ESTUDIO ANALÍTICO ELEMENTAL

DE LA

DUALIDAD Y TRANSFORMACION DE FIGURAS

EN EL PLANO

POR

JOSÉ ARENAS Y GARCÍA

Ingeniero de Caminos
y Profesor en la Escuela general preparatoria
de Ingenieros y Arquitectos.

MADRID
MANUEL MINUESA DE LOS RÍOS, IMPRESOR
Miguel Servet, 13.—Teléfono 651.
1889

ESTUDIO ANALÍTICO ELEMENTAL

DE LA

DUALIDAD Y TRANSFORMACION DE FIGURAS

EN EL PLANO

POR

JOSÉ ARENAS Y GARCÍA

Ingeniero de Caminos
y Profesor en la Escuela general preparatoria
de Ingenieros y Arquitectos.

MADRID
MANUEL MINUESA DE LOS RÍOS, IMPRESOR
Miguel Servet, 13.—Teléfono 651.
1889

PRELIMINARES

I.—Supongamos dos puntos en un plano, los P_1 y P_2, referidos á ejes cartesianos ox, oy (fig. 1.ª); sean $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$ las coordenadas de esos puntos: otro cualquiera P_3 de la recta $\overline{P_1 P_2}$ estará determinado por la relación $\frac{\overline{P_3 P_1}}{\overline{P_3 P_2}}$, cuya magnitud y signo denotaremos por K.

La figura da, evidentemente,

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = \mathrm{K}:$$

luego

$$x_3 = \frac{x_1 - \mathrm{K}x_2}{1 - \mathrm{K}}; \quad y_3 = \frac{y_1 - \mathrm{K}y_2}{1 - \mathrm{K}}.$$

La cantidad K es negativa si P_3 está comprendido entre P_1 y P_2, y positiva en el caso contrario.

Si $\frac{m}{n}$ es el valor de K, las expresiones anteriores se transforman en

$$x_3 = \frac{nx_1 - mx_2}{n - m}; \quad y_3 = \frac{ny_1 - my_2}{n - m}.$$

Hacemos esta observación porque la mayoría de los autores de Geometría analítica hallan las coordenadas del punto que divide un segmento en otros dos cuya relación sea conocida, sin preocuparse del signo de $\frac{m}{n}$, y llegan á fórmulas distintas de las anteriores en la apariencia.

Del mismo modo, si P_1, P_2, P_3 estuvieran referidos á un sistema trilineal llamando (A, B, C) con los subíndices correspondientes las coordenadas de los puntos, tendríamos

$$A_3 = \frac{A_1 - KA_2}{1 - K}; \quad B_3 = \frac{B_1 - KB_2}{1 - K}; \quad C_3 = \frac{C_1 - KC_2}{1 - K};$$

y si empleásemos coordenadas tangenciales y fuesen $U_1 = 0$ y $U_2 = 0$ las ecuaciones de P_1 y P_2, la de P_3 sería

$$U_1 - KU_2 = 0.$$

II.—La distancia δ de un punto (x, y) á la recta que tiene por ecuación

$$ax + by + c = 0,$$

está dada por la fórmula

$$\delta = \frac{ax + by + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}};$$

la ambigüedad del signo desaparece con la convención de que la distancia del origen de coordenadas á la recta se considere negativa; y para que sea así, es preciso *tomar el radical del denominador con signo contrario al que tenga el término independiente* c: esto es lo que supondremos en todo lo que sigue.

Puntos en el infinito.

III.—Imaginemos (fig. 2.ª) un sistema cartesiano trazado en un plano y una recta AB que pase por el origen. Sea $y = mx$ la ecuación de esta recta (m es un número). Supongamos también un punto móvil que recorre la recta en la dirección de la flecha, partiendo por ejemplo del origen de coordenadas.

En un cierto instante la posición del móvil será M_1 y sus coordenadas ON_1 y OP_1, que llamaremos x_1 é y_1; en otro instante el móvil llegará á M_2 y sus coordenadas serán x_2, y_2; después, cuando el móvil pase por M_3 sus coordenadas valdrán x_3, y_3, y así sucesivamente.

Vemos, pues, que las coordenadas del punto móvil son dos variables que crecen continua y constantemente, y que los crecimientos de esas dos variables no pueden ser completamente arbitrarios, porque como al móvil lo suponemos siempre en la recta $\overline{AB}$, sus coordenadas habrán de satisfacer á la ecuación $y = mx$, y por tanto $\frac{y_0}{x_0} = m$; $\frac{y_1}{x_1} = m$; ..... etc.

Si nos fijamos en un punto cualquiera M, de $\overline{AB}$, llegará un momento en que las coordenadas del punto móvil sean iguales á las de M, y en los instantes sucesivos serán mayores, como que van creciendo constantemente; y esto será cierto por grandes que supongamos las coordenadas de M. En resumen, que las x é y del móvil crecen *indefinidamente*, y en todos los instantes su relación es constante, determinada, igual á m.

Pues bien, á ese punto ideal que se mueve sobre la recta $\overline{AB}$, siempre en el mismo sentido, es al que llamamos *punto* en el *infinito* de $\overline{AB}$.

Es importantísimo entender bien que al decir punto en el infinito de una recta, no se trata de un punto determinado, sino de un punto que se mueve sobre ella, siempre en el mismo sentido, y del cual punto no consideramos una ni varias posiciones, sino todas ellas en conjunto, ó, mejor dicho, consideramos el movimiento del punto.

Conocidas las coordenadas de un punto en un plano, pueden determinarse analíticamente todos los elementos ó figuras que dependen de la posición del punto.

Así, por ejemplo, las rectas que pasan por un punto $(x_0 y_0)$ tienen por ecuación general

$$y - y_0 = a\,(x - x_0),$$

en que a es un número cualquiera.

La polar del punto $(x_0 y_0)$ con relación á una circunferencia de radio r que pase por el origen, tendrá por ecuación $xx_0 + yy_0 = r^2$ (β).

La ecuación de la circunferencia cuyo centro sea el punto dado y que pase por el origen, será

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = x_0^2 + y_0^2;$$

ó bien, desarrollando y simplificando,

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 = 0 \ (\gamma).$$

Fácil sería considerar otros muchos elementos que dependen de la posición del punto $(x_0 y_0)$, pero bastan para nuestro objeto los citados.

Los coeficientes de las ecuaciones anteriores vemos que dependen de las coordenadas del punto dado, ó en otros términos, son funciones de x_0 é y_0.

Si suponemos un punto móvil, es decir, si x_0 é y_0 varían, claro es que los elementos que hemos considerado variarán también, y en sus ecuaciones deberemos distinguir *dos* sistemas de variables: el *uno*, el que forman x_0 é y_0, cuya variación depende de la ley que adoptemos para el movimiento del punto, ley arbitraria hasta ahora; el *otro*, formado por x é y, coordenadas generales del lugar geométrico en que nos fijemos; la variación de x é y dependerá de los valores de x_0 é y_0 que adoptemos, pero *no* de la ley de variación de estas últimas cantidades.

IV.—Pues elijamos para ley del movimiento del punto $(x_0 y_0)$ la de que recorra siempre en el mismo sentido una recta que pase por el origen; es decir: supongamos que x_0 é y_0 varíen, verificándose siempre $\frac{y_0}{x_0} = m$, y creciendo x_0 constantemente; según lo dicho anteriormente, tal ley la expresaremos abreviadamente diciendo que consideramos el *punto en el infinito* de la recta sobre que se mueve el punto.

Veamos cómo varían los elementos que hemos considerado en el número anterior.

La ecuación

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

se puede escribir

$$x_0\left(\frac{y}{x_0} - \frac{y}{x_0} - a\frac{x}{x_0} + a\right) = 0;$$

para que el primer término de esta igualdad sea nulo, debe de serlo la cantidad comprendida en el paréntesis, puesto que x_0 no es nulo, sino que va creciendo constantemente: luego

$$\frac{y}{x_0} - \frac{y_0}{x_0} - a\frac{x}{x_0} + a = 0 \ (h);$$

y como x_0 puede ser mayor que cualquier cantidad asignable, podremos hacer que

$$\frac{y}{x_0} - a\frac{x}{x_0} < \varepsilon$$

por muy pequeño que sea ε (*), lo cual equivale á decir que á medida que x_0 crece indefinidamente, $\frac{y}{x_0} - \frac{y_0}{x_0} - a\frac{x}{x_0}$ tiende á $-\frac{y_0}{x_0}$; y recordando el principio fundamental de los límites y la ecuación (h), tendremos en el límite

$$a = m,$$

lo cual nos enseña que el sistema formado por todas las rectas concurrentes en un punto, tiene por límite, cuando ese punto se aleja indefinidamente sobre una recta L ($y = mx$), el sistema de todas las rectas del plano paralelas á L.

El enunciado del teorema que hemos demostrado no suele ser el anterior, sino el siguiente: un sistema de rectas paralelas es un sistema de rectas concurrentes en el infinito.

Después de lo dicho antes se comprenderá el verdadero significado de esta manera de expresarse.

La ecuación (β) se puede escribir

$$x + y\frac{y_0}{x_0} = \frac{r^2}{x_0};$$

(*) Nótese que no hablamos más que de la variación de x_0 é y_0, y que los resultados que se obtengan son independientes del punto (x, y) del lugar geométrico (h).

luego si el punto que consideramos es el *punto* en el infinito de $\overline{AB}$, tendremos pasando al límite

$$x + my = 0:$$

resultado que se enuncia de dos maneras:

1.ª Cuando un punto se aleja indefinidamente sobre una recta $\overline{AB}$ que pase por el origen, su polar (α) tiene por límite la perpendicular á $\overline{AB}$, que pasa por O.

2.ª La polar respecto á una circunferencia que pasa por el origen, del *punto en el infinito* de AB, es la perpendicular á esta última recta, trazada por O.

Siguiendo el mismo procedimiento, escribiremos la ecuación (γ)

$$\frac{x^2}{x_0} + \frac{y^2}{x_0} - 2x - 2y\frac{y_0}{x_0} = 0;$$

y suponiendo que (x_0, y_0) es el punto en el infinito de $\overline{AB}$, llegaremos á deducir que en el límite

$$x + my = 0:$$

luego el límite de las circunferencias que pasan por el origen y tienen su centro en un punto $(x_0 y_0)$, que se aleja indefinidamente sobre una recta $\overline{AB}$, es la perpendicular trazada por O á esta última recta.

Con lo dicho se comprenderá bien el concepto de *punto en el infinito* de una recta, y sólo nos resta hacer algunas observaciones importantes:

1.ª Nuestros razonamientos anteriores suponen que la recta pasa por el origen y no es ninguno de los ejes; pero no por esto dejan de ser generales, puesto que el origen y los ejes los hemos supuesto arbitrarios, y cuando se tratase de una recta cualquiera, todo se reduciría á hacer un cambio de coordenadas.

2.ª Hemos supuesto también que la relación $\frac{y_0}{x_0}$ permanece constante é igual á m; pero se comprende, recordando el principio de los límites, que á los mismos resultados hubiéramos llegado suponiendo variable la relación $\frac{y_0}{x_0}$, con tal que esa relación, á medida que x_0 é y_0 crezcan, tienda á un límite, que será el valor m que hemos empleado. Geométricamente equivale esto á que el punto móvil, en vez de recorrer una recta, recorra una curva que tenga una rama infinita.

3.ª No nos hemos fijado en el sentido en que suponemos al móvil recorriendo la recta, y hubiera sido inútil, pues en nuestras conclusiones no ha quedado más rastro, por decirlo así, del móvil, que la cantidad m, independiente de tal sentido: se expresa esto diciendo que una recta sólo tiene un punto en el infinito, y otras veces que los puntos en el infinito de un plano están en línea recta.

En resumen, diremos que un punto en el infinito está determinado en un plano cuando conozcamos el límite de la relación $\frac{y}{x}$ de sus coordenadas, cuando éstas crezcan indefinidamente con arreglo á una cierta ley.

CAPÍTULO PRIMERO

Principio de la dualidad.

---

§ I

1.—Se determina un punto de un plano, en el sistema cartesiano, considerándole como intersección de dos rectas respectivamente paralelas á los ejes, y este procedimiento geométrico equivale analíticamente á expresar que las coordenadas del punto satisfacen á dos ecuaciones que, en este caso, son sencillísimas:

$$x = a,$$
$$y = b,$$

siendo a y b dos números determinados.

Más generalmente, puesto que la posición de un punto de un plano queda determinada por los valores de dos cantidades, claro es que si entre estas dos cantidades, que llamamos x, y, establecemos dos ecuaciones como

$$\left.\begin{array}{r} f(x, y) = 0 \\ f_1(x, y) = 0 \end{array}\right\} (1),$$

á cada par de valores de x, y, que satisfagan á estas dos ecuaciones corresponderá un punto en el plano en que tengamos los ejes; y si el número de soluciones del sistema (1) es limitado, limitado será también el número de puntos representativos de tales soluciones.

Para que las ecuaciones (1) representen un solo punto del plano, será necesario y suficiente que no tengan más que un par de soluciones comunes, y esto sabemos por Álgebra que equivale á que f_1 y f_2 sean enteras, racionales y de primer grado, es decir de la forma

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Queda, pues, sentado que un punto se determina por los valores de dos cantidades, y estos valores son en el caso más general los que satisfacen á dos ecuaciones de primer grado entre dos variables.

2.—Consideremos ahora la ecuación

$$ax + by + c = 0 \ (2);$$

esta ecuación queda satisfecha por infinitos pares de valores de x é y, y sin dificultad se demuestra, y así se hace en todos los tratados de Geometría analítica, que los puntos representativos de esos pares de valores están en línea recta; y recíprocamente, que las coordenadas de todos los puntos de una recta satisfacen á una ecuación de primer grado: por todo lo cual se dice que una recta se determina analíticamente por una ecuación tal como (2).

Para conocer una ecuación hemos de saber los valores de sus coeficientes: en la (2) aparecen tres de éstos; mas como evidentemente no se altera la ecuación porque la dividamos por uno cualquiera de ellos, quedan reducidos á dos. Con objeto de que haya uniformidad en nuestros cálculos, siempre elegiremos como divisor el término independiente, lo cual no disminuye la generalidad de las fórmulas, y de este modo la ecuación de una recta tendrá la forma

$$lx + my + 1 = 0 \ (3).$$

Facilísimo es comprender la significación de los coeficientes l y m de la anterior ecuación: haciendo x igual á 0 y llamando y_0 el valor que corresponda á y, se verificará

$$my_0 + 1 = 0;$$

de donde

$$m = -\frac{1}{y_0};$$

haciendo y igual á 0 y llamando x_0 el valor simultáneo de x, tendremos

$$l = -\frac{1}{x_0};$$

pero x_0, y_0, son respectivamente las distancias desde el origen á los puntos en que la recta de que tratamos corta á los ejes, ó bien los segmentos determinados por la recta sobre los ejes: luego los coeficientes de x é y en la ecuación de una recta, puesta bajo la forma (3), son iguales y de signo contrario á la unidad dividida por los segmentos que la recta determina sobre los ejes.

3.—Resulta de todo lo anterior que, para definir analíticamente una recta, es decir, para que podamos escribir su ecuación y, valiéndonos de ella, trazar la recta, si fuere necesario, hemos de conocer los valores numéricos de los coeficientes l y m; y como para determinar dos valores *únicos* de dos cantidades son precisas dos ecuaciones de primer grado entre ellas, diremos que una recta está definida por dos ecuaciones de primer grado entre l y m.

4.—Vemos, pues, perfecta analogía, mejor dicho, identidad en la determinación analítica de un punto y una recta en un plano, y aun podemos encontrar nuevas relaciones entre una y otra forma geométrica.

Una vez conocidos los coeficientes que determinan una recta, la ecuación

$$lx + my + 1 = 0$$

queda satisfecha por las coordenadas de un punto cualquiera de la recta; pues bien: una propiedad análoga se verifica entre los coeficientes de todas las rectas que pasan por un punto determinado.

En efecto, sean (x_0, y_0) las coordenadas de un punto: la ecuación general de las rectas que por él pasan es

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0;$$

ó bien

$$\alpha x + \beta y - (\alpha x_0 + \beta y_0) = 0;$$

siendo α y β dos números: dividamos esta ecuación por $-(\alpha x_0 + \beta y_0)$ para ponerla en la forma adoptada

$$-\frac{\alpha}{\alpha x_0 + \beta y_0} x - \frac{\beta}{\alpha x_0 + \beta y_0} y + 1 = 0:$$

dando á α y β todos los valores imaginables, tendremos las ecuaciones de todas las rectas que pasan por el punto (x_0, y_0); para que una recta

$$lx + my + 1 = 0$$

pase por ese punto, será preciso y bastará que haya dos valores de α y β que satisfagan á las dos ecuaciones

$$l = -\frac{\alpha}{\alpha x_0 + \beta y_0},$$

$$m = -\frac{\beta}{\alpha x_0 + \beta y_0},$$

ó quitando denominadores

$$(lx_0 + 1)\alpha + ly_0\beta = 0,$$
$$mx_0\alpha + (my_0 + 1)\beta = 0.$$

Como estas dos ecuaciones son homogéneas y de primer grado en α y β, para que sean compatibles habrá de verificarse que

$$\begin{vmatrix} lx_0 + 1; & ly_0 \\ mx_0; & my_0 + 1 \end{vmatrix} = 0:$$

desarrollando la determinante, se obtiene

$$lx_0 + my_0 + 1 = 0 \quad (4).$$

Esta condición es necesaria y suficiente: luego resulta que los coeficientes l y m de las rectas que pasan por el punto (x_0, y_0) satisfacen á la ecuación (4), y recíprocamente.

5.—Á las cantidades l y m se las llama coordenadas tangenciales de la recta; y empleando esta denominación, los resultados que hemos obtenido se pueden enunciar del siguiente modo:

1.º Para determinar un punto ó una recta en un plano, necesitamos conocer *dos* cantidades, las coordenadas del punto ó las de la recta.

2.º Dadas las coordenadas de un punto, las de todas las rectas que concurren en él satisfacen á una ecuación de primer grado; y dadas las coordenadas de una recta, las de todos sus puntos satisfacen también á una ecuación de primer grado.

3.º Las ecuaciones de primer grado de que acabamos de hablar, tienen la misma forma: el término independiente es la unidad positiva; los coeficientes de las variables son las coordenadas que se nos dan, y á cada variable corresponde como coeficiente la coordenada que se refiere al mismo eje; las variables son coordenadas de una recta, si se nos da un punto, y coordenadas de un punto si se nos da una recta.

6.—Dada, pues, una ecuación de primer grado con dos variables, que llamaremos u y v, de la forma

$$au + bv + 1 = 0 \quad (5),$$

siendo a y b dos números, para representarla geométricamente, podemos seguir dos procedimientos:

1.º Convenir en representar las variables u y v por las coordenadas cartesianas de un punto: entonces los infinitos pares de valores de las variables que satisfacen á la ecuación (5), estarán representados por una infinidad de puntos, todos situados en una recta, cuyas coordenadas tangenciales serán a y b, y diremos que la ecuación (5) representa á esa recta.

2.º Convenir en representar las variables u y v por las coordenadas tangenciales de una recta: entonces los infinitos pares de valores de las variables que satisfacen á la ecuación (5), estarán representados por una infinidad de rectas, todas concurrentes en un punto, cuyas coordenadas serán a y b, y diremos que la ecuación (5) representa á ese punto.

7.—Pero la doble interpretación geométrica que hemos dado á la ecuación (5), puede evidentemente aplicarse á cualquiera otra entre dos variables; y en esto consiste el principio de la dualidad en la Geometría analítica en el plano, cuyo enunciado general es el siguiente, que se comprenderá sin dificultad, después de los desarrollos anteriores.

Toda ecuación con dos variables tiene una doble representación geométrica en un plano en que tengamos un sistema cartesiano, según hagamos una ú otra de estas dos convenciones:

1.ª Si convenimos en representar las dos variables por las coordenadas de un punto, entonces los infinitos pares de valores de las variables que satisfacen á la ecuación, estarán representados por una infinidad de puntos cuyo conjunto está definido analíticamente por la ecuación dada.

Á toda relación entre los parámetros de la ecuación, corresponderá una especial distribución de los puntos, y por tanto una cierta propiedad de la forma geométrica que determinan.

2.ª Si convenimos en representar las dos variables por las coordenadas de un punto, entonces los infinitos pares de valores de las variables que satisfacen á la ecuación, estarán representados por una infinidad de puntos cuyo conjunto está definido analíticamente por la ecuación dada.

Á toda relación entre los parámetros de la ecuación, corresponderá una especial distribución de las rectas, y por tanto una cierta propiedad de la forma geométrica que determinan.

§ II

8.—En coordenadas trilineales, un punto se determina por tres cantidades; sus distancias á los tres lados de un triángulo tomado como sistema referencia; y como dadas dos de ellas queda conocido el punto, y, por tanto, resulta conocida la tercera distancia, es claro que no pueden darse tres cantidades arbitrarias como coordenadas trilineales de un punto, sino que esas tres cantidades han forzosamente de satisfacer á una cierta condición que permita deducir una de ellas conocidas las otras dos; condición facilísima de hallar, y que se expresa algebraicamente, si llamamos a, b, c, los tres lados del triángulo de referencia, S su área, y A, B, C, las coordenadas de un punto, haciendo la convención de que A, B, C, son negativas cuando están, respecto al lado á que se refieren, en la misma región que el triángulo, y positivas en el caso contrario, por la relación

$$-a\mathrm{A} - b\mathrm{B} - c\mathrm{C} = 2\mathrm{S} \quad (6).$$

Sabido es que también pueden tomarse como coordenadas trilineales de un punto, no precisamente sus distancias á los lados del triángulo de referencia, sino cantidades proporcionales á dichas distancias, y estas nuevas coordenadas satisfarán también á una condición, que se obtendrá del siguiente modo: llamando A′, B′, C′, las actuales coordenadas de un punto, A, B, C, como antes las distancias á los lados del triángulo y λ el coeficiente de proporcionalidad, tendremos

$$\mathrm{A}' = \lambda\mathrm{A};\ \mathrm{B}' = \lambda\mathrm{B};\ \mathrm{C}' = \lambda\mathrm{C};$$

de donde

$$A = \frac{A'}{\lambda}; \ B = \frac{B'}{\lambda}; \ C = \frac{C'}{\lambda};$$

y poniendo estos valores en (6), resulta la condición buscada

$$-aA' - bB' - cC' = 2\lambda S.$$

Todavía, en vez de las distancias de un punto á los lados del triángulo de referencia ó de cantidades proporcionales á ellas, se pueden tomar para definir el punto las distancias multiplicadas cada una por un número distinto; es decir, que determinamos el punto por los valores de K_1A, K_2B, K_3C, siendo K_1, K_2, K_3, números conocidos; llamando á estas nuevas coordenadas A'', B'', C'', es evidente que satisfarán á la condición

$$-\frac{a}{K_1}A'' - \frac{b}{K_2}B'' - \frac{c}{K_3}C'' = 2S.$$

Si elegimos en particular los números K_1, K_2, K_3, de modo que

$$\frac{a}{K_1} = \frac{b}{K_2} = \frac{c}{K_3} = 2S,$$

las coordenadas correspondientes se llaman triangulares y satisfacen á la relación

$$-A'' - B'' - C'' = 1.$$

9.—Todas estas maneras de fijar la posición de un punto por medio de un triángulo de referencia, se reducen, en suma, á dar tres cantidades que necesariamente han de satisfacer á una cierta condición, y por tanto, se pueden dar arbitrariamente dos de ellas, ó bien las relaciones de dos de ellas á la tercera. Supongamos, por ejemplo, que A, B, C, sean las distancias de un punto á los lados de un triángulo, y que se conocen los valores p y q de las relaciones $\frac{A}{C}$ y $\frac{B}{C}$: deduciremos que $A = pC$, $B = qC$; y poniendo estos valores en (6), obtendremos

$$C = -\frac{2S}{ap + bq + c};$$

y, por tanto,

$$A = -\frac{2S}{ap + bq + r}p; \quad B = -\frac{2S}{ap + bq + r}q.$$

10.—Demuéstrase inmediatamente después de establecido lo anterior que si las coordenadas trilineales de un punto, á más de satisfacer á la relación fundamental, satisfacen á una ecuación homogénea y de primer grado con relación á dichas tres variables, los puntos correspondientes están en línea recta, y recíprocamente, las coordenadas de los puntos de una recta satisfacen á la condición (6), y á una ecuación de la forma

$$lA + mB + nC = 0 \quad (7).$$

Una recta queda, pues, definida desde el momento en que se conocen las relaciones entre dos de los coeficientes de su ecuación y el tercero; y nosotros vamos á tomar siempre, para evitar confusiones, como tercero al coeficiente de C, y á los de A y B los llamaremos primero y segundo: también diremos que el coeficiente l corresponde á la variable A, ó al lado a ó al vértice A del triángulo de referencia (fig. 3.ª), y lo mismo de m y n.

11.—Busquemos ahora la significación geométrica de una cualquiera de las relaciones entre l, m y n, por ejemplo, de $\frac{m}{n}$: para ello hagamos $A = 0$ en la ecuación de la recta (7); esto equivale á fijarnos en el punto de intersección de la recta dada con el lado a del triángulo de referencia; designando por α ese punto (fig. 3.ª), y por B_α y C_α sus coordenadas relativas á los lados b y c, tendremos

$$mB_\alpha + nC_\alpha = 0;$$

de donde

$$\frac{m}{n} = -\frac{C_\alpha}{B_\alpha} \quad (8).$$

Pero un punto del lado a queda determinado conociendo en magnitud y en signo la relación de sus coordenadas referentes á los lados c y b: luego la relación $\frac{m}{n}$ define el punto α, y del mismo modo las relaciones $\frac{l}{n}$ y $\frac{l}{m}$ definen los puntos β y γ.

Si la relación $\frac{m}{n}$ es positiva, la igualdad (8) nos dice que C_α y B_α son de signos contrarios, y por tanto, el punto α no está comprendido entre los vértices B y C; si $\frac{m}{n}$ es negativa, el punto α está entre dichos vértices. Una propiedad análoga nos darán las relaciones $\frac{l}{n}$ y $\frac{l}{m}$.

12.—Otra forma podemos dar á la igualdad (8), observando que de la figura se deduce, teniendo en cuenta los signos

$$C_\alpha = \alpha B \cdot \text{sen}\, B;$$

$$B_\alpha = -\alpha C \cdot \text{sen}\, C;$$

y, por tanto,

$$\frac{m}{n}=\frac{\alpha B}{\alpha C}\cdot\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}=\frac{\alpha B}{\alpha C}\cdot\frac{b}{c};$$

ó bien,

$$\frac{m}{n}:\frac{b}{c}=\frac{\alpha B}{\alpha C} \quad (9).$$

Del mismo modo tendremos

$$\frac{l}{n}:\frac{a}{c}=\frac{\beta A}{\beta C} \quad (10) \quad \text{y} \quad \frac{l}{m}:\frac{a}{b}=\frac{\gamma A}{\gamma B} \quad (11).$$

Observamos que estas tres últimas relaciones son facilísimas de recordar, pues se comprenden en la siguiente regla: la relación de las distancias del punto común á una recta y un lado del triángulo de referencia á los dos vértices que se encuentran en ese lado, es igual á la relación entre los coeficientes de la ecuación de la recta, dividida (la relación dicha) por la que existe entre los lados, tomando los coeficientes y los lados correspondientes á los vértices.

Esto da el medio de construir geométricamente con facilidad una recta dada por su ecuación en coordenadas trilineales, determinando los puntos en que corta á dos lados del triángulo de referencia.

13.—Aun puede obtenerse de la figura otra propiedad de los coeficientes l, m, n; en efecto, si trazamos perpendiculares á la recta de que se trata desde los vértices A, B, C, y llamamos p_A, p_B, p_C á esas distancias, tendremos

$$\frac{\alpha B}{\alpha C}=\frac{p_B}{p_C} \quad (s).$$

Dos casos pueden ocurrir: que el punto α esté comprendido entre los B y C, ó que no lo esté: en el primer caso, de que es ejemplo la recta de punto y trazo de la figura $\frac{\alpha B}{\alpha C}$, es negativa; y por lo mismo deberemos atribuir á p_B y p_C signos contrarios; en el segundo, el de la recta L, $\frac{\alpha B}{\alpha C}$ es positiva: luego p_B y p_C deben de ser del mismo signo: todo esto para que la relación (s) sea cierta en magnitud y signo. Observando la figura se descubre que basta para ello suponer p_B y p_C del mismo signo cuando estén á un mismo lado de la recta de que se trate, y de signos contrarios si se encuentran á distintos lados; haciendo la misma convención para p_A y p_B ó p_A y p_C (*), tendremos de un modo general

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{p_B}{p_C}; \quad \frac{\beta A}{\beta C} = \frac{p_A}{p_C}; \quad \frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{p_A}{p_B};$$

y en virtud de (9), (10) y (11),

$$\frac{p_A}{p_B} = \frac{l}{m} : \frac{a}{b}; \quad \frac{p_B}{p_C} = \frac{m}{n} : \frac{b}{c}; \quad \frac{p_A}{p_C} = \frac{l}{n} : \frac{a}{c};$$

igualdades que se pueden escribir

$$\frac{l}{ap_A} = \frac{m}{bp_B} = \frac{n}{cp_C} \quad (12).$$

Esto nos da la siguiente propiedad: los coeficientes l, m, n de la ecuación de una recta, son proporcionales á los productos de los lados del triángulo por las distancias á la recta desde los vértices opuestos.

(*) Nótese que la convención hecha no atribuye signo alguno á las cantidades p_A, p_B, p_C, sino á las relaciones entre estas cantidades.

11.—La ecuación de una recta puede, pues, escribirse del siguiente modo:

$$(13) \quad ap_A A + bp_B B + cp_C C = 0;$$

es decir, que una recta queda definida por sus distancias á los tres vértices del triángulo, distancias que se comprende inmediatamente que no pueden darse de un modo arbitrario, porque dadas dos de ellas queda determinada la tercera, y, por tanto, entre ellas debe existir una cierta ecuación de condición independiente de la posición de la recta; en seguida buscaremos esa condición; pero antes observemos que, en vez de las distancias mismas, pueden darse para definir la recta tres cantidades proporcionales á ellas, que llamaremos P_A, P_B, P_C, y entonces la ecuación de la recta será

$$aP_A A + bP_B B + cP_C C = 0,$$

puesto que la ecuación (13) no se altera multiplicando por una cantidad cualquiera, y podemos tomar como multiplicador la relación de proporcionalidad entre P_A, P_B, P_C y p_A, p_B, p_C. También podría definirse la recta por tres cantidades proporcionales á los productos de las distancias p_A, p_B, p_C, por tres números conocidos; si esas tres cantidades son L, M, N, los tres números r, s, t, y λ el coeficiente de proporcionalidad, tendremos

$$\frac{L}{r} = \lambda p_A; \quad \frac{M}{s} = \lambda p_B; \quad \frac{N}{t} = \lambda p_C,$$

y podremos escribir la ecuación de la recta

$$\frac{aL}{r} A + \frac{bM}{s} B + \frac{cN}{t} C = 0.$$

Se ve que esta última manera de definir una recta no es más que la generalización de la que empleamos al principio, suponiendo conocidos l, m, n: puesto que hemos deducido la proporcionalidad entre l, m, n, y ap_A, bp_B, cp_C, es decir, que l, m, n, son proporcionales á los productos de p_A, p_B, p_C, por las cantidades conocidas a, b, c, lados del triángulo de referencia.

15.—Busquemos la ecuación de condición á que satisfacen p_A, p_B y p_C: para ello hay muchos procedimientos, alguno de ellos geométrico, que sería el más apropiado si tratáramos de exponer el sistema de coordenadas trilineales con independencia del cartesiano; mas como no es ese el objeto de nuestro estudio, seguiremos otro método que nos conducirá con mayor prontitud al resultado.

Empezaremos por hallar la distancia de un punto dado por sus coordenadas (A, B, C) á una recta dada por su ecuación ($lA + mB + nC = 0$). Elijamos un sistema cartesiano rectangular, con el origen en el interior del triángulo: las ecuaciones de los lados del triángulo, teniendo en cuenta las notaciones de la figura, serán:

$$A = x \cos \alpha_1 + y \operatorname{sen} \alpha_1 - p_1 = 0.$$
$$B = x \cos \alpha_2 + y \operatorname{sen} \alpha_2 - p_2 = 0.$$
$$C = x \cos \alpha_3 + y \operatorname{sen} \alpha_3 - p_3 = 0.$$

La ecuación de la recta será

$$(14) \quad (l\cos\alpha_1+m\cos\alpha_2+n\cos\alpha_3)x+(l\operatorname{sen}\alpha_1+m\operatorname{sen}\alpha_2+n\operatorname{sen}\alpha_3)y+ (lp_1+mp_2+np_3)=0.$$

Recordando una fórmula muy conocida, la distancia δ de un punto cualquiera (x, y) á esta recta, vendrá dada por la expresión

$$\delta = \frac{(l\cos\alpha_1+m\cos\alpha_2+n\cos\alpha_3)x+(l\operatorname{sen}\alpha_1+m\operatorname{sen}\alpha_2+n\operatorname{sen}\alpha_3)y+(lp_1+mp_2+np_3)}{\sqrt{(l\cos\alpha_1+m\cos\alpha_2+n\cos\alpha_3)^2+(l\operatorname{sen}\alpha_1+m\operatorname{sen}\alpha_2+n\operatorname{sen}\alpha_3)^2}}.$$

Desarrollando el denominador, observando que $\alpha_2 - \alpha_1 = 180^\circ - C$; $\alpha_3 - \alpha_1 = 180^\circ + B$; $\alpha_3 - \alpha_2 = 180^\circ - A$, y que, por otra parte, poner las coordenadas (x, y) de un punto en el primer miembro de la ecuación (14), equivale á poner las coordenadas trilineales (A, B, C) del mismo punto en el primer miembro de la ecuación (7), la expresión anterior se convertirá en

$$\delta = \frac{lA + mB + nC}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2 - 2lm \cos C - 2nl \cos B - 2mn \cos A}}.$$

El segundo miembro no alterará porque sustituyamos en vez de l, m, n, las cantidades proporcionales ap_A, bp_B, cp_C: luego, finalmente

$$\delta = \frac{ap_A A + bp_B B + cp_C C}{\sqrt{a^2 p_A^2 + b^2 p_B^2 + c^2 p_C^2 - 2bcp_B p_C \cos A - 2cap_C p_A \cos B - 2abp_A p_B \cos C}}.$$

Si en esta fórmula ponemos en lugar de A, B, C, las coordenadas del vértice A $\left(\text{que son } A = -\frac{2S}{a}, B = 0, C = 0\right)$, el primer miembro deberá ser p_A, y, por tanto

$$p_A^2 = \frac{4p_A^2 S^2}{\sqrt{a^2 p_A^2 + b^2 p_B^2 + c^2 p_C^2 - 2bcp_B p_C \cos A - 2cap_C p_A \cos B - 2abp_A p_B \cos C}}:$$

luego

$$(15) \quad a^2 p_A^2 + b^2 p_B^2 + c^2 p_C^2 - 2bcp_B p_C \cos A - 2cap_C p_A \cos B - 2abp_A p_B \cos C = 4S^2.$$

Si en vez del vértice A, tomásemos el B ó el C, llegaríamos al mismo resultado; y como entre p_A, p_B, p_C, no puede existir más que una ecuación de condición independiente de la posición de la recta, tal ecuación es la (15), que se representa abreviadamente por $\{ap_A, bp_B, cp_C\} = 4S^2$.

16.—Resumiendo todo lo expuesto en este párrafo, tendremos que en el sistema de coordenadas trilineales,

un punto se determina por sus distancias á tres rectas fijas (los lados del triángulo de referencia), distancias que satisfacen á una cierta condición, (6): ó por tres cantidades proporcionales á esas distancias; ó por otras tres cantidades proporcionales á los productos de las distancias por números conocidos.

una recta se determina por sus distancias á tres puntos fijos (los vértices del triángulo de referencia), distancias que satisfacen á una cierta condición, (15): ó por tres cantidades proporcionales á esas distancias; ó por otras tres cantidades proporcionales á los productos de las distancias por números conocidos.

Pues elijamos, por ser lo más sencillo para las conclusiones que nos proponemos sacar, como variables para determinar la posición de un punto, sus distancias á los lados del triángulo; y para determinar la posición de una recta, sus distancias á los vértices del mismo triángulo; á las primeras ya sabemos que se las llama coordenadas trilineales del punto; á las segundas las llamaremos coordenadas tangenciales de la recta.

17.—Consideremos una ecuación homogénea y de primer grado con tres variables, U, V, W, tal como

$$lU + mV + nW = 0 \quad (16),$$

en que l, m, n son números; para representarla geométricamente, podemos seguir dos procedimientos:

1.° Convenir en que U, V, W representen las coordenadas de un punto: entonces los infinitos sistemas de valores de las variables que satisfacen á la ecuación (16), vendrán representados por una infinidad de puntos, y sabemos que esos puntos están en una recta cuyas coordenadas, multiplicadas respectivamente por a, b, c, son proporcionales á l, m, n.

2.º Convenir en que U, V, W representen las coordenadas de una recta: entonces los infinitos sistemas de valores de las variables que satisfacen á la ecuación (16), vendrán representados por una infinidad de rectas: la ecuación general de estas rectas en coordenadas trilineales, será, según sabemos,

$$a\text{UA} + b\text{VB} + c\text{WC} = 0 \quad (17),$$

en la que pondremos valores de U, V, W que satisfagan á (15) y (16). La ecuación (17) puede evidentemente sustituirse por la que resulte de eliminar una cualquiera de las variables U, V, W, entre ella y la (16). Eliminemos, por ejemplo, la U, y la ecuación general de las rectas se podrá escribir

$$\text{V}(lb\text{B} - ma\text{A}) + \text{W}(lc\text{C} - na\text{A}) = 0;$$

y en esta forma se descubre inmediatamente que todas esas rectas pasan por el punto determinado por las ecuaciones,

$$lb\text{B} - ma\text{A} = 0; \quad lc\text{C} - na\text{A} = 0;$$

ó bien

$$\frac{a\text{A}}{l} = \frac{b\text{B}}{m} = \frac{c\text{C}}{n};$$

es decir, por el punto cuyas coordenadas, multiplicadas respectivamente por a, b, c, son proporcionales á l, m, n.

Facilísimo es demostrar los recíprocos de estos dos teoremas.

18.—Pero la doble interpretación geométrica que hemos dado á la ecuación (16) puede evidentemente aplicarse á cualquiera otra homogénea con tres variables, y en esto consiste el principio de la dualidad en este sistema, principio cuyo enunciado general es el dado en el número **7**, sin más variaciones que considerar tres variables en lugar de dos, y ecuaciones homogéneas entre esas variables en lugar de ecuaciones cualesquiera.

CAPÍTULO II

Transformación correlativa.

---

§ I

19.—Las definiciones de polar de un punto y de polo de una recta, respecto á una cónica, y el teorema de que á los puntos de una recta L corresponden polares que concurren en un punto M, siendo M el polo de L, nos enseñan que dada una figura plana compuesta de puntos y rectas, podemos construir otra también plana, valiéndonos de una cónica auxiliar, de modo que á un punto de la primera corresponda una recta en la segunda, y recíprocamente. Construídas las dos figuras, es claro que á cada propiedad de una de ellas corresponderá otra propiedad en la segunda: el trabajo que se emplee en la investigación de una propiedad en una figura plana tendrá, pues, un resultado *doble*, y esta gran ventaja del procedimiento indicado se aumentará considerablemente si el análisis de la cuestión nos conduce á un procedimiento uniforme, á una regla fija, para deducir una de otra las dos proposiciones que se corresponden.

20.—Mas se ocurre desde luego que el sistema expuesto en el número anterior para deducir de una figura otra, y de las propiedades de la primera, las de la segunda, entraña algo de particular y concreto, y surge naturalmente la idea de generalizarlo. Examinando con atención lo expuesto, vemos que los resultados previstos dependen esencialmente de que á punto de una figura corresponde una recta en la otra, y recíprocamente; y que lo particular es el procedimiento seguido empleando una cónica auxiliar. Abandonemos ese procedimiento particular, y propongámonos resolver el siguiente problema:

Dada una figura plana compuesta de puntos y rectas, investigar fórmulas generales para deducir otra, de modo que á un punto de la primera corresponda *una sola* recta en la segunda, y recíprocamente: á tales figuras se da el nombre de *correlativas*, y la *transformación correlativa* tiene por objeto, dada una de ellas, deducir la otra.

21.—Para que nuestros razonamientos aparezcan con toda claridad y no ocurran las dificultades que suelen presentarse al que por primera vez estudia esta cuestión, vamos á suponer, por de pronto, que las dos figuras correlativas han de estar dibujadas en dos planos distintos; en cada uno de estos planos supondremos un sistema de coordenadas cartesianas para referir á ellos las figuras: llamamos ejes de las x y de las y á los que están en el primer plano, y ejes de las α y de las β á los situados en el segundo.

Un punto de la primera figura estará determinado por sus coordenadas (x, y); un punto de la segunda por las (α, β); una recta de la primera por una ecuación de primer grado entre las coordenadas de sus puntos, y, por último, una recta de la segunda por una ecuación análoga.

Para que al punto (x, y) corresponda la recta $L\alpha + M\beta + N = 0$ (*), será necesario y suficiente que conocidos los valores numéricos de x é y, podemos determinar los de L, M, N, ó bien que á cada par de valores de x é y correspondan valores determinados de L, M, N, ó en otros términos, que L, M, N, sean funciones de x é y.

(*) Lo propio sería decir *la recta cuya ecuación es, etc.;* sin embargo, muchas veces, por abreviar el lenguaje, emplearemos expresiones análogas á la que es objeto de esta nota.

22.—Pongamos, pues,

$$L = f_1(x, y),$$
$$M = f_2(x, y),$$
$$N = f_3(x, y),$$

y tratemos de investigar la forma de las funciones f_1, f_2, f_3. Desde luego estas funciones sólo pueden tener un valor para cada par de valores de x, y, puesto que sólo una recta ha de corresponder á cada punto de la figura que tenemos en el primer plano.

Utilicemos ahora la propiedad recíproca de la que hemos empleado; es decir, que á una recta de la segunda figura corresponda un solo punto en la primera.

Tal recta tendrá una ecuación como

$$l\alpha + m\beta + n = 0 \quad (18),$$

en que l, m, n serán números.

Llamemos (x_1, y_1) las coordenadas del punto que corresponde á (18), punto que llamaremos correlativo de (18).

La recta correlativa de (x_1, y_1) tendrá por ecuación

$$(19) \quad f_1(x_1, y_1)\alpha + f_2(x_1, y_1)\beta + f_3(x_1, y_1) = 0:$$

luego (18) y (19) deben de ser ecuaciones equivalentes, puesto que representan la misma recta; esto exige que se verifiquen las condiciones

$$\frac{f_1(x_1, y_1)}{l} = \frac{f_2(x_1, y_1)}{m} = \frac{f_3(x_1, y_1)}{n},$$

ó bien

$$(20) \quad mf_1(x_1, y_1) - lf_2(x_1, y_1) = 0; \quad nf_1(x_1, y_1) - lf_3(x_1, y_1) = 0.$$

De manera que si conociéramos la forma de f_1, f_2, f_3, resolviendo las ecuaciones (20), tendríamos las coordenadas del punto correlativo de (18); y como este punto, según la definición, es único, las ecuaciones (20) sólo deben verificarse para un par de valores de sus incógnitas; y esto obliga á que sus primeros miembros sean polinomios de primer grado en x_1, y_1; pero lo que acabamos de decir se ha de verificar para todos los valores de l, m y n, puesto que la recta (18) puede ser cualquiera en la que llamamos segunda figura: luego f_1, f_2 y f_3 son necesariamente de primer grado en x, y; es decir, de la forma

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y) &= a_1x + b_1y + c_1 \\ f_2(x, y) &= a_2x + b_2y + c_2 \\ f_3(x, y) &= a_3x + b_3y + c_3 \end{aligned}\right\} \quad (21),$$

en que a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_3, a_3, b_3, c_3, representan números conocidos.

23.—Si, para abreviar, designamos por L, M, N tres trinomios de primer grado en (x, y), de coeficientes conocidos, y en tales trinomios sustituimos sucesivamente las coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2) ..... de todos los puntos que forman una figura en el primer plano: llamando respectivamente $(L_1, M_1; N_1)$, (L_2, M_2, N_2) ..... los resultados de las sustituciones, las rectas del segundo plano representadas por las ecuaciones

$$\begin{aligned} L_1\alpha + M_1\beta + N_1 &= 0 \\ L_2\alpha + M_2\beta + N_2 &= 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

formarán una figura correlativa de la que hemos considerado en el primer plano.

Si se nos da en el segundo plano una figura compuesta de rectas cuyas ecuaciones son

$$l_1\alpha + m_1\beta + n_1 = 0$$
$$l_2\alpha + m_2\beta + n_2 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

y formamos los sistemas de ecuaciones

$$\frac{L}{l_1} = \frac{M}{m_1} = \frac{N}{n_1} \quad (s_1)$$
$$\frac{L}{l_2} = \frac{M}{m_2} = \frac{N}{n_2} \quad (s_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

los puntos del primer plano cuyas coordenadas sean respectivamente las soluciones de los sistemas s_1, s_2 ....., formarán una figura correlativa de la que hemos supuesto en el segundo plano.

21.—Poniendo en la ecuación de la recta correlativa del punto (x, y), en vez de L, M, N, sus valores, y sacando x é y factores comunes de los términos en que aparecen, resulta

$$x(a_1\alpha + a_2\beta + a_3) + y(b_1\alpha + b_2\beta + b_3) + (c_1\alpha + c_2\beta + c_3) = 0;$$

para abreviar, designemos por λ el trinomio $a_1\alpha + b_1\beta + c_3$; por μ el $b_1\alpha + b_2\beta + b_3$ y por ν el $c_1\alpha + c_2\beta + c_3$: la ecuación de la recta correlativa del punto (x, y) podrá ponerse indiferentemente bajo una de las dos formas

$$L\alpha + M\beta + N = 0; \quad \lambda x + \mu y + \nu = 0.$$

Pero es importante observar que en ambas formas los parámetros y las variables son los mismos, sólo que en la primera aparecen explícitamente y en la segunda no; el empleo de esta segunda forma facilita algunas demostraciones, como veremos en seguida.

25.—Imaginemos en el primer plano una recta cuya ecuación sea

$$ax + by + c = 0 \quad (22);$$

á cada punto (x, y) de esta recta corresponderá su correlativa, representada por la ecuación

$$\lambda x + \mu y + \nu = 0 \quad (23):$$

diremos que (23) es la ecuación de las rectas correlativas de los puntos de (22), y es preciso entender bien esta locución: (23) tiene sus parámetros (L, M, N) dependientes de (x, y), y, por tanto, si consideramos muchos pares de valores de (x, y), L, M y N adquirirán otros tantos valores, y la ecuación (23) representará el mismo número de rectas que pares de valores hayamos supuesto; y si hacemos variar (x, y) de una manera continua, de modo que satisfagan á la ecuación (22) ó á otra cualquiera, podremos decir abreviadamente que (23) es la ecuación general de las rectas correlativas de los puntos que forman el lugar geométrico representado por la ley de variación de (x, y). En (23) habrá, pues, *dos* sistemas de variables, que es preciso distinguir bien: el uno (x, y), cuya variación se determina por una relación completamente distinta de (23), y el otro (α, β), cuya variación se determina por (23).

26.—Así que el procedimiento para hallar la ecuación de la recta correlativa de un punto de (22) será: 1.°, dar un valor numérico á una de las dos variables (x, y); por ejemplo, á la x; 2.º, deducir de (22) el valor de la y que corresponda á la x elegida; 3.º, sustituir estos dos valores en (23). Pero es evidente que podemos efectuar de un modo *general* las dos primeras operaciones indicadas, despejando y de (22), con lo cual se obtiene

$$y = -\frac{ax + c}{b};$$

y sustituyendo este valor en (23), que se convertirá, quitando denominadores, en

$$(b\lambda - a\mu)x + (b\nu - c\mu) = 0 \quad (24).$$

Claro que lo hecho para llegar á (24) ha sido eliminar y entre las ecuaciones (22) y (23) por el procedimiento de sustitución, y el mismo resultado se obtendría empleando cualquiera otro de los métodos conocidos.

Siendo la ecuación (24) el resultado de efectuar de un modo general las dos primeras operaciones, sustituyendo en ella todos los valores posibles de x, tanto reales como imaginarios, tendremos las ecuaciones de las rectas correlativas de todos los puntos de (22).

Pero examinando la forma de (24), se deduce desde luego que *cualquiera* que sea x, la ecuación se verifica para los valores de α y β que satisfacen á las ecuaciones

$$b\lambda - a\mu = 0$$
$$b\nu - c\mu = 0,$$

que se pueden escribir

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{\mu}{b} = \frac{\nu}{c}:$$

los valores de α y β que satisfacen á estas ecuaciones son, por tanto, las coordenadas de un punto del segundo plano que verifican la ecuación (24), cualquiera que sea x: luego las rectas correlativas de los puntos de una recta concurren en un punto.

27.—Veamos si el recíproco del teorema que acabamos de demostrar es cierto.

Supongamos en la segunda figura varias rectas concurrentes en un punto, cuyas coordenadas llamaremos (α_1, β_1); la ecuación general de dichas rectas será

$$\frac{\alpha - \alpha_1}{\beta - \beta_1} = \frac{m}{n},$$

ó bien

$$n\alpha - m\beta + (m\beta_1 - n\alpha_1) = 0 \quad (25),$$

siendo m y n números cualesquiera.

Las coordenadas de los puntos correlativos en la primera figura con las rectas de la segunda, representadas por (25), se obtendrán (**23**) de las ecuaciones

$$\frac{L}{n} = \frac{M}{-m} = \frac{N}{m\beta_1 - n\alpha_1} \quad (26);$$

pero resulta fácilmente por las propiedades de las fracciones iguales

$$\frac{L}{n} = \frac{M}{-m} = \frac{L\alpha_1 + M\beta_1}{n\alpha_1 - m\beta_1}:$$

luego los puntos cuyas coordenadas satisfacen á las ecuaciones (26), es decir, los correlativos de las rectas (25), satisfacen también, *cualesquiera* que sean los valores de m y n, á la ecuación

$$L\alpha_1 + M\beta_1 = -N,$$

ó bien

$$L\alpha_1 + M\beta_1 + N = 0,$$

que también puede escribirse $x\lambda_1 + y\mu_1 + \nu_1 = 0$, y que por ser de primer grado en (x, y), representa una recta de la primera figura.

28.—Al punto de la segunda figura, intersección de las rectas correlativas de los puntos de la primera, situados en una recta A, lo llamaremos *punto correlativo de la recta* A.

Del mismo modo á la recta de la primera figura, lugar geométrico de los puntos que tienen por correlativas en la segunda rectas concurrentes en un cierto punto π, la llamaremos *recta correlativa en la primera figura del punto* π *de la segunda.*

29.—Tenemos, pues, según lo dicho anteriormente:

1.º Al punto (x, y) de la primera figura, corresponde en la segunda, la recta $L\alpha + M\beta + N = 0$.

2.º Á la recta $ax + by + c = 0$, de la primera figura, corresponde en la segunda el punto $\frac{\lambda}{a} = \frac{\mu}{b} = \frac{\nu}{c}$.

3.º Al punto (α, β) de la segunda figura, corresponde en la primera la recta $x\lambda + y\mu + \nu = 0$.

4.º Á la recta $l\alpha + m\beta + n = 0$, de la segunda figura, corresponde en la primera el punto $\frac{L}{l} = \frac{M}{m} = \frac{N}{n}$.

30.—Vamos ahora á examinar algunas particularidades importantes que se presentan en el caso general, es decir, suponiendo cualesquiera los coeficientes de L, M, N, ó de λ, μ, ν.

a. Consideremos los puntos de la primera figura situados sobre la recta cuya ecuación es $L = 0$: sus rectas correlativas estarán representadas por $M\beta + N = 0$, ó bien $\beta = -\frac{N}{M}$, poniendo en M y N valores de (x, y) que satisfagan á $L = 0$: luego los puntos de $L = 0$ tienen por rectas correlativas paralelas al eje de las $\alpha\alpha$.

b. Consideremos los puntos de la primera figura situados sobre la recta, cuya ecuación es $M = 0$; sus rectas correlativas estarán representadas por $L\alpha + N = 0$, ó bien $\alpha = -\frac{N}{L}$, poniendo en L y N valores de (x, y) que satisfagan á $M = 0$: luego los puntos de $M = 0$ tienen por rectas correlativas las paralelas al eje de las $\beta\beta$.

c. Consideremos los puntos de la primera figura situados sobre la recta cuya ecuación es $N = 0$; sus rectas correlativas estarán representadas por $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{L}{M}$, poniendo en L y M valores que satisfagan á $N = 0$: luego los puntos de $N = 0$ tienen por rectas correlativas las que pasan por el origen del sistema $\alpha\beta$.

d. Consideremos el punto de la primera figura intersección de las rectas cuyas ecuaciones son $\left\{\begin{matrix} L = 0 \\ N = 0 \end{matrix}\right\}$: su recta correlativa tendrá por ecuación $M\beta = 0$, ó bien $\beta = 0$, puesto que M es aquí el *número* que resulta de sustituir en la expresión general de M, en vez de x é y, los valores numéricos que satisfagan á las ecuaciones $\left\{\begin{matrix} L = 0 \\ N = 0 \end{matrix}\right\}$: luego dicha recta es el eje de las $\alpha\alpha$.

e. Consideremos el punto de la primera figura, intersección de las rectas cuyas ecuaciones son $\left\{\begin{matrix} M = 0 \\ N = 0 \end{matrix}\right\}$: su recta correlativa tendrá por ecuación $L\alpha = 0$, ó bien $\alpha = 0$, puesto que L es aquí el *número* que resulta de sustituir en la expresión general de L en vez de (x, y), los valores numéricos que satisfagan á las ecuaciones $\left\{\begin{matrix} M = 0 \\ N = 0 \end{matrix}\right\}$: luego dicha recta es el eje de las $\beta\beta$.

f. Consideremos el punto de la primera figura, intersección de las rectas cuyas ecuaciones son $\left\{\begin{matrix} L = 0 \\ M = 0 \end{matrix}\right\}$: su recta correlativa tendrá por ecuación $N = 0$; y como aquí

N es el *número* que resulta de sustituir en la expresión general de N los valores numéricos de x é y, que satisfacen á $\left\{\begin{array}{l} L = 0 \\ M = 0 \end{array}\right\}$, resulta que dicha ecuación representa la recta en el infinito del segundo plano.

Recordando que al punto (α, β) de la segunda figura corresponde en la primera la recta $x\lambda + y\mu + \nu = 0$, se deducen con la misma facilidad que las propiedades anteriores las siguientes:

a'. Á las rectas de la primera figura paralelas al eje de las xx corresponden en la segunda los puntos de la recta que tienen por ecuación $\lambda = 0$.

b'. Á las rectas de la primera figura paralelas al eje de las yy corresponden en la segunda los puntos de la recta que tienen por ecuación $\mu = 0$.

c'. Á las rectas de la primera figura que pasan por el origen de coordenadas corresponden en la segunda los puntos de la recta representada por $\nu = 0$.

d'. Al eje de las xx corresponde en la segunda figura el punto representado por $\left\{\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \nu = 0 \end{array}\right\}$.

e'. Al eje de las yy corresponde en la segunda figura el punto de intersección de las rectas $\mu = 0$ y $\nu = 0$.

f'. Á la recta en el infinito del primer plano corresponde en el segundo plano el punto en que se cortan las dos rectas $\lambda = 0$ y $\mu = 0$.

g. Un punto en el infinito se determina, según vimos (**IV**), por el límite á que tiende la relación $\frac{y}{x}$ de las coordenadas de un punto móvil que satisfacen á una cierta relación $f(x, y) = 0$, cuando una de dichas coordenadas crece indefinidamente.

La ecuación de la recta correlativa del punto (x, y) se puede escribir

$$\lambda + \frac{y}{x}\mu + \frac{\nu}{x} = 0 \quad (27):$$

la ecuación de la recta correlativa de un punto en el infinito del primer plano será el límite de la (27), cuando (x, y) crezcan indefinidamente satisfaciendo á una cierta ley; pero si el límite de $\frac{y}{x}$ es m, el límite de (27) será $\lambda + m\mu = 0$ (28), y esta ecuación representará la recta que corresponde al punto en el infinito que la cantidad m determina en el primer plano.

Vemos que cualquiera que sea m, las rectas (28) pasan por el punto de intersección de las $\left\{\begin{matrix}\lambda = 0\\ \mu = 0\end{matrix}\right\}$, que es lo que hemos deducido anteriormente.

g'. Del mismo modo, á la recta del primer plano que tiene por ecuación $L + nN = 0$, corresponde en el segundo el punto en el infinito determinado por la condición

$$\lim. \frac{\beta}{\alpha} = n.$$

h. Al punto imaginario del primer plano, cuyas coordenadas son $\left(a + b\sqrt{-1},\ a' + b'\sqrt{-1}\right)$ corresponderá la recta

$$\left(a + b\sqrt{-1}\right)\lambda + \left(a' + b'\sqrt{-1}\right)\mu + \nu = 0,$$

ó bien

$$(a\lambda + a'\mu + \nu) + \sqrt{-1}\,(b\lambda + b'\mu) = 0;$$

esta recta es también imaginaria; pero pasa por el punto real de intersección de las rectas

$$\left.\begin{matrix} a\lambda + a'\mu + \nu = 0 \\ b\lambda + b'\mu = 0 \end{matrix}\right\} \text{(29)}.$$

Si se consideran en el primer plano dos puntos imaginarios conjugados, cuyas coordenadas sean respectivamente $(a+b\sqrt{-1}, a'+b'\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1}, a'-b'\sqrt{-1})$, sus rectas correlativas pasarán por un mismo punto real, el determinado por las ecuaciones (29), y es muy fácil ver que este punto es el correlativo de la recta *real* que pasa por los puntos imaginarios considerados en el primer plano.

h'. Del mismo modo se deduce, y como ejercicio conviene al lector detallar esta propiedad, que á una recta imaginaria del primer plano, corresponde en el segundo un punto también imaginario, y que los puntos correlativos de dos rectas imaginarias conjugadas del primer plano son también conjugadas y se hallan en la recta *real* que corresponde al punto de intersección también *real* de las dos rectas consideradas.

Observación.—Ya hemos advertido que suponemos reales los coeficientes de L, M, N; y esta misma hipótesis haremos en lo sucesivo; pues aunque el estudio de la transformación general, considerando de forma compleja los coeficientes dichos, es muy curioso, y notables los resultados que se obtienen, hacer ese estudio nos apartaría del objeto que nos hemos propuesto conseguir con estos apuntes.

31.—Si en el primer plano tenemos dos puntos **A** y **B** (fig. 4.ª), cuyas coordenadas designaremos respectivamente por (x_1, y_1) (x_2, y_2), las de un tercer punto **C** situado en la recta $\overline{\mathrm{AB}}$, de tal modo que se verifique $\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}} = \frac{m}{n}$, siendo $\frac{m}{n}$ una cantidad determinada en magnitud y en signo, serán

$$\frac{nx_1 - mx_2}{n-m}; \quad \frac{ny_1 - my_2}{n-m}.$$

La recta R_1, correlativa del punto A, tendrá por ecuación

$$(a_1x_1+b_1y_1+c_1)\alpha+(a_2x_1+b_2y_1+c_1)\beta+(a_3x_1+b_3y_1+c_3)=0,$$

ó bien

$$L_1\alpha+M_1\beta+N_1=0,$$

indicando con los subíndices, que se han sustituído en las expresiones generales de L, M y N, las coordenadas afectas de los mismos subíndices.

La recta correlativa del punto B estará representada por

$$L_2\alpha+M_2\beta+N_2=0.$$

Finalmente, la ecuación de la recta correlativa de C, será

$$\left(a_1\frac{nx_1-mx_2}{n-m}+b_1\frac{ny_1-my_2}{n-m}+c_1\right)\alpha+$$
$$+\left(a_2\frac{nx_1-mx_2}{n-m}+b_2\frac{ny_1-my_2}{n-m}+c_2\right)\beta+$$
$$+\left(a_3\frac{ax_1-mx_2}{n-m}+b_3\frac{ny_1-my_2}{n-m}+c_3\right)=0,$$

ó bien, quitando denominadores,

$$n(L_1\alpha+M_1\beta+N_1)-m(L_2\alpha+M_2\beta+N_3)=0,$$

á la que se puede dar la forma

$$\frac{L_1\alpha+M_1\beta+N_1}{L_2\alpha+M_2\beta+N_2}=\frac{m}{n} \quad (30).$$

Veamos qué significa esta ecuación.

La distancia de un punto (α, β) á la recta cuya ecuación es

$$L_1\alpha + M_1\beta + N = 0,$$

se sabe que es

$$\frac{L_1\alpha + M_1\beta + N_1}{\sqrt{L^2 + M^2}},$$

tomando para el radical signo contrario al de N_1.

Luego $L_1\alpha + M_1\beta + N_1$ es el producto de la distancia de un punto cualquiera del segundo plano á la recta R_1 por el valor absoluto de $\sqrt{L_1^2 + M_1^2}$ afecto de un signo que sabemos determinar.

Del mismo modo $L_2\alpha + M_2\beta + N_2$ es el producto de la distancia de un punto cualquiera del segundo plano á la recta R_2 por el valor absoluto de $\sqrt{L_2^2 + M_2^2}$ afecto del signo correspondiente.

La ecuación (30) nos dice, pues, que la relación de las distancias de un punto cualquiera de R_3 á las rectas R_1 y R_2, es

$$\pm \frac{m}{n} \frac{\sqrt{L_2^2 + M_2^2}}{\sqrt{L_1^2 + M_1^2}},$$

sin que haya ambigüedad en el signo que se deba tomar, que dependerá de los que tengan las cantidades N_1 y N_2.

Designando por K la cantidad $\dfrac{\sqrt{L_2^2 + M_2^2}}{\sqrt{L_1^2 + M_1^2}}$ con el signo que le corresponda, la relación antedicha será

$$K \cdot \frac{m}{n}.$$

El valor y el signo de K sólo dependen de los puntos A y B.

Pero $\frac{\overline{HF}}{\overline{HG}}$ es igual, cualquiera que sea el punto H de R_2, á $\frac{\operatorname{sen}(R_3R_1)}{\operatorname{sen}(R_3R_2)}$: luego resulta que si consideramos dos puntos fijos, **A**, **B**, y dos rectas correlativas, R_1, R_2, y hacemos recorrer á un punto C la recta **AB**, llamando R_3 á la correlativa de dicho punto, la relación variable $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ será *proporcional* á la relación variable $\frac{\operatorname{sen}(R_3R_1)}{\operatorname{sen}(R_4R_3)}$ y el coeficiente de proporcionalidad será la cantidad designada por K.

32.—Consideremos ahora cuatro puntos en línea recta, P_1, P_2, P_3, P_4, y sus rectas correlativas R_1, R_2, R_3, R_4, que serán concurrentes.

Según lo dicho en el número anterior, tendremos

$$\frac{P_3P_1}{P_3P_2} = K\frac{\operatorname{sen}(R_3R_1)}{\operatorname{sen}(R_3R_2)},$$

$$\frac{P_4P_1}{P_4P_2} = K\frac{\operatorname{sen}(R_4R_1)}{\operatorname{sen}(R_4R_2)};$$

dividiendo estas dos igualdades, se obtiene

$$\frac{P_3P_1}{P_3P_2} : \frac{P_4P_1}{P_4P_2} = \frac{\operatorname{sen}(R_3R_1)}{\operatorname{sen}(R_3R_2)} : \frac{\operatorname{sen}(R_4R_1)}{\operatorname{sen}(R_4R_2)} \quad (31).$$

El primer miembro de (31) es la relación anarmónica de los puntos P que se representa por el símbolo (P_1, P_2, P_3, P_4), y el segundo la relación anarmónica de las rectas R expresada por (R_1, R_2, R_3, R_4).

La igualdad (31) demuestra, recordando las relaciones que existen entre las diferentes relaciones anarmónicas que corresponden á cuatro puntos en línea recta y á cuatro rectas concurrentes, la siguiente importantísima propiedad:

Las relaciones anarmónicas de cuatro puntos en línea recta del primer plano son iguales á las del haz que forman sus rectas correlativas en el segundo, tomando las rectas en el mismo orden que los puntos.

33.—Es casi evidente, después de los principios establecidos, que también se verifica la igualdad entre las relaciones anarmónicas de un haz de cuatro rectas de la primera figura y sus puntos correlativos tomados en el mismo orden que las rectas.

34.—Se comprenden sin dificultad, después de lo dicho, las siguientes propiedades:

Si en una figura plana hay dos sistemas de puntos ó dos haces de rectas homográficas, en la figura correlativa los haces de rectas ó los sistemas de puntos correspondientes serán también homográficos.

Si en una figura plana hay sobre una recta dos series de puntos en involución, los haces que alrededor de un mismo punto corresponderán en la figura correlativa, estarán también en involución.

35.—Para establecer las fórmulas de la transformación correlativa y deducir las propiedades más importantes que de ellas se derivan, hemos empleado hasta ahora el sistema de coordenadas cartesianas lineales para determinar los elementos geométricos (puntos y rectas) que constituyen las dos figuras: se llegará evidentemente á los mismos resultados empleando los sistemas de coordenadas cartesianas tangenciales, ó las coordenadas homogéneas, ó las trilineales ó triangulares.

Hemos elegido el método menos elegante para nuestro estudio, porque dedicamos estos apuntes á los que por primera vez estudian la Geometría analítica, y nos hemos propuesto darles una idea clara de la teoría de figuras correlativas: ahora, que creemos haberlo conseguido, vamos á repetir nuestro estudio, si bien con alguna rapidez, empleando otro procedimiento, lo cual constituirá un ejercicio muy conveniente, pues familiarizará al lector con el empleo de otros sistemas de coordenadas, haciéndole comprender sus ventajas y poniéndole en disposición de usarlos directamente cuando su inteligencia haya de ocuparse en investigaciones más elevadas.

§ II

36.—Sabemos que un punto está determinado en coordenadas tangenciales por una ecuación de primer grado, como

$$au + bv + c = 0 \quad (32)$$

entre las variables u, v, que son las coordenadas de una recta.

Elijamos para determinar la primera figura las coordenadas tangenciales, y para determinar la segunda las coordenadas lineales, correspondientes ambas al sistema cartesiano definido en la primera figura por las dos rectas ox, oy, y en la segunda por las $o'\alpha$, $o'\beta$, las mismas que hasta ahora nos han servido.

Á poco que nos fijemos, comprenderemos que de este método mixto de determinar las dos figuras han de resultar algunas ventajas, como son abreviar algo los razonamientos y dar unidad á la notación algebraica: en efecto, los elementos que constituyen las dos figuras son puntos y rectas; en cada uno de los dos planos tomamos dos variables independientes, que llamamos u y v en el primero, α y β en el segundo; un punto de la primera figura estará definido por una ecuación de primer grado en u, v; una recta de la segunda por otra ecuación, también de primer grado, entre α y β; una recta de la primera vendrá representada analíticamente por *dos* ecuaciones de primer grado en u, v; un punto de la segunda por dos ecuaciones del mismo grado entre α, β; vemos, pues, que los elementos correspondientes en las dos figuras están determinados por el mismo número de ecuaciones entre las variables que corresponden á cada uno de los dos planos; esto indudablemente es más uniforme, por decirlo así, que lo que ocurría cuando empleábamos el mismo sistema, el de coordenadas lineales, para determinar las dos figuras, pues allí el número de ecuaciones que definían los elementos correlativos era distinto: fijar un punto en la primera figura, equivalía á dar *dos* ecuaciones entre (x, y), y su elemento correspondiente estaba determinado por *una* sola entre las variables del segundo plano.

Seguiremos exactamente el mismo orden que antes (párrafo I de este capítulo), para hacer resaltar que la esencia del método es la misma, y que las ventajas que encontremos dependen exclusivamente del medio de que nos valemos para realizar nuestro estudio.

37.—Una recta de la segunda figura estará representada por una ecuación, como

$$l\alpha + m\beta + n = 0 \quad (33)$$

entre las variables (α, β), coordenadas de un punto en el segundo plano.

Si al punto (32) corresponde la recta (33), conocidos los valores de a, b, c, han de quedar determinados l, m, n, ó en otros términos, ha de verificarse

$$\left.\begin{aligned} l &= f_1(a, b, c) \\ m &= f_2(a, b, c) \\ n &= f_3(a, b, c) \end{aligned}\right\} \quad (34);$$

y como, dado un punto del primer plano, ha de deducirse una sola recta en el segundo, las funciones f_1, f_2, f_3 adquirirán valores únicos para cada sistema de valores de a, b, c.

Recíprocamente á una recta del segundo plano corresponderá un solo punto en el primero: luego resuelto el sistema (34) respecto á a, b, c (parámetros que determinan un punto en la primera figura), debe resultar un sistema de valores únicos: f_1, f_2, f_3 son, por consiguiente, de primer grado en a, b, c.

Además, las dos ecuaciones

$$\begin{array}{lr} au + bv + c = 0 & (32) \\ \lambda au + \lambda bv + \lambda c = 0 & (32') \end{array}$$

representan evidentemente, cualquiera que sea λ, el mismo punto: la recta correlativa del punto (32) tiene por ecuación

$$f_1(a, b, c)\alpha + f_2(a, b, c)\beta + f_3(a, b, c) = 0,$$

y la del punto (32)

$$f_1(\lambda a, \lambda b, \lambda c)\alpha + f_2(\lambda a, \lambda b, \lambda c)\beta + f_3(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = 0;$$

pero estas dos ecuaciones deben representar la misma recta: luego se verificará

$$\frac{f_1(\lambda a, \lambda b, \lambda c)}{f_1(a, b, c)} = \frac{f_2(\lambda a, \lambda b, \lambda c)}{f_2(a, b, c)} = \frac{f_3(\lambda a, \lambda b, \lambda c)}{f_3(a, b, c)}$$

cualquiera que sea λ; esto exige que f_1, f_2, f_3 sean funciones homogéneas respecto á a, b, c.

Sabiendo que f_1, f_2, f_3 son homogéneas y de primer grado, su forma será

$$\begin{aligned} l &= f_1(a, b, c) = r_1 a + s_1 b + t_1 c, \\ m &= f_2(a, b, c) = r_2 a + s_2 b + t_2 c, \\ n &= f_3(a, b, c) = r_3 a + s_3 b + t_3 c. \end{aligned}$$

38.—Tenemos, pues, deducido el procedimiento que ha de servirnos para determinar analíticamente dos figuras correlativas, empleando en el primer plano coordenadas tangenciales y en el segundo lineales; redúcese tal procedimiento á escribir tres trinomios de primer grado y homogéneos respecto á a, b, c, trinomios que, para abreviar, designaremos por l, m, n, y á todo punto de la primera figura representado por

$$au + bv + c = 0 \quad (32),$$

corresponderá en la segunda una recta definida por la ecuación

$$l\alpha + m\beta + n = 0.$$

Pongamos en esta última ecuación los valores de l, m, n, deducidos en el número anterior; y resultará

$$(r_1 a + s_1 b + t_1 c)\alpha + (r_2 a + s_2 b + t_2 c)\beta + \\ + (r_3 a + s_3 b + t_3 c) = 0,$$

ó bien

$$a\lambda + b\mu + c\nu = 0 \quad (35),$$

siendo λ, μ, ν trinomios de primer grado en α, β, cuyos coeficientes son los mismos que hay en l, m, n, aunque en orden distinto, pero fácil de recordar.

Comparando las ecuaciones (32) y (35) que representan, según sabemos, un punto de la primera figura y su recta correlativa en la segunda, deducimos, puesto que estas dos ecuaciones se verifican para los mismos valores de a, b y c, que necesariamente tendremos

$$\frac{u}{\lambda} = \frac{v}{\mu} = \frac{1}{\nu},$$

ó bien

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\lambda}{\nu} \\ v &= \frac{\mu}{\nu} \end{aligned}\right\} \quad (36),$$

lo cual demuestra que en dos figuras correlativas, las coordenadas tangenciales de una recta de la primera figura son iguales á los cocientes de dos trinomios de primer grado, dependientes de las coordenadas lineales de un punto de la segunda figura, divididos por un mismo trinomio de iguales condiciones.

39.—Si hubiéramos establecido las relaciones (36) entre las coordenadas tangenciales de la primera figura y las lineales de la segunda, siempre que u, v satisfagan á una ecuación de primer grado, λ, μ, ν, satisfarán á otra también de primer grado; pero la primera ecuación representa un punto de la primera figura, y la segunda ecuación, que por ser de primer grado en λ, μ, ν, lo es también en α, β, representa una recta en la segunda figura: luego las dos figuras, construídas de modo que se verifiquen las relaciones (36), son correlativas.

Podemos, pues, tomar las relaciones (36) como la definición analítica de dos figuras correlativas.

40.—Supongamos ahora varios puntos en línea recta en el primer plano; definamos dicha recta por dos puntos conocidos, M y N, cuyas ecuaciones sean

$$\left.\begin{aligned} a_1 u + b_1 v + c_1 &= 0 \\ a_2 u + b_2 v + c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (37);$$

para que un tercer punto

$$au + bv + c = 0 \quad (32),$$

esté en línea recta con los dos anteriores, será necesario y suficiente que las tres ecuaciones (37) y (32) se verifiquen para los mismos valores de u y v, lo cual equivale á que

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a\,, & b\,, & c \end{vmatrix} = 0,$$

ó bien, desarrollando esta determinante

$$\mathrm{K}a + \mathrm{K}'b + \mathrm{K}'' = 0,$$

siendo K, K′, K″ los valores de

$$\begin{vmatrix} b_1, & c_1 \\ b_2, & c_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_1, & a_1 \\ c_2, & a_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}:$$

luego para que un punto móvil

$$au + bv + c = 0$$

describa una recta, es necesario que a, b, c varíen, satisfaciendo á una ecuación de primer grado.

Esta condición es también suficiente; pues si a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 son tres sistemas de valores de a, b, c, que satisfacen á una ecuación de primer grado, tal como

$$\mathrm{K}a + \mathrm{K}'b + \mathrm{K}''c = 0,$$

se verificará

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

que es la condición para que los tres puntos

$$a_1u + b_1v + c_1 = 0,$$
$$a_2u + b_2v + c_2 = 0,$$
$$a_3u + b_3v + c_3 = 0,$$

estén en línea recta.

41.—Pero sabemos que al punto

$$au + bv + c = 0$$

corresponde la recta

$$a\lambda + b\mu + c\nu = 0:$$

luego si el punto (32) se mueve sobre una recta en la primera figura, es decir, si a, b, c, varían satisfaciendo á una ecuación de primer grado, las ecuaciones (37) quedarán satisfechas, *cualesquiera* que sean esos valores de a, b, c, por los valores de α y β, que hagan $\frac{\lambda}{\nu}$ y $\frac{\mu}{\nu}$, iguales á ciertos y determinados números: los que se deduzcan de las dos ecuaciones

$$a_1\frac{\lambda}{\nu} + b_1\frac{\mu}{\nu} + c_1 = 0,$$

$$a_2\frac{\lambda}{\nu} + b_2\frac{\mu}{\nu} + c_2 = 0,$$

siendo $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$, dos sistemas de valores de a, b, c, que satisfagan á (37).

Ahora, las ecuaciones $\frac{\lambda}{\nu} =$ *un número*, y $\frac{\mu}{\nu} =$ *otro número*, definen en la segunda figura un punto: luego resulta que si un punto se mueve en la primera figura sobre una recta, sus rectas correlativas pasan todas por un punto.

Ya sabemos que á este punto se le llama correlativo de la recta considerada en la primera figura, y facilísimo será al lector que haya entendido lo precedente, demostrar, empleando las coordenadas tangenciales en un plano y las lineales en el otro, lo que ya demostramos anteriormente: que una serie de rectas concurrentes de la segunda figura corresponden á una serie de puntos en línea recta de la primera.

12.—Resumiendo lo anterior, tendremos los siguientes resultados, que son los mismos, en el fondo, que obtuvimos en el núm. **29**:

1.° Al punto de la primera figura, que tiene por ecuación

$$au + bv + c = 0,$$

corresponde en la segunda la recta representada por

$$l\alpha + m\beta + n = 0,$$

siendo l, m, n, trinomios de primer grado, homogéneos en a, b, c, cuyos coeficientes han de ser números conocidos.

2.° Á la recta de la primera figura, definida por las dos ecuaciones

$$a_1u + b_1v + c_1 = 0,$$
$$a_2u + b_2v + c_2 = 0,$$

corresponde en la segunda el punto cuyas coordenadas satisfacen á las dos ecuaciones

$$l_1\alpha + m_1\beta + n_1 = 0,$$
$$l_2\alpha + m_2\beta + n_2 = 0,$$

siendo $l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2$, los resultados de poner sucesivamente en las expresiones generales de l, m, n, los valores particulares a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, en lugar de a, b, c.

3.° Á la recta de la segunda figura, definida por

$$l\alpha + m\beta + n = 0,$$

corresponde en la primera el punto dado por

$$au + bv + c = 0,$$

siendo a, b, c, los valores deducidos de las ecuaciones

$$\begin{aligned} l &= r_1 a + s_1 b + t_1 c, \\ m &= r_2 a + s_2 b + t_2 c, \\ n &= r_3 a + s_3 b + t_3 c. \end{aligned}$$

4.° Al punto de la segunda figura, definido por las dos ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} l_1\alpha + m_1\beta + u_1 = 0 \\ l_2\alpha + m_2\beta + u_2 = 0 \end{aligned}\right\},$$

corresponderá en la primera, la recta dada por

$$\left.\begin{aligned} a_1 u + b_1 v + c_1 = 0 \\ a_2 u + b_2 v + c_2 = 0 \end{aligned}\right\},$$

siendo a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, los valores reducidos de las seis ecuaciones

$$\begin{aligned} l_1 &= r_1 a_1 + s_1 b_1 + t_1 c_1, \\ m_1 &= r_2 a_1 + s_2 b_1 + t_2 c_1, \\ n_1 &= r_3 a_1 + s_3 b_1 + t_3 c_1, \\ l_2 &= r_1 a_2 + s_1 b_2 + t_1 c_2, \\ m_2 &= r_2 a_2 + s_2 b_2 + t_2 c_2, \\ n_2 &= r_3 a_2 + s_3 b_2 + t_3 c_2. \end{aligned}$$

43.—Hemos dicho (**39**) que podía también establecerse analíticamente la correlación entre las dos figuras, poniendo

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\lambda}{\nu} \\ v &= \frac{\mu}{\nu} \end{aligned}\right\} \quad (36),$$

en que λ, μ, ν son trinomios de primer grado en α, β, y de coeficientes conocidos.

También sabemos que de (36) se deduce

$$\alpha = \frac{l}{n},$$

$$\beta = \frac{m}{n},$$

siendo l, m, n trinomios de primer grado en u, v, y cuyos coeficientes son conocidos en función de los de λ, μ, ν.

Teniendo esto en cuenta, los resultados que hemos expuesto en el número anterior se pueden también expresar en la siguiente forma, muy fácil de recordar:

1.° Al punto $au + bv + c = 0$, corresponde la recta $a\lambda + b\mu + c\nu = 0$.

2.° Á la recta $\left\{\begin{aligned} a_1u + b_1v + c_1 = 0 \\ a_2u + b_2v + c_2 = 0 \end{aligned}\right\}$ corresponde el punto $\left\{\begin{aligned} a_1\lambda + b_1\mu + c_1\nu = 0 \\ a_2\lambda + b_2\mu + c_2\nu = 0 \end{aligned}\right\}$.

3.° Á la recta $K\alpha + K'\beta + K'' = 0$, corresponde el punto $Kl + K'm + K''n = 0$.

4.° Al punto $\left\{\begin{aligned} K_1\alpha + K_1'\beta + K_1'' = 0 \\ K_2\alpha + K_2'\beta + K_2'' = 0 \end{aligned}\right\}$ corresponde la recta $\left\{\begin{aligned} K_1l + K_1'm + K_1''n = 0 \\ K_2l + K_2'm + K_2''n = 0 \end{aligned}\right\}$.

Proponemos como ejercicio al lector que deduzca los resultados obtenidos en el núm. **30**.

44.—Tratemos ahora de establecer la propiedad demostrada en el núm. **31**, que es el fundamento de todas las relaciones métricas que existen entre dos figuras correlativas.

Sean A, B, C tres puntos en una recta; los dos primeros son conocidos, y determinan la recta; el tercero es variable, y su posición se determina por el valor y el signo de la relación $\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}}$, que, como anteriormente, representaremos por $\frac{m}{n}$.

Sea la ecuación del punto A

$$au + bv + c = 0;$$

la del B

$$a'u + b'v + c' = 0;$$

la del C será

$$n(au + bv + c) - m(a'u + b'v + c') = 0;$$

ó bien

$$(na - ma')u + (nb - mb')v + (nc - mc\ ) = 0.$$

Las ecuaciones de las rectas correlativas de A, B, C, serán, pues (**43**),

$$a\lambda + b\mu + c\nu = 0,$$
$$a'\lambda + b'\mu + c'\nu = 0,$$
$$(na - ma')\lambda + (nb - mb')\mu + (nc - mc') = 0;$$

esta última se puede escribir

$$n(a\lambda + b\mu + c) - m(a'\lambda + b'\mu + c') = 0.$$

Designando abreviadamente por $A = 0$ y $B = 0$ las ecuaciones de los puntos A y B, la del punto C será

$$nA - mB = 0;$$

y designando del mismo modo por $L = 0$ y $M = 0$ las ecuaciones de las rectas correlativas de A y B, la de C será

$$nL - mM = 0,$$

ó bien

$$\frac{L}{M} = \frac{m}{n} \quad (38).$$

Pero L es igual al producto de la distancia de un punto cualquiera á la recta $L = 0$ multiplicada por un factor, que sólo depende de los parámetros que entran en $L = 0$; y del mismo modo M es la distancia de un punto cualquiera á la recta $M = 0$, multiplicada por un factor también constante.

La ecuación (38) nos indica, por tanto, que la relación de las distancias de un punto de la recta correlativa de C á las correspondientes á A y B, es igual á un factor que sólo depende de estas últimas rectas (y, por tanto, de los puntos A y B), multiplicado por la relación $\frac{m}{n}$ de las distancias $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$.

Dedúcese de aquí, como en el núm. **32**, la igualdad de las relaciones anarmónicas de cuatro puntos en línea recta de una de las figuras y las del haz que en la otra forman sus rectas correlativas, tomando éstas en el mismo orden que sus puntos.

§ III

45.—Para estudiar las figuras correlativas referidas al sistema de coordenadas trilineales, las supondremos, como anteriormente, dibujadas en dos planos distintos: en el primero, el triángulo de referencia es el A, B, C, y en el segundo, el α, β, γ (fig. 5).

Dado un punto del primer plano por sus coordenadas (A, B, C), ha de quedar determinada la recta correspondiente en el segundo, recta que tendrá una ecuación de la forma

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0:$$

luego tendremos

$$\left.\begin{aligned} l &= f_1(A, B, C) \\ m &= f_2(A, B, C) \\ n &= f_3(A, B, C) \end{aligned}\right\} \quad (39).$$

Recíprocamente, conocida una recta en el segundo plano, ha de quedar determinado el punto correspondiente en el primero: luego las funciones f_1, f_2, f_3 deben de ser tales, que, resueltas las ecuaciones (38) respecto á A, B, C, nos den para estas cantidades valores únicos; esto exige que f_1, f_2, f_3 sean de primer grado en A, B, C.

Tendremos, pues,

$$\left.\begin{aligned} l &= a_1A + b_1B + c_1C + d_1 \\ m &= a_2A + b_2B + c_2C + d_2 \\ n &= a_3A + b_3B + c_3C + d_3 \end{aligned}\right\} \quad (40),$$

en que a, b, c, d, afectas de los subíndices 1, 2, 3, son números.

Pero observemos que A, B, C, no son completamente arbitrarias, sino que han de satisfacer (8) á la relación

$$-aA - bB - cC = 2S;$$

ahora bien, d_1, d_2, d_3, son números, S también lo es: luego las relaciones $\frac{d_1}{2S}$, $\frac{d_2}{2S}$, $\frac{d_3}{2S}$, serán números K_1, K_2, K_3, y podremos poner

$$d_1 = 2K_1S,$$
$$d_2 = 2K_2S,$$
$$d_3 = 2K_3S,$$

ó bien

$$d_1 = -aK_1A - bK_1B - cK_1C,$$
$$d_2 = -aK_2A - bK_2B - cK_2C,$$
$$d_3 = -aK_3A - bK_3B - cK_3C;$$

y es de notar que si se nos dan d_1, d_2, d_3, deduciremos K_1, K_2, K_3, y recíprocamente, ó en otros términos, que es lo mismo dar las cantidades d que las K.

Las fórmulas (40) se transforman poniendo en ellas los valores acabados de obtener para d_1, d_2, d_3, en

$$l = (a_1 - aK_1)\,A + (b_1 - bK_1)\,B + (c_1 - cK_1)\,C,$$
$$m = (a_2 - aK_2)\,A + (b_2 - bK_2)\,B + (c_2 - cK_2)\,C,$$
$$n = (a_3 - aK_3)\,A + (b_3 - bK_3)\,B + (c_3 - cK_3)\,C;$$

l, m, n, son por consiguiente homogéneos y de primer grado en A, B, C; pues si se nos dieran no homogéneos, efectuaríamos la transformación indicada, de modo que siempre podemos escribir

$$\left.\begin{aligned} l &= a_1A + b_1B + c_1C \\ m &= a_2A + b_2B + c_2C \\ n &= a_3A + b_3B + c_3C \end{aligned}\right\} \quad (41);$$

teniendo en cuenta que a_1, b_1, etc., no representan en estas expresiones los mismos números que en las (40), á menos que en estas últimas d_1, d_2, d_3, sean nulos.

46.—La ecuación de la recta correlativa del punto (A, B, C), se puede escribir

$$(a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma)\,A + (b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma)\,B +$$
$$+ (c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma)\,C = 0;$$

llamaremos λ, μ, ν, respectivamente á los coeficientes de A, B, C, en la anterior ecuación; los coeficientes de λ, μ, ν, son los mismos que hay en l, m, n, aunque en otro orden, muy fácil de recordar: la recta correlativa de (A, B, C), estará, pues, representada por

$$A\lambda + B\mu + C\nu = 0 \quad (42),$$

advirtiendo que en esta ecuación las variables, que son α, β, γ, están implícitamente contenidas en λ, μ, ν.

Supongamos que el punto (A, B, C), de la primera figura, se mueva describiendo una recta; sus coordenadas satisfarán á una ecuación tal como

$$rA + sB + tC = 0 \quad (43);$$

las rectas correlativas de todos los puntos de (43), se obtendrán poniendo en (42) valores de A, B, C, que satisfagan á (43); pero restando de la ecuación (42) la (43) multiplicada por un número cualquiera h, resulta

$$(44) \quad A\,(\lambda - hr) + B\,(\mu - hs) + C\,(\nu - ht) = 0,$$

y esto demuestra que si A, B, C satisfacen á (43), la ecuación (44) quedará satisfecha para los valores de α, β, γ que se obtengan de las ecuaciones

$$\lambda - hr = 0,$$
$$\mu - hs = 0,$$
$$\nu - ht = 0,$$

ó bien

$$\frac{\lambda}{r} = \frac{\mu}{s} = \frac{\nu}{s};$$

y como estas dos últimas igualdades determinan, por ser λ, μ, ν trinomios de primer grado y homogéneos en α, β, γ, un punto único de la segunda figura, resulta que las rectas correlativas de todos los puntos del primer plano que estén en línea recta, concurren en un punto, que llamaremos correlativo de dicha recta, como en el número **28.**

Recíprocamente, si consideramos un punto $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ de la segunda figura y todas las rectas en él concurrentes, los puntos de la primera figura á que corresponden esas rectas están en una representada por la ecuación

$$\lambda_1 A + \mu_1 B + \nu_1 C = 0,$$

en que λ_1, μ_1, ν_1 son los resultados de sustituir en las expresiones generales de λ, μ, ν las coordenadas particulares $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$.

47.—Vamos á hallar la significación geométrica de las cantidades l, m, n, λ, μ y ν.

En el primer plano habrá tres rectas, cuyas ecuaciones sean

$$l = 0,$$
$$m = 0,$$
$$n = 0;$$

sean esas tres rectas las **L**, **M**, **N** (figura 5.ª); llamemos

A', B', C' las distancias de un punto á esas rectas: tendremos, según el núm. **15**,

$$A' = \frac{l}{\{a_1, b_1, c_1\}} = \frac{l}{h_1},$$

$$B' = \frac{m}{\{a_2, b_2, c_2\}} = \frac{m}{h_2},$$

$$C' = \frac{n}{\{a_3, b_3, c_3\}} = \frac{n}{h_3},$$

designando por h_1, h_2, h_3 los tres primeros denominadores, que son números conocidos: luego l, m y n son iguales á los productos de tres números conocidos por las distancias del punto que consideramos en la primera figura á las rectas **L**, **M**, **N**.

Observemos que los vértices p, q, r del triángulo $\overline{pqr}$, están determinados por los sistemas de ecuaciones

$$\left.\begin{matrix} l = 0 \\ m = 0 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} m = 0 \\ n = 0 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} n = 0 \\ l = 0 \end{matrix}\right\};$$

á estos puntos corresponderán en la segunda figura las rectas

$$\gamma = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0,$$

es decir, los tres lados del triángulo de referencia: luego el triángulo $\overline{pqr}$ tiene sus vértices correspondientes á los lados del triángulo de referencia en el segundo plano, ó, lo que es lo mismo, los lados de $\overline{pqr}$ son correlativos de los vértices de $\overline{\alpha\beta\gamma}$.

La significación geométrica de λ, μ, ν se obtendrá de idéntica manera, imaginando en el segundo plano las tres rectas λ, μ, ν, que tienen por ecuaciones

$$\lambda = 0,$$
$$\mu = 0,$$
$$\nu = 0;$$

las distancias α', β', γ' de un punto á estas rectas se obtendrán por las fórmulas

$$\alpha' = \frac{\lambda}{\{a_1, a_2, a_3\}} = \frac{\lambda}{K},$$

$$\beta' = \frac{\mu}{\{b^1, b_2, b_3\}} = \frac{\mu}{K'},$$

$$\gamma' = \frac{\nu}{\{c_1, c_2, c_3\}} = \frac{\nu}{K''};$$

λ, μ, ν son, pues, los productos de tres números por las distancias del punto que consideremos en la segunda figura á las rectas.

Observemos que los vértices del triángulo $\overline{p'q'r'}$ están determinados por los sistemas de ecuaciones

$$\left.\begin{matrix}\lambda = 0 \\ \mu = 0\end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix}\nu = 0 \\ \lambda = 0\end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix}\mu = 0 \\ \nu = 0\end{matrix}\right\};$$

á estos puntos corresponden en la primera figura las rectas

$$C = 0, \quad B = 0, \quad A = 0,$$

es decir, los lados del triángulo de referencia: luego el triángulo $\overline{p'q'r'}$ en el segundo plano es correlativo del de referencia en el primero.

18.—Resultado de lo expuesto en el número anterior, es que si en vez de dos triángulos de referencia cualesquiera tomamos dos que sean correlativos, las fórmulas se simplifican, pues los trinomios $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$, son los productos de números por las coordenadas A, B, C, α, β, γ.

19.—Consideremos tres puntos en línea recta, P_1, P_2, P_3; sean sus coordenadas $(A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2), (A_3, B_3, C_3)$: llamando $\frac{m}{n}$ la relación en magnitud y signo de $\overline{P_3P_1}$ á $\overline{P_3P_2}$, tendremos

$$A_3 = \frac{nA_1 - mA_2}{n - m}; \quad B_3 = \frac{nB_1 - mB_2}{n - m}; \quad C_3 = \frac{nC_1 - mC_2}{n - m};$$

las rectas correlativas tendrán por ecuaciones

$$(a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1)\alpha + (a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1)\beta + \\ + (a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1)\gamma = 0;$$

$$(a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2)\alpha + (a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2)\beta + \\ + (a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2)\gamma = 0;$$

$$\big(a_1(nA_1 - mA_2) + b_1(nB_1 - mB_2) + c_1(nC_1 - mC_2)\big)\alpha + \\ + \big(a_2(nA_1 - mA_2) + b_2(nB_1 - mB_2) + c_2(nC_1 - mC_2)\big)\beta + \\ + \big(a_3(nA_1 - mA_2) + b_3(nB_1 - mB_2) + c_3(nC_1 - mC_2)\big)\gamma = 0;$$

ó representando abreviadamente por $R_1 = 0$ y $R_2 = 0$ las dos primeras,

$$R_1 = 0; \quad R_2 = 0; \quad nR_1 - mR_2 = 0:$$

la última se puede escribir $\frac{R_1}{R_2} = \frac{m}{n}$, y en esta forma demuestra que la relación de las distancias de un punto cualquiera de la recta correlativa de P_3 á las correlativas de P_1 y P_2 es igual á un factor que sólo depende de los coeficientes de transformación y de las coordenadas de P_1 y P_2, multiplicado por la relación $\frac{m}{n}$.

Dedúcese inmediatamente, como en los números **32** y **44**, que las relaciones anarmónicas de cuatro puntos en línea recta y de sus rectas correlativas son iguales tomando los puntos y las rectas en el mismo orden.

50.—Sin entrar en desarrollos, que dejamos al lector y que son facilísimos, pondremos aquí el modo de determinar dos figuras correlativas, refiriendo la una á coordenadas tangenciales y la otra á lineales; pero ambas en el sistema que emplea un triángulo de referencia.

1.° Llamando U, V, W, las coordenadas tangenciales de una recta del primer plano, y α, β, γ las coordenadas de un punto en el segundo, y poniendo

$$\left.\begin{aligned} U &= p\lambda \\ V &= q\mu \\ W &= r\nu \end{aligned}\right\} \quad (44),$$

siendo λ, μ, ν, tres trinomios homogéneos y de primer grado en α, β, γ, y p, q, r, tres números, al punto

$$aU + bV + cW = 0,$$

corresponde la recta

$$ap\lambda + bq\mu + cr\nu = 0.$$

2.° A la recta $\left\{\begin{array}{l} a_1\mathrm{U} + b_1\mathrm{V} + c_1\,\mathrm{W} = 0 \\ a_2\mathrm{U} + b_2\mathrm{V} + c_2\,\mathrm{W} = 0 \end{array}\right\}$, corresponde el punto $\left\{\begin{array}{l} a_1p\lambda + b_1q\mu + c_1r\nu = 0 \\ a_2p\lambda + b_2q\mu + c_2r\nu = 0 \end{array}\right\}$.

3.° Sacando de (44) los valores de α, β, γ, resultarán trinomios homogéneos en U, V, W, que designaremos por l, m, n.

Á la recta $r\alpha + s\beta + t\gamma$, corresponde el punto $rl + sm + tn = 0$.

Al punto $\left\{\begin{array}{l} r_1\alpha + s_1\beta + t_1\gamma = 0 \\ r_2\alpha + s_2\beta + t_2\gamma = 0 \end{array}\right\}$, corresponde la recta $\left\{\begin{array}{l} r_1l + s_1m + t_1n = 0 \\ r_2l + s_2m + t_2n = 0 \end{array}\right\}$.

§ IV

51.—Hasta aquí hemos supuesto las dos figuras correlativas dibujadas en dos planos diferentes: imaginemos ahora que hacemos coincidir los planos, y tendremos en uno solo las figuras correlativas: en cada punto de ese plano deberemos ver *dos* puntos *superpuestos* que antes de la coincidencia estaban cada uno en uno de los planos, y que aun cuando ahora se han confundido siguen perteneciendo el *uno* á la primera figura, el *otro* á la segunda. Á las figuras correlativas situadas en un mismo plano se las suele apellidar *superpuestas*.

La coincidencia de los dos planos puede efectuarse de infinitos modos; y para determinar uno de esos modos, bastará evidentemente que fijemos la posición que después de la coincidencia tomarán los ejes cartesianos $o'\alpha$, $o'\beta$, respecto á los ejes ox, oy, del primer plano. Esto supone que las figuras están referidas al sistema de coordenadas en que primeramente las hemos estudiado, y en esta sola hipótesis examinaremos las particularidades de las figuras correlativas superpuestas; pero será fácil al lector hacer el mismo estudio empleando otros sistemas.

Se nos darán, pues, las coordenadas $(x_0\, y_0)$ del punto o' respecto á los ejes ox, oy, y la inclinación (φ) del eje $o'\alpha$ respecto al ox (fig. 6.ª). Estos datos son los que generalmente se eligen para determinar la posición de unos ejes rectangulares respecto á otros también rectangulares.

Un punto P_1 del plano tendrá, por tanto, coordenadas respecto á ox, oy, y respecto á $o'\alpha$, $o'\beta$: las primeras las designaremos por (x_1, y_1), y las segundas por (α_1, β_1). Hay que tener en cuenta que (x_1, y_1) y (α_1, β_1) definen el mismo punto, y que emplearemos las primeras cuando consideremos al punto como de la primera figura, y las otras cuando lo supongamos perteneciendo á la segunda.

Se echa de ver inmediatamente la conveniencia de tener las dos figuras referidas á un mismo sistema de ejes, lo cual es sencillísimo, porque, en efecto, las coordenadas (α, β) de un punto, se expresan en función de las coordenadas (x, y) del mismo punto por las fórmulas

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= (x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\operatorname{sen}\varphi\\ \beta &= (y - y_0)\cos\varphi - (x - x_0)\operatorname{sen}\varphi\end{aligned}\right\} \quad (45).$$

Sabemos que al punto (x, y) corresponde la recta

$$L\alpha + M\beta + N = 0,$$

siendo L, M, N los trinomios que empleamos en el número **22**: si en esta última ecuación ponemos en vez de α y β los valores dados por las fórmulas (45), tendríamos la ecuación de la recta correlativa con el punto (x, y), referida á los mismos ejes que el punto; pero habremos de distinguir las (x, y) del punto de las que corresponden al *punto general* de la recta, y esto se consigue con la siguiente convención: designaremos por (x, y) las coordenadas de un punto de la primera figura; y cuando queramos indicar un punto particular de ella, pondremos un subíndice, como, por ejemplo, $(x_5 y_5)$; designaremos por $(x'y')$ las coordenadas, referidas á los *mismos* ejes de un punto cualquiera de la segunda figura, y pondremos un subíndice para indicar que tratamos de un punto especial; por último, emplearemos letras mayúsculas (XY) para determinar un punto del plano sin especificar á qué figura pertenece, usando los subíndices como anteriormente; de modo que $(x_2 y_2)$, $(x_2' y_2')$, $(X_2 Y_2)$ representan un *solo* punto, y emplearemos unas ú otras letras, según le consideremos de la primera figura, de la segunda ó del plano.

Según esto, la recta correlativa del punto (xy) tendrá por ecuación

$$
\begin{gathered}
(a_1 x + b_1 y + c_1)\left((x' - x_0)\cos\varphi + (y' - y_0)\operatorname{sen}\varphi\right) + \\
+ (a_2 x + b_2 y + c_2)\left((y' - y_0)\cos\varphi - (x' - x_0)\operatorname{sen}\varphi\right) + \\
+ (a_3 x + b_3 y + c_3) = 0,
\end{gathered}
$$

ó bien, ordenando respecto á $x'\ y'$, que son las variables,

$$
\begin{gathered}
\left((a_1 x + b_1 y + c_1)\cos\varphi - (a_2 x + b_2 y + c_2)\operatorname{sen}\varphi\right) x' + \\
+ \left((a_1 x + b_1 y + c_1)\operatorname{sen}\varphi + (a_2 x + b_2 y + c_2)\cos\varphi\right) y' + \\
+ (a_3 x + b_3 y + c_3) - (a_1 x + b_1 y + c_1)(x_0 \cos\varphi + y_0 \operatorname{sen}\varphi) - \\
- (a_2 x + b_2 y + c_2)(y_0 \cos\varphi - x_0 \operatorname{sen}\varphi) = 0.
\end{gathered}
$$

De manera que si ponemos

$$
\left.
\begin{aligned}
L' &= L\cos\varphi - M\operatorname{sen}\varphi, \\
M' &= L\operatorname{sen}\varphi - M\cos\varphi, \\
N' &= N - L(x_0 \cos\varphi + y_0 \operatorname{sen}\varphi) - \\
&\quad - M(y_0 \cos\varphi - x_0 \operatorname{sen}\varphi)
\end{aligned}
\right\} \quad (46),
$$

la recta correlativa del punto (x, y) tendrá por ecuación

$$L'x' + M'y' + N' = 0.$$

Conocidos L, M, N, las fórmulas (45) nos dan L', M', N', y recíprocamente: luego *dadas dos figuras correlativas superpuestas referidas á distintos ejes cartesianos, podemos encontrar por las dichas fórmulas los trinomios por medio de los cuales se obtiene la segunda figura referida á los mismos ejes que la primera*, y también, *dadas dos figuras correlativas superpuestas referidas á los mismos ejes, ss pueden hallar los trinomios que nos sirven para determi-*

nar la segunda, refiriéndola á otros ejes cuya posición respecto á los primeros sea conocida.

Entendido lo anterior, no hay inconveniente, y así lo haremos en lo que resta de este párrafo, en designar por L, M, N los trinomios que determinan la segunda figura, referida á los mismos ejes que la primera.

52.—Supongamos un punto P_1 de la primera figura $(x_1 y_1)$: su recta correlativa será la representada por

$$L_1 x' + M_1 y' + N_1 = 0 \quad (47):$$

el mismo punto P, considerado como de la segunda figura, y designando con este motivo sus coordenadas por $(x_1' y_1')$, tendrá por correlativa en la primera (**29**) la recta

$$x\lambda_1 + y\mu_1 + \nu_1 = 0 \quad (48),$$

siendo λ_1, μ_1, ν_1 los resultados de sustituir en las expresiones generales de λ, μ, ν (**24**) las coordenadas $(x_1' y_1')$.

Las ecuaciones (47) y (48) representan en general dos rectas distintas: para verlo bien no hay más que poner en ellas, en vez de las variables (que son $(x'y')$ en la primera y (x, y) en la segunda), las coordenadas generales (XY), y en vez de $(x_1 y_1)$ ó $(x_1' y_1')$, sus iguales $(X_1 Y_1)$: de este modo las dos ecuaciones se convierten en

$$\begin{gathered}(a_1 X_1 + b_1 Y_1 + c_1)X + (a_2 X_1 + b_2 Y_1 + c_2)Y + \\ + (a_3 X_1 + b_3 Y + c_3) = 0 \quad (47'),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(a_1 X_1 + a_2 Y_1 + a_3)X + (b_1 X_1 + b_2 Y_1 + b_3)Y + \\ + (c_1 X_1 + c_2 Y + c_3) = 0 \quad (48').\end{gathered}$$

De modo que en general, á un punto considerado como perteneciendo sucesivamente á dos figuras correlativas superpuestas, corresponden dos rectas distintas; ó, en otros términos, si á un punto P de la primera figura corresponde en la segunda la recta R, á esta recta R, considerada como de la primera, corresponde en la segunda un punto distinto de P.

53.—Para que las dos rectas (47') y (48') se confundan, es necesario y suficiente que tengamos

$$\frac{a_1 X_1 + b_1 Y_1 + c_1}{a_1 X_1 + a_2 Y_2 + a_3} = \frac{a_2 X_1 + b_2 Y_1 + c_2}{b_1 X_1 + b_2 Y_1 + b_3} = \frac{a_3 X_1 + b_3 Y_1 + c_3}{c_1 X_1 + c_2 Y_1 + c_3} \quad (49);$$

es decir, que (X_1, Y_1) han de satisfacer á dos ecuaciones de segundo grado: para deducir el número de soluciones comunes de esas ecuaciones (en las que podemos sin inconveniente suprimir los subíndices de las incógnitas), igualaremos las anteriores fracciones á una cantidad λ, de la que luego determinaremos el valor; y quitando denominadores, resultarán las tres ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} a_1(1-\lambda)X + (b_1 - \lambda a_2)Y + (c_1 - \lambda a_3) = 0 \\ (a_2 - \lambda b_1)X + b_2(1-\lambda)Y + (c_2 - \lambda b_3) = 0 \\ (a_3 - \lambda c_1)X + (b_3 - \lambda c_2)Y + c_3(1-\lambda) = 0 \end{array}\right\} \quad (50);$$

como estas tres ecuaciones son de primer grado en X, Y, y se han de verificar simultáneamente, habremos de tener

$$\begin{vmatrix} a_1(1-\lambda); & b_1 - \lambda a_2; & c_1 - \lambda a_3 \\ a_2 - \lambda b_1; & b_2(1-\lambda); & c_2 - \lambda b_3 \\ a_3 - \lambda c_1; & b_3 - \lambda c_2; & c_3(1-\lambda) \end{vmatrix} = 0;$$

desarrollando esta determinante, tendremos una ecuación de tercer grado en λ, que nos dará tres valores para esa cantidad; y sustituyendo cada una de estas soluciones en el sistema (50), tendremos un par de valores de (X, Y), que satisfagan á las ecuaciones (49), y por tanto, tres puntos, que, considerados sucesivamente como de la primera ó de la segunda figura, tendrán la misma recta correlativa. La ecuación de tercer grado que nos ha servido para determinar λ, podrá tener sus tres raíces reales ó una real y las otras dos imaginarias conjugadas: en el primer caso, los tres puntos mencionados serán reales; en el segundo uno será real y los otros dos imaginarios conjugados.

Evidentemente las rectas que unen los puntos que acabamos de hallar gozan de la misma propiedad: si los tres puntos son reales, las rectas también lo serán; si uno es real y los otros dos imaginarios conjugados, la recta que una estos últimos será real y las otras dos imaginarias.

51.—Si queremos que todos los puntos (y por tanto las rectas todas del plano en que tengamos las figuras correlativas) gocen de la propiedad que hemos visto sólo tienen en general tres, las ecuaciones (50) habrán de verificarse cualesquiera que sean los valores de X é Y, y para esto los coeficientes de tales ecuaciones deberán ser nulos, y ocurren dos casos:

1.° Si las tres cantidades a_1, b_2, c_3 no son nulas, entonces $\lambda = 1$, y, por tanto, $a_2 = b_1$, $a_3 = c_1$, $b_3 = c_2$: luego los trinomios de transformación serán

$$\begin{aligned} L &= a_1x + b_1y + c_1, \\ M &= b_1x + b_2y + c_2, \\ N &= c_1x + c_2y + c_3. \end{aligned}$$

2.° Si las tres cantidades a_1, b_2, c_3 son nulas, entonces de $b_1 - \lambda a_2 = 0$, y $a_2 - \lambda b_1 = 0$, deducimos $\lambda = \frac{1}{\lambda}$, y por tanto, $\lambda = \pm 1$: si elegimos para λ el valor $+ 1$, tendremos $b_1 = a_2$, $a_3 = c_1$, $b_3 = c_2$, y los trinomios de transformación serán

$$\begin{aligned} L &= b_1y + c_1, \\ M &= b_1x + c_2, \\ N &= c_1x + c_2y: \end{aligned}$$

si elegimos para λ el valor -1, tendremos $a_2 = -b_1$, $a_3 = -c_1$, $b_3 = -c_2$, y los trinomios serán

$$\begin{aligned} L &= b_1y + c_1, \\ M &= -b_1x + c_2, \\ N &= -c_1x - c_2y. \end{aligned}$$

Estos dos casos se resumen diciendo que *para que dos figuras correlativas superpuestas tengan la propiedad de que un punto de su plano, ya pertenezca á una, ya á otra, tenga la misma recta correlativa, la determinante de los coeficientes de transformación ha de ser simétrica ó hemisimétrica.*

§ V

58.—En todo lo que antecede hemos supuesto conocidos los coeficientes de los trinomios que nos han servido para determinar las dos figuras correlativas, y ahora vamos á ver cómo pueden hallarse los valores de esos coeficientes, de modo que las figuras cumplan ciertas condiciones geométricas que se impongan, condiciones que consistirán en fijar en las dos figuras algunos pares de elementos correspondientes, puntos ó rectas.

Nos limitaremos al caso en que se emplee el sistema cartesiano de coordenadas, y fácil será extender los resultados á los demás sistemas. Es indiferente que las figuras estén en dos planos distintos ó superpuestos: vamos á suponer lo primero.

59.—Sean, pues, ox, oy los ejes del primer plano, $o'\alpha$, $o'\beta$ los del segundo, L, M, N los trinomios de transformación, y λ, μ, ν los que se deducen de los anteriores (**21**).

Supongamos que se nos da un punto del primer plano por los valores numéricos de sus coordenadas (x_1y_1), y queremos que en el segundo plano corresponda á ese punto la recta

$$p_1\alpha + q_1\beta + r_1 = 0,$$

siendo p_1, q_1, r_1 números conocidos.

Para que esto se verifique, como la ecuación de la recta correlativa del punto (x_1y_1) es

$$(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1)\alpha + (a_2x_1 + b_2y_1 + c_2)\beta + \\ + (a_3x_1 + b_3y_1 + c_3) = 0,$$

será necesario que tengamos

$$\frac{a_1x_1 + b_1y_1 + c_1}{p_1} = \frac{a_2x_1 + b_2y_1 + c_2}{q_1} = \frac{a_3x_1 + b_3y_1 + c_3}{r_1};$$

luego la condición antedicha equivale á establecer dos ecuaciones homogéneas y de primér grado entre los coeficientes de los trinomios.

Pero observemos que si en vez de usar L, M, N, utilizamos los productos de L, M, N, por un número cualquiera, las figuras correlativas que obtengamos por uno y otro procedimiento serán las mismas: esto demuestra que basta conocer para efectuar una transformación correlativa, las relaciones entre ocho de los coeficientes que hay en los trinomios y el noveno.

Resulta, pues, que si en la primera figura marcamos cuatro puntos cualesquiera y en la segunda cuatro rectas también arbitrarias que queremos correspondan á los puntos, tendremos ocho ecuaciones homogéneas y de primer grado entre los nueve coeficientes de los trinomios fundamentales, ecuaciones de las cuales podremos deducir las relaciones de ocho de los coeficientes al noveno, y por tanto conocer los trinomios que nos sirven para hallar las figuras correlativas en que se cumplen las cuatro condiciones impuestas.

De modo que en general se pueden construir dos figuras correlativas, dando arbitrariamente las cuatro rectas correspondientes á cuatro puntos arbitrarios de la primera.

60.—Hay un caso de excepción, y es aquel en que tres de los puntos que se nos dan están en línea recta.

En efecto, sean las coordenadas de esos puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), y

$$\left.\begin{aligned} p_1\alpha + q_1\beta + r_1 = 0 \\ p_2\alpha + q_2\beta + r_2 = 0 \\ p_3\alpha + q_3\beta + r_3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (51)$$

las ecuaciones de las rectas que han de corresponder á los puntos.

Por estar en línea recta los tres puntos, (x_3, y_3), podrán expresarse en función de (x_1, y_1), (x_2, y_2), (I), y tendremos

$$x_3 = \frac{nx_1 - mx_2}{n - m}; \quad y_3 = \frac{ny_1 - my_2}{n - m}.$$

Ahora bien: las ecuaciones que han de verificarse entre los coeficientes de los trinomios son, designando, para abreviar la escritura, con el subíndice, que se han sustituído las coordenadas afectas del mismo subíndice

$$\left.\begin{array}{l} \frac{L_1}{p_1} = \frac{M_1}{q_1} = \frac{N_1}{r_1} \\ \frac{L_2}{p_2} = \frac{M_2}{q_2} = \frac{N_2}{r_2} \\ \frac{L_3}{p_3} = \frac{M_3}{q_3} = \frac{N_3}{r_3} \end{array}\right\} \quad (52);$$

pero en virtud de los valores de (x_3, y_3), se tiene evidentemente

$$L_3 = \frac{nL_1 - mL_2}{n - m}; \quad M_3 = \frac{nM_1 - mM_2}{n - m}; \quad N_3 = \frac{nN_1 - mN_2}{n - m}:$$

luego habrá de verificarse

$$\frac{p_3}{np_1 - mp_2} = \frac{q_3}{nq_1 - mq_2} = \frac{r_3}{nr_1 - mr_2} \quad (53),$$

y por ello las rectas (51) no pueden ser arbitrarias, sino que sus coeficientes han de satisfacer á las condiciones (53), que demuestran que las tres rectas concurren en un mismo punto; y si esto se verifica, las dos últimas ecuaciones (52) son una consecuencia de las cuatro primeras.

En resumen, que si tres de los puntos arbitrarios que se nos fijan en la primera figura están en línea recta, las correlativas deben de ser concurrentes, y entonces sólo tenemos cuatro ecuaciones homogéneas y de primer grado entre los coeficientes de transformación.

61.—Si se marcara una recta de la primera figura

$$h_1x + k_1y + l_1 = 0,$$

y el punto $(\alpha_1\beta_1)$ que ha de corresponderle en la segunda, tendríamos

$$\frac{\lambda_1}{h_1} = \frac{\mu_1}{k_1} = \frac{\nu_1}{l_1},$$

es decir, dos ecuaciones homogéneas de primer grado entre a_1, b_1, c_1, etc.

Podemos, por tanto, fijar arbitrariamente cuatro rectas de la primera figura y sus puntos correspondientes, puesto que esas condiciones nos darán ocho ecuaciones de primer grado y homogéneas entre los coeficientes.

Siguiendo el mismo procedimiento que antes, veríamos que, si tres de esas rectas son concurrentes, los puntos correlativos se han de tomar en línea recta, y entonces no resultan más que seis ecuaciones entre los coeficientes, no quedando determinada la transformación.

62.—También pudieran tomarse en una de las figuras tres puntos y una recta, ó bien tres rectas y un punto, y en la otra los elementos correspondientes, de una manera arbitraria.

Pero los datos no pueden ser dos puntos, P_1, P_2, y dos rectas, R_1, R_2, á los cuales deban corresponder las rectas R_1', R_2' y los puntos P_1', P_2', porque las rectas R_1, R_2 cortan á la $\overline{P_1 P_2}$ en dos puntos, que llamaremos P_3, P_4, á los cuales corresponderán las rectas R_3', R_4', que unen P_1', y P_2' al punto de intersección de R_1' y R_2': tenemos, pues, con los datos citados cuatro puntos, P_1, P_2, P_3 y P_4, en línea recta, á los que corresponden las rectas concurrentes R_1', R_2', R_3' y R_4'; pero si los puntos P_1', P_2' y las rectas R_1', R_2' se han elegido arbitrariamente, las relaciones anarmónicas de P_1, P_2, P_3 y P_4 no serán iguales á las de R_1, R_2, R_3 y R_4, y las dos figuras no podrán ser correlativas; y si se toman los datos de modo que esto se verifique, entonces es lo mismo que si en la primera figura se nos hubieran dado cuatro puntos, el de intersección de R_1 y R_2, y tres cualesquiera de los P_1, P_2, P_3, P_4; y como éstos están en línea recta, vemos que, según (**60**), no tendremos datos bastantes.

§ VI

63.—Generalizando el concepto de figuras polares recíprocas, llegamos en el principio de este capítulo á la definición de las figuras correlativas: las primeras son, por tanto, un caso particular de las segundas, y ahora vamos á ocuparnos en investigar qué condiciones han de cumplirse para que dos figuras correlativas situadas en un plano sean además polares recíprocas respecto á una cierta cónica.

Supondremos las dos figuras referidas á un mismo sistema de ejes cartesianos, ox, oy, y, lo mismo que anteriormente, designaremos por (x, y) las coordenadas de un punto de la primera figura, por (x', y') las de uno de la segunda, y por (X, Y) las de un punto general del plano.

Sean los trinomios de transformación

$$\begin{aligned} L &= a_1x + b_1y + c_1, \\ M &= a_2x + b_2y + c_2, \\ N &= a_3x + b_3y + c_3, \end{aligned}$$

y recordemos que, una vez determinados los valores de ocho de los coeficientes de L, M y N, cualquiera que sea el valor que demos al noveno, se obtendrá la misma figura correlativa de una dada; ó de otra manera, que para determinar una figura correlativa de otra, basta conocer las relaciones de ocho de los coeficientes citados al noveno. Podríamos, pues, suponer uno de los coeficientes de L, M ó N igual á la unidad; pero por la simetría de los cálculos conservaremos explícitamente las nueve cantidades a, b, c, con los subíndices 1, 2, 3, sin olvidar que hay, por decirlo así, una de más.

Sea la ecuación de una cónica

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2DX + 2EY + F = 0 \quad (54),$$

en la que también ponemos un coeficiente más de los suficientes para determinarla.

Llamemos $f(x, y)$ al primer miembro de la ecuación (54): la ecuación de la tangente á la cónica en uno de sus puntos (x, y), será

$$(X - x)f'_x + (Y - y)f'_y = 0,$$

ó, poniendo en vez de f'_x, f'_y, sus valores, desarrollando y dividiendo por 2,

$$(55) \quad X(Ax + By + D) + Y(Bx + Cy + E) -$$
$$- (Ax_2 + 2Bxy + Cy_2 + Dx + Ey) = 0.$$

Como suponemos al punto (x, y), en la cónica, se verificará

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

de donde

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = -(Dx + Ey + F):$$

luego la ecuación (55) se puede escribir

$$X(Ax + By + D) + Y(Bx + Cy + E) +$$
$$+ (Dx + Ey + F) = 0 \quad (56):$$

tal es la ecuación de la tangente á la cónica (54), en un punto (x, y) de la curva.

Pero se sabe que si escribimos la ecuación de la tangente á una cónica en uno de sus puntos, poniendo en vez de las coordenadas del punto de contacto las de un punto cualquiera P del plano, se obtiene la ecuación de la polar de P respecto á la cónica: luego cualesquiera que sean (x, y), la ecuación (56) es la de la polar de ese punto.

Por otra parte, la ecuación de la recta correlativa del punto (x, y), empleando los trinomios mencionados antes (L, M, N) es

$$Lx' + My' + N = 0,$$

ó bien poniendo (x, y), coordenadas generales de un punto del plano, en vez de (x', y'),

$$LX + MY + N = 0 \quad (57).$$

Para que las dos figuras correlativas que se deducen por medio de L, M y N, sean polares recíprocas respecto á la cónica (54), será necesario y suficiente que para cualquier valor de (x, y), las dos ecuaciones (56) y (57) representen la misma recta, lo cual equivale á que se verifiquen las relaciones

$$\frac{L}{Ax + By + D} = \frac{M}{Bx + Cy + E} = \frac{N}{Dx + Ey + F},$$

ó poniendo en vez de L, M y N sus valores

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{Ax + By + D} = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{Bx + Cy + E} = \frac{a_3x + b_3y + c_3}{Dx + Ey + F} \quad (58),$$

independiente de x é y.

64.—Sólo nos resta, pues, expresar que las igualdades (58) son identidades, y para ello el procedimiento más natural consiste en quitar denominadores y hacer idénticas las dos igualdades que resultan; pero es más elegante escribir

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{Ax + By + D} = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{Bx + Cy + E} = \frac{a_3x + b_3y + c_3}{Dx + Ey + F} = \omega,$$

ó lo que es lo mismo

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= \omega(Ax + By + D), \\ a_2x + b_2y + c_2 &= \omega(Bx + Cy + E), \\ a_3x + b_3y + c_3 &= \omega(Dx + Ey + F), \end{aligned}$$

y buscar las condiciones para que estas ecuaciones se verifiquen, cualesquiera que sean x é y, para un mismo valor de ω.

Lo primero exige que

$$\begin{aligned} a_1 &= \omega A; & b_1 &= \omega B; & c_1 &= \omega D; \\ a_2 &= \omega B; & b_2 &= \omega C; & c_2 &= \omega E; \\ a_3 &= \omega D; & b_3 &= \omega E; & c_3 &= \omega F; \end{aligned}$$

y si esto se verifica para un cierto valor de ω, habremos de tener

$$\frac{a_1}{A} = \frac{b_1}{B} = \frac{c_1}{D} = \frac{a_2}{B} = \frac{b_2}{C} = \frac{c_2}{E} = \frac{a_3}{D} = \frac{b_3}{E} = \frac{c_3}{F} \quad (59).$$

De las anteriores igualdades se deduce evidentemente

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= a_2 \\ c_1 &= a_3 \\ c_2 &= b_3 \end{aligned}\right\} \quad (60);$$

y suponiendo que estas condiciones se cumplan, las (59) se reducen á

$$\frac{a_1}{A}=\frac{b_1}{B}=\frac{c_1}{D}=\frac{b_2}{C}=\frac{c_2}{E}=\frac{c_3}{F} \quad (61),$$

que nos servirán para determinar las relaciones entre cinco cualesquiera de las cantidades $(a_1, b_1, c_1, b_2, c_2, c_3)$, á la sexta, conocidas las relaciones entre cinco cualesquiera de las (A, B, C, D, E, F), á la que reste, y recíprocamente.

En resumen, las condiciones (60) son las necesarias y suficientes para que dos figuras correlativas superpuestas sean además polares recíprocas respecto á una cónica trazada en un plano, y las igualdades (61) determinarán los coeficientes de L, M, N, si se nos da la ecuación de la cónica, ó los de ésta si se nos dan los trinomios de transformación.

Observemos que las condiciones (60) equivalen á que la determinante de los coeficientes de L, M y N, sea simétrica.

65.—*Caso particular.*—Las condiciones para que dos figuras correlativas sean polares recíprocas respecto á una circunferencia de círculo, se hallarán por el procedimiento general, pero teniendo en cuenta que A, B, C, D, E, F, no pueden ser cualesquiera, sino que ha de verificarse

$$A = C; \quad B = 0.$$

Con esta modificación, las igualdades (59) dan las condiciones

$$\left.\begin{aligned} b_1 = a_2 = 0;\quad a_1 = b_2 \\ c_1 = a_3;\quad c_2 = b_3 \end{aligned}\right\}.$$

Suponiendo cumplidas estas condiciones, las igualdades (59) se reducen á las siguientes

$$\frac{a_1}{A}=\frac{c_1}{D}=\frac{c_2}{E}=\frac{c_3}{F},$$

que nos servirán en este caso para lo que en el caso general nos han servido las (61).

CAPÍTULO III

Transformación homográfica.

§ I

66.—Imaginemos en un plano P una figura compuesta de puntos, referida á un sistema cartesiano, ox, oy; construyamos en otro plano, P_1, una figura correlativa de la que tenemos en P, la cual figura referiremos á ejes también cartesianos, $o_1\alpha$, $o_1\beta$; por último, en un tercer plano, P', y con relación á ejes del mismo sistema de Descartes, $o'x'$, $o'y'$, tracemos otra figura correlativa de la dibujada en P_1: á un punto de P corresponderá en P_1 una recta, que tendrá á su vez en P' un punto correlativo; todo punto de P' determinará una cierta recta de P_1, la que nos dará en P un punto.

Dada, pues, la figura de P, valiéndonos del plano auxiliar P_1 y verificando la doble transformación correlativa expresada, obtendremos en P' una figura tal, que en ella tendrá cada punto de la trazada en P su correspondiente, verificándose también la recíproca: á tales figuras se da el nombre de *homográficas*, y *la transformación homográfica* tiene por objeto, dada una de ellas, deducir la otra: vamos á buscar fórmulas que permitan construir dos figuras homográficas.

Desde luego la manera de definir tales figuras nos indica un camino para llegar á la solución del problema, y otro procedimiento se comprende que consiste en abordar la cuestión de una manera directa.

Vamos á emplear sucesivamente uno y otro medio.

67.—Para efectuar la primera transformación correlativa se nos han de dar tres trinomios de primer grado en x, y, como

$$\begin{aligned} l &= a_1'x + b_1'y + c_1', \\ m &= a_2'x + b_2'y + c_2', \\ n &= a_3'x + b_3'y + c_3', \end{aligned}$$

y designaremos por λ, μ, ν los trinomios

$$\left.\begin{aligned} a_1'\alpha + a_2'\beta + a_3' \\ b_1'\alpha + b_2'\beta + b_3' \\ c_1'\alpha + c_2'\beta + c_3' \end{aligned}\right\}.$$

Para realizar la segunda transformación se nos darán otros tres trinomios de primer grado en α y β, como

$$\begin{aligned} \lambda' &= a_1''\alpha + a_2''\beta + a_3'', \\ \mu' &= b_1''\alpha + b_2''\beta + b_3'', \\ \nu' &= c_1''\alpha + c_2''\beta + c_3'', \end{aligned}$$

y designaremos por l', m', n' los trinomios

$$\left.\begin{aligned} a_1''x' + b_1''y' + c_1'' \\ a_2''x' + b_2''y' + c_2'' \\ a_3''x' + b_3''y' + c_3'' \end{aligned}\right\}.$$

Supongamos conocidos los valores numéricos de las cantidades que hemos designado por a', b', c', a'', b'', c'', con los subíndices 1, 2, 3.

Al punto (x, y) del plano P corresponde en el P_1 la recta cuya ecuación es

$$l\alpha + m\beta + n = 0;$$

á esta recta corresponde en P′ el punto cuyas coordenadas satisfacen á las ecuaciones

$$\frac{l'}{l}=\frac{m'}{m}=\frac{n'}{n},$$

que serán las que ligan las coordenadas de los puntos correspondientes de P y P′, es decir, las relaciones que buscábamos.

Poniendo en vez de l, m, n, l', m', n', sus valores, las ecuaciones anteriores se transforman en

$$\frac{a_1''x'+b_1''y'+c_1''}{a_1'x+b_1'y+c_1'}=\frac{a_2''x'+b_2''y'+c_2''}{a_2'x+b_2'y+c_2'}=\frac{a_3''x'+b_3''y'+c_3''}{a_3'x+b_3'y+c_3'}.$$

Para deducir de estas dos ecuaciones los valores de x', y', en función de x, y, llamaremos λ el valor numérico de las tres razones, y tendremos, quitando denominadores,

$$\begin{aligned}
a_1''x'+b_1''y'-(a_1'x+b_1'y+c_1')\lambda+c_1''&=0,\\
a_2''x'+b_2''y'-(a_2'x+b_2'y+c_2')\lambda+c_2''&=0,\\
a_3''x'+b_3''y'-(a_3'x+b_3'y+c_3')\lambda+c_3''&=0;
\end{aligned}$$

que son tres ecuaciones de primer grado en x', y', λ, que nos permitirán obtener los valores de estas cantidades. Para nuestro objeto nos basta despejar x' é y', con lo cual tendremos

$$x'=\frac{\begin{vmatrix}-c_1''; & b_1''; & -(a_1'x+b_1'y+c_1')\\ -c_2''; & b_2''; & -(a_2'x+b_2'y+c_2')\\ -c_3''; & b_3''; & -(a_3'x+b_3'y+c_3')\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1''; & b_1''; & -(a_1'x+b_1'y+c_1')\\ a_2''; & b_2''; & -(a_2'x+b_2'y+c_2')\\ a_3''; & b_3''; & -(a_3'x+b_3'y+c_3')\end{vmatrix}};$$

$$y' = \frac{\begin{vmatrix} a_1''; & -c_1''; & -(a_1'x + b_1'y + c_1') \\ a_2''; & -c_2''; & -(a_2'x + b_2'y + c_2') \\ a_3''; & -c_3''; & -(a_3'x + b_3'y + c_3') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1''; & b_1''; & -(a_1'x + b_1'y + c_1') \\ a_2''; & b_2''; & -(a_2'x + b_2'y + c_2') \\ a_3''; & b_3''; & -(a_3'x + b_3'y + c_3') \end{vmatrix}};$$

ó bien, desarrollando las determinantes

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3} \\ y' &= \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3} \end{aligned}\right\} \quad (1'),$$

designando por a_1, b_1, c_1, etc., cantidades fáciles de obtener en función de a_1', b_1', c_1', etc.

Obtenidas estas relaciones como necesarias para que las figuras trazadas en P y P′ sean homográficas, no hay más que mirarlas para convencerse de que son también suficientes: emplearemos, pues, las fórmulas (1′) cuando hayamos de efectuar una transformación homográfica.

68.—Por el segundo de los medios indicados en el número **66**, se llega con mayor rapidez al mismo resultado.

En efecto, si al punto (x, y) ha de corresponder el (x', y'), habrá de verificarse

$$x' = F_1(xy); \quad y' = F_2(xy);$$

la forma más general que podemos imaginar para las funciones F_1, F_2 es la del cociente de dos funciones enteras (*), que siempre podremos reducir á un común deno-

(*) Al estudiar la transformación correlativa no dijimos esto para la forma de L, M, N, es decir, no pusimos explícitamente denominador: hubiera sido inútil, pues tal denominador no hubiera alterado en nada los resultados, por desaparecer de las fórmulas, como se puede ver fácilmente.

minador: así que, designando por f_1, f_2, f_3 funciones enteras, tendremos

$$x' = \frac{f_1(xy)}{f_3(xy)}; \quad y' = \frac{f_2(xy)}{f_3(xy)} \quad (2').$$

Ahora bien: conocidas x', y', las ecuaciones (2'), que se pueden escribir

$$\left.\begin{aligned} f_1(xy) - x'f_3(xy) = 0 \\ f_2(xy) - y'f_3(xy) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3'),$$

deben darnos valores *únicos* para x, y, puesto que un punto de P' corresponde á un solo punto de P: luego los primeros miembros de (3') serán de primer grado en x, y, cualesquiera que sean x', y', y, por consiguiente, f_1, f_2, f_3 han de ser de la forma

$$\begin{aligned} f_1(xy) &= a_1x_1 + b_1y_1 + c_1, \\ f_2(xy) &= a_2x_1 + b_2y_1 + c_2, \\ f_3(xy) &= a_3x_1 + b_3y_1 + c_3, \end{aligned}$$

con lo cual llegamos al mismo resultado que anteriormente.

69.—Si de las fórmulas (1') despejamos x é y, obtendremos

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{A_1x' + A_2y' + A_3}{C_1x' + C_2y' + C_3} \\ y &= \frac{B_1x' + B_2y' + B_3}{C_1x' + C_2y' + C_3} \end{aligned}\right\} \quad (4');$$

designando por cada una de las letras mayúsculas A, B, C, afecta de un subíndice, el complemento algebraico que en la determinante

$$\begin{vmatrix} a_1; & b_1; & c_1 \\ a_2; & b_2; & c_2 \\ a_3; & b_3; & c_3 \end{vmatrix}$$

corresponde al elemento representado por la letra minúscula de iguales nombre y subíndice.

70.—Si en el plano P consideramos una línea recta, ó, lo que es lo mismo, una serie de puntos cuyas coordenadas satisfacen á una ecuación de la forma

$$lx + my + n = 0 \quad (5'),$$

los puntos de P′ correspondientes á los que hemos considerado en P, pertenecerán á un lugar geométrico cuya ecuación será la que resulte de poner en (5′) los valores (4′) de x, y; esa ecuación es

$$(l\mathrm{A}_1 + m\mathrm{B}_1 + n\mathrm{C}_1)\, x' + (l\mathrm{A}_2 + m\mathrm{B}_2 + n\mathrm{C}_2)\, y' + \\ + (l\mathrm{A}_3 + m\mathrm{B}_3 + n\mathrm{C}_3) = 0 \quad (6'):$$

luego á toda recta (5′) de una figura corresponde otra recta (6′) en la figura homográfica.

Recíprocamente, á una recta

$$l'x' + m'y' + n' = 0$$

del plano P′ corresponde en P la que tiene por ecuación

$$(l'a_1 + m'a_2 + n'a_3)\, x + (l'b_1 + m'b_2 + n'b_3)\, y + \\ + (l'c_1 + m'c_2 + n'c_3) = 0.$$

71.—En virtud de las fórmulas (1′) y (4′), tendrémos los siguientes resultados:

1.º Al origen O de P corresponde en P′ el punto

$$\left(x' = \frac{c_1}{c_3},\ y' = \frac{c_2}{c_3}\right).$$

2.º Al origen O′ de P′ corresponde en P el punto

$$\left(x=\frac{A_3}{C_3},\ y=\frac{B_3}{C_3}\right).$$

3.º Al eje de las xx corresponde la recta

$$(A_1x'+A_2y'+A_3=0).$$

4.º Al eje de las yy corresponde la recta

$$(B_1x'+B_2y'+B_3=0).$$

5.º El eje de las $x'x'$ tiene por homográfica la recta

$$(a_1x+b_1y+c_1=0).$$

6.º El eje de las $y'y'$ tiene por homográfica la recta

$$(a_2x+b_2y+c_2=0).$$

7.º Consideremos un punto en el infinito del plano P, determinado, según sabemos, por el límite m de la relación $\frac{y}{x}$, cuando x é y crezcan indefinidamente, según una cierta ley: los valores de x' é y' se pueden escribir

$$x'=\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}+c_1\frac{1}{x}}{a_3+b_3\frac{y}{x}+c_3\frac{1}{x}},$$

$$y'=\frac{a_2+b_2\frac{y}{x}+c_2\frac{1}{x}}{a_3+b_3\frac{y}{x}+c_3\frac{1}{x}};$$

pasando al límite en la hipótesis antedicha y llamando x_i', y_i', las coordenadas del punto de P' correspondiente al punto en el infinito de P, que define el número m, tendremos

$$x_i' = \frac{a_1 + b_1 m}{a_3 + b_3 m}, \quad y_i' = \frac{a_2 + b_2 m}{a_3 + b_3 m}.$$

Todos los puntos en el infinito de P están en línea recta (**IV**): luego los puntos (x_i', y_i'), deben estarlo también, y en efecto, eliminando m entre las ecuaciones que nos dan x_i' é y_i', resulta

$$\frac{a_1 - a_3 x_i'}{b_3 x_i' - b_1} = \frac{a_2 - a_3 y_i'}{b_3 y_i' - b_2},$$

ó bien

$$C_1 x' + C_2 y' + C_3 = 0 \quad (*),$$

que por ser de primer grado en $(x_i' y_i')$ demuestra que éstos están en línea recta.

8.º Al punto en el infinito de P', que determina el límite m' de $\frac{x'}{y'}$, cuando x' é y' crecen indefinidamente, según una cierta ley, corresponde el punto

$$\left(x_i = \frac{A_1 + A_2 m'}{C_1 + C_2 m'}; \quad y_i = \frac{B_1 + B_2 m'}{C_1 + C_2 m'} \right).$$

La recta en el infinito de P' tiene por homográfica en P, aquella cuya ecuación es

$$a_3 x + b_3 y + c_3 = 0.$$

(*) Esta ecuación se obtiene directamente de las fórmulas (4').

72.—Si consideramos en el primer plano tres puntos en línea recta, P_1, P_2 y P_3, cuyas coordenadas sean respectivamente $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, $(x_3 y_3)$, y llamamos K la relación $\frac{P_3 P_1}{P_3 P_2}$, tendremos

$$x_3 = \frac{x_1 - K x_2}{1 - K}; \quad y_3 = \frac{y_1 - K y_2}{1 - K};$$

en virtud de las fórmulas (1'), si llamamos $(x_1' y_1')$, $(x_2' y_2')$, $(x_3' y_3')$, las coordenadas de los puntos P_1', P_2' y P_3', homográficas de P_1, P_2, P_3, resultará, designando por H_1, H_2, las cantidades $a_3 x_1 + b_3 y_1 + c_3$; $a_3 x_2 + b_3 y_2 + c_3$.

$$x_3' = \frac{H_1 x_1' - K H_2 x_2'}{H_1 - K H_2}; \quad y_3' = \frac{H_1 y_1 - K H_2 y_2'}{H_1 - K H_2}:$$

luego

$$\frac{P_3' P_1'}{P_3' P_2'} = K \frac{H_2}{H_1}.$$

Del mismo modo, si P_4 está en línea recta con P_1 y P_2, y $K' = \frac{P_4 P_1}{P_4 P_2}$, su homográfico P_4 estará en la recta que une P_1' y P_2', y tendremos $\frac{P_4' P_1'}{P_4' P_2'} = K' \frac{H_2}{H_1}$.

Lo anterior demuestra que $\frac{P_3 P_1}{P_3 P_2} : \frac{P_4 P_1}{P_4 P_2} = \frac{P_3' P_1'}{P_3' P_2'} : \frac{P_4' P_1'}{P_4' P_2'}$;

y esta igualdad se traduce al lenguaje ordinario, diciendo: *Las relaciones anarmónicas de cuatro puntos en línea recta de una figura son iguales á las de sus puntos homográficos, tomando los segundos en el mismo orden que los primeros.*

Á este resultado se llega directamente, recordando la propiedad métrica fundamental de las figuras correlativas, y aplicando la primera definición que dimos de las homográficas.

Observación importante.—Aplicando el principio de la dualidad á todo lo dicho en este párrafo, tendremos un estudio elemental de las figuras homográficas en coordenadas tangenciales.

También es evidente que de lo dicho respecto á las figuras correlativas en el párrafo II, resulta la teoría expuesta de las homográficas, suponiendo que de los dos sistemas de variables (xy), $(\alpha\beta)$ que allí empleamos, uno representa coordenadas de puntos y otro coordenadas de rectas.

§ II

73.—Vamos ahora á estudiar rápidamente las fórmulas de transformación homográfica y las propiedades elementales de estas figuras, referidas al sistema de coordenadas trilineales.

Supongamos, pues, en el plano P un triángulo **A, B, C**; cada punto se determinará por sus distancias (que llamaremos, como siempre, A, B, C), á las tres rectas a, b, c, (fig. 7.ª); en el plano P′ supondremos también un triángulo de referencia, y α, β, γ, serán las coordenadas trilineales de un punto á él referido.

Puesto que al punto (A, B, C) ha de corresponder el (α, β, γ), será preciso que $\frac{\alpha}{\gamma}$ y $\frac{\beta}{\gamma}$, queden determinadas conociendo A, B, C, lo cual equivale á poner

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{F_1(A, B, C)}{F_3(A, B, C)}; \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{F_2(A, B, C)}{F_3(A, B, C)};$$

ó bien

$$\alpha = \lambda F_1(A, B, C); \quad \beta = \lambda F_2(A, B, C); \quad \gamma = \lambda F_3(A, B, C);$$

siendo λ un número cualquiera.

Pero observemos que para definir un punto de P, basta conocer las relaciones $\frac{A}{C}$ y $\frac{B}{C}$, y éstas no se alteran porque en vez de A, B, C, tomemos cantidades proporcionales como hA, hB, hC: por tanto, se ha de verificar

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{F_1(hA, hB, hC)}{F_3(hA, hB, hC)}; \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{F_2(hA, hB, hC)}{F_3(hA, hB, hC)};$$

luego tendremos, *cualquiera* que sea h,

$$\frac{F_1(hA, hB, hC)}{F_1(A, B, C)} = \frac{F_2(hA, hB, hC)}{F_2(A, B, C)} = \frac{F_3(hA, hB, hC)}{F_3(A, B, C)}:$$

esto obliga á que F_1, F_2, F_3, sean funciones homogéneas respecto á A, B, C, y además deben de ser de primer grado, porque á un punto de P′ corresponde uno *solo* de P.

Tendremos, en resumen,

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \lambda(l_1A + m_1B + n_1C) \\ \beta &= \lambda(l_2A + m_2B + n_2C) \\ \gamma &= \lambda(l_3A + m_3B + n_3C) \end{aligned}\right\} \quad (7').$$

Despejando A, B, C, de estas ecuaciones, y designando por cada una de las letras mayúsculas L, M, N, afectas de un subíndice, el complemento algebraico que en la determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1; & m_1; & n_1 \\ l_2; & m_2; & n_2 \\ l_3; & m_3; & n_3 \end{vmatrix};$$

corresponde al elemento representado por la letra minúscula de iguales nombre y subíndice, resultará

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{\lambda\Delta}(L_1\alpha + L_2\beta + L_3\gamma) \\ B &= \frac{1}{\lambda\Delta}(M_1\alpha + M_2\beta + M_3\gamma) \\ C &= \frac{1}{\lambda\Delta}(N_1\alpha + N_2\beta + N_3\gamma) \end{aligned}\right\} \quad (8').$$

71.—Á toda ecuación de primer grado y homogénea en A, B, C, corresponderá otra análoga en α, β, γ; y como la recíproca es también cierta, podremos decir que á cada recta de una de las dos figuras, corresponde una recta en la otra.

75.—El lado $\overline{BC}$, cuya ecuación es $A = 0$, tiene por homográfica la recta representada por $L_1\alpha + L_2\beta + L_3\gamma = 0$: supongamos que esta recta sea la $\overline{\beta'\gamma'}$ de la figura 7.ª

El lado $\overline{CA}$, que tiene por ecuación $B = 0$, es homográfico de la recta $\overline{\gamma'\alpha'}$, cuya ecuación es $M_1\alpha + M_2\beta + M_3\gamma = 0$.

Al lado $\overline{AB}$ $(C = 0)$, corresponderá la recta $\overline{\alpha'\beta'}$ $(N_1\alpha + + N_2\beta + N_3\gamma = 0)$.

Del mismo modo á los lados $\overline{\alpha\beta}$, $\overline{\beta\gamma}$, $\overline{\gamma\alpha}$, de la segunda figura, corresponden en la primera tres rectas, que supondremos las $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'A'}$, y cuyas ecuaciones serán

$$\overline{B'C'} \ldots\ldots l_1A + m_1B + n_1C = 0,$$
$$\overline{C'A'} \ldots\ldots l_2A + m_2B + n_2C = 0,$$
$$\overline{A'B'} \ldots\ldots l_3A + m_3B + n_3C = 0.$$

La recta en el infinito de la primera figura está representada por $aA + bB + cC = 0$; su homográfica estará determinada por la ecuación

$$(aL_1 + bM_1 + cN_1)\,\alpha + (aL_2 + bM_2 + cN_2)\,\beta + \\ + (aL_3 + bM_3 + cN_3)\,\gamma = 0.$$

De igual modo, siendo a', b', c', los lados del triángulo de referencia en el segundo plano, la recta en el infinito $(a'\alpha + b'\beta + c'\gamma) = 0$, tendrá por homográfica en P la correspondiente á la ecuación

$$(a'l_1 + b'm_1 + c'n_1)\,A + (a'l_2 + b'm_2 + c'n_2)\,B + \\ + (a'l_3 + b'm_3 + c'n_3)\,C = 0.$$

Fácil será determinar el punto homográfico de uno en el infinito de cualquiera de las dos figuras.

76.—Busquemos la significación geométrica de los trinomios que entran en las fórmulas (7′) y (8′).

Recordando la fórmula que en coordenadas trilineales da la distancia de un punto á una recta, resulta inmediatamente que si llamamos A_1, B_1, C_1 las distancias del punto (A, B, C) á las rectas $\overline{B'C'}$, $\overline{C'A'}$, $\overline{A'B'}$ (**75**), tendremos

$$A_1 = \frac{l_1A + m_1B + n_1C}{\{l_1a, m_1b, n_1c\}};\quad B_1 = \frac{l_2A + m_2B + n_2C}{\{l_2a, m_2b, n_2c\}};$$
$$C_1 = \frac{l_3A + m_3B + n_3C}{\{l_3a, m_3b, n_3c\}};$$

de donde sacamos, designando los tres denominadores por K_1, K_2 y K_3,

$$l_1A + m_1B + n_1C = K_1A_1;\quad l_2A + m_2B + n_2C = K_2B_1;$$
$$l_3A + m_3B + n_3C = K_3C_1;$$

y poniendo estos valores en (7′),

$$\alpha = \lambda K_1A_1;\quad \beta = \lambda K_2B_1;\quad \gamma = \lambda K_3C_1;$$

fórmulas que se pueden escribir en la forma sencilla

$$\frac{\alpha}{K_1A_1} = \frac{\beta}{K_2B_1} = \frac{\gamma}{K_3C_1} \quad (9').$$

Por idéntico procedimiento se deduce que los trinomios de (8′) son iguales á los productos de tres números conocidos (que denotaremos por K_1', K_2', K_3'), por las distancias del punto (α, β, γ) á las rectas $\overline{\beta'\gamma'}$, $\overline{\gamma'\alpha'}$, $\overline{\alpha'\beta'}$, y que llamando α_1, β_1, γ_1 esas distancias, las fórmulas citadas se pueden escribir

$$\frac{A}{K_1'\alpha_1} = \frac{B}{K_2'\beta_1} = \frac{C}{K_3'\gamma_1} \quad (10').$$

77.—Si nosotros establecemos las fórmulas (9′) ó (10′), siendo las cantidades K_1, K_2, K_3, ó K_1', K_2', K_3', números cualesquiera, y valiéndonos de ellas construimos dos figuras, evidentemente resultarán homográficas, y los triángulos á que están referidas serán correspondientes.

78.—Resulta de lo dicho en los dos números anteriores que las fórmulas generales de transformación homográfica son las (7′) ú (8′); pero eligiendo uno de los triángulos de referencia homográfico del otro, se simplifican, tomando la forma (9′). Cuando usemos estas últimas formas, no habrá inconveniente en suprimir los subíndices, y designar las coordenadas como siempre por A, B, C, pero teniendo en cuenta la particularidad que ofrecen los triángulos de referencia.

79.—Según lo establecido en el núm. **I**, y empleando con las fórmulas (7′), ó las más sencillas (9′), el procedimiento seguido en el núm. **72**, se demuestra sin dificultad en el sistema trilineal la propiedad métrica fundamental de las figuras homográficas que hallamos en dicho número **72**.

Observación importante.—En virtud del principio de la dualidad, si las cantidades que hemos llamado en este párrafo A, B, C, α, β, γ, en lugar de representar coordenadas de puntos, representan coordenadas de rectas, la anterior teoría es la de la transformación homográfica en el sistema trilineal de coordenadas tangenciales.

También es claro que de lo dicho de las figuras correlativas en el párrafo III del capítulo anterior resulta la teoría de las figuras homográficas, suponiendo que de los dos sistemas de variables que allí empleamos, uno representa coordenadas de puntos y otro coordenadas de rectas.

§ III

80.—Si hacemos coincidir los planos P y P', tendremos en un solo plano dos figuras homográficas, que en esta posición se apellidan *superpuestas*, referida la primera á los ejes ox, oy, y la segunda á los ox', oy' (*); pero haciendo el mismo razonamiento que al tratar de las figuras correlativas en un plano, veremos que puede considerarse un solo sistema de ejes. En esta hipótesis, continuaremos designando por (xy) las coordenadas de un punto de la primera figura, por $(x'y')$ las de uno de la segunda, y usaremos las fórmulas (1').

No nos detendremos, por ser sencillísimo, en examinar la posición que tendrán en las figuras homográficas superpuestas los elementos que consideramos en el número (**71**), y pasaremos á lo más importante de esta clase de figuras, que es la investigación de los puntos *conjugados* y *dobles*.

81.—Cada punto del plano lo podemos considerar como de la primera ó de la segunda figura: al punto (x, y), corresponde el (x', y'); y si consideramos este último como de la primera, su homográfico (x_1, y_1) estará determinado por

$$x_1 = \frac{a_1x' + b_1y' + c_1}{a_3x' + b_3y' + c_3}; \quad y_1 = \frac{a_2x' + b_2y' + c_2}{a_3x' + b_3y' + c_3};$$

(*) Sólo trataremos en este párrafo de las figuras homográficas referidas á ejes cartesianos; fácil será al lector repetir lo que diremos refiriendo las figuras á otro sistema de coordenadas.

el punto (x_1, y_1) será en general distinto del (x, y); pero si coinciden, diremos que los puntos (x, y), (x', y') son conjugados.

Obtendremos, pues, las coordenadas de los puntos conjugados resolviendo las cuatro ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3} \\ y' &= \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3} \end{aligned}\right\} \quad (11'); \qquad \left.\begin{aligned} x &= \frac{a_1x' + b_1y' + c_1}{a_3x' + b_3y' + c_3} \\ y &= \frac{a_2x' + b_2y' + c_2}{a_3x' + b_3y' + c_3} \end{aligned}\right\} \quad (12');$$

para esto eliminemos entre ellas x' é y', lo cual se conseguirá despejando estas cantidades de (12′) é igualando los valores que resulten á los que nos dan las fórmulas (11′).

Del (12′) se deduce (**69**):

$$x' = \frac{A_1x + A_2y + A_3}{C_1x + C_2y + C_3}; \quad y' = \frac{B_1x + B_2y + B_3}{C_1x + C_2y + C_3};$$

la eliminación de x', y' entre (11′) y (12′) nos da, por tanto,

$$\frac{A_1x + A_2y + A_3}{C_1x + C_2y + C_3} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3};$$

$$\frac{B_1x + B_2y + B_3}{C_1x + C_2y + C_3} = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3};$$

ó bien

$$\frac{A_1x + A_2y + A_3}{a_1x + b_1y + c_1} = \frac{B_1x + B_2y + B_3}{a_2x + b_2y + c_2} = \frac{C_1x + C_2y + C_3}{a_3x + b_3y + c_3} \quad (13').$$

Para obtener los pares de valores de x, y, que satisfacen á estas dos ecuaciones, usaremos un artificio de cálculo, ya empleado anteriormente, y que consiste en igualar las tres fracciones (13′) á una cantidad λ, indeterminada por de pronto, pero de la cual obtendremos en seguida su valor.

Así resultarán, en vez de las dos ecuaciones anteriores, las tres siguientes:

$$\left.\begin{aligned}(A_1-\lambda a_1)x+(A_2-\lambda b_1)y+(A_3-\lambda c_1)&=0\\(B_1-\lambda a_2)x+(B_2-\lambda b_2)y+(B_3-\lambda c_2)&=0\\(C_1-\lambda a_3)x+(C_2-\lambda b_3)y+(C_3-\lambda c_3)&=0\end{aligned}\right\}\quad(14');$$

y como estas tres ecuaciones han de quedar satisfechas simultáneamente, λ habrá de tener un valor tal, que se cumpla la condición de compatibilidad del sistema (14'). Esta condición es

$$\begin{vmatrix}A_1-\lambda a_1; & A_2-\lambda b_1; & A_3-\lambda c_1\\B_1-\lambda a_2; & B_2-\lambda b_2; & B_3-\lambda c_2\\C_1-\lambda a_3; & C_2-\lambda b_3; & C_3-\lambda c_3\end{vmatrix}=0.$$

Desarrollando esta determinante tendremos una ecuación de tercer grado en λ, que nos dará tres valores de esa cantidad, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$; poniendo cada uno de estos valores en lugar de λ en (14'), obtendremos un par de valores de x é y; en suma, resultan tres pares de valores que satisfacen á las ecuaciones (14'), y por consiguiente á las (13'), y poniendo estos valores que llamaremos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), en las fórmulas (11'), obtendremos los valores correspondientes de x' é y', que llamaremos (x_1', y_1'), (x_2', y_2'), (x_3', y_3').

82.—Parece, por tanto, que en dos figuras homográficas existen en general tres pares de puntos conjugados; pero fácilmente veremos que esos tres pares de puntos son conjugados de un modo particular.

En efecto; para determinar esos puntos hemos eliminado entre las ecuaciones (11') y (12'), x' é y', hemos deducido de las ecuaciones resultantes los valores de x, y, y luego hemos sustituído estos valores en las fórmulas (11′), para obtener los correspondientes de x' é y'; en esta investigación hemos aprendido que sólo hay en general tres sistemas de valores de las incógnitas que satisfagan á las cuatro ecuaciones que han de verificar las coordenadas de los puntos conjugados: en lugar de seguir el procedimiento indicado para hallar esos valores, también hubiéramos podido eliminar x, y, en vez de x', y', sacar los valores de estas cantidades por medio de las resultantes, y en seguida los de x, y, por las fórmulas (12′). Para hacerlo así, las fórmulas (11′) nos dan (**69**)

$$x = \frac{A_1 x' + A_2 y' + A_3}{C_1 x' + C_2 y + C_3}; \quad y = \frac{B_1 x' + B_2 y' + B_3}{C_1 x' + C_2 y' + C_3},$$

y por lo mismo, las ecuaciones que resultan de eliminar x é y, son

$$\frac{A_1 x' + A_2 y' + A_3}{a_1 x' + b_1 y' + c_1} = \frac{B_1 x' + B_2 y' + B_3}{a_2 x' + b_2 y' + c_2} = \frac{C_1 x' + C_2 y' + C_3}{a_3 x' + b_3 y' + c_3};$$

pero estas ecuaciones sólo difieren de (13′) en ser las incógnitas x', y', en vez de x, y: luego nos darán para x', y', los mismos valores que aquéllas nos dieron para x, y; ahora bien: estos valores de x', y', son los que llamamos en el número anterior (x_1', y_1'), (x_2', y_2'), (x_3', y_3'), y resulta, por tanto, $x_1 = x_1'$, $y_1 = y_1'$, $x_2 = x_2'$, $y_2 = y_2'$, $x_3 = x_3'$, $y_3 = y_3'$, es decir, que los puntos conjugados coinciden. Estos puntos, que se corresponden á sí mismos, se llaman *puntos dobles*.

83.—En resumen, tenemos que en dos figuras homográficas no existen puntos conjugados en el sentido general que se da á esta denominación, y existen tres puntos dobles.

Todavía pueden hacerse dos observaciones notables:

1.ª La ecuación que nos ha dado los valores de λ, es de tercer grado, y por tanto, esos valores serán, ó los tres reales, ó uno real y dos imaginarios conjugados; y como cada valor de λ se ha de sustituir en (14') para obtener los valores de x, y, que corresponden á los puntos dobles, resulta que éstos serán, ó los tres reales, ó uno real y los otros dos conjugados.

2.ª Sean P_1, P_2, P_3, los puntos dobles, las rectas $\overline{P_1P_3}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_1P_2}$, son también dobles, es decir, que serán homográficas de sí mismas, y claro que no habrá otra que goce de la misma propiedad: si los puntos dobles son reales, también lo serán las rectas; si uno es real y los otros dos imaginarios conjugados, una de las rectas dobles será real (la que una los dos puntos imaginarios) y las otras dos imaginarias (las que unan el punto real con los imaginarios).

La existencia de las rectas dobles se hubiera podido obtener directamente por el cálculo, de análoga manera que hemos hallado los puntos dobles, investigando si en dos figuras homográficas existen rectas conjugadas; el lector debe hacerlo así, como ejercicio provechoso.

84.—Si nos hubiéramos propuesto hallar directamente los puntos dobles, hubiéramos resuelto las ecuaciones

$$x = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3}, \quad y = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3},$$

y éste es el procedimiento seguido en la práctica, por ser más sencillo que el que antes hemos descrito.

85.—Un caso importante hay que considerar, y es aquel en que las tres ecuaciones (14') se reducen á identidades, lo cual equivale á que *todos* los pares de puntos correspondientes sean conjugados; entonces ya no será aplicable lo dicho en el núm. **82**, y los puntos conjugados no serán dobles en general: para que se cumpla la condición dicha, habrán de ser nulos los coeficientes de x, de y, y los términos independientes de las ecuaciones (14′), y, por tanto, tendremos

$$\frac{A_1}{a_1}=\frac{A_2}{b_1}=\frac{A_3}{c_1}=\frac{B_1}{a_2}=\frac{B_2}{b_2}=\frac{B_3}{c_2}=\frac{C_1}{a_3}=\frac{C_2}{b_3}=\frac{C_3}{c_3}.$$

Pongamos en vez de las letras mayúsculas sus valores (**69**), y resultará

$$\frac{b_2c_3-b_3c_2}{a_1}=c_1\frac{b_3}{b_1}-c_3=b_1\frac{c_2}{c_1}-b_2=c_2\frac{a_3}{a_2}-c_3=\frac{a_1c_3-c_1a_3}{b_2}=$$
$$=a_2\frac{c_1}{c_2}-a_1=b_3\frac{a_2}{a_3}-b_2=a_3\frac{b_1}{b_3}-a_1=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{c_3},$$

es decir, ocho ecuaciones entre los coeficientes que entran en las fórmulas de transformación homográfica. Llamemos K á la última fracción, y las ocho ecuaciones anteriores podrán escribirse

$$\frac{b_2c_3-c_2b_3}{a_1}=\mathrm{K}\ \ldots\ldots\ (\mathrm{E}_1),\quad c_1\frac{b_3}{b_1}-c_3=\mathrm{K}\ \ldots\ldots\ (\mathrm{E}_2),$$
$$b_1\frac{c_2}{c_1}-b_2=\mathrm{K}\ \ldots\ldots\ (\mathrm{E}_3),\quad c_2\frac{a_3}{a_2}-c_3=\mathrm{K}\ \ldots\ldots\ (\mathrm{E}_4),$$
$$\frac{a_1c_3-c_1a_3}{b_2}=\mathrm{K}\ \ldots\ldots\ (\mathrm{E}_5),\quad a_2\frac{c_1}{c_2}-a_1=\mathrm{K}\ \ldots\ldots\ (\mathrm{E}_6),$$
$$b_3\frac{a_2}{a_3}-b_2=\mathrm{K}\ \ldots\ldots\ (\mathrm{E}_7),\quad a_3\frac{b_1}{b_3}-a_1=\mathrm{K}\ \ldots\ldots\ (\mathrm{E}_8),$$

pero

$$\left.\begin{array}{l}(\mathrm{E}_2)\ \mathrm{y}\ (\mathrm{E}_4)\ \mathrm{dan}\\(\mathrm{E}_3)\ \mathrm{y}\ (\mathrm{E}_7)\ \mathrm{dan}\\(\mathrm{E}_6)\ \mathrm{y}\ (\mathrm{E}_8)\ \mathrm{dan}\end{array}\right\}\ \frac{c_1}{c_2}=\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{b_1}{b_3}:$$

luego las ocho ecuaciones son equivalentes á estas seis

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{b_2c_3 - c_2b_3}{a_1} = \mathrm{K}\\[2mm] \dfrac{a_1c_3 - c_1a_3}{b_2} = \mathrm{K}\end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} c_1\dfrac{b_3}{b_1} - c_3 = \mathrm{K}\\[2mm] b_3\dfrac{a_2}{a_3} - b_2 = \mathrm{K}\end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} a_2\dfrac{c_1}{c_2} - a_1 = \mathrm{K}\\[2mm] \dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{a_3}{a_2}\cdot\dfrac{b_1}{b_3}\end{array}\right\};$$

de las cuatro últimas se obtiene fácilmente

$$c_1 = (\mathrm{K} + c_3)\frac{b_1}{b_3}; \quad c_2 = (\mathrm{K} + c_3)\frac{a_2}{a_3}; \quad a_1 = a_3\frac{b_1}{b_3} - \mathrm{K};$$

$$b_2 = b_3\frac{a_2}{a_3} - \mathrm{K} \quad (15');$$

y poniendo estos valores en las dos primeras, y haciendo operaciones, resulta la sola ecuación

$$\mathrm{K} = c_3 + \frac{a_2}{a_3}b_3 + a_3\frac{b_1}{b_3} \quad (16').$$

Entre las ecuaciones (15') y (16') ya no hay más equivalencias, es decir, que son distintas, y por lo mismo podemos tomar arbitrariamente las cantidades a_3, b_3, c_3, $\frac{a_2}{a_3}$, $\frac{b_1}{b_3}$, y deducir las a_1, c_1, b_2, c_2; (K es una cantidad auxiliar, que conservaremos para facilitar la escritura y deducir una importante propiedad).

Llamemos α y β las relaciones $\frac{b_1}{b_3}$, $\frac{a_2}{a_3}$, de donde $b_1 = \alpha b_3$, $a_2 = \beta a_3$, las fórmulas de transformación serán en este caso particular importantísimo

$$x' = \frac{(a_3\alpha - \mathrm{K})x + b_3\alpha y + (\mathrm{K} + c_3)\alpha}{a_3x + b_3y + c_3} = \alpha - \frac{\mathrm{K}(x - \alpha)}{a_3x + b_3y + c_3},$$

$$y' = \frac{a_3\beta x + (b_3\beta - \mathrm{K})y + (\mathrm{K} + c_3)\beta}{a_3x + b_3y + c_3} = \beta - \frac{\mathrm{K}(y - \beta)}{a_3x + b_3y + c_3},$$

que pueden escribirse

$$\frac{x' - \alpha}{x - \alpha} = \frac{y' - \beta}{y - \beta} = \frac{-K}{a_3 x + b_3 y + c_3}.$$

Á estas fórmulas hay que agregar la condición $a_3\alpha + b_3\beta + c_3 = K$.

Todavía se pueden poner las fórmulas de transformación bajo la forma

$$\frac{x' - \alpha}{x - \alpha} = \frac{y' - \beta}{y - \beta} = \frac{1}{lx + my + n} \quad (17'),$$

con la condición $l\alpha + m\beta + n = -1$: siendo l, m, n los valores de $-\frac{a_3}{K}, -\frac{b_3}{K}, -\frac{c_3}{K}$.

Se ve inmediatamente que todos los pares de puntos homográficos están en línea recta con el (α, β).

Es facilísimo convencerse de que si las fórmulas de transformación son las anteriores con la condición dicha, los pares de puntos correspondientes serán conjugados.

86.—Si las fórmulas de transformación son las (17′), pero no se verifica la condición $l\alpha + m\beta + n = -1$, entonces ya no son conjugados los puntos homográficos; pero siempre estarán en línea recta con el (α, β), y á esta clase de figuras homográficas se las llama homológicas, y su estudio es el objeto del capítulo siguiente.

§ IV

87.—Vamos ahora, para terminar nuestro estudio de las figuras homográficas, á expresar analíticamente las condiciones geométricas que pueden imponerse á dos de esas figuras: es evidente que tales condiciones serán fijar un cierto número de pares de puntos ó de rectas que han de ser homográficos.

Observemos que en las fórmulas (1') aparecen nueve coeficientes, pero que los valores de x', y' no se alteran porque dividamos los dos términos de cada fracción por una misma cantidad; pues dividamos numeradores y denominador por una cualquiera de las cantidades a_1, b_1....., etcétera: las fórmulas no se alteran, y en vez de nueve coeficientes aparecen ocho, que son las relaciones entre ocho de los que antes teníamos y el noveno: estas relaciones son las suficientes para establecer las fórmulas.

88.—Si en el plano P' un punto determinado, cuyas coordenadas llamaremos $(x_1' y_1')$, ha de corresponder á otro punto $(x_1 y_1)$ también determinado en el plano P, habrá de verificarse

$$x_1' = \frac{a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1}{a_3 x_1 + b_3 y_1 + c_3}; \quad y_1' = \frac{a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2}{a_3 x_1 + b_3 y_1 + c_3};$$

es decir, que tendremos dos ecuaciones entre los coeficientes de transformación, y se ve que esas ecuaciones son homogéneas y de primer grado respecto á dichos coeficientes.

De manera que, si se nos marcan otros tres pares de puntos correspondientes $(x_2' y_2')$ $(x_2 y_2)$, $(x_3' y_3')$ $(x_3 y_3)$,

$(x_4'y_4')$ (x_4y_4), tendríamos otras seis ecuaciones de la misma forma que las dos anteriores, y del sistema de las ocho podríamos deducir los valores de las relaciones entre ocho de los coeficientes y el noveno, de las que dependen, según hemos visto hace poco, las fórmulas de transformación.

Hay un caso de excepción, y es aquel en que tres de los puntos dados en una de las figuras están en línea recta: veríamos, empleando el mismo razonamiento que en un caso análogo de las figuras correlativas, que los puntos homográficos de los tres dados han de estar también en línea recta, y entonces las seis ecuaciones que se obtienen en general por la correspondencia de tres pares de puntos se reducen á cuatro.

89.—Si se nos dan dos rectas

$$lx + my + n = 0 \quad (18'); \quad l'x' + m'y' + n' = 0 \quad (19'),$$

la primera en P, la segunda en P′, y que han de corresponderse, poniendo en (19′) los valores (1′) de x', y', tendremos

$$(l'a_1 + m'a_2 + n'a_3)\,x + (l'b_1 + m'b_2 + n'b_3)\,y + \\ + (l'c_1 + m'c_2 + n'c_3) = 0;$$

y como esta ecuación debe de ser idéntica á la (18′), deduciremos

$$\frac{l'a_1 + m'a_2 + n'a_3}{l} = \frac{l'b_1 + m'b_2 + n'b_3}{m} = \frac{l'c_1 + m'c_2 + n'c_3}{n};$$

la correspondencia de las dos rectas (18′) y (19′), nos da, pues, dos ecuaciones homogéneas y de primer grado entre los coeficientes de las fórmulas (1′); de modo que si se nos marcan además otros tres pares de rectas homográficas, tendremos ocho ecuaciones que nos determinarán las relaciones de que dependen las fórmulas.

Se deduce también con facilidad que si tres de las rectas en una figura son concurrentes en un punto, sus homográficas han de tener la misma propiedad, y estas condiciones sólo nos dan cuatro ecuaciones entre los coeficientes.

90.—En suma, fijar un par de puntos ó un par de rectas correspondientes en dos figuras homográficas, equivale á escribir dos ecuaciones homogéneas de primer grado entre los coeficientes de las fórmulas de transformación: luego para determinar dos figuras de esa clase se pueden marcar arbitrariamente cuatro pares de puntos, ó cuatro pares de rectas, ó un par de puntos y tres pares de rectas, ó tres pares de puntos y uno de rectas. De análoga manera que en el caso de las figuras correlativas, se demuestra que si se nos dan dos pares de puntos y dos de rectas para determinar dos figuras homográficas, el problema, ó es imposible, ó es indeterminado.

91.—Si las figuras estuvieran referidas al sistema de coordenadas trilineales, todas las propiedades anteriores se deducirán con igual facilidad empleando las formulas (7').

Es conveniente notar que en las fórmulas simplificadas (9'), sólo entran *dos* parámetros distintos; pues aunque aparecen *tres*, las fórmulas no se alteran porque las dividamos por uno de ellos, y por tanto, sólo dependen de las relaciones entre dos de los parámetros y el tercero. Estas relaciones se determinarán expresando que son homográficos dos puntos ó dos rectas, y se comprende que debe de ser así, porque el empleo de las fórmulas citadas ya supone que son homográficos tres pares de puntos ó tres pares de rectas, que son los vértices ó los lados de los dos triángulos de referencia.

CAPÍTULO IV

Transformación homológica.

---

§ I

92.—Ya hemos dicho lo que se entiende por figuras homológicas en un plano: son dos figuras homográficas superpuestas en las que los pares de puntos correspondientes están todos en línea recta con un cierto punto del plano, al cual punto se llama *centro* de homología.

La transformación homológica tiene por objeto, dada una de las figuras, construir la otra.

Vamos á buscar las fórmulas generales de transformación homológica, partiendo de su definición.

93.—Supondremos las dos figuras referidas á un mismo sistema cartesiano, y designaremos como siempre por (xy) las coordenadas de un punto de la primera, y por $(x'y')$ las de uno de la segunda.

Las figuras homológicas son homográficas: luego tendremos necesariamente

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c}; \quad y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3}:$$

además, los puntos correspondientes están en línea recta con un cierto punto del plano, cuyas coordenadas llamaremos (x_0y_0), y, por tanto, tendremos

$$\begin{vmatrix} x'; & y'; & 1 \\ x\ ; & y\ ; & 1 \\ x_0; & y_0; & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ó poniendo en vez de x', y' sus valores

$$\begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1; & a_2x + b_2y + c_2; & a_3x + b_3y + c_3 \\ x & ; \quad y & ; \quad 1 \\ x_0 & ; \quad y_0 & ; \quad 1 \end{vmatrix} = 0,$$

y desarrollando

$$(a_3y_0 - a_2)x^2 + (a_1 - a_3x_0 + b_2y_0 - b_2)xy + (b_1 - b_3x_0)y^2 +$$
$$+ (a_2x_0 + c_3y_0 - a_1y_0 - c_2)x + (b_2x_0 + c_1 - b_1y_0 - c_3x_0)y +$$
$$+ (c_2x_0 - c_1y_0) = 0.$$

El primer miembro de esta última ecuación ha de ser cero, cualesquiera que sean los valores de x é y: luego debe de ser idénticamente nulo, y por ello

$$a_3y_0 - a_2 = 0 \qquad (e_1),$$
$$a_1 - a_3x_0 + b_3y_0 - b_2 = 0 \qquad (e_2),$$
$$b_1 - b_3x_0 = 0 \qquad (e_3),$$
$$a_2x_0 + c_3y_0 - a_1y_0 - c_2 = 0 \qquad (e_4),$$
$$b_2x_0 + c_1 - b_1y_0 - c_3x_0 = 0 \qquad (e_5),$$
$$c_2x_0 - c_1y_0 = 0 \qquad (e_6).$$

Pero estas seis ecuaciones no son distintas, y para convencerse de ello emplearemos un artificio muy fácil de recordar: de (e_1), (e_3) y (e_6) se obtienen directamente los valores de a_2, b_1 y c_1, que son los siguientes:

$$a_2 = a_3y_0, \quad b_1 = b_3x_0, \quad c_1 = c_2\frac{x_0}{y_0};$$

poniendo estos valores en las otras tres ecuaciones (e_4) y (e_5), y copiando la (e_2), resulta

$$a_1 - a_3x_0 + b_2y_0 - b_2 = 0;$$
$$a_3x_0y_0 + c_3y_0 - a_1y_0 - c_2 = 0;$$
$$b_2y_0 + c_2 - b_3y_0{}^2 - c_3y_0 = 0;$$

ahora bien, sumando las dos últimas, se obtiene la primera: luego en el sistema de las ecuaciones (e) solo cinco son distintas: elegiremos las (e_1), (e_3), (e_4), (e_5) y (e_6).

En esas cinco ecuaciones entran *once* cantidades, á saber $(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, x_0, y_0)$: podremos determinar cinco de ellas en función de las otras seis, y elegiremos para ser determinadas las que más facilidad ofrezcan: ya hemos despejado antes a_2, b_1, c_1; poniendo estos valores en (e_4) y (e_5), podremos deducir los valores de a_1 y b_2:

$$a_1 = a_3 x_0 + c_3 - c_2 \frac{1}{y_0}; \quad b_2 = b_3 y_0 + c_3 - c_2 \frac{1}{y_0}.$$

Las fórmulas de transformación serán, pues,

$$x' = \frac{\left(a_3 x_0 + c_3 - c_2 \frac{1}{y_0}\right) x + b_3 x_0 y + c_2 \frac{x_0}{y_0}}{a_3 x + b_3 y + c_3};$$

$$y' = \frac{a_3 y_0 x + \left(b_3 y_0 + c_3 - c_2 \frac{1}{y_0}\right) y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3},$$

que, evidentemente, se pueden escribir

$$x' = \frac{(a_3 x + b_3 y + c_3)\, x_0 + (x - x_0)\left(c_3 - c_2 \frac{1}{y_0}\right)}{a_3 x + b_3 y + c_3} =$$

$$= x_0 + (x - x_0) \frac{c_3 - c_2 \frac{1}{y_0}}{a_3 x + b_3 y + c_3};$$

$$y' = \frac{(a_3 x + b_3 y + c_3)\, y_0 + (y - y_0)\left(c_3 - c_2 \frac{1}{y_0}\right)}{a_3 x + b_3 y + c_3} =$$

$$= y_0 + (y - y_0) \frac{c_3 - c_2 \frac{1}{y_0}}{a_3 x + b_3 y + c_3},$$

ó todavía representando $c_3 - c_2 \frac{1}{y_0}$, que es una constante, por λ:

$$\frac{x' - x_0}{x - x_0} = \frac{y' - y_0}{y - y_0} = \frac{\lambda}{a_3 x + b_3 y + c_3} \quad (1'').$$

94.—Conviene deducir de las anteriores fórmulas los valores de x é y, en función de x' é y': para ello escribamos las fórmulas (1''), de este modo:

$$\frac{x - x_0}{x' - x_0} = \frac{y - y_0}{y' - y_0} = \frac{a_3 x + b_3 y + c_3}{\lambda}:$$

las propiedades de las fracciones iguales nos dan con facilidad

$$\frac{x - x_0}{x' - x_0} = \frac{y - y_0}{y' - y_0} = \frac{a_3 x + b_3 y - (a_3 x_0 + b_3 y_0)}{a_3 x' + b_3 y' - (a_3 x_0 + b_3 y_0)},$$

y

$$\frac{a_3 x + b_3 y - (a_3 x_0 + b_3 y_0)}{a_3 x' + b_3 y' - (a_3 x_0 + b_3 y_0)} = \frac{a_3 x + b_3 y + c_3}{\lambda} =$$

$$= - \frac{a_3 x_0 + b_3 y_0 + c_3}{a_3 x' + b_3 y' - (a_3 x_0 + b_3 y_0 + \lambda)}:$$

luego si hacemos $a_3 x_0 + b_3 y_0 + c_3 = \lambda K$ (K es, como veremos después, una cantidad muy importante en esta teoría), resultará, finalmente,

$$\frac{x - x_0}{x' - x_0} = \frac{y - y_0}{y' - y_0} = - \frac{\lambda K}{a_3 x' + b_3 y' + c_3 - \lambda(K + 1)} \quad (2'').$$

95.—Á la recta de la primera figura que tiene por ecuación $rx + sy + t = 0$, corresponderá la recta representada por

$$r\left(x_0 - \frac{\lambda K(x' - x_0)}{a_3x' + b_3y' + c_3 - \lambda(K + 1)}\right) +$$

$$+ s\left(y_0 - \frac{\lambda K(y' - y_0)}{a_3x' + b_3y + c_3 - \lambda(K + 1)}\right) + t = 0,$$

ó lo que es igual

$$rx' + sy' - (rx_0 + sy_0) -$$

$$- \frac{rx_0 + sy_0 + t}{\lambda K}\left(a_3x' + b_3y' + c_3 - \lambda(K + 1)\right) = 0.$$

Pongamos, para mayor claridad en las ecuaciones de las dos rectas homológicas, en vez de (x, y) ó (x', y'), las coordenadas generales (X, Y) de un punto del plano:

$$(3'') \quad rX + sY + t = 0,$$

$$(4'') \quad rX + sY - (rx_0 + sy_0) -$$

$$- \frac{rx_0 + sy_0 + t}{\lambda K}\left(a_3X + b_3Y + c_3 - \lambda(K + 1)\right):$$

restando estas dos ecuaciones, obtendremos la de una cierta recta que pasa por el punto de intersección de las (3'') y (4''); pero esa ecuación es

$$(rx_0 + sy_0 + t)\left(1 + \frac{a_3X + b_3Y + c_3 - \lambda(K + 1)}{\lambda K}\right) = 0,$$

ó bien

$$a_3X + b_3Y + c_3 - \lambda = 0;$$

y como es independiente de r, s, t, resulta la siguiente importantísima propiedad:

Los puntos de intersección de las rectas correspondientes en dos figuras homológicas están en línea recta; á esta recta se llama *eje de la homología.*

Si hubiéramos partido de la ecuación de una recta que forme parte de la segunda figura, hubiéramos llegado con mayor rapidez, por no necesitar el cálculo del núm. **94**, al mismo resultado.

96.—La importante propiedad qne acabamos de demostrar puede servir de definición de las figuras homológicas; así consideradas, diremos que son aquellas figuras homográficas en que las rectas correspondientes concurren en puntos de una recta que se llama *eje de homología.*

Veamos cómo partiendo de esta definición se obtienen las fórmulas ya deducidas (1'').

Por ser homográficas las figuras, se tendrá como siempre

$$x' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3}; \quad y' = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3} \quad (5'').$$

Las ecuaciones de dos rectas correspondientes de las dos figuras serán, poniendo las coordenadas generales,

$$\left.\begin{array}{c} r\mathrm{X} + s\mathrm{Y} + t = 0 \\ (ra_1 + sa_2 + ta_3)\mathrm{X} + (rb_1 + sb_2 + tb_3)\mathrm{Y} + \\ + (rc_1 + sc_2 + tc_3) = 0 \end{array}\right\} \quad (6'').$$

Sea la ecuación del eje de homología

$$p\mathrm{X} + q\mathrm{Y} + h = 0 \quad (7'');$$

las ecuaciones (7'') y (6'') habrán de verificarse simultáneamente para todos los valores de r, s y t: luego tendremos idénticamente

$$\begin{vmatrix} ra_1 + sa_2 + ta_3; & rb_1 + sb_2 + tb_3; & rc_1 + sc_2 + tc_3 \\ r \quad ; & s \quad ; & t \\ p \quad ; & q \quad ; & h \end{vmatrix} = 0,$$

ó desarrollando la determinante

$$(b_1h - c_1q)r^2 + (c_2p - a_2h)s^2 + (a_3q - b_3p)t^2 +$$
$$+ (c_1p + b_2h - a_1h - c_2q)\,rs + (a_2q + c_3p - b_2p - a_3h)\,st +$$
$$+ (a_1q + b_3h - b_1p - c_3q)\,tr = 0:$$

lo cual exige que

$$\left.\begin{array}{r} b_1h - c_1q = 0 \\ c_2p - a_2h = 0 \\ a_3q - b_3p = 0 \\ c_1p + b_2h - a_1h - c_2q = 0 \\ a_2q + c_3p - b_2p - a_3h = 0 \\ a_1q + b_3h - b_1p - c_3q = 0 \end{array}\right\} (8'').$$

Para deducir de estas ecuaciones los valores de algunos coeficientes de las fórmulas (5''), pudiéramos emplear el mismo método que en el número **93**; pero es más elegante y se llega con mayor rapidez al resultado introduciendo tres nuevas cantidades λ, μ, ν, y poniendo las tres primeras ecuaciones (8''), en la forma

$$\frac{b_1}{q} = \frac{c_1}{h} = \lambda; \quad \frac{a_2}{p} = \frac{c_2}{h} = \mu; \quad \frac{a_3}{p} = \frac{b_3}{q} = \nu;$$

de aquí se deduce

$$b_1 = \lambda q; \quad c_1 = \lambda h; \quad a_2 = \mu p; \quad c_2 = \mu h; \quad a_3 = \nu p; \quad b_3 = q\nu:$$

sustituyendo estos valores en las tres últimas (8''), resulta, suprimiendo en la primera el factor h, en la segunda el p, y en la tercera q,

$$\lambda p + b_2 - a_1 - \mu q = 0,$$
$$\mu q + c_3 - b_2 - \nu h = 0,$$
$$a_1 + \nu h - \lambda p - c_3 = 0;$$

sumando las dos primeras resulta la tercera: luego esas tres ecuaciones no son distintas, y sólo podemos tomar dos de ellas cualesquiera, y deducir los valores de dos coeficientes: elijamos, para mayor facilidad, las dos últimas, que dan directamente

$$a_1 = c_3 + \lambda p - \nu h,$$
$$b_2 = c_3 + \mu q - \nu h.$$

Poniendo en las fórmulas (5'') los valores de los coeficientes deducidos, ó sean a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3 y b_3, tendremos

$$x' = \frac{(c_3 + \lambda p - \nu h)\,x + \lambda q y + \lambda h}{\nu p x + \nu q y + c_3},$$

$$y' = \frac{\mu p x + (c_3 + \mu q - \nu h)\,y + \mu h}{\nu p x + \nu q y + c_3};$$

desarrollando los numeradores y comparándolos con el denominador común, se comprenden en seguida las siguientes transformaciones:

$$x' = \frac{\lambda p x + \lambda q y + (c_3 - \nu h)x + \lambda h}{\nu p x + \nu q y + c_3} =$$

$$= \frac{\lambda}{\nu}\cdot\frac{px + qy + \frac{c_3}{\nu} + \left[h + \frac{1}{\lambda}(c_3 - \nu h)x - \frac{c_3}{\nu}\right]}{px + qy + \frac{c_3}{\nu}} =$$

$$= \frac{\lambda}{\nu} + \frac{x\left(\frac{c_3}{\nu} - h\right) - \frac{\lambda}{\nu}\left(\frac{c_3}{\nu} - h\right)}{px + qy + \frac{c_3}{\nu}} = \frac{\lambda}{\nu} + \frac{\left(x - \frac{\lambda}{\nu}\right)\left(\frac{c_3}{\nu} - h\right)}{px + qy + \frac{c_3}{\nu}};$$

$$y' = \frac{\mu p x + \mu q y + (c_3 - \nu h)y + \mu h}{\nu p x + \nu q y + c_3} =$$

$$=\frac{\mu}{\nu}\cdot\frac{px+qy+\frac{c_3}{\nu}+\left[h+\frac{1}{\mu}(c_3-\nu h)y-\frac{c_3}{\nu}\right]}{px+qy+\frac{c_3}{\nu}}=$$

$$=\frac{\mu}{\nu}+\frac{y\left(\frac{c_3}{\nu}-h\right)-\frac{\mu}{\nu}\left(\frac{c_3}{\nu}-h\right)}{px+qy+\frac{c_3}{\nu}}=\frac{\mu}{\nu}+\frac{\left(y-\frac{\mu}{\nu}\right)\left(\frac{c_3}{\nu}-h\right)}{px+qy+\frac{c_3}{\nu}}.$$

Si ponemos $\frac{\lambda}{\nu}=x_0$; $\frac{\mu}{\nu}=y_0$; $\frac{c_3}{\nu}-h=\lambda'$, las fórmulas anteriores se transforman en

$$\frac{x'-x_0}{x-x_0}=\frac{y'-y_0}{y-y_0}=\frac{\lambda'}{px+qy+\frac{c_3}{\nu}},$$

que son de la misma forma que las halladas en el número **93**.

97.—Observemos que poniendo $\frac{a_3}{\lambda}=l$, $\frac{b_3}{\lambda}=m$, $\frac{c_3}{\lambda}=n$, las fórmulas (1'') y (2'') se podrán escribir

$$\frac{x'-x_0}{x-x_0}=\frac{y'-y_0}{y-y_0}=\frac{1}{lx+my+n} \quad (9'');$$

$$\frac{x-x_0}{x'-x_0}=\frac{y-y_0}{y'-y_0}=\frac{\mathrm{K}}{lx+my+n-(\mathrm{K}+1)} \quad (9_1'').$$

El eje de homología tendrá por ecuación

$$lx+my+n-1=0 \quad (10'').$$

98.—Busquemos el punto de la segunda figura que corresponde al punto en el infinito de la primera, determinado por el límite π de la relación $\frac{y}{x}$.

Las fórmulas (9″) dan

$$x' = x_0 + \frac{1 - \frac{x_0}{x}}{l + m\frac{y}{x} + \frac{n}{x}}; \quad y' = y_0 + \frac{\frac{y}{x} - \frac{y_0}{x}}{l + m\frac{y}{x} + \frac{n}{x}};$$

y pasando al límite y designando por x_i', y_i', las coordenadas del punto correspondiente al del infinito

$$x_i' = x_0 + \frac{1}{l + m\pi}; \quad y_i' = y_0 + \frac{\pi}{l + m\pi}.$$

Si entre estas dos ecuaciones eliminamos π, se obtiene

$$lx_i' + my_i' - (lx_0 + my_0 + 1) = 0:$$

esta es la ecuación de la recta homológica de la del infinito del primer plano. Se ve que, como tenía que suceder (**95**), es paralela al eje de la homología. La misma ecuación nos darán directamente las fórmulas ($9_1''$).

Por el mismo procedimiento ó por las fórmulas (9″) directamente, resulta que la recta homológica de la del infinito del segundo plano, tiene por ecuación $lx + my + n = 0$.

99.—La figura 8.ª demuestra claramente que la relación anarmónica de un punto, su homológico, el centro de homología y el punto en que la recta determinada por los tres corta al eje, es constante.

Tratemos de hallar el valor de esa relación anarmónica que llamaremos K: tendremos

$$K = \frac{PO}{P'O} : \frac{PH}{P'H} = \frac{PO}{P'O} : \frac{PM}{PN} = \frac{x - x_0}{x' - x_0} : \frac{lx + my + n - 1}{lx' + my' + n - 1};$$

poniendo en vez de x' é y' sus valores (**97**), resulta

$$K = \frac{x-x_0}{lx+my+n-1}:$$

$$:\frac{x-x_0}{(lx+my+n)\left[l\left(x_0+\frac{x-x_0}{lx+my+n}\right)+m\left(y_0+\frac{y-y_0}{lx+my+n}\right)+n-1\right]}=$$

$$=\frac{(lx+my+n)(lx_0+my_0+n-1)+l(x-x_0)+m(y-y_0)}{lx+my+n-1}=$$

$$=lx_0+my_0+n.$$

Á esta cantidad constante K, cuyo valor es el resultado de sustituir las coordenadas del centro de homología en el denominador común de los valores de x', y' (9''), se da el nombre de *característica* de la transformación.

100.—Las fórmulas (9'') demuestran que el centro y los puntos del eje de la homología son puntos *dobles*.

Averigüemos si existen en esta clase de figuras puntos *conjugados* que no sean dobles: para que así suceda, habrán de verificarse al mismo tiempo las ecuaciones (9'') y las que se obtienen poniendo en ellas x', y', en vez de x, y, y x, y, en vez de x', y': luego los puntos conjugados, si existen, se encontrarán resolviendo las cuatro ecuaciones

$$\frac{x'-x_0}{x-x_0}=\frac{1}{lx+my+n}; \quad \frac{x-x_0}{x'-x_0}=\frac{1}{lx'+my'+n};$$

$$\frac{y'-y_0}{y-y_0}=\frac{1}{lx+my+n}; \quad \frac{y-y_0}{y'-y_0}=\frac{1}{lx'+my'+n};$$

para que las dos primeras se verifiquen simultáneamente, hemos de tener

$$(lx+my+n)(lx'+my'+n)=1;$$

las dos segundas dan la misma condición: luego el sistema anterior es equivalente al

$$\frac{x' - x_0}{x - x_0} = \frac{1}{lx + my + n}; \quad \frac{y' - y_0}{y - y_0} = \frac{1}{lx + my + n};$$

$$(lx + my + n)\,(lx' + my' + n) = 1;$$

poniendo en la última de estas ecuaciones los valores de x', y', sacados de las dos primeras, resulta

$$(lx + my + n)\,(lx_0 + my_0 + n) + l(x - x_0) + m(y - y_0) = 1;$$

ó bien

$$lx(lx_0 + my_0 + n + 1) + my(lx_0 + my_0 + n + 1) +$$
$$+ lx_0(n - 1) + my_0(n - 1) + (n + 1)\,(n - 1) = 0;$$

ó todavía

$$(lx + my + n - 1)\,(lx_0 + my_0 + n + 1) = 0.$$

Para que el primer miembro de la anterior ecuación sea cero, habrá de serlo uno de sus dos factores: si suponemos que lo es el primero, obtenemos la ecuación del eje de homología, cuyos puntos sabemos que son dobles; si suponemos nulo el segundo factor, tendremos una condición independiente de las coordenadas generales, y, por tanto, si se verifica, todos los pares de puntos homólogos serán conjugados. Esa condición equivale á $K = -1$: luego resulta que, en general, dos figuras homológicas no tienen puntos conjugados, á excepción del centro y de los del eje, que son dobles; pero si la característica es igual á -1, todos los pares de puntos homólogos serán conjugados. En este último caso se dice que las figuras homológicas están en *involución*, y es claro que las series de puntos correspondientes situados en las rectas que pasan por el centro lo estarán también.

101.—Estudiemos ahora las condiciones geométricas que determinan dos figuras homológicas.

En las fórmulas (9'') hay cinco cantidades, cuyos valores hemos de conocer para usar de ellas: esas cantidades son x_0, y_0, l, m, n.

Si se nos dan dos puntos que han de ser correspondientes, por los valores numéricos $(x_1 y_1)$ $(x_1' y_1')$ de sus coordenadas, tendremos las dos ecuaciones

$$\frac{x_1' - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1' - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{1}{lx_1 + my_1 + n} \quad (11'');$$

si se nos marcan otros dos puntos $(x_2 y_2)$ $(x_2' y_2')$ como homológicos, habrá de verificarse

$$\frac{x_2' - x_0}{x_2 - x_0} = \frac{y_2' - y_0}{y_2 - y_0} = \frac{1}{lx_2 + my_2 + n} \quad (12''):$$

de las cuatro ecuaciones (11'') y (12'') podremos deducir los valores de x_0, y_0, y de dos de las cantidades l, m, n.

Veamos si pueden todavía fijarse otro par de puntos $(x_3 y_3)$, $(x_3' y_3')$: esto nos daría dos nuevas ecuaciones,

$$\frac{x'_3 - x_0}{x_3 - x_0} = \frac{y_3' - y_0}{y_3 - y_0} = \frac{1}{lx_3 + my_3 + n} \quad (13'');$$

de modo que, conforme se deduce de la definición de figuras homológicas, los tres pares de puntos han de ser tales, que las rectas que los unan concurran en un punto; cumpliéndose esta condición, las ecuaciones (11''), (12'') y (13'') se reducen á *cinco*, que nos permitirán deducir x_0, y_0, l, m, n, quedando así determinadas las fórmulas de transformación.

102.—Si se nos dan dos rectas

$$r_1 x + s_1 y + t_1 = 0 \quad (14''),$$
$$r_1' x' + s_1' y' + t_1' = 0 \quad (15''),$$

con la condición de que han de ser homológicas, identificando (15″) con la ecuación (**95**) de la recta correspondiente á (14″), resultará

$$\frac{Kr_1 - (r_1 x_0 + s_1 y_0 + t_1) l}{r_1'} = \frac{Ks_1 - (r_1 x_0 + s_1 y_0 + t_1) m}{s_1'} =$$
$$= \frac{Kt_1 - (r_1 x_0 + s_1 y_0 + t_1)(n-1)}{t_1'},$$

ó sean dos ecuaciones entre las cantidades que buscamos.

Conociendo otro par de rectas, tendríamos otras dos ecuaciones, y aun así no será determinado el problema.

A priori sabemos que no se podrán fijar arbitrariamente tres pares de rectas correspondientes, sino que ha de satisfacerse la condición de que los puntos en que se corten las correspondientes estén en línea recta, y esto mismo nos dicen las fórmulas: en efecto, sean los tres pares de rectas

$$\left.\begin{matrix} r_1 x + s_1 y + t_1 = 0 \\ r_1' x' + s_1' y' + t_1' = 0 \end{matrix}\right\} (A), \quad \left.\begin{matrix} r_2 x + s_2 y + t_2 = 0 \\ r_2' x' + s_2' y' + t_2' = 0 \end{matrix}\right\} (B),$$
$$\left.\begin{matrix} r_3 x + s_3 y + t_3 = 0 \\ r_3' x + s_3' y + t_3' = 0 \end{matrix}\right\} (C);$$

designando por h_1, h_2, h_3, los trinomios $r_1 x_0 + s_1 y_0, + t_1$, $r_2 x_0 + s_2 y_0 + t_2$, $r_3 x_0 + s_3 y_0 + t_3$, las condiciones impuestas se expresarán algebraicamente por

$$\frac{Kr_1 - h_1 l}{r_1'} = \frac{Ks_1 - h_1 m}{s_1'} = \frac{Kt_1 - h_1 (n-1)}{t_1'} \quad (16''),$$

$$\frac{Kr_2 - h_2 l}{r_2'} = \frac{Ks_2 - h_2 m}{s_2'} = \frac{Kt_2 - h_2(n-1)}{t_2'} \quad (17''),$$

$$\frac{Kr_3 - h_3 l}{r_3'} = \frac{Ks_3 - h_3 m}{s_3'} = \frac{Kt_3 - h_3(n-1)}{t_3'} \quad (18'').$$

Estas seis ecuaciones con cinco incógnitas (x_0, y_0, l, m, n), tendrán una condición de compatibilidad que se obtiene fácilmente: llamando λ_1, λ_2, λ_3, los valores de las fracciones (16''), (17'') y (18''), y escribiendo esas ecuaciones de este modo

$$\left.\begin{aligned} r_1K - lh_1 &= \lambda_1 r_1' \\ s_1K - mh_1 &= \lambda_1 s_1' \\ t_1K - (n-1)h_1 &= \lambda_1 t_1' \end{aligned}\right\} (19''), \quad \left.\begin{aligned} r_2K - lh_2 &= \lambda_2 r_2' \\ s_2K - mh_2 &= \lambda_2 s_2' \\ t_2K - (n-1)h_2 &= \lambda_2 t_2' \end{aligned}\right\} (20''),$$

$$\left.\begin{aligned} r_3K - lh_3 &= \lambda_3 r_3' \\ s_3K - mh_3 &= \lambda_3 s_3' \\ t_3K - (n-1)h_3 &= \lambda_3 t_3' \end{aligned}\right\} (21'');$$

considerando en (19'') como incógnitas á K y h_1, en (20'') á K y h_2, y en (21'') á K y h_3, resulta

$$\begin{vmatrix} r_1 & l & r_1' \\ s_1 & m & s_1' \\ t_1 & n-1 & t_1' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} r_2 & l & r_2' \\ s_2 & m & s_2' \\ t_2 & n-1 & t_2' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} r_3 & l & r_3' \\ s_3 & m & s_3' \\ t_3 & n-1 & t_3' \end{vmatrix} = 0;$$

pero estas ecuaciones son homogéneas y de primer grado respecto á l, m, $n-1$: luego todavía habrá otra condición, que es la de compatibilidad de (16''), (17'') y (18''). Se ve inmediatamente que la primera de las tres ecuaciones últimas expresa que la recta $lX + mY + (n-1) = 0$, concurre con las (A); la segunda, que la misma recta concurre con las (B); y la tercera, que lo propio sucede con las (C).

103.—Resulta, pues, que son condiciones bastantes para determinar dos figuras homológicas, marcar tres pares de puntos ó tres pares de rectas correspondientes, con la condición de que las rectas que unan los puntos homológicos sean concurrentes, ó de que los puntos de intersección de las rectas homológicas estén en una recta.

De igual modo que al tratar de las figuras homográficas se demuestra que los tres puntos de cada una de las figuras no deben estar en línea recta, ni las tres rectas ser concurrentes, para que el problema sea determinado.

Si se nos dieran como datos dos pares de puntos y uno de rectas, ó uno de puntos y dos de rectas, el problema es imposible en general. Supongamos (fig. 9.ª) que los pares de puntos sean (**A**, **A'**), (**B**, **B'**) y las rectas (**L**, **L'**): el centro de homología será **O** y el eje PQ; al punto C corresponderá el C': luego las rectas $\overline{\mathrm{CA}}$ y $\overline{\mathrm{C'A'}}$ deberán concurrir en Q, lo que no ocurrirá si se toman los datos arbitrariamente. Lo mismo razonaríamos si se nos dieran dos pares de rectas y uno de puntos.

101.—Supongamos ahora que los datos son el centro $(x_0 y_0)$ y el eje de homología $(a\mathrm{X} + b\mathrm{Y} + c = 0)$; observemos que la ecuación del eje se obtiene (**97**) igualando á cero el denominador de los valores (9'') de x' é y', después de restarle una unidad: luego añadiendo *uno* al primer miembro de la ecuación del eje, tendremos ese denominador; ahora bien: la ecuación del eje no se altera porque la multipliquemos por un número cualquiera h, de modo que las fórmulas de transformación con los datos supuestos serán

$$\frac{x' - x_0}{x - x_0} = \frac{y' - y_0}{y - y_0} = \frac{1}{h(ax + by + c) + 1}.$$

Queda todavía en estas fórmulas una indeterminada h, cuyo valor se deduce agregando la condición de que dos puntos ó dos rectas sean homológicos, ó, lo que es más común, dando la cantidad que hemos llamado *característica*, conocida la cual, h se deducirá de la ecuación

$$h(ax_0 + by_0 + c) + 1 = K.$$

105.—*Caso particular*.—Si en las fórmulas (9″) suponemos l y m iguales á cero, entonces la ecuación del eje de homología es $n - 1 = 0$, y, por tanto, está en el infinito. Por las fórmulas de transformación ó geométricamente se deduce que en este caso las figuras son *homotéticas*, y la característica es la razón de homotecia.

Otros casos particulares se pueden considerar, y no lo hacemos por no alargar demasiado estos apuntes, y además porque es sencillísimo deducir las propiedades que entonces se verifican. Son esos casos particulares: primero, que el centro sea un punto en el infinito (las figuras se llaman *afines*); segundo, que la característica valga cero, infinito, $+1$ ó -1; de este último caso ya nos hemos ocupado (**100**).

§ II

106.—Vamos ahora, sin entrar en muchos detalles, á establecer las fórmulas de transformación homológica en el sistema trilineal de coordenadas.

Para obtener dos figuras homográficas superpuestas refiriéndolas á un mismo triángulo, designando como de costumbre por (A, B, C) las coordenadas de un punto de la 1.ª figura, y por (A′, B′, C′) las de uno de la segunda, se emplean las fórmulas

$$\frac{A'}{l_1A + m_1B + n_1C} = \frac{B'}{l_2A + m_2B + n_2C} = \frac{C'}{l_3A + m_3B + n_3C}.$$

Si los puntos correspondientes están en línea recta con uno determinado (A_0, B_0, C_0), habrá de verificarse

$$\begin{vmatrix} A' & B' & C' \\ A & B & C \\ A_0 & B_0 & C_0 \end{vmatrix} = 0,$$

ó lo que es igual

$$\begin{vmatrix} l_1A + m_1B + n_1C; & l_2A + m_2B + n_2C; & l_3A + m_3B + n_3C \\ A \quad ; & B \quad ; & C \\ A_0 \quad ; & B_0 \quad ; & C_0 \end{vmatrix} = 0;$$

y esto cualesquiera que sean los valores de A, B y C.

Pero la anterior determinante es de la misma forma que la del número **96**; de modo que podemos aprovechar aquellos cálculos sin más que el cambio de letras: por este medio deduciremos que para que las figuras sean homológicas, se ha de tener

$$l_2 = \lambda B_0;\quad l_3 = \lambda C_0;\quad m_1 = \mu A_0;\quad m_3 = \mu C_0;$$
$$n_1 = \nu A_0;\quad n_2 = \nu B_0;$$
$$l_1 = n_3 + \lambda A_0 - \nu C_0;\quad m_2 = n_3 + \mu B_0 - \nu C_0;$$

y, por tanto, las fórmulas de transformación homológica serán

$$\frac{A'}{(n_3 + \lambda A_0 - \nu C_0)A + \mu A_0 B + \nu A_0 C} =$$
$$= \frac{B'}{\lambda B_0 A + (n_3 + \mu B_0 - \nu C_0)B + \nu B_0 C} = \frac{C'}{\lambda C_0 A + \mu C_0 B + n_3 C},$$

que escribiremos

$$\frac{A'}{(n_3 - \nu C_0)A + (\lambda A + \mu B + \nu C)A_0} =$$
$$= \frac{B'}{(n_3 - \nu C_0)B + (\lambda A + \mu B + \nu C)B_0} = \frac{C'}{\lambda C_0 A + \mu C_0 B + n_3 C},$$

ó designando por L el trinomio $\lambda A + \mu B + \nu C$,

$$\frac{A'}{LA_0 + (n_3 - \nu C_0)A} = \frac{B'}{LB_0 + (n_3 - \nu C_0)B} =$$
$$= \frac{C'}{LC_0 + (n_3 - \nu C_0)C}.$$

Como podemos dividir los denominadores por $n_3 - \nu C_0$, representando por L un nuevo trinomio, el cociente de L por $(n_3 - \nu C_0)$, llegaremos á la forma más sencilla

$$\frac{A'}{L_1 A_0 + A} = \frac{B'}{L_1 B_0 + B} = \frac{C'}{L_1 C_0 + C};$$

pero por las propiedades de las razones iguales, las que acabamos de escribir lo son á

$$\frac{-aA' - bB' - cC'}{-a(L_1A_0 + A) - b(L_1B_0 + B) + c(L_1C_0 + C)} =$$

$$= \frac{2S}{2S(L_1 + 1)} = \frac{1}{L_1 + 1}.$$

Luego, en resumen, las fórmulas que buscábamos son

$$A' = \frac{A + L_1A_0}{1 + L_1}; \quad B' = \frac{B + L_1B_0}{1 + L_1}; \quad C' + \frac{C + L_1C_0}{1 + L_1}.$$

107.—La ecuación del eje de homología es $L_1 = 0$. La característica es el número que resulta de sustituir en $L_1 + 1$ las coordenadas A_0, B_0, C_0 del centro.

FIN

ÍNDICE

Páginas.

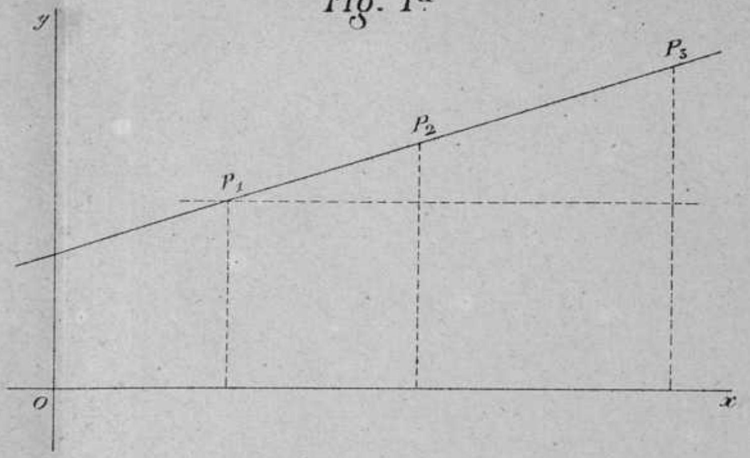

Fig. 1ª

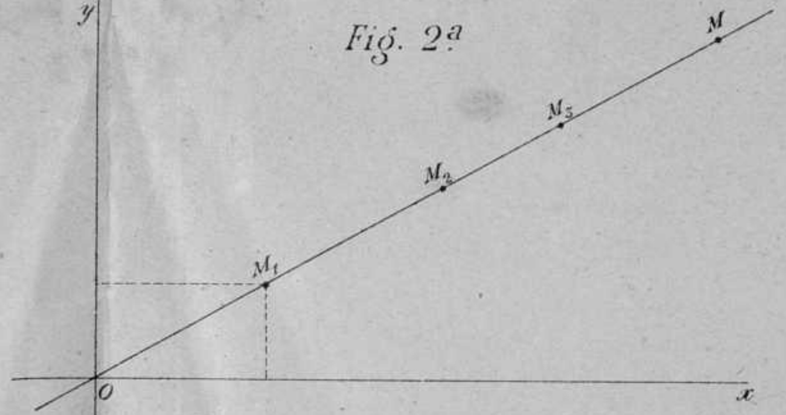

Fig. 2ª

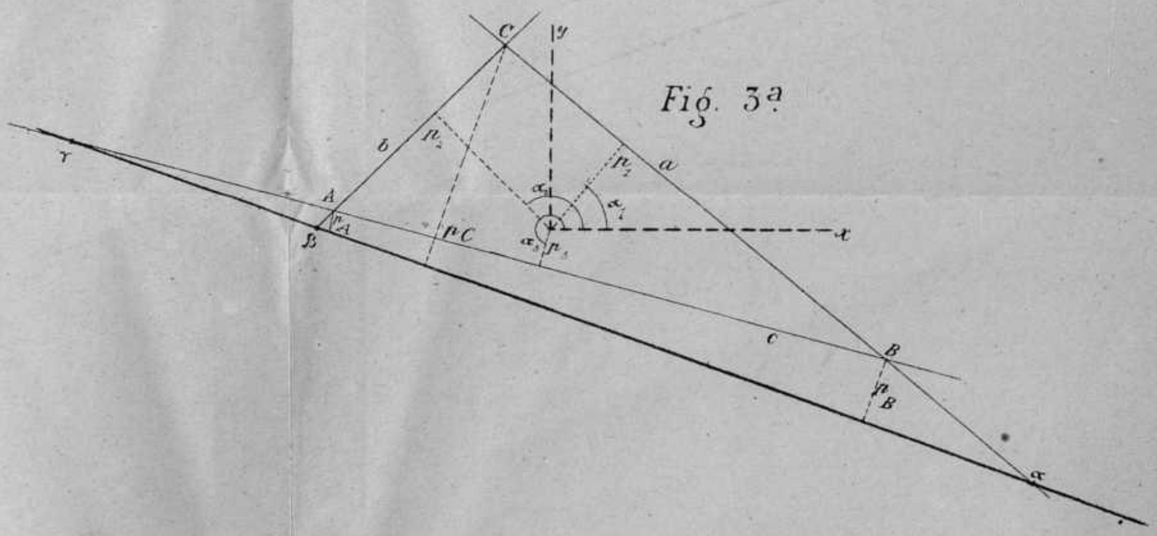

Fig. 3ª

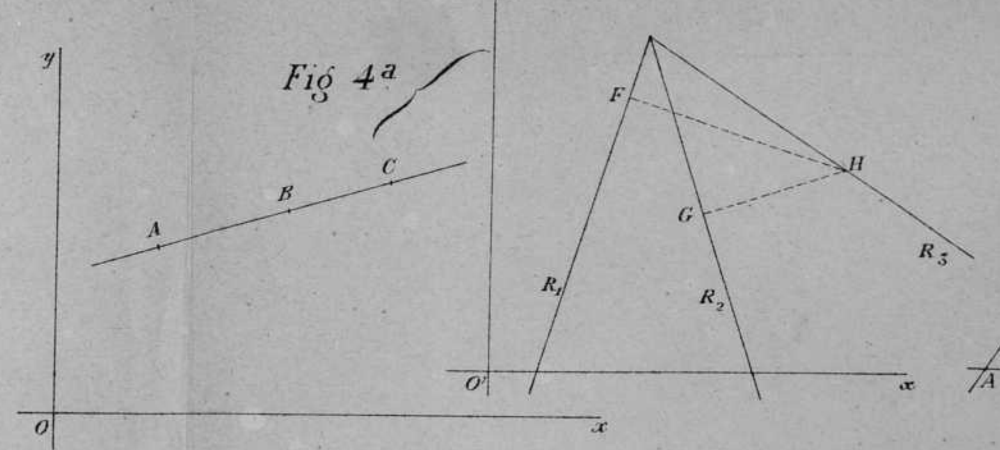

Fig. 4ª

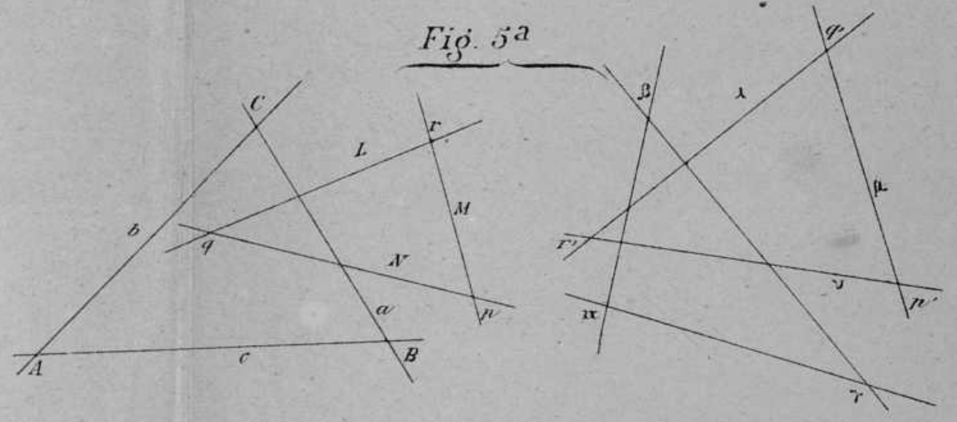

Fig. 5ª

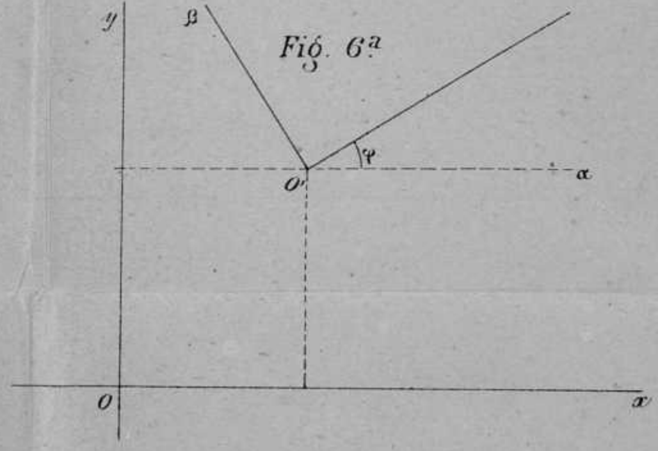

Fig. 6ª

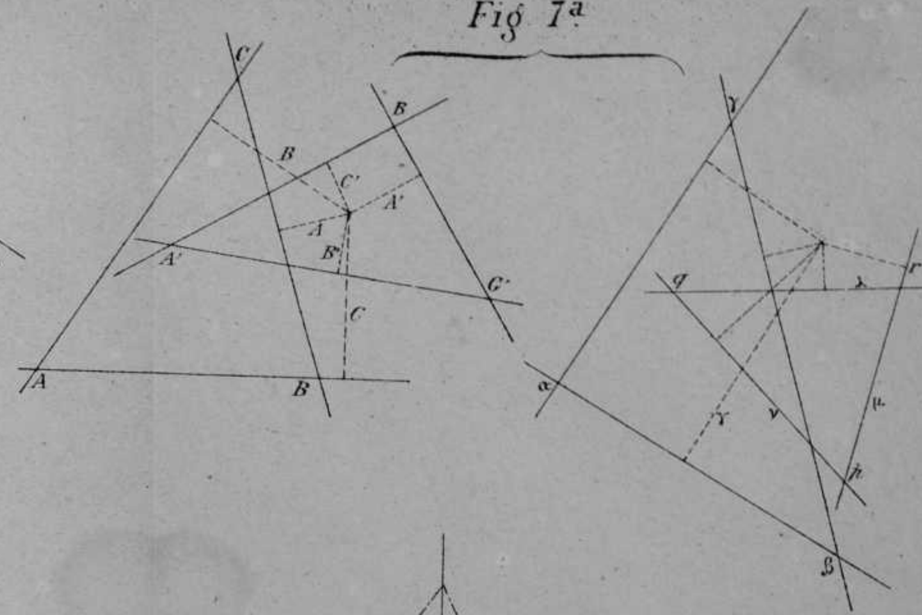

Fig. 7ª

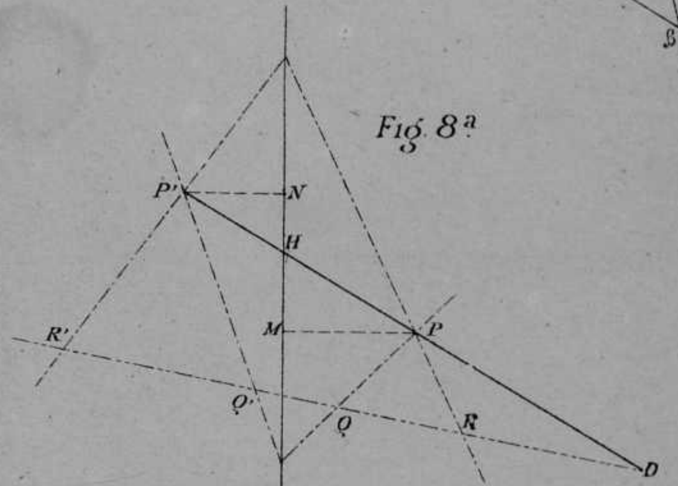

Fig. 8ª

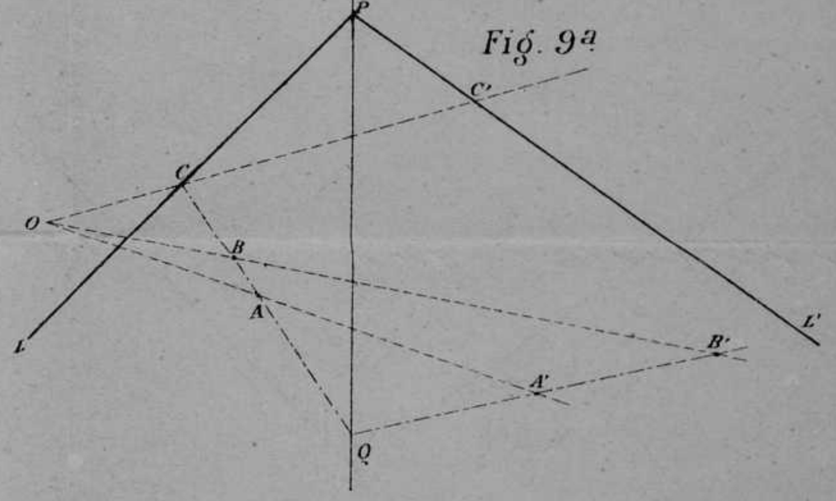

Fig. 9ª