$. Donc $x=\frac{bb-2aa}{4a+2b}$. Et lorſqu'on aura tout multiplié par le diviſeur commun, l'on trouvera en entiers que les racines ſont la premiere $bb-2aa$, la ſeconde $bb+2aa+2ab$, & la troiſiéme $bb+4ab+2aa$. Et la proportion arithmetique continuë des trois quarrez eſt $\div b^4-4aabb+4a^4$. $b^4+8aabb+4a^4+4ab^3+8a^3b$. $b^4+20aabb+4a^4+8ab^3+16a^3b$. Il eſt viſible que bb doit ſurpaſſer $2aa$. Soit donc $b=3$, & $a=2$. Les trois racines ſeront donc 1, 29, 41, & leurs quarrez 1. 841. 1681. La difference eſt 840.

Et ſi $b=8$ & $a=1$, les trois racines ſeront 62, 82, 98, & leurs quarrez 3844. 6724. 9604. La difference eſt 2880. Et ſi on les diviſe par quelques quarrez comme 4, leurs expoſans 961. 1681. 2401. ſatisferont auſſi à la queſtion. La difference eſt 720.

DOUZIE'ME QUESTION.

LXXI. Trouver trois nombres en proportion arithmetique continuë, leſquels eſtant joints alternativement deux à deux, les ſommes alternatives ſoient des nombres quarrez.

Soit la proportion continuë $\div z.\ z+d.\ z+2d$. Le premier terme avec le ſecond doit donner un quarré, ſoit ce quarré yy. Donc $2z+d=yy$, & $d=yy-2z$. Le ſecond avec le troiſiéme doit donner un autre quarré; ſoit ce quarré xx. Donc $xx=2z+3d$. Et $d=\frac{1}{3}xx-\frac{2}{3}z$. Or nous avions $d=yy-2z$. Donc $yy-2z=\frac{1}{3}xx-\frac{2}{3}z$. Le tout par 3. Donc

$3yy - 6z = xx - 2z$. Et par tranſpoſition, $4z = 3yy - xx$. Donc $z = \frac{3}{4}yy - \frac{1}{4}xx$, & $d = -\frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}xx$. La proportion ſera donc $\frac{3}{4}yy - \frac{1}{4}xx$. $+\frac{1}{4}yy + \frac{1}{4}xx$. $-\frac{1}{4}yy + \frac{3}{4}xx$. Ou bien multipliant le tout par le quarré 4, l'on a $3yy - xx$. $+1yy + xx$. $-yy + 3xx$. qui font une proportion arithmetique continüe. Et de plus le premier avec le ſecond donne un quarré $4yy$, & avec le troiſiéme un autre quarré $4xx$. Il reſte que le premier avec le troiſiéme donne un quarré, $2yy + 2xx$ doit donc eſtre quarré. Et de plus il faut que yy ne ſurpaſſe point $3xx$, & que xx ne ſurpaſſe point $3yy$. Car autrement le premier terme ou le dernier ſeroit negatif. Il ne faut pas auſſi que yy ſoit égal à xx. Car autrement chaque terme de la proportion ne vaudroit que $2yy$, ou $2xx$ qui eſt le même. Ainſi n'y ayant point de difference, il n'y auroit point de proportion. La queſtion ſe réduit donc là qu'il faut partager la moitié de quelque quarré en deux autres quarrez differens, dont chacun ſoit plus petit que 3 fois l'autre. Or ſoit $2aa$ la moitié du quarré laquelle il faut partager. Cette moitié $2aa$ eſt compoſée des deux quarrez $1aa$, & $1aa$. L'on peut donc la diviſer en deux autres, mais il faut que le plus petit ſoit au deſſus de $\frac{1}{2}aa$. Car ſi le plus grand eſtoit $\frac{3}{2}aa$ qui toutefois n'eſt pas un quarré non plus que $\frac{1}{2}aa$, il ſeroit égal au triple du plus petit $\frac{1}{2}aa$. Or il doit eſtre plus petit que ce triple. Le quarré doit donc eſtre au deſſus de $\frac{1}{2}aa$, car alors le plus petit quarré ſurpaſſant $\frac{1}{2}aa$, ſon triple ſurpaſſera $\frac{3}{2}aa$, & par une ſuite neceſſaire il ſurpaſſera le plus grand quarré qui ne poura eſtre qu'au deſſous de $1\frac{3}{2}aa$, puiſqu'il ſera la difference de $2aa$ au plus petit quarré qu'on ſuppoſe au deſſus de $\frac{1}{2}aa$. Or comme aa eſt un quarré, il reſte à partager 2 en deux quarrez dont le plus petit ſoit entre 1 & $\frac{1}{2}$, & ſa racine entre entre 1 & $\sqrt{\frac{1}{2}}$, les racines de 1 & de $\frac{1}{2}$. Ou ſi au lieu de $\frac{1}{2}$ nous prenons le quarré $\frac{9}{16}$ qui le ſurpaſſe, la racine du plus petit quarré ſera entre 1 & $\frac{3}{4}$ les racines des quarrez 1 & $\frac{9}{16}$.

Or nous avons trouvé dans la Queſtion Neuviéme que partageant la ſomme de deux quarrez en deux autres quarrez, la racine du plus petit eſt $\frac{acc - 2bc - a}{+1}$. Les nombres & a & b ſont les racines des quarrez donnez, c'eſt à dire dans noſtre queſtion $a = 1$, & $b = 1$, & ainſi la racine ſera $\frac{1cc - 2c - 1}{cc + 1}$, le nombre c eſt indéterminé, c'eſt pourquoy il faudra mettre ſucceſſivement au lieu de c, les nombres 2, 3, &c. juſques à ce que l'on trouve une fraction plus grande que $\frac{3}{4}$. Le premier nombre qui ſert à cela eſt 9. Ainſi mettant 9 au lieu de c, la fraction vaut $\frac{31}{41}$, ſon quarré eſt

$\frac{961}{1681}$, lequel eſtant retranché de 2, c'eſt à dire de $\frac{3362}{1681}$, laiſſe pour reſte le quarré $\frac{2401}{1861}$ dont la racine eſt $\frac{49}{41}$. Le plus grand quarré eſt donc $\frac{2401}{1681}aa$, le plus petit $\frac{961}{1681}aa$, & leur ſomme $2aa$, de laquelle en prenant la moitié l'on a le quarré aa. Et ſi nous ſuppoſons $aa = 1681bb$ pour oſter la fraction, & laiſſer encore le quarré indéterminé, nous aurons les deux quarrez $961bb$, & $2401bb$, dont la ſomme $3362bb$ eſtant priſe 2 fois, donne le quarré $6724bb$, dont la racine eſt 82. Nous n'aurons donc qu'à ſuppoſer $yy = 961bb$, & $xx = 2401bb$. Et la proportion qui eſtoit $3yy - xx$. $1yy + xx$. $-yy + 3xx$. ſera $482bb$. $3362bb$. $6242bb$. La difference de la proportion eſt $2880bb$. Le premier avec le ſecond donne un quarré dont la racine eſt $62b$, le premier avec le troiſiéme en donne un autre dont la racine eſt $84b$, & le ſecond avec le troiſiéme en donne un autre dont la racine eſt $98b$.

Mais quoy que la queſtion ſoit reſoluë infiniment, elle n'eſt pas neanmoins reſoluë algebraiquement comme les precedentes, de ſorte que l'on ne pouroit pas s'en ſervir generalement ſi l'on ajoûtoit quelque condition à la queſtion. De plus il ne paroiſt pas d'abord ſi facile à partager la moitié d'un quarré en deux autres avec les conditions precedentes, ainſi que nous l'avons fait. C'eſt pourquoy nous pourons tenter la même reſolution par une autre voye en cette ſorte.

Soit $4zz$ la ſomme des deux premiers termes qui doit eſtre un quarré, & $2y$ leur difference. La proportion ſera donc $2zz - y$. $2zz + y$. $2zz + 3y$. Le premier terme & le ſecond font un quarré, le premier & le troiſiéme donnent $4zz + 2y$ qui doit eſtre un quarré, ce qui paroiſt d'abord facile à faire. Car $4zz$ eſtant le quarré de $2z$, ſi l'on ſuppoſe que $2y$ qui eſt indéterminé ſoit le plan de $2z$ par 2 fois une grandeur comme b, plus le quarré bb, cette ſomme donnera un quarré dont la racine eſt $2z + b$. Et la proportion ſera $2zz - 2bz - \frac{1}{2}bb$. $2zz + 2bz + \frac{1}{2}bb$. $2zz + 6bz + \frac{3}{2}bb$. où il reſte à faire que le ſecond terme avec le troiſiéme, c'eſt à dire que $4zz + 8bz + 2bb$ ſoit un quarré. Soit $2a - 2z$ la racine de ce quarré. Et l'on aura $4aa - 8az + 4zz = 4zz + 8bz + 2bb$. Donc $4aa - 2bb = 8az + 8bz$, & $z = \frac{2aa - 1bb}{4a + 4b}$. Et ſi l'on met cette valeur au lieu de z par tout où elle ſe trouve dans les termes de la proportion, & qu'on multiplie le tout par $16aa + 32ab + 16bb$ pour oſter les fractions, les termes de la proportion ſeront le premier $8a^4 - 32aabb + 2b^4 - 8ab^3 - 16a^3b$. le ſecond $8a^4 + 16aabb + 8ab^3 + 2b^4 + 16a^3b$. & le troiſiéme $8a^4 + 64aabb + 2b^4 + 24ab^3 + 48a^3b$. La difference de la proportion eſt $+ 48aabb + 16ab^3 + 32a^3b$. Les deux premiers termes font un quarré, dont la racine eſt $4aa - 2bb$, le premier & troiſiéme en font un autre dont la racine eſt $4aa + 2bb + 4ab$, & le ſecond & troiſiéme terme font auſſi un quarré dont la racine eſt $4aa + 2bb + 8ab$. Cette queſtion peut encore ſe reſoudre autrement. Diophante & Viete la déduiſent de la queſtion precedente.

Soit donc $a = 4$, $b = 1$. Les termes ſeront 482. 3362. 6242. La difference eſt 2880. Le premier avec le ſecond font le quarré qui a 62 pour racine,

racine, le premier avec le troiſiéme en font un qui a 82 pour racine, & le ſecond avec le troiſiéme en font un qui a 98 pour racine.

TREIZIE'ME QUESTION.

LXXIII. Une grandeur eſtant donnée, en trouver trois autres, leſquelles eſtant jointes alternativement deux à deux; les trois ſommes alternatives, comme auſſi la ſomme des trois eſtant jointes chacune à la grandeur donnée, faſſent autant de nombres quarrez.

Soit a la grandeur donnée, & zz le quarré que doit faire la ſomme des trois plus la grandeur donnée a. Si l'on retranche a du quarré zz, le reſte $zz - a$ ſera donc la ſomme des trois. Or ſoit yy le quarré que doit donner la ſomme des 2 premieres grandeurs avec a, ſi l'on en retranche a, le reſte $yy - a$ ſera la ſomme de ces deux grandeurs, & cette ſomme eſtant retranchée de la ſomme totale des trois qui eſt $zz - a$, laiſſera $zz - yy$ pour la troiſiéme grandeur. Or le premier nombre avec le troiſiéme, plus la grandeur donnée, doivent faire un quarré. Soit ce quarré appellé xx, la ſomme des deux grandeurs ſera donc $xx - a$, & cette ſomme eſtant retranchée de la ſomme des trois, laiſſera pour le ſecond nombre $zz - xx$. Or le premier & le ſecond, comme nous avons vû, font $yy - a$. Si l'on en retranche donc le ſecond $zz - xx$, le reſte $yy - a - zz + xx$ ſera le premier nombre. Les trois ſeront donc déja $yy - a - zz + xx$. $zz - xx$. & $zz - yy$. qui ſatisfont déja à toutes les conditions excepté une. Car leur ſomme totale plus a fait le quarré zz, le premier & le ſecond plus a font le quarré yy, & le premier & le troiſiéme plus a font le quarré xx. Il reſte que le ſecond avec le troiſiéme plus a, faſſe un quarré, c'eſt à dire que $2zz - xx - yy + a$ ſoit un quarré. Et pour en former la racine, je cherche un quarré qui retranché de 2 laiſſe un quarré plus grand que l'unité. Comme 2 eſt compoſé de 2 quarrez, cela eſt facile, en prenant la formule $\frac{cc - 2c - 1}{cc + 1}$. Si je mets 2 ou bien 3 au lieu de c, j'auray $\frac{-1}{5}$ ou bien $\frac{1}{5}$ dont le quarré $\frac{1}{25}$ eſtant retranché de 2, laiſſe le quarré $\frac{49}{25}$. Ecrivant donc $\frac{50}{25}zz - \frac{1}{25}zz - yy + a$, au lieu de $2zz - xx - yy + a$, il me reſte le quarré $\frac{49}{25}zz - yy + a$, que je puis égaler facilement à un quarré en prenant pour ſa racine $b - \frac{7}{5}z$. Et continuant l'operation comme à l'ordinaire, l'on trouve $z = \frac{5bb + 5yy - 5a}{14}$.

Cependant il faut éviter lorſqu'on le peut ces ſortes de partages, en formant ſes quarrez de quelque autre maniere, en ſorte que l'on ne monte point à la ſeconde dimenſion des inconnuës ſi cela peut ſe faire. Ainſi dans noſtre queſtion nous aurions dénommé plus commodement nos grandeurs en cette ſorte.

Soit $zz + 2bz + bb - a$, la ſomme des trois nombres, afin que recevant a, la ſomme ſoit un quarré. Soit de même $zz + 2cz + cc - a$, la ſomme des deux premiers nombres, afin qu'en ajoûtant a, la ſomme ſoit encore un quarré. Et pareillement ſoit $zz + 2dz + dd - a$, la ſomme du premier &

troiſiéme. Si l'on retranche la ſomme des deux premiers, de la ſomme des trois, le reſte $2bz+bb-2cz-cc$ ſera le troiſiéme nombre. Et ſi l'on retranche la ſomme du premier & troiſiéme de la ſomme des trois, le reſte $2bz+bb-2dz-dd$ ſera le ſecond nombre. Or le ſecond & troiſiéme plus a doivent donner un quarré. Soit ce quarré arbitraire appellé ee. Donc $4bz+2bb-2cz-2dz-cc-dd+a=ee$.

Donc $z=\frac{ee-2bb+cc+dd-a}{4b-2c-2d}$.

Soit $a=3$, $b=3$, $c=2$, $d=1$, & $e=10$. Donc $z=14$, le premier & ſecond nombre $zz+2cz+cc-a$ ſera donc 235, le ſecond $2bz+bb-2dz-dd$ ſera 64, lequel eſtant retranché de la ſomme 235, laiſſe pour le premier nombre 189. Et enfin le troiſiéme nombre $2bz+bb-2cz-cc$ eſt 33. Ainſi les trois nombres ſont 189. 64. 33. Leur ſomme totale 286 plus 3 donne le quarré 289 dont la racine eſt 17; le premier & le ſecond plus 3 font le quarré 256 dont la racine eſt 16; le premier & troiſiéme plus 3 font le quarré 125 dont la racine eſt 25; & le ſecond & troiſiéme plus 3 font le quarré 100.

QUATORZIÉME QUESTION.

LXXIII. Un nombre eſtant donné, en trouver trois autres, leſquels eſtant alternativement multipliez l'un par l'autre deux à deux, chacun des trois produits ajouté au nombre donné, faſſe un quarré.

Soit a le nombre donné, & zz le quarré que le produit des deux premiers plus a aura formé. Si l'on en retranche a, le reſte $zz-a$ ſera le produit des deux, & ſi l'on appelle le premier nombre y, le ſecond ſera $\frac{zz-a}{y}$. De même ſoit xx le quarré formé par le produit du premier & troiſiéme nombre plus a, ſi l'on retranche a du quarré xx, le reſte $xx-a$ ſera le produit du premier & troiſiéme, & parceque le premier eſt y, le troiſiéme ſera $\frac{xx-a}{y}$. Les trois nombres ſeront donc déja y. $\frac{zz-a}{y}$. $\frac{xx-a}{y}$. Et il reſte à faire que le produit du ſecond & troiſiéme nombre avec a ſoit un quarré, c'eſt à dire que $\frac{zzxx-azz-axx+aa+ayy}{yy}$ ſoit un quarré. Et parceque le ſecond terme yy eſt un quarré, il reſte à faire que le premier terme $zzxx-azz-axx+aa+ayy$ ſoit un autre quarré. Or les trois grandeurs z, x, y, eſtant indéterminées, ſi pour abreger leur nombre, & n'en avoir que deux, nous ſuppoſons $y=z+x$, ce terme ſera le quarré $zzxx+2azx+aa$, dont la racine eſt $zx+a$. Les trois nombres ſeront donc; le premier $z+x$, le ſecond $\frac{zz-a}{z+x}$, & le troiſiéme $\frac{xx-a}{z+x}$, qui ſatisfont à la queſtion, & la reſolvent infiniment, pourvû que zz & xx ſoient plus grands chacun que le nombre donné a.

Soit le nombre donné $a=192$, $z=16$, & $x=16$. Les trois nombres ſeront donc 32. 2. & 2. Et ſi $z=26$, & $x=18$, les trois nombres ſeront 44. 11. & 3. Le produit des deux premiers eſt 484, qui prenant 192, donne le quarré du nombre 26 ; le produit de 44 par 11, plus 192, donne le quarré de 18, & enfin le produit de 11 par 3, plus 192, donne le quarré de 25.

Et ſi l'on demandoit trois nombres tels que leurs produits alternatifs diminuez chacun d'un nombre donné, fiſſent autant de nombres quarrez, ces trois nombres ſeroient $z-x$. $\frac{zz+a}{z-x}$; $\frac{xx+a}{z-x}$.

Soit $a=40$. Si $z=2$, & $x=1$, les trois nombres ſeront 1. 44. & 41. Le produit des deux premiers, moins 40, fait le quarré 4 ; du premier & troiſiéme moins 40, il fait le quarré 1 ; & du ſecond par le troiſiéme, moins 40, il fait le quarré 1764, dont la racine eſt 42.

Et ſi l'on ſuppoſe $z=4$ & $x=2$, les trois nombres ſeront 2. 28. 22.

Et ſi $x=3$, & $z=2$, les nombres ſeront 1. 49. 44. &c.

Il eſt à propos, ſur tout lorſque les queſtions ſont indéterminées, & que les operations ſont trop longues, de n'employer que le moins de lettres que l'on poura.

QUINZIE'ME QUESTION.

LXXIV. Par exemple un nombre quarré eſtant donné, pour trouver trois autres quarrez tels qu'eſtant multipliez alternativement deux à deux, chaque produit de deux ajoûté au produit du quarré donné par la ſomme de ces deux quarrez, ou par l'autre qui reſte, donne un nombre quarré.

Soit le quarré donné aa, le premier inconnu xx, le ſecond $xx+2ax+aa$. Leur produit plus la ſomme des deux fait le quarré $x^4+2ax^3+3aaxx+2a^3x+a^4$, dont la racine eſt $xx+ax+aa$. Mais le produit de ces deux quarrez, plus le produit du quarré aa par le troiſiéme nombre, doit donner auſſi un quarré, je prens pour la racine de ce quarré, la racine precedente augmentée de aa, c'eſt à dire $xx+ax+2aa$. Ce quarré ſera donc $x^4+2ax^3+5aaxx+4a^3x+4a^4$. Si donc l'on en retranche le produit des deux premiers quarrez x^4+2ax^3+aaxx, le reſte $4aaxx+4a^3x+4a^4$, ſera donc le produit du quarré aa par le troiſiéme quarré. Ce quarré ſera donc $4xx+4ax+4aa$. Lequel eſtant multiplié par le ſecond, & la ſomme de tous les deux multipliée par le quarré aa, donne le quarré dont la racine eſt $2xx+3ax+3aa$. Et ſi au produit du ſecond quarré par le troiſiéme, l'on ajoûte le produit du quarré aa par le premier, l'on aura le quarré dont la racine eſt $2xx+3ax+2aa$. Et ſi l'on ajoûte au produit du premier & troiſiéme le produit du quarré aa par la ſomme des deux, ou par le ſecond nombre, l'on aura en même ſorte deux quarrez dont les racines ſont $2xx+ax+2aa$, & $2xx+ax+aa$. Il reſte donc ſeulement à faire que le troiſiéme nombre $4xx+4ax+4aa$ que nous avons pris pour un quarré, ſoit veritablement quarré. Soit $2b-2x$ la racine de ce quarré, Et l'on aura $4xx-8bx+4bb=4xx+4ax+4aa$. Donc $2bx+ax=bb-aa$. Et $x=\frac{bb-aa}{2b+a}$. Le quarré bb doit ſurpaſſer aa. Et alors la queſtion eſt infiniment reſoluë.

Les trois racines ſont $\frac{bb-aa}{2b+a}$, $\frac{bb+2ab}{2b+a}$, & $\frac{2bb+2ab+2aa}{2b+a}$.

Soit le nombre donné $a=3$, ſi $b=12$ les trois racines ſeront 5, 8, & 14. Et ainſi les trois quarrez ſeront 25 64, & 196. Si l'on ajoûte le produit des deux premiers, c'eſt à dire 1600, au produit 801 du quarré donné 9 par la ſomme des deux, ou bien au produit 1764 du troiſiéme quarré 196 par 9, les deux ſommes ſeront les deux quarrez 2401, & 3364, dont les racines ſont 49 & 58. De même ſi l'on ajoûte le produit du premier & troiſiéme quarré, au produit de 9 par la ſomme des deux, ou par l'autre quarré 64, l'on aura les deux quarrez 6889, & 5476, dont les racines ſont 83 & 74. Et enfin ſi l'on ajoûte le produit du ſecond & troiſiéme quarré, au produit du quarré donné 9 par la ſomme des deux, ou par l'autre quarré 25, les ſommes totales ſeront les deux nombres quarrez 14884 & 12769, dont les racines ſont 122 & 113.

SEIZIE'ME QUESTION.

LXXV. Un nombre eſtant donné, le partager en deux autres tels que chacun recevant un nombre donné, le produit des nombres ainſi augmenté, ſoit un quarré.

Soit a le nombre donné, b celuy qu'il faut ajoûter à ſa premiere partie, & d celuy qu'il faut ajoûter à la ſeconde. Soit z le premier des deux nombres dont le produit doit former un quarré, ſi on luy retranche b, le reſte $z-b$ ſera la premiere partie qu'on doit prendre du nombre a, la ſeconde ſera donc $a-z+b$, puiſque leur ſomme doit eſtre égale au nombre donné a. Ainſi le ſecond des deux nombres, dont le produit doit eſtre un quarré, ſera $a-z+b+d$, & ſon produit par le premier z ſera $az-zz+bz+dz$ qui doit eſtre un quarré. Soit ſa racine $\frac{cz}{a}$. Donc $\frac{cczz}{aa}=az-zz+bz+dz$. Diviſant donc le tout par z, tranſpoſant à l'ordinaire, & multipliant le tout par aa, & diviſant tout enſuite par $aa+cc$, l'on aura $z=\frac{a^3+aab+aad}{aa+cc}$. Les deux nombres dont la ſomme fait a, ſeront donc $z-b=\frac{a^3+aad-bcc}{aa+cc}$, & le ſecond $a-z+b$ ſera $\frac{+acc+bcc-aad}{aa+cc}$, où l'on voit que cc doit eſtre entre $\frac{a^3+aad}{b}$, & $\frac{aad}{a+b}$ plus petit que celuy-là, & plus grand que celuy-cy, afin que la reſolution ſoit poſitive.

Soit le nombre donné $a=6$, $b=5$, & $d=2$. Il faut que cc ſoit entre $\frac{a^3+aad}{b}=57\frac{3}{5}$ & $6\frac{6}{11}$. Soit donc $cc=16$, les deux nombres ſeront le premier 4, & le ſecond 2. Leur ſomme eſt 6, le premier 4 prenant le nombre 5, & le ſecond 2 prenant le nombre 2, l'on aura 9 & 4, dont le produit fait le quarré 36.

Si l'on prenoit $cc=9$, les deux nombres ſeroient $5\frac{2}{5}$, & $\frac{3}{5}$. Leur ſomme eſt 6. Le premier plus 5, & le ſecond plus 2 font $10\frac{2}{5}$ & $2\frac{3}{5}$ ou $\frac{52}{5}$ & $\frac{13}{5}$, dont le produit fait le quarré $\frac{676}{25}$, qui a $\frac{26}{5}$ ou $5\frac{1}{5}$ pour ſa racine.

ELEMENS DES MATHEMATIQUES.

LIVRE SECOND.

DE LA RESOLUTION DES QUESTIONS PAR LA COMPOSITION.

COMME l'Analyſe ſeule ne ſuffit pas pour toute ſorte de reſolutions, ce Livre ſervira pour donner quelque connoiſſance de la maniere dont on peut chercher à reſoudre les queſtions par la Voye Syntethique ou de Compoſition.

I. Cette ſeconde Voye que nous appellons *Syntethique*, eſt celle qui reſout les queſtions ſans former aucune égalité. La methode qu'elle ſuit eſt de conſiderer avec exactitude & ſeparément toutes les parties ſimples qui entrent dans les queſtions propoſées, enſuite elle compare ces parties mutuellement entr'elles, de telle ſorte que l'on voye, autant qu'il eſt poſſible, tous les rapports que les unes ont avec les autres, ce qui doit reſulter de leurs mélanges, & comment l'on en peut déduire ce qu'on cherche à connoître.

II. Quoyque ces ſortes de queſtions ne ſe reſolvent point en formant ou en reduiſant des égalitez ſemblables à celles dont nous avons parlé, il eſt à propos cependant afin de les reſoudre, d'employer quelques regles de l'Analyſe, ſur tout celle qui preſcrit d'examiner attentivement les conditions qu'on accorde, & de s'en bien ſervir ; & l'autre regle encore qui ſert à dénommer ſimplement les grandeurs, en les exprimant par des caracteres familiers & tres-ſimples, tels que ſont les lettres. Cela ſert pour empeſcher que l'eſprit ne ſoit point trop partagé, ny la memoire trop embaraſſée par une multiplicité confuſe d'autres expreſſions qu'on employeroit indifferemment & ſans choix. Mais tout cecy s'éclaircira & s'entendra peut-eſtre mieux par une application methodique que nous en ferons, pour reſoudre par la Voye Syntethique les Queſtions ſuivantes.

PREMIERE QUESTION.

L'on demande quel eſt le nombre de toutes les conjonctions ou disjonctions poſſibles des ſept planetes, c'eſt à dire combien de differentes fois elles peuvent eſtre priſes ſeparément ou conjointement. III.

Pour reſoudre cette queſtion, ſoient les ſept planetes appellées par le nom des ſept lettres *a, b, c, d, e, f, g.* Premierement il eſt viſible que chaque planete ne peut eſtre priſe qu'une fois ſeparément de toute autre, il eſt encore viſible que chaque planete ne peut eſtre jointe qu'une fois avec une ſeule des autres, *a* peut ſe joindre une fois ſeulement avec *b*, car ſi *a* marque le Soleil, & *b* la Lune, la conjonction *ab* du Soleil avec la Lune ſera la même que la conjonction *ba* de la Lune avec le Soleil. Les deux planetes *a* & *b* ne pouront ſe joindre qu'une fois. Enſuite ſi nous examinons les trois planetes *a, b,* & *c*, la planete *a* ſe poura joindre une fois avec *b*, & une fois avec *c*, ce qui donnera les deux conjonctions *ab* & *ac*; & la planete *b* poura ſe joindre une fois avec *c*, ce qui donnera une autre conjonction *bc*, & les trois planetes pouront ſe joindre auſſi une fois toutes enſemble, ce qui donnera la quatriéme conjonction *abc*, & l'on ne peut plus trouver d'autre conjonction poſſible de ces trois planetes. Ainſi nous connoiſſons déja que deux planetes ne peuvent ſe joindre qu'une fois, & que trois ſe peuvent joindre 4 fois.

Enſuite ſi nous examinons les quatre planetes *a, b, c, d,* la planete *a* ſe poura joindre une fois avec chaque autre, ce qui donnera les trois conjonctions *ab, ac, ad*; de même la planete *b* poura ſe joindre une fois avec chacune des deux *c* & *d* qui ſont écrites aprés elle, car on l'a déja jointe avec *a* qui la precede, & la planete *c* poura ſe joindre auſſi une fois avec *d* qui la ſuit, ce qui donnera les trois conjonctions *bc, bd, cd,* outre les trois precedentes *ab, ac, ad.* Mais les deux premieres planetes *a* & *b* jointes enſemble, pouront ſe joindre une fois avec chacune des deux autres *c* & *d*, ce qui donnera les deux conjonctions *abc, abd.* De même la premiere & troiſiéme planete *a* & *c* pouront ſe joindre une fois avec *d*, ce qui donnera la conjonction *acd*, il ſeroit inutile de les joindre encore avec *b*, puiſque la conjonction *acb* qu'on en tireroit, eſt la même que la conjonction *abc* que nous avons déja trouvée, & enfin toutes les quatre planetes *a, b, c* & *d* eſtant jointes enſemble, donneront la conjonction *abcd.* Toutes les conjonctions poſſibles des quatre planetes *a, b, c, d,* ſeront donc les 11 ſuivantes *ab. ac. ad. bc. bd. cd. abc. abd. acd. bcd. abcd.* Or ſi nous ajoûtons à la ſeule conjonction *ab* des deux planetes *a* & *b*, les deux disjonctions *a* & *b*, de ces mêmes planetes, le nombre 3 marquera toutes les conjonctions ou disjonctions poſſibles de deux planetes. Et ſi nous ajoûtons aux quatre conjonctions *ab ac, bc, abc,* des trois planetes *a, b,* & *c*, leurs trois disjonctions *a, b, c,* le nombre 7 marquera toutes les conjonctions ou disjonctions poſſibles de trois planetes. De même ſi nous ajoûtons aux 11 conjonctions des quatre planetes $a, b, c, d,$ les quatre disjonctions de ces mêmes planetes, le nombre 15 marquera toutes les conjonctions ou disjonctions poſſibles de ces quatre planetes. Or examinant les nombres 1. 3. 7. & 15. qui marquent toutes les conjonctions ou disjonctions poſſibles, le premier 1, d'une ſeule planete; le ſecond 3, de 2 planetes; le troiſiéme 7, de 3 planetes; & le quatriéme 15, de 4 planetes: Je voy que ſi j'ajoutois l'unité à chacun de ces nombres 1. 3. 7. & 15, j'aurois 2. 4. 8. 16. qui ſont les termes de la progreſſion double, c'eſt pourquoy je ſoupçonne déja que ſi j'oſte 1 du terme 32 qui ſuit 16, j'auray 31 pour le nombre de toutes les conjonctions ou disjonctions poſſibles de 5 planetes; que ſi j'oſte 1 du terme 64 qui ſuit 32, j'auray 63 pour le nombre de toutes les conjonctions ou disjonctions poſſibles de ſix planetes; & qu'enfin ſi j'oſte 1 du terme 128 qui ſuit 64, j'auray 127 pour le nombre de toutes les conjonctions ou disjonctions poſſibles des ſept planetes. Et pour m'en aſſurer, je cherche toutes les conjonctions ou disjonctions poſſibles de cinq & de ſix planetes, ou de quelques autres choſes dont l'on voudra chercher de ſemblables conjonctions, & je conclus que mon raiſonnement eſt fondé ſur une proprieté eſſentielle de la progreſſion double, parceque je trouve que les cinq lettres $a.\ b.\ c.\ d.\ e.$ ſe peuvent prendre ſeparément ou conjointement en 31 differentes manieres, & les ſix $a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f.$ en 63. Et ainſi des autres choſes qui ſeront priſes en même ſorte.

Et ces conjonctions ou disjonctions de pluſieurs choſes ſont ce qu'on appelle ordinairement *combinaiſons*.

L'on voit déja par la methode que nous venons de ſuivre, que toutes ces conjonctions ou combinaiſons s'expriment en même ſorte que les produits. Pour multiplier a par b, l'on écrit ab, ou ba, & pour combiner a avec b, l'on écrit auſſi ab ou ba. Pareillement pour prendre le ſolide des trois grandeurs $a.\ b.\ c.$ l'on écrit abc, ou acb, ou bac, ou bca, ou cab, ou cba, ce qui fait toujours le même produit, car l'ordre renverſé n'en change point la valeur, puiſque 2 fois 3 ou 3 fois 2 font 6 Et ainſi des autres. Or l'on écrit auſſi la même choſe pour exprimer la conjonction ou la combinaiſon de trois choſes, comme des trois planetes $a.b.c.$

IV. Mais afin de trouver toutes ces conjonctions & disjonctions poſſibles de pluſieurs choſes déterminées, ou ce qui eſt le même, afin de trouver tous les choix differens que l'on en peut faire, en les prenant une à une, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, & ainſi du reſte.

1°. L'on marquera chaque choſe par une lettre, & l'on prendra une fois chaque lettre.

2°. On prendra le plan de la premiere lettre par chacune de celles qui la ſuivent, plus le plan de la ſeconde par chacune de celles qui la ſuivent, plus le plan de la troiſiéme par chacune de celles qui la ſuivent, & ainſi de ſuite.

3°. L'on prendra le ſolide fait du premier plan par chacune des lettres qui le ſuivent, plus le ſolide du ſecond plan par chacune des lettres qui le ſuivent, plus le ſolide du troiſiéme plan par chacune des lettres qui le ſuivent. Et ainſi de ſuite.

4°. L'on prendra le ſurſolide fait du premier ſolide qu'on aura trouvé par chacune des lettres qui le ſuivent, plus le ſurſolide du ſecond ſolide par chacune des lettres qui le ſuivent, plus le ſurſolide du troiſiéme ſolide par chacune des lettres qui le ſuivent, & ainſi de ſuite. 5°. L'on prendra en même ſorte tous les produits faits de chacun des ſurſolides par chacune des lettres qui les ſuivent. Et ainſi des autres produits compoſez de plus en plus à l'infini.

Par exemple pour avoir toutes les conjonctions ou disjonctions poſſibles des trois planetes *a. b. c.* 1°. Je prens une fois chacune. 2°. Je prens *ab* & *ac,* le produit de la premiere lettre *a* par chacune des deux *b* & *c* qui la ſuivent; plus *bc* produit de la ſeconde lettre *b* par *c* qui la ſuit. 3°. Je prens *abc* le ſolide du plan *ab* que j'ay trouvé le premier, par la lettre *c* qui ſuit *a* & *b* qui compoſent ce plan. Et je connois que toutes les conjonctions ou disjonctions que je cherche ſont les ſept *a, b, c. ab, ac, bc. abc.* ** . Comme aucune lettre ne ſuit *c*, les deux produits *ac* & *bc* ne peuvent eſtre multipliez pat aucune lettre; c'eſt ce qu'on marque par deux petites eſtoiles.

De même pour trouver tous les differens choix que je puis faire des quatre choſes *a. b. c. d.* 1°. Je prens une fois chacune. 2°. Je prens une fois le produit de la premiere lettre *a* par chacune des trois *b, c* & *d* qui la ſuivent, plus le produit de la ſeconde *b* par chacune des deux *c* & *d* qui la ſuivent, plus le produit de la troiſiéme *c* par la derniere *d* qui la ſuit. 3°. Je prens le ſolide du premier plan *ab* par chacune des lettres *c* & *d* qui ſuivent *a* & *b,* dont le plan *ab* eſt compoſé, plus le ſolide du ſecond plan *ac* par la lettre *d* qui ſuit *a* & *c,* dont le plan *ac* eſt compoſé. Comme aucune lettre ne ſuit *d,* le plan *ad* ne ſervira point pour en former un ſolide par quelques lettres qui ſuivent celles dont il eſt compoſé, ce qui ſe marque par une petite eſtoile. 4°. Je prens le ſurſolide du premier ſolide *abc* par la lettre *d* qui ſuit les lettres dont ce ſolide eſt compoſé. Il ne reſte plus de lettre à combiner. Ainſi tous les differens choix que je puis faire de quatre choſes en les prenant une à une, deux à deux, trois à trois, & quatre à quatre, ſont les 15 ſuivantes.

a, b, c, d. ab, ac, ad, bc, bd, cd. abc, abd, acd. * bcd. ** abcd. ***

L'on trouvera en même ſorte que toutes les conjonctions ou disjonctions poſſibles des ſept planetes ſeront les 127 qui ſuivent.

a, b, c, d, e, f, g. ab, ac, ad, ae, af, ag; bc, bd, be, bf, bg; cd, ce, cf, cg; de, df, dg; ef, eg; fg. abc, abd, abe, abf. abg; acd, ace, acf, acg; ade, adf, adg; aef, aeg; afg; * bcd, bce, bcf, bcg; bde, bdf, bdg; bef, beg; bfg; * cde, cdf, cdg; cef, ceg; cfg; * def, deg; dfg; * efg. * abcd, abce, abcf, abcg; abde, abdf, abdg; abef, abeg; abfg; * acde, acdf, acdg; acef, aceg; acfg; * adef, adeg; adfg; * aefg; ** bcde, bcdf, bcdg; bcef, bceg; bcfg; * bdef, bdeg; bdfg; * befg; ** cdef, cdeg; cdfg; * cefg; ** defg. *** abcde, abcdf, abcdg; abcef, abceg; abcfg; * abdef, abdeg; abdfg; * abefg; ** acdef, acdeg; acdfg; * acefg; ** adefg; *** bcdef, bcdeg; bcdfg; * bcefg; ** bdefg; *** cdefg. **** abcdef, abcdeg; abcdfg; * abcefg; ** abdefg; *** acdefg; **** bcdefg; ***** abcdefg. ******

Et ſi l'on oſte de ces 127 choix les ſept premiers *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, & *f*, qui ſont ceux que l'on peut appeller proprement les disjonctions des planetes, puiſqu'aucune ne ſe trouve avec d'autres, le nombre 120 ſera celuy de toutes les conjonctions poſſibles des 7 planetes. On les voit icy toutes marquées aprés les ſept lettres *a*. *b*. *c*. *d*. *e*. *f*. & *g*. Nous déterminerons ailleurs comment l'on peut déterminer le nombre de toutes les combinaiſons de cette ſorte, qui doivent ſe faire ſeulement deux à deux, ou trois à trois, ou quatre à quatre, &c.

COROLLAIRE.

V. La reſolution de la queſtion nous fait donc connoître que ſi l'on prend ſucceſſivement & par ordre tous les termes de la progreſſion double, ∺ 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512. 1024. &c. & que l'on retranche l'unité de chacun, les nombres 1. 3. 7. 15. 31. 63. 127. 255. 511. 1023. &c. qui reſteront, marqueront tous les choix qu'on peut faire entre pluſieurs choſes déterminées, en les prenant une à une, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, &c. le premier nombre 1 marquera qu'une ſeule choſe ne peut eſtre choiſie ou combinée qu'une fois, le ſecond nombre 3 que l'on peut faire trois choix ou combinaiſons differentes entre deux choſes. Et ainſi des autres.

SECONDE QUESTION.

VI. Mais l'on ſuppoſe de nouveau que l'ordre ou la diſpoſition des choſes à combiner doive eſtre conſiderée, comme elle l'eſt dans les mots & dans les nombres. Car *ab* fait un mot ou une ſyllabe differente de *ba*; & 12 fait un nombre different de 21. Cependant toutes les mêmes lettres qui ſervent à former *ab* ſervent à former *ba*, & les mêmes chiffres qui ſervent à marquer 12, ſervent auſſi à marquer 21. Le changement ne vient que de leur diſpoſition differente. Or l'on demande en combien de manieres pluſieurs choſes differentes peuvent eſtre combinées, en les prenant non ſeulement une à une, deux à deux, trois à trois, &c. comme on a fait dans la queſtion precedente, mais auſſi en les arrangeant ſelon tous les ordres & toutes les diſpoſitions differentes qu'elles ſeront capables de recevoir?

Une ſeule lettre comme *a* ne peut eſtre priſe que d'une ſeule maniere; puiſqu'elle n'eſt comparée avec aucune autre, elle n'aura point d'ordre ny de diſpoſition differente. C'eſt pourquoy pluſieurs choſes ne pouront eſtre priſes une à une qu'autant de fois que le nombre qui marque leur multitude renferme d'unitez. Les 9 premiers chiffres par exemple ne pouront eſtre pris differemment un à un que 9 fois, ny les 24 lettres que 24 fois. Cela eſt clair. Les deux lettres *a* & *b* peuvent donc eſtre priſes une fois chacune; & l'on peut auſſi en faire les deux ſyllabes differentes *ab* & *ba*, dans l'une *a* tient la premiere place & *b* la derniere, & dans l'autre *b* tient la premiere place & *a* la derniere. Deux lettres peuvent donc eſtre priſes deux à deux autant de fois qu'on les peut prendre une à une, c'eſt à dire 2 fois. Mais les trois lettres *a*, *b*, & *c*, eſtant combinées deux à deux, pouront recevoir déja les deux diſpoſitions precedentes *ab* & *ba*, & encore les quatre autres *ac*, *ca*, *bc*, *cb*. De ſorte qu'elles pouront eſtre priſes 6 fois deux à deux, c'eſt à dire 2 fois autant qu'elles peuvent eſtre priſes une à une.

De même les quatre lettres *a. b. c. d.* outre les ſix diſpoſitions precedentes, pouront encore recevoir les ſix autres *ad*, *da*, *bd. db*, *cd*, *dc*. Et ainſi elles pouront eſtre priſes 12 fois deux à deux, c'eſt à dire 3 fois autant qu'elles peuvent eſtre priſes une à une.

Pareillement les cinq lettres *a. b. c. d. e.* outre les 12 diſpoſitions precedentes, pouront recevoir encore les 8 autres *ae ea*, *be eb*, *ce ec*, *de ed*. De ſorte qu'elles pouront eſtre priſes 20 fois deux à deux, c'eſt à dire 4 fois autant qu'elles peuvent eſtre priſes une à une. Car 5 choſes peuvent ſe prendre 5 fois une à une, & 5 eſt 4 fois dans 20.

L'on verra en même ſorte que les ſix lettres *a. b. c. d. e. f.* peuvent eſtre jointes 30 fois deux à deux, c'eſt à dire 5 fois autant qu'elles peuvent eſtre priſes à une. Que 7 pouront eſtre priſes 6 fois autant, c'eſt à dire 42 fois. Que 8 pouront eſtre priſes 7 fois autant, c'eſt à dire 56. Que 9 le pouront eſtre 72 fois. Que 10 le pouront eſtre 90 fois, & ainſi des autres.

Et ſi l'on joint les deux nombres qui marquent combien de fois une ou pluſieurs choſes peuvent eſtre priſes une à une & deux à deux, l'on trouvera qu'une ſeule choſe le peut eſtre 1 fois. Que 2 le peuvent eſtre 4 fois. Que 3 le peuvent eſtre 9 fois. Et ainſi des autres, en prenant le quarré du nombre même qui marque la multitude des choſes. En prenant 100 ſi le nombre des choſes eſt 10. &c. Ce qui fait un Theoreme aſſez conſiderable.

L'on en pouroit conclurre par exemple que les 9 premiers chiffres pris chacun ſeparément, ou bien joints deux à deux en toutes les manieres poſſibles, donneront 81 nombres differens. En effet ſi l'on prend tous les nombres 1, 2, 3, &c. juſqu'à 100, l'on n'en trouvera que 81 ou zero ne ſe trouve point.

Nous n'avons encore joint aucunes lettres trois à trois. Or une ny deux lettres ne peuvent eſtre priſes aucune fois trois à trois. Mais les trois lettres *a*, *b*, *c*, peuvent recevoir 3 fois autant de differens ordres, eſtant jointes trois à trois, que les deux *a* & *b* en peuvent recevoir eſtant jointes deux à deux. Car chacune occupant une fois le premier lieu, les deux autres ſont changées deux fois, lorſque *a* tient le premier lieu, *b* & *c* changent 2 fois, car l'on écrit *abc*, *acb*. De même lorſque *b* tient le premier lieu, les deux *a* & *c* changent 2 fois, car l'on écrit *bac bca*. Et *c* tenant le premier lieu, l'on écrit *cab*, *cba*. Ce qui donne les ſix ordres differens *abc acb*, *bac bca*, *cab cba*. De ſorte que 3 choſes pouront eſtre priſes autant de fois trois à trois que deux à deux, c'eſt à dire 6 fois.

De même les 4 lettres *a. b. c. d.* eſtant priſes trois à trois outre les 6 diſpoſitions precedentes, en recevront encore 18 autres. Car ſi la combinaiſon *abc* en fait 6, chacune des autres *abd*, *acd*, & *bcd*, en fera pareillement 6, & toutes trois enſemble en feront 18, qui ſont *abd adb*, *bad bda*, *dab dba*.

acd adc, cad cda, dac dca. bcd bdc, cbd cdb, dbc dcb. Ainſi 4 choſes pouront eſtre priſes 24 fois trois à trois , c'eſt à dire 2 fois autant qu'elles peuvent eſtre priſes deux à deux , car elles peuvent l'eſtre 12 fois deux à deux, comme nous avons déja vû.

Pareillement les cinq lettres *a, b, c, d, e,* outre les 24 diſpoſitions precedentes , en recevront 36 autres. Car ſi les 4 combinaiſons *abc. abd. acd. bcd.* en font 4 fois 6, c'eſt à dire les 24 precedentes , les ſix autres *abe, ace, ade, bce, bde, cde,* en feront 6 fois 6, c'eſt à dire 36. De ſorte que cinq choſes pouront eſtre jointes 60 fois differemment trois à trois , c'eſt à dire 3 fois autant qu'elles peuvent l'eſtre deux à deux. L'on trouvera en même ſorte que ces ſix lettres peuvent eſtre jointes 120 fois trois à trois , c'eſt à dire 4 fois autant que deux à deux. Que 7 pouront eſtre jointes 5 fois autant, c'eſt à dire 210 fois. Et ainſi des autres. De ſorte que les 9 premiers chiffres donneront au juſte 504 nombres differens compoſez de 3 chiffres chacun , mais 8 de ces 9 chiffres differens n'en dōneroient que 336, ſept n'en dōneroient que 210. ſix que 120. cinq que 60. quatre que 24. & trois enfin n'en donneroient que 6 Par exemple les trois nombres 1, 2, 3, eſtant joints trois à trois, donneront ſeulement les ſix differens nombres 123, 132, 213 231, 312 321.

Enſuite les quatre lettres *a. b. c. d.* peuvent recevoir autant de differens ordres eſtant jointes quatre à quatre , qu'elles en peuvent recevoir eſtant jointes trois à trois , c'eſt à dire qu'elles recevront 24 ordres differens. Ou bien , ce qui revient au même , ces 4 lettres peuvent recevoir 24 ordres differens , c'eſt à dire 4 fois autant que les trois *abc.* Car chacune des 4 lettres occupant une fois le premier lieu , les trois autres reçoivent ſix ordres differens , qui ſont

abcd abdc, acbd acdb, adbc adcb; bacd badc, bcad bcda, bdac bdca;
cabd cadb, cbad cbda, cdab cdba; dabc dacb, dbac dbca, dcab dcba.

Pareillement 5 lettres peuvent en recevoir 120, c'eſt à dire deux fois autant que ſi elles ſont jointes trois à trois. De même ſix lettres en peuvent recevoir 360, c'eſt à dire trois fois autant que ſi elles ſont jointes trois à trois. Sept lettres en recevront 4 fois autant , c'eſt à dire 840. Et ainſi de ſuite.

Et continuant de ſemblables raiſonnemens , l'on trouvera que 5 choſes peuvent recevoir 120 ordres differens eſtant jointes cinq à cinq , c'eſt à dire autant qu'elles en peuvent recevoir eſtant jointes quatre à quare. Six choſes en pouront recevoir 720, ou deux fois autant que ſi elles ſont jointes quatre à quatre. Sept choſes en recevront 2520, ou trois fois autant que ſi elles ſont jointes quatre à quatre. Et ainſi de ſuite.

Et pareillement ſix choſes recevront 720 ordres eſtant jointes ſix à ſix, c'eſt à dire autant que ſi on les joint cinq à cinq. Sept choſes en recevront 5040 ou deux fois autant que ſi elles ſont jointes cinq à cinq. Et ainſi des autres.

Et pareilllement 8 choſes pouront ſe joindre autant de fois huit à huit que ſept à ſept Neuf choſes 2 fois autant. Dix choſes 3 fois autant. Et ainſi de ſuite à l'infiny. De ſorte que la queſtion eſt pleinement reſoluë.

VII. Mais afin de trouver avec toute la facilité poſſible les nombres de tous les differens arrangemens que pluſieurs choſes ſeront capables de recevoir, ſoit en les prenant chacune ſeparément, ou bien en les joignant deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, &c. L'on prendra le nombre propoſé des choſes, plus le produit de ce nombre par luy-même diminué de l'unité. Plus le produit de ce produit trouvé par le nombre des choſes diminué de 2 unitez. Plus le produit de ce nouveau produit par le nombre des choſes diminué de 3 unitez. Et ainſi de ſuite. Aprés quoy réduiſant en une ſomme le nombre des choſes, plus tous les produits qu'on aura trouvé, la ſomme totale ſera le nombre de tous les differens choix ou arrangemens que ces choſes ſeront capables de recevoir.

Par exemple pour ſçavoir combien l'on peut faire de differens nombres avec les 9 premiers chiffres, ſoit en les prenant un à un, ou deux à deux, ou trois à trois, &c. L'on prendra 9 nombre de tous ces chiffres, plus 72 produit de 9 par 8=9—1, plus 504 produit du produit 72 par 7=9—2, plus 3024 produit du produit 504 par 6=9—3, plus 15120 produit du produit 3024 par 5=9—4, plus 60480 produit du produit 15120 par 4=9—5, plus 181440 produit du produit 60480 par 3=9—6, plus 362880 produit du produit 181440 par 2=9—7, plus enfin 362880 produit du produit 362880 par 1=9—8. Aprés quoy réduiſant en une ſomme le nombre 9 & tous les produits trouvez, la ſomme totale 986409 ſera le nombre qui marquera combien l'on peut faire de nombres differens avec les 9 premiers chiffres.

L'on voit icy en même ſorte les nombres de tous les differens choix ou arrangemens differens que l'on peut faire de pluſieurs choſes juſques au nombre de 10.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	*nombres des choſes priſes.*
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	*une à une*
	2.	6.	12.	20.	30.	42.	56.	72.	90.	*deux à deux*
		6.	24.	60.	120.	210.	336.	504.	720.	*trois à trois*
			24.	120.	360.	840.	1680.	3024.	5040.	*quatre à quatre*
				120.	720.	2520.	6720.	15120.	30240.	*cinq à cinq*
					720.	5040.	20160.	60480.	151200.	*ſix à ſix*
						5040.	40320.	181440.	604800.	*ſept à ſept*
							40320.	362880.	1814400.	*huit à huit*
								362880.	3628800.	*neuf à neuf*
									3628800.	*dix à dix*
1.	4.	15.	64.	325.	1956.	13699.	109600.	986409.	9864100.	*ſomme de tous les ordres.*

VIII. Si l'on vouloit ſeulement continuer les ſommes totales, la premiere eſt 1; ſi on luy ajoûte 1, & qu'on multiplie 2 par 2, le produit 4 ſera la ſeconde ſomme, à qui ſi l'on ajoûte 1, & qu'on multiplie 5 par 3, le produit 15 donnera la troiſiéme; ſi l'on ajoûte 1 à 15, & qu'on multiplie 16 par 4, le produit 64 donnera la quatriéme; pareillement 64+1=65 par 5 donnera la cinquiéme 325; & 326 par 6 donnera la ſixiéme 1956. Et ainſi des autres.

IX. Et ſi l'on avoit la curioſité de chercher les differens choix ou arrangemens de pluſieurs choſes. Voicy encore la plus courte methode par laquelle on s'y puiſſe prendre. L'on cherchera en premier lieu toutes les combinaiſons poſſibles de ces choſes ſelon la methode expliquée dans la premiere queſtion. Enſuite chacune de ces combinaiſons ſera variée autant de fois qu'elle peut l'eſtre, c'eſt à dire, ainſi que nous l'avons déja vû, chaque combinaiſon de deux lettres ſera variée 2 fois, parceque chacune poura occuper une fois la premiere place, & une fois la derniere, chaque combinaiſon de trois lettres ſera variée 6 fois, c'eſt à dire 3 fois autant que celle de trois lettres, car chacune des trois lettres tenant une fois la premiere place, les deux autres pouront varier 2 fois. De même chaque combinaiſon de 4 lettres ſera variée 24 fois; chaque combinaiſon de 5 lettres ſera variée 120 fois; chaque combinaiſon de 5 lettres le ſera 720 fois. Et ainſi des autres. Mais nous ſuppoſons dans chacun de ces differens choix ou arrangemens, qu'une même lettre ou qu'une même choſe n'y revienne point pluſieurs fois.

X. Il faut auſſi remarquer que ſi l'on ſe contentoit de ſçavoir combien de differens ordres pouroient recevoir pluſieurs choſes differentes dont il ne faudroit retrancher aucune, comme il arrive en compoſant des anagrammes, il ſuffiroit de prendre ſeulement le dernier des produits qu'on auroit trouvé ſelon la regle qui precede celle-cy, c'eſt à dire l'un des nombres.

1.	2.	6.	24.	120.	720.	5040.	40320.	362880.	3628800.	&c.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	&c.

XI. Mais parceque le nombre de ces anagrammes ou de ces ordres eſt ordinairement exceſſif, & qu'il n'y en a fort ſouvent que tres-peu qui ſoient utiles, ce ſeroit trop ſe fatiguer ſi pour découvrir ce petit nombre, l'on prenoit la peine de les tous chercher. Car il faudroit un temps extraordinaire pour les trouver & pour les écrire. On les pouroit déterminer aſſez ſouvent avec fort peu de peine, ſi l'on apportoit un peu de ſoin à les bien examiner. En voicy un exemple.

Exemple.

L'on demande combien de fois les 8 mots qui compoſent ce vers fait à la loüange de la Tres-ſainte VIERGE MERE DE DIEU, pouroient varier de fois ſans ceſſer neanmoins de compoſer un vers hexametre.

Tot Tibi ſunt dotes VIRGO, *quot ſydera Cœlo.*

La Table precedente fait voir que ces 8 mots pouroient varier quarante mille trois cent vingt fois, de ſorte que ſi l'on vouloit écrire toutes ces variations, quand chaque page qu'on feroit d'écriture en renfermeroit cent, il en faudroit écrire neanmoins quatre cent & plus de trois pages, afin de les tous avoir, & de choiſir ceux où la meſure du vers ne ſeroit point rompuë, au lieu que cette queſtion, quoyque tres-difficile, pouroit neanmoins ſe reſoudre aſſez facilement en cette ſorte.

Cet exemple ſuppoſe la connoiſſance des regles qu'exige la Poeſie pour un vers hexametre.

Premierement comme le cinquiéme pied du vers ne peut eſtre autre qu'un dactyle, & le ſixiéme qu'un ſpondée, les ſeuls mots *ſydera* & *tibi* doivent ſervir neceſſairement pour ce pied. Or ſuppoſons que *ſydera* ſerve à former ce pied, il faudra donc qu'il occupe la ſeptiéme place, en mettant à la huitiéme un mot de deux ſyllabes autre que *tibi* qui ne peut s'y trouver; où bien à la ſixiéme, pourvû qu'on mette aux deux ſuivantes deux mots qui n'ayent chacun qu'une ſyllabe. Aprés quoy il faudra mettre ſucceſſivement *tibi* dans toutes les places qu'il peut occuper. Or eſtant compoſé de deux bréves, il ne peut occuper la premiere place non plus que la derniere ſans rompre la meſure du vers. Mettant donc *tibi* premierement à la ſeconde place, & laiſſant *ſydera cœlo* aux deux dernieres, ſi *tot* occupe la premiere, les quatre mots *Virgo , ſunt , dotes , quot*, changeront 24 fois ſelon la regle, & ſi l'on met *ſunt* au lieu de *tot*, les 4 mots *Virgo , tot , dotes , quot*, changeront 24 fois, & ſi l'on met *quot* à la premiere place, les quatre mots *Virgo , ſunt, dotes , tot ,* changeront 24 fois. Et ſi l'on met *Virgo* à la premiere place, les quatre mots *tot , ſunt , dotes , quot ,* changeront 24 fois. L'on aura donc déja 4 fois 24 changemens utiles en laiſſant *tibi* à la ſeconde place, & *ſydera cœlo* aux dernieres. Et ſi l'on met *dotes* au lieu de *cœlo*, l'on en aura encore autant: Mais ſi l'on met *Virgo* à la huitiéme place, l'on en aura encore autant excepté 24 qu'il faudra retrancher, parceque *tibi* occupant la ſeconde place, aucun mot compoſé de deux ſyllabes ne poura ſe trouver à la premiere, de même que *Virgo*, dont la derniere ſyllabe eſt longue ou bréve. Ainſi *tibi* occupant la ſeconde place, & *ſydera* la ſeptiéme, le vers poura ſans changer ſa meſure, varier ſeulement 264 fois.. 264.

Or *tibi* demeurant à la ſeconde place, ſi l'on avance *ſydera* à la ſixiéme, les deux dernieres ne peuvent eſtre occupées que par 2 mots chacun d'une ſyllabe, & la premiere ne peut l'eſtre que par *Virgo*, ou par un mot d'une ſyllabe. Suppoſant donc qu'on écrive.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.
VIRGO *tibi tot dotes , cœlo ſydera quot ſunt.*

Les trois mots *tot , dotes , cœlo ,* peuvent changer 6 fois ſelon la regle. Et ſi l'on met *Virgo* à la place de *tot*, les trois mots *Virgo , dotes , & cœlo* changeront 6 fois, *quot* & *ſunt* demeurant comme ils ſont: Mais ſi au lieu de *quot ſunt ,* l'on écrit *ſunt quot ,* l'on aura encore autant de variations que l'on en vient d'avoir, c'eſt à dire 12. Et ſi l'on met *quot* au lieu de *tot*, l'on en aura encore autant que toutes les precedentes, c'eſt à dire 24. Et ſi l'on met *ſunt* à la troiſiéme place au lieu de *quot*, l'on en aura pareillement 24. Ainſi *tibi* occupant la ſeconde place, & *ſydera* la ſixiéme, le vers poura varier 72 fois ſans changer ſa meſure. Aprés quoy *tibi* ne peut plus occuper la ſeconde place. 72. Je ſuppoſe que la meſure ne ſoit point rompuë, quoy que le ſecond pied ne ſoit point ſuivy d'une   , ou bien le premier & le troiſiéme, ainſi que l'exactitude poëtique le demande.

Enſuite ſi l'on avance *tibi* à la troiſiéme place, en remettant *ſydera cœlo* aux deux dernieres.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.
VIRGO *tot tibi ſunt dotes , quot ſydera cœlo.*

Les trois mots *ſunt , dotes quot ,* peuvent changer 6 fois, *Virgo* & *tot* demeurant où ils ſont. Mais ſi l'on écrit *tot , Virgo ,* l'on aura encore 6 changemens, ce qui fait 12 en tout. Et ſi au lieu de *tot* l'on met *ſunt ,* l'on en aura encore autant, & ſi l'on y met *quot* , encore autant, ce qui fera en tout 36 variations. Et ſi l'on met *dotes* au lieu de *Virgo*, l'on en aura encore autant, c'eſt à dire 36. Et ſi l'on met *Virgo* au lieu de *cœlo*, l'on en aura autant que toutes les precedentes, c'eſt à dire 72. Et ſi l'on met *dotes* à la même huitiéme place, l'on en aura pareillement 72. Mais ſi l'on met aux deux premieres places deux mots chacun de deux ſyllabes, il faudra neceſſairement que *Virgo* en occupe la ſeconde. Si donc *dotes Virgo* occupent les deux premieres places, les trois mots *ſunt, tot, quot*, donneront 6 changemens, & ſi l'on met *dotes* à la place de *cœlo*, l'on en aura encore autant. Ainſi *tibi* occupant la troiſiéme place, & *ſydera* la ſeptiéme, le vers poura varier 228 fois, ſans changer ſa meſure. Aprés quoy *tibi* ne peut plus occuper la troiſiéme place que *ſydera* ne ſoit avancé à la ſixiéme, auquel cas les deux dernieres ne pouront eſtre occupées chacune que par un mot d'une ſyllabe. 228.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7 8.

Si donc nous écrivons VIRGO *tot tibi dotes, cœlo ſydera quot ſunt*, les deux mots *Virgo* & *tot* peuvent changer 2 fois, le reſte demeurant où il eſt: Mais ſi l'on écrit *cœlo dotes* au lieu de *dotes cœlo*, l'on aura encore autant de changemens, ce qui fait déja 4. Et ſi l'on écrit pareillement *ſunt quot* au lieu de *quot ſunt*, l'on aura encore 4 autres changemens, ce qui fait 8 en tout. Et ſi l'on met *quot* au lieu de *tot*, l'on en aura encore autant, & ſi l'on y met *ſunt*, encore autant, ce qui fait en tout 24. Et ſi l'on met *dotes* au lieu de *Virgo*, l'on en aura pareillement 24, & ſi l'on y met *cœlo* encore 24, ce qui fait 72 en tout. Mais ſi l'on met aux deux premieres places deux mots chacun de deux ſyllabes, il faudra que *Virgo* en occupe la ſeconde. Si donc *dotes Virgo* occupent les deux premieres, *tot cœlo* changeront 2 fois, *quot ſunt* demeurant comme ils ſont, & ſi l'on écrit *ſunt quot*, l'on aura encore 2 changemens, ce qui fait déja 4. Et ſi l'on met *quot* au lieu de *tot*, l'on en aura encore autant, & ſi l'on y met *ſunt* encore autant, ce qui fait 12 en tout. Et ſi l'on met *cœlo* à la place de *dotes*, l'on en aura encore autant, ce qui fait 24. Ainſi *tibi* occupant la troiſiéme place, & *ſydera* la ſixiéme, le vers aura 72+24, ou 96 variations. Aprés quoy *tibi* ne peut plus occuper la troiſiéme place. 96.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

Nous l'avancerons donc à la quatriéme, en remettant *ſydera cœlo* aux deux dernieres, & écrivant VIRGO *tot dotes tibi ſunt, quot ſydera cœlo*. Les trois premiers mots *Virgo tot dotes* peuvent changer 6 fois, *ſunt quot* ne changeant point, & ſi l'on écrit *quot ſunt*, l'on aura 6 autres changemens, ce qui fait déja 12. Et ſi l'on met *ſunt* au lieu de *tot*, l'on en aura encore autant, & ſi l'on y met *quot* encore autant, ce qui fait 36 en tout. Et ſi l'on met *Virgo* au lieu de *cœlo*, l'on en aura pareillement 36, & ſi l'on y met *dotes*, encore 36, ce qui fait 108 en tout. Mais ſi laiſſant *Virgo* devant *tibi*, l'on met *tot, ſunt* aux deux premieres places, ces deux mots pouront donner 2 changemens, *dotes quot* demeurant à la cinquiéme & ſixiéme place, & ſi l'on écrit *quot dotes*, l'on en aura encore autant, ce qui fait déja 4. Et ſi l'on met *tot* au lieu de *quot*, l'on en aura encore 4, & ſi l'on y met

ſunt,

ſunt, encore 4, ce qui fait 12 en tout. Et ſi l'on met *cœlo* au lieu de *dotes*, l'on en aura pareillement 12, ce qui fait 24 en tout. Ainſi *tibi* occupant la quatriéme place, & *ſydera* la ſeptiéme, le vers poura varier 108+24 ou 132 132. fois. Aprés quoy *tibi* ne peut plus occuper la quatriéme place que *ſydera* ne ſoit avancé à la ſixiéme, auquel cas les deux dernieres ne pouront eſtre occupées chacune que par un mot d'une ſyllabe.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

Si nous écrivons donc VIRGO *tot dotes tibi, cœlo ſydera quot ſunt.* Les trois premiers mots recevant 6 changemens, & les deux derniers 2, l'on en aura déja 2 fois 6, c'eſt à dire 12; Et ſi l'on met *Virgo* au lieu de *cœlo*, encore autant, & ſi l'on y met *dotes*, encore autant, ce qui fait déja 36. Et ſi l'on met *quot* au lieu de *tot*, l'on en aura encore 36, & ſi l'on y met *ſunt*, encore 36, ce qui fait en tout 108 variations. Mais ſi laiſſant *Virgo* devant *tibi*, l'on écrit *cœlo dotes* aux deux premieres places, ils changeront 2 fois, & *quot ſunt* 2 fois, ce qui fait 4; & ſi l'on met *quot* au lieu de *tot*, l'on en aura encore autant, & ſi l'on y met *ſunt*, encore autant; ce qui fait 12 en tout. Ainſi *tibi* occupant la quatriéme place, & *ſydera* la ſixiéme, l'on aura 108+12, ou 120 variations. Aprés quoy *tibi* 120. ne peut plus occuper la quatriéme place.

Nous l'avancerons donc à la cinquiéme, en remettant *ſydera cœlo* aux deux dernieres, & nous écrirons 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.
quot ſunt, VIRGO *tot tibi dotes, ſydera cœlo.*
Les quatre premiers mots pouront varier 24 fois; Et ſi l'on met *Virgo* au lieu de *dotes*, l'on aura 24 autres variations; ce qui fera 48. Et ſi l'on met *Virgo* au lieu de *cœlo*, l'on en aura encore 48, & ſi l'on y met *dotes*, encore 48, ce qui fait 144. en tout. Mais ſi laiſſant *Virgo* devant *tibi*, l'on écrit *tot* à la ſixiéme place, les trois premiers mots changeront 6 fois; Et ſi l'on met *quot* au lieu de *tot*, l'on aura 6 autres changemens; Et ſi l'on y met *ſunt*, encore 6 autres, ce qui fait 18 en tout. Et ſi l'on met *cœlo* au lieu de *dotes*, l'on en aura encore 18, ce qui fait en tout 36. Ainſi le mot *tibi* demeurant à la quatriéme place, & *ſydera* à la ſeptiéme, l'on aura 144+36, ou 180 variations. Aprés quoy *tibi* ne peut plus occuper 180. la cinquiéme place que *ſydera* ne ſoit avancé à la ſixiéme.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

Si donc nous écrivons *Tot* VIRGO *laudes cœlo tibi, ſydera quot ſunt.* Les quatre premiers mots pouvant varier 24 fois, & les deux derniers 2 fois, l'on aura déja 2 fois 24, ou 48 variations. Et ſi l'on met *quot* au lieu de *tot*, encore autant; Et ſi l'on y met *quot* encore autant, ce qui fait 144 144. variations en tout. Aprés quoy *tibi* ne peut plus occuper la cinquiéme place.

Nous l'avancerons donc à la ſixiéme, en remettant *ſydera cœlo* aux deux
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.
ſuivantes, & nous écrirons *Quot, tot ſunt* VIRGO *dotes tibi, ſydera cœlo.* Les cinq premiers mots peuvent varier 120 fois ſelon les regles. Et ſi l'on met *Virgo* au lieu de *cœlo*, l'on aura pareillement 120 autres variations;

360. Et ſi l'on y met *dotes*, encore 120 ; Aprés quoy *tibi* ne peut plus occuper la ſixiéme place, que *ſydera* ne quitte la ſeptiéme, & que deux mots chacun d'une ſyllabe n'occupent les deux dernieres, & un autre mot que *ſydera* la cinquiéme. Ce qui nous oblige de nouveau en laiſſant *tibi* à la ſixiéme place, de faire occuper ſucceſſivement à *ſydera* les quatre premieres, en toutes les manieres poſſibles. Or ſi nous le mettons à la quatriéme, il faudra neceſſairement qu'un mot d'une ſyllabe occupe la cinquiéme.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.
Ecrivons donc : VIRGO *dotes, cœlo ſydera quot, tibi ſunt tot.*

Les trois premiers mots variant 6 fois, & les deux derniers 2 fois, l'on aura 2 fois 6, ou 12 variations ; Et ſi l'on met *ſunt* au lieu de *quot*, l'on en aura 12 autres, & ſi l'on y met *tot*, encore autant, ce qui fait en tout 36 variations ; Aprés quoy *ſydera* ne peut plus occuper la quatriéme place, ſi *tibi* n'occupe la ſeptiéme. 36.

Mais laiſſons encore *tibi* à la ſixiéme, & avançons *ſydera* à la troiſiéme,
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.
en écrivant : VIRGO, *cœlo ſydera quot, dotes tibi ſunt tot.*

Les deux premiers mots variant 2 fois, & les deux *quot* & *dotes* autant, donneront 2 fois 2 ou 4 variations, & les deux *ſunt* & *tot* encore autant, ce qui fait 8 en tout ; Et ſi l'on écrit *cœlo* à la place de *dotes*, l'on en aura 8 autres ; Et ſi l'on y écrit *Virgo*, encore autant, ce qui fait 24 en tout. Et ſi l'on met *ſunt* au lieu de *quot*, l'on en aura 24 autres ; Et ſi l'on y met *tot*, encore autant ; ce qui fait en tout 3 fois 24 ou 72 variations. Aprés quoy *tibi* demeurant à la ſixiéme place, *ſydera* ne peut plus occuper la troiſiéme. 72.

Nous l'avancerons donc à la ſeconde, en laiſſant *tibi* à la ſixiéme ;
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.
& nous écrirons : VIRGO, *ſydera cœlo quot, dotes tibi ſunt tot.*

Les trois mots qui ſuivent *ſydera* pouvant varier 6 fois, & les deux derniers 2 fois, donneront en tout 12 variations. Et ſi l'on met *cœlo* à la place de *Virgo*, l'on en aura encore autant, & ſi l'on y met *dotes*, encore autant ; ce qui fait en tout 3 fois 24 ou 36 variations. Et ſi l'on met *ſunt* au lieu de *quot*, l'on en aura 36 autres, & ſi l'on y met *tot* encore autant, ce qui fait 3 fois 36 ou 108 variations. Aprés quoy *tibi* occupant la ſixiéme place, *ſydera* ne peut plus occuper que la premiere. 108.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.
Si donc nous écrivons : *Sydera quot,* VIRGO, *cœlo, dotes tibi ſunt tot.*
Les 4 mots qui ſuivent *ſydera* pouvant varier 24 fois, & les deux derniers 2 fois, l'on aura déja 2 fois 24 ou 48 variations. Et ſi l'on met *ſunt* au lieu de *quot*, l'on en aura encore autant ; & ſi l'on y met *tot*, encore autant, ce qui fera en tout 3 fois 48 ou 144 variations. Aprés quoy *ſydera* ne peut plus occuper aucune place que *tibi* ne prenne la ſeptiéme, auquel cas il ne poura ſe trouver au huitiéme qu'un mot d'une ſyllabe, ny au ſixiéme que *Virgo*. 144.

Or mettant *Virgo tibi ſunt* pour la fin du vers, ſi nous laiſſons *ſydera*

au premier lieu 1. 2. 3 4. 5. 6. 7. 8.
& que nous écrivions : *Sydera quot cœlo, tot dotes* VIRGO *tibi ſunt.*
Les quatre mots qui ſuivent *ſydera* pouront varier 24 fois ; Et ſi l'on met
quot au lieu de *ſunt*, l'on aura 24 autres variations, & ſi l'on y met *tot*
encore 24, ce qui fait en tout 3 fois 24 ou 72 variations. Aprés quoy 72.
ſydera ne peut plus du tout occuper la premiere place.

Et ſi nous l'avançons à la ſeconde, aucun mot ne poura occuper la
premiere qui n'ait 2 ſyllabes. Si donc nous écrivons :
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.
Cœlo ſydera quot, tot dotes VIRGO *tibi ſunt.* Les trois mots qui ſuivent
ſydera pouront varier 6 fois. Et ſi l'on met *dotes* au lieu de *cœlo*, l'on
aura encore 6 autres variations ; ce qui fait 12 en tout. Et ſi l'on met *tot*
au lieu de *ſunt*, l'on en aura encore 12 autres, & ſi l'on y met *quot*, encore
autant ; ce qui fait en tout 3 fois 12 ou 36. Aprés quoy *ſydera* ne peut 36.
plus du tout occuper la ſeconde place.

Et ſi nous l'avançons à la troiſiéme, les deux premieres ne pouront
eſtre occupées que par deux mots qui ayent chacun une, ou bien chacun
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.
deux ſyllabes. Soit donc *Dotes, cœlo ſydera quot, tot* VIRGO *tibi ſunt.*
Les deux premiers mots variant 2 fois, & les deux qui ſuivent *ſydera* autant,
l'on aura déja 4 variations ; Et ſi l'on met *tot* au lieu de *ſunt*, l'on en aura
4 autres ; & ſi l'on y met *quot*, encore autant ; ce qui fait 12 en tout.
Et pareillement ſi l'on met *quot ſunt* aux deux premieres places, & *tot* à
la huitiéme, en écrivant *Quot ſunt ſydera cœlo, dotes* VIRGO *tibi tot*,
les deux premiers mots variant 2 fois, & les deux qui ſuivent *ſydera* autant,
l'on aura 4 variations. Et ſi l'on met *ſunt* au lieu de *tot*, l'on en aura
4 autres ; Et ſi l'on y met *quot*, encore autant, ce qui fait 12, qui jointes
aux 12 precedentes en font 24 en tout. Aprés quoy *ſydera* ne peut plus 24.
occuper la troiſiéme place.

Et ſi nous l'avançons à la quatriéme, les trois premieres ne pouront
eſtre occupées que par un mot de deux ſyllabes, & deux autres de chacun
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.
une. Ecrivons donc *Tot, quot cœlo ſydera, dotes* VIRGO *tibi ſunt.* Les
trois premiers mots pouront varier 6 fois ; & ſi l'on met *dotes* au lieu de
cœlo, l'on aura 6 autres variations, ce qui fait 12 en tout ; Et ſi l'on met
quot au lieu de *ſunt*, l'on en aura 12 autres, & ſi l'on y met *tot* encore 12
autres, ce qui fait 36 variations en tout. Aprés quoy *ſydera* ne peut plus 36.
du tout occuper la quatriéme place.

Avançons-le donc enfin à la cinquiéme place, & écrivons
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.
Tot dotes, cœlo quot ſydera, VIRGO *tibi ſunt.* Les quatre premiers mots
pouront varier 24 fois, & ſi l'on met *tot* à la place de *ſunt*, l'on aura 24
autres variations, & ſi l'on y met *tot*, encore 24, ce qui fait en tout 3 fois
24 ou 72 variations. Aprés quoy *ſydera* ny *tibi* ne peuvent plus du tout 72.
occuper aucune place. De ſorte que réüniſſant en une ſomme tous les

nombres que nous avons trouvé, cette ſomme ſera 2196. Ainſi ſans rompre la meſure du vers, on le poura varier 2196 fois. Et la queſtion eſt reſoluë.

TROISIE'ME QUESTION.

XII. Comme toutes les combinaiſons precedentes ne permettent pas qu'aucune des choſes propoſées puiſſe eſtre combinée avec elle-même, nous ſupoſerons de nouveau que cette condition ſoit encore ajoûtée à toutes celles des deux queſtions precedentes, & nous nous propoſerons à reſoudre cette nouvelle queſtion.

Déterminer le nombre de tous les choix differens que l'on peut faire d'un nombre propoſé de choſes, en les prenant non ſeulement une à une, deux à deux, trois à trois, &c. & en leur donnant tous les arrangemens dont elles ſont capables, mais encore en ſuppoſant que chacune ſoit repetée une fois, deux fois, trois fois, &c.

Premierement une ſeule lettre comme a ne peut eſtre priſe qu'une fois toute ſeule, elle ne peut l'eſtre auſſi qu'une fois en la repetant 2 fois, ny qu'une en la repetant 3 fois, &c. Car l'on n'aura que a, ou bien aa, ou bien aaa, ou bien $aaaa$, &c. ou pour abreger l'on aura ſeulement a, aa, a^3, a^4, &c. une fois chacun.

Ainſi deux lettres comme a & b ne pouront eſtre priſes que 2 fois une à une Mais ſi à chacune de ces deux lettres, l'on applique premierement a, en l'écrivant à la premiere place, on aura les deux combinaiſons differentes aa, ab. Et appliquant b en même ſorte à chacune, en la mettant au premier lieu, on aura les deux autres combinaiſons ba, bb. Aprés quoy l'on n'en peut plus trouver aucune autre Ainſi les deux lettres eſtant combinées deux à deux, ne peuvent donner que les 4 ordres aa, ab, ba, bb.

Et ſi à chacun de ces 4 ordres, on applique premierement a, en le mettant au premier lieu, on aura les 4 combinaiſons differentes a^3, aab, aba, abb. Et appliquant b en même ſorte & le mettant au premier lieu, on aura les 4 autres bab, bba, baa, b^3. Mais ſi on applique encore a & b en même ſorte, en les mettant au ſecond lieu, l'on ne trouvera aucun ordre qui ne ſoit l'un de ces 8 qu'on vient de découvrir. a^3, aab, aba, abb; bab, bba, baa, b^3.

Et ſi à chacun de ces 8 ordres differens l'on applique premierement a, en la mettant au premier lieu, l'on aura 8 combinaiſons differentes: Et appliquant b en même ſorte, en la mettant au premier lieu, l'on en aura encore 8 autres. Aprés quoy ſi l'on applique encore a ou b en même ſorte, en les mettant au ſecond ou bien au troiſiéme lieu, l'on ne trouvera aucun ordre qui ne ſoit l'un de ces 16 qu'on vient de découvrir.

$a^4, a^3b, aaba, aabb, abab, abba, abaa, ab^3; ba^3, baab, baba, babb, bbab, b^3a, bbaa, b^4$.

Et ſi l'on applique en même ſorte a & b à chacun de ces 16 ordres differens, en mettant une fois chacune à la premiere place, l'on en trouvera 32. Aprés quoy ſi a ou b ſont appliquées au ſecond, ou troiſiéme, ou quatriéme rang, l'on ne trouvera plus aucun ordre qui ne ſoit l'un des 32. Ainſi les deux lettres a & b combinées cinq à cinq, ne pouront recevoir que 32 ordres differens.

L'on trouvera en même ſorte qu'eſtant combinées ſix à ſix, elles pouront en recevoir ſeulement 64. Qu'eſtant combinées ſept à ſept, elles en recevront 2 fois autant, c'eſt à dire 128. Et ainſi de ſuite en continuant la progreſſion geometrique du nombre des lettres qui eſt 2, à ſon quarré 4.

Conſiderons pareillement les trois lettres *a, b, c*. Eſtant priſes une à une, elles ne peuvent l'eſtre que 3 fois differemment. Mais ſi à chacune de ces trois lettres, l'on applique premierement *a*, en la mettant au premier lieu, l'on trouvera les trois ordres differens *aa, ab, ac*; & ſi on applique *b* en même ſorte, on aura les trois autres *ba, bb, bc*; Et ſi l'on applique enfin *c* en même ſorte, l'on aura encore les 3 autres *ca, cb, cc*. Aprés quoy l'on n'en peut plus trouver aucune autre. Ainſi les trois lettres eſtant combinées deux à deux ne pouront recevoir que les 9 ordres differens *aa, ab, ac*; *ba, bb, bc*; *ca, cb, cc*.

Et ſi à chacun de ces 9 ordres on applique premierement *a*, en la mettant au premier lieu, & enſuite *b* en la mettant au premier lieu, & encore enſuite *c* en la mettant pareillement au premier lieu, l'on trouvera 3 fois 9 ordres differens, c'eſt à dire les 27.

a^3, *aab, aac, aba, abb, abc, aca, acb, acc*; *baa, bab, bac, bba*, b^3,
bbc, bca, bcb, bcc; *caa, cab, cac, cba, cbb, cbc, cca, ccb*, c^3.

Mais ſi on appliquoit de nouveau *a* & *b* en même ſorte, en les mettant au ſecond ou troiſiéme lieu, l'on ne trouveroit aucun ordre nouveau qui ne fuſt l'un des 27 qu'on vient de découvrir.

L'on trouvera en appliquant en même ſorte *a, b*, & *c*, à chacun de ces 27 ordres differens, qu'elles peuvent recevoir 3 fois 27 differens ordres eſtant combinées trois à trois. Aprés quoy ſi l'on applique quelqu'une de ces lettres en quelqu'autre maniere, l'on ne trouvera aucun ordre qui ne ſoit l'un de ces 81 qu'on aura trouvé. Ainſi les trois lettres eſtant combinées quatre à quatre, peuvent recevoir ſeulement 81 ordres differens.

Pareillement eſtant combinées cinq à cinq, elles en recevront 243; eſtant combinées ſix à ſix, 3 fois autant, c'eſt à dire 729. Et ainſi de ſuite, en continuant la progreſſion geometrique du nombre des lettres qui eſt 3, à ſon quarré 9.

Si l'on examine par la même methode les 4 lettres *a, b, c, d*; eſtant priſes une à une, elles pouront ſeulement l'eſtre en 4 differentes manieres; & deux à deux elles recevront ſeulement les 16 ordres,

aa, ab, ac, ad; *ba, bb, bc, bd*; *ca, cb, cc, cd*; *da, db, dc, dd*.

Et trois à trois, elles en recevront ſeulement 4 fois autant, c'eſt à dire les 64.
a^3, *aab, aac, aad, aba, abb, abc, abd, aca, acb, acc, acd, ada, adb, adc, add*;
baa, bab, bac, bad, bba, b^3, *bbc, bbd, bca, bcb, bcc, bcd, bda, bdb, bdc, bdd*;
caa, cab, cac, cad, cba, cbb, cbc, cbd, cca, ccb, c^3, *ccd, cda, cdb, cdc, cdd*;
daa, dab, dac, dad, dba, dbb, dbc dbd, dca, dcb, dcc, dcd, dda, ddb, ddc, d^3.

Et pareillement eſtant combinées quatre à quatre, elles en recevront 4 fois 64 ou 256, & ainſi de ſuite, en continuant la progreſſion geometrique du nombre des lettres, qui eſt 4, à ſon quarré 16.

De même les nombres des ordres differens des ſix lettres *a, b, c, d, e, f*, priſes une à une, ou deux à deux, ou trois à trois, &c. ſeront les termes de la progreſſion de 5 à ſon quarré 25.

Ainſi pour ſçavoir combien de fois les 10 caracteres des nombres peuvent eſtre pris differemment un à un, deux à deux &c. juſqu'à ce qu'on les ait pris dix à dix, il ne faut que prendre la ſomme des dix premiers termes de la progreſſion de 10 à 100, c'eſt à dire 11111111110. Mais tous ces ordres differens des 10 caracteres ne donneront pas des nombres. Car 0 par exemple ni 02, ni 005, ni tout autre qui commence par un ou par pluſieurs zero conſecutifs ne feront point des nombres differens de ceux qui ſeront exprimez par les ſeules chiffres qui ſuivent ces zero. Comme par exemple 024 eſt le méme que 24. 00659 le méme que 659. Et ainſi des autres.

Mais ſi l'on vouloit ſçavoir combien il ſe trouveroit de ces combinaiſons inutiles, on trouvera qu'entre les 10 premiers nombres il y en a ſeulement une, qui eſt 0; qu'entre tous ceux qui ſont compoſez de deux caracteres, il y en a 10, car 0 peut ſe trouver une fois devant chaque chiffre. Pareillement entre tous ceux qui ſont compoſez de trois chiffres, on en trouvera 100. Car 00 ſe trouvant une fois devant chacun des 10 chiffres, & 0 une fois devant chacun des nombres enfermez entre 9 & 100, l'on en aura juſtement 100, où 0 ſe trouvera 1 fois ou 2 fois ou 3 fois le premier. De ſorte qu'il y aura 100 ordres inutiles compoſez de trois chiffres. Pareillement entre tous ceux qui ſeront compoſez de 4 caracteres l'on en trouvera 1000; entre tous ceux qui ſont compoſez de 5, l'on en trouvera 10000. Et ainſi de ſuite ſelon la progreſſion de 1 à 10. De ſorte que ſi l'on oſte de la ſomme 11111111110, des dix premiers termes de la progreſſion de 10 à 100, une autre ſomme 1111111111, des dix premiers de la progreſſion de 1 à 10, le reſte 9999999999 ſera le nombre de tous les ordres differens des 10 premiers caracteres pris un à un, ou deux à deux, &c. juſqu'à ce qu'on les ait pris 10 à 10, leſquels peuvent exprimer des nombres differens. Et en effet en contant depuis 1 juſqu'à 10000000000 qui eſt le plus petit de tous les nombres compoſez de 11 chiffres, il eſt bien viſible que l'on trouvera juſtement 9999999999 nombres differens, puiſque 9999999999, qui eſt le plus grand & par conſequent le dernier de tous les nombres compoſez de 10 chiffres, eſt immediatement ſuivi par 10000000000, qui le ſurpaſſe d'une ſeule unité, & qui eſt le plus petit & par conſequent le premier de tous les nombres compoſez de 11 chiffres.

Pareillement les nombres de tous les ordres ou diſpoſitions differentes des 24 lettres priſes une à une, deux à deux, trois à trois; & ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'on les ait priſes vingt-quatre à vingt-quatre ſeront les 24 termes de la progreſſion geometrique de 24 à ſon quarré 576. Et l'on trouvera que la ſomme de ces 24 termes eſt 1391721658 11264960263919 98102100. c'eſt à dire 1391721 milliars de milliars de milliars, plus 658311264 milliars de milliars, plus 960263919 milliars, plus 398102100.

Et ce nombre immenſe eſt celuy de tous les mots utiles ou inutiles, qu'on pouroit former avec les 24 lettres ſeulement.

Cette reſolution m'a eſté communiquée par une perſonne dont j'honore extrémement le merite, & qui a beaucoup contribué à cet ouvrage par un ſçavant traitté des Elemens d'Arithmetique qu'elle avoit composé, & que j'ay inſeré dans ceux-ci.

XIII. L'on peut appercevoir une communication tres-particuliere entre ces combinaiſons, & les puiſſances. Car en cherchant tous ces differens ordres, l'on ne fait autre choſe qu'élever la ſomme des grandeurs données, (je ſuppoſe que les choſes determinées ſoient conſiderées comme autant de grandeurs,) à la ſeconde puiſſance ſi on les combine deux à deux, à la troiſiéme, ſi on les combine trois à trois. Et ainſi des autres.

Par exemple, lors que nous avons combiné a & b deux à deux, nous avons trouvé aa, ab, ba, bb. qui ſont le quarré de $a+b$. Car l'on y voit aa & bb, quarrez des deux parties a & b, plus les deux plans égaux de a par b, qui ſont ab & ba; l'ordre renverſé dans les lettres ne change rien dans la valeur des plans.

De même lors que nous avons combiné a, b, c, trois à trois, nous avons trouvé a^3, aab, aac, aba, abb, abc, aca, acb, acc, baa, bab, bac, bba, b^3, bbc, bca, bcb, bcc, caa, cab, cac, cba, cbb, cbc. cca. ccb, c^3. qui ſont le cube de $a+b+c$. Car l'on y voit les trois cubes a^3, b^3, c^3. Plus aab, aba, baa, les trois ſolides égaux de aa par b; plus abb, bab, bba, trois ſolides égaux de a par bb: Plus aac, aca, caa; abc, acb, bac, bca, cab, cba; bbc bcb, cbb, trois ſolides égaux de $aa+2ab+bb$ par c, plus acc, cac, cca, bcc, cbc, ccb, trois autres ſolides de $a+b$ par cc. Il en eſt ainſi des autres.

XIV. Cette methode ſert auſſi pour trouver les nombres d'une nouvelle eſpece de combinaiſons, qui ſervent à trouver tous les anagrames poſſibles d'un certain nombre de lettres, lors qu'une ou pluſieurs ſont repetées plus d'une fois. Surquoy le Pere Taquet parle ainſi.

Que ſi dans le nombre donné des choſes quelques-unes ſont ſembla- «
bles, c'eſt à dire les mémes, comme ſi l'on donnoit ce mot *Ignatius*, qui «
renferme 8 lettres, parmy leſquelles il s'en trouve deux qui ſont les mê- «
mes, c'eſt à dire *I* & *I*, le nombre des permutations ſe trouvera par cet- «
te regle du Pere Kircher. «

Le nombre des permutations du tout ſoit diviſé par le nombre des «
permutations que peuvent recevoir les choſes ſemblables, l'expoſant don- «
nera ce qu'on cherche. «

Les lettres de ce mot *Ignatius*, ſi elles eſtoient toutes differentes, elles «
recevroient 40320 changemens, il y a deux lettres ſemblables, & deux «
reçoivent 2 changemens. Ainſi 40320 eſtant diviſé par 2, l'expoſant «
20160 donnera tous les ordres poſſibles des 8 lettres, qui compoſent le mot «
Ignatius. «

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
1.	2.	6.	24.	120.	720.	5040.	40320.	362880.	3628800.

Or ſi l'on donnoit les lettres *aabbcc*, il y a ſix lettres, ſi elles eſtoient toutes differentes, elles donneroient 720 changemens, mais il y a 2 lettres _a_ & _a_, plus 2 autres, _b_ & _b_, plus encore 2 autres _c_ & _c_, qui ſont les mêmes. Si donc le nombre des permutations des lettres ſemblables eſt 2+2+2, c'eſt à dire _6_, diviſant 720 par _6_, l'expoſant 120 ſera le nombre de toutes les permutations poſſibles des lettres _aabbcc_. Mais ſi l'on veut que le nombre des permutations ſoit _9_ à cauſe que les lettres ſemblables _a_, _b_, & _c_ reçoivent les _9_ ordes _aa_, _ab_, _ac_, _ba_, _bb_, _bc_, _ca_, _cb_, _cc_, diviſant 720 par _9_, l'expoſant 80 ſera le nombre de tous les ordres ou anagrammes differens des lettres _aabbcc_. Cependant ni _6_ ni _9_ ne peuvent ſervir pour trouver le nombre des permutations ou des ordres differens des lettres qui ſe trouvent dans _aabbcc_. car ce nombre eſt 90. de ſorte que la regle que le Pere Taquet rapporte ne peut ſervir generalement, mais ſeulement dans quelques rencontres, comme lors qu'une ſeule lettre eſt repetée pluſieurs fois. En voici une qui poura generalement ſervir pour toutes ces ſortes de combinaiſons.

REGLE.

XV. On cherche chaque nombre des permutations que pouroient recevoir chacune des choſes ſemblables ſelon le nombre de leur multitude, ſi elles eſtoient toutes differentes. On multiplie enſuite le premier nombre trouvé par le ſecond, & le produit par le troiſiéme, & le nouveau produit par le quatriéme. &c. Aprés quoy l'on diviſe le nombre total des permutations par le dernier des produits trouvez. Et l'expoſant eſt le nombre qu'on cherche.

Exemple.

Pour trouver toutes les permutations des lettres _aabbcc_, je prens 2 pour les deux lettres _a_ & _a_, & 2 pour les deux _b_ & _b_, & encore 2 pour les deux _c_ & _c_. enſuite je multiplie 2 par 2, & le produit 4 encore par 2, le ſolide que je trouve eſt 8, par lequel 720 nombre des permutations de ſix choſes differentes, eſtant diviſé, l'expoſant _9_0 eſt le nombre de toutes les permutations des lettres propoſées. Et ces permutations ſe trouvent ainſi.

1°. On prend chaque lettre, & on luy applique une fois chacune en l'écrivant au premier lieu, ce qui donne les _9_ ordres differens _aa_, _ab_, _ac_; _ba_, _bb_, _bc_; _ca_, _cb_, _cc_. L'on applique en même ſorte chaque lettre à chacun de ces ordres, excepté qu'aucune ne pouvant revenir que 2 fois, elles ne doivent point eſtre appliquées aux ordres où elles ſont déja 2 fois. Et cela donne les 24 ordres * _aab_, _aac_, _aba_, _abb_, _abc_, _aca_, _acb_, _acc_; _baa_, _bab_, _bac_, _bba_, * _bbc_, _bca_, _bcb_, _bcc_. _caa_, _cab_, _cac_, _cba_, _cbb_, _cbc_, _cca_, _ccb_, *.

L'on applique en meſme ſorte chaque lettre à chacun de ces ordres où elle n'eſt point 2 fois, ce qui donne 54 ordres nouveaux compoſez chacun de 4 lettres, ſur leſquels operant en méme ſorte, l'on en trouvera 90 compoſez chacun de cinq lettres; ſur leſquels operant encore en méme ſorte, l'on en trouvera enfin _9_0 compoſez chacun de ſix lettres, deſquels 30 commenceront par _a_, 30 autres par _b_, & les 30 autres par _c_; les

30 qui commencent par *a* ſont ceux-ci.

aabbcc, aabcbc, abccb, aacbbc, aacbcb. aaccbb. ababcc. abacbc, abaccb, abbacc, abbcac, abbcca, abcabc, abcacb, abcbac, abcbca, abccab, abccba, acabbc, acabcb, acacbb, acbabc, acbacb, acbbac, acbbca, acbcab, acbcba, accabb, accbab, accbba.

Il ne me reſte plus icy qu'à dire quelque choſe d'une autre eſpece de combinaiſons que l'on fait, lors qu'une ou pluſieurs choſes ſont repetées pluſieurs fois, & que l'ordre n'eſt point conſideré, ainſi qu'il arrive dans les diviſeurs des nombres, par exemple *aab*, ou *aba*, ou *baa*, n'ont chacun qu'une méme valeur, ſi on les conſidere comme des nombres. XVI.

Or une lettre ſeule comme *a* ne pourra eſtre priſe qu'autant de fois qu'on luy aura accordé de degrez, ſi l'on écrit par exemple le nombre *aaa* ou a^3, l'on trouvera qu'il ne peut avoir que les trois diviſeurs *a*, *aa*, a^3, autres que l'unité, dont je ſuppoſe auſſi que le nombre *a* ſoit different.

Mais ſi nous joignons pluſieurs lettres comme a^3bb, l'on prendra premierement pour *a*, les trois choix ou les trois diviſeurs *a*, *aa*, a^3, c'eſt à dire autant que la lettre *a* eſt repetée de fois. Enſuite prenant 1 fois *b* toute ſeule, & l'appliquant une fois à chacun des trois choix, l'on aura les 4 autres *b*, *ab*, *aab*, a^3b, à chacun deſquels appliquant *b* en même ſorte l'on en aura encore 4 autres *bb*, *abb*, *aabb*, a^3bb. De ſorte que *b* qui eſt repetée 2 fois, en fait trouver 2 fois une de plus que la ſeule lettre *a*, c'eſt à dire 8, & ainſi l'on en trouve 11 en tout; & 12 ſi l'on y ajoûte l'unité au moins en ſuppoſant que chaque nombre *a* & *b* en ſoit different, ce que j'entens dans tous les cas ſemblables.

a, *aa*, a^3. *b*, *ab*, *aab*, a^3b, *bb*, *abb*, *aabb*, a^3bb.

Et ſi nous avions a^3bbccd, en prenant *c* une fois toute ſeule, & l'appliquant auſſi 1 fois à chacun des diviſeurs precedens, nous en trouverons 1 davantage, c'eſt à dire les 12.

c, *ac*, *aac*, a^3c, *bc*, *abc*, *aabc*, a^3bc, *bbc*, *abbc*, *aabbc*, a^3bbc.

à chacun deſquels appliquant encore 1 fois *c*, à cauſe qu'elle eſt repetée 2 fois, l'on aura les 12 autres diviſeurs.

cc, *acc*, *aacc*, a^3cc, *bcc* *abcc*, *aabcc*, a^3bcc, *bbcc*, *abbcc*, *aabbcc*, a^3bbcc.

ce qui fait en tout, 11 + 2 fois 12, c'eſt à dire 35, aprés quoy prenant 1 fois *d* toute ſeule, & l'appliquant ſeulement 1 fois à chacun des 35 choix ou des diviſeurs precedens, l'on en trouvera de nouveau 1 fois un davantage, c'eſt à dire 36, qui ſont.

ad, *aad*, a^3d, *bd*, *abd*, *aabd*, a^3bd, *bbd*, *abbd*, *aabbd*, a^3bbd.
cd, *acd*, *aacd*, a^3cd, *bcd*, *abcd*, *aabcd*, a^3bcd, *bbcd*, *abbcd*, *aabbcd*, a^3bbcd.
ccd, *accd*, *aaccd*, a^3ccd, *bccd* *abccd*, *aabccd*, a^3bccd, *bbccd*, *abbccd*, *aabbccd*, a^3bbccd,

De ſorte que le nombre a^3bbccd aura 35 + 36, ou 71 diviſeurs, & 72 ſi l'on y joint encore l'unité.

De ſorte que pour trouver le nombre de ces ſortes de choix, ou de diviſeurs, l'on prendra premierement celuy des dimenſions de la premiere lettre, on multipliera par ce nombre augmenté de l'unité, celuy des dimenſions de la ſeconde; l'on réduira en une ſomme le produit trouvé & le nombre XVII.

des dimenſions de la premiere, & l'on multipliera cette ſomme augmentée de l'unité par le nombre des dimenſions de la troiſiéme ; l'on réduira en une ſomme le produit nouveau, & la ſomme precedente, & l'on multipliera leur ſomme totale augmentée de l'unité par le nombre des dimenſions de la quatriéme, & ainſi de ſuite à l'infiny. Aprés quoy réduiſant en une ſomme le nombre des dimenſions de la premiere lettre, & tous les produits qu'on aura trouvé, la ſomme totale augmentée ſi l'on veut de l'unité, marquera le nombre cherché de tous les choix ou diviſeurs

Ainſi pour ſçavoir combien de diviſeurs peut avoir le nombre $a^5b^4c^3dd$, l'on prend 5 pour les 5 dimenſions de la lettre *a*, l'on augmente ce nombre 5 de l'unité, & l'on multiplie 6 par 4 nombre des dimenſions de *b*, le produit eſt 24, auquel on ajoûte le nombre 5 des dimenſions de la lettre *a*, la ſomme eſt 29, l'on augmente cette ſomme de l'unité, & l'on multiplie 30 par 3 nombre des dimenſions de *c*, le produit eſt 90, auquel on ajoûte la ſomme 29, la ſomme totale eſt donc 119, que l'on augmente de l'unité, & l'on multiplie 120 par 2 nombre des dimenſions de *d*, le produit eſt 240. Aprés quoy l'on réduit en une ſomme 5, 24, 90, & 240, & la ſomme totale augmentée de l'unité, c'eſt à dire 360, eſt le nombre de tous les diviſeurs que peut avoir $a^5b^4c^3dd$, pourveu toutefois que chaque nombre *a*, *b*, *c*, & *d*, ſoit un nombre premier autre que l'unité ; car c'eſt ainſi qu'on le doit entendre.

De ſorte, comme dit Schooten, que pour ſçavoir combien le nombre 15876000 peut recevoir de diviſeurs, l'on cherche en premier lieu de quels nombres premiers il eſt compoſé, en le diviſant par tous les nombres premiers 2, 3, 5, &c. juſques à ce qu'on ſoit arrivé à l'unité. Et trouvant, comme on le voit un peu plus bas, qu'il eſt formé par le produit de tous les 14 nombres premiers 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 7, 7, on le peut marquer ainſi $2^5 3^4 5^3 7^2$. De ſorte qu'il convient entierement avec le nombre precedent a^5b^4cdd. Ainſi l'on conclud que ce nombre a 359 parties aliquotes & entieres, & 360 diviſeurs. Il en eſt ainſi des autres.

15876000 (7938000 (3969000 (1984500 (992250 (496125
2 2 2 2 2

496125 (165375 (55125 (18375 (6125 (1225 (245 (49 (7 (1
3 3 3 3 5 5 5 7 7

ELEMENS DES MATHEMATIQUES.

LIVRE TROISIE'ME.

DE LA COMPOSITION DES EGALITEZ, ET DE LEUR RESOLUTION EN GENERAL.

I. LES égalitez ſimples ſont les parties qui compoſent les égalitez compoſées. Il y a trois ſortes de ces égalitez ſimples. Les premieres ſont celles où la valeur de l'inconnuë, qu'on appelle auſſi *racine* de l'égalité, eſt une grandeur vraye ou poſitive. Les ſecondes celles dont les racines ſont fauſſes, c'eſt à dire où la valeur de l'inconnuë eſt une grandeur fauſſe ou negative. Et les troiſiémes enfin, ſont celles dont les racines ne peuvent eſtre ny vrayes ny fauſſes, mais ſeulement imaginaires, parcequ'elles renferment quelque contradiction.

II. Cette contradiction ſe reconnoît, lorſque l'on ſuppoſe pour valeur de l'inconnuë la racine d'une grandeur negative, comme $\sqrt{-a}$. Car une telle racine ne peut eſtre qu'imaginaire, puiſque ſi on là conçoît comme une grandeur, on la concevra neceſſairement comme poſitive, ou bien comme negative, il n'y a point de milieu entre deux que zero. Or ſoit que l'on conſidere cette racine comme eſtant poſitive, ſoit qu'on la conſidere comme eſtant negative, ſon produit ſera neceſſairement poſitif *par I. 88. de la premiere Partie*. L'on pretend donc une contradiction, ſi l'on pretend concevoir cette racine ſuppoſée, comme une eſpece de grandeur.

III. Nous entendrons deſormais par égalitez ſimples celles où l'inconnuë n'a qu'une dimenſion ſimple ou lineaire, & dont les deux membres ſont diſpoſez en telle ſorte qu'elle ſoit égale à zero. Par exemple ſi nous avons l'égalité $z=2$, nous retrancherons 2 de part & d'autre, ce qui donnera l'égalité

$z-2=0$, que nous appellerons une égalité ſimple.

Et pareillement par égalitez compoſées nous entendrons ordinairement celles dont l'inconnuë a pluſieurs degrez, & qu'on rend égales à zero par la tranſpoſition accoûtumée, comme ſi nous avions $zz=5z-6$, en retranchant $5z-6$ de part & d'autre, nous aurons l'égalité compoſée $zz-5z+6=0$.

IV. Comme il eſt clair que le produit de zero par zero ne peut valoir que zero, il eſt clair auſſi que le produit de deux des égalitez ſimples dont nous venons de parler, en fera une compoſée qui ne vaudra pareillement que zero. Soit par exemple $z-2=0$, & $z-3=0$, leur produit donnera l'égalité compoſée $zz-5z+6=0$.

V. Il eſt contre l'ordre pour connoître une choſe ſimple de la rendre compoſée. Il faut au contraire reſoudre ce qui eſt compoſé en toutes ſes differentes parties, & les ayant bien examinées ſeparément, l'on jugera avec plus d'ordre & de lumiere du rapport qu'elles ont entr'elles, & de la nature du tout qu'elles compoſent. Il ne faut pourtant pas s'imaginer que j'agiſſe contre cette regle, ſi je prens des grandeurs ſimples & connuës pour former des touts par leurs produits plus compoſez & comme inconnus. Ce n'eſt pas mon deſſein d'apprendre à rechercher dans cette compoſition, ce qui m'eſtoit déja connu dans ſes parties ſimples. Mais c'eſt afin qu'ayant bien examiné comment ces produits ſe forment, je puiſſe apprendre methodiquement à en reſoudre de ſemblables.

Et pour commencer cette recherche, ſuppoſons que l'on connoiſſe ces deux égalitez ſimples $z=2$, & $z=3$, ou bien $z-2=0$, & $z-3=0$. Si je multiplie l'une par l'autre, leur produit donnera l'égalité compoſée $zz-5z+6=0$, qui me ſeroit inconnuë, ſi je ne ſçavois pas que je l'ay formée du produit de $z-$ chacun des deux nombres 2 & 3.

VI. Ces ſortes de grandeurs, comme 2 & 3, qui ſont égales à l'inconnuë z, ſont appellées *racines* de l'égalité. Si ces racines ſont poſitives, on dit que ce ſont des racines *vrayes*, & ſi elles ſont negatives, qu'elles ſont des racines *fauſſes*.

VII. Les parties d'une égalité, où l'inconnuë a differens degrez, en ſont appellées *les termes*. Ainſi dans l'égalité $zz-5z+6=0$, les trois parties zz, $-5z$, & $+6$, en ſont appellées les trois termes. Le premier terme zz renferme deux degrez de l'inconnuë z, le ſecond terme n'en renferme qu'un, & le troiſiéme n'en renferme point du tout, puiſque l'inconnuë ne s'y trouve point.

Je ſuppoſe encore $z-4=0$. Si par cette égalité ſimple je multiplie la precedente $zz-5z+6=0$, le produit donnera l'égalité compoſée $z^3-9zz+26z-24=0$, qui aura quatre termes & trois racines, c'eſt à dire les trois valeurs de l'inconnuë 2, 3, & 4.

Je ſuppoſe de nouveau $z=-5$, ou bien ajoûtant 5 de part & d'autre, $z+5=0$, c'eſt à dire z égale à la grandeur fauſſe -5, ou z moins -5 égale à zero, ce qui eſt le même. Si je multiplie l'égalité precedente $z^3-9zz+26z-24=0$ par cette égalité ſimple $z+5=0$, le produit donnera l'égalité encore plus compoſée $z^4 - 4z^3 - 19zz + 160z - 120 = 0$, & cette égalité aura cinq termes, & trois racines vrayes 1, 2, & 3, avec une fauſſe -5.

Or je connois ſeulement ces racines, parceque j'ay formé moy-même ces produits. Mais ſi l'on m'euſt d'abord propoſé cette même égalité $z^4 - 4z^3 - 19zz + 160z - 120 = 0$, & que l'on m'en euſt demandé les racines, ſans que j'euſſe auparavant examiné comment elle a eſté produite, je n'aurois pas aiſément ſatisfait à cette demande, il faut donc chercher ce qui poura me conduire à ces ſortes de connoiſſances.

VIII. Et premierement j'apprens en general de ces formations que la ſomme d'une égalité compoſée qui ne vaut que zero, & qui vient du produit de quelques ſimples égales à ce même zero, contient auſſi quelques racines, & qu'elle peut toûjours eſtre diviſée par chacune de ces égalitez ſimples, c'eſt à dire par z moins la valeur de l'une des vrayes racines, ou plus la valeur de l'une des fauſſes. Et une telle diviſion rend cette égalité d'autant moins compoſée, & par conſequent plus facile à reſoudre. Et l'on aura la reſolution entiere de ces égalitez, lorſqu'on aura trouvé toutes les ſimples qui les compoſent. Car alors tout ce qui eſtoit enveloppé & inconnu, ſera développé & connu par une concluſion immediate.

IX. Mais ſi une égalité compoſée, & que l'on ſuppoſe égale à zero, ne peut eſtre diviſée par quelqu'autre plus ſimple qu'elle égale à ce même zero, c'eſt une marque qu'elle n'a pû en eſtre compoſée. Et ſi abſolument elle ne peut eſtre diviſée par aucune, elle ne peut eſtre le produit d'aucune. Et pour la reſolution de ces égalitez compoſées, elle ſatisfait aux Problemes compoſez qu'elles repreſentent.

X. Si ces Problemes compoſez ſont tels que l'on puiſſe réduire au ſecond degré les égalitez qui les repreſentent, on les appelle des *Problemes plans* ou *de deux degrez*.

XI. Et ſi les égalitez qui repreſentent ces Problemes peuvent eſtre ſeulement réduites au troiſiéme degré, on les appelle *des Problemes ſolides* ou *de trois degrez*.

XII. Et ſi elles peuvent eſtre ſeulement réduites au quatriéme degré, les Problemes ſeront appellez *ſurſolides* ou *de quatre degrez*.

XIII. Et ſi elles peuvent l'eſtre ſeulement au cinquiéme, nous dirons que les Problemes ſont *du cinquiéme degré*, &c.

AVERTISSEMENT.

Mais il ne faut pas s'imaginer que les égalitez qui paſſent le troiſiéme degré, renferment pour cela des grandeurs dont les dimenſions puiſſent eſtre par elles-mêmes autres que lineaires, planes, ou ſolides. Les autres dimenſions ne ſont point dans la nature. Il n'y a même que celle des ſolides qui ſoit veritable & réelle indépendamment de noſtre connoiſſance, car nous conſiderons ſeulement les autres dimenſions par rapport à noſtre eſprit, qui meſure par elles les rapports que des grandeurs peuvent avoir les unes avec les autres, ou bien les difficultez qu'il a d'appercevoir par *quelles grandeurs connuës il poura ſatisfaire à un Probleme propoſé. Il tâche par ces dimenſions de faire deſcendre juſqu'à luy comme par autant de degrez, la connoiſſance de ces grandeurs qu'il deſire appercevoir.*

AXIOME,

QUI EST LE PRINCIPE DES E'GALITEZ DE DEUX DEGREZ.

XIV. Deux grandeurs eſtant données le quarré de celle des deux que l'on voudra moins ce même quarré moins encore le plan des deux grandeurs, plus le même plan, eſt égale à zero.

XV. *Expreſſion de cet Axiome.* Pour donner une expreſſion abbregée de cet Axiome, nous ſuppoſerons une inconnuë, qui pouvant eſtre priſe pour l'une ou pour l'autre des deux grandeurs, marque cette mutuation reciproque qu'elles font entr'elles, & ſerve à exprimer l'idée que l'Axiome renferme.

Par exemple, ſi les deux grandeurs ſont a & b, 1°. au lieu de dire le quarré de a ou le quarré de b, nous écrirons ſeulement zz, le quarré d'une inconnuë comme z, qui convient autant à la grandeur a qu'à la grandeur b, parceque nous ſuppoſons que z vaut a ou b, & par conſequent zz le quarré de a ou le quarré de b.

2°. Au lieu de dire moins le méme quarré de a ou moins le méme quarré de b, moins encore le plan de l'une par l'autre, nous écrirons ſimplement $-az-bz$, c'eſt à dire moins le produit de la méme inconnuë z par les deux grandeurs a & b. Car z eſtant priſe pour l'une des deux, il n'importe laquelle, & multipliée par toutes les deux, elle le ſera neceſſairement par ſoy-méme, ce qui donnera ſon quarré, elle ſera auſſi multipliée par l'autre, ce qui fera le plan des deux, ainſi $-az-bz$ vaudra également moins le quarré de a ou moins le quarré de b, moins encore le plan de a par b. Et tout ce long diſcours ſe trouvera exprimé en écrivant ſimplement $-az-bz$.

3°. Et enfin pour la derniere partie, comme elle n'eſt qu'un plan des deux a & b, l'on prendra ab qui eſt tout connu. Et décrivant ces parties en une ſomme, nous aurons ſelon l'Axiome $zz-az-bz+ab=0$. Et dans cette égalité, z ſera une expreſſion ſenſible qui marquera également l'une ou l'autre des deux grandeurs a & b, il n'importe laquelle.

XVI. Or ſi l'on multiplie les deux égalitez ſimples $z-a=0$, & $z-b=0$, l'une par l'autre, leur produit donnera l'égalité $zz-az-bz+ab=0$. qui eſt la méme que la precedente. D'où il eſt clair que ſes deux racines a & b ſont telles que tout le rapport d'égalité exprimé dans l'Axiome, ou dans l'égalité qui le repreſente, peut convenir également à chacune d'elles. Ce qu'on peut voir encore ſenſiblement. Car ſi par toute l'égalité, l'on ſubſtituë a au lieu de z qui luy eſt égale, l'égalité $zz-az-bz+ab=0$, ſera $aa-aa-ba+ba=0$. Et ſi l'on y ſubſtituë b au lieu de z, elle ſera $bb-ab-bb+ab=0$, où l'on voit ſenſiblement que tous les plans ſe détruiſent par des ſignes contraires, & qu'ainſi le tout ne peut rien donner que zero.

XVII. Dans chaque égalité, toutes ſes parties connuës multipliées par l'inconnuë de méme degré, ne paſſent que pour un de ſes termes; Par exemple dans l'égalité $zz-az-bz+ab=0$, les deux parties connuës a & b multipliées par la méme inconnuë z ne font qu'un de ſes termes. C'eſt pour cela qu'il eſt à propos de les écrire ainſi l'une ſur l'autre $\begin{array}{l}-az\\-bz\end{array}$ dans l'égalité

$$\begin{array}{llll} zz & -az & +ab & =0. \\ & -bz & & \end{array}$$

De méme dans $z^3-azz-bzz-czz+abz+acz+bcz+-acd-bcd=0$ les grandeurs connuës a, b. & c multipliées par le méme quarré zz ne font qu'un terme, $+ab+ac+bc$ par z en font un autre, & les grandeurs toutes connuës $-acd-bcd$ qui ne ſont multipliées par aucun degré de l'inconnuë ne font auſſi qu'un terme, & l'égalité ſe range ainſi

$$\begin{array}{lllll} z^3 & -azz & +abz & -acd & =0. \\ & -bzz & +acz & -bcd & \\ & -czz & +bcz & & \end{array}$$

On fera le méme en toute autre égalité.

XVIII. Lors qu'un produit ſera conſideré comme plan, nous dirons deſormais que ſes racines ſont *multipliées deux à deux*, s'il eſt ſolide *trois à trois*. &c.

XIX. Lors qu'ayant un nombre de racines données, on les multipliera par les regles de combinaiſons, en autant de manieres differentes qu'elles peuvent l'eſtre dans un degré donné, nous dirons que ces racines ſont *alternativement multipliées*.

Par exemple, les quatres racines a, b, c, d, eſtant multipliées en autant de manieres differentes qu'elles peuvent l'eſtre au ſecond degré ou deux à deux, donneront les ſix plans ab, ac, ad bc, bd, cd. Et nous dirons que ces ſix plans ſont les quatres racines a, b, c, d, alternativement multipliées deux à deux. Je ne conte pas aa ou bb pour une nouvelle maniere, car a & a, ni b & b ne ſont pas des racines differentes, ou que l'on ait données pluſieurs fois chacune. Car ſi l'on avoit donné pour racines a, a, b, c, parceque la méme a ſeroit donnée 2 fois, je multiplierois a par a & 2 fois a par b, & par c, ce qui donneroit les ſix plans aa, ab, ab, ac, ac bc, dont toutefois il n'y en a que quatre qui ſoient entierement differens. Je ne conte pas auſſi ab & ba pour deux manieres differentes, car le produit ab eſt le méme que ba. L'ordre ſeul en eſt changé, & je ne conſidere point icy le changement de l'ordre.

De méme les quatres racines a. b, c, d. pouront eſtre alternativement multipliées quatre fois au degré ſolide, ou trois à trois; car l'on poura prendre abc, abd, acd bcd.

Mais ces quatre racines ne pouroient eſtre alternativement multipliées qu'une fois au degré ſurſolide, ou quatre à quatre. Car elles ne peuvent donner que le ſurſolide $abcd$. Il en eſt ainſi des autres.

AXIOME,

QUI EST LE PRINCIPE DES E'GALITEZ DE TROIS DEGREZ.

XX. Trois grandeurs eſtant données, le cube de celle des trois que l'on voudra, moins ce méme cube, moins encore deux ſolides faits du quarré de ſa racine par chacune des deux autres grandeurs ; plus ces deux mémes ſolides, plus encore un ſolide des trois grandeurs ; moins ce méme ſolide, ſera toûjours égal à zero.

XXI. Pour donner une expreſſion abregée de cet Axiome, nous ſuppoſerons, comme on a fait pour le ſecond degré, une inconnuë z qui pouvant eſtre également priſe pour l'une ou pour l'autre des trois grandeurs connuës, que j'appelle a, b, & c, marque cette mutuation reciproque qu'elles font entr'elles, & ſerve à exprimer l'idée que l'axiome renferme.

Expreſſion de l'Axiome.

Car 1°. au lieu de dire ou d'écrire le cube de a, ou le cube de b, ou le cube de c, nous dirons ou bien nous écrirons ſeulement z^3.

2°. Au lieu de dire moins le méme cube moins encore deux ſolides faits du quarré de ſa racine par chacune des deux autres grandeurs, nous écrirons $-azz-bzz-czz$, c'eſt à dire moins le quarré de zz par toutes les racines a, b & c. Car z eſtant priſe pour l'une des trois, & ſon quarré multiplié par toutes trois, il le ſera neceſſairement par ſa racine, ce qui donnera ſon cube, il le ſera auſſi par les deux autres grandeurs ce qui donnera deux ſolides faits du quarré zz l'un par l'une des deux grandeurs qui reſtent, & l'autre par l'autre.

3°. Nous prendrons pour la troiſiéme partie de l'Axiome la racine z multipliée par les trois plans des racines alternativement multipliées, qui ſont ab, ac, bc; ce qui donnera les 3 ſolides abz, acz, bcz, qui contiendront 1°. deux ſolides faits chacun de zz quarré de z par chacune des deux autres racines. Car cette racine z eſt multipliée par les trois plans des racines alternativement multipliées deux à deux, à cauſe que chaque racine eſt deux fois diſtribuée dans les trois plans ab, ac, bc, cette z deux fois multipliée par ſoy-meſme donnera deux fois ſon quarré. Or ce quarré eſt encore multiplié par chacune des deux autres racines ; Cela fait donc deux ſolides compoſez chacun du quarré de z par chaque autre des racines. 2°. Et parceque z eſt encore multiplié par le plan des deux autres racines, on aura le ſolide des trois grandeurs.

4°. Et enfin pour la derniere partie de l'Axiome, je prendray $-abc$, c'eſt à dire moins le ſolide des trois grandeurs qui m'eſt tout connu. Et décrivant la ſomme de toutes ces parties ſelon l'ordre de l'Axiome, & les rengeant à l'ordinaire, nous aurons l'égalité de trois degrez

$$\begin{array}{llll} z^3 & -azz & +abz & -abc = 0. \\ & -bzz & +acz & \\ & -czz & +bcz & \end{array}$$

XXII. Et cette égalité eſt la méme que celle qu'on auroit formée du produit de l'égalité $\begin{array}{l} zz - az + ab = 0, \\ \quad\; - bz \end{array}$ par la ſimple $z - c = 0$, ou ce qui eſt la méme choſe, du produit des trois ſimples $z - a = 0$, $z - b = 0$, & $z - c = 0$.

D'où

XXIII. D'où il eſt clair que ſes trois racines a, b, & c, ſont telles que tout le rapport exprimé dans l'Axiome peut également convenir à chacune; ce qu'on verra ſenſiblement, ſi par toute l'égalité

$$\begin{array}{llll} z^3 & -azz & +abz & -abc=0 \\ & -bzz & +acz & \\ & -czz & +bcz & \end{array}$$

, l'on met ſucceſſivement a, ou b, ou c, au lieu de z qui eſt la valeur de chacune, car l'on aura

$$\begin{array}{llll} a^3 & -a^3 & +aab & -abc=0, \\ & -aab & +aac & \\ & -aac & +abc & \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{llll} b^3 & -abb & +abb & -abc=0, \\ & -b^3 & +abc & \\ & -bbc & +bbc & \end{array} \quad \text{ou}$$

$$\begin{array}{llll} c^3 & -acc & +abc & -abc=0 \\ & -bcc & +acc & \\ & -c^3 & +bcc & \end{array}$$

dans chacune deſquelles tous les ſolides ſe détruiſent mutuellement par des ſignes contraires.

AXIOME,

QUI EST LE PRINCIPE DES ÉGALITEZ
DE QUATRE DEGREZ.

XXIV. Quatre grandeurs eſtant données, le quarré de quarré de celle qu'on voudra; moins la même puiſſance, moins encore trois ſurſolides faits chacun du cube de ſa racine, par chacune des trois autres grandeurs; plus ces trois mêmes ſurſolides, plus encore trois autres ſurſolides faits chacun du quarré de ſa racine par chacun des trois plans des trois autres grandeurs alternativement multipliées deux à deux; moins ces trois mémes ſurſolides, moins encore le ſurſolide des quatre grandeurs; plus ce même ſurſolide ſera toûjours égal à zero.

XXV. *Expreſſion de l'Axiome.* Les quatre grandeurs a, b, c, d, eſtant données, comme dans les Axiomes precedens, j'appelle z telle de ces quatre grandeurs que l'on voudra, & j'écris; 1°. z^4 pour ſon quarré de quarré; 2°. $-az^3-bz^3-cz^3-dz^3$ pour la ſeconde partie de l'Axiome; 3°. $+abzz+aczz$ $adzz+bczz+bdzz+cdzz$ pour la troiſiéme partie; 4°. $-abcz-abdz-acdz-bcdz$ pour la quatriéme; 5°. Et enfin $+abcd$ pour la derniere, ce qui fait l'égalité

$$\begin{array}{lllll} z^4 & -az^3 & +abzz & -abcz & +abcd=0. \\ & -bz^3 & +aczz & -abdz & \\ & -cz^3 & +adzz & -acdz & \\ & -dz^3 & +bczz & -bcdz & \\ & & +bdzz & & \\ & & +cdzz & & \end{array}$$

XXVI. Et cette égalité eſt la même que celle qu'on auroit formé du produit des quatre ſimples $z-a=0$, $z-b=0$, $z-c=0$, $z-d=0$. Car le produit des deux premieres eſt

$$\begin{array}{lll} zz & -az & +ab=0, \\ & -bz & \end{array}$$

& celuy des deux autres eſt

$$\begin{array}{lll} zz & -cz & +cd=0; \\ & -dz & \end{array}$$

Et chacun de ces deux produits eſt une égalité de deux degrez, qui eſtant multiplié par l'autre, donnera l'égalité precedente z^4, &c.

XXVII. De ſorte que tout le rapport d'égalité exprimé dans l'Axiome, ou dans cette egalité qui le repreſente, peut également convenir à chacune de ſes racines. Ce qu'on verra ſenſiblement, ſi par toute l'egalité l'on met a, ou b, ou c, ou d, au lieu de z qui eſt la valeur de chacune. Car par exemple y mettant a, ou b, l'on aura

$$\begin{array}{lcl} a^4 - a^4 + a^3b - aabc + abcd = 0, & \text{ou bien} & b^4 - ab^3 + ab^3 - abbc + abcd = 0. \\ \quad - a^3b + a^3c - aabd & & \quad - b^4 + abbc - abbd \\ \quad - a^3c + a^3d - aacd & & \quad - b^3 + abbd - abcd \\ \quad - a^3d + aabc - abcd & & \quad - b^3d + b^3c - bbcd \\ \qquad\quad + aabd & & \qquad\quad + b^3d \\ \qquad\quad + aacd & & \qquad\quad + bbcd \end{array}$$

dans chacune deſquelles tous les ſurſolides ſe détruiſent mutuellement les uns les autres par des ſignes contraires.

Pour operer plus facilement dans les egalitez, l'on écrit une ſeule fois dans chacun de leurs termes le degré de l'inconnuë, qui multiplie toutes les grandeurs que l'on y connoît. Par exemple au lieu de

$$\begin{array}{lcl} & & z^3 - azz + abz - abc = 0, \\ \text{l'on écrit } z^3 - azz + abz - abc = 0. & & \quad - bzz + acz \\ \qquad\quad - b \quad + ac & & \quad - czz + bcz \\ \qquad\quad - c \quad + bc & & \end{array}$$

Une grande preſence d'eſprit eſtant abſolument neceſſaire pour apprendre promptement & facilement les Sciences, & principalement celles dont nous parlons; il eſt comme neceſſaire d'arreſter icy l'imagination par quelque choſe de ſenſible. C'eſt dans ce deſſein que nous allons expliquer une Table, qui ſans partager inutilement la capacité de l'eſprit, luy repreſentera une idée abregée de la production de toute ſorte d'égalitez entierement réelles & de la nature de leurs parties.

Voyez la premiere Table de la ſeconde Planche.

XXVIII. Cette table que nous appellons table des egalitez, n'eſt preſque autre que celle des puiſſances.

XXIX. Ses cellules qui ſont entre deux lignes de gauche à droite, s'appellent cellules d'un même rang parallele comme zz, $\begin{array}{l} -azz \\ -b \end{array}$, $+ab$.

XXX. Et celles qui ſont entre deux lignes de haut en bas, s'appellent cellules d'un méme rang perpendiculaire, comme $1z$, $1zz$, $1z^3$, $1z^4$, &c.

XXXI. Et celles qui traverſent dans un méme rang de haut en bas & de gauche à droite, ſont dites cellules d'un même rang diagonal, comme a, $-a$, $+ab$. $-abc$, &c.

XXXII. Le premier des rangs perpendiculaires eſt celuy qui contient un plus grand nombre de cellules; le ſecond rang perpendiculaire eſt celuy qui a une cellule moins que le premier; le troiſiéme celuy qui en a une moins que le ſecond, &c.

XXXIII. De méme le premier entre les rangs diagonaux eſt celuy qui contient un plus grand nombre de cellules; le ſecond celuy qui en a une moins que le premier, &c.

XXXIV. Et au contraire le premier rang parallele eſt celuy qui n'a qu'une cellule; le ſecond celuy qui en a deux, &c.

XXXV. Les cellules d'un méme rang parallele également éloignées de ſes extrêmitez ſeront appellées *reciproques*, comme $\begin{array}{l}-azz\\-b\\-c\end{array}$ & $\begin{array}{l}+abz.\\+ac\\+bc\end{array}$

XXXVI. L'on remarquera qu'en toute égalité compoſée, chaque partie formée par la multiplication des ſeules racines connuës ou inconnuës, & qui aura méme degré que l'égalité, en eſt conceuë comme un produit. Par exemple $z-a-b=0$ par $z-c=0$, donne $\begin{array}{l}zz-az+ac=0\\-b+bc\\-c\end{array}$, dans laquelle $-az-bz$ n'eſt conté que pour un produit, à cauſe que $a+b$ n'eſt qu'une racine de l'égalité; & pareillement $ac+bc$ ne fait qu'un produit de la racine $a+b$ par la racine c. Il en eſt de méme de toute autre égalité, où quelquefois un produit ſeul peut contenir une longue ſuite de parties.

XXXVII. La table que nous donnons pour la compoſition des égalitez eſt une deſcription de celle que nous venons de former. Son premier rang parallele n'a qu'une cellule. La grandeur a qu'elle renferme, eſt une grandeur abſoluë comparée ſeulement avec elle méme. Cette cellule peut exprimer cet Axiome; que chaque grandeur eſt égale à elle-méme.

Cette grandeur a égalée avec une autre comme z, en telle ſorte que $z-a=0$, donnera une égalité ſimple, dont les deux parties z & a rempliront les deux cellules du ſecond rang parallele. Ainſi le ſecond rang eſt l'expreſſion des égalitez ſimples; que chaque grandeur moins elle méme eſt égale à zero. Et chacune de ſes deux cellules aura autant de parties que la cellule unique du premier rang parallele, où eſt a.

De méme le troiſiéme rang parallele renfermera dans ſes trois cellules les trois termes de l'égalité de deux degrez, & ſervira d'expreſſion pour l'Axiome de ces égalitez. Sa premiere cellule n'enferme qu'un produit $1zz$. La ſeconde $-az-bz$ en enfermera autant que la premiere & ſeconde cellule du ſecond rang parallele $z-a$. Car z par $-b$ de la ſimple $z-b=0$, & z de la méme égalité $z-b=0$ par $-a$ de la premiere $z-a=0$, donnent autant de produits pour la ſeconde cellule du troiſiéme rang parallele que la premiere & ſeconde du ſecond rang en renferment. Et pour la derniere cellule, elle aura un produit ſeul des racines a & b.

De même le quatriéme rang parallele ſervira d'expreſſion pour l'Axiome des égalitez du troiſiéme degré. Et ainſi des autres. Et chaque cellule d'un rang renfermera autant de produits qu'il y en a dans la même cellule & dans la precedente du rang qui le precede immediatement. Par exemple la quatriéme cellule du ſixiéme rang parallele renfermera 10 produits, c'eſt à dire autant que la quatriéme cellule du cinquiéme rang laquelle en renferme 4, plus la troiſiéme de ce même rang qui en renferme 6. Ces dix produits ſont $-abd-acd-bcd-abc-abe-ace-ade-bce-bde-cde$ multipliez chacun par zz.

Nous avons ſeulement décrit la premiere table juſqu'au cinquiéme degré. Si l'on vouloit la continuer, il ne faudroit que multiplier toûjours la derniere égalité par une autre ſimple. Ce qui donneroit des égalitez de plus en plus compoſées, qui ſeroient des expreſſions les plus abregées qu'il eſt poſſible des Axiomes ou principes naturels & generaux des égalitez entierement réelles qui auroient un pareil nombre de degrez.

XXXVIII. Dans chacun de ces rangs la premiere cellule doit n'enfermer aucune grandeur connuë.

XXXIX. Mais la ſeconde enferme toûjours une ſomme connuë de toutes les racines de ce rang.

XL. La troiſiéme renferme une ſomme connuë des plans de toutes les racines alternativement multipliées deux à deux.

XLI. La quatriéme une ſomme connuë des ſolides de toutes les racines alternativement multipliées trois à trois.

La cinquiéme une ſomme connuë des ſurſolides de toutes les racines alternativement multipliées quatre à quatre, &c.

COROLLAIRE.

XLII. Or il eſt clair que ſi pour abbreger, nous ſuppoſons tous les produits égaux, quoyqu'il les faille concevoir comme pouvant eſtre inégaux, la table des égalitez poura ſe continuer facilement, car l'unité eſtant poſée dans la cellule unique du premier rang parallele, tous les nombres de chaque cellule ſont determinez dans la table infiniment continuée. Car le nombre de cette premiere cellule donne celuy de chacune des deux du ſecond rang parallele. Et celles-ci déterminent les nombres de chaque cellule du troiſiéme rang. Le troiſiéme rang ceux du quatriéme. Et le quatriéme ceux du cinquiéme. Et ainſi des autres.

Voyez la ſeconde Table de la ſeconde Planche.

Monſieur Paſchal a examiné pluſieurs proprietez des nombres que renferment ces cellules, dans ſon Traité du Triangle Arithmetique.

XLIII. Nous appellerons avec luy *nombres du premier ordre* les ſimples unitez, comme 1, 1, 1, 1, &c.

XLIV. Nous appellerons *nombres du ſecond ordre* les naturels, ou ceux qui ſe forment par l'addition des unitez, en telle ſorte que ſi la premiere unité fait le premier de ces nombres, la premiere & ſeconde en feront le ſecond, la premiere ſeconde & troiſiéme en feront le troiſiéme, de ſorte que ces nombres ſeront 1, 2, 3, 4, 5, &c.

XLV. Nous appellerons *nombres du troiſiéme ordre* ceux qui ſe forment par une ſemblable addition des naturels, & qu'on appelle ordinairement *triangulaires*, comme 1, 3, 6, 10, 15, &c.

XLVI. De même *les nombres du quatriéme ordre* ſeront ceux qui ſe forment par une addition ſemblable des triangulaires. On les appelle auſſi *nombres pyramidaux*, comme 1, 4, 10, 20, &c.

XLVII. Pareillement *les nombres du cinquiéme ordre* ſont ceux qui ſont formez par une addition ſemblable des precedens, comme 1, 5, 15, 35, &c.

Il en eſt ainſi pour les ordres ſuivans.

PREMIER THEOREME.

XLVIII. En tout rang parallele le degré de l'inconnuë dans chaque cellule égale le degré de la grandeur connuë dans ſa reciproque. Car generalement autant que l'inconnuë diminuë ſes degrez de gauche à droite autant la grandeur connuë augmente le ſien, puiſque chaque terme d'une même egalité à même degré. Et ainſi ce qui manque au degré de l'un doit toûjours eſtre remplacé par le degré de l'autre.

SECOND THEOREME.

En tout rang parallele, lorſque deux cellules conſecutives en font l'une du rang parallele qui ſuit, cette cellule ſera egale à la premiere des deux autres plus à toutes celles qui precedent cette premiere dans ſon rang perpendiculaire (j'entens par egalité de cellules la ſeule egalité des nombres, & non pas celle des produits qu'elles renferment.) XLIX.

Demonſtration. Les deux cellules $c+g$ donnent la cellule h, & je dis que $h=c, +b+a$, qui precedent c dans ſon rang perpendiculaire. Car par la ſuppoſition $h=c+g$. Or par la formation de la table $g=b+f$, & $f=a$. Donc $h=c+b+a$. Ce qu'il falloit démontrer.

TROISIÉME THEOREME.

En tout rang parallele, lorſque deux cellules conſecutives en font l'une du rang parallele qui ſuit, cette cellule ſera egale à la derniere des deux, plus à toutes celles qui precedent cette derniere dans ſon rang diagonal. L.

Demonſtration. Les deux cellules $g+l$ donnent la cellule m, & je dis que $m=l, +f+a$, qui precedent l dans ſon rang perpendiculaire. Car par la ſuppoſition $m=g+l$. Or par la formation de la table, $g=b+f$, & $f=a$. Donc $m=l+f+a$. Ce qu'il falloit démontrer.

QUATRIÉME THEOREME.

En tout rang parallele chaque cellule eſt égale à ſa reciproque. LI.

Soit priſe au rang parallele 12^3 &c. ſa ſeconde cellule h, je dis que $h=m$. Car par la ſuppoſition $h=g+c$. Et $m=g+l$. Or $c=l$. Donc $g+c=g+l$. Or $h=g+c$, & $m=g+l$. Donc $h=m$. Ce qu'il falloit démontrer.

PREMIER COROLLAIRE.

Or chaque cellule eſtant égale à ſa reciproque, il eſt viſible que tous les rangs perpendiculaires ſont égaux à tous les rangs diagonaux, chacun à chacun & dans le même ordre, c'eſt à dire que le premier perpendiculaire eſt égal au premier diagonal, le ſecond perpendiculaire au ſecond diagonal, &c. puiſque leurs cellules ſont reciproques. LII.

SECOND COROLLAIRE.

Et il eſt clair par ce Corollaire & par la formation de la table que le premier rang perpendiculaire, & le premier diagonal enferment dans leurs cellules les nombres du premier ordre. LIII.

Que le ſecond perpendiculaire & le ſecond diagonal enferment dans leurs cellules les nombres naturels, ou du ſecond ordre. LIV.

De même le troiſiéme perpendiculaire & le troiſiéme diagonal enferment LV.

dans leurs cellules les nombres triangulaires , ou du troiſiéme ordre. Et ainſi des autres.

TROISIE'ME COROLLAIRE.

LVI. Cette même formation de lã table peut ſervir en paſſant à expliquer le moyen de determiner en combien de manieres differentes on peut prendre de pluſieurs choſes par un nombre determiné, comme de deux à deux , de trois à trois , de quatre à quatre &c Ce qui a rapport aux combinaiſons , puis qu'elles ſe font de la même maniere que les multiplications alternatives dont nous venons de parler. Voici quel eſt l'uſage de la table pour ces ſortes de combinaiſons.

Lorſque de pluſieurs choſes propoſées il ſera permis d'en choiſir par un nombre determiné. La table eſtant continuée autant qu'il ſera neceſſaire , il faut dans ſon rang parallele qui a même degré que le nombre des choſes propoſées , prendre la cellule où l'inconnuë a un même degré que le nombre determiné par lequel ſe doit faire le choix de ces choſes , le nombre écrit dans cette cellule ſera celuy qu'on cherche.

Si par exemple on commandoit à un peintre de faire un tableau où il faudroit ſeulement employer 8 couleurs , & que ce peintre en euſt 10 , pour ſçavoir en combien de manieres differentes il peut choiſir 8 couleurs entre ſes 10, l'on prendra le rang parallele z^{10} qui a 10 degrez , c'eſt à dire autant que le Peintre a de couleurs en tout, en ſuite l'on prendra dans ce rang la cellule ou z a 8 degrez c'eſt á dire autant que l'on veut choiſir de couleurs Le nombre 45 renfermé dans cette cellule eſt le nombre qu'on cherche. Si les couleurs ſont le blanc *a*, le noir *b*, le jaune *c*, le rouge *d*, l'incarnat *e*, le verd *f*, le bleu *g*, le violet *h*, le gris *i*, & le brun *l*, les choix ſeront les 45 qui ſuivent.

1. *abcdefgh*
2. *abcdefgi*
3 *abcdefgl*
4. *abcdefhi*
5. *abcdefhl*
6. *abcdefil*
7. *abcdeghi*
8. *abcdeghl*
9. *abcdegil*
10. *abcdehil*
11. *abcdfghi*
12. *abcdfghl*
13. *abcdfgil*
14. *abcdfhil*
15. *abcdghil*
16. *abccfghi*
17. *abcefghi*
18. *abcefgil*
19. *abcefhil*
20. *abceghil*
21. *abcfghil*
22. *abdefghi*
23. *abdefghl*
24. *abdefgil*
25. *abdefhil*
26. *abdeghil*
27. *abdfghil*
28. *abefghil*
29. *acdefghi*
30. *acdefghl*
31. *acdefgil*
32. *acdefhil*
33. *acdeghil*
34. *acdfghil*
35. *acefghil*
36. *adefghil*
37. *bcdefghi*
38. *bcdefghl*
39. *bcdefgil*
40. *bcdefhil*
41. *bcdeghil*
42. *bcdfghil*
43. *bcefghil*
44. *bdefghil*
45. *cdefghil*

LVII. Lorſque la ſomme connuë dans un terme eſt égale à zero , ce terme manque dans l'égalité. Si cette ſomme égale à zero eſt la ſomme des racines, le ſecond terme manquera. Si c'eſt la ſomme des plans de toutes les racines alternativement multipliées deux à deux, le troiſiéme terme manquera. Si cette ſomme eſt celle de tous leurs ſurſolides alternatifs, le quatriéme manquera, &c. Car cette ſomme égale à zero, multipliant le premier diminué de quelques-uns de ſes degrez, donnera un produit égal à zero.

On appelle ces termes égaux à zero *des termes évanoüis.* LVIII.

Et dans une équation donnée on reconnoiſt que l'un de ſes termes eſt évanoüy, lorſque l'inconnuë a deux degrez moins dans un terme que dans celuy qui le precede.

Si cette inconnuë a moins de trois degrez, deux termes ſeront évanoüis; ſi elle en a moins de quatre, trois termes ſeront évanoüis, &c. Car d'un terme à un autre l'inconnuë ne doit jamais diminuer que l'un de ſes degrez.

La place de chaque terme qui manque dans une égalité, eſt ordinairement remplie par une petite étoile, comme $x^{*} - px + q = 0$, où le ſecond terme manque.

Nous conſidererons ordinairement dans la ſuite le premier terme de chaque égalité avec le ſigne $+$, & s'il avoit $-$, il faudroit luy donner $+$, & changer en même temps tous les autres ſignes qui ſeroient dans l'égalité. Ce qui ne change en rien ſa nature; car c'eſt par exemple une même choſe de dire $-x + 4$, ou bien $+x - 4 = 0$. Si toutefois il y avoit quelque fraction dans l'égalité, il ne faudroit pas changer les ſignes qui ſont au ſecond terme de la fraction. Si par exemple j'avois $-x\frac{+a-b}{+c-d}=0$, je n'écrirois pas $+x\frac{-a+b}{-c+d}=0$, mais j'écrirois $+x\frac{-a+b}{+c-d}=0$.

La conſideration du ſecond terme eſt d'un grand uſage pour la ſuite. C'eſt LIX. pour cela qu'il faut bien examiner tout ce qui peut luy arriver en toute ſorte d'égalitez réelles. On a veu dans les égalitez ſimples que les vrayes racines ont $-$, & que les fauſſes ont $+$. Or dans le ſecond terme d'une égalité compoſée, ces racines avec leur ſigne multiplient le premier terme diminué d'un degré, qui a toûjours $+$. Donc les vrayes racines qui ont $-$, multipliant ce terme qui a $+$, le produit donnera $-$, & au contraire les fauſſes qui ont $+$, multipliant ce premier terme qui a auſſi $+$, le produit donnera $+$. Et comme ce ſecond terme contient toûjours une ſomme connuë de toutes les racines tant vrayes que fauſſes; voicy ce qui luy arrivera en toutes ſortes d'égalitez ſelon la difference des racines.

1°. Si toutes ces racines ſont vrayes, leur ſomme aura le ſigne $-$, & aucune n'en ſera retranchée par un ſigne contraire.

2°. Si elles ſont toutes fauſſes, leur ſomme aura $+$, & aucune n'en ſera retranchée par un ſigne contraire.

3°. Si les unes ſont vrayes, & les autres fauſſes, il y aura trois cas.

Le premier, ſi toutes les vrayes ſont égales à toutes les fauſſes, leur ſomme ſera égale à zero, ce qui rendra le ſecond terme évanoüy.

Le ſecond eſt que ſi toutes les vrayes ſont plus grandes que toutes les fauſſes, leur ſomme aura $-$.

Et le troiſiéme eſt que ſi toutes les fauſſes ſont plus grandes que toutes les vrayes, leur ſomme aura $+$.

Nous pourons encore examiner les changemens des ſignes qui arrivent dans les termes d'une égalité par la voye de la compoſition. Si par exemple, l'on prend les quatre égalitez ſimples $x-2=0$, $x-3=0$, $x-4=0$, & $x+5=0$; leur produit ſera $x^4-4x^3-19xx+106x-120=0$. où trois racines ſont vrayes & une fauſſe. L'on voit dans cet exemple que la diſpoſition des ſignes eſt telle qu'il y a autant de racines vrayes, que les ſignes + & — ſont changez alternativement dans les termes de l'égalité, & autant de fauſſes qu'il ſe trouve de fois deux mêmes ſignes qui s'entre-ſuivent. Car $+x^4$ & $-4x^3$ changent alternativement de ſigne; $-4x^3$ & $-19xx$ qui s'entre-ſuivent, ont un même ſigne; $-19xx$ & $+106x$ changent alternativement de ſigne, & $+106x$ & -120 changent auſſi alternativement. Ce qui fait trois changemens pour les trois racines vrayes, & les deux mêmes ſignes qui ne changent point, marquent la racine fauſſe.

Mais l'on ſuppoſe au contraire que toutes les racines qui eſtoient vrayes ſont de fauſſes racines, & que la fauſſe en eſt une vraye. Les quatre ſimples égalitez ſeront donc $x+2=0$, $x+3=0$, $x+4=0$, & $x-5=0$; & leur produit ſera $x^4+4x^3-19xx-106x-120=0$, dont trois racines ſont fauſſes & l'une vraye. Cette égalité eſt fort peu differente de la premiere; la ſeule difference eſt que le ſecond terme $4x^3$ & le quatriéme $106x$, ont differens ſignes dans ces deux égalitez. Mais cette difference même des ſignes marque dans l'une & dans l'autre qu'il y a autant de vrayes racines que + & — ſont alternativement changez, & autant de fauſſes qu'il s'y trouve de fois deux mêmes ſignes + ou — qui s'entre ſuivent. Car x qui a toûjours +, & chaque vraye racine toûjours —, multipliant alternativement une troiſiéme grandeur, diſtribuent aux termes de l'égalité compoſée un changement alternatif des ſignes + & —. Mais au contraire, x & les fauſſes racines qui ont toûjours +, multipliant alternativement une troiſiéme grandeur, elles diſtribuent alors deux fois de ſuite aux termes de l'égalité compoſée, un même ſigne +, ſi la troiſiéme grandeur a +, ou le même ſigne —, ſi cette grandeur a —.

LX. Ainſi donc pour faire en toute égalité que chaque racine vraye devienne fauſſe, & que chaque fauſſe devienne vraye; il faut changer ſeulement tous les ſignes + ou — qui ſont au ſecond, au quatriéme, au ſixiéme, au huitiéme, & aux autres termes dont le rang eſt exprimé par des nombres pairs; mais il ne faut rien changer au premier, troiſiéme, cinquiéme, ſeptiéme, & aux autres termes d'un rang dont le nombre eſt impair. Comme ſi au lieu de $+x^4-4x^3-19xx+106x-120=0$, l'on écrit cette autre égalité $+x^4+4x^3-19xx-106x-120=0$; les 3 racines qui eſtoient vrayes dans la premiere, ſeront fauſſes dans la ſeconde; & celle qui eſtoit fauſſe dans la premiere ſera vraye dans la ſeconde.

Seconde Planche qui doit eſtre à la page 369.

Premiere Table des égalitez.

1er rang diagonal.

1er rang paralelle.

a					
z	$-a$				
zz	$-az$ $-b$	$+ab$			
z^3	$-a$ $-b$ zz $-c$	$+ab$ $+ac$ z $+bc$	$-abc$		
z^4	$-a$ $-b$ z^3 $-c$ $-d$	$+ab$ $+ac$ $+ad$ $+bc$ zz $+bd$ $+cd$	$-abc$ $-abd$ $-acd$ $-bcd$ zz	$+abcd$	
z^5	$-a$ $-b$ $-c$ z^4 $-d$ $-e$	$+ab$ $+ac$ $+ad$ $+ae$ $+bc$ z^3 $+bd$ $+be$ $+cd$ $+ce$ $+de$	$-abc$ $-abd$ $-abe$ $-acd$ $-ace$ $-ade$ $-bcd$ zz $-bce$ $-bde$ $-cde$	$+abcd$ $+abce$ $+abde$ z $+acde$ $+bcde$	$-abcde$

1er rang perpendiculaire.

Seconde Table des égalitez.

$1a$ a										
$1z$ b	$-1a$ f									
$1zz$ c	$-2az$ g	$+1aa$ l								
$1z^3$ d	$-3azz$ h	$+3aaz$ m	$-1a^3$ o							
$1z^4$ e	$+4az^3$ i	$+6aazz$ n	$-4a^3z$ p	$+1a^4$ q						
$1z^5$	$-5az^4$	$+10aaz^3$	$-10a^3zz$	$+5a^4z$	$-1a^5$					
$1z^6$	$-6az^5$	$+15aaz^4$	$-20a^3z^3$	$+15a^4zz$	$-6a^5z$	$+1a$				
$1z^7$	$-7az^6$	$+21aaz^5$	$-35a^3z^4$	$+35a^4z^3$	$-21a^5zz$	$+7a^6z$	$-1a^7$			
$1z^8$	$-8az^7$	$+28aaz^6$	$-56a^3z^5$	$+70a^4z^4$	$-56a^5z^3$	$+28a^6zz$	$-8a^7z$	$+1a^8$		
$1z^9$	$-9az^8$	$+36aaz^7$	$-84a^3z^6$	$+126a^4z^5$	$-126a^5z^4$	$+84a^6z^3$	$-36a^7zz$	$+9a^8z$	$-1a^9$	
$1z^{10}$	$-10az^9$	$+45aaz^8$	$-120a^3z^7$	$+210a^4z^6$	$-252a^5z^5$	$+210a^6z^4$	$-120a^7z^3$	$+45a^8zz$	$-10a^9z$	$+1a^{10}$
Nombre du 1re ordre, ou les unitez.	Nombre du 2e ordre ou naturels.	Nomb. du 3e ordre, ou triangulaires.	Nomb. du 4e ordre, ou pyramidaux.	Nomb. du 5e ordre.	Nomb. du 6e ordre.	Nomb. du 7e ordre.	Nomb. du 8e ordre.	Nomb. du 9e ordre.	Nomb. du 10e ordre.	Nomb. du 11e ordre.

DE LA RESOLUTION DES EGALITEZ EN GENERAL.

LXI. POUR reconnoiſtre ſi une grandeur donnée eſt racine d'une egalité, cette egalité ſera diviſée par une ſimple de l'inconnuë moins ou plus cette grandeur donnée, moins, ſi la grandeur eſt ſuppoſée vraye, & plus, ſi elle eſt ſuppoſée fauſſe. Si la diviſion ſe peut faire exactement, cette grandeur ſera racine de l'egalité; mais ſi la diviſion ne peut ſe faire exactement, cette grandeur n'en ſera pas une racine.

Par exemple l'on reconnoiſtra que 16 eſt racine de l'egalité $y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 = 0$, parcequ'elle peut eſtre exactement diviſée par $yy - 16 = 0$, l'expoſant de la diviſion eſt $y^4 + 8yy + 4 = 0$.

LXII. Mais ſi la grandeur donnée n'eſt pas racine de l'egalité, la diviſion laiſſe neceſſairement un reſte Si ce reſte eſt poſitif, l'egalité a quelque racine plus petite que la grandeur donnée; mais ſi le reſte eſt negatif, elle a quelque racine au deſſus de la même grandeur, pourveu que la grandeur donnée ſoit poſitive.

Par exemple, ſi au lieu de prendre $yy - 16 = 0$, pour diviſeur de l'egalité $y^6 - 8y - 124yy - 64 = 0$, l'on euſt pris $yy - 17 = 0$, la diviſion auroit laiſſé le reſte poſitif $+ 429$. Ce qui marque non ſeulement que 17 n'eſt pas racine de l'egalité, mais encore que cette egalité a quelque racine au deſſous de 17.

Et ſi l'on euſt pris pour diviſeur de la même egalité la ſimple $yy - 15 = 0$, la diviſion auroit laiſſé le reſte negatif $- 459$. Ce qui marque non ſeulement que 15 n'eſt pas racine de l'egalité, mais encore que cette egalité a quelque racine au deſſus de 15. Ainſi l'on reconnoiſt que l'egalité propoſée a quelque racine comme 16 qui ſe trouve entre 17 & 15.

LXIII. Lorſque l'egalité propoſée eſt literale, c'eſt à dire lorſque ſes grandeurs connuës ſont exprimées par lettres, ſi l'on propoſe une des lettres qu'elle renferme, & qu'on veuille ſçavoir ſi elle en eſt racine ou non, il ſuffit de la ſubſtituer par tout au lieu de l'inconnuë; car ſi tous les termes ſe détruiſent mutuellement par des ſignes contraires, cette grandeur ſera racine de l'egalité, ſinon elle n'en ſera pas une racine. Cela ſuit des principes generaux des egalitez compoſées.

LXIV. Les racines d'une egalité réelle ſont toûjours neceſſairement ou toutes egales entr'elles, & alors il n'y en a qu'une; ou quelques-unes egales & les autres inegales; ou enfin elles ſont toutes inegales.

REGLES

Pour reſoudre les égalitez dont toutes les racines ſont égales.

LXV. La grandeur connüe du ſecond terme diviſée par le nombre des dimenſions du premier, donnera toûjours cette racine. Car par la ſuppoſition toutes ces racines ſont egales, & leur nombre eſt egal au nombre des dimenſions du premier terme. Or le ſecond terme eſt la ſomme de toutes ces racines. Diviſant donc ce terme par le nombre des dimenſions du premier, l'on aura chaque racine.

La même racine ſe trouvera auſſi en faiſant une egalité du premier & du dernier terme, car les racines de cette egalité ſeront celles de l'egalité propoſée.

Soit pour exemple de l'une & l'autre regle, l'egalité $x^3-6xx+12x-8=0$. Par la premiere regle, 6, grandeur connüe du ſecond terme, diviſée par 3 nombre des dimenſions du premier, donne pour expoſant 2, qui eſt auſſi la racine de l'egalité.

Et par la ſeconde regle, l'on prendra $x^3-8=0$. Donc $x^3=8$, & $x=2$. La racine de l'egalité eſt donc le nombre 2. Cela ſuit de ce qu'on a dit pour la reſolution des puiſſances. Car ces ſortes d'egalitez & les puiſſances ne ſont aucunement differentes entr'elles. Mais l'on remarquera cependant que la ſeconde regle a cet avantage ſur la premiere, qu'elle peut ſervir auſſi lorſque les racines ſont inegales ſeulement par leurs ſignes. Ce qu'on verra en ſuppoſant le premier terme + ou — le dernier égal à zero, & en ſuite examinant ſi + ou — la racine egalement tirée de part & d'autre, eſt une racine de l'egalité à diviſer. Si l'on trouve qu'elle en ſoit une racine, l'on verra de nouveau ſi + ou — la même grandeur eſt racine de l'expoſant ; & cela ſera reïteré autant de fois que l'egalité à diviſer aura de degrez. Toutes les diviſions qui pouront ſe faire, marqueront autant de racines egales, abſolument, ſi elles ſe font avec un même ſigne, ou bien en quantité ſeulement, ſi c'eſt avec un different ſigne.

DE LA REDUCTION DES EGALITEZ

QUI ONT PLUSIEURS RACINES EGALES.

THEOREME.

LXVI. En toute egalité qui a pluſieurs racines égales, ſi l'on multiplie ſes termes par les termes d'une progreſſion arithmetique, chacun par chacun & dans un même ordre, le produit donnera une egalité dont la valeur ne ſera que zero, & qui conſervera encore l'une des racines egales.

Soit priſe une egalité telle qu'on voudra, comme $\begin{array}{l}zz-bz-dg=0\\ +cz\end{array}$. Et qu'elle ſoit multipliée par une autre comme $zz-2az+aa=0$; l'egalité ou produit z^4 &c. aura pareillement deux racines egales. Or ſi l'on multiplie cette egalité par une progreſſion arithmetique, telle qu'on voudra, comme par 0, 1, 2, 3, 4 ; ou par l'autre 4, 3, 2, 1, 0 ; les deux produits ſeront deux egalitez dont la valeur ne ſera que zero, & chacune aura pour l'une de ſes racines la grandeur a, qui eſt l'une des deux egales de la propoſée z^4 &c. Car ſi l'on met a, au lieu de z dans chacune, tous les termes ſeront mutuellement détruits par des ſignes contraires. Il en eſt ainſi de toute autre egalité ſi pluſieurs de ſes racines ſont egales.

$$
\begin{array}{l}
z^4 - 2az^3 + aazz - aabz - aadg = 0. \text{ égalité propoſée.} \\
\quad - bz^3 + 2abzz + aacz \\
\quad + cz^3 - 2aczz + 2adgz \\
\qquad\quad - dgzz
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \text{premiere pregreſſion arithmetique.} \\
4 & 3 & 2 & 1 & 0 & \text{ſeconde progreſsion arithmetique.}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{1}^{\text{er}} \text{ produit} & -2az^3 + 2aazz - 3aabz - 4aadg = 0 = & -2a^4 + 2a^4 - 3a^3b - 4aadg = 0 \\
& - bz^3 + 4abzz + 3aacz & - a^3b + 4a^3b + 3a^3c \\
& + cz^3 - 4aczz + 6adgz & + a^3c - 4a^3c + 6aadg \\
& \quad - 2dgzz & \quad - 2aadg
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{2}^{\text{e}} \text{ produit} & 4z^4 - 6az^3 + 2aazz - aabz = 0 = & 4a^4 - 6a^4 + 2a^4 - a^3b = 0 \\
& - 3bz^3 + 4abzz + aacz & - 3a^3b + 4a^3b + a^3c \\
& + 3cz^3 - 4aczz + 2adgz & + 3a^3c - 4a^3c + 2aadg \\
& \quad - 2dgzz & \quad - 2aadg
\end{array}
$$

COROLLAIRE.

LXVII. Lors donc que l'on ſçait qu'une egalité propoſée renferme deux ou pluſieurs racines egales, l'on poura trouver encore d'autres egalitez differentes de la propoſée, qui auront neanmoins pour l'une de leurs racines, celle qui eſt egale dans cette propoſée. D'où il s'enſuit que les unes & les autres auront pour diviſeur commun l'egalité ſimple de l'inconnuë + ou — la valeur de la racine egale, +, ſi la racine eſt fauſſe, & —, ſi cette racine eſt vraye.

Surquoy il ſemble à propos d'apporter ici quelques regles de Monſieur Hudde pour trouver facilement les egalitez qui en peuvent exactement diviſer 2 ou pluſieurs autres, & pour reduire par ce moyen les egalitez propoſées qui ont pluſieurs racines egales, à un degré plus ſimple que le leur, comme auſſi pour découvrir la valeur de ces mêmes racines.

REGLE.

Pour trouver une egalité qui en puiſſe exactement diviſer deux autres plus compoſées & differentes entr'elles.

1°. Dans la premiere des egalitez propoſées, qui ſera celle dont les degrez ſeront les mêmes ou moindres que les degrez de l'autre, l'on prendra la valeur de ſon premier terme, & l'on ſubſtituera cette valeur au lieu de la quantité inconnuë de ce même terme dans la ſeconde egalité, autant de fois qu'elle s'y trouvera. Cette premiere operation donnera une troiſiéme egalité, dans laquelle l'inconnuë aura moins de degrez que les deux precedentes.

2°. L'on prendra la valeur de toute la quantité inconnuë au premier terme de cette troiſiéme egalité, & on la ſubſtituera en ſa place dans la premiere egalité, autant de fois qu'elle s'y trouvera. Ce qui donnera une quatriéme egalité de laquelle l'inconnuë aura moins de degrez que les trois precedentes. Et enfin l'on reïterera une ſemblable operation, juſques à ce qu'el vienne une derniere egalité dans laquelle tous les termes ſoient mutuellement détruits par des ſignes contraires. L'egalité qui aura precedé cette derniere, & qui aura ſervi à faire que tous ſes termes ſe détruiſent, ſera l'egalité cherchée. Cecy s'éclaircira par l'exemple ſuivant.

Exemple.

Soient les deux egalitez $z^4 - 4az^3 + 11aazz - 20a^3z + 12a^4 = 0$, & $z^4 - 3az^3 + 12aazz - 16a^3z + 24a^4 = 0$, j'auray par la premiere egalité. $z^4 = 4az^3 - 11aazz + 20a^3z - 12a^4$. Subſtituant donc cette valeur au lieu de z^4 dans la ſeconde egalité, & diviſant la ſomme par a, j'en auray une troiſiéme dans laquelle je prends de nouveau la valeur de z^3, & je la ſubſtituë en ſa place dans la premiere egalité, autant de fois qu'elle s'y trouve, ce qui m'en donne une quatriéme qui eſtant diviſée par 1200, donne enfin l'egalité $zz - az + 6aa = 0$, ou bien $zz = az - 6aa$. Or ſubſtituant cette valeur dans la troiſiéme egalité, j'en trouve une, dont tous les termes ſont mutuellement détruits par des ſignes contraires. Ainſi l'egalité $zz - az + 6aa = 0$, eſt celle que l'on cherche. Elle diviſe exactement chacune des deux egalitez propoſées.

$$z^4 - 3az^3 + 12aazz - 16a^3z + 24a^4 = 0. \left\{ \begin{array}{l} z^4 = 4az^3 - 11aazz + 20a^3z - 12a^4 \\ \quad - 3az^3 + 12aazz - 16a^3z + 24a^4 \end{array} \right.$$

$$\textit{ſomme ou 3}^{e}\textit{ égalité } \quad az + aazz + 4a\,z + 1\,a^4 = 0.$$

ou la diviſant par a,

$$3^{e} \textit{ égalité } \quad z^3 + azz + 4aaz + 12a^3 = 0.$$

$$\text{Donc } z^3 = -azz - 4aaz - 12a^3$$

$$\text{Donc } z^4 = -az^3, -4aazz - 12a^3z.$$

$$-4az^3 = -4az^3,$$

$$-5az = 5aazz + 20a^3z + 60a^4$$

$$+11aazz - 20a^3z + 12a^4 = \quad 11aazz - 20a^3z + 12a^4$$

$$\textit{ſomme ou 4}^{e}\textit{ égalité } \quad 12aazz - 12a^3z + 72a^4 = 0.$$

Et la diviſant par $12aa$.

$$zz - az + 6aa = 0.$$

$$\text{Donc } zz = az - 6aa, \text{ Donc } z^3 = azz, -6aaz$$

$$+azz = azz,$$

$$2azz = 2aaz - 12a^3$$

$$+4aaz + 12a^3 = \quad 4aaz + 12a^3$$

$$\textit{ſomme} \quad * \quad * \quad = 0.$$

Cette regle ſert auſſi pour trouver le plus grand diviſeur commun des grandeurs litterales. Il faut avant qu'on la ſuive ſuppoſer chaque grandeur comme une egalité qui ne vaut que zero, & conſiderer ſelon l'ordre des egalitez une même lettre comme l'inconnuë de chacune. Par ce moyen l'on peut facilement reduire les fractions litterales à leurs expoſants.

REGLE.

LXVIII *Pour trouver les racines égales que renferme une égalité propoſée.*

L'on multiplie les termes de cette egalité par les termes d'une progreſſion arithmetique, chacun par chacun & dans un même ordre. Le produit donne une egalité nouvelle differente de la propoſée, mais qui renferme neanmoins la racine égale. C'eſt pourquoy l'on cherchera le diviſeur commun à toutes deux ſelon la regle precedente. Et l'on trouvera enfin ce qu'on cherche.

Exemple.

Pour trouver les deux racines égales dans $x^3-4xx+5x-2=0$. je la multiplie par une progreſſion arithmetique, dont la difference ne ſoit que l'unité, pour rendre l'operation plus facile, & je mets o pour l'un des termes de la progreſſion. Par exemple je choiſis la progreſſion $+1.0.-1.-2.$ ce qui fait évanoüir le ſecond terme,

égalité propoſée $x^3-4xx+5x-2=0.$
progreßion arith. $+1.\quad 0\quad -1.-2.$

Et il vient $x^3 \quad * \quad -5x+4=0.$ Donc $x^3=5x-4.$

Mettant donc au lieu de x^3 ſa valeur $5x-4$ dans la propoſée, l'on aura $-4xx+10x-6=0$. Donc $xx=\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}$. Ainſi ſubſtituant cette valeur de xx dans l'egalité $x^3*-5x+4=0$, l'on aura l'egalité $\frac{5}{2}xx-\frac{3}{2}x,-5x+4=0$. Ou bien remettant encore $\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}$ au lieu de xx qui s'y trouve encore, cette egalité ſera $-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}=0$. Donc $-x+1=0$. Et $x=1$. Si l'on met donc dans l'egalité propoſée, 1 au lieu de x, l'on aura $1-4+5-2=0$. Ainſi la racine égale eſt 1. Et l'egalité propoſée peut eſtre diviſée par $xx-2x+1=0$, quarré de la ſimple $x-1=0$. Et l'expoſant $x-2=0$, fait voir que 2 eſt l'autre racine qui reſte.

Si l'on euſt pris une autre progreſſion comme $+2\ +1.0.-1$, pour faire évanoüir le troiſiéme terme $x^3-4xx+5x-2=0.$
$+2.\quad +1.\quad 0.\quad -1.$
l'on auroit eu pour l'egalité trouvée $2x^3-4xx \quad * -2=0.$
& l'on auroit trouvé que la ſimple $x-1=0$ eſt le plus grand diviſeur commun de cette egalité & de la propoſée.

Il eſt à propos de choiſir non ſeulement les progreſſions les plus ſimples, mais auſſi de les diſpoſer de telle ſorte que zero ſoit ſous les termes qui doivent le plutoſt eſtre evanoüis. L'on peut auſſi au lieu de chercher le plus grand diviſeur commun de la propoſée & d'une premiere egalité qu'on a trouvée, prendre celuy de cette egalité & d'une autre trouvée en même ſorte, ſelon qu'on le jugera plus facile. Ainſi dans l'exemple propoſé, l'on auroit pû chercher le plus grand diviſeur commun, des deux egalitez trouvées $x^3*-5x+4=0$, & $2x^3-4xx*-2=0$. Ce qui auroit donné la même egalité ſimple $x-1=0$, que nous avons trouvée.

LXIX. Si l'on ſçavoit qu'une egalité propoſée euſt plus de deux racines egales, avant que de chercher le plus grand diviſeur commun, il ſeroit à propos pour abreger, ſi l'egalité avoit 3 racines egales, de la multiplier par une progreſſion arithmetique. Et ſi l'egalité avoit 4 racines egales, on feroit trois ſemblables multiplications; ſi elle en avoit cinq, l'on en feroit 4. Et ainſi des autres.

Si par exemple l'egalité eſtoit celle-cy qui a trois de ſes racines egales, on la pouroit multiplier par la progreſſion arith.

$$\begin{array}{lccccc} & x^4 & * & -6xx & +8x & -3=0, \\ & 0. & 1. & 2. & 3. & 4. \\ \hline \text{Ce qui donne l'egalité} & * & * & -12xx & +24x & -12=0. \\ \text{qui eſtant de nouveau multipliée par la progr.} & & & 0. & 1. & 2 \\ \hline \text{l'on a l'egalité} & & & * & +24x & -24=0. \end{array}$$

Donc $x-1=0$. Et $x=1$.

Diviſant donc la propoſée par $x^3-3xx+3x-1$, l'expoſant ſera l'egalité $x+3=0$. Et ainſi les 4 racines ſeront 1, 1, 1, & -3. Il en eſt ainſi de tous les cas ſemblables.

COROLLAIRE.

LXX. Monſieur Hudde rapporte encore à cette methode la determination des tangentes dont parle Monſieur Deſcartes dans ſa geometrie. Car il y a des rencontres dans la Dioptrique où le calcul donne aux Geometres une egalité dans laquelle ils conſiderent quelque grandeur connuë comme l'inconnüe de l'egalité, au lieu qu'ils en conſiderent d'autres comme connües qui neanmoins ne le ſont pas. Et il faut que l'egalité decouverte ſoit telle, que deux de ſes racines ſoient egales.

Or l'egalité eſtant ainſi determinée, l'on retranche le terme qui empéche le plus que l'on ne connoiſſe celle des grandeurs que l'on ſe propoſe à découvrir. Ce qui ſe fait en diſpoſant la progreſſion arithmetique en telle ſorte que ſon terme zero ſe trouve ſous celuy qu'il eſt à propos de faire evanoüir. Apres quoy le reſte ſe fait ſelon les regles des reductions accoûtumées.

Premier Exemple.

Le premier exemple qu'ils apportent eſt l'egalité $yy+\frac{qr-2qv}{q-r}y+\frac{qvv-q\text{ſſ}}{q-r}=0$. Ses deux racines doivent eſtre egales, la grandeur y eſt toute connuë ; mais l'une des grandeurs v & ſ eſt inconnuë. Si l'on ſuppoſe que ce ſoit v que l'on ne connoiſſe point, l'on prendra la progreſſion arithmetique 2. 1. 0, afin que zero ſe trouvant ſous le terme où v a plus de dimenſions, ce terme puiſſe eſtre évanoüy.

$$\begin{array}{lccc} \text{Multipliant donc les termes de l'egalité} & yy & +\frac{qr-2qv}{q-r}y & +\frac{qvv-q\text{ſſ}}{q-r}=0; \\ \text{par ceux de la progreſſion} & 2. & 1. & 0. \\ \hline \text{l'on aura l'egalité} & 2y & +\frac{qr-2qv}{q-r}=0, & \end{array}$$

qui eſtant multipliée par $q-r$, donne $2qy-2ry+qr=2qv$.

Et diviſant le tout par $2q$, $y-\frac{ry}{q}+\frac{1}{2}r=v$.

L'autre exemple eſt celuy-cy, où il faut trouver la valeur de v.

$$\begin{array}{lllllll} y^6 & -2by^5 & -2cdy & +4bcdy^3 & -2bbcdyy & -2bccddy & +bbccdd=0 \\ & & +bb & -2ddv & +ccdd & & \\ & & +dd & & -dd\text{ſſ} & & \\ & & & & ddvv & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lllllllll}
\textit{Mult. par} & 4. & 3. & 2. & 1. & 0. & -1. & -2. & \\
\hline
\textit{Prod.} & 4y^6 & -6by^5 & -4cdy & +4bcdy^3 & * & +2bccddy & -2bbccdd & =0, \\
 & & & +2bb & -2ddv & & & & \\
 & & & +2dd & & & & &
\end{array}$$

Et diviſant tout par $2ddy^3$, & rejettant v dans l'autre membre, l'on trouve enfin

$$\begin{array}{lllllll}
\frac{2y^3}{dd} & -\frac{3byy}{dd} & -\frac{2cy}{d} & +\frac{2bc}{d} & +\frac{bcc}{yy} & -\frac{bbcc}{y^3} & =v. \\
 & & +\frac{bby}{dd} & & & & \\
 & & +y & & & &
\end{array}$$

Il en eſt ainſi des autres. Si la grandeur $ſ$ eſtoit inconnüe, & la grandeur v connüe, l'on feroit evanoüir tel terme qu'on voudroit autre que celuy où $ſſ$ eſt renfermé, parce que $ſſ$ ne ſe trouve qu'une fois & qu'au ſecond degré. Et ſi les grandeurs v & $ſ$ eſtoient toutes deux inconnües, & qu'on vouluſt determiner l'une ou l'autre, le probleme ſeroit indeterminé, l'on pouroit prendre telle grandeur que l'on voudroit pour l'une des deux. Apres quoy l'on pouroit determiner l'autre par les regles precedentes.

DE LA REDUCTION

DES AUTRES EGALITEZ.

Toutes les egalitez ſont numeriques ou litterales, lorſqu'elles ſont numeriques, il eſt à propos avant que d'en chercher les racines de delivrer leurs termes des nombres incommenſurables qui s'y trouvent. Ce qui poura ſe faire en cette ſorte.

REGLE

Pour delivrer les egalitez des grandeurs incommenſurables qu'elles renferment.

LXXI. Si les grandeurs ſont renfermées ſous le ſigne radical $\sqrt{}$, 1°. L'on rend une ſeule de ces grandeurs membre de l'egalité, & l'on multiplie quarrément chaque membre; ce qui en donne une autre plus compoſée, où cette grandeur eſt devenüe commenſurable.

2°. Rendant l'une des autres grandeurs incommenſurables membre de cette ſeconde egalité, l'on multipliera quarrément chaque membre; ce qui donnera une troiſiéme egalité encore plus compoſée que la ſeconde, où la grandeur incommenſurable ſera pareillement devenuë commenſurable. Il faudra faire une ſemblable operation pour chacune des autres grandeurs incommenſurables. Ce qui donnera enfin une egalité, où toutes les grandeurs ſeront commenſurables.

Exemple.

Soit l'egalité propoſée $x^3 * -x\sqrt{a}+\sqrt{b}=0$, qui contient les deux grandeurs incommenſurables $\sqrt{a}$ & $\sqrt{b}$. Pour la commodité de l'operation, faiſant $\sqrt{a}=p$ & $\sqrt{b}=q$ au lieu de $x^3 * -x\sqrt{a}+\sqrt{b}=0$ l'on peut écrire $x^3 * -px+q=0$. Aprés quoy, 1°. faiſant la grandeur incommenſurable p, l'un des membres de l'egalité, l'on aura $p = \frac{x^3 + q}{x}$, quarrant chacun de ces deux membres, & multipliant le tout par xx, l'on aura $ppxx = x^6 + 2qx^3 + qq$. 2°. Faiſant la grandeur incommenſurable, membre de cette egalité, l'on aura $-q = \frac{x^6 - ppxx + qq}{2x^3}$, & quarrant chacun de ces 2 membres, & multipliãt le tout par $4x^6$, & en ſuite diſpoſãt par ordre les termes de l'egalité, l'on aura $x^{12} * - 2ppx^8 - 2qqx^6 + ppx^4 - 2ppqqxx + q^4 = 0$, qui eſt une egalité du douziéme degré, mais qui paſſe ſeulement pour une du ſixiéme, à cauſe que les degrez de l'inconnuë ont par tout nombre pair.

Que ſi l'egalité propoſée euſt renfermé trois grandeurs incommenſurables de même eſpece, c'eſt à dire qui fuſſent chacune ſous le ſigne radical $\surd$, la derniere egalité à qui l'operation auroit conduit ſeroit de 24 degrez, mais elle ne paſſeroit que pour 12.

LXXII. Mais ſi les grandeurs incommenſurables ſont renfermées ſous le ſigne radical $\surd$C. 1°. Rendant l'une de ſes grandeurs membre de l'egalité, & multipliant cubiquement de part & d'autre, cette premiere grandeur ſera delivrée de ſon ſigne, & les autres auront un, ou deux, ou trois degrez, & en ce qu'elles en auront trois, elles ſeront commenſurables. De ſorte que l'on poura faire une egalité nouvelle, où l'une de ces grandeurs n'aura plus qu'un ou deux degrez, & multipliant chaque membre de cette egalité nouvelle par la même grandeur incommenſurable, elle aura de nouveau un ou deux, ou trois degrez; & en ce qu'elle en aura trois, elle ſera commenſurable. De ſorte que l'on poura encore avoir une autre egalité, où cette grandeur n'aura plus qu'un ou deux degrez, & ſi par le moyen de cette egalité, l'on cherche la valeur du quarré dans l'egalité precedente, l'on aura une autre egalité, où la grandeur incommenſurable n'aura plus qu'un degré. C'eſt pourquoy faiſant un membre de cette grandeur, & multipliant de part & d'autre cubiquement, l'on aura une egalité où elle ſera devenuë commenſurable. Et reïterant la même operation autant de fois qu'il ſera neceſſaire, l'on arrivera enfin à une egalité où les grandeurs ne ſeront plus incommenſurables, mais dont le degré ſera beaucoup plus elevé que celuy de la propoſée.

Lorſque les calculs ſont trop longs, il eſt à propos de les abbreger, en ſubſtituant une ſeule grandeur au lieu de pluſieurs de celles qui ne ſont plus incommenſurables, comme on verra dans l'exemple ſuivant.

Exemple.

Soit l'egalité propoſée $x^3 * - px + q = 0$, dans laquelle p & q marquent chacune une grandeur incommenſurable renfermée ſous le ſigne $\surd$C. 1°. Je rends px membre de l'egalité $px = x^3 + q$. Et cubant chaque membre, j'ay pour premiere egalité $p^3x^3 = x^9 + 3qx^6 + 3qqx^3 + q^3$. 2°. Je fais des parties $3qx^6$ & $3qqx^3$, où q n'eſt point commenſurable, un membre de l'égalité $3qx^6 + 3qqx^3 = p^3x^3 - x^9 - q^3$, & pour abreger je ſuppoſe $f = p^3x^3 - x^9 - q^3$, qui ſont des grandeurs commenſurables, &

j'écris $3qx^6+3qqx^3=f^3$. Multipliant donc chacun de ces membres par q, j'ay pour troiſiéme egalité $3qqx^6+3q^3x^3=f^3q$, & cherchant par le moyen de cette egalité la valeur de qq quarré de q, je trouve $qq=\frac{f^3q-3q^3x^3}{3x^6}$. Et mettant cette valeur de qq dans la ſeconde egalité $3qx^6+3qqx^3=f^3$, il vient $3qx^6-q^3+\frac{f^3q}{x^3}=f^3$. Et le tout eſtant multiplié par x^3, l'egalité ſera $3qx^9-q^3x^3+f^3q=f^3x^3$. D'où je tire $q=\frac{f^3x^3+q^3x^3}{3x^9+f^3}$, & pour abreger je ſuppoſe $f^3x^3+q^3x^3=g^3$, & $3x^9+f^3=l^3$, & j'écris $q=\frac{g^3}{l^3}$. Cubant enſuite chacun de ces deux membres, j'ay $q^3=\frac{g^9}{l^9}$. Aprés quoy remettant à la place de g^9 & de l^9 les grandeurs qui leur ſont egales, & diſpoſant par ordre les termes de l'egalité, l'on aura enfin une egalité du 36^e^ degré, mais qui paſſera ſeulement pour une du 12^e^, à cauſe que l'inconnuë de chaque terme à un autre diminuë de trois degrez.

REGLE GENERALE.

Pour trouver les racines commenſurables d'une egalité propoſée, & qui ſoit ſans fraction.

1°. Si l'egalité propoſée eſt numerique, & que les grandeurs connües de ſes termes renferment quelques grandeurs incommenſurables, l'on en delivrera l'egalité par la regle precedente, LXXIII.

2°. L'on examinera par ordre tous les diviſeurs du dernier terme, & l'on verra ſucceſſivement ſi l'inconnüe + ou — quelqu'un de ces diviſeurs peut diviſer ſans reſte l'egalité propoſée. Ce qui donnera toûjours quelque racine de l'egalité, ſi elle en a de commenſurable.

Premier Exemple.

Soit propoſée l'egalité de trois degrez $y^6-8y^4-124yy-64=0$, Pour connoiſtre ſi elle a quelque racine commenſurable, l'on prend tous les diviſeurs du dernier terme 64, qui ſont 1, 2, 4, 8, 16, 32 & 64. Enſuite l'on examine par ordre chacune des egalitez $yy-1=0$, $yy+1=0$; $yy-2=0$, $yy+2=0$; $yy-4=0$, $yy+4=0$; $yy-8=0$, $yy+8=0$; $yy-16=0$; Or trouvant que cette derniere $yy-16=0$, diviſe exactement la propoſée, l'on connoiſt auſſi que 16 en eſt une racine commenſurable, & la diviſion reduit l'egalité propoſée à cette autre $y^4+8yy+4=0$, qui n'a que deux degrez. Et parceque $yy-16=0$, Donc $yy=16$, & $y=4$. Connoiſſant la valeur de la racine yy, l'on connoiſt auſſi celle de y.

Second Exemple.

Soit propoſée l'egalité

$$\begin{array}{llll} y^6+aay^4 & -a^4yy & -a^6 & =0, \\ -2cc & +c^4 & -2a^4cc & \\ & & -aac^4 & \end{array}$$

ſon dernier terme peut eſtre diviſé ſans fraction par a, aa, $aa+cc$, a^3+acc, & encore par d'autres. Mais il ſuffit de ne conſiderer parmy tous ces diviſeurs que ceux qui ont un nombre de dimenſion egal à celuy de la racine inconnüe de l'egalité, qui eſt yy, c'eſt à dire qu'il ſuffit d'examiner les deux diviſeurs aa & $aa+cc$, parceque tous les autres ont plus ou moins de dimenſions que la racine yy. Or l'on trouve que la ſimple $yy-aa-cc=0$ diviſe exactement la propoſée. Donc $yy=aa+cc$ La grandeur $aa+cc$ ſera racine de l'egalité propoſée. Cette egalité ſe reduit par la diviſion à cette autre de deux degrez

$$\begin{array}{llll} y^4 & +2aayy & +a^4 & =0. \\ & -cc & +aacc & \end{array}$$

Si l'égalité renfermoit des fractions, nous marquerons dans la ſuite comment on peut les en délivrer, afin de ſuivre la regle generale qui vient d'eſtre expliquée.

LXXIV. Si l'egalité eſtoit litterale, & que le diviſeur choiſi ne fuſt point exprimé par pluſieurs parties, il ſuffiroit au lieu de diviſer l'egalité propoſée de ſubſtituer le diviſeur par toute l'egalité au lieu de l'inconnüe. Car ſi tous les termes eſtoient mutuellement detruits par des ſignes contraires, il ſeroit racine de l'egalité, ſinon, il n'en ſeroit pas une racine. Dans les autres rencontres, il eſt plus court de faire la diviſion.

LXXV. Si l'egalité eſt numerique, & que la regle n'en ait point donné de racines, c'eſt une marque qu'elle n'en a aucune de commenſurable. Et alors il peut arriver que la diviſion ſe faſſe par une egalité du quarré ou du cube de l'inconnüe + ou — quelque diviſeur du dernier terme.

Par exemple l'egalité $x^4-3x^3+1xx+3x-2=0$, n'a point de racines commenſurables. Son dernier terme peut eſtre diviſé par 1 & par 2. Et ſi l'on prend $xx-1=0$, l'on trouve que la diviſion ſe fait ſans reſte, l'expoſant eſt $xx-3x+2=0$. De ſorte qu'au lieu de l'egalité propoſée qui eſt du quatriéme degré, l'on en a deux autres de deux degrez chacune & dont les racines ſont les mêmes que celles de la propoſée.

Voici quelques regles qui pouront ſervir non ſeulement pour abbreger les operations de la regle generale qui precede, mais qui ſervent auſſi dans pluſieurs rencontres, où celle-là ne peut rien faire connoiſtre.

PREMIERE REGLE.

LXXVI. L'on fera une egalité de quelques produits des deux derniers termes, qui auront un diviſeur commun, ſans en changer les ſignes. Et l'on examinera ſi la valeur de l'inconnüe trouvée par cette egalité eſt racine de la propoſée.

Premier Exemple.

Pour trouver quelque racine dans

$$\begin{array}{llll} x^3 & -2axx & +aax & -abb=0, \\ & -b & +ab & -b^3 \\ & & +bb & \end{array}$$

je fais une egalité des produits bbx, abb, & b^3, qui ont un même diviſeur bb, en écrivant $bbx-abb-b^3=0$. Et diviſant le tout par bb, $x-a-b=0$. Cette egalité peut diviſer exactement la propoſée D'où je connois que $a+b$ en eſt une racine. L'expoſant de la diviſion eſt l'egalité $xx-ax+bb=0$.

Second Exemple.

Pour trouver quelque racine dans

$$\begin{array}{lllll} x^3 & -3cxx & +abx & -2aab & =0, \\ & -2a & +6ac & +3abb & \\ & +3b & -9bc & & \end{array}$$

je ſuppoſe $abx - 2aab + 3abb = 0$, & diviſant le tout par ab, je trouve $x - 2a + 3b = 0$, qui diviſe exactement la propoſée. Ainſi $2a - 3b$ en eſt la racine, l'expoſant de la diviſion donne l'egalité de deux degrez $xx - 3cx + ab = 0$.

Troiſiéme Exemple.

Pour trouver quelque racine dans

$$\begin{array}{lllll} x^3 & -2bxx & +60aax & -120a^3 & =0, \\ & -2a & +70ab & -132abb & \end{array}$$

je vois que ſuppoſant $70abx - 132abb = 0$, je ne puis avoir la valeur de x ſans fraction, parceque $70ab$ ne peut exactement diviſer $132abb$, c'eſt pourquoy je ſuppoſe $60aax - 120a^3 = 0$, & diviſant tout par $60aa$, je trouve $x - 2 = 0$, qui peut diviſer ſans reſte la propoſée, & ainſi $2a$ en eſt une racine. L'egalité ſe reduit par la diviſion à celle de deux degrez

$$\begin{array}{llll} xx & -2bx & +60aa & =0. \\ & & +66ab & \end{array}$$

Quatriéme Exemple.

Pour trouver quelque racine dans

$$\begin{array}{llllll} x^4 & -2ax^3 & +aaxx & +a^3x & -a^4 & =0 \\ & +b & -ab & & +a^3b & \end{array}$$

je ſuppoſe $a^3x - a^4 + a^3b = 0$. Donc $x - a + b = 0$, qui peut diviſer exactement la propoſée. Ainſi $a - b$ en eſt une racine. Et l'egalité ſe reduit par la diviſion à $x^3 - axx * + a^3 = 0$.

Cinquiéme Exemple.

Pour chercher quelque racine dans cette autre egalité

$$\begin{array}{lllll} x^3 & -xx\sqrt{xx+aa} & +2cx\sqrt{xx+aa} & -a\sqrt{xx+aa}\sqrt{3cc+aa} & =0, \\ -2cxx & & +ax\sqrt{xx+aa} & +3aa\sqrt{3cc+aa} & \\ +2axx & & +ax\sqrt{3cc+aa} & & \end{array}$$

je ſuppoſe l'egalité $ax\sqrt{3cc+aa} - a\sqrt{xx+aa}\sqrt{3cc+aa} + 3aa\sqrt{3cc+aa} = 0$, laquelle eſtant diviſée par $a\sqrt{3cc+aa}$, donne $x - \sqrt{xx+aa} + 3a = 0$, qui peut diviſer exactement la propoſée. Ainſi $\sqrt{xx+aa} - 3a$ en eſt une racine.

SECONDE REGLE.

LXXVII. Si la regle precedente n'a pu faire connoître aucune racine de l'egalité propoſée, l'on conſiderera quelqu'une des lettres qu'elle renferme, & l'on fera une egalité nouvelle de tous les produits où cette lettre n'a qu'un degré; & reduiſant cette egalité, l'on verra ſi elle peut exactement diviſer la propoſée. Si elle la diviſe, elle eſt l'une des egalitez dont le produit a compoſé la propoſée; mais ſi elle ne la diviſe pas, l'on fera une egalité ſemblable de tous les produits où quelqu'autre lettre n'a pareillement qu'un degré, & l'on examinera ſi aprés l'avoir reduite, l'on peut par ſon moyen diviſer la propoſée. Et ſi elle ne peut la diviſer ſans reſte, l'on continüera par ordre à faire de ſemblables egalitez des produits où chacune des autres lettres n'a qu'un degré, & l'on verra ſi par leur moyen la propoſée peut eſtre diviſée ſans reſte.

Que ſi aucune de ces operations n'a pû ſervir pour la diviſer, l'on recommencera par ordre a faire de nouvelles egalitez ſemblables aux precedentes, de tous les produits où les mêmes lettres n'auront que deux degrez. Et ſi l'on ne trouve rien de plus par leur moyen que par les precedentes, l'on fera d'autres egalitez de tous les produits où les mêmes lettres ont trois degrez. Et enſuite de tous ceux où elles en ont quatre. Et ainſi des autres.

Premier Exemple.

Pour reduire l'egalité

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -6ax^3 & +4bcxx & -16abcx & +16abbc = 0, \\ & & +4ac & -16aac & +48aabc \\ & & +16aa & -8aab & +32a^3c \\ & & +4ab & -16a^3 & \end{array}$$

je ſuppoſe

$$\begin{array}{llll} -6ax^3 & +4acxx & -16abcx & -16abbc = 0, \\ & +4ab & & \end{array}$$

où ſont tous les produits dans leſquels a ſe trouve renfermée. Mais parceque je ne puis rendre le premier terme de cette egalité tout inconnu, ſans faire pluſieurs fractions dans ſes autres termes, je paſſe à une autre lettre comme b, & je ſuppoſe

$$\begin{array}{lll} 4bcxx & -16abcx & +48aabc = 0, \\ +4ab & -8aab & \end{array}$$

dont tous les termes ne peuvent pas eſtre diviſez ſans fraction par $4bc + 4ab$, qui multiplie le premier terme. C'eſt pourquoy je paſſe en même ſorte à l'autre lettre c, & je ſuppoſe

$$\begin{array}{lll} +4bcxx & -16abcx & +16abbc = 0, \\ +4ac & -16aac & +48aabc \\ & & +32a^3c \end{array}$$

cette egalité eſtant diviſée par $4bc + 4ac$, ſe reduit à

$$\begin{array}{lll} xx & -4ax & +4ab = 0, \\ & & +8aa \end{array}$$

qui diviſe exactement la propoſée. De ſorte qu'elle eſt l'une de celles qui l'ont formée par leur produit. La propoſée ſe reduit par la diviſion à cette autre egalité de deux degrez

$$\begin{array}{lll} xx & -2ax & +4bc = 0. \\ & & +4ac \end{array}$$

Second Exemple.

Pour réduire

$$\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & +2bx\sqrt{ab+3bb} & -6bb\sqrt{ab+3bb} = 0, \\ & -xx\sqrt{ab+3bb} & & +18b^3 \end{array}$$

je conſidere la lettre a, & je ſuppoſe $-xx\sqrt{ab+3bb} + 2bx\sqrt{ab+3bb} - 6bb\sqrt{ab+3bb} = 0$, & diviſant cette egalité par $-\sqrt{ab+3bb}$, elle ſe reduit à $xx - 2bx + 6bb = 0$, qui diviſe exactement la propoſée. Elle eſt donc l'une de celles qui l'ont formée par leur produit. La propoſée ſe reduit par la diviſion à l'egalité ſimple $x + 3b - \sqrt{ab+3bb} = 0$. Ainſi la grandeur $-3b + \sqrt{ab+3bb}$ eſt une racine de l'egalité.

Tout ce que l'on peut connoiſtre par cette regle poura auſſi ſe connoiſtre par la regle ſuivante, mais non pas reciproquement.

TROISIE'ME REGLE.

LXXVIII. Lorſque les regles precedentes n'auront rien fait connoiſtre, ou même avant que de les employer, l'on ſuppoſera que quelqu'un des lettres renfermées dans la propoſée eſt egale à zero, & faiſant evanoüir tous les produits où elle ſe trouve, l'on fera une egalité de tous les autres qui ne la renferment point, & l'on cherchera ſi une autre egalité poura diviſer exactement la propoſée & cette egalité ſuppoſée.

Exemple.

Ainſi pour réduire

$$\begin{array}{llllll} x^5 * & + 4ab x^3 & + 30b^3 xx & + 34ab^3 x & + 20ab^4 & = 0, \\ & + bb & - 10abb & + 7a^4 & + 10a^4 & \\ & + \frac{a^4}{bb} & - \frac{2a^4}{b} & & & \end{array}$$

je ſuppoſe que quelqu'une des lettres que cette egalité renferme eſt egale à zero, comme par exemple la lettre a, & faiſant evanoüir tous les produits qui renferment a, je fais du reſte l'egalité $x^5 * + bbx^3 + 3b^3xx = 0$, ou bien diviſant tout par xx, $x^3 * + bbx + 3b = 0$, enſuite je cherche ſi quelque egalité ou quelque diviſeur commun peut diviſer exactement la propoſée & celle-cy, & je trouve $xx - 3bx + 10bb = 0$, qui les diviſe exactement toutes deux. Et parceque cette egalité diviſe la propoſée ſans reſte, elle eſt l'une de celles qui l'ont formée par leur produit. La diviſion reduit la propoſée à cette autre egalité de trois degrez,

$$\begin{array}{llll} x^3 + 3bxx & + 4abx & + 2abb & = 0. \\ & + \frac{a^4}{bb} & + \frac{a^4}{b} & \end{array}$$

LXXIX. Ces regles ſervent toûjours pour trouver les egalitez litterales dont le produit a formé la propoſée, lorſque l'une de ces egalitez renferme quelque grandeur qui ne ſe trouve point dans l'autre. Et il n'eſt pas neceſſaire pour operer ſelon ces regles que la propoſée ſoit ſans fractions, ni delivrée de ſes grandeurs incommenſurables. Je pourois ajoûter d'autres regles ſemblables pour abbreger le travail de la reduction des egalitez litterales. Mais l'on poura lire celles que Monſieur Hudde en a données dans la premiere de ſes lettres. Je me contenteray d'avertir que ſi l'on ne découvre rien par le moyen des regles precedentes, l'on poura exprimer par nombres toutes les grandeurs connües de leurs termes, & alors l'on en trouvera toûjours les racines qui ne ſeront point incommenſurables par la regle generale expliquée 73. S. ou bien on les rapportera à ce que nous expliquerons dans le Livre ſuivant.

* * *

ELEMENS DES MATHEMATIQUES

LIVRE QUATRIE'ME.

DE LA RESOLUTION DES EGALITEZ SELON LEURS DIFFERENS DEGREZ.

APRE'S avoir parlé de la reſolution des egalitez en general, nous en dirons auſſi quelque choſe en particulier, & nous traitterons icy de ces égalitez ſelon l'ordre de leurs degrez differens Nous ſuppoſerons d'ordinaire que toutes les racines qu'elles renferment ſont inégales, parcequ'on a veu dans le Livre precedent les moyens de reconnoître la valeur de celles qui ſont égales, & que la methode qui ſert pour découvrir les inégales, ſert auſſi pour découvrir les autres. Mais avant que d'expliquer ces égalitez, nous ferons preceder quelque choſe des changemens principaux que l'on peut faire de leurs racines, lors même que l'on ne les connoît pas encore.

PREMIER PROBLEME.

I. Augmenter d'une grandeur donnée chaque racine d'une egalité, ſans en connoître aucune.

1°. Au lieu de chaque racine inconnuë de l'egalité, l'on en ſuppoſe une autre, qui moins la grandeur donnée, ſoit egale à la premiere.

2°. Dans l'egalité propoſée, au lieu de l'inconnuë l'on y met ſa valeur; au lieu du quarré de l'inconnuë, le quarré de cette valeur; au lieu du cube de l'inconnuë, le cube de cette valeur, & ainſi de ſuite.

Exemple.

Pour augmenter de 3 chaque racine de l'egalité $z^4 + 4z^3 - 19zz - 106z - 120 = 0$, 1°. Je ſuppoſe $z = y - 3$. 2°. Dans l'egalité propoſée j'écris

$y-3$ au lieu de z, au lieu de zz, j'ecris $yy-6y+9$, c'eſt à dire le quarré de $y-3$, au lieu de z^3, j'écris $y^3-9yy+27y-27$, enfin au lieu de z^4, j'écris $y^4-12y+54yy-108y+81$, c'eſt à dire le quarré du quarré de $y-3$. Et décrivant par ordre toute la ſomme de l'egalité propoſée, je trouve $y^4-8y^3-1yy+8y=0$, dont les racines ſont les mêmes que celles de la propoſée diminuées chacune de 3.

$$\begin{array}{r}
y^4-12y^3+54yy-108y+81=z^4 \\
+4y^3-36yy+108y-108=4z^3 \\
-19yy+114y-171=-19zz \\
-106y+318=-106z \\
-120=-120 \\
\hline
y^4-8y^3-1yy+8y\ *\ =0=z^4+4z^3-19zz-106z-120=0. \\
\hline
y \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad
\end{array}$$

ou $y^3-8yy-1y+8=0$.

Et parceque la propoſée ſe reduit au troiſiéme degré, il s'enſuit que l'une des racines eſtoit -3, c'eſt à dire la negation du nombre 3, que l'on a ajoûté à chaque racine. C'eſt pourquoy la propoſée z^4 &c. poura eſtre diviſé par $z+3=0$, ce qui la reduira à cette egalité du troiſieme degré $z^3+1zz-22z-40=0$.

Pour les trois autres racines, la vraye qui eſtoit $+5$, eſt devenuë $+3$, & les deux fauſſes -2 & -4 ſont devenües $+1$, & -1, l'une eſt devenuë vraye, & l'autre eſt reſtée fauſſe.

SECOND PROBLEME.

Diminuer d'une grandeur donnée chaque racine d'une galité propoſée. II.

1°. Au lieu de l'inconnuë l'on en ſuppoſe une autre qui plus la grandeur donnée ſoit egale à cette racine. En ſuite de quoy l'on ſubſtituë cette valeur comme au Probleme precedent.

Exemple.

Pour diminuer de 3 chaque racine de l'egalité $z^4+4z^3-19zz-106z-120=0$, je ſuppoſe $z=y+3$, & j'écris cette valeur au lieu de z, ſon quarré au lieu de zz &c. apres quoy décrivant par ordre toute la ſomme de l'egalité propoſée, je trouve enfin $y^4+16y^3+71yy-4y-420=0$; dont les racines ſont les mêmes que celles de l'egalité propoſée diminuées chacune de 3 La vraye, qui eſtoit $+5$, eſt devenuë $+2$, & les trois autres fauſſes qui eſtoient -2, -3, & -4, ſont devenuës -5, -6, & -7,

$$\begin{array}{r}
y^4+12y^3+54yy+108y+81=z^4 \\
+4y^3+6yy+108y+08=4z^3 \\
-19yy-14y-171=-19zz \\
-106y-318=-106z \\
-120-120 \\
\hline
y^4+16y^3+71yy-4y-420=0=z^4+4z^3-19zz-106z-120=0.
\end{array}$$

TROISIÉME PROBLEME.

III. Multiplier chaque racine d'une egalité par une grandeur donnée.

1°. L'on ſuppoſe que le produit de l'inconuüe par la grandeur eſt egale à une autre inconnuë, & l'on ſubſtituë par toute l'egalité la ſeconde inconnuë au lieu de la premiere.

2°. L'on multiplie la grandeur connuë au ſecond terme par celle qui doit multiplier chaque racine, & par ſon quarré la grandeur connuë au troiſiéme terme, & par ſon cube celle du quatriéme. Et ainſi du reſte.

Soit par exemple une egalité donnée comme $x^3 - axx + abx - abc = 0$, & qu'il faille multiplier chaque racine par c, en ſuppoſant $cx = y$, l'on écrira ſelon les regles du Probleme, $y^3 - acyy + abccy - abc^4 = 0$. Et cette egalité aura pour ſes racines les mêmes que la propoſée multipliées chacune par c. Car par la ſuppoſition $cx = y$. Donc $ccxx = yy$, & $c^3x = y^3$. Donc $c^3x^3 - ac^3xx + abc^3x - abc^4 = 0 = y^3 - acyy + abccy - abc^4 = 0$.

Quoy que les termes evanoüis multipliés par les grandeurs données ou par quelqu'une de leurs puiſſances, le produit ne puiſſe eſtre que zero, cependant il faut conſiderer ces termes comme ayant eſté multipliez, & augmenter par conſequent autant de fois le degré de la grandeur donnée, qu'il manquera de termes conſecutifs.

QUATRIÉME PROBLEME.

IV. Diviſer chaque racine d'une egalité par une grandeur donnée.

Il faudra faire comme dans le Probleme precedent, ſe ſervant par tout de la diviſion au lieu de la multiplication.

Cecy peut ſervir en pluſieurs rencontres pour abbreger le nombre des diviſeurs du dernier terme des egalitez propoſées, & pour ſuivre par conſequent avec plus de facilité la Regle generale expliquée *III*. 73.

Exemple.

Par exemple ayant l'egalité $y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 = 0$, dont le dernier terme peut eſtre diviſé ſans reſte par les nombres 1, 2, 4, 8, 16, 32, & 64, ſi l'on diviſe chaque racine par 2. l'on ſuppoſera $\frac{1}{2}yy = z$, & au lieu de la propoſée, l'on écrira celle-cy $z^3 - 4zz - 31z - 8 = 0$, dont le dernier terme 8 a moins de diviſeurs que 64, & qui poura eſtre diviſée par $z - 8 = 0$, l'expoſant ſera l'egalité de deux degrez $zz + 4z + 1 = 0$, & $\frac{1}{2}yy = z$, l'on connoîtra que $yy = 2z$ ſera le nombre 16, c'eſt à dire 2 fois la racine trouvée 8.

La démonſtration de ce Probleme eſt reciproque de celle du Probleme precedent.

CINQUIÉME PROBLEME.

V. Delivrer une egalité propoſée de toutes les fractions que ſes termes contiennent.

L'on multiplie ſelon les regles du Probleme troiſiéme chaque racine par le plus grand conſequent des fractions qui ſe trouvent au ſecond terme : Et

Et ſi ce terme n'a point de fraction, par la racine du plus grand conſequent qui ſe trouve au troiſiéme terme, lorſqu'elle eſt commenſurable, & ſi elle ne l'eſt pas, par le conſequent tout entier. Mais ſi le troiſiéme terme n'a point de fractions, on multiplie chaque racine par la racine cubique du plus grand conſequent qui ſe trouve au quatriéme terme, l'orſque cette racine eſt commenſurable, & ſi elle ne l'eſt pas par le conſequent entier. Et ainſi de ſuite.

Premier Exemple.

Pour délivrer l'egalité

$$\begin{array}{llll} z^3 & -\frac{1}{2}czz & +\frac{1}{4}acz & -\frac{1}{16}abc = 0, \\ & -\frac{1}{2}a & +\frac{1}{8}ab & \\ & -\frac{1}{4}b & +\frac{1}{8}bc & \end{array}$$

de toutes les fractions que ſes termes contiennent, je choiſis 4 au ſecond terme, c'eſt à dire le plus grand conſequent de toutes les fractions que ce terme contient, & je multiplie par 4 chaque racine de l'egalité propoſée, ce qui me donne l'egalité ſans fraction

$$\begin{array}{llll} y^3 & -2cyy & +4ac & -4abc = 0. \\ & -2a & +2ab & \\ & -b & +2bc & \end{array}$$

Second Exemple.

Lorſqu'aprés la premiere operation, il reſte encore quelque fraction dans la nouvelle egalité, cette operation doit eſtre reïterée juſques à ce qu'il n'en reſte plus. Par exemple pour délivrer de fractions l'egalité $z^3 - \frac{5}{4}zz + \frac{7}{12}z - \frac{1}{12} = 0$, je multiplie premierement chaque racine par 4, conſequent de $\frac{5}{4}$, ce qui me donne $y^3 - 5yy + \frac{28}{3}y - \frac{16}{3} = 0$, qui contient encore des fractions, c'eſt pourquoy pour l'en délivrer, je multiplie chaque racine par 3 conſequent de la grandeur connuë au troiſiéme terme, & j'ay enfin l'egalité $x^3 - 15xx + 84x - 144 = 0$, qui ne renferme plus aucunes fractions.

L'on peut ſouvent par une operation preſque ſemblable à celle du Probleme, delivrer les egalitez des grandeurs incommenſurables que leurs termes contiennent. Mais il ne faut pas d'abord multiplier chaque racine par les conſequents des fractions qui s'y trouvent. VI.

Par exemple pour délivrer l'egalité $z^3 - zz\sqrt{3} + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}} = 0$, des nombres incommenſurables qui s'y trouvent, l'on multiplie chaque racine de l'egalité par $\sqrt{3}$, ce qui donne $y^3 - 3yy + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} = 0$, qui n'a plus rien d'incommenſurable; Et cette egalité nouvelle eſtant delivrée de ſes fractions, l'on a $x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0$, qui n'a point de grandeurs incommenſurables ny de fractions. Or diviſant cette egalité par $x - 2 = 0$, l'on trouve pour expoſant de la diviſion l'egalité de deux degrez $xx - 7x + 12 = 0$, laquelle eſtant diviſée par $x - 3 = 0$, laiſſe pour expoſant l'autre ſimple $x - 4 = 0$. Les trois racines de l'egalité $x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0$, ſeront donc 2, 3, & 4; D'où il s'enſuit que les trois de la precedente

$y^3-3yy+\frac{26}{9}y-\frac{8}{9}=0$, ſeront ces trois mêmes racines diviſées chacunē par 3, c'eſt à dire $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$ ou bien 1, & $\frac{4}{3}$. Et parceque les racines de celle-cy ſont les mêmes que celles de la propoſée multipliées chacune par $\sqrt{3}$, il s'enſuit encore que celles de la propoſée ſont $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, & $\frac{4}{3\sqrt{3}}$, ou $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, & $\frac{4}{9}\sqrt{3}$; ce qui eſt la même choſe *par IV. 30. de la premiere Partie.*

SIXIÉME PROBLEME.

VII. Faire evanoüir le ſecond terme d'une egalité propoſée.

Si ce terme a le ſigne —, l'on diminuë chaque racine de la grandeur connuë au ſecond terme diviſée par le nombre des dimenſions du premier.

Et ſi ce terme a le ſigne +, l'on augmente chaque racine de la même grandeur.

Exemple.

Pour évanoüir le ſecond terme de l'egalité $z^4-2az^3\begin{array}{l}+2aa\\-cc\end{array}zz-2a^3z+a^4=0$, $2a$ diviſé par 4, à cauſe que l'egalité eſt du quatriéme degré, l'expoſant eſt $\frac{1}{2}a$. Et parceque le ſecond terme a le ſigne —, chaque racine z ſera diminuée de la grandeur $\frac{1}{2}a$. Suppoſant donc $z-\frac{1}{2}a=y$, l'on aura $z=y+\frac{1}{2}a$. Subſtituant donc au lieu de z ſa valeur $y+\frac{1}{2}a$, au lieu de zz le quarré de ſa valeur, &c. l'on écrira

$$\begin{array}{r}
y^4+2ay^3+\frac{3}{2}aayy+\frac{1}{2}a^3y+\frac{1}{16}a^4=z^4\\
-2ay^3-3aayy-\frac{3}{2}a^3y-\frac{1}{4}a^4=-2az^3\\
+2aayy+2a^3y+\frac{1}{2}a^4=+2aazz\\
-ccyy-accy-\frac{1}{4}aacc=-cczz\\
-2a^3y-a^4=-2a^3z\\
+a^4=+a^4\\
\hline
\end{array}$$

$$\text{ſomme } y^4 \; * \begin{array}{l}+\frac{1}{2}aa\\-cc\end{array}yy\begin{array}{l}-a^3\\-acc\end{array}y\begin{array}{l}+\frac{5}{16}a^4\\-\frac{1}{4}aacc\end{array}=0,=z^4-2az^3\begin{array}{l}+2aa\\-cc\end{array}zz-2a^3z+a^4=0$$

Et connoiſſant la valeur de y, ſi on luy ajoûte $\frac{1}{2}a$, l'on aura la valeur de z.

Mais parceque l'operation ſeroit trop longue en pluſieurs rencontres, ſur tout dans les egalitez numeriques, c'eſt à dire dans celles dont les grandeurs connuës ſont exprimées par nombres, l'on poura beaucoup abreger ſon calcul en ſuppoſant qu'une ſeule lettre marque la grandeur connuë du ſecond terme diviſée par le nombre des dimenſions du premier, & à la fin de l'operation remettant au lieu de cette lettre la grandeur qu'on luy aura ſuppoſée egale.

Exemple.

Si je voulois par exemple evanoüir le ſecond terme de l'egalité

$y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 = 0$, je diviſerois 16 par 4, & je ſuppoſerois l'expoſant de la diviſion qui eſt 4, egal à p. Enſuite parceque le ſecond terme a le ſigne $+$, j'augmenterois chaque racine de la grandeur $p = 4$. Donc $y = x - p$, Ainſi au lieu de y, j'écrirois ſa valeur $x - p$, au lieu de yy le quarré de ſa valeur, & ainſi du reſte.

$$\begin{array}{llllll}
x^4 & -4px^3 & +6ppxx & -4p^3x & +p^4 & = y^4 \\
 & +4px^3 & -12ppxx & +12p^3x & -4p^4 & = +16y^3 \\
 & & +71xx & -142px & +71pp & = 71yy \\
 & & & -4x & +4p & = -4y \\
 & & & & -420 & = -420 \\
\hline
x^4 & * & -6ppxx & +8p^3x & -3p^4 = 0, & = y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 = 0. \\
 & & +71 & -142p & +71pp & \\
 & & & -4 & +4p & \\
 & & & & -420 &
\end{array}$$

Et remettant par tout 4 au lieu de p, j'aurois l'egalité $x^4 * - 25xx - 60x - 36 = 0$, dont le ſecond terme eſt evanoüi, & ſes racines ſeront les mêmes que celles de la propoſée y^4 &c. augmentées chacune de 4. De ſorte que connoiſſant la valeur de x, & luy ajoûtant 4, l'on aura la valeur de y. Tout cela eſt evident par ſoy-même, & par les Problemes 1. & 2.

COROLLAIRE.

VIII. En toute egalité dont le ſecond terme eſt evanoüi, il y aura toûjours egalité ſous differens ſignes entre toutes les racines qui ont le ſigne $+$, & toutes celles qui ont le ſigne $-$, puiſque la ſomme des unes & des autres eſt egale à zero par le Probleme que nous venons d'expliquer.

DE LA RESOLUTION DES EGALITEZ DE DEUX DEGREZ.

IX. Pour rapporter tous les differens cas des egalitez de deux degrez à une ſeule regle, l'on en fera evanoüir le ſecond terme. Apres quoy l'une des racines ſera connuë immediatement, & l'on aura l'autre en diviſant l'egalité par une ſimple de l'inconnuë plus la racine decouverte, ſi elle eſt fauſſe, & moins cette même racine ſi elle eſt vraye.

Dans la ſuite pour abbreger nos expreſſions nous appellerons n la grandeur connuë au ſecond terme d'une egalité propoſée, p la grandeur connuë au troiſiéme; celle du quatriéme q; celle du cinquiéme r, du ſixiéme, $ſ$; du ſeptiéme, t; &c

Exemple.

Soit propoſée l'egalité $zz - nz + p = 0$, ſon ſecond terme eſtant evanoüy, l'on aura $\begin{array}{l} yy * - \frac{1}{4}nn = 0. \\ \quad\quad + p \end{array}$ Donc $yy = \frac{1}{4}nn - p$, & $y = \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$. Or pour evanoüir le ſecond terme de la propoſée, l'on a ſuppoſé $z = y + \frac{1}{2}n$. Donc $z = \frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$, ou bien la rendant egale à zero, $z - \frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} = 0$.

C'eſt pourquoy ſi l'on diviſe la propoſée $zz - nz + p = 0$, par cette ſimple egalité $z - \frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} = 0$, l'expoſant donnera l'autre ſimple $z - \frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} = 0$. Les deux racines ou valeurs de z ſeront donc toutes deux vrayes, la grande $\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$, & la petite $\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$. Si toutefois $\frac{1}{4}nn$ eſt plus grand que p; je dis que ces racines ſeront toutes deux vrayes, & la raiſon en eſt claire. Car $\frac{1}{2}n$ eſtant la racine de $\frac{1}{4}nn$, & $\sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$ eſtant neceſſairement au deſſous de $\sqrt{\frac{1}{4}nn}$, il s'enſuit que la plus petite racine $\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$ doit eſtre poſitive, puiſque la poſition de $\frac{1}{2}n$ donne plus que ne peut retrancher la negation de $\sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$.

Mais ſi $\frac{1}{4}nn$ eſt plus petit que p, les racines ſeront toutes deux imaginaires, *par III.2.* parceque ces racines $\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$, & $\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$, renfermeront chacune la racine d'une grandeur negative.

Et ceci peut encore eſtre ainſi demontré. En toute egalité de deux degrez le dernier terme doit eſtre un plan de deux racines, dont la grandeur connüe au ſecond terme doit renfermer la ſomme *par III.39.* Or le quarré de la moitié de la ſomme de deux grandeurs ſurpaſſe toûjours leur plan de tout le quarré de la moitié de leur difference, *par I.20.* Le dernier terme p ne peut donc pas eſtre un plan de deux racines, puiſqu'on ſuppoſe que ce plan ſurpaſſe le quarré de la moitié de leur ſomme. L'egalité eſt donc imaginaire. Si l'on veut ſçavoir quelle en eſt la contradition, il faudra retrancher $\frac{1}{4}nn$ de p, & le reſte ſera ce que l'on appelloit égal à zero, & ce qui rendoit impoſſible le Probleme repreſenté par l'egalité propoſée.

C'eſt ainſi que l'egalité $zz - 2az + 4aa$ ſera reconnuë imaginaire de toute la grandeur $3aa$. Car $p = 4aa$, $\frac{1}{2}n = a$, & $\frac{1}{4}nn = aa$. Et ainſi $p - \frac{1}{4}nn = 4aa - aa = 3aa$. Le reſte $3aa$ eſt ce qui rend l'egalité propoſée & ſes deux racines imaginaires.

Que ſi ce reſte $3aa$ eſt retranché de l'egalité propoſée, l'on aura $zz - 2az + aa = 0$, qui ſera une egalité réelle, & ſes racines qui ſeront a & a ſeront toutes deux vrayes & egales entr'elles. Ce qui arrive parceque $p = \frac{1}{4}nn$, & qu'ainſi $\sqrt{\frac{1}{4}nn - p} = 0$, de ſorte que les deux racines $\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$ & $\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$, ne ſont chacune que $\frac{1}{2}n$.

DE LA RESOLUTION DES EGALITEZ

PAR TRANSFORMATION.

X. Pour reſoudre les egalitez compoſées, on leur donne des formes differentes, en exprimant tous les rapports connus dans leurs termes par des grandeurs inconnües, qui ſont pourtant conſiderées comme connuës. Et une telle methode eſt ce qu'on appelle *transformation des egalitez.*

Il ne ſera pas inutile d'y preparer l'eſprit de ceux qui commencent par des exemples de cette transformation qui ſoient tirez des egalitez faciles & aſſez ſimples comme ſont celles de deux degrez.

Pour les egalitez de deux degrez.

XI. Pour transformer l'egalité $zz-nz+p=0$, ſi $\frac{1}{4}nn$ n'eſt point au deſſous de p, la diſpoſition des ſignes apprend que ſes racines ſont toutes deux vrayes. Soit donc $2a$ la ſomme de ces deux racines, & $2b$ leur difference, la plus grande ſera $a+b$, & la plus petite $a-b$, *par I.* 18. De ſorte que ces deux racines ſeront priſes chacune pour la valeur de z, qui ſera également conçeuë comme l'expreſſion de l'une, ou comme celle de l'autre. C'eſt pourquoy l'on aura les deux egalitez ſimples $z-a-b=0$, & $z-a+b=0$, & leur produit donnera l'egalité de deux degrez $zz-2az+aa=0$, qui eſt conçeuë comme eſtant la même que l'egalité propoſée $zz-nz+p=0$. Et ainſi l'on dira qu'elle en eſt la transformée. Tous les termes de l'une ſeront donc egaux à tous les termes de l'autre, chacun à chacun & dans un même ordre. L'on aura donc ces trois egalitez $zz=zz$, $2az=nz$, & $aa-bb=p$. La premiere $zz=zz$, ne peut avoir aucun uſage, parcequ'elle ne peut rien faire connoître. Mais la ſeconde $2az=nz$ ſe reduit à $2a=n$. Donc $a=\frac{1}{2}n$, & $aa=\frac{1}{4}nn$. Or la troiſiéme eſt $aa-bb=p$. Donc $aa=p+bb$. Donc $\frac{1}{4}nn=p+bb$. Et par tranſpoſition $\frac{1}{4}nn-p=bb$. Donc $\sqrt{\frac{1}{4}nn-p}=b$. Les deux racines vrayes ſeront donc par conſequent $a+b=\frac{1}{2}n+\sqrt{\frac{1}{4}nn-p}$, & $a-b=\frac{1}{2}n-\sqrt{\frac{1}{4}nn-p}$.

Mais ſi la propoſée eſtoit $zz+nz+p=0$, & que $\frac{1}{4}nn$ ne fuſt point au deſſous de p, la diſpoſition des ſignes marqueroit deux racines fauſſes, que j'appelle $-a-b$, & $-a+b$. Donc $z+a+b=0$, & $z+a-b=0$, & leur prod. $zz+2az+\begin{array}{l}aa\\-bb\end{array}=0$, ſera la transformée de la propoſée $zz+nz+p=0$. Comparant donc les termes, l'on trouvera $a=\frac{1}{2}n$, & $b=\sqrt{\frac{1}{4}nn-p}$. De ſorte que les racines, qui ſont toutes deux fauſſes, ſeront celles-cy, $-a-b=-\frac{1}{2}n-\sqrt{\frac{1}{4}nn-p}$, & $-a+b=-\frac{1}{2}n+\sqrt{\frac{1}{4}nn-p}$.

L'on fera à peu pres la même choſe dans tous les autres cas, de ſorte que toute égalité de deux degrez ayant neceſſairement $-$ ou $+n$ avec $+p$, ce qui fait deux cas, ou bien $-$ ou $+n$ avec $-p$, ce qui fait deux autres cas, toutes les egalitez de deux degrez ſe reduiront à quatre cas differens, dont chacun ſera facilement determiné.

PREMIER CAS. $zz-nz+p=0$.

Car ſi $zz-nz+p=0$. Donc $z=\frac{1}{2}n+\sqrt{\frac{1}{4}nn-p}$, & $z=\frac{1}{2}n-\sqrt{\frac{1}{4}nn-p}$.

Soit l'egalité $zz - 6z + 8 = 0$. Donc $z = 3 + \sqrt{1} = 4$, & $z = 3 - \sqrt{1} = 2$.

Icy les racines ſeront toûjours toutes deux vrayes ſi $\frac{1}{4}nn$ eſt au deſſus de p, car $\frac{1}{2}n$ ſurpaſſe $\sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$, mais ſi $\frac{1}{4}nn$ eſt au deſſous de p, ces deux racines ſeront toûjours imaginaires.

SECOND CAS. $zz + nz + p = 0$.

Si $zz + nz + p = 0$. Donc $z = -\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$, & $z = -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$.

Soit l'egalité $zz + 6z + 8 = 0$. Donc $z = -3 - \sqrt{1} = -4$, & $z = -3 + \sqrt{1} = -2$.

Icy les racines ſeront toûjours toutes deux fauſſes ſi $\frac{1}{4}nn$ eſt au deſſus de p, mais ſi $\frac{1}{4}nn$ eſt au deſſous de p, elles ſeront toutes deux imaginaires.

TROISIÉME CAS. $zz - nz - p = 0$.

Les racines ſeront, la vraye $z = \frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn + p}$, & la fauſſe $z = \frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn + p}$.

Soit l'egalité $zz - 6z - 16 = 0$. Donc $z = 3 + \sqrt{25} = 8$, & $z = 3 - \sqrt{25} = -2$.

QUATRIÉME CAS. $zz + nz - p = 0$.

Les racines ſeront, la vraye $z = -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn + p}$, & la fauſſe $z = -\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn + p}$.

Soit l'egalité $zz + 6z - 16 = 0$. Donc $z = -3 + \sqrt{25} = 2$, & $z = -3 - \sqrt{25} = -8$.

Transformation des imaginaires.

Dans ce troiſiéme & quatriéme Cas, les racines ne peuvent jamais eſtre imaginaires, & la propoſée ne peut renfermer aucune contradiction. Pour exprimer par la transformation les egalitez imaginaires & de deux degrez, c'eſt à dire celles qui ont $+p$, & où $\frac{1}{4}nn$ eſt au deſſous de p, puiſque $\frac{1}{4}nn$ eſt appellé aa dans les egalitez precedentes, & que p doit ſurpaſſer $\frac{1}{4}nn = aa$, ſi nous appellons la contradiction bb, la transformée generale de toute egalité imaginaire & de deux degrez ſera $zz - 2az + \begin{smallmatrix} aa \\ +bb \end{smallmatrix} = 0$, pourveu que le ſecond terme ait —, car ſi ce terme a +, cette transformée ſera $zz + 2az + \begin{smallmatrix} aa \\ +bb \end{smallmatrix} = 0$. Et alors la contradiction ſera toûjours bb, c'eſt à dire $p - \frac{1}{4}nn$. La contradiction peut s'appeller auſſi $2bb$, $3bb$, $4bb$, &c. comme on le trouvera plus commode.

DES QUESTIONS INDETERMINE'ES QUI SE RAPPORTENT AU SECOND DEGRE'.

XII. La pluſpart des queſtions indeterminées qui ſe rapportent au ſecond degré, peuvent ſe reſoudre par des nombres entiers en ſe ſervant du troiſiéme principe expliqué *I*. 49.

Par exemple pour trouver trois nombres en progreſſion arithmetique dont le ſolide ſoit quintuple de leur ſomme.

Soient les trois nombres z, $z+y$, & $z+2y$; leur ſolide eſt $z^3+3zzy+2zyy$, & leur ſomme $3z+3y$, dont le quintuple eſt $15z+15y$. Donc $z^3+3zzy+2zyy=15z+15y$. Et diviſant de part & d'autre par $z+y$, l'egalité ſera $zz+2yz=15$, ou bien $zz+2yz-15=0$. Donc $z=-y+\sqrt{yy+15}$, je laiſſe l'autre racine qui eſt fauſſe, afin que la reſolution ſoit poſitive. Or afin de reſoudre cette queſtion, qui eſt indeterminée par nombres entiers, il faut que $yy+15$ ſoit un quarré dont la racine ſoit commenſurable. Soit cette racine appellée $y+a$. Donc $yy+2ay+aa=yy+15$. Et $y=\frac{15-aa}{2a}$.

Soit $a=1$. Donc $y=\frac{14}{2}=7$. $y+a=8$. & $z=-y+\sqrt{yy+15}=-7+8=1$. Les trois nombres ſeront 1, 8, 15; leur ſolide 120 eſt quintuple de leur ſomme 24.

DU TROISIE'ME DEGRE'.

XIII. Toute egalité de trois degrez a trois racines réelles, ou une réelle & deux imaginaires. Les premieres ſont celles qui ſont formées par le produit de trois egalitez ſimples & dont aucune n'eſt imaginaire. Mais les autres peuvent eſtre conceuës comme un produit de deux egalitez l'une ſimple & jamais imaginaire, & l'autre de deux degrez & toûjours imaginaire. Ces deux genres d'egalitez comprennent tout le troiſieme degré. Mais afin de les expliquer plus facilement, nous ſuppoſerons toûjours que l'on en ait évanoüi le ſecond terme.

Transformation des egalitez de trois degrez dont les racines ſont toutes trois réelles.

XIV. Leur ſecond terme eſtant evanoüi, ſi q avoit $+$, en luy donnant $-$ l'on changeroit ſeulement deux racines de vrayes en fauſſes, & une autre de fauſſe en vraye, & la vraye ſous un ſigne different auroit toûjours même grandeur que les deux fauſſes *par* 8. *S*. ſi j'appelle donc la vraie $2a$, & la difference des deux fauſſes $2b$, ces deux fauſſes ſeront $-a-b$, & $-a+b$. C'eſt pourquoy l'on aura les trois egalitez ſimples, $y+a+b=0$, $y+a-b=0$, & $y-2a=0$. Et leur ſolide donnera l'egalité de trois degrez $y^3 * \begin{array}{l}-3aay\\-bb\end{array} \begin{array}{l}-2a^3\\+2abb\end{array} = 0$, qui ſera la transformée de l'egalité propoſée $y^3 * -py-q=0$. Tous les termes de l'une ſeront donc égaux à tous les termes de l'autre, chacun à chacun & dans un même ordre.

S'il arrivoit que les deux racines fauſſes n'euſſent aucune difference, chacune d'elles ſeroit $-a$, la vraye $2a$, & la transformée $y^3 * -3aay-2a^3=0$. Parcequ'alors $-bby$ & $+2abb$ n'auroient aucune valeur, puiſque bb dont la valeur n'eſt que zero, multipliant y & $2a$, ne peut produire que zero.

Transformation des egalitez de trois degrez qui ont une racine réelle & deux imaginaires.

XV. Leur ſecond terme eſtant evanoüi, elles pouront toûjours recevoir l'une ou l'autre de ces deux formes $y^3 * -py-q=0$. & $y^3 * +py-q=0$. Car p aura quelquefois $+$, & quelquefois $-$; & ſi q avoit $+$ en luy donnant $-$, l'on changeroit ſeulement la racine unique de l'egalité de fauſſe en vraye; & cette racine auroit ſous un different ſigne même grandeur que n de l'egalité imaginaire dont le produit par la réelle a formé la propoſée, ou ce qui eſt la même choſe, elle ſeroit egale à la ſomme des deux imaginaires. Si j'appelle donc la racine vraye $2a$, & la contradiction de l'egalité imaginaire $3bb$, les deux egalitez ſeront la réelle $y-2a=0$, & l'autre qui enferme la contradiction, $\begin{array}{l} yy+2ay+aa=0. \\ \quad\;\; +3bb \end{array}$ Et le ſolide de ces deux egalitez qui eſt $\begin{array}{l} y^3 * -3aay-2a^3=0 \\ \qquad\quad +3bb\;\; -6abb \end{array}$ ſera la transformée de l'egalité propoſée $y^3 * -py-q=0$, ſi a eſt plus grand que b, ou bien de l'autre $y^3 * +py-q=0$ ſi a eſt plus petit que b. S'il arrivoit que a fuſt egal à b, le 3^e terme ſeroit nul, & l'egalité $y^3 * * -8a^3=0$ ſeroit la transformée de la propoſée qui ſeroit alors $y^3 * * -q=0$. auquel cas tout ſeroit reſolu, car l'une des racines ſeroit $y=\sqrt{\ } C.q$, ce qui reduiroit l'egalité propoſée au ſecond degré en la diviſant par la ſimple $y-\sqrt{\ } C.q=0$.

Or ſi nous comparons entr'elles les trois eſpeces generales de toutes les egalitez transformées du troiſiéme degré qui ſont celles qui ſuivent;

$$\left.\begin{array}{ll} \text{La } 1^{\text{ere}} & y^3 * -3aay-2a^3=0. \\ \text{La } 2^{\text{e}} & y^3 * -3aay-2a^3=0 \\ & \qquad\quad -bb\;\; +2abb \end{array}\right\} = y^3 * -py-q=0.$$

$$\begin{array}{ll} \text{Et la } 3^{\text{e}} & y^3 * -3aay-2a^3=0 \\ & \qquad\quad +3bb\;\; -6abb \end{array} = \left\{\begin{array}{l} y^3 * -py-q=0. \\ y^3 * +py-q=0. \end{array}\right.$$

nous y remarquerons quelques differences conſiderables, qui nous ſerviront dans la ſuite pour reſoudre les egalitez du troiſiéme degré.

PREMIER CAS. Si $\frac{1}{27}p^3=\frac{1}{4}qq$.

XVI. Car 1°. dans la premiere eſpece qui eſt $\left\{\begin{array}{l} y^3 * -3aay-2a^3=0 \\ y^3 * -py\;-\;q=0 \end{array}\right.$, dans laquelle les deux racines fauſſes ſont egales entr'elles, $\frac{1}{27}p^3=\frac{1}{4}qq$, le cube de $\frac{1}{3}p$ eſt toûjours egal au quarré de $\frac{1}{2}q$. Car $aa=\frac{1}{3}p$, & $a^3=\frac{1}{2}q$. Or a^6 eſt egalement le quarré de aa, ou bien le cube de a^3. Donc $a^6=\frac{1}{27}p^3=\frac{1}{4}qq$.

Dans ce premier cas la racine vraye, qui eſt $2a$, ſera toûjours $\frac{q}{\frac{1}{3}p}$, & chaque fauſſe $-\frac{\frac{1}{2}q}{\frac{1}{3}p}$. Car $2a^3=q$ eſtant diviſé par $aa=\frac{1}{3}p$, l'expoſant eſt $2a$. Si on le trouve plus commode, les mêmes racines ſeront auſſi, la vraye $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$, ou bien $2\sqrt{C.\frac{1}{2}q}$; & chaque fauſſe $-\sqrt{\frac{1}{3}p}$, ou bien $-\sqrt{C.\frac{1}{2}q}$.

SECOND CAS. Si $\frac{1}{27}p^3$ eſt plus grand que $\frac{1}{4}qq$.

Dans la ſeconde eſpece, qui eſt $\left\{\begin{array}{l} y^{3*} - 3aay - 2a = 0, \\ \quad\;\; - bb \;\; + 2abb \\ \hline y^{*} - py - q = 0 \end{array}\right.$ dans laquelle XVII.
une racine eſt vraye, & les deux autres fauſſes & inégales entr'elles, $\frac{1}{27}p^3$ eſt plus grand que $\frac{1}{4}qq$, le cube de $\frac{1}{3}p$ ſurpaſſe toûjours le quarré de $\frac{1}{2}q$. Car le cube $\frac{1}{27}p^3 = a^6 + a^4bb + \frac{1}{3}aab^4 + \frac{1}{27}b^6$, & le quarré $\frac{1}{4}qq = a^6 - 2a^4bb + aab^4$. Or retranchant le quarré $a^6 - 2a^4bb + aab^4$, du cube $a^6 + a^4bb + \frac{1}{3}aab^4 + \frac{1}{27}b^6$, il reſte $3a^4bb - \frac{2}{3}aab^4 + \frac{1}{27}b^6$, & ce reſte eſt poſitif, car la racine $-a+b$ eſtant negative, puiſque les deux $-a-b$ & $-a+b$, ſont chacune fauſſe, il faut neceſſairement que a ſoit au deſſus de b, & ainſi la ſeule partie $3a^4bb$ ſurpaſſera l'autre partie $\frac{2}{3}aab^4$ qui ſe trouve avec $-$ dans le reſte, parceque chacune de ces parties eſtant diviſée également par $aabb$, le premier expoſant $3aa$ ſurpaſſe le ſecond $\frac{2}{3}bb$. Il eſt donc clair que dans ce ſecond cas où une racine eſt vraye, & les deux autres fauſſes, le cube $\frac{1}{27}p^3$ eſt plus grand que le quarré $\frac{1}{4}qq$.

Dans cette eſpece 1°. le quarré $4aa$ de la racine vraie $2a$ eſt toûjours au XVIII.
deſſus de $3aa+bb$. Car la racine $-a+b$ eſtant fauſſe, la grandeur a doit neceſſairement ſurpaſſer b, & par conſequent le quarré aa ſurpaſſera le quarré bb. Le quarré $4aa = 3aa + aa$ eſt donc au deſſus de $p = 3aa + bb$.

2°. Le quarré $aa + 2ab + bb$ de la fauſſe racine $-a-b$ eſt toûjours au deſſous de $p = 3aa + bb$. Car retranchant $aa + bb$ de part & d'autre, le reſte du quarré ſera $2ab$, & le reſte de p ſera $2aa$. Or $2ab$ eſt plus petit que $2aa$, puiſque $2a$ diviſant l'un & l'autre, le premier expoſant ſera b qui eſt plus petit que le ſecond expoſant, qui eſt a.

3°. Et à plus forte raiſon le quarré de $aa - 2ab + bb$ de la fauſſe racine XIX.
$-a+b$ ſera encore au deſſous de p, puiſqu'il eſt au deſſous du quarré precedent $aa + 2ab + bb$, qui eſt déja au deſſous de p.

Dans la même eſpece, ſi l'on choiſit $4aa$ qui eſt un quarré au deſſus de XX.
$p = 3aa + bb$, & qu'on prenne la difference de ce quarré à la grandeur connuë p, en diviſant le terme q par cette difference, l'expoſant ſera la vraye racine $2a$, qui eſt auſſi la racine du quarré choiſi $4aa$. Car la difference du quarré $4aa$ à $p = 3aa + bb$ eſt $aa - bb$, & $q = 2a^3 - 2abb$. Donc $\frac{q}{aa-bb} = \frac{2a^3 - 2abb}{aa-bb} = 2a$. Le terme q diviſé par la difference eſt égal à la vraye racine $2a$, ou bien à la racine du quarré choiſi $4aa$, ce qui eſt la même choſe.

C'eſt pourquoy ſi la vraye racine $2a$ eſt commenſurable, l'on trouvera toû- XXI.

jours un quarré au deſſus de p tel que la difference de ce quarré à p diviſant le terme q, l'expoſant donnera la vraye racine de l'egalité, qui ſera auſſi la racine du quarré pris au deſſus de p.

XXII. Et cette vraye racine $2a$ eſtant découverte, chaque fauſſe le ſera auſſi, car $aa\frac{-2a^3+2abb}{2a}=aa-\frac{q}{2a}$, donnera le quarré bb. Lon aura donc $b=\sqrt{aa-\frac{q}{2a}}$. Et ainſi les deux racines fauſſes ſeront, l'une $-a-b=-a-\sqrt{aa-\frac{q}{2a}}$, & l'autre $-a+b=-a+\sqrt{aa-\frac{q}{2a}}$.

XXIII. Dans la même eſpece ſi l'on choiſit le quarré $aa+2ab+bb$, qui eſt au deſſous de p, & qu'on prenne $2aa-2ab$, c'eſt à dire la difference de $3aa+bb=p$ à ce quarré, en diviſant $-q$ par cette difference, l'expoſant ſera la fauſſe racine $-a-b$, qui eſt auſſi la racine du quarré choiſi $aa+2ab+bb$. Car $\frac{-q}{2aa-2ab}=\frac{-2a^3+2abb}{2aa-2ab}=-a-b$.

XXIV. C'eſt pourquoy ſi la fauſſe racine $-a-b$ eſt commenſurable, l'on trouvera toûjours un quarré au deſſous de p tel que la difference de p à ce quarré diviſant $-q$, l'expoſant donnera la fauſſe racine de l'egalité $-a-b$, qui ſera auſſi la racine du quarré pris au deſſous de p.

XXV. Et cette racine eſtant découverte les deux autres le ſeront auſſi. Car la ſomme de ces deux racines qui ſont $2a$ & $-a+b$ ſera $a+b$, & leur plan ſera $\frac{q}{-a-b}=\frac{-2a^3-2abb}{-a-b}$, puiſque le terme q eſt le ſolide des trois. Donc *par I. 19.* le quarré de la moitié de leur difference ſera $\frac{1}{4}aa+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb\frac{-2a^3+2abb}{-a-b}$, c'eſt à dire $\frac{9}{4}aa-\frac{3}{2}ab+\frac{1}{4}bb$, & la racine de ce quarré ou la moitié de la difference ſera $\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}b$. La vraye ſera donc $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}ab+\frac{1}{2}bb\frac{-2a^3+2abb}{-a-b}}$, c'eſt à dire $2a$, & l'autre racine fauſſe ſera $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb\frac{-2a^3+2abb}{-a-b}}$, c'eſt à dire $-a-b$.

XXVI. Enfin dans cette même eſpece, ſi l'on choiſit le quarré $aa-2ab+bb$, qui eſt encore au deſſous de p, & qu'on diviſe $-q$ par $2aa+2ab$ difference de $3aa+bb=p$ à ce quarré, l'expoſant $\frac{-q}{2aa+2ab}$ ſera la racine fauſſe de l'egalité $-a+b$ qui eſt auſſi la racine du quarré choiſi $aa-2ab+bb$, car $\frac{-q}{2aa+2ab}=\frac{-2a^3+2abb}{2aa+2ab}=-a+b$.

XXVII. C'eſt pourquoy ſi la fauſſe racine $-a+b$ eſt commenſurable, l'on trouvera toûjours un quarré au deſſous de p tel que la difference de p à ce quarré diviſant q, l'expoſant donnera la fauſſe racine de l'egalité $-a+b$, qui ſera auſſi la racine du quarré pris au deſſous de p.

XXVIII. Et ſi pour abreger, l'une des fauſſes racines eſtant découverte, on l'appelle

$=d$, les deux autres ſeront toûjours, la vraye $2a=\frac{1}{2}d+\sqrt{\frac{1}{4}dd+\frac{q}{d}}$, & la fauſſe $-a-b=\frac{1}{2}d-\sqrt{\frac{1}{4}dd+\frac{q}{d}}$.

TROISIE'ME CAS. Si $\frac{1}{27}p^3$ eſt plus petit que $\frac{1}{4}qq$.

3°. Dans la troiſiéme eſpece enfin, qui eſt $\left\{\begin{array}{l} y^3\ast -3aay -2a^3=0. \\ \quad\quad +3bb \quad -6abb \\ \hline \left\{\begin{array}{l} y^3\ast - py - q = 0 \\ \hline y^3\ast + py - q = 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$ XXIX.

dans laquelle une racine eſt vraye, & les deux autres imaginaires, ſi l'egalité a $-p$; $\frac{1}{27}p^3$ eſt toûjours plus petit que $\frac{1}{4}qq$, le cube de $\frac{1}{3}p$ ſurpaſſe toûjours le quarré de $\frac{1}{2}q$. Car l'egalité ayant $-p$, la grandeur a ſurpaſſera la grandeur b, & alors le cube $\frac{1}{27}p^3$ ſera $a^6-3a^4bb+3aab^4-b^6$, & le quarré $\frac{1}{4}qq$ ſera $a^6+6a^4bb+9aab^4$. Or retranchant le cube du quarré, l'on trouvera le reſte poſitif $9a^4bb+6aab^4+b^6=\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3$. Et tirant la racine quarrée de part & d'autre $3aab+b^3=\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}$. Or ajoûtant la racine $3aab+b^3=\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}$ à $a^3+3abb=\frac{1}{2}q$, l'on aura l'egalité $a^3+3aab+3abb+b^3=\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}$. Et tirant la racine cubique de part & d'autre, $a+b=\sqrt{C.\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{2}p^3}}$. Or $\frac{1}{3}p=aa-bb$ eſt le plan de $a+b$ par $a-b$. Diviſant donc $\frac{1}{3}p$ qui eſt la valeur de $aa-bb$ par la valeur de $a+b$ que nous venõs de découvrir, l'on aura $a-b=\frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt{C.\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}}$. Et enfin ajoûtant $a+b$ & $a-b$ en une ſomme, la vraye racine ſera

$$2a=\sqrt{C.\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}+\frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt{C.\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}},$$

& la contradiction des deux imaginaires $3bb$ ſera $3aa-p$.

Mais ſi l'egalité propoſée avoit $+p$, la grandeur b ſurpaſſeroit la grandeur a, & alors le cube $\frac{1}{27}p^3$ ſeroit $-a^6+3a^4bb-3aab^4+b^6$, & le quarré $\frac{1}{4}qq$ ſera toûjours $a^6+6a^4bb+9aab^4$. Or ajoûtant le cube au quarré, l'on trouvera la ſomme ou l'egalité $9a^4bb+6aab^4+b^6=\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3$. Et tirant la racine de part & d'autre $3aab+b^3=\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$. Or joignant cette egalité à celle qu'on a tirée du dernier terme $a^3+3abb=\frac{1}{2}q$, l'on aura XXX.

$a^3+3aab+3abb+b^3=\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$. Et tirant la racine cubique de part & d'autre, $a+b=\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p}}$. Or $aa-bb=-\frac{1}{3}p$. Donc $a-b=\frac{aa-bb}{a+b}=\frac{-\frac{1}{3}p}{\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}}$. La vraye racine ſera donc $2a=\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}\;\frac{-\frac{1}{3}p}{\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}}$, & la contradiction des deux imaginaires ſera $3aa+p$.

Autre reſolution ſi deux racines ſont imaginaires.

XXXI. Dans la transformée $\begin{array}{l} y^3 * -3aay-2a^3=0, \\ \quad\;\; +3bb\;\; -6abb \end{array}$ l'on connoiſt au troiſiéme terme la ſomme $3aa-3bb$, ſi a eſt au deſſus de b, ou bien $3bb-3aa$, ſi b eſt au deſſus de a, l'on connoit donc auſſi le tiers de la même ſomme, c'eſt à dire $aa-bb$, ou bien $bb-aa$, & au troiſiéme terme l'on connoiſt la ſomme $2a^3+6abb$. Or la premiere ſomme $aa-bb$, ou bien $bb-aa$ eſt le prduit des deux grandeurs $a+b$ & $a-b$ & la ſeconde $2a^3+6abb$ eſt la ſomme des cubes de ces mêmes grandeurs. Les deux premieres des reſolutions données *l.* 39. donneront donc chacune des grandeurs $a+b$ & $a-b$; & par conſequent leur ſomme $2a$ & la contradiction $3bb$ ſeront facilement determinées.

Autre reſolution ſelon Cardan.

XXXII. Dans la même eſpece, ſi l'egalité a $-p$, & qu'on ſuppoſe $a+b=y$, & $a-b=v$, l'on aura $aa-bb=xv$, & $2a^3+6abb=x^3+v^3$. Or $aa-bb=\frac{1}{3}p$, & $2a^3+6abb=q$. Donc $xv=\frac{1}{3}p$, & $x^3+v^3=q$. La premiere $xv=\frac{1}{3}p$ ſe reduit à $v=\frac{p}{3x}$. Donc $v^3=\frac{p^3}{27x^3}$. L'egalité $x^3+v^3=q$ ſera donc $x^3+\frac{p^3}{27x^3}=q$. Et multipliant tout par x^3, elle ſera $x^6+\frac{1}{27}p^3=qx^3$, laquelle eſtant renduë egale à zero, & ſes termes diſpoſez par ordre, l'on aura l'egalité de deux degrez $x^6-qx^3+\frac{1}{2}p=0$. Et ſes deux racines ſeront, la grande $\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}$, & la petite $\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}$. La premiere de ces racines ſera egale à x^3 cube de $x=a+b$, & la ſeconde à y^3 cube de $y=a-b$. C'eſt pourquoy tirant la racine cubique de chacun des deux cubes, & ajoûtant en une ſomme les racines tirées, l'on aura ſelon la regle de Cardan la vraye racine $2a=\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}$.

XXXIII. Mais ſi l'egalité avoit $+p$, en ſuppoſant $a+b=x$ & $a-b=v$, parce que $aa-bb=-\frac{1}{3}p$, l'on trouvera $x^6-qx^3-\frac{1}{27}p^3=0$, dont les racines ſont, la grande $\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$, qui eſt egale à x^3 cube de $x=a+b$,

& la petite $\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$, qui eſt egale à y^3 cube de $y = a - b$. La ſomme de ces deux racines cubiques tirées de ces deux cubes, donnera donc la vraye racine $2a = \sqrt{\mathrm{C}.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p}} + \sqrt{\mathrm{C}.\,\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$.

Dans la troiſiéme eſpece, ſi l'on choiſit le quarré $4aa$ qui eſt toûjours au deſſus de $3aa - 3bb$, valeur de p lorſque l'egalité a $-p$, ou bien de $-p$, lorſque l'egalité a $+p$. & qu'on diviſe q par $aa + 3bb$ difference du quarré $4aa$ à $3aa - 3bb$ (valeur de $+p$ ou de $-p$, de $+p$, ſi p a le ſigne $-$, & de $-p$, s'il a le ſigne $+$;) l'expoſant de la diviſion donnera la racine $2a$, qui ſera auſſi la racine du quarré choiſi au deſſus de $+$ ou bien au deſſus de $-p$. Car $\frac{q}{aa + 3bb} = \frac{2a^3 + 6abb}{aa + 3bb} = 2a$. XXXIV.

C'eſt pourquoy ſi la vraye racine $2a$ eſt commenſurable, l'on trouvera toûjours un quarré au deſſus de $+p$, ſi l'on avoit $-p$; tel que la difference de ce quarré à $+p$ ou bien à $-p$ donnera la racine $2a$, qui ſera auſſi la racine du quarré pris au deſſus de $+$ ou de $-p$. XXXV.

Et cette racine eſtant découverte, la contradiction des deux autres le ſera auſſi. Car cette contradiction eſt $3bb$. Or ſi l'egalité a $-p$, l'on aura $3bb = 3aa - p$, & ſi elle a $+p$, l'on aura $3bb = 3aa + p$. Et ces contradictions ſeront commenſurables, parceque les parties $3aa$ & p qui les compoſent ſont elles-mêmes entierement commenſurables. En tout autre cas la vraye racine & la contradiction ſeront chacune incommenſurables, & pouront eſtre exprimées ſeulement ſelon les determinations generales qui precedent ou bien par lignes. XXXVI.

PROBLEME.

Une egalité de trois degrez eſtant propoſée, en chercher la reſolution. XXXVII.

Cette egalité eſtant preparée; ſi elle a $-p$, l'on verra ſi $\frac{1}{27}p^3$ eſt egal, ou plus grand, ou plus petit que $\frac{1}{4}qq$.

PREMIER CAS. Si $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$.

La vraye racine ſera $2a = \frac{3q}{p}$, & chaque fauſſe $-a = -\frac{3q}{2p}$. Ou bien la vraye ſera $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$, ou $2\sqrt{\mathrm{C}.\,\frac{1}{2}q}$, & la fauſſe $-\sqrt{\frac{1}{3}p}$, ou $-\sqrt{\mathrm{C}.\,\frac{1}{2}q}$. Tout cela eſt clair *par* 16. *S*. XXXVIII.

Exemple.

Soit la preparée $y^3 * - 147y - 686 = 0$. $\frac{1}{27}p^3$ ou bien $\frac{1}{4}qq$ eſt le même nombre 117649. La vraye racine ſera donc $2\sqrt{\frac{1}{3}p} = 2\sqrt{49} = 2$ fois 7, c'eſt à dire 14, & chaque fauſſe $-\sqrt{\frac{1}{3}p}$ ſera -7. Ainſi la preparée eſt le produit des trois egalitez ſimples $y - 14 = 0$, $y + 7 = 0$, & $y + 7 = 0$.

SECOND CAS. Si $\frac{1}{27}p^3$ eſt au deſſus de $\frac{1}{4}qq$.

1°. L'on diviſera ſucceſſivement & par ordre le terme q par chaque XXXIX.

difference de chacun des quarrez au deſſus de p à cette même grandeur p, juſqu'à ce que l'on trouve un expoſant égal ou plus petit que la racine du quarré qui aura reglé la derniere diviſion. Si l'expoſant eſt égal à la racine du quarré, il ſera auſſi la vraye racine de l'egalité, *par* 21. *S.* & cette racine eſtant appellée $2a$, les deux fauſſes ſeront $-a-\sqrt{aa-\frac{q}{2a}}$ & $-a+\sqrt{aa-\frac{q}{2a}}$. *par* 22. *S.*

2°. Mais ſi l'expoſant de la derniere diviſion eſt plus petit que la racine du quarré qui l'aura reglée, la vraye racine ſera incommenſurable. C'eſt pourquoy l'on fera de nouvelles diviſions ſemblables aux precedentes du terme q par chaque difference de p à chacun des quarrez au deſſous de p. Si l'expoſant de quelqu'une de ces diviſions eſt la racine du quarré même qui l'aura reglée, il ſera auſſi l'une des racines fauſſes de l'egalité preparée, *par* 24. & 27. *S.* & ſi nous l'appellons $-d$, les deux autres ſeront, la vraye $\frac{1}{2}d+\sqrt{\frac{1}{4}dd+\frac{q}{d}}$, & la fauſſe $\frac{1}{2}d-\sqrt{\frac{1}{4}dd+\frac{q}{d}}$. *par* 28. *S.*

Premier Exemple.

Soit la preparée $y^3 * -28y-48=0$, qui a $-p$, & dans laquelle $\frac{1}{27}p^3=813\frac{1}{27}$ eſt plus grand que $\frac{1}{4}qq=576$, le premier quarré au deſſus de $28=p$ eſt 36, & la difference de 36 à 28 eſt 8. Or diviſant $48=q$ par cette difference 8, l'expoſant eſt 6, qui eſt auſſi la racine du quarré 36, dont le choix a reglé la diviſion. La vraye racine de l'egalité eſt donc $2a=6$, & les deux fauſſes ſont $-a-\sqrt{aa-\frac{q}{2a}}=-3-\sqrt{9-\frac{48}{6}}=-3-\sqrt{1}$, c'eſt à dire -4, & $-a+\sqrt{aa-\frac{q}{2a}}=-3+\sqrt{1}$, c'eſt à dire -2. Ainſi la preparée eſt un produit de trois egalitez ſimples $y-6=0$, $y+4=0$, & $y+2=0$.

Second Exemple.

Soit la preparée $y^3 * -13y-12=0$, qui a $-p$, & dans laquelle $\frac{1}{27}p^3=81\frac{10}{27}$ eſt plus grand que $\frac{1}{4}qq=36$. Le premier quarré au deſſus de $13=p$ eſt 16, & la difference de 16 à 13 eſt 3. Or diviſant $12=q$ par cette difference 3, l'expoſant eſt 4, qui eſt auſſi la racine du quarré 16, dont le choix a reglé la diviſion. La vraye racine $2a$ eſt donc 4, & les deux fauſſes $-a-\sqrt{aa-\frac{q}{2a}}$ & $-a+\sqrt{aa-\frac{q}{2a}}$ ſont -3 & -1. Ainſi la preparée eſt un produit des trois ſimples $y-4=0$, $y+3=0$, & $y+1=0$.

L'on remarquera dans ce cas que ſi la vraye racine eſt commenſurable, l'on ne fera preſque jamais plus de deux ou trois diviſions ſans la trouver.

Troiſiéme Exemple.

Soit la preparée $y^3 * -8y-8=0$, qui a $-p$, & dans laquelle

$\frac{1}{27}p^3 = 18\frac{26}{27}$ eſt plus grand que $\frac{1}{4}qq = 16$. 1°. Le premier quarré au deſſus de $8 = p$ eſt 9, & la difference de 9 à 8 eſt 1. Or diviſant $8 = q$ par cette difference 1, l'expoſant 8 ſurpaſſe 3 racine du quarré 9 qui a reglé la diviſion, c'eſt pourquoy je choiſis l'autre quarré 16 au deſſus de 8. La difference de ce quarré à $8 = p$ eſt 8. Or diviſant $8 = p$ par cette difference trouvée 8, l'expoſant 1 eſt plus petit que 4 racine du quarré 16 qui a reglé la diviſion, d'où je connois que la vraye racine eſt incommenſurable. 2°. Je change donc l'operation, & je diviſe $8 = q$, par 4 difference de $8 = p$, au premier quarré 4 qui eſt au deſſous de $8 = p$, & parceque l'expoſant 2 eſt la racine du quarré 4 qui a reglé la diviſion, je conclus que -2 eſt une racine fauſſe de l'egalité preparée. Et cette racine eſtant appellée $-d$, les deux autres ſeront, la vraye $\frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd + \frac{q}{d}} = 1 + \sqrt{5}$, & la fauſſe $\frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}dd + \frac{q}{d}} = 1 - \sqrt{5}$. Ainſi la preparée eſt un produit des trois egalitez ſimples $y - 1 - \sqrt{5} = 0$, $y - 1 + \sqrt{5} = 0$, & $y + 2 = 0$.

TROISIÉME CAS. Si $\frac{1}{27}p^3$ eſt plus petit que $\frac{1}{4}qq$.

1°. Si l'egalité a $-p$, l'on diviſera ſucceſſivement & par ordre le terme q par XL.
chaque difference de chacun des quarrez au deſſus de p à cette même grandeur p, juſques à ce que l'on ait trouvé un expoſant egal ou plus petit que la racine du quarré qui aura reglé la derniere diviſion. Si l'expoſant eſt egal à la racine, il ſera auſſi la racine $2a$, *par* 35. *S.* & la contradiction des deux autres qui ſont imaginaires, ſera $3aa - p$. *par* 36. *S.*

Mais ſi l'expoſant de la derniere diviſion eſt plus petit que la racine XLI.
du quarré qui l'aura reglée, la vraye racine & la contradiction ſeront chacune incommenſurables, la racine $2a$ ſera $\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}}$, & la contradiction ſera $3aa - p$, *par* 29. *S.*

2°. Mais ſi l'egalité a $+p$, l'on fera de ſemblables diviſions par chaque dif- XLII.
ference de chaque quarré au deſſus de $-p$, à cette même grandeur negative $-p$, juſques à ce que l'on ait trouvé un expoſant egal ou plus petit que la racine du quarré qui aura reglé la derniere diviſion. Si l'expoſant eſt egal à la racine, il ſera auſſi la racine $2a$, *par* 35. *S.* & la contradiction des deux autres qui ſont imaginaires, ſera $3aa + p$. *par* 36. *S.*

Et ſi l'expoſant de la derniere diviſion eſt plus petit que la racine du quarré qui l'aura reglée, la vraye racine & la contradiction ſeront chacune imaginaire, la racine $2a$ ſera $\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}}$, & la contradiction ſera $3aa + p$, *par* 30. *S.*

Premier Exemple.

Soit la preparée $y^3 * - 24y - 72 = 0$, qui a $-p$, & dans laquelle $\frac{1}{27}p^3 = 272$ eſt plus petit que $\frac{1}{4}qq = 1296$. Le premier quarré au deſſus de 24 eſt 25, & la difference de 25 à 24 eſt 1, par qui $72 = q$ eſtant diviſé, l'expoſant eſt 72 qui ſurpaſſe 5 racine du quarré 25. L'autre quarré au deſſus de 25 eſt 36, & la difference de 36 à 24 eſt 12, par qui 72 eſtant diviſé, l'expoſant eſt 6 qui eſt auſſi la racine du quarré 36. La vraie racine $2a$ ſera donc 6, & la contradiction $3aa - p$ ſera $27 - 24$, c'eſt à dire 3, ainſi la preparée eſt un produit des deux egalitez l'une imaginaire $yy + 6y + 12 = 0$, & l'autre réelle $y - 6 = 0$.

Second Exemple.

Soit la preparée $y^3 * + 3y - 36 = 0$, qui a $+p$. Le premier quarré au deſſus de $-3 = -p$ eſt $+1$, & la difference de $+1$ à -3 eſt $+4$, par qui diviſant $36 = q$, l'expoſant eſt 9 qui eſt plus grand que 1 racine du quarré choiſi 1. Enſuite l'autre quarré au deſſus de $+1$ eſt $+4$, & la difference de $+4$ à $-3 = -p$ eſt $+7$, par qui $36 = q$ eſtant diviſé, l'expoſant n'eſt pas la racine du quarré 4. C'eſt pourquoy je paſſe au quarré ſuivant 9, la difference de ce quarré à $-3 = -p$ eſt $+12$, par qui 36 eſtant diviſé, l'expoſant eſt 3, qui eſt auſſi la racine du quarré choiſi 9. La vraye racine $2a$ ſera donc 3, & la contradiction $3aa + p$ ſera $9\frac{3}{4}$. Ainſi la preparée eſt un produit des deux egalitez $yy + 3y + 12 = 0$, & $y - 3 = 0$.

Quand c'eſt que les egalitez de trois degrez ſont irreductibles.

XLIII. L'on n'a point encore trouvé juſqu'ici de moyen pour déterminer exactement les racines des egalitez de trois degrez qui ont $-p$, & $\frac{1}{27}p^3$ plus grand que $\frac{1}{4}qq$, ſi ces racines ſont incommenſurables, & que les regles precedentes n'ayent pû en déterminer aucune. Si l'on vouloit chercher ces racines, prenant la propoſée $y^3 * - py - q = 0$, & ſa transformée
$$\begin{array}{l} y^3 * - 3aay - 2a^3 = 0, \\ \qquad\quad - bb \quad + 2abb \end{array}$$
l'on poura d'abord cuber $3aa + bb = p$, & quarrer $a^3 - abb = \frac{1}{2}q$, aprés quoy l'on aura $27a^6 + 27a^4bb + 9aab^4 + b^6 = p^3$, & $a^6 - 2a^4bb + aab^4 = \frac{1}{4}qq$, cette derniere egalité eſtant toute multipliée par 27, & retranchée de la precedente, laiſſera $81a^4bb - 18aab^4 + b^6 = p^3 - \frac{27}{4}qq$, & tirant de part & d'autre la racine quarrée $9aab - b^3 = \sqrt{p^3 - \frac{27}{4}qq}$. Mais cela ne donnant point la valeur de a ni de b, ni celle de leurs quarrez ou de leurs cubes, l'on n'eſt point plus avancé qu'auparavant, Si l'on écrit $b^3 * - \frac{3}{4}pb - \frac{1}{4}\sqrt{p^3 - \frac{27}{4}qq} = 0$, ſes trois racines ſeront les trois demies differences alternatives des racines cherchées dans la propoſée y^3, &c. L'autre egalité $x^3 + pxx * - qq = 0$, aura pour ſes racines les trois plans alternatifs des racines de y^3. Et ſi quelque racine pouvoit eſtre connuë dans quelqu'une de ces egalitez, ou en d'autres ſemblables qu'on en pouroit déduire, l'on pouroit auſſi en retrogradant

déterminer exactement les trois racines incommenſurables de la propoſée y^3. Mais comme je ne ſçai aucun moyen pour pouvoir déterminer ces racines, je me contenterai de le faire par approximation, non ſeulement pour le troiſiéme degré, mais encore pour les autres. Voici comment.

REGLE.

Pour approcher de la valeur des racines incommenſurables d'une egalité propoſée.

L'egalité ſera diviſée par deux ſimples de l'inconnuë — deux des diviſeurs du dernier terme qui ſeront tels que l'une de ces diviſions laiſſe un reſte negatif, & l'autre un reſte poſitif. Cela marquera quelque racine entre ces deux diviſeurs. L'on diviſera de nouveau par l'inconnuë — le petit diviſeur — encore la moitié de ſa difference au plus grand ; ſi une telle diviſion laiſſe encore un reſte negatif, l'on en reïterera de ſemblables ajoûtant aux dernieres grandeurs la moitié de leur difference au grand diviſeur. Et lorſque ces diviſions laiſſeront un reſte poſitif, l'on en reïterera pareillement d'autres ſemblables aux precedentes de l'inconnuë — les dernieres grandeurs qui auront laiſſé un reſte negatif — encore la moitié de leur difference aux dernieres grandeurs qui auront laiſſé un reſte poſitif. Et reïterant à l'infini la même regle ; l'on peut approcher à l'infini de la juſte valeur de la racine cherchée, ſans que neanmoins l'on puiſſe jamais y arriver. Ici l'on ſuppoſe que la racine ſoit vraye. XLIV.

Par exemple l'egalité $y^3 * - 12y - 1 = 0$ a ſes racines toutes trois réelles, & Incommenſurables. Ainſi on la diviſera par $y - 3$, ce qui laiſſe le reſte negatif -3, mais eſtant diviſée par $y - 4$, elle laiſſe le reſte poſitif $+4$. La vraie racine eſt donc entre 3 & 4. L'equation ſera donc diviſée de nouveau par $y - \frac{7}{2} = -3, -\frac{1}{2}$ moitié de la difference de 3 à 4. Cette diviſion laiſſe le reſte negatif $-11\frac{1}{8}$. L'on en fera donc une nouvelle par $y - \frac{15}{4} = -\frac{7}{2}, -\frac{1}{4}$ moitié de la difference de $\frac{7}{2}$ au grand diviſeur 4. Cette diviſion laiſſe le reſte negatif $-4\frac{17}{64}$. L'on en fera donc une nouvelle par $y - \frac{31}{8} = \frac{15}{4} - \frac{1}{8}$ moitié de la difference de $\frac{15}{4}$ à 4. Cette diviſion laiſſe le reſte negatif $-\frac{159}{358}$. L'on en fera donc une nouvelle par $y - \frac{63}{16} = -\frac{31}{8}, -\frac{1}{16}$, moitié de la difference de $\frac{31}{8}$ à 4. Cette diviſion laiſſe le reſte poſitif $1\frac{3335}{4096}$. L'on en commencera donc une autre par $y - \frac{125}{32} = -\frac{31}{8}$ derniere grandeur qui a laiſſé le reſte negatif $-\frac{159}{358}$, & $-\frac{1}{32}$ moitié de la difference de $\frac{31}{8}$ à $\frac{63}{15}$ derniere grandeur qui a laiſſé le reſte poſitif $1\frac{3335}{4096}$. Cette diviſion laiſſe encore un reſte poſitif $1\frac{2341}{33368}$. D'où l'on peut déja conclure que la racine cherchée eſt plus grande que $3\frac{28}{32}$, & plus petite que $3\frac{29}{32}$. Et l'on en poura continuer ainſi l'approche autant que l'on voudra.

* * *

DE LA RESOLUTION
DES EGALITEZ DU QUATRIÉME DEGRÉ PAR LA TRANSFORMATION.

XLV. Toute egalité du quatriéme degré aura ſes racines toutes quatres réelles, ou deux réelles & deux imaginaires, ou bien enfin toutes quatre imaginaires. Les racines ſeront toute quatre réelles, lorſque l'egalité propoſée ſera le produit de deux autres, dont chacune ſera réelle & de deux degrez. Deux ſeront réelles & deux imaginaires, lorſque l'egalité ſera un produit de deux autres, l'une réelle & l'autre imaginaire, dont chacune aura deux degrez. Et enfin elles ſeront toutes quatre imaginaires, lorſque l'egalité ſera un produit de deux autres imaginaires, & de deux degrez chacune. Ces trois eſpeces renferment tout le quatrieme degré. Nous en expliquerons icy les proprietez & les differences principales. Et afin de tout rapporter à un petit nombre de regles ſimples & faciles, nous ſuppoſerons ordinairement ces egalitez avec le ſecond terme evanoüi, parcequ'il eſt facile de leur donner cette forme ſi elles ne l'ont pas, *par 7. S.* & nous ſuppoſerons auſſi qu'elles ſoient toûjours ſans fraction; ce qui eſt encore facile à faire *par 5. S.*

Transformation des egalitez du quatrieme degré qui ont leurs racines toutes quatre réelles.

XLVI. Leur ſecond terme eſtant evanoüi poura toûjours donner une egalité de ces deux formes $y^4 * -pyy -qy + r = 0$, ou bien $y^4 * -pyy -qy + r = 0$. Car p aura toûjours le ſigne —, & ſi q avoit +, en luy donnant —, l'on changeroit ſeulement les racines vrayes en fauſſes, & les fauſſes en vrayes; ce qu'il faut remarquer icy; car dans la ſuite nous conſidererons toûjours les egalitez avec $-q$. Pour le terme r, il aura + ou —; il aura +, lorſque deux des quatre racines ſont fauſſes & les deux autres vrayes, mais il aura —, lorſqu'une ſeule eſtant vraye, les trois autres ſont fauſſes, parceque le surſolide de quatre grandeurs dont trois ſont negatives & l'autre poſitive, ou dont trois ſont poſitives & l'autre negative, ne peut jamais donner que —.

Comme nous ſuppoſons qu'il y ait $-q$, il faut neceſſairement puiſqu'il y a auſſi $-p$, que dans chacune des formes precedentes deux racines ſoient vrayes. Si j'appelle donc $2a$ la ſomme des deux racines qui doit eſtre poſitive, & $2b$ leur difference, & $-2a$ la ſomme des deux autres qui doit eſtre negative, & $2c$ leur difference, j'auray les quatre egalitez ſimples $y - a - b = 0$, $y - a + b = 0$, $y + a + c = 0$, & $y + a - c = 0$; ou bien les deux de deux degrez $yy - 2ay \begin{array}{l} +aa \\ -bb \end{array} = 0$, & $yy + 2ay \begin{array}{l} +aa \\ -cc \end{array} = 0$, & leur produit

$$y^4 * \begin{array}{l} -2aa \\ -bb \\ -cc \end{array} yy \begin{array}{l} -2abb \\ +2acc \\ \end{array} y \begin{array}{l} +a^4 \\ -aabb \\ -aacc \\ +bbcc \end{array} = 0,$$

ſera la transformée de la propoſée

$y^4 * - pyy - qy + r = 0$, ſi a eſt plus grand que b, c'eſt à dire ſi les racines $a+b$ & $a-b$ ſont toutes deux vrayes. Mais ſi a eſt plus petit que b, & qu'ainſi la racine $a-b$ ſoit fauſſe, elle ſera la reduite de $y^4 * - py - q - r = 0$. Il faut remarquer que b doit ſurpaſſer neceſſairement c, parceque la grandeur $-2abb + 2acc$ eſtant l'expreſſion de la grandeur negative $-q$, doit eſtre negative, ce qui ne pouroit eſtre ſi $2abb$ ne ſurpaſſoit point $2acc$. Si l'on ſuppoſoit que b & c fuſſent nuls ou égaux entr'eux, le terme où eſt $-q$ ſeroit nul, & l'egalité ſeroit $y^4 * - pyy * - r = 0$, qui ne paſſeroit ſeulement que pour une egalité du ſecond degré, dont l'inconnuë ſeroit le quarré yy.

Mais ſi une ſeule des demies differences comme c eſtoit nulle, la transformée ſeroit
$$\begin{array}{llll} y^4 * & -2aayy & -2abb & +a^4 = 0, \\ & -\ bb & & -aabb \end{array}$$
& alors s'il y avoit $-r$, les quatre racines ſeroient toûjours chaque egale $+a = \sqrt{\frac{1}{6}p + \sqrt{\frac{1}{36}pp - \frac{1}{3}r}}$, & les deux autres, l'une fauſſe $-a - \sqrt{\frac{q}{2a}}$, & l'autre vraye $-a + \sqrt{\frac{q}{2a}}$. Mais s'il y avoit $+r$, les racines ſeroient toûjours chaque egale $+a = \sqrt{\frac{1}{6}p + \sqrt{\frac{1}{36}pp + \frac{1}{3}r}}$, & les autres toutes 2 fauſſes, l'une $-a - \sqrt{\frac{q}{2a}}$, & l'autre $-a + \sqrt{\frac{q}{2a}}$. Cette détermination eſtant particuliere, je l'expoſe ſeulement en paſſant & ſans en donner de preuve. Que ſi la demie difference b eſtoit nulle, l'autre c ſeroit donc plus grande qu'elle, & l'egalité auroit $+q$ & non pas $-q$, ce qui eſt contre la ſuppoſition que nous avons faite un peu auparavant.

Transformation du quatriéme degré, lorſque deux racines ſont réelles, & deux imaginaires.

XLVII. Si les deux racines qui ne ſont point imaginaires ſont appellées, l'une $a+b$, & l'autre $a-b$, & la contradiction des deux imaginaires cc, l'on aura les deux égalitez
$$\begin{array}{ll} yy - 2ay + aa = 0, & yy + 2ay + aa = 0, \\ \quad\quad\ \ -bb & \quad\quad\quad\ \ +cc \end{array}$$
& leur produit
$$\begin{array}{llll} y^4 * & -2aayy & -2abby & +a^4 = 0, \\ & -\ bb & -2acc & -aabb \\ & +\ cc & & +aacc \\ & & & -bbcc \end{array}$$
ſera la transformée de l'egalité $y^4 * - pyy - qy + r = 0$, ſi a eſt plus grand que b, & $2aa + bb$ plus grand que cc, auquel cas les racines ſeront toutes deux vrayes, & de l'egalité $y^4 * - pyy - qy - r = 0$, ſi a eſt plus petit que b; & $2aa + bb$ plus grand que cc, auquel cas l'une des deux racines ſera vraye & l'autre fauſſe. Elle ſera auſſi la transformée de l'egalité $y^4 * + pyy - qy + r = 0$, dont les deux racines ſont vrayes; & alors a ſurpaſſera b, parceque le dernier terme a $+$; & cc ſurpaſſera $2aa + bb$, à cauſe que le troiſiéme terme a auſſi $+$; ou bien enfin de l'egalité $y^4 * + pyy - qy - r$, dont les deux racines ſont l'une vraye & l'autre fauſſe, & alors b ſurpaſſera a, & cc ſurpaſſera $2aa + bb$. Si $2aa + bb$ eſtoit égal

à cc, le troiſiéme terme ſeroit évanoüi. Et ſi bb eſtoit egal à cc, les racines ſeroient $a + b = \sqrt{\tfrac{1}{2}p} + \sqrt{\frac{q}{4\sqrt{\frac{1}{2}p}}}$, & $a - b = \sqrt{\tfrac{1}{2}p} - \sqrt{\frac{q}{4\sqrt{\frac{1}{2}p}}}$, & la contradiction $\frac{q}{4\sqrt{\frac{1}{2}p}}$. Tout cela ſe voit aſſez facilement en conſiderant la transformée.

Transformation ſi les racines ſont toutes quatre imaginaires.

XLVIII. Si j'appelle $2a$ la ſomme des deux d'une part, & les deux contradictions bb & cc, les deux egalitez de deux degrez chacune ſeront $yy - 2ay + \begin{array}{l} aa \\ +bb \end{array} = 0$, & $yy + 2ay + \begin{array}{l} aa \\ +cc \end{array} = 0$, & leur produit $y^4 * \begin{array}{l} -2aa \\ +bb \\ +cc \end{array} yy \begin{array}{l} +2abb \\ -2acc \end{array} y \begin{array}{l} +a^4 \\ +aabb \\ +aacc \\ +bbcc \end{array} = 0$, ſera la transformée de $y^4 * - pyy - qy + r = 0$, ſi $2aa$ ſurpaſſe $bb + cc$, ou bien de $y^4 * + pyy - qy + r = 0$, ſi $bb + cc$ ſurpaſſe $2aa$. Afin qu'il y ait $-q$, il faut que c ſurpaſſe b, ſi c eſtoit egal à b, l'egalité n'auroit que deux degrez. Il faut bien remarquer que les racines imaginaires ſont $a + \sqrt{-b}$, $a - \sqrt{-b}$, $-a + \sqrt{-c}$ & $-a - \sqrt{-c}$.

XLIX. *Transformation generale pour tous les cas precedens.*

Toutes les transformations precedentes nous ſerviront pour diſtinguer les differentes proprietez de toutes les egalitez du quatriéme degré. Mais comme l'on ne peut pas juger d'abord ſi une egalité propoſée eſt de l'une de ces eſpeces plûtoſt que de l'autre, nous nous ſervirons d'une transformation generale plus courte & plus facile, en appellant pour ce deſſein $yy - xy + \begin{array}{l} a \\ +b \end{array} = 0$, & $yy + xy + \begin{array}{l} a \\ -b \end{array} = 0$, les deux egalitez dont le produit $y^4 * \begin{array}{l} -xx \\ +2a \end{array} yy - 2bxy + \begin{array}{l} aa \\ -bb \end{array} = 0$, ſervira de transformée generale à toute egalité du quatriéme degré. Car ſi elles ont $-p$, la grandeur xx ſurpaſſera $2a$; & ſi elles ont $+p$, $2a$ ſurpaſſera xx. (je ſuppoſe qu'elles ayent toûjours $-q$,) La grandeur a ſurpaſſera b, ſi elles ont $+r$; & b ſurpaſſera a, ſi elles ont $-r$.

PREMIER PROBLEME.

L. Reduire toute egalité du quatriéme degré au troiſiéme.

Cette egalité eſtant preparée, on la transformera generalement comme on vient de le faire, & l'on comparera ſes termes avec ceux de la transformée generale qui precede, juſqu'à ce qu'on ait une egalité entiere où la ſeule inconnuë z ſe rencontre. Aprés quoy l'on aura ce qu'on cherche.

Exemple.

Pour reduire au troiſiéme degré l'egalité $y^4 * - pyy - qy + r = 0$, l'on prendra ſa transformée $y^4 * \begin{array}{l} -xx \\ +2a \end{array} yy - 2bxy + \begin{array}{l} aa \\ -bb \end{array} = 0$, & l'on tirera de la comparaiſon des trois derniers termes de l'une avec les trois derniers de l'autre, ces trois egalitez $xx-2a=p$, $2bx=q$, & $aa-bb=r$. La premiere donnera $a=\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}xx$, & la ſeconde $b=\frac{q}{2x}$. Mettant donc dans la troiſiéme egalité $aa-bb=r$, les quarrez des deux valeurs de a & de b trouvées par les 2 egalitez precedentes, l'on aura $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}pxx+\frac{1}{4}pp-\frac{qq}{4xx}=r$, laquelle eſtant toute multipliée par $4xx$ pour oſter la fraction, & enſuite eſtant ordonnée & renduë egale à zero, l'on aura enfin pour reduite de la propoſée l'egalité de trois degrez

$$\begin{array}{lll} x^6-2px^4 & +ppxx & -qq=0. \\ & -4r & \end{array}$$

Et ſi la propoſée avoit $+p$, cette reduite auroit $+2p$ au ſecond terme, & au contraire ſi la propoſée avoit $-r$, cette reduite auroit $+4r$. Mais ſoit que la propoſée euſt $+$ ou $-p$, & $+$ ou $-q$, la reduite auroit toûjours $+pp$ & $-qq$.

LI. Chaque racine de ces reduites differe ordinairement de chaque racine de leur propoſée; mais afin d'expliquer la communication qui eſt entre ces propoſées & leurs reduites, nous comparerons enſemble les trois eſpeces des transformées du quatriéme degré avec leurs reduites.

Propoſée de la premiere eſpece. *Sa Reduite.*

$$\begin{array}{llll} y^4 * & -2aayy & -2abby & +a^4=0. \\ & -bb & +2acc & -aabb \\ & -cc & & -aacc \\ & & & +bbcc \end{array} \qquad \begin{array}{llll} x^6 & -4aax^4 & +8aabbxx & -4aab^4=0. \\ & -2bb & +8aacc & +8aabbcc \\ & -2cc & +b^4 & -4aac^4 \\ & & -2bbcc & \\ & & +c^4 & \end{array}$$

LII. Il eſt viſible que cette eſpece ne peut jamais avoir $+p$. Sa reduite a trois racines vrayes; car elle peut eſtre exactement diviſée par $xx-4aa=0$, par $xx-bb-2bc-cc=0$, & par $xx-bb+2bc-cc=0$.

Et ſi l'on connoiſt $4aa$, la propoſée eſt reſoluë. Car $aa+\frac{1}{2}bb+\frac{1}{2}cc=\frac{1}{2}p$, $abb-acc=\frac{1}{2}q$, ou bien $\frac{1}{2}bb-\frac{1}{2}cc=\frac{q}{4a}$. Donc $bb=\frac{1}{2}p-aa+\frac{q}{4a}$. Et tirant de part & d'autre la racine quarrée, $b=\sqrt{\frac{1}{2}p-aa+\frac{q}{4a}}$. Et l'on aura pareillement $c=\sqrt{\frac{1}{2}p-aa-\frac{q}{4a}}$. Or ayant les valeurs des grandeurs a, b, & c, toutes connuës, les quatre racines $a+b$, $a-b$, $-a-c$ & $-a+c$ le ſont auſſi. Et pareillement connoiſſant l'une ou l'autre des deux autres racines de la reduite, chaque racine ſera connuë. Et ſi l'on ſçavoit qu'une grandeur fuſt l'une ou l'autre de ſes trois racines, ſans ſçavoir laquelle, en l'appellant $4aa$, les 4 racines ſeroient toûjours $a+b=a+\sqrt{\frac{1}{2}p-aa+\frac{q}{4a}}$, $a-b=a-\sqrt{\frac{1}{2}p-aa+\frac{q}{4a}}$, $-a-c=-a-\sqrt{\frac{1}{2}p-aa-\frac{q}{4a}}$, & $-a+c=-a+\sqrt{\frac{1}{2}p-aa-\frac{q}{4a}}$.

LIII. Dans cette premiere eſpece $\frac{1}{2}p = aa + \frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}cc$ ſurpaſſera toûjours $aa + \frac{q}{4a} = aa + \frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}cc$.

LIV. Dans la même eſpece, la reduite aura toûjours le ſigne $+$ au troiſiéme terme, parceque le quarré $b^4 - 2bbcc + c^4$ que ce terme renferme ne peut eſtre que poſitif, puiſque toute grandeur poſitive ou negative multipliée par elle-même, ne peut donner qu'un produit poſitif.

Propoſée de la ſeconde eſpece.

$$\begin{array}{llll} y^4 \; * & -2aayy & -2abby & +a^4 = 0. \\ & -bb & -2acc & -aabb \\ & +cc & & +aacc \\ & & & -bbcc \end{array}$$

Sa Réduite.

$$\begin{array}{llll} x^6 & -4aax^4 & +8aabbxx & -4aab^4 = 0. \\ & -2bb & -8aacc & -8aabbcc \\ & +2cc & +b^4 & -4aac^4 \\ & & +2bbcc & \\ & & +c^4 & \end{array}$$

LV. La reduite de cette ſeconde eſpece aura une racine vraye & deux imaginaires, parcequ'elle poura eſtre exactement diviſée par $xx - 4aa = 0$, par $xx - bb + cc + \sqrt{-4bbcc} = 0$, & par $xx - bb + cc - \sqrt{-4bbcc} = 0$, où l'on voit que les deux dernieres egalitez renferment chacune ſous le ſigne $\sqrt{}$ la grandeur negative $-4bbcc$, qui ne peut avoir de racine quarrée poſitive ou negative.

LVI. Que ſi l'on connoiſt $4aa$, la propoſée eſt reſoluë. Car en premier lieu ſi l'egalité avoit $-p$, l'on auroit $aa + \frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}cc = \frac{1}{2}p$, & $\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}cc = \frac{q}{4a}$, leſquelles eſtant jointes l'une avec l'autre, & la tranſpoſition accoûtumée eſtant faite, l'on aura $bb = \frac{1}{2}p - aa + \frac{q}{4a}$, & l'une eſtant pareillement retranchée de l'autre, l'on aura $cc = -\frac{1}{2}p + aa + \frac{q}{4a}$. Ainſi les deux racines de l'egalité propoſée, qui ſont réelles, ſeront $a + b = a + \sqrt{\frac{1}{2}p - aa + \frac{q}{4a}}$, & $a - b = a - \sqrt{\frac{1}{2}p - aa + \frac{q}{4a}}$, & la contradiction des deux autres imaginaires $-a + \sqrt{-c}$ & $-a - \sqrt{-c}$, ſera $cc = -\frac{1}{2}p + aa + \frac{q}{4a}$.

LVII. Et dans ce premier cas où l'on ſuppoſe que la propoſée ait $-p$, il arrive toûjours que $\frac{1}{2}p = a + \frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}cc$ eſt plus petit que $aa + \frac{q}{4a} = aa + \frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}cc$; mais il eſt plus grand que $aa - \frac{q}{4a} = aa - \frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}cc$.

LVIII. En ſecond lieu ſi la propoſée avoit $+p$, ſes deux racines réelles ſeroient $a + b = a + \sqrt{-\frac{1}{2}p - aa + \frac{q}{4a}}$, & $a - b = a - \sqrt{-\frac{1}{2}p - aa + \frac{q}{4a}}$, & la contradiction des deux imaginaires $cc = \frac{1}{2}p + aa + \frac{q}{4a}$.

LIX. Et dans ce ſecond cas où l'on ſuppoſe que la propoſée ait $+p$, il arrive toûjours que $\frac{1}{2}p = -aa - \frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}cc$ eſt plus petit que $\frac{q}{4a} - aa = -aa + \frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}cc$.

Toute egalité du quatriéme degré dont le ſecond terme eſt évanoüi, ſera toûjours uniquement de cette ſeconde eſpece, lorſqu'elle aura $+p$ & $-r$. Car $+p$ marque quelques racines imaginaires, & $-r$ marque que toutes quatre ne le peuvent eſtre. LX.

Propoſée de la troiſiéme eſpece. *Sa Reduite.*

$$\begin{array}{llll} y^4 * & -2aayy & +2abby & +a^4 = 0. \\ & +bb & -2acc & +aabb \\ & +cc & & +aacc \\ & & & +aacc \end{array} \qquad \begin{array}{llll} x^6 & -4aax^4 & -8aabbxx & -4aab = 0. \\ & +2bb & -8aacc & +8aabbcc \\ & +2cc & +b^4 & -4aac^4 \\ & & -2bbcc & \\ & & +c^4 & \end{array}$$

Cette eſpece ne peut jamais avoir $-r$. Sa reduite a une racine vraye, & les deux autres fauſſes. Car elle peut eſtre exactement diviſée par $zz - 4aa = 0$, par $zz + bb + 2bc + cc = 0$, & par $zz + bb - 2bc + cc = 0$. LXI.

Et ſi l'on connoiſt $4aa$, la propoſée eſt reſoluë. Car en premier lieu, lorſqu'elle aura $-p$, les deux contradictions des quatre imaginaires ſeront toûjours $bb = -\frac{1}{2}p + aa - \frac{q}{4a}$, & $cc = -\frac{1}{2}p + aa + \frac{q}{4a}$. LXII.

Et dans ce premier cas, $\frac{1}{2}p = aa - \frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}cc$ ſera toûjours plus petit que $aa - \frac{q}{4a} = aa + \frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}cc$. LXIII.

En ſecond lieu, ſi la propoſée avoit $+p$, les deux contradictions ſeroient toûjours $bb = \frac{1}{2}p + aa - \frac{q}{4a}$, & $cc = \frac{1}{2}p + aa + \frac{q}{4a}$. LXIV.

Et dans ce ſecond cas, $\frac{1}{2}p = -aa + \frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}cc$ eſt toûjours plus grand que $\frac{q}{4a} - aa = -aa - \frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}cc$. LXV.

SECOND PROBLEME.

Une egalité du quatriéme degré eſtant propoſée, en chercher la reſolution.

PREMIERE REGLE.

Cette egalité eſtant preparée, & delivrée de toute ſorte de fractions & de grandeurs incommenſurables, l'on aura toûjours une egalité qui aura $-p$ avec $+$ ou $-r$, ce qui fait deux formes differentes; ou bien $+p$ avec $+$ ou $-r$, ce qui en fait deux autres. LXVI.

L'on prendra la reduite de cette egalité, & on la diviſera ſucceſſivement & par ordre par chacun des quarrez diviſeurs de qq, en commençant par ceux qui ſont plus grands que p, lorſqu'il y aura $-p$ dans la propoſée.

Si quelque diviſion ſe fait ſans reſte, & que la propoſée ait $-p$, appellant $4aa$ la racine découverte, les quatre de la propoſée ſeront toûjours celles-ci $a+\sqrt{\frac{1}{2}p-aa+\frac{q}{4a}}$, $a-\sqrt{\frac{1}{2}p-aa+\frac{q}{4a}}$, $-a-\sqrt{\frac{1}{2}p-aa-\frac{q}{4a}}$, & enfin $-a+\sqrt{\frac{1}{2}p-aa-\frac{q}{4a}}$ *par* 52, 56, & 62, *S.* qui ſeront toutes quatre réelles, ſi $\frac{1}{2}p$ eſt plus grand que $aa+\frac{q}{4a}$, *par* 53. *S.* Les deux premieres ſeront réelles, & les deux autres imaginaires, ſi $\frac{1}{2}p$ eſt plus petit que $aa+\frac{q}{4a}$, & plus grand que $aa-\frac{q}{4a}$, *par* 57. *S.* & enfin toutes quatre imaginaires, ſi $\frac{1}{2}p$ eſt plus petit que $aa-\frac{q}{4a}$, *par* 63. *S.*

LXVII. Mais quand la propoſée aura $+p$, ſes quatre racines ſeront toûjours $a+\sqrt{-\frac{1}{2}p-aa+\frac{q}{4a}}$, $a-\sqrt{-\frac{1}{2}p-aa+\frac{q}{4a}}$, $-a-\sqrt{-\frac{1}{2}p-aa-\frac{q}{4a}}$, & $-a+\sqrt{-\frac{1}{2}p-aa-\frac{q}{4a}}$, *par* 58. & 64. *S.* Les deux premieres de ces quatre racines ſeront réelles, & les deux autres imaginaires, ſi $\frac{q}{4a}$ eſt plus grand que $\frac{1}{2}p+aa$, *par* 59. *S.* & toutes quatre imaginaires, s'il eſt plus petit, *par* 65. *S.*

Premier Exemple.

Pour reſoudre l'egalité $y^4 * -37yy-24y+18=0$, je prens ſa reduite $x^6-74x^4+649xx-576=0$, & je la diviſe par $xx-64$ premier quarré diviſeur de $576=qq$, qui ſoit au deſſus de $37=p$, l'expoſant de la diviſion eſt $x^4-10xx+9=0$. C'eſt pourquoy appellant $4aa$ la racine trouvée 64, les racines cherchées ſeront $a+\sqrt{\frac{1}{2}p-aa+\frac{q}{4a}}=4+2=6$, $a-\sqrt{\frac{1}{2}p-aa+\frac{q}{4a}}=2$, $-a-\sqrt{\frac{1}{2}p-aa-\frac{q}{4a}}=-5$, & $-a+\sqrt{\frac{1}{2}p-aa-\frac{q}{4a}}=-3$. Ainſi la propoſée eſt un produit des quatre ſimples $y-6=0$, $y-2=0$, $y+5=0$, & $y+3=0$.

Second Exemple.

Pour reſoudre l'egalité $y^4 * -8yy-8y+15=0$, je prens ſa reduite $x^6-16x^4-4xx-64=0$, & je la diviſe par $xx-16$ premier quarré diviſeur de $64=qq$, qui ſoit plus grand que $8=p$, l'expoſant de la diviſion eſt $x^4 * -4=0$. Ainſi appellant $4aa$ la racine trouvée 16, les racines cherchées ſeront $a+\sqrt{\frac{1}{2}p-aa+\frac{q}{4a}}=3$, $a-\sqrt{\frac{1}{2}p-aa+\frac{q}{4a}}=1$, $-a-\sqrt{\frac{1}{2}p-aa-\frac{q}{4a}}=-2-\sqrt{-1}$, & $-a+\sqrt{\frac{1}{2}p-aa-\frac{q}{4a}}=-2+\sqrt{-1}$. Ainſi la propoſée eſt un produit des quatre egalitez ſimples $x-3=0$, $x-1=0$, $x+2+\sqrt{-1}=0$, & $x+2-\sqrt{-1}=0$, dont les deux dernieres renferment la contradiction $\sqrt{-1}$.

Troiſiéme Exemple.

Pour reſoudre l'egalité $y^4 * -4yy-8y+35=0$, je prens ſa reduite $x^6-8x^4-124xx-64=0$, & je la diviſe par $xx-16$ premier quarré diviſeur de $64=qq$, qui ſoit au deſſus de $p=4$, l'expoſant de la diviſion eſt $x^4+8xx+4$. Suppoſant donc $16=4aa$ ou bien $2=a$, les racines cherchées ſeront $a+\sqrt{\frac{1}{2}p-aa+\frac{q}{4a}}=2+\sqrt{-1}$, $a-\sqrt{\frac{1}{2}p-aa+\frac{q}{4a}}=2-\sqrt{-1}$, $-a-\sqrt{\frac{1}{2}p-aa-\frac{q}{4a}}=-2-\sqrt{-3}$, & $-a+\sqrt{\frac{1}{2}p-aa-\frac{q}{4a}}=-2+\sqrt{-3}$. Ainſi la propoſée eſt un produit des quatre egalitez ſimples & imaginaires $x-2-\sqrt{-1}=0$, $x-2+\sqrt{-1}=0$, $x+2+\sqrt{-3}=0$, & $x+2-\sqrt{-3}=0$, ou bien ce qui revient au même, des deux imaginaires $xx-4x+5=0$, & $xx+4x+7=0$, qui ont chacune deux degrez.

Quatriéme Exemple.

Pour reſoudre l'egalité $z^4 * -7zz-2z+2=0$, je prens ſa reduite $x^6-14x^4+41xx-4=0$, & ne pouvant la diviſer ſans reſte par $xx-$ aucun quarré diviſeur de $4=qq$, qui ſoit plus grand que p, je choiſis 4 premier quarré au deſſous de $p=7$, & parceque la diviſion ſe fait ſans reſte, appellant $4aa$ la racine trouvée 4, je connois que les racines cherchées ſont $a+\sqrt{\frac{1}{2}p-aa+\frac{q}{4a}}=1+\sqrt{3}$, $a-\sqrt{\frac{1}{2}p-aa+\frac{q}{4a}}=1-\sqrt{3}$, $-a-\sqrt{\frac{1}{2}p-aa-\frac{q}{4a}}=-1-\sqrt{2}$, & $-a+\sqrt{\frac{1}{2}p-aa-\frac{q}{4a}}=-1+\sqrt{2}$. De ſorte que la propoſée eſt un produit des quatre ſimples $z-1-\sqrt{3}=0$, $z-1+\sqrt{3}=0$, $z+1+\sqrt{2}=0$, & $z+1-\sqrt{2}=0$.

Cinquiéme Exemple.

Pour reſoudre l'egalité $z^4 * -68zz-12z+255=0$, je prens ſa reduite $x^6-136x^4+3604xx-144=0$, & ne pouvant la diviſer ſans reſte par $xx-144$, qui eſt le ſeul quarré diviſeur de $144=qq$ qui ſoit plus grand que $p=68$; (car les deux quarrez 100 & 121 qui ſont entre 68 & 144, ne peuvent eſtre ni l'un ni l'autre diviſeurs de 144.) je vois ſi je pourai la diviſer ſans reſte par $xx-36$ premier quarré diviſeur de $144=qq$ qui ſoit au deſſous de $68=p$, & parceque la diviſion ſe fait ſans reſte, je connois comme aux exemples precedens que les racines cherchées ſont $3+\sqrt{26}$, $3-\sqrt{26}$, $-3-\sqrt{24}$, & $-3+\sqrt{24}$.

Sixiéme Exemple.

Pour reſoudre $y^4 * +10yy-145y+96=0$, je prens ſa reduite $x^6+20x^4-284xx-21025=0$, & voyant que $xx-1$ le premier de tous les quarrez ne peut la diviſer ſans reſte, & que les quarrez ſuivans 4, 9, & 16, ne ſont point diviſeurs de $21025=qq$, je trouve que $xx-$ le quarré ſuivant 25 qui en eſt diviſeur, peut diviſer la reduite ſans reſte. C'eſt pourquoy appellant $4aa$, cette racine découverte 25, parceque l'egalité a $+p$, je connois que ſes quatre racines ſont les deux réelles $a+\sqrt{-\frac{1}{2}p-aa+\frac{q}{4a}}=\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}}$, $a-\sqrt{-\frac{1}{2}p-aa+\frac{q}{4a}}=\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}$, & les deux autres imaginaires $-a-\sqrt{-\frac{1}{2}p-aa-\frac{q}{4a}}=-\frac{5}{2}-\sqrt{-25\frac{3}{4}}$, & $-\frac{5}{2}+\sqrt{-25\frac{3}{4}}$.

Septiéme Exemple.

Et pour reſoudre $y^4 * +70yy-3744y+27993=0$, je prens ſa reduite $x^6+140x^4-107072xx-14017536=0$, & voyant ſucceſſivement ſi elle peut eſtre diviſée par $xx-$ chacun des quarrez 1, 4, 9, ou autres diviſeurs de $14017536=qq$, je voy que la diviſion ſe fait ſans reſte par $xx-324=0$, c'eſt pourquoy les racines ſeront, la premiere $a+\sqrt{-\frac{1}{2}p-aa+\frac{q}{4a}}=9+\sqrt{-12}$, la ſeconde $9-\sqrt{-12}$, la 3^e^ $-a-\sqrt{-\frac{1}{2}p-aa-\frac{q}{4a}}=-9-\sqrt{-220}$, & la quatriéme $-9+\sqrt{-220}$, qui ſont toutes quatre imaginaires.

LXVIII. Si l'egalité propoſée a $-r$, avant que de ſuivre le probleme precedent, l'on poura tenter ſa reſolution d'une maniere plus courte, en la diviſant d'abord par $z-$ chaque quarré diviſeur du terme r, qui ſoit plus grand que p.

Par exemple pour reſoudre l'egalité $y^4 * -59yy-188y-90=0$, on la diviſera par $y-9$ premier quarré diviſeur de $90=r$, qui ſoit plus grand que $59=p$, ce qui donne la vraye racine 9, & la propoſée eſt reduite par la diviſion à celle de trois degrez $y^3+9yy+22y+10=0$, qui ſera reſoluë par les regles du troiſiéme degré. Mais s'il arrive que cette methode ne faſſe rien connoître, l'on ſuivra celle du probleme & des exemples precedens.

LXIX. L'on remarquera auſſi que cette derniere methode peut ſervir pour baiſſer à un moindre degré toute egalité plus compoſée, dont le ſecond terme eſt évanoüi, lorſque la diſpoſirion des ſignes marque qu'une ſeule racine vraye egale toutes les fauſſes, ou qu'une fauſſe egale toutes les vrayes ſous differens ſignes.

SECONDE REGLE.

LXX. Lorſqu'il arrive que le probleme n'a rien découvert, ſi la propoſée n'a point $+p$ & $-r$, l'on prendra la preparée de la reduite x^6, &c. comme on la voit icy marquée ſelon trois differentes formes.

Propoſée de la premiere forme. — *Preparée de ſa Reduite x^6 &c.*

$$y^4 * -pyy-qy+r=0.$$

$$\begin{array}{llll} v^3 * & -\frac{1}{3}ppv & +\frac{2}{27}p^3 & =0. \\ & -4r & -\frac{8}{3}pr & \\ & & -qq & \end{array}$$

Propoſée de la ſeconde forme.

$y^4 * - pyy - qy - r = 0.$

Preparée de ſa Reduite x^6 &c.

$$\begin{array}{lll} v^3 * & -\frac{1}{3}ppv & +\frac{2}{27}p^3 = 0. \\ & +4r & +\frac{8}{3}pr \\ & & -qq \end{array}$$

Propoſée de la troiſiéme forme.

$y^4 * + pyy - qy + r = 0.$

Preparée de ſa Reduite x^6 &c.

$$\begin{array}{lll} v^3 * & -\frac{1}{3}ppv & -\frac{2}{27}p^3 = 0. \\ & -4r & +\frac{8}{3}pr \\ & & -qq \end{array}$$

Pour la quatriéme forme qui a $+p$ & $-r$, elle eſt toûjours de l'eſpece où deux racines ſont réelles & deux imaginaires, ainſi l'on ne prendra point la preparée de ſa reduite, qui ne doit ſervir que pour ſçavoir de quelle eſpece eſt l'egalité propoſée.

Enſuite l'on verra *par* 37, & 40, ou 42, *S.* ſi la preparée qu'on aura priſe aura ſes racines toutes 3 réelles, ou une réelle & deux imaginaires. Si toutes trois ſont réelles, la propoſée y^4 aura ſes racines toutes quatre réelles ou toutes quatre imaginaires; toutes quatre réelles, lorſqu'elle aura $-p$, & que le troiſiéme terme de la reduite x^6 aura le ſigne $+$, *par* 54. *S.* & toutes quatre imaginaires, ſi ce terme eſt negatif, (car alors $2aa$ ſurpaſſant $bb+cc$, $-8aabb -8aacc$, oſte plus que ne donne $b^4-2bbcc+c^4$, puiſque celui-ci eſt le quarré de $bb-cc$, qui vaut moins que $8aa$ & que $bb+cc$,) ou que la propoſée ait $+p$. Auquel cas l'on peut dire que l'egalité propoſée eſt reſoluë, puiſque l'on a démonſtration qu'aucune grandeur poſitive ou negative ne peut y ſatisfaire, & qu'elle ne renferme que des contradictions, quoy qu'on ne puiſſe les déterminer qu'à peu prés. LXXI.

Mais lorſqu'on aura connu par cette regle, que les racines de la propoſée y^4, &c. ſont toutes quatre réelles, avant que de conclure abſolument ſon irreductibilité à un degré moindre que le quatriéme, on la diviſera par ordre par $y-$ ou $+$ chaque diviſeur du terme r, ſi quelque diviſion reüſſit en ſe faiſant ſans reſte, l'on aura l'une de ſes racines, & la propoſée ſera baiſſée à une egalité de trois degrez qui ſera irreductible à aucun autre. LXXII.

Et ſi la diviſion ne ſe peut faire en aucune maniere ſans laiſſer quelque reſte, la propoſée y^4 &c. ſera irreductible à un degré moindre que le quatriéme, & la reſolution exacte du probleme qu'elle repreſente ſere impoſſible, parceque l'on n'a point encore trouvé le moyen de la pouvoir déterminer autrement que par lignes. On la poura déterminer cependant ſi prés que l'on voudra par l'approximation.

Si donc il falloit reſoudre l'egalité $y^4 * -18yy-4y+69=0$, ſa reduite $x^6-36x^4+48xx-16=0$, ne peut eſtre diviſée ſans reſte par $xx-$ quelqu'un des quarrez diviſeurs de $16=qq$, & ſa reduite a ſes trois racines réelles. Comme donc cette reduite a $+$ au troiſiéme terme $+48xx$, il s'enſuit que les racines de la propoſée ſont toutes quatre réelles. Mais parcequ'on n'a pû encore en découvrir aucune, avant que de conclure que la reſolution du probleme eſt impoſſible autrement que par approximation, il faut diviſer la propoſée par $y-$ ou $+$ chaque diviſeur de $69 = r$. La diviſion ſe fait ſans reſte par $y-3$. Ainſi 3 en eſt une racine, & on la reduit au troiſiéme degré $y^3 + 3yy - 9y - 23 = 0$, qui eſt irreductible à un degré moindre que le troiſiéme.

Détermination du cas où deux racines ſont réelles, & les deux autres imaginaires.

LXXIII. Mais lorſqu'on aura démonſtration *par* 40 ou 42. *S.* que deux racines ſont réelles & les deux autres imaginaires, ſi la propoſée a $-p$ & $+r$, l'on aura toûjours

$$4aa = \frac{2}{3}p + \sqrt{C.\ -\frac{1}{27}p^3 + \frac{4}{3}pr + \frac{1}{2}qq + \sqrt{-\frac{4}{27}p^4r + \frac{32}{27}pprr - \frac{1}{27}p^3qq + \frac{4}{3}prqq + \frac{1}{4}q^4 - \frac{64}{27}r^3}}.$$

Et ſi la propoſée eſt de la forme qui a $-p$ & $-r$, l'on aura toûjours

$$4aa = \frac{2}{3}p + \sqrt{C.\ -\frac{1}{27}p^3 - \frac{4}{3}pr + \frac{1}{2}qq + \sqrt{\frac{4}{27}p^4 + \frac{32}{27}pprr - \frac{1}{27}p^3qq - \frac{4}{3}prqq + \frac{1}{4}q^4 + \frac{64}{27}r^3}}.$$

Et ſi la propoſée de la troiſiéme forme qui a $+p$ & $+r$, l'on aura toûjours

$$4aa = -\frac{2}{3}p + \sqrt{C.\ \frac{1}{27}p - \frac{4}{3}pr + \frac{1}{2}qq + \sqrt{-\frac{4}{27}p^3r + \frac{32}{27}pprr + \frac{1}{27}p^3qq - \frac{4}{3}prqq + \frac{1}{4}q^4 - \frac{64}{27}r^3}}.$$

Et ſi laiſſant $-\frac{2}{3}p$, l'on met le ſigne $+$ devant chacune des parties qui ſont ſous le ſigne radical $\sqrt{}$C. dans cette valeur de $4aa$, l'on aura la valeur de $4aa$ de la forme $y^4 * + pyy - qy - r = 0$, où les deux racines ſont toûjours réelles, & les deux autres imaginaires.

LXXIV. Or la grandeur $4aa$ eſtant déterminée dans chacune des quatre formes precedentes, il ſera facile *par* 66. *S.* d'en déterminer auſſi les deux racines réelles, & les deux autres imaginaires.

AVERTISSEMENT.

Avant que je finiſſe le quatriéme degré, j'avertirai que la Regle que Monſieur Deſcartes a donnée pour le reſoudre, peut eſtre abregée au moins de la moitié. Car au lieu qu'il ordonne d'en diviſer la reduite par $zz+$ ou $-$ chaque diviſeur de qq, il ſuffit de la diviſer par $zz-$ chacun de ces diviſeurs. Car il y a les deux tiers de ces reduites, c'eſt à dire celles du ſecond & troiſiéme cas, qui n'ont jamais de racines fauſſes, & dans l'autre tiers de ces reduites qui ſert pour le premier cas, il n'y en a qu'un tres-petit nombre où les racines fauſſes ſoient commenſurables, car à moins que les contradictions bb & cc ne ſoient chacune des quarrez parfaits, ce qui arrive aſſez rarement, les deux racines fauſſes ſont chacune incommenſurables, & la diviſion ne peut ſe faire par $zz+$ aucun diviſeur de qq. Mais au contraire jamais la reduite ne peut eſtre diviſée par $zz+$ un diviſeur de qq, qu'elle ne puiſſe auſſi l'eſtre par $-$. Et de plus ſi l'egalité eſt numerique, il faut choiſir ſeulement parmi ces diviſeurs ceux qui ſont des quarrez parfaits, ce qui abrege encore beaucoup ſa même regle.

Monſieur Deſcartes dit encore que ſi la racine de la reduite ne peut eſtre trouvée, on n'a point beſoin de paſſer outre, parcequ'il ſuit infailliblement de là que le probleme eſt ſolide, c'eſt à dire qu'on ne peut en déterminer ni la nature ni la reſolution autrement que par les lignes paraboliques. Cependant en toute egalité qui n'enferme que des contradictions, ce qui fait le tiers du quatriéme degré, on le peut toûjours démonſtrativement reconnoître, lors même qu'aucune racine de la reduite ne peut eſtre trouvée, ainſi qu'il eſt marqué au Premier Cas 71. *S.* Et il ne faut point dire que la contradiction ne peut eſtre exactement determinée, car Monſieur Deſcartes luy-même en reſolvant par ſa methode l'egalité $x^4 * - 4xx - 8x + 35 = 0$, en ces deux autres imaginaires dont elle eſt un produit, $xx - 4x + 5 = 0$ & $xx + 4x + 7 = 0$, il ſe contente de conclure par elles la reſolution du probleme, en diſant que parcequ'on ne trouve aucune racine ni vraye ni fauſſe en ces deux dernieres egalitez, on connoît de là que les quatre de l'egalité dont elles procedent ſont imaginaires, & que le probleme pour lequel on l'a trouvé eſt plan de ſa nature, mais qu'il ne ſçauroit en aucune façon eſtre conſtruit, à cauſe que les quantitez données ne peuvent ſe joindre. Où l'on voit qu'il ne détermine point les contradictions, & en effet perſonne ne s'eſt encore aviſé de parler des contradictions des egalitez.

Monſieur Hudde remarque auſſi que toute egalité reductible du quatriéme degré peut eſtre reduite par la regle de Monſieur Deſcartes; mais l'on a fait le contraire en déterminant le Second Cas 72. *S.*

DES EGALITEZ

QUI PASSENT LE QUATRIÉME DEGRÉ.

L'on ſçait déja que toute egalité où l'on n'aura pû découvrir aucune racine par la methode generale expliquée *III.* 73. ne peut en avoir aucune qui ſoit commenſurable. Mais il ſe peut faire que la ſomme de deux, ou de trois, ou de quatre, &c. ſoit commenſurable, & alors cette egalité poura eſtre baiſſée à des degrez egaux aux nombres des racines dont la ſomme eſt egale. LXXV.

L'on évanoüira pour cela le ſecond terme de cette egalité, & on luy trouvera par ordre autant de transformées generales que le nombre de ſes dimenſions poura eſtre ſeparé differemment en deux autres nombres plus grands chacun que l'unité. Par exemple, comme 5 ne peut eſtre ainſi ſeparé qu'en 3 & 2, ou 2 & 3, ce qui eſt le même, le cinquiéme degré n'aura qu'une transformée generale. Mais le ſixiéme & ſeptiéme en aura deux, parceque 6 peut eſtre ſeparé en 2 & 4, ou en 3 & 3, & 7 en 3 & 4, ou en 2 & 5. LXXVI.

La transformée du cinquiéme degré ſe trouve ainſi. Je ſuppoſe que toute egalité du cinquiéme degré, dont le ſecond terme eſt evanoüi, eſt un produit de ces deux autres $y^3 - xyy \begin{array}{l}+a\\+b\end{array} y + c = 0$, & $yy + xy \begin{array}{l}+a\\-b\end{array} = 0$, c'eſt à dire l'egalité de cinq degrez $y^5 * \begin{array}{l}-xx\\+2a\end{array} y^3 \begin{array}{l}+2bx\\+c\end{array} yy \begin{array}{l}+aa\\-bb\\+cx\end{array} y \begin{array}{l}+ac\\-bc\end{array} = 0$, qui ſera la transformée generale de $y^5 * + py^3 + qyy + ry + \ = 0$, que je prens pour toute egalité du cinquiéme degré, en ſuppoſant que p, q, r, & $ſ$, que je marque avec $+$, auront autant $+$ comme $-$.

Enſuite je tire de la comparaiſon des termes de l'une avec ceux de l'autre les quatre egalitez $a = \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}p$, $c = q - 2bx$, $aa - bb + cx = r$, & $ac - bc = ſ$. Et ſi l'on met dans les deux dernieres au lieu des lettres a & c leurs valeurs trouvées par les deux premieres, la troiſiéme egalité ſera $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}pxx + \frac{1}{4}pp - bb + qx - 2bxx = r$, & la 4^e $\frac{1}{2}pq + \frac{1}{2}qxx - pbx - bx^3 - bq + 2bbx = ſ$, dans laquelle ſi l'on met au lieu de bb ſa valeur trouvée par la precedente, on aura $\frac{1}{2}pq + \frac{3}{2}qx - pbx - 5bx^3 - bq - ſ + \frac{1}{2}x^5 + px^3 + \frac{1}{2}ppx - 2rx = 0$, qui donne $b = \frac{\frac{1}{2}x^5 + px^3 + \frac{1}{2}ppx - 2rx + \frac{5}{2}qxx + \frac{1}{2}pq}{5x^3 + px + q} = \frac{f}{g}$, en ſuppoſant le premier terme egal à f, & le ſecond egal à g, afin d'abreger. Mettant donc $\frac{f}{g}$ au lieu de b, & ſon quarré au lieu de bb dans la troiſiéme egalité, l'on aura $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}pxx + \frac{1}{4}pp + qx - r - \frac{ff}{gg} - \frac{2fxx}{g} = 0$, qui eſtant delivrée de ſes fractions, & les valeurs de f & de g ſubſtituées au lieu de ces lettres, l'on aura enfin l'egalité de dix degrez,

$$\begin{array}{llllllllll}
x^{10}\,* & +3px^8 & -qx^7 & +3ppx^6 & -2pqx^5 & +p^3x^4 & -ppqx^3 & +pprxx & +q^3x & +pqſ = 0, \\
 & & & -3r & +11ſ & -2pr & +4qr & -pqq & +ppſ - qqr & \\
 & & & & & -qq & +4pſ & +7qſ & -qrſ - ſſ & \\
 & & & & & & & -4rr & &
\end{array}$$

que nous appellons la reduite de la propoſée y^5. Et l'on obſervera que pour les ſignes + & — qui ne ſont pas aſſez determinez, ſi la propoſée a $+p$, l'on ſuppoſera que p aura ſon ſigne + dans tous les produits de la reduite, où il ſe trouve. Et ſi la propoſée avoit $-p$, l'on ſuppoſeroit p avec ſon ſigne — dans les ſeuls produits où il aura ſes dimenſions impaires. L'on obſervera auſſi la même choſe pour les autres lettres $q, r,$ & $ſ$. Cette remarque peut ſervir auſſi pour les egalitez du ſixiéme degré.

Les dix racines de cette reduite ſeront les dix ſommes alternatives des cinq racines de la propoſée y^5 alternativement combinées deux à deux, ou trois à trois en dix manieres differentes.

LXXVII. Si donc cette reduite peut eſtre diviſée par $x +$ ou — quelque diviſeur de ſon dernier terme, la propoſée y^5 &c. poura l'eſtre par $yy + xy + \frac{2x^5 + 2qx^3 - 2rxx + 2ſx + t}{5x^3 + px + q} = 0$, qui aura deux de ſes racines, & la diviſion la reduira au troiſiéme degré.

LXXVIII. De même pour reſoudre toute egalité du ſixiéme degré, dont aucune racine n'eſt commenſurable, l'on ſuppoſera qu'elle eſt formée par deux autres, l'une de deux & l'autre de quatre degrez, & par une operation ſemblable à la precedente, ou plus courtement encore, comme fait Monſieur Hudde, l'on trouvera l'egalité de quinze degrez.

$$\begin{array}{llllllllllll}
x^{15}\,* & +4qx^{3} & -2rx^{12} & +6qqx^{11} & +10tx^{10} & -2qſx^{9} & +12qtx^{8} & -3rtx^{7} & +10ſtx^{6} & -12ttx^{5} & +2qſtx^{4} & -ſqttx^{3} \\
 & & & -2ſ & -6qr & -26v & +6rſ & -24qv & -30rv & +6qrt & -6qrt & +7rſt \\
 & & & & & +4q^{3} & -6qqr & -7ſſ & +2qqt & -18qqv & -6rrt & +3rrv \\
 & & & & & & & +2qqſ & +4qrſ & -6qſſ & +8rſſ & +qqrt \\
 & & & & & & & +q^{4} & +2r^{3} & -6rrſ & -2qqrſ & -4q^{3}v \\
 & & & & & & & & -2q^{3}r & +2q^{3}ſ & +2qr^{3} & +qqſſ \\
 & & & & & & & & & +54ſv & -18tv & +18qſv \\
 & & & & & & & & & & & -4ſ^{3} \\
 & & & & & & & & & & & -2qrrſ \\
 & & & & & & & & & & & -r^{4} \\
 & & & & & & & & & & & -27vv
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
-6rttxx & -qqttx & -qrtt = 0. \\
+2r^{3}ſ & +3ſtt & +t^{3} \\
 & +qrſt & +rrſt \\
 & +3qrrv & -r^{3}v \\
 & -r^{3}t & \\
 & -rrſſ &
\end{array}$$

Cette egalité que l'on peut appeller la premiere reduite de la propoſée LXXIX. y^6 &c. aura quinze racines qui ſeront les ſommes des 6 racines de la propoſée alternativement combinées deux à deux ou quatre autant de fois qu'elles peuvent l'eſtre differemment. C'eſt pourquoy ſi la ſomme de deux ou bien de quatre telles qu'elles puiſſent eſtre, eſtoit commenſurable, cette reduite ſe pouroit diviſer ſans reſte par $x+$ ou $-$ quelqu'un des diviſeurs de ſon dernier terme, & la propoſée par conſequent pouroit eſtre diviſée ſans reſte par cette egalité de deux degrez $yy+xy+\frac{m}{n}=0$, en ſuppoſant que la valeur de m fuſt

$$\begin{array}{llllllll}
5x^{8} & +6px^{6} & -4qx^{5} & +5rx^{4} & -5ſx^{3} & -qqxx & -pſx & -qſ, \\
 & +pp & & & & +pr & +qr & \\
 & & & & & -9t & &
\end{array}$$

& que celle de n fuſt

$$\begin{array}{llllll}
14x^{6} & +8px^{4} & +5qx^{3} & +2ppxx & +pqx & -qq, \\
 & & & -6r & -3ſ &
\end{array}$$

ce qui reduira la propoſée au quatriéme degré, & celle de deux donnera auſſi deux de ſes ſix racines.

Pour la ſeconde reduite du ſixiéme degré, on ſuppoſera que la propoſée LXXX. eſt formée du produit de deux autres de trois degrez chacune, & l'on arrivera à une egalité de vingt degrez, mais qui ne paſſera que pour dix, parceque ſes dimenſions ſeront paires dans chacun de ſes termes. Les dix racines de cette egalité ſeront les dix ſommes des racines de la propoſée combinées trois à trois en vingt manieres differentes, *par III. 56.* mais parceque l'on ne peut prendre trois racines d'une part ſans prendre en même temps celle des trois qui reſtent & qui eſt la même, ces vingt manieres ne ſeront contées que pour la moitié, c'eſt à dire pour dix. Et pour en trouver quelque racine, il ſuffiroit de la diviſer par $xx-$ chaque quarré diviſeur du dernier terme.

Mais outre les transformées generales, il faudroit en avoir auſſi de parti- LXXXI. culieres pour examiner chaque degré ſelon ſes differentes eſpeces, afin de voir les communications que peuvent avoir entr'elles ſes racines réelles, ou ſes contradictions.

C'eſt ainſi qu'il faudra trois transformées particulieres pour le cinquiéme degré, parcequ'il renferme trois eſpeces d'egalitez, celles qui ont cinq racines réelles, celles qui en ont trois réelles & deux imaginaires, & celles qui en ont une réelle & quatre imaginaires.

LXXXII. Pour avoir facilement ces transformées particulieres, ſi toutes les racines ſont réelles, on appellera $2a$ la ſomme de deux racines d'une part, ou des trois autres qui reſtent de l'autre part, & pour exprimer toutes les differences alternatives de ces cinq racines, elles ſeront $a+b$, $a-b$, $-c-d$, $-c+d$, & $-2a+2c$. Ce qui donnera les trois egalitez $yy-2ay+\begin{array}{l}aa\\-bb\end{array}=0$, $yy+2cy+\begin{array}{l}cc\\-dd\end{array}=0$, & $y+2a-2c=0$, & leur produit, qui eſt l'egalité

$$\begin{array}{lllll}
y^5{*}-3aay^3 & +2a^3yy & -7aaccy & +2a^3cc=0. \\
\quad +4ac & -8aac & +4a^3c & -2a^3dd \\
\quad -3cc & +8acc & -4abbc & -2abbcc \\
\quad -bb & -2abb & +3aadd & +2abbdd \\
\quad -dd & -2c^3 & +4ac^3 & -2aac^3 \\
 & +2cdd & -4acdd & +2aacdd \\
 & & +3bbcc & +2bbc^3 \\
 & & +bbdd & -2bbcdd
\end{array}$$

ſera la transformée de la premiere eſpece qui a ſes cinq racines toutes réelles. Et ſi l'on y change tous les ſignes où ſe trouve dd, elle ſera la transformée de la ſeconde eſpece, qui aura les trois réelles $a+b$, $a-b$, & $-2a+2c$, & la contradiction des deux autres imaginaires dd. Si l'on changeoit de nouveau dans cette ſeconde transformée tous les ſignes où ſe trouve bb, l'on auroit la transformée de la troiſiéme eſpece, qui auroit la racine réelle $-2a+2c$, & les deux contradictions des quatre autres imaginaires bb & dd.

LXXXIII. De même pour avoir les quatre transformées particulieres du ſixiéme degré. Si toutes les racines ſont réelles, l'on ſuppoſera qu'elles ſont $a+b$, $a-b$, $-c+d$, $-c-d$, $-a+c-e$, & $-a+c+e$, qui donneront les trois egalitez $yy-2ay+\begin{array}{l}aa\\-bb\end{array}=0$, $yy+2cy+\begin{array}{l}cc\\-dd\end{array}=0$, & $yy+\begin{array}{l}2a\\-2c\end{array}y+\begin{array}{l}aa\\-2ac\\+cc\\-ee\end{array}=0$,

& leur produit

$$\begin{array}{llllll}
y^6{*} & -2aay^4 & -2aacy^3 & +a^4yy & -4a^3ccy & +a^4cc=0. \\
 & +2ac & +2acc & -2a^3c & +2a^4c & -a^4dd \\
 & +2cc & +2aee & +3aacc & +2aabbc & -2a^3c^3 \\
 & -bb & -2cee & -aabb & -2aacee & +2a^3cdd \\
 & -dd & -2abb & +2aadd & +4aac^3 & -aaccee \\
 & -ee & +2cdd & -aaee & -2aacdd & +aaddee \\
 & & & -2acdd & +2abbcc & +aabbdd \\
 & & & -2abbc & +2abbdd & -aabbcc \\
 & & & -2ac^3 & +2accdd & -aaccdd \\
 & & & +4acee & +2accee & +aac^4 \\
 & & & +2bbcc & -2addee & +2abbc^3 \\
 & & & +bbdd & -2ac^4 & -2abbcdd \\
 & & & +bbee & -2bbcdd & -bbc^4
\end{array}$$

$-ccddyy$

$$\begin{array}{lll} -ccddyy & +2bbceey & +bbccdd \\ -ccee & & +bbccee \\ +c^4 & & -bbddee \\ +ddee & & \end{array}$$

ſera la transformée de la premiere eſpece. Et ſi l'on change tous les ſignes où ſe trouve *dd*, l'on aura la transformée de la ſeconde eſpece, qui aura les quatre racines réelles $a+b$, $a-b$, $-a+c+e$ & $-a+c-e$, & la contradiction des deux autres imaginaires *dd*. Si l'on changeoit de nouveau dans cette ſeconde transformée, tous les ſignes où ſe trouve *bb*, l'on auroit la transformée de la troiſiéme eſpece, qui auroit les deux racines réelles $-a+c+e$ & $-a+c-e$, & les deux contradictions des quatre autres imaginaires *bb* & *dd*. Et ſi l'on changeoit enfin dans cette troiſiéme transformée tous les ſignes où ſe trouve *ee*, l'on auroit la transformée de la quatriéme eſpece qui auroit les trois contradictions de ſes ſix racines toutes imaginaires, *bb*, *dd*, & *ee*. Il en eſt ainſi pour les autres degrez.

La Regle des combinaiſons expliquée *III. 56.* ſervira pour connoître juſques à quel degré doit monter chacune de leurs reduites, quoy qu'il ſoit inutile de s'amuſer à les chercher. Par exemple, la reduite du ſeptiéme degré conſideré comme un produit du ſecond par le cinquiéme aura 21 degrez; & l'autre reduite de ce même degré conſideré comme un produit du troiſiéme par le quatriéme en auroit 35. La reduite du huitiéme conſideré comme un produit du ſecond par le ſixiéme auroit 28 degrez. Et ſa reduite, ſi on le conſidere comme un produit du quatriéme par le quatriéme en auroit 70, qui paſſeroient ſeulement pour 35, à cauſe que les dimenſions de l'inconnuë auroient par tout nombre pair de degrez. De même la reduite du dixiéme conſideré comme un produit du cinquiéme par le cinquiéme auroit 252 degrez, qui paſſeroient ſeulement pour 126. Et ainſi des autres. Mais il ſeroit inutile de s'arreſter à chercher ces reduites, non ſeulement à cauſe des difficultez inſurmontables dans le calcul, mais auſſi parcequ'il eſt tres-rare qu'on ait envie d'en faire uſage. Il ſuffit de reconnoître juſqu'où l'on peut penetrer par les lumieres naturelles en ſuivant les voyes les plus courtes & les plus faciles.

Il eſt donc temps que nous finiſſions, mais en finiſſant il eſt tres-juſte de rendre à noſtre DIEU & noſtre unique Maiſtre tout l'honneur & toute la gloire qui luy eſt deuë pour les petites connoiſſances qu'il luy plaiſt de nous communiquer. Car enfin toutes nos connoiſſances naturelles ne ſont que des liberalitez toutes pures que le PERE DES LUMIERES répand ſans ceſſe en nous, *Epiſt. Iac. cap. 1. verſ. 17.* puiſque c'eſt par ſa LUMIERE & par ſa SAGESSE ETERNELLE qu'il éclaire & qu'il inſtruit tout homme qui vient au monde. *Ioann. cap. 1. verſ 7.* En effet on doit regarder toutes les connoiſſances les plus claires & les plus étenduës des Mathematiques, comme autant de degrez qui nous ſervent à nous élever à luy, & qui nous diſpoſent à une connoiſſance plus claire & plus diſtincte de l'immenſité & des autres perfections de ſon Eſtre, leſquelles quoy qu'infinies, ſe raſſemblent & ſe renferment toutes dans l'unité tres-ſimple & tres-indiviſible de ſa ſouveraine Eſſence.

Que toute gloire & tout honneur ſoit donc rendu à Dieu & à ſon Fils unique
JESUS-CHRIST NOSTRE SEIGNEUR.

FIN.

Extrait du Privilege du Roy.

PAR Lettres Patentes du Roy données à ſaint Germain en Laye le vingt-ſeptiéme jour de Septembre 1672. Signées, Par le Roy en ſon Conſeil, MALEBRANCHE : Il eſt permis à noſtre bien amé André Pralard Libraire, d'imprimer, vendre ou debiter un Livre intitulé *Elemens des Mathematiques*, *&c.* en tant de volumes, en telles marges & caracteres, & autant de fois qu'il le voudra, & cela pendant le temps & eſpace de quinze années entieres, à commencer du jour que ledit Livre ſera achevé d'imprimer pour la premiere fois ; Avec deffenſes à tous Libraires, Imprimeurs, & autres perſonnes de quelque qualité & condition qu'elles ſoient de l'imprimer & debiter, à peine de trois mille livres d'amende, comme il eſt plus au long porté par leſdites Lettres.

Regiſtré ſur le Livre de la Communauté des Imprimeurs & Marchands Libraires de cette Ville de Paris, le 21. Octobre 1675. Signé, THIERRY, Syndic.

Achevé d'imprimer pour la premiere fois, le 20. Novembre 1675.

Les Exemplaires ont eſté fournis.

E

Ma

Elemens
des
Mathemati