9203

SUPLEMENTO

AL

BOLETIN-REVISTA

DE LA

SOCIEDAD ECONOMICA

DE AMIGOS DEL PAIS

DE LEON.

LEON.—1880.

IMPRENTA DE LA DIPUTACION PROVINCIAL.

NOCIONES
DE GEOMETRIA
APLICADA Á LAS ARTES

PARA USO
DE LOS ALUMNOS QUE CONCURREN Á LA CLASE
ESTABLECIDA POR LA

SOCIEDAD ECONOMICA DE AMIGOS DEL PAIS
DE LEON,

É IMPRESA Á SUS EXPENSAS,

POR

D. JUAN PUYOL Y MARIN.

SOCIEDAD ECONOMICA DE AMIGOS DEL PAIS LEON

LEON.—1880.
IMPRENTA DE LA DIPUTACION PROVINCIAL.

Á LA SOCIEDAD ECONÓMICA

DE AMIGOS DEL PAÍS DE LEON.

DESEANDO contribuir con cuanto puedo á los nobles propósitos de esa Sociedad Económica, he escrito unas lecciones de *Geometría aplicada á las Artes y Oficios,* con el objeto de que puedan servir á los alumnos que se dedican á adquirir estos conocimientos en la clase que para esta enseñanza tiene establecida; y consagrado este modesto trabajo al indicado fin, á nadie mejor puedo dedicarlo que á la ilustrada Corporacion que con solícito esmero se desvela por difundir la instruccion entre las clases ménos acomodadas.

No espere la Sociedad encontrar en estas lecciones un libro de mérito, pues el único que podria tener seria el objeto á que se dedica, y este aparece bien pequeño si se compara con los trabajos que, encaminados al mismo fin, lleva diariamente á cabo esa Sociedad.

Ruego, pues, á mis dignos consocios se sirvan aceptar esta pequeña muestra de aprecio hácia una Institucion que, desde que se fundó en el pasado siglo, no ha pensado en otra cosa que en proporcionar al País todo el bien que ha podido dentro de su esfera de accion.

Juan Puyol y Marin.

Leon 30 de Agosto de 1880

Introduccion.

Una de las primeras dificultades con que tropieza el profesor encargado de esplicar la *Geometría aplicada á las Artes y Oficios*, es la falta de conocimientos preliminares de los alumnos; y en vano se empeñaría en demostraciones científicas que pongan en claro sus esplicaciones, si aquellos no están en disposicion de comprenderlas ni pueden estudiar privadamente los conocimientos prácticos que les dá en cada leccion. Esta verdad, que se hace evidente en casi todas las escuelas de Artes y Oficios, se ha notado tambien en la que la Sociedad Económica de Amigos del País de Leon tiene establecida para enseñar la Geometría aplicada á las Artes, á la cual concurren muchos alumnos que por su falta de recursos se hallan dispensados de pago de matrícula, con lo cual dicha Sociedad, haciendo un gran servicio al País, realiza uno de los fines, acaso el de mayor importancia, á que debe responder esa Institucion: aquella circunstancia impide á los alumnos pobres, no solo la adquisicion de un libro, sino utilizar cualquiera de los que tratan de la Geometría, pues encierran doctrina demasiado extensa y por demás científica, para que, no habiendo recibido instruccion preparatoria, puedan sacar provecho de su lectura.

El estudio, como todo, necesita su práctica, y si á un niño que á él se dedica le es fácil adquirirla, no sucede lo mismo á un adulto que, no habiendo asistido á otras áulas que á las escuelas de instruccion primaria, ha olvidado mucho de lo que allí aprendió, y muy principalmente el hábito de estudiar; de aquí la necesidad de un libro dedicado á estas clases y por lo tanto despojado de todo tecnicismo que no sea completamente indispensable, en el que se presenten todas las esplicaciones con la mayor claridad posible, alejándolas de todo cálculo que pueda ser superior á la preparacion del alumno, pero sin dejar por eso de presentar todas las cuestiones necesarias para adquirir los conocimientos geométricos que tanta falta hacen á todo artesano, y para que estos puedan sacar provechosa utilidad de su estudio.

El objeto, pues, de las presentes lecciones es facilitar el estudio de la Geometría aplicada á las Artes á los alumnos que concurren á la Sociedad Económica de Amigos del País de Leon, y ofrecer el cuaderno que forman á un módico precio, al alcance de los que por sus escasos recursos no pueden adquirir otros tratados mas extensos, que por las razones apuntadas tampoco les serian de provecho.

Divídese este en cinco capítulos, y estos en lecciones; aquellos comprenden los conocimientos prácticos de la Geometría plana y del espacio; y la extension de cada leccion es la que por punto general podrá dar el profesor á la de cada dia; y va acompañado de un apéndice en el que se dan ligeras nociones del sistema métrico-decimal por creerlo de necesidad absoluta.

La mayor parte de los casos que requieren ser tratados en teoremas, se explican con problemas, por juzgar más práctico este sistema, y por decirlo así, como el complemento de lo que el profesor enseñe, y el objeto á que deba tender el alumno en el estudio de cada leccion. Por otra parte, si nos dedicáramos á dar demostraciones científicas, no solo nos separaríamos del objeto de nuestro trabajo, sino que cualquiera tratado de Geometría de los que hay publicados servirian con ventaja al fin que se dedica, pero la práctica enseña que no son estos tratados los que pueden emplearse en esta clase de escuelas.

Tal es el propósito que nos mueve á escribir estas lecciones, y si con este trabajo se presta algun servicio á las honradas y laboriosas clases de la Sociedad á quienes se destina, quedarán completamente satisfechas las aspiraciones de

EL AUTOR.

GEOMETRIA

APLICADA A LAS ARTES Y OFICIOS.

Preliminares.

1.° Se llama *Geometría* á la parte de las Matemáticas que tiene por objeto estudiar la extension y resolver sus problemas.

Se llama *extension* á la magnitud de un cuerpo.

2. *Cuerpo*, es todo aquello que ocupa un lugar en el espacio, y deben considerarse en él tres cosas: longitud, latitud y grueso ó espesor. Una de ellas compone la línea; dos, la superficie; y las tres el volúmen: de aquí que la Geometría pueda ser dividida en dos partes; de *dos* y de *tres dimensiones*.

3. La primera parte se ocupa de las líneas y de las superficies, y se llama *Geometría plana*; la segunda trata de los volúmenes, y es la *Geometría del espacio*.

4. Componiéndose el volúmen de las tres dimensiones longitud, latitud y espesor, puede admitirse que una de ellas, el espesor por ejemplo, vaya disminuyendo hasta dejar de existir quedando solo la longitud y la latitud y se habrá convertido en superficie. *Superficie*, pues, será *el límite de los cuerpos*. Si ahora concebimos que una de las dimensiones de la superficie va reduciéndose hasta desaparecer, la latitud por ejemplo, quedará solo la longitud, y esta será la línea que podremos definirla diciendo que *línea es el límite de la superficie*. Todavía podemos imaginarnos que la línea, ó sea la dimension llamada longitud, va acortándose hasta desaparecer y este será *el límite de la línea*, llamado *punto matemático;* ó sea la carencia de las tres dimensiones, que se expresa trazando una cruz y el cruzamiento de sus líneas es el punto.

La Geometría, pues, considera los cuerpos bajo estos puntos de vista y por lo tanto estudia en ellos la figura y extension ó volúmen.

Bajo la denominacion de *figura* se comprenden las líneas, las superficies y los volúmenes.

PARTE PRIMERA.

CAPÍTULO I.

GEOMETRÍA PLANA.

Líneas y ángulos.

LECCION 1.ª

5. La línea se divide en *recta, curva, quebrada* y *mixta.*

Línea recta es aquella que todos sus puntos se encuentran en una misma direccion; y se llama distancia entre dos puntos, á la recta que los une; resultando que la expresion de la distancia más corta entre dos puntos, será la línea recta. *(Figura 1.ª)*

Línea curva es la que no tiene ninguna parte de ella en línea recta, ó la que ninguno de sus puntos se halla en la misma direccion que los demás que la componen. *(Fig. 2.ª)*

Línea quebrada es la que se compone de dos ó más rectas. *(Fig. 3.ª)*

Línea mixta es la formada por rectas y por curvas. *(Fig. 4.ª)*

6. Segun estas definiciones resulta: 1.° Que dos rectas que tengan dos puntos comunes serán una misma recta, pues hallándose todos en la misma direccion al coincidir dos, coincidirán todos los demás, y las dos rectas se confundirán en una sola. 2.° Dos rectas no podrán cortarse más que en un solo punto, ó no tendrán más que un solo punto de contacto, ó comun á las dos, pues si pudieran cortarse en dos, resultarian dos rectas con dos ó más puntos comunes, lo cual no puede ser. 3.° Que dos puntos determinan la posicion de una recta, pues que todos los demás se hallan en la misma direccion que ellos.

7. Regla es un liston de madera, laton, etc., cuyas dimensiones varian segun el objeto á que se destina; la que se usa en el dibujo para trazar líneas rectas debe estar limitada en sus dos cantos, ó al ménos en uno por una línea recta, por la que se hace resbalar el lápiz que deja en el papel la direccion del canto de la regla; si dicho canto no fuera una línea recta, la huella que el lápiz dejára tampoco lo sería; de aquí la necesidad de asegurarse de su exactitud antes de usarla.

Varios medios habria para ello, como comprobarla con otra de cuya exactitud se tuviera certidumbre, haciendo coincidir sus cantos; aplicar al de la regla que se quiere comprobar una hebra de hilo fino perfectamente tendido, y ver en uno y en otro caso si ambas líneas coincidían en toda su extension; pero la manera de comprobarla por sí misma, es trazar con ella una línea en el papel, invertir despues la posicion de la regla, y si coincide con toda ella será prueba de que la línea trazada es una recta, no siéndolo en caso contrario.

8.° La superficie se divide tambien en plana, curva, quebrada y mixta.

Llámase plana la superficie, ó simplemente *un plano*, cuando colocada una recta sobre ella, y en cualquiera posicion, todos sus puntos se hallan en contacto con aquella: curva, cuando ninguna parte de ella es superficie plana: quebrada lo será si se compone de dos ó más superficies planas, y mixta, si está compuesta de superficies planas y curvas.

9. Se comprobará si una superficie es plana, por medio de una regla cuyo canto esté en línea recta, colocando este sobre ella en varias posiciones y observando si en todas coincide exactamente con la superficie.

10. La Geometría plana al estudiar las líneas, las considera todas trazadas en una superficie plana ó en un plano.

LECCION 2.ª

11. Se dá el nombre de *circunferencia* á una curva cerrada trazada en un plano cuyos puntos se hallan todos á igual distancia de otro *O* situado en el mismo plano, y que se llama centro, *(Fig.* 5*)*. *Círculo* es el espacio ó porcion de superficie encerrada por una circunferencia.

Las líneas que se consideran en el círculo son: el radio, el diámetro, la cuerda y el arco.

12. *Radio* es una línea recta *O. A.* que une el centro con un punto de la circunferencia, y siendo igual la distancia que hay desde aquel á cualquiera punto de esta, todas las rectas que desde el punto *O.* se tracen hasta la circunferencia serán iguales, y por lo tanto, *los radios de una circunferencia son iguales.*

13. *Diámetro* es la línea recta que une dos puntos de la circunferencia y pasa por el centro. *B. D.* es un diámetro, y como se compone de las rectas *BO* y *DO* que son dos radios, el diámetro es igual á dos radios, y por lo tanto todos los diámetros serán iguales en una misma circunferencia.

Si doblamos la figura por el diámetro *B. D.* todos los puntos de la parte *B. C. D.* de la circunferencia coincidirán con los de la otra parte opuesta. y esto demuestra que el diámetro divide á la circunferencia y al círculo en dos partes iguales que se llaman *semicircunferencias* y *semicírculos*.

14. *Cuerda* es una recta que une dos puntos de la circunferencia sin pasar por el centro, y la divide en dos partes desiguales; tal es la *A. D.*

15. *Arco* es la parte de circunferencia que abraza una cuerda ó sea el *A. C. D.*: se dice que la cuerda *A. D.* subtiende el arco, y aun cuando lo mismo puede referirse al arco *A. C. D.* que el *A.B.D.* se entenderá que lo es solo del arco menor. Arco es, en general una parte de la circunferencia.

16. Dos circunferencias que tengan radios iguales lo serán tambien y recíprocamente.

17. La circunferencia se considera dividida en 360 partes iguales que se llaman grados, cada una de estos en 60 que se llaman minutos y cada uno de estos en otras 60 partes que se llaman segundos y se escriben 1°, un grado, 1' un minuto, 1'' segundo.

18. Para trazar una circunferencia se emplea el compás, apoyando en el centro una de sus puntas y haciendo girar la

otra alrededor; la abertura del compás ó sea la distancia entre sus dos puntas será igual al radio que deba tener la circunferencia que se va á trazar.

En el dibujo se usan varias clases de compases que se aplican á diferentes usos: con puntas fijas; con puntas movibles que se reemplazan con otras para trazar líneas de lápiz ó con tinta; compases de aproximacion cuyas puntas se cierran ó se abren por medio de un tornillo para acercarlas con toda exactitud á los puntos que se desea; compás de varas que consiste en dos piezas que se unen con tornillos á una regla para trazar circunferencias de más diámetro de lo que los compases esplicados permiten, compases de gruesos y de reduccion, de los que nos ocuparemos en otro lugar.

LECCION 3.ª

19. Las posiciones que pueden tener dos rectas situadas ámbas en un mismo plano, son dos; paralelas y convergentes.

Serán paralelas dos líneas, cuando todos los puntos de una de ellas equidisten de los puntos de la otra, ó bien cuando estas no se encuentren nunca por mucho que se prolonguen; tales son los dos carriles de una vía-férrea; y convergentes cuando se corten ó encuentren estas líneas ó sus prolongaciones.

20. Las líneas convergentes pueden ser entre sí perpendiculares y oblícuas; será perpendicular una línea á otra si al caer sobre ella no se inclina más á un lado que á otro, tal es la *C D* (*Fig.* 6.ª) respecto de la *A B* y oblícua cuando se incline á un lado como la *E D*

Será pues perpendicular la línea *C D* si doblando la figura 6 por dicha línea coinciden exactamente la parte de línea *D A* con la *D B* y oblícua si no coincidiera. El punto *D* comun á ambas líneas se llama pié de la perpendicular.

21. *Escuadra* es una plantilla de madera, ó de metal que tiene la forma que indica la *Fig.* 7 y cuya línea ó canto *A B* es perpendicular al *B C.*

Para trazar una perpendicular se emplea la escuadra ó el compás; con la primera, se colocará sobre la linea en que ha de trazarse, el canto *B C* haciendo que coincida con ella en toda su longitud, y pasando un lápiz sobre el papel y apoyado en el canto *A B*, la traza que deje será perpendicular á la primera.

Pueden ocurrir dos casos: 1.° Levantar una perpendicular á una línea sin determinar el punto en que ha de trazarse. 2.° Determinando el punto: este caso á su vez se subdivide en tres; trazarla desde un punto de la recta, en el extremo de una recta y desde un punto fuera de la recta.

Con la escuadra se consigue siempre como lo dejamos indicado: veamos con el compás.

Problema 1.° *Trazar una línea perpendicular á otra.* Sea *A B* (*Fig.* 8) la línea sobre que vamos á trazar la perpendicular; si se fija la punta del compás en el punto *A* y haciendo centro en él con cualquier radio se trazan los arcos *a b* y *c d* y con la misma abertura trazamos desde el punto *B.* los *c f* y *g h*, los puntos *o* y *o'* pertenecen á la perpendicular pedida, y como dos puntos determinan la posicion de una recta (6) bastará unirlos para obtener la línea *o o'* que será perpendicular á la *A B*.

Si ahora dobláramos la figura por la línea *o o'* el punto *B* caería precisamente encima del *A* luego habremos dividido la línea *A B* en dos partes iguales, *A D* y *D B*

PROBLEMA 2.° *Desde un punto de una recta levantar una perpendicular.* Sea una recta *A B (Fig. 9.)* y *C* el punto donde haya de trazarse la perpendicular: haciendo centro en *C*, trácese con una abertura de compás cualquiera los arcos *a* y *b*; desde *a* descríbase el *c d* y desde *b* el *e f*; el punto de interseccion *o* se unirá con el *C*. y resultará ser la perpendicular pedida.

PROBLEMA 3.° *Trazar una perpendicular desde el extremo de una recta.* Sea *B* el punto de la recta *A B (Fig. 10)*: haciendo centro en *B* se trazará el arco de círculo *a b*; desde *a* y con el mismo radio se trazará el arco *c d* desde el punto de interseccion *o* se describe el *e f* tambien con igual radio: uniendo los puntos *a o* y prolongando la línea hasta que corte el arco *e f* en *g*, se trazará la recta *g B* que será la perpendicular que se pide.

PROBLEMA 4.° *Desde un punto fuera de una recta, bajar una perpendicular.* Sean *A B* la línea y *C* el punto *(Fig. 11)*: Hágase centro en *C* y trácese un arco que corte la línea en *a* y en *b*; divídase la línea *a b* en dos partes iguales segun el problema 1.° y el punto *D* será el pié de la perpendicular que quedará determinada por la línea *C D*.

22. *Comprobacion de la escuadra.* Para asegurarse de que una escuadra tiene uno de sus lados perpendicular al otro, bastará trazar dos líneas que sean perpendiculares entre sí, aplicar á ellas la escuadra y ver si coinciden los lados de esta con aquellas.

Si se quiere comprobar con la escuadra misma, se trazará una línea recta *A B* (*Fig.* 12) y puesta en la posicion *E C D* se hará coincidir con ella un lado *E C* por ejemplo; se trazará por el *C D* una línea y se cambiará de posicion haciéndola tomar la *E' C D'* de modo que el lado *C E'* coincida con la línea *A B* y con el pié *C* de la línea trazada: si el lado *C D'* coincide con dicha línea, será prueba de que los lados de la escuadra son perpendiculares entre sí y si resultan separados el punto *D* y el *D'* como indica la figura, no lo serán: El punto donde en este caso va á parar la perpendicular que pase por *C* será en la mitad de la distancia *D D'*.

LECCION 4.ª

23. *Angulo* se llama á la abertura que hay entre dos líneas convergentes *A B* y *A C* (*Fig.* 13=1.ª) que se unen en un punto *A*: este se llama *vértice* y las líneas *lados*.

Los ángulos son de diferentes clases: segun sus lados se dividen en *rectilíneos*, cuando están formados por líneas rectas; *curvilíneos*, cuando los forman líneas curvas, y *mistilíneos* cuando lo están por una recta y una curva: tales son los que se indican en la figura con los números 1.º, 2.º y 3.º. Segun la abertura que tienen sus lados, se dividen en *rectos, agudos* y *obtusos*: será recto un ángulo cuando uno de sus lados sea perpendicular al otro y medirá 90 grados (17); será agudo cuando no siendo sus lados perpendiculares, mida su abertura ménos de 90.º, y obtuso cuando mida más de 90.º Los números 4.º, 1.º y 5.º de la figura, corresponden respectivamente á estas tres clases de ángulos.

24. La mayor ó menor longitud de los

lados de un ángulo no influye en su valor, pues que se miden por el número de grados que aquellos abrazan en una circunferencia trazada con cualquier radio desde su vértice. En efecto, si haciendo centro en *o*. (*Fig.* 14) trazamos tres circunferencias con distintos radios y hacemos pasar una línea *d c* por el centro, esta será el diámetro de la mayor, como *d' c'* y *d'' c''* lo serán de las otras dos, y por lo tanto quedarán divididas las circunferencias en dos partes iguales (13) cada una de las cuales contendrá 180°: si ahora levantamos una perpendicular á la *c d* desde *o*, tendremos otro diámetro que á su vez las divide en otras dos partes iguales, y como por ser perpendicular no se inclina más á un lado que á otro del primer diámetro, los arcos *a d* y *a c* serán iguales; y lo serán tambien los *c b* y *d b* sucediendo lo mismo con los de las otras circunferencias, y por lo tanto, todos ocuparán la mitad de la extension de la semicircunferencia ó sean 90.° El ángulo formado por las líneas *o a* y *o c* medirá, pues, 90° y como consecuencia será recto, y ocupando los arcos *a' c'* y *a'' c''* 90 partes ó grados de sus respectivas circunferencias resultará que el ángulo formado por las líneas *a o* y *o c*, es el mismo que los formados por *a' o* y *o c'* y por *a'' o* y *o c''* cuyos lados son de diferente longitud.

25. Se llama *complemento* de un ángulo, lo que le falta para valer 90° ó un recto, así el ángulo *C D E (Fig.* 6) es complemento del *E D B* y recíprocamente, éste lo será de aquel: estos ángulos se llaman *complementarios.*

Se llama *suplemento* de un ángulo, lo que le falta para valer dos rectos: el *E D B* es suplemento del *E D A* y este lo es de aquel; diciéndose que estos ángulos son *suplementarios.*

26. Una línea al caer sobre otra forma con ella dos ángulos suplementarios; desiguales si la línea es oblícua, é iguales si es perpendicular: en este caso serán rectos los dos ángulos, y en ambos casos la suma de los dos será igual á dos rectos. Estos dos ángulos se llaman *adyacentes.*

Si prolongamos la línea *E D (Fig.* 6) hasta *F* formará cuatro ángulos dos á un lado de la línea *A B* y dos al otro, y como unos y otros valdrán respectivamente dos rectos, resulta que una recta que corta á otra forma cuatro ángulos rectos y que todas las líneas que cruzáran la *A B* por el punto *D*, formarian varios ángulos que todos juntos valdrian cuatro rectos.

27. Se dice que dos ángulos son opuestos por el vértice cuando el uno está formado por la prolongacion de los lados del otro, como lo están los *E D B*

y *A D F* (*Fig*. 6). Estos ángulos son iguales y son tambien los *A D E* y *F D B* por igual razon, pues que los ángulos que tienen suplementos iguales, son iguales, como lo son tambien los que abrazan arcos iguales de una circunferencia; y en ambos casos se hallan los *ángulos* opuestos por el vértice.

Para enunciar los ángulos se leen las tres letras colocando en el centro la del vértice: tambien se enuncian leyendo solo esta última.

PROBLEMA 5.° *Construir un ángulo igual á otro*. Sea *a* (*Fig*. 15) el ángulo dado: sobre una línea recta *A B* y haciendo centro en *A* trácese un arco de círculo *m n*: con el mismo radio y desde el vértice del ángulo *a* trácese otro arco *b. c.*; tómese la distancia que hay entre estos dos puntos ó sea la cuerda y llévese sobre el arco *m n*; el punto *o* que es á donde llega dicha distancia tomada desde *n*, se une con el *A*, y el ángulo *o A B* será igual al *a* porque ambos abrazan arcos iguales de circunferencias iguales.

PROBLEMA 6.° *Dividir un ángulo en dos partes iguales*. Sea *A B C* (Fig. 16) el ángulo dado, trácese desde *B* el arco *m n*, desde el punto de interseccion *m* se describe el arco *a b* y con igual radio desde *n*, trácese el *c d*; la recta que une el punto de cruzamiento *o* con el vértice *B* será la línea que divide en dos partes iguales el ángulo dado. La línea *B o* se llama *bisectriz* del ángulo *A B C*.

Del mismo modo se podría dividir cada uno de estos ángulos en otras dos partes iguales con lo cual resultaría el primero dividido en cuatro, y así podríamos seguir dividiendo en partes iguales cada vez menores, que fueran 2, 4, 8, 16, etc.

El dividirlo en tres partes iguales ofrece grandes dificultades si pretendemos conseguirlo teóricamente ó sea con completa exactitud, pero para la práctica del dibujo bastará dividir el arco *m. n.* en tres partes iguales por tanteo.

28. *Falsa regla ó falsa escuadra.* En carpintería y en cantería se usa la falsa escuadra para trazar ángulos iguales á otro dado. Se compone esta de dos reglas *A B* y *A C* (*Fig.* 17) unidas por una charnela ó pasador que se cierra y abre á voluntad del mismo modo que una navaja: colocada sobre el ángulo dado se abre hasta que los cantos interiores de las reglas coinciden con los lados de aquel; se lleva despues sobre la madera ó la piedra en donde se quiere trazar colocando sobre la arista de estas el lado *A. B*, que sirve de caja al *A C* cuando está cerrada, y pasando un lápiz por el canto interior del lado *A C* dejará trazada una línea que con la arista dicha formará un ángulo igual al pedido.

29. *Trasportador:* Se dá el nombre de

trasportador á un semicírculo de metal ó de asta (*Fig.* 18) que está dividido en 180 partes iguales, que son los grados y cada uno de estos en dos partes que son medios grados ó 30'. Con su auxilio podemos medir los ángulos sobre el papel y trazarlos de la abertura que se desee: para esto, bastará colocar el centro del trasportador en el vértice del ángulo, el diámetro ó sea la línea *o.*° 180.° en un lado del ángulo y el otro lado caerá sobre la division que indique el número de grados que tiene el que se mide.

Hay trasportadores de círculo entero, y los hay tambien de metal que, por su construccion, aprecian los ángulos de 1' en 1' y aún de 20'' en 20''.

LECCION 5.ª

30. *Paralelas*. Sabemos (19) que líneas paralelas son las que trazadas en un plano no se encuentran nunca por más que se prolonguen, y en efecto, si se encontraran en algun punto formarían un ángulo y entonces serían convergentes.

Si á las paralelas *A B* y *C D* las corta otra línea *E F* (*Fig*. 19) que se llama *secante*, forma con ellas ocho ángulos que por su posicion respectiva tienen diferentes nombres: los ángulos *a. b. c. d.* se llaman externos y los *e. f. g. h.* internos por estar fuera de las paralelas aquellos y dentro estos.

Los *a* y *d* que están fuera de las paralelas y uno á cada lado de la secante, son alternos externos y lo son tambien por igual razon los *b* y *c*.

Los *e* y *h*, por estar dentro y uno á cada lado de la secante se llaman alternos internos, siéndolo tambien los *f* y *g*.

Los *a* y *g* que se hallan uno fuera y otro dentro de las paralelas y á un mismo lado de la secante se llaman correspondientes y se hallan en igual caso los *e* y *c*; *b* y *h*; *f* y *d*.

Los ángulos alternos externos son iguales luego $a=d$ y $b=c$.

Los alternos internos son iguales luego $e=h$ y $f=g$.

Los correspondientes son iguales luego $a=g$; $e=c$; $b=h$ y $f=d$.

31. Si trazamos otra secante paralela á la primera, resultarán las líneas *a n* y *g m* que son partes de paralelas comprendidas entre paralelas que serán iguales; y por igual razon lo serán las *a g* y *n m*.

PROBLEMA 7.º—*Trazar una paralela á una línea dada.* 1.º Para resolver este problema podemos hacer uso de una regla y una escuadra, del modo siguiente: sea *a b* (*Fig.* 20) la línea que se nos dá, colocaremos la escuadra de manera que uno de sus lados coincida con ella, al otro se adapta una regla como se vé en la figura, y sujetando esta de modo que no se mueva, correremos la escuadra á lo largo de la regla haciéndola tomar la posicion *c D E*, trazaremos una línea por el lado *c E* de la plantilla ó escuadra y será paralela á la anterior.

En este caso la línea *m n* del lado de la regla hace de secante, y los ángulos en *a* y en *c* que serán correspondientes, serán iguales por ser el mismo de la plantilla; luego las dos líneas *a b* y *c E* son paralelas.

Si el punto por donde ha de trazarse la paralela fuera dado, se colocarían las plantillas ó la escuadra y la regla como queda dicho, se correria aquella hasta que su canto coincidiera con el punto dado, y entonces se trazaría la línea que ha de pasar por él.

Segundo: Si quisiéramos hacer uso del compás, y la línea fuera la *A B* (*Fig.* 21) haríamos centro en *A*, y con un radio cualquiera *A B*, por ejemplo, trazaríamos el arco *B n*; con el mismo radio desde *B* describiríamos el *A m* y tomando en este una distancia ó cuerda *A m*, la llevaríamos sobre el otro arco que llegaría hasta *o*, si unimos ahora los puntos *m* y *o*, la línea *m o* que resulta será paralela á la *A B*.

En efecto, siendo la *m B* una secante, los ángulos alternos *A B m* y *B m o* serían iguales por medir arcos iguales de iguales circunferencias, luego las líneas *A B* y *m o* son paralelas.

Si el punto por donde ha de pasar la paralela fuera dado, el *m* por ejemplo, uniríamos el punto *B* con el *m*, trazaríamos el arco *A m* desde *B* y el *B n* con igual radio desde *A* y llevando la cuerda *A m* sobre *B n*, el punto *o* de interseccion se uniría con el *m*; con lo cual quedaría resuelto el problema.

32. *Reglas para trazar paralelas.* Dos reglas *A B* y *C D* (*Fig.* 22) se hallan

unidas por dos piezas de metal *a* y *b* que les permite moverse girando en los puntos de union, y sirven para trazar paralelas. Colocando el canto de una de las reglas sobre la línea, y moviendo la otra tomará todas las posiciones desde la que tiene la figura en que aparecen tendidas las piezas *a*. *b*. hasta cerrarse por completo como se señala con líneas de puntos y como en todas estas posiciones están paralelos los cantos de la regla, las líneas que se tracen sobre la regla *C D* serán paralelas á la línea en que se fijó la *A B*

Esta regla se usa solo para líneas cortas y cuya separacion es pequeña, por lo cual se emplea muy poco.

Cruz ó muleta: Consiste en una regla *A B* (*Fig.* 23), á la cual va unida otra *C D* en sentido perpendicular á la anterior y con un pequeño resalto paralelo á *C D*. Apoyando este en el canto de la mesa ó tablero y corriendo la muleta á lo largo de él, todas las posiciones que tome la *A B* sobre el papel, que estará fijo en el tablero, serán paralelas, y perpendicular al canto del tablero. Tampoco este aparato es de grande uso, aunque para el dibujo de arquitectura en que puede haber necesidad de trazar muchas líneas paralelas, ofrece alguna comodidad.

33. Todavía se conoce otra regla que tiene en su parte media un rodillo, que

se eleva más ó ménos por medio de unos tornillos: este sirve para hacerla resbalar por el papel paralelamente á la primitiva posicion de la regla y no le permite recorrer mas que una cantidad constante que es mayor ó menor segun se aprietan ó aflojan los indicados tornillos, con lo cual se pueden hacer paralelas equidistantes. Varias piezas de metal pueden adaptarse á la regla por medio de dos pestillos y en vez de tener aquellas el canto recto, lo tienen ondulado, con las que se trazan paralelas de diferentes formas, que alternándolas en posicion y en tamaño, producen caprichosas combinaciones y dibujos. Estas pueden emplearse en dibujo de adorno para orlas ó fondos.

PROBLEMA 8.º *Trazar un ángulo igual á otro cuyo lado pase por un punto dado.* Sea B A C (*Fig.* 24) el ángulo y o el punto por donde ha de pasar el lado del que se quiere construir: si no tuviéramos mas datos se haria pasar por o una línea recta y construiríamos el ángulo segun el problema 5. Si se nos diera el lado m n se construiría el ángulo m n c por igual medio y despues se trazaría la paralela o p que pasaría por o, y el ángulo o p m sería el que se pedia.

CAPÍTULO II.

POLÍGONOS.

LECCION 6.ª

34. Se llama *polígono* á una figura cerrada por líneas rectas; el conjunto de estas líneas, que se llaman lados, toma el nombre de *perímetro* ó contorno.

En los polígonos hay que considerar dos cosas: los lados y los ángulos que forman estos. Son adyacentes á uno de sus lados los dos ángulos que tienen este lado comun, y recíprocamente, se llama lado adyacente á los ángulos que con él se forman, á cualquier lado del polígono. En la *Fig*. 25 los ángulos en *A* y en *B* son adyacentes al lado *A B* y este lo es á dichos ángulos.

Los puntos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, se llaman vértices del polígono.

35. Los polígonos pueden ser cóncavos y convexos; serán cóncavos cuando alguno de sus vértices se dirija hácia el

interior del polígono, como sucede con el vértice *o* (*Fig.* 26); y convexos cuando todos sus vértices se dirijan al exterior como los de la *Fig.* 25. Los polígonos convexos no pueden ser cortados por una recta más que en dos puntos.

Se dividen tambien en regulares é irregulares; son regulares aquellos que tienen iguales todos los lados é iguales todos los ángulos, é irregulares los que no los tienen.

Toda línea recta que une dos vértices de ángulos no adyacentes á un mismo lado, se llama *diagonal*, tales son las *A C* y *E C* (*Fig.* 25.)

36. Segun el número de lados que tienen los polígonos, toman diferentes nombres, y se llaman *triángulos* cuando se componen de tres lados; *cuadriláteros* á los que tienen cuatro; *pentágonos*, los de cinco; *exágonos*, los de seis; *eptágonos*, los de siete; *octógonos*, los de ocho; *eneágonos*, los de nueve; *decágonos*, los de diez; y así sucesivamente; pero es muy frecuente decir un polígono de *tantos* lados.

37. **Triángulos.** Los triángulos pueden ser, segun sus lados, *equiláteros*, *isósceles* y *escalenos*; los equiláteros son aquellos cuyos tres lados son iguales; isósceles, los que tienen dos lados iguales solamente, y escalenos si sus tres lados son desiguales.

Segun sus ángulos se dividen en *rec-*

tángulos si tienen un ángulo recto, *obtusángulos* si un ángulo es obtuso, y *acutángulos* si los tres ángulos son agudos. Todo triángulo que no es rectángulo puede llamarse *oblicuángulo*.

Sumados los valores de los tres ángulos de un triángulo, componen 180º ó sean dos rectos; de modo que la suma de dos ángulos será suplemento del tercero: y por lo tanto, en el triángulo rectángulo la suma de los ángulos agudos es igual á 90.º y serán complementarios entre sí; y en el obtusángulo dicha suma será menor que un recto.

Segun esto, no puede haber un triángulo con dos ángulos rectos, ni con dos obtusos, ni con uno recto y otro obtuso.

En un triángulo equilátero los tres ángulos son iguales; en el isósceles son iguales los ángulos adyacentes al lado desigual, y en el escaleno son todos tres desiguales.

Respecto á sus lados, la suma de los dos de un triángulo cualquiera es mayor que el tercero; y será mayor el lado que se oponga á mayor ángulo, pues los lados están en relacion de sus ángulos opuestos.

38. Se llama *altura* de un triángulo á la perpendicular que desde uno de sus vértices se baja al lado opuesto ó á su prolongacion.

Base del triángulo es el lado sobre

que se baja la perpendicular, y vértice del triángulo es el del ángulo opuesto á la base. En el isósceles se considera siempre como base su lado desigual.

En el triángulo rectángulo se llaman *catetos* á los lados que forman el ángulo recto, é *hipotenusa* al lado opuesto á dicho ángulo.

39. Dos triángulos serán iguales:

1.° Cuando los tres lados del uno son respectivamente iguales á los tres del otro.

2.° Cuando tienen un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales.

3.° Cuando tienen dos lados respectivamente iguales, é igual el ángulo comprendido.

PROBLEMA 9.° *Construir un triángulo igual á otro.* Sea *A B C* (*Fig.* 27) el triángulo. Trácese la recta $DE=AC$; haciendo centro en *D* y con un radio igual al lado *A B* descríbase un arco *m n;* desde *E* descríbase otro con el radio *C B* que cortará al anterior en *F*, únase este punto con el *D* y con el *E* y resultará el triángulo $DFE=ABC$.

PROBLEMA 10. *Construir un triángulo dada la longitud de sus tres lados.* Sean los tres lados las líneas *A*, *B*, *C*, (*Fig.* 28). Trácese una recta igual á una de ellas, la *A* por ejemplo, y desde sus extremos como centros y tomando como radios las otras dos *B* y *C* se construirá el triángulo *m n o* por igual procedimiento que en el problema anterior y sus lados *D*, *E*, *F*, serán respectivamente iguales á las líneas *A*, *B*, *C*.

PROBLEMA 11. *Dados dos lados y el ángulo comprendido trazar un triángulo.* Sean *a* el ángulo y *A*, *B* los lados *(Fig.* 29*)*. Trácese una recta *C D*=*B*, en el extremo *C* se construirá un ángulo igual al *a* (Problema 5), en el lado *C n* de este nuevo ángulo se toma una distancia *C E*= *A*, y uniendo el punto *E* con el *D*, resultará el ángulo pedido.

PROBLEMA 12. *Dado un lado y los ángulos adyacentes.* Sirvan como datos los ángulos *a* y *b* y el lado *A* *(Fig.* 30.*)* Sobre una línea *C D*=*A*, constrúyase en *C* un ángulo igual á *a*, y en *D* otro igual á *b*, prolónguense los lados hasta que se encuentren en el punto *E*, y el triángulo *C E D* que resulta reunirá las condiciones pedidas.

PROBLEMA 13. *Dado un lado de un triángulo equilátero, construirlo.* Siendo iguales los tres lados del triángulo equilátero, dado uno de ellos es lo mismo que si se dieran los tres; por lo cual la resolucion es igual á la del problema 9.

PROBLEMA 14. *Construir un triángulo isósceles dado un lado de los iguales y el desigual.* Tambien en este caso como en el anterior conocemos los tres lados, puesto que el lado que no se dá es igual á uno de los dados, y su resolucion es igual á la del problema 9.

Problema 15. *Construir un triángulo rectángulo dados los catetos.* Bastará formar un ángulo recto cuyos lados sean iguales á los dados y unir sus extremos.

Problema 16. *Construir un triángulo rectángulo dada la hipotenusa y un cateto.* Sea A la hipotenusa y B el cateto (*Figura* 31). Se traza una línea $CD=A$, y se divide en dos partes iguales; desde el punto medio o se describe una circunferencia cuyo radio será $o\,C$: haciendo centro en D y con un radio igual al cateto dado B, se trazará un arco que cortará la circunferencia en E y uniendo este con el C formará el $C\,E\,D$ que es el que se pedia.

Problema 17. *Dada la hipotenusa y un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, construirlo.* Tomando la hipotenusa como diámetro $C\,D$ de una semicircunferencia (*Fig.* 31) constrúyase en C el ángulo dado y prolónguese el lado hasta que corte la semicircunferencia en E: uniendo este punto con D, quedará resuelto el problema.

Problema 18. *Dados dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos, construir el triángulo.* Sea a y b los lados y n el ángulo (*Fig.* 32.) Se construye un ángulo igual al n, tal como $A\,B\,C$ en el que $A\,B$ $=b$ que deberá ser el lado menor; desde A

y con un radio igual al lado mayor *a* se traza un arco que corta al lado *B C* en *D* y uniendo este punto con *A* quedará construido.

PROBLEMA 19. *Construir un triángulo conocidos dos lados y el ángulo opuesto al lado menor.* Sean *a* y *b* (*Fig.* 33) los lados conocidos y *n* el ángulo dado; procédase como el caso anterior á construir el ángulo *A B C* cuyo lado *A B* sea igual al *a* tomando como radio la línea ó lado *b* que será el menor y haciendo centro en *A*, se trazará un arco que cortará al lado *B C* en *D* y en *E*; se unen estos dos puntos con *A* y los triángulos *D A B* y *E A B*, satisfacen el enunciado del problema.

Puede suceder que el lado menor sea mayor, igual ó menor que la recta *A n* perpendicular al lado *C B*. Si es igual tendrá una solucion resultando el triángulo *n A B* que será rectángulo; si es mayor tendrá dos soluciones como acabamos de ver en la resolucion anterior, y si es menor no tendrá solucion, siendo por lo tanto imposible el problema. Tampoco tendria resolucion el problema si el ángulo dado no fuera agudo, pues debiendo estar opuesto al lado menor, si fuera recto ú obtuso, el lado mayor se opondria á otro ángulo mayor, y como en un triángulo no puede haber dos ángulos mayores de noventa grados, resultaria tambien imposible el enunciado.

LECCION 7.ª

40. **Cuadriláteros.** Los cuadriláteros se dividen en *paralelógramos, trapecios y trapezoides.*

41. El valor de los cuatro ángulos de un cuadrilátero es igual á 4 rectos.

Se llama paralelógramo á un cuadrilátero que tiene sus lados paralelos dos á dos (*Fig.* 34.) *A B.*

Trapecio cuando, como *C D,* tienen dos lados paralelos y los otros dos no.

Trapezoide cuando no tiene ninguno de los lados paralelos, tal es el *E F.*

42. Los paralelógramos á su vez se dividen en *cuadrados, rectángulos, rombos y romboides.*

Se llama cuadrado á un paralelógramo que tiene sus cuatro lados iguales é iguales todos sus ángulos, siendo por lo tanto rectos.

Rectángulo, el que tiene todos los ángulos iguales, pero desiguales los lados que forman cada ángulo.

Rombo, el que tiene iguales los lados pero desiguales los ángulos adyacentes á cada lado, y

Romboide, el que tiene desiguales los lados que forman cada ángulo, y desiguales los ángulos adyacentes á cada lado.

Tales son, respectivamente, *A*, *B*, *C*, y *D*. (*Fig.* 35).

PROBLEMA 20. *Construir un cuadrilátero igual á otro.* Sea *a b c d* el cuadrilátero: (*Fig.* 36.) Trácese la diagonal *b c* y quedará dividido en dos triángulos, *b c a* y *b c d*, que tendrán comun el lado *b c*, quedando el problema reducido á construir estos como en el problema 9, haciendo que dicho lado *b c* sea tambien comun á los que se construyan.

PROBLEMA 21. *Construir un cuadrado conocido un lado.* Sea *a* (*Fig.* 37) el lado que se conoce, constrúyase un ángulo recto *D B E* cuyos lados sean iguales á *a*; tomando este como radio trácese un arco desde *D* y otro desde *E* que se cortarán en *C*, y uniendo este punto con los *D* y *E* resultará el cuadrado.

PROBLEMA 22. *Dada la diagonal A B construir un cuadrado.* (*Fig.* 38). Levántese una perpendicular en *o*, centro de la *A B*, tómese desde *o* una distancia *o C* y otra *o D* iguales á *o A* y uniéndose los puntos *A*, *D*, *B* y *C*, quedará construido.

PROBLEMA 23. *Construir un rectángulo dados los dos lados contiguos.* (*Fig.* 39). Sean *a b* y *c d* los lados: trácese un ángulo recto cuyos lados *A B*=*a b* y *C B*=*c d*; desde *C* con un radio igual al lado mayor descríbase un arco y otro desde *A* con el lado menor por radio, que cortará al anterior en *D;* únase este punto con *A* y *C* y resultará el rectángulo pedido.

Del mismo modo se obtendría levantando una perpendicular en *C* que fuera igual al lado *A B* y uniendo su extremo con el punto *A*.

PROBLEMA 24. *Dado un lado y un ángulo de un rombo, construirlo.* Sean *a b* el lado y *n* el ángulo (*Fig.* 40.) Constrúyase el ángulo *C D E*=*n*, y cuyos lados *C D* y *E D* sean iguales á *a b*; tómese este como radio y trácense dos arcos desde *C* y desde *E* que se cortarán en *F*, cuyo punto unido con los *C* y *E* formará el rombo pedido.

PROBLEMA 25. *Conocidos dos lados contiguos de un romboide y el ángulo que forman, construirlo.* Despues de construir un ángulo *C D E* igual al ángulo dado *n*, (*Fig.* 41) y cuyos lados *C D* y *E D* sean iguales á los lados *a b* y *c d*, que han sido dados; trazando desde *C* y *E* dos arcos con los radios *c d* y *a b* respectivamente y uniendo el punto de interseccion *F* con los *C* y *E*, quedará resuelto el problema.

PROBLEMA 26. *Construir un polígono igual á otro.* Varios son los medios que pueden emplearse:

1.° Divídase el polígono (*Fig.* 42.=1.ª) en triángulos por medio de las diagonales *g b*, *g c*, *g d* y *g e* y procédase como en el problema 20.

2.° Desde un punto *o* del interior del polígono (2.ª) trácense las rectas *o a*, *o b*, *o c*, *etc.* á los vértices; sobre el lado *o b*, constrúyase el *o b c*, sobre el *o c* el *o c d*, sobre el *o d* el *o d e* y continúese de igual modo hasta cerrar el polígono.

3.° Tómese un lado como base, el *g f*, por ejemplo (3.ª) y diríjanse diagonales á todos los vértices desde ambos puntos. Trazando una recta igual á *g f*, se toma como radio el lado *g a*, y se traza un arco desde *g*, cuyo arco se cortará en *a* con otro trazado desde *f* con el radio *f a*; repítase la operacion tomando como radios las diagonales *g b* y *f b*, y la nueva interseccion de estos arcos nos dará el vértice *b*, continúese con los radios *g c* y *f c* y habremos fijado el punto *c*, y se sigue de este modo hasta determinar todos los vértices; únanse estos despues con las rectas *a b*, *b c*, *c d*, *etc.* y tendremos el polígono.

4.° Prolónguese por ambos lados el lado *f e* (4.ª) y levántense las perpendiculares *m g*, *n a*, *o b*, *p c*, *q d*, que pasen por los vértices del polígono. Trácese ahora una recta indefinida *A B*, y llévense sobre ella los puntos *m*, *n*, *o*, *f*, *p*, *c*, *q*, conservando las distancias que tienen entre sí; levántense por ellos perpendiculares tal como se indica en la figura, menos en los puntos *f' e'* vértices del polígono; tómese en la perpendicular *m'* una distancia igual á *m g*, y el punto *g'* donde termina será un vértice del polígono, en la *n'* se toma una parte igual á *n a*, y quedará fijado el punto *a'* y así seguiremos tomando en cada perpendicular la distancia que le corresponde hasta fijar todos los vértices; uniendo ahora el punto *f'* con el *g'* el *g'* con el *a'* *etc.* hasta unir el *d'* con el *e'* el polígono *a' b' c' d' e' f' g'* que resulte será igual al *a b c d e f g*.

43. Se llama *base* de un paralelógramo á uno cualquiera de sus lados, y *altura* á la perpendicular bajada á la base ó á su prolongacion desde el lado opuesto.

En un rectángulo será base uno de sus lados y altura el lado adyacente.

En un trapecio se llaman bases á los lados paralelos y altura á la perpendicular que los une.

Una recta que una los dos puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio, es paralela á las bases é igual á la semisuma de estas.

En todo paralelógramo los lados opuestos son iguales, por partes de paralelas comprendidas entre paralelas. (31).

La diagonal de un paralelógramo lo divide en dos partes iguales: en los cuadrados, rectángulos y rombos son iguales las dos diagonales, y estas se cortan en su punto medio.

Dos paralelógramos serán iguales, si tienen dos lados respectivamente iguales é igual el ángulo comprendido.

44. Los ángulos interiores de un polígono convexo valen tantas veces dos ángulos rectos como lados tenga el polígono ménos dos: así en un pentágono, que tiene cinco lados, valdrán tres veces dos rectos, ó sea tres veces 180°.

Los ángulos exteriores de un polígono convexo formados por los lados y la prolongacion de los contíguos, siendo esta en el mismo sentido, ó sean los *a. b. c. d. e.* (*Fig.* 43) valen juntos cuatro ángulos rectos ó bien cuatro veces 90°.

LECCION 8.ª

45. **Circunferencia.** Además de las líneas dichas en la leccion 2.ª deben considerarse en la circunferencia otras que se llaman *tangente* y *secante*. La tangente es una recta que no toca á la circunferencia más que en un punto aunque se prolongue, y secante la que la corta en dos puntos, ó sea una cuerda prolongada. El punto donde la tangente toca á la circunferencia se llama de contacto y si desde él trazamos un radio será perpendicular á la tangente.

PROBLEMA 27. *Desde un punto dado de la circunferencia trazar una tangente.* Sea A el punto *(Fig. 44)* se traza el radio $A\ o$ y se levanta la perpendicular $A\ B$ que será la tangente pedida.

PROBLEMA 28. *Desde un pnnto A fuera de la circunferencia trazar una tangente. (Fig. 45).* Se une el centro o con el punto A: desde n, punto medio entre o y A se describe una circunferencia tomando $o\ A$ como diámetro, que cortará á la anterior en b y en c: uniendo estos puntos con el *A*, las líneas *A b* y *A c* serán tangentes á la circunferencia dada. El problema, pues, tiene dos soluciones.

PROBLEMA 29. *Trazar una tangente á dos circunferencias dadas (Fig. 46).* Se unen los centros *o* y *n* de las dos circunferencias, desde el punto *a* de interseccion entre la circunferencia *h a q* y la recta *o n*, se fijan los puntos *b* y *c* con una distancia igual al radio de la menor; en estos dos puntos se levantan perpendiculares y desde *o* tomando como radio la recta *o n*, se traza un arco de círculo que las cortará en *d, e, f,* y *g*; únanse estos puntos con el centro *o* y por las intersecciones de estas líneas con la circunferencia mayor ó sean los puntos *h' m' p' q'* trácense las tangentes *h h'* y *m m'* á dicha circunferencia mayor y las *p p'* y *q q'*. que lo serán tambien á la pequeña.

Este problema, pues, tiene cuatro soluciones dada la situacion de las dos circunferencias.

Si estas hubieran estado en contacto, las tangentes *m m'* y *p p'* se hubieran convertido en una sola que pasaria por el punto de contacto siendo perpendicular á la línea *o n*, y entonces el problema tendria tres soluciones.

Si se hubieran cortado las circunferencias en dos puntos dichas tangentes no existirian y quedarian solo las *h h'* y *q q'*, teniendo solo dos soluciones.

Si las circunferencias hubieran estado una dentro de otra, pero teniendo un punto de contacto, solo habria una tangente comun á las dos, la que pasara por el punto de contacto, y por lo tanto el problema tendria solo una solucion.

Y por último, estando una dentro de la otra y sin punto de contacto, no podria haber ninguna tangente comun á las dos circunferencias, y el problema no tendria solucion ó seria imposible.

Las consideraciones hechas en el anterior problema, nos dicen que dos circunferencias pueden tener entre sí varias posiciones; cuando estas tienen diferente radio y un mismo centro como en la figura 47 se llaman concéntricas, y el espacio *A* comprendido entre las dos, se llama *anillo* ó *corona*.

46. Se dice que una línea es *normal* á otra cuando es perpendicular á ella.

47. Una perpendicular á una cuerda en su punto medio será normal á la cuerda y al arco que esta subtiende. Por lo tanto el radio es normal á la circunferencia.

PROBLEMA 30. *Trazar una normal en un punto dado á un arco de círculo.* El radio que pasa por el punto medio de una cuerda divide el arco en dos partes iguales. Por esta razon, para resolver el problema, procederemos del mismo modo que en el problema 2, al trazar una perpendicular á una recta, ó como en el 4, segun los casos.

PROBLEMA 31. *Dividir una circunferencia en 4, 8, 16, etc., partes iguales.* Dijimos (13) que el diámetro divide la circunferencia en dos partes iguales; si al diámetro *A B* (*Fig.* 48) levantamos la perpendicular *C D*, el arco *C B* será la mitad de la semicircunferencia, y por lo tanto la cuarta parte de la circunferencia. Si ahora se traza otro diámetro que sea bisectriz del ángulo *C o B*, ó sea el *E F*, el arco *C E* será la octava parte, y otro diámetro perpendicular á este, *H I* determinaría con los ya trazados las ocho partes iguales; del mismo modo se dividiría en 16, 32, etc., partes iguales.

PROBLEMA 32. *Dividir la circunferencia en 3, 6, 12, etc., partes iguales.* El radio es igual á la cuerda que subtiende la sesta parte de la circunferencia; llevando, pues, el radio seis veces sobre ella quedará dividida en seis partes iguales. Si el arco *A B* (*Fig.* 49) es $\frac{1}{6}$ de la circunferencia los dos arcos *A B* y *B C* serán $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ de ella, y si tomamos dos á dos los arcos tendremos los puntos *A*, *C*, *E*, que la dividen en tres partes iguales. Si se levantan perpendiculares en los centros de las cuerdas *A B*, *B C*, *C D*, etc., y se prolongan hasta tocar la circunferencia, se dividirá cada arco en dos partes iguales y la circunferencia en doce: así podríamos continuar dividiéndola en 24, 48, 96, etc. partes iguales.

PROBLEMA 33. *Dividir una circunferencia en un número cualquiera de partes iguales.* Trácese el diámetro *A B* (*Fig.* 50) y divídase en el número de partes en que haya de dividirse la circunferencia; en 7 por ejemplo. Desde *A* y desde *B* como centros y con un radio igual al diámetro, trácense dos arcos que se cortarán en *C*: únase este punto con la segunda division *n* del diámetro y prolónguese la recta *C n* hasta cortar la circunferencia en *m*: el arco *B m*, será la 7.ª parte de la circunferencia.

Para todos los casos se unirá el punto *C* con la segunda division del diámetro *A B*.

PROBLEMA 34. *Hallar el desarrollo de una circunferencia.* Trácese el diámetro *A B* (*Fig.* 51). Desde *A* se toma un arco de 30° que llegará á *n* y únase este con el centro, prolongando este radio fuera de la circunferencia: trácese una tangente en *A* que se prolongará hasta encontrar en *C* el radio prolongado y desde este punto se llevará tres veces el radio sobre la tangente hasta *D*; se une *D* con *B* y la recta *D B* será el desarrollo de la semicircunferencia, y por lo tanto el doble de esta línea será el de la circunferencia entera.

Esta operacion se llama rectificar la circunferencia.

LECCION 9.ª

47. **Lineas proporcionales.** Dos líneas son proporcionales á otras dos cuando existe entre las primeras la misma relacion que entre las segundas.

PROBLEMA 35. *Dividir una recta en partes iguales.* Sea *A B* (*Fig.* 52.) una línea que vamos á dividir en 7 partes iguales; desde *A* se tira una recta formando un ángulo, se lleva sobre ella siete veces una distancia cualquiera; el punto *C* que corresponde á la última division se une con el *B* y se trazan las paralelas *D E*, *F G*, *H I*, *etc.*: las divisiones que resultan en la línea *A B* tales como *A O*, *O M*, *M K*, *K I*, *etc.* serán iguales.

48. Si por los puntos *N*, *L*, *J*, *etc.* trazamos paralelas á la *A B* la línea *B C* quedará igualmente dividida en siete partes iguales, como la *D E* quedará en seis, la *F G* quedará en cinco, y por lo tanto cada línea de las que caen sobre la *A B* quedará dividida en tantas partes iguales como lo estará la parte de *A B* desde *A* al punto que corresponda á la línea que se tome. Esto es lo que debemos

considerar como proporcionalidad, pudiendo decir que en la misma proporcion se halla la *A B* respecto de la *B C* que la *A I* respecto de la *I H*. Lo mismo resulta respecto á las divisiones de la *A C* ó sea del tercer lado del triángulo *C A B*.

49. Si tuviéramos, pues, que hallar una línea que estuviera con otra conocida en la relacion en que se hallen otras dos que tambien se conociera, diríamos que buscábamos una cuarta proporcional y procederíamos del modo siguiente:

PROBLEMA 36. *Hallar una cuarta proporcional.* Sean *A B* y *C D* (*Fig.* 53) las líneas cuya proporcion se conoce y sea *E F* la otra línea conocida; colocaremos al extremo de la línea *A B* la *C D* formando un ángulo como *H I K* en el que *H I*=*A B* é *I K*=*C D*; se une el punto *K* con el *H*; sobre *H I* llevaremos la tercera línea *E F* que llegará hasta *L* y trazando desde *L* una paralela á *I K*, la línea *L N* será la cuarta proporcional pedida.

En efecto, *H I* é *I K* tienen entre sí la misma relacion que *H L* y *L N* (48) y como *H I*=*A B*, *IK*=*C D* y *H L*=*E F* diríamos que *A B* y *C D* están en la misma relacion que *E F* y *L N*.

PROBLEMA 37. (a) *Hallar una tercera proporcional.* Sean (*Fig.* 54) *A B* y *C D* las rectas dadas cuya tercera proporcional se

---

(a) Este es un caso particular del 36.

desea: fórmese un ángulo cualquiera; en uno de sus lados se lleva la línea *C D* desde *E* á *F*, y la *A B* desde *F* á *G* y desde *E* á *H* en el otro lado; únanse los puntos *F* y *H* y por *G* trácese la paralela *G I*; la recta *H I* será la tercera proporcional y podremos decir *E F*: *F G*:: *E H*: *H I* y como las tres líneas primeras son las dadas, sustituyendo estos valores por los suyos diremos *C D*: *A B*:: *A B*: *H I*.

En esta proporcion la línea *A* B es media proporcional entre las *C D* y *H I*.

PROBLEMA 38. *Hallar una media proporcional á dos líneas dadas*. Sean *A B* y y *C D* (*Fig*. 55) las dos líneas dadas; llévense una á continuacion de otra sobre otra línea *E G* de modo que *E F*=*A B* y *F G*=*C D*. Tomando *E G* como diámetro trácese la semicircunferencia *E H G* y levántese en *F* la perpendicular *F H* que será la línea pedida.

Este problema está fundado en que si desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo se baja una perpendicular á la hipotenusa, es media proporcional entre las dos partes en que la divide; y como si desde un punto de la circunferencia trazamos rectas á los dos extremos del diámetro, estas forman un ángulo recto; las líneas que entran en el problema anterior reunen todas estas circunstancias.

PROBLEMA 39. *Trazar la escala llamada*

de mil partes. (Fig. 56). Sobre una recta indefinida llévese una medida cualquiera 10 veces, de las cuales la primera será *A*, 90, y escríbase en ella de derecha á izquierda 0, 10, 20, 30, etc., como indica la figura, hasta 100 que caerá en *A*. A partir desde 0, llévese 9 veces la distancia *A* 0 y de izquierda á derecha escríbase 100 en la primera de las nuevas divisiones, 200 en la segunda y 900 en la última. Levántese una perpendicular en *A* y llévense sobre ella otras divisiones iguales y arbitrarias que se numerarán de abajo á arriba con los 1, 2, 3, 4, ... 10. Desde todos estos puntos se trazarán paralelas á la línea *A B* y por los 90, 80..... 100, 200 ..... 900, se levantan perpendiculares que serán paralelas á la *A C*, escribiendo en la línea superior la misma numeracion que en la inferior: por último, se trazan las diagonales 10—0, 20-10, etcétera, y quedará construida la escala.

En efecto, cada division de las grandes será la décima parte de la línea *A B*; cada division de 0—10, será la décima parte de las anteriores y por lo tanto la centésima de *A B*, y cada division ó parte comprendida en el triángulo formado por 0 *D* 10 será la décima parte de 10 *D*, la centésima de *C D* y la milésima de *A B*, con lo cual podemos apreciar la milésima de esta línea.

Su uso. Si quisiéramos tomar en esta

escala 327 partes de las menores que comprende tomaremos con el compás la distancia que hay entre la interseccion de la línea 300 con la paralela á la *A B* núm. 7 y la de esta misma con la diagonal 20 30 y tendremos tomadas las 327 partes.

Para que cada una de estas divisiones pueda relacionarse con el metro, bastará que la medida arbitraria, tomada sobre *A O*, sea un centímetro ó un milímetro; en el primer caso las divisiones menores que se determinan con las diagonales serian 1—2—3—etc., milímetros, y en el segundo serian décimas de milímetro ó diezmilésimas del metro. Las divisiones de la línea *A C* son arbitrarias siempre y se hacen mayores ó menores, segun el tamaño general de la escala, para apreciar bien las distancias entre las diagonales.

LECCION 10.

50. **Escalas.** Se dá el nombre de escala á la relacion en que se halla un dibujo con el tamaño natural del objeto que representa: generalmente se expresa sin delinear la escala, pero, en arquitectura especialmente, se dibuja. Pueden ser arbitrarias las dimensiones de las escalas, si bien ordinariamente se relacionan con una medida conocida, que hoy es el metro para todas.

Las que se dibujan en los planos se reducen á una recta dividida en centímetros, y uno de estos en milímetros á cuyas divisiones se les dá el valor que se quiere en armonía con el tamaño del dibujo y del objeto que este representa.

Si el valor que diéramos á los centímetros y milímetros del objeto dibujado fuera tambien centímetros y milímetros de la escala, esta se llamaría natural; pero no siempre se puede usar este valor, una vez que el dibujo aparece, si se hace con ella de tamaño natural, y si el objeto es grande, como una casa, una iglesia, el plano de un pueblo, el mapa de una provincia, etc., no es posible dibujarlo en todo su tamaño. En este caso nos vemos precisados á aumentar el valor de la unidad, y si en un papel en que no cabe más que una línea de un metro de largo tenemos que dibujar otra de mil metros, haremos que la línea que se dibuja valga mil metros, y por lo tanto el valor del metro se habrá aumentado hasta mil.

Si consideramos que el metro, unidad usual, vale dos metros, las dimensiones lineales del dibujo serán la mitad de las del objeto que dibujamos y diremos que está dibujado en escala de 1/2 ó de 0,5 por metro; esto es, que medio metro natural representa un metro para el dibujo. Si consideramos que el metro vale 500 metros, la parte que en el dibujo representa un metro será dos milímetros naturales y la escala será de $\frac{1}{500}$ ó de 0,002; y así procederemos sea cualquiera la relacion que se adopte.

Como no siempre se dibujan las escalas, y como, aunque se dibujen puede ser necesario hacer operaciones con los planos ó dibujos, conviene que aquellas tengan siempre una relacion que facilite el cálculo, y de aquí que se hagan generalmente 2, 5, 10, 50, 100, 200, 250, 500, 1000, etc., veces mayor el valor de la unidad segun el tamaño del objeto y los detalles con que haya de representarse en el papel, y no se empleen escalas de $\frac{1}{135}$, $\frac{1}{1537}$, etc., cuya relacion con la unidad es menos cómoda que las anteriores.

Se fabrican unas reglas de boj ó de marfil que están divididas con arreglo á diferentes escalas y en ellas se halla el doble decímetro en la relacion de las más usuales, con una division clara y fácil de usar, con las que se obtiene suma comodidad para el dibujo.

51. Para encontrar la relacion entre dos rectas dadas *A B* y *C D* (*Fig.* 57) podríamos hacer uso de una escala, y si la una tiene 15 divisiones de esta, por ejemplo, y la otra tiene 20, estarán en relacion de 15 á 20 ó sea de 3 á 4; es decir que la menor es tres cuartas partes de la mayor: pero para averiguar esta relacion sin el auxilio de la escala, se procede del siguiente modo: colóquese la línea menor sobre la mayor todas las veces que se pueda, que en el caso actual serian dos y ocuparian desde *A* hasta *E*, lo cual nos dice que está contenida dos veces y queda un resíduo *E B*. Colocando ahora este resíduo sobre la *C D* llegará hasta F y quedará otro resíduo *F D*. Llevaremos este nuevo resíduo sobre el anterior *E B* y veremos que está contenido seis veces y diremos:

$AB = 2\,CD + EB$
$CD = EB + FD$
$EB = 6\,FD$

y sustituyendo valores en estas cantidades resultará:

$EB = 6\,FD$
$CD = 6\,FD + FD = 7\,FD$
$AB = 14\,FD + 6\,FD = 20\,FD$

Luego si la $CD = 7\,FD$ y la $AB = 20\,FD$, la FD será la medida comun y la relacion entre las dos líneas dadas $\frac{7}{20}$ es decir que la CD es $\frac{7}{20}$ de la AB.

52. **Nonius ó Vernier.** Para determinar la longitud de una línea con relacion á una unidad dada se emplean, como hemos dicho, las escalas, pero aunque estas se hallen divididas en partes muy pequeñas no siempre esto es suficiente, y para hallar mayor aproximacion se puede emplear el nonius. Del mismo modo para medir un ángulo trazado sobre el papel usamos el trasportador, (29) pero este cuándo más divide el círculo en cuartos de grado, ó lo que es lo mismo de 15' en 15', y en la mayoría de los casos en operaciones de precision, esta division no es suficiente.

Para apreciar fracciones menores fué ideado un aparato en el siglo XVI por el portugués Pedro Nuñez, de cuyo apellido toma el nombre de nonius, cuyo uso fué generalizado en el siglo XVII por

Pedro Vernier, á quien los franceses atribuyen la invencion, por lo cual llaman Vernier al aparato, que consiste en una pieza metálica que se adapta á las escalas, en cuyo caso es recta, ó que vá unido á los trasportadores ó círculos graduados (a) de los instrumentos topográficos destinados á medir ángulos; y entonces es un arco de circulo.

En uno y en otro caso obedece á la misma teoría, y se usa de igual manera.

53. Sea *A B* una regla dividida en decímetros, centímetros y milímetros (*Fig.* 58) que representamos en tamaño exagerado para que se vea con mayor claridad, tomando solo una pequeña parte de un decímetro; sea otra regla *D*, 10 que solo mide 9 milímetros y dividámosla en diez partes iguales, por lo cual cada division de la regla pequeña, que es el nonius, será nueve décimas partes de un milímetro y la diferencia entre una de estas y las de la regla *A B* será $\frac{1}{10}$ de milímetro, la diferencia entre dos de la primera y dos de la segunda será $\frac{2}{10}$ y así las demás. Si queremos medir la distancia entre *C D* aplicaremos sobre esta línea la regla *A B* y veremos que tiene 2 centímetros, 2 milímetros y una fraccion. Si

(a) A estos círculos se les llama *limbos*.

ahora colocamos el nonius á continuacion de la línea $C\ D$, habrá una division de este que coincidirá con otra de la regla $A\ B$ y observando que esta es la 5.ª del nonius, resulta que puesto que cada una de esta difiere de las de la regla en $\frac{1}{10}$ las 5 divisiones serán $\frac{5}{10}$ que será la distancia que hay desde los 2 centímetros y 2 milímetros medidos hasta al final de $C\ D$ por lo que esta tendrá la cantidad indicada y medio milímetro más ó sean 0,0225.

Para medir arcos de círculo tiene igual disposicion el nonius, pero se toma por unidad el grado, y como este tiene 60, si los limbos están divididos en medios grados, se toman 29 divisiones y se dividen en 30 partes iguales para el nonius, por lo cual la diferencia entre cada division será $\frac{1}{30}$ de medio grado ó $\frac{1}{60}$ de grado ó lo que es lo mismo un minuto.

Si al medir un ángulo observamos que el cero del nonius ha recorrido desde el cero del limbo 25°, medio grado más y una fraccion, veremos la division del nonius que coincide con otra del limbo y si fuera la 17 la medida del ángulo sería $25°$ y $30' + 17' = 25°\ 47'$.

Esto facilita apreciar fracciones que á la simple vista no pueden apreciarse, á ménos que usáramos círculos graduados de muy grandes dimensiones que permitieran dividir la circunferencia en 21.600 partes de las cuales cada una sería un minuto, y aunque estos estuvieran representados por una distancia de medio milímetro, el círculo tendria mas de 3 metros de diámetro.

Generalmente los nonius están dispuestos de modo que corren á lo largo de las reglas ó alrededor del círculo para usarlos con mayor comodidad. (a)

Problema 40. *Describir una circunferencia cuyo desarrollo sea igual á una recta dada.* Este problema podemos considerarle como el recíproco del 34, pues el dato que buscamos es el radio que ha de servir para trazar la circunferencia que se pide.

En dos circunferencias, los rádios, los diámetros, las cuerdas que subtienden igual número de grados, y los arcos subtendidos por estas cuerdas, son proporcionales; y en tal concepto para resolver el problema presente trazaremos una circunferencia con un radio cualquiera; se rectificará, (Problema 34) y tendremos de ella dos líneas rectas, la circunferencia rectificada y el radio; si á estas dos líneas y á la recta que se dá se halla una cuar-

---

(a) El profesor debe procurar tener un nonius á la vista de los discípulos para que vean su uso prácticamente.

ta proporcional (Problema 36) esta será el radio de la circunferencia que se pide.

PROBLEMA 41. *Rectificar un arco de círculo menor de* 60°. Sea el arco *A B C (Figura* 59*)*. Trácese la cuerda *A C* que se prolongará hácia *D* desde el punto medio *B* del arco, tírense las cuerdas *B A* y *B C* que llevaremos sobre la *A D* desde *A*, colocándolas una á continuacion de la otra y llegarán á *E*; divídase la parte de línea *C E* en tres partes iguales, y añádase una de estas *E F* á continuacion de *E*: la recta *A F* será el arco *A B C* rectificado.

Si el arco que se desea rectificar fuera mayor de 60° grados lo cual se conoce cuando la cuerda que lo subtiende es mayor que el radio, se divide en partes iguales que cada una sea menor de 60° grados, se procede con una de ellas como dejamos expuesto, la línea que resulte para desarrollo de este arco se toma tantas veces como sea el número de partes en que el arco se dividió, y la suma de aquellas será la línea que se pide.

54. **Curvímetros.** Se llama curvímetro á un pequeño aparato que tiene por objeto medir el desarrollo de una curva sea ó nó arco de círculo, y aunque su resultado no es matemáticamente exacto, por que influyen en él causas que lo impiden, puede servir en la mayoría de los

casos en que no sea precisa tanta exactitud.

Se reduce este instrumento á una pequeña rueda dentada colocada en una guarnicion de metal que la permite girar con facilidad, en un tornillo de rosca muy fina que le sirve de eje. *(Fig. 60)*. Colocada la rueda al final de la rosca junto á la guarnicion como indica la figura y el punto *a* ó línea de *fé* en el extremo de la curva que se quiere desarrollar, se empieza á recorrer dicha curva, haciendo rodar la rueda sobre ella y teniendo cuidado de que el rozamiento sea el menor posible: este movimiento hace que la rueda vaya recorriendo el tornillo ó rosca de su eje y que al llegar al límite de la curva que se desarrolla, ocupe una posicion en el eje diferente de la que tenia al empezar. Trácese ahora una línea recta indefinida, colóquese en el extremo de ella el punto de la rueda que estuvo en contacto con el último punto de la curva y hágase girar en sentido contrario sobre la recta hasta que llegue á tocar la guarnicion, lo cual se acusa por que no puede girar la rueda, entónces el punto *a* deberá estar en contacto con la línea y este determinará el extremo de la recta. La distancia entre el punto en que empezó y el en que terminó esta segunda operacion es el desarrollo de la curva recorrida.

Si la curva fuera de tal extension que el curvímetro no pudiera recorrerla de una sola vez, se divide la línea en dos ó mas partes, y se halla el desarrollo de ellas por separado; la suma de todas ellas será el que se busca.

PROBLEMA 42. *Hallar el centro de una circunferencia ó de un arco de círculo.* Sea la circunferencia *A B C*. (*Fig.* 61) Se trazan dos cuerdas *A B* y *B C*, por el centro de ellas se levanta una perpendicular y el punto de encuentro *o* será el centro de la circunferencia. Del mismo modo se halla el de un arco de círculo cualquiera.

De este problema nace otro, *por tres puntos que no esten en línea recta hacer pasar una circunferencia ó un arco de círculo.* Si se unen los tres puntos *A B C* de la figura 61 por las líneas *A B* y *B C* y se levantan perpendiculares en su punto medio se cruzarán en *o*, y la circunferencia que se trace con un radio igual á la distancia que hay desde *o* á uno de los puntos dados pasará por los tres que son equidistantes del *o*.

LECCION 11.

55. **Trazado de polígonos.** Se dice que un polígono está *inscrito* en un círculo cuando todos sus vértices tocan en su circunferencia; y *circunscrito* si todos sus lados son tangentes de aquella. En el primer caso el círculo estará circunscrito al polígono y en el segundo inscrito.

Para inscribir un polígono regular á un círculo, bastará dividir la circunferencia en tantas partes iguales como las dos tenga el polígono y trazar cuerdas desde cada punto de division al inmediato; y para circunscribirlo trazar tangentes en dichos puntos de division las que encontrándose con las inmediatas formarán los vértices.

56. Si en un círculo inscribimos un polígono regular, de 8 lados por ejemplo, y circunscribimos otro de igual número de lados, el perímetro del primero será menor que el desarrollo de la circunferencia y mayor el del circunscrito: si por los puntos medios de los lados del primero trazamos radios, quedará la circunfe-

rencia dividida en 16 partes iguales y si inscribimos y circunscribimos dos polígonos de 16 lados, seguirá siendo la circunferencia mayor que el inscrito y menor qne el circunscrito, pero la diferencia será menor que en el caso anterior; si procedemos de igual manera con otros dos polígonos de 32 lados, disminuirá la diferencia, y así podremos seguir trazando polígonos siempre de doble número de lados hasta donde queramos, haciendo que los inscritos y los circunscritos se acerquen cada vez mas, de modo que llegarían á coincidir con la circunferencia en el infinito. Así pues la circunferencia debe considerarse como el límite de un polígono regular inscrito ó circunscrito á ella y por lo tanto como un polígono regular de infinito número de lados.

PROBLEMA 43. *Dado el lado de un pentágono regular, construirle. (Fig. 62).* Trácese con un radio cualquiera una circunferencia; divídase en cinco partes iguales y á los puntos de division, tírense los radios *A O, B O,* etc.; tírese la cuerda *A B,* y un radio perpendicular á la misma, que se prolongará hácia *E:* levántese una perpendicular á este radio prolongado en un punto cualquiera, y desde el pie de ella llévese hácia el lado *F* la mitad del lado del pentágono que se va á trazar, y hácia el opuesto la otra mitad: tírense las *F C* y *G D* paralelas á

O E, las cuales cortarán los radios *O A* y *O B* en las prolongaciones de estos: tómese ahora como radio la distancia del centro *O* á uno de estos puntos de intersección y la circunferencia trazada con el mismo contendrá como cuerda cinco veces el lado *C D*, igual al dado.

Del mismo modo resultaría si el lado dado fuera menor que *A B* pues las líneas *C F* y *D G* encontrarían á los radios *O A* y *O B* dentro del círculo.

Igual sistema se seguirá sea cualquiera el número de lados que haya de tener el polígono que se desea.

CAPÍTULO III.

LÍNEAS CURVAS.

LECCION 12.

56. Varias son las curvas que se usan en las artes además de la circunferencia; unas que resultan de la combinacion de varios arcos de círculo de diferentes radios, otras cuya curvatura especial les da nombres propios y otras que no obedecen á forma determinada. Para trazar las primeras nos valemos del compás, y si son muy grandes sus radios se emplean plantillas delgadas de madera que, reunidas en una coleccion de varios radios, se utilizan segun convienen á las que tenemos que trazar. Las segundas exigen sistemas especiales para trazarlas y las últimas se trazan bien con el compás en las partes que puedan ser arcos de círculo, bien á pulso cuando son pequeñas ó bien valiéndose de otras plantillas de curvas que tienen una forma caprichosa en la que se encuentran curvaturas de

muy diferentes formas y radios. Estas plantillas se venden aisladas en el comercio y forman parte de algunos estuches de compases.

57. Para que dos curvas de diferente radio que deben ir unidas, ya en el mismo sentido ya en sentido contrario, no formen en su punto de union ángulos ó imperfecciones que impidan que las dos sean una misma, lo cual es de muy mal efecto en el dibujo, es necesario que los radios de las dos curvas que pasen por el punto de union de ambas, coincidan en toda su longitud ó sea el uno prolongacion del otro: de este modo la tangente que se trace en dicho punto será comun á las dos y no se observará donde termina la primera y empieza la segunda.

Si tuviéramos que hacer pasar una curva por varios puntos dados, procederíamos del modo siguiente:

PROBLEMA 44. *Hacer pasar una curva por los puntos dados A B C D E (Fig. 63).* Uniéndose los *A B* y los *C D* y levantando una perpendicular en el centro de cada una de estas líneas hallaremos el punto *O* centro de un arco de círculo que pase por *A B C*, cuyo arco se trazará; se une despues el punto *C* con el *D*, se levanta una perpendicular en el centro de la línea *C D*, se prolonga el radio *O C* y el punto de interseccion con la perpendicular ó sea *n* será el centro de otro arco de círculo que trazaremos, con el radio *C n*, hasta *D*; uniendo ahora los puntos *D* y *E* determinaremos el centro *m* del mismo modo y describiremos el arco *D E*, quedando resuelto el problema; pues la curva *A B C D E* satisface á las condiciones pedidas.

58. Entre los diferentes usos que se hace de las curvas el mas general acaso en el dibujo lineal, es para trazar arcos de portadas, puentes, etc. pero no siempre estos están sujetos á ser una parte de una circunferencia sola, y habiéndolos de diferentes formas, toman tambien diferentes nombres.

Se llama *luz* del arco, la distancia que hay entre los dos puntos *A B* (*Fig*. 64.) donde nace, que se llaman *arranques*: *Flecha* es la perpendicular *O F* levantada en el centro de la línea *A B* ó sea la distancia desde el centro del arco hasta la línea de arranques.

Cuando la flecha es menor que la mitad de luz del arco este será *rebajado* y cuando es mayor será *levantado, peraltado* ó *remontado*.

Son circulares los arcos cuando se forman con un solo arco de círculo. Si en estos la flecha es igual á la mitad de la luz, que será en este caso el radio, se llaman de *medio punto* y si es menor *escarzanos*.

Se llaman *carpaneles* ó *apainelados* los que están formados con varios *cen-*

tros y por lo tanto con curvas de diferentes radios: estos son rebajados.

Los peraltados y formados por varios arcos de círculo se llaman de *herradura*, tales son los arcos árabes.

Góticos ó *apuntados* son los formados por arcos que se cortan en el centro superior.

Parabólicos son los arcos remontados ó peraltados que se forman con una parábola y *elípticos* los formados por una parte de la elipse.

Mas adelante nos ocuparemos de la parábola y de la elipse.

PROBLEMA 45. *Trazar un arco de círculo rebajado al tercio conocida la luz.* Trácese en la mitad de la línea *A B*, que es la luz (*Fig.* 65.) una perpendicular *D C* igual al tercio de *A B* que será la flecha: hágase pasar una circunferencia ó un arco de círculo (Problema 42) por los puntos *A C B* y este será el arco pedido.

Se dice rebajado al tercio, al cuarto, al quinto etc. segun que la flecha sea la tercera, la cuarta ó la quinta parte de la luz.

PROBLEMA 46. *Trazar un arco carpanel de tres centros dada la luz.* 1.° (*Fig.* 66.) Divídase la luz, ó sea la recta *A B* en tres partes iguales: haciendo centro *n* y con un radio igual á una de las partes *A n*, trácese una circunferencia, hágase centro en *m* y con igual radio trácese otra; el punto *o* donde se cortan se une con los centros *n m* cuyas líneas *o n* y *o m* se prolongan hasta encontrar las circunferencias en *p* y *q;* hágase ahora centro en *o* y con el radio *o p* trácese la curva *p q* con lo que resultará el arco *A p q B* que es el que se pidió.

2.° *(Fig. 67.)* Divídase la luz *A B* en cuatro partes iguales; desde los puntos *m n o* trácense tres circunferencias con el radio *A m* igual á una de estas partes, tírense las líneas *m p* y *o q* prolongándolas hasta que se encuentren en *r* por el lado inferior y toquen en la circunferencia por el superior y haciendo centro en *r* se traza con *r C* por radio la curva *C D;* y el arco *A C D B* será el pedido. Este es más rebajado que el anterior.

3.° *(Fig. 68.)* Se dividirá en cinco partes iguales la luz *A B,* con una de estas por radio, se trazan desde *m* y *n* correspondientes á la primera y cuarta division, dos circunferencias; desde los mismos centros con el radio *m n* se trazan los arcos *n p* y *m p*, se une *p* con *m* y con *n* prolongando las rectas hasta *r* y *s* y desde *p* con el radio *p r,* la curva *r s: A r s B,* resultará ser el arco que se pide más rebajado que el anterior.

4.° *(Fig. 69.)* Dividida la luz en cinco partes iguales como en el caso anterior, tómense como radio dos de ellas y haciendo centro en la segunda y la tercera division ó sea en *m* y en *n* trácense dos círculos; el punto de interseccion *p* se une con los centros *m* y *n* y las líneas *p m* y *p n* se prolongan hasta *r* y *s:* se toma una de ellas, la *p r* como radio y desde *p* se traza la curva *r s,* resultando el arco *A r s B,* ménos rebajado que los anteriores, que cumple con las condiciones del problema.

PROBLEMA 47. *Dada la luz y la flecha trazar un arco carpanel de tres centros.* Sean *A B* la luz y *C o* la flecha *(Fig.* 70*)*: desde un punto cualquiera de la flecha, *F* por ejemplo, se toma la distancia *F C* que se llevará desde *A* á *m* y desde *B* á *n* en la recta *A B* y tomándola como radio se describen dos circunferencias desde *m* y *n;* se unen los puntos *F* y *m* y en la parte media de esta línea se levanta una perpendicular que cortará la prolongacion de *C o* en *G;* este último punto se une con los centros *m n* prolongando las rectas hasta *r* y *s* y desde *G* con el radio *G r* se traza la curva *r s* que pasará por *C* y el arco que resulta *A r C s B* resuelve el problema.

LECCION 13.

59. **Método general.** Se pueden trazar arcos carpaneles de 3, 5, 7, 9, etc. centros por un método general que, aunque ofrece mayor dificultad que los explicados hasta aquí, conviene conocer. Consiste este método en determinar los centros y los radios de los arcos que componen la curva, segun esta deba ser, y como ya hemos dicho que la union de los diferentes elementos que la forman necesita condiciones tales que reunidos todos compongan una sola curva sin interrupciones de mal efecto, los radios y los ángulos formados por estos habrán de tener la proporcion conveniente para que el arco que resulte sea de buena forma y adecuado al objeto á que se destine. Esto hace que si en los arcos de 3 centros no ofrece dificultad ninguna su construccion por este método, para los de 5, 7, 9, etc. haya que recurrir al cálculo á fin de obtener algunos radios, circunstancia que aquí supliremos por medio de una

tabla en la que se consignen los datos más precisos.

PROBLEMA 48. *Dada la luz y la flecha de un arco carpanel de tres centros, trazarlo por el método general.* Sean *A B* la luz y *c o* la flecha *(Fig. 71.)* Haciendo centro en *o* con un radio igual á la mitad de *A B* ó sea *o A* trácese una semicircunferencia que se dividirá en tres partes iguales (tantas como centros ha de tener el arco), únanse por medio de cuerdas los puntos de division *A m* y *B n* y los *m n* con *p*, punto medio de la semicircunferencia y en la prolongacion de *o c*. Desde el punto *c* se tira una paralela á *p n* que cortará en *a* á la cuerda *B n*, hágase lo mismo para determinar el punto *b*; tírense los radios *m o* y *n o* y por los puntos *a* y *b* las paralelas á ellos *a f* y *b f*: los puntos *e d* en que estas líneas cortan la *A B*, serán centros para los arcos *a B* y *b A* con el radio *d A* ó el *e B* y el punto *f* lo será para trazar el *b c a*, con el radio *f b*, resultando el arco carpanel *A b c a B* que tendrá por luz *A B* y por flecha *c o* segun el enunciado del problema.

PROBLEMA 49. *Con iguales datos trazar un arco de cinco centros. (Fig. 72.)* Se procede del mismo modo que en el anterior pero la semicircunferencia se divide en cinco partes iguales, por ser cinco los centros; trazadas las cuerdas y los radios se fija el radio *e B* arbitrario, y se traza la recta *e i* paralela al radio *o q*, desde *c* y desde *i* se tiran las *c r* y *r i* paralelas respectivamente á *p t* y *t q* que se cortarán en *r*; se hace igual construccion en el lado opuesto para determinar los puntos *h k* siendo *A u*=*e B*: por los puntos *k* y *r* se trazan las *k f* y *r f* paralelas respectivamente á los radios *n o* y *t o* que se unirán en la prolongacion de *c o* y prolongando la línea *h u* y la *i e* hasta *g* y hasta *j* tendremos los centros *u e* para las curvas *A h* y *B i* con el radio *A u*; los *g* y *j* para las *h k* y *r i* con el radio *g h*; y el *f* para la *k c r* con el radio *f k*.

PROBLEMA 50. *Con iguales datos trazar un arco de siete centros*. El mismo procedimiento empleado en el problema anterior nos conduce á la solucion de este; pero así como en aquel teníamos el primer radio arbitrario en este tenemos el primero y el segundo y por lo tanto seguiremos el siguiente método, valiéndonos de la misma figura.

Despues de trazar la semicircunferencia, dividirla en siete partes iguales y trazar los radios y las cuerdas segun queda dicho; se fija el radio *A u* segun convenga, se traza la *u g* paralela al primer radio *o m* y se fija el radio *g h* tambien arbitrario, se hace pasar por *g* una paralela al segundo radio de la semicircunferencia y el tercero y cuarto centro se determinan como se determinó el segundo y tercero del problema anterior ó sean los *g* y *f* correspondientes á dicho problema. Se hace lo mismo en el otro lado de la semicircunferencia y quedará trazado el arco.

Igual procedimiento se sigue con los de nueve centros y en general con un número impar de centros, pero á medida que estos aumentan, aumentan tambien los radios arbitrarios.

60. Si al fijar los primeros radios arbitrariamente no nos sujetáramos á alguna regla que determine la relacion que deben tener estos entre sí y con los demás, podríamos incurrir en errores que nos condujeran á trazar el arco con imperfecciones; para evitarlo, deberemos tener presente que las diferencias que resultan entre cada dos radios son iguales, y así veremos que en la figura 72 *f j* será igual á *j e;* además los ángulos formados por los radios deben tener entre sí una relacion, en virtud de la cual Mr. Michel ha formado una tabla que puede reemplazar al cálculo que sin ella tendríamos que hacer, y que insertamos á continuacion, en la cual, tomando la abertura ó luz del arco por unidad, se nos dá la longitud que deben tener los radios que no se determinan gráficamente en los arcos de 5, 7 y 9 centros para una misma luz y varias flechas.

ARCOS DE 5 CENTROS.		ARCOS DE 7 CENTROS.			ARCOS DE 9 CENTROS.			
Flecha.	1.er Radio.	Flecha.	1.er Radio.	2.º Radio.	Flecha.	1.er Radio.	2.º Radio.	3.er Radio.
0,36	0,278	0,33	0,228	0,315	0,25	0,130	0,171	0,299
0,35	0,265	0,32	0,216	0,302	0,24	0,120	0,159	0,278
0,34	0,252	0,31	0,203	0,289	0,23	0,111	0,148	0,268
0,33	0,239	0,30	0,192	0,276	0,22	0,102	0,138	0,252
0,32	0,225	0,29	0,180	0,263	0,21	0,093	0,126	0,237
0,31	0,212	0,28	0,168	0,249	0,20	0,083	0,114	0,222
0,30	0,198	0,27	0,156	0,236				
		0,26	0,145	0,223				
		0,25	0,133	0,210				

Debe tenerse muy presente que los datos que se dan en la tabla precedente están todos en relacion con la luz del arco, y por consiguiente, para dar el valor que corresponde á cada uno de aquellos habrá que multiplicar dicha luz por el número correspondiente de la tabla. Así pues si la luz es 12 metros y la flecha que conviene al arco que queremos trazar ha de ser el tercio de la luz, dividiremos 4 que es el tercio de 12, por 12 y nos dará 0,33; en la columna de la flecha buscaremos el 0,33, y veremos que es el cuarto lugar para el de 5 centros, y, suponiendo que este es el arco que necesitamos, para conocer la longitud del primer radio, multiplicaremos por 12 el 0,239 que dá la tabla para la flecha 0,33, y el producto 2, metros 868 milímetros, lo tomaremos desde el extremo de la línea de arranque hácia el centro, y el punto que quede determinado por esta distancia, será el centro del primer arco; sobre el cnal se seguirá la construccion segun el problema 49.

De una manera igual procederemos para los arcos de 7 y de 9 centros.

LECCION 14.

61. **Óvalo.** es una curva cerrada, simétrica y convexa, formada por arcos de círculo de diferentes radios, y parecida á una circunferencia que se aplanára por ámbos lados de un mismo diámetro y con igualdad.

Todas las construcciones que hemos explicado de los arcos carpaneles sirven para trazar óvalos con solo trazar otro arco al lado opuesto de la luz ó sea por la parte inferior de la línea *A B* de las figuras 66 á la 72.

Se llaman ejes mayor y menor del óvalo á las líneas *A B* y al doble de la de la *C o* (*Fig.* 70.)

Esta curva se usa con frecuencia en el dibujo, en muebles, en los adornos de jardines, etc.

62. Se dá el nombre de *ovoide* á una curva cerrada, convexa mas estrecha por un lado que por otro y cuya forma se asemeja á la del huevo, y tambien tiene aplicacion en el dibujo de arquitectura y de adorno.

PROBLEMA 51. *Trazar un ovoide.* (*Figura* 73.) La recta *A B*, que puede ser conocida, se divide en cuatro partesiguales; con un radio igual á una de estas partes se traza desde *D*, punto medio de *A B*, la semi-circunferencia *C F E*; desde los puntos *A* y *B* como centros se describen los arcos *E P* y *C P* cuyo radio será *A E*: se unen los puntos *D* y *P* con una recta; desde *m* y *n* puntos medios entre *C* y *D*, y *D* y *E*, se trazan dos paralelas á la *D P* que cortarán los arcos *C P* y *E P* en *H* y en *G*; trazando las rectas *H B* y *G A* se cortarán en *o* cuyo punto se halla á los dos quintos de *D P* á contar desde *P*: por último haciendo centro en *o* se describe con el radio *o G* el arco *H G* y la curva *C H G E F* será el ovoide.

Si la línea *C E* fuera dada para este problema, bastaría prolongarla por ambos lados, tomando en cada uno de ellos una cantidad igual á la mitad de *C E* y proceder como queda indicado.

63. **Espiral.** Se llama espiral á una curva situada en un plano, como las anteriores, que se considera engendrada por un punto que va separándose de otro, que es su centro, y alrededor de él con un movimiento constante y uniforme, por lo cual no puede cerrarse nunca.

Entre las varias espirales que hay, citaremos la espiral paralela, llamada asi porque la curva que la forma tiene una separacion constante é igual; la de Arquímedes, y la de la voluta del capitel jónico.

PROBLEMA 52. *Construir una espiral paralela.* Se traza una recta (*Fig.* 74.) se marcan dos puntos *m n* cuya separacion sea la mitad de la que haya de tener la espiral; haciendo centro en *m* y tomando como radio *m n* se describe una semicircunferencia por la parte superior de la recta; se hace ahora centro en *n* y con el radio *n o*, se describe otra por la inferior: volvemos á tomar como centro á *m*, tomamos como radio *m b* y trazamos otra semicircunferencia por el lado superior que terminará en *f* y desde *n* con el radio *n f* la *f g c* por el inferior, y así podremos continuar, haciendo siempre centro en *m* para las semicircunferencias del lado superior y en *n* para las del inferior siendo el radio la distancia que media desde el centro que se toma y el último punto trazado de la curva que estará siempre en la línea recta.

El punto *n*, primero de la espiral se llama fijo, y el *c*, ó sea el último, generador: á la curva formada par una vuelta completa se llama *espira*; tal es la *n h o k b*.

PROBLEMA 53. *Trazar la espiral llamada de Arquímedes* (*Fig.* 75.) Descrita una circunferencia se dividirá en el número de partes iguales que se quiera, 16 por ejemplo; por cada uno de los puntos de division se tiran radios: el radio *C A* se divide en igual número de partes, numerándolas desde el centro á la circunferencia y se numeran tambien los radios como indica la figura. Se marca en el radio 1.º un punto que se separe del centro una distancia igual á una de las partes en que se dividió el radio *C A*; en el radio 2.º se toman dos partes; en el radio 3.º tres partes, en el 4.º cuatro, y así sucesivamente, siempre partiendo desde el centro y llegaremos al radio 15 con quince partes y al *A* con 16 ó sea todo el radio: haciendo pasar ahora una curva por los puntos señalados se formará una espira y para continuarla, se prolongarán los radios y se llevará sobre el 1.º diez y siete partes de las anteriores, diez y ocho sobre el 2.º etc. repitiendo la operacion; y como desde el centro á la circunferencia hay 16 partes, bastará tomar una parte en el 1.º á partir desde la circunferencia y las que les correspondan en los demás radios.

Para trazar las curvas correspondientes entre cada tres puntos, puede hacerse uso del compás tomando aquellas como arcos de círculo *(P. 42.)*

El fundamento de esta espiral es, que el punto generador se acerca ó separa del centro en una cantidad proporcional al espacio angular que recorre el radio.

64. Si queremos trazar una tangen-

te y una normal en un punto cualquiera de la espiral, averiguaremos el centro que corresponde á la curva en que esté situado el punto y trazaremos el radio que será la normal; la perpendicular levantada en el extremo del radio que está en contacto con el punto dado, será la tangente que se desea.

PROBLEMA 54. *Trazar la espiral de la voluta del capitel jónico.* Sea *P N* (*Fig.* 76) la altura de la voluta, se traza la línea *P N* y se divide en 16 partes iguales, y se levanta una perpendicular en la 7.ª division á partir de *N*, de modo que resultarán siete divisiones entre *N* y el pié de la perpendicular *a b*, y nueve desde este á *P*. Estas líneas se llaman *ejes*. Tomando una de aquellas partes como radio, se describe un círculo desde el punto de interseccion, que se llama *ojo de la voluta;* se inscribe en él un cuadrado de modo que sus diagonales correspondan á los ejes, y por su interseccion se tiran las *S X* y *T Z* paralelas á los lados del cuadrado que se dividirán en seis partes iguales, tres á cada lado, señalando los puntos de division con los números 1, 2, 3,........12 como indica la figura auxiliar de detalle.

Haciendo centro en el punto 1, se traza con el radio 1. *A*, el arco *A E;* haciendo centro en el 2 con el radio 2, *E* se traza el arco *E F*.; haciendo centro en el 3 se traza con el radio 3 *F* el arco *F G* y así se continúa hasta trazar el arco *Q P*.

Trazada la línea exterior, se procede á trazar la interior ó sea la que determina el espesor del *filete*; para esto se divide cada parte de las *S X* y *T Z* en tres partes iguales y las segundas divisiones á partir del centro, se consideran como centros de las nuevas curvas, y procediendo del mismo modo, la espiral *A e f g* ....*q p* quedará determinada, y trazada la voluta del capitel jónico.

Este capitel pertenece á la columna que en arquitectura se llama del órden jónico.

Obsérvese que á medida que el punto generador va separándose del fijo aumenta la amplitud de los diferentes arcos de círculo de que se forma la espiral.

65. **Curva evolvente.** Si colocamos un cordon arrollado á un círculo de modo que sólo dé una vuelta, sujetamos un extremo y tomando el otro extremo lo hacemos girar alrededor del círculo, teniendo siempre tendido el cordon, el extremo móvil de este se irá separando del círculo cada vez mas, hasta que todo el cordon quede en línea recta. Las diferentes posiciones que ocupa el extremo móvil ó punto generador forman una curva que se llama *evolvente*.

PROBLEMA 55. *Trazar una evolvente.* Sea el círculo *A' B'* (*Fig.* 77) al cual se arrolló el cordon; sea *p* el punto donde está sujeto el un extremo y al que llega el otro que está suelto y del cual tiramos para desarrollarlo. Cuando éste se haya desarrollado una cantidad igual á *a b* la parte de cordon separada del círculo tomará la posicion *b* A y el punto A podremos marcarlo en el plano donde se verifique la operacion; cuando se haya desarrollado una cantidad *a c* tomará la posicion *c* B, cuyo punto tambien marcaremos, y del mismo modo iremos señalando los C, D, *E*,...... *N*, *O* y quedará trazada la evolvente.

Trazándola de este modo saldrá la evolvente mayor de lo que debe ser, pues estando el cordon arrollado á la circunferencia será más largo que el desarrollo de esta; y si se quiere trazar sin el cordon, procederemos de este modo: dividiremos el círculo dado en un número de partes iguales, 16 por ejemplo, trazaremos los radios correspondientes á los puntos de division *a*, *b*, *c*, ...*o*, *p*; en los extremos de estos radios se trazarán las tangentes *b* A, *c* B, *d* C,......*a* O; se desarrollará la circunferencia (*P*. 34) y la línea recta que resulte se dividirá en 16 partes iguales; una de estas se llevará sobre la primera tangente *b*, A, dos sobre *c* B, tres sobre la *d*, C, ...16 sobre la *a* *O* cuyas 16 partes son el desarrollo de la circunferencia: los puntos *A, B, C.........N, O* serán todos de la curva evolvente, y estarán más inmediatos entre sí, segun que hayamos dividido la circunferencia en mayor número de partes iguales.

Del mismo modo trazaríamos la evolvente de otra curva que no fuera el círculo.

LECCION 15.

66. **Elipse.** La elipse es una curva parecida al óvalo, del que se distingue en que no está formada por arcos de círculo, y en que tiene la propiedad de que todos sus puntos son equidistantes de otros dos que se llaman *fócos*.

En la elipse (*Fig.* 78) tenemos que considerar los fócos *F F'*; el eje mayor *A B*, y el eje menor *C D*, llamados ejes de simetría; el diámetro de la elipse que es el eje mayor *A B*, en el cual están situados los fócos, divide la curva en dos partes iguales, lo mismo que el menor y el punto de cruzamiento de estos, se llama centro.

Las rectas *F E* y *E* F', que desde un punto cualquiera de la curva van á los fócos, se llaman *radios vectores*, y la suma de estos es igual al diámetro ó eje mayor *A B*.

PROBLEMA 56. *Trazar una elipse conocidos los ejes mayor y menor.* (*Fig.* 78.) Se colocan los dos ejes el uno perpendicular al otro en su punto medio; se toma la mitad del eje mayor, ó sea la parte *O B*, y con ella como radio se traza desde uno de los extremos del eje menor un arco de círculo que cortará al mayor en los puntos *F F'*, y estos serán los fócos. En el eje mayor se trazan puntos equidistantes del centro tales como *G*, *G'*; *H*, *H'*; *I*, *I'*; *J*, *J'*; con la distancia *G A* como radio haciendo centro en *F* se trazan dos arcos *a a'* y desde *F'* con igual radio los *b b'*; tomando ahora como radio la distancia *G B* desde *F'* se cortarán los *a a'* con otros arcos y desde *F* los *b b'* determinando de este modo cuatro puntos *a*, *a'*, *b*, *b'*; que pertenecen á la elipse. Tomamos ahora la distancia *H A* y trazamos desde *F* los arcos *c c'* y desde *F'* los *d*, *d'*; y con la distancia *H B* y como centros *F'* y *F* los cortaremos; de este modo habremos marcando otros cuatro puntos de la curva, y siguiendo así con los demás *E*, *f'*; *g*, *g'*; *h*, *h'*; *j*, *j'*; determinaremos cuantos puntos queramos de la elipse.

Este modo de trazar la elipse se llama, por puntos.

PROBLEMA 57. *Trazar un óvalo semejante á la elipse, valiéndonos de un círculo y un cuadrado.* Con la cuarta parte del eje mayor como radio *(Fig. 79)* trácese el círculo *E G F H*, é inscríbase un cuadrado cuyas diagonales coincidan con los ejes prolongándose indefinidamente sus lados: haciendo centro en *E* y con el radio *E A*, trácese el arco *a A b* y desde *F* el *c B d;* desde *H* con el radio *H a* trácese el *a C c* y desde *G* con igual radio el *b D d* y quedará trazado el óvalo pedido.

PROBLEMA 58. *Trazar una elipse con un cordon. (Fig. 80.)* Se determinan los ejes y los fócos segun el (P. 56); se toma un cordon que sea igual en longitud al eje mayor, y se fijan sus extremos en los fócos; con una punta *E* se pone tirante el cordon y haciéndola correr á lo largo de éste irá trazando una curva desde *A*, por *D* hasta *B* y por el lado opuesto la *A C B* que será una elipse perfecta, pues que en todas las posiciones que tome el cordon forma los radios vectores, que son iguales al eje mayor.

Este sistema se emplea para trazar elipses en los jardines, por lo que se llama *elipse de jardinero.*

Si al ángulo *F E F' (Fig. 78.)* le trazamos la bisectriz *E X*, esta será la normal á la elipse en el punto *E* y si en este punto levantamos una perpendicular á la *E X* tal como la *M N* será la tangente en el mismo.

PROBLEMA 59. *Dada una elipse, hallar su centro, sus ejes y sus fócos.* Sea la elipse la *A C B D. (Fig. 81)* se trazan arbitrariamente dos líneas *a b* y *c d* paralelas y que corten la elipse, las que se dividen en dos partes iguales en la parte que queda dentro de aquella; por los puntos medios *x z* se tira una recta que llegue hasta la elipse en *m* y *n*, y el punto *o* medio entre *m* y *n* será el centro de la elipse.

Haciendo centro en *o* con un radio mayor que el semieje menor trácese un arco como *e f* y por el punto medio de la cuerda correspondiente á la parte interceptada ó sea *g* tírese una recta que pase por *o* la que prolongada por ambos lados llegará á la elipse en *A* y en *B* y será el eje mayor. El eje menor será la *C D* perpendicular á la *A B* en *o*.

Tómese la mitad de *A B* como radio y haciendo centro en *C* trácese un arco que cortará al eje mayor en *F* y *F'*; estos serán los fócos.

67. **Parábola.** La *parábola* es una curva abierta y simétrica que tiene todos sus puntos equidistantes de otro interior llamado *fóco* y de una línea recta llamada *directriz*. En la figura 82 *A B* es la directriz y *F* el fóco; *V* el *vértice* de la parábola, la línea *F L* que desde el fóco va á un punto cualquiera de la parábola, es un radio vector, y la *C D*, perpendicular á la directriz y que pasa por el fóco, *eje de simetría*.

PROBLEMA 60. *Trazar una parábola por puntos, dada la directriz y el fóco. Primero.* Sean *A B* la directriz y *F* el fóco (*Fig.* 82) desde este punto se dirige una perpendicular á *A B* y se prolonga hácia *D*, el punto medio *V* de la distancia *F C* será el vértice de la parábola: tomemos un punto cualquiera *G* en el eje de simetría, levantemos en él una perpendicular á *C D* y con el radio *C G* se traza desde *F* un arco de círculo que cortará dicha perpendicular en *b* y en *n* cuyos dos puntos serán de la parábola: levántese ahora otra perpendicular en *H;* desde *F* como centro y con un radio igual á *C H,* trácese otro arco que cortará la segunda perpendicular en *c* y en *m* y tendremos otros dos puntos de la parábola; siguiendo de este modo fijaremos cuantos puntos se quieran y uniéndolos despues por una curva contínua, esta será la parábola.

Si, pues, entre *V* y *D* se levantan perpendiculares equidistantes y muy cerca las unas de las otras y en cada una fijamos un punto superior y otro inferior, se determinarán todos los necesarios para dar forma á la curva superior y á la inferior que se llaman *ramas* de la parábola.

Obsérvese que todos los puntos que hemos trazado equidistan de la directriz y del fóco, pues siendo *F b*=*C G* será tambien igual al *a b* y por lo tanto el punto *b* está á igual distancia del fóco, que de la directriz.

Segundo. Sean *A B* la directriz y *F* el fóco *(Fig.* 83.*)* El punto *V,* medio entre el fóco y el *C,* corresponde á la parábola y se encuentra en el eje de simetría: márquense puntos *a b c d* en la directriz y trácense paralelas al eje: únanse dichos puntos con el fóco por medio de las rectas *a F, b F, c F, d F;* en la mitad de cada una de ellas se levantan perpendiculares que cortarán á las paralelas anteriormente trazadas, respectivamente en *D, E, G, H,* y estos serán otros tantos puntos de la parábola: procediendo de igual modo desde *C* hácia *B,* se trazará la otra rama.

Tambien esta construccion cumple con la condicion de que todos los puntos equidisten del fóco y de la directriz, pues que el punto *H,* por ejemplo, pertenece á la perpendicular levantada en el punto medio de *d F* y por lo tanto está igualmente separado de *d* que de *F* ó sea de la directriz y del fóco.

PROBLEMA 61. *Trazar una parábola por un movimiento contínuo.* Colóquese una plantilla *C D G* (*Fig.* 84) de modo que el cateto *C G* coincida con la directriz, y el *C D* con el eje, líneas que, así como el fóco, se habrán trazado de antemano; tómese un cordon de igual longitud que el cateto *C D* y fíjese uno de sus extremos en *F,* ó sea en el fóco, y el otro en el vértice *D* de la plantilla: póngase tirante el cordon por medio de una punta y córrase la plantilla desde *B* hácia *A* empezando por fijar la punta en *F:* haciendo que el cateto *C G* coincida siempre con la directriz y tendido el cordon la punta irá recorriendo la curva de la parábola, hasta que marque el punto *H* cuando la plantilla ocupe la posicion *c g d*.

Del mismo modo se traza la otra rama.

PROBLEMA 62. *Trazar una tangente y una normal en un punto de la parábola*. Sea *L* (*Fig*. 82) el punto dado: se une este con el foco por la recta *L F*; por el mismo se tira la *L K* paralela al eje de simetría, y la bisatriz *L J* del ángulo *K L F* será la normal. Levantando en *L* la *M N* perpendicular á la *L J* será la tangente.

LECCION 16.

68. **Hipérbola.** Se llama hipérbola á una curva compuesta de dos ramas (*Figura* 85) que tiene la propiedad de que todos sus puntos simétricos estan situados á igual distancia de dos puntos fijos *F F'* llamados fócos y de una recta dada *A B*. Se llaman radios vectores las rectas *F a'* y *F' a'* que desde un punto *a'* de la curva van á los fócos; se dá el nombre de ejes á las rectas *A B* y *C D* perpendiculares entre sí, de las que la segunda pasa por los fócos y la primera equidista de ellos, y el punto *o* donde se cruzan se llama centro, situado á igual distancia de *F* y de *F'*.

Problema 63. *Trazar una hipérbola dados los ejes.* (*Fig.* 85) Sean los ejes *A B* y *C D;* en un punto *E* del eje *C D* se traza un triángulo rectángulo, siendo uno de sus catetos *E o;* haciendo centro *o* y tomando como radio la hipotenusa *o G* se traza un arco que cortará la *C D* en *F* y *F'* cuyos puntos de interseccion serán los fócos: en el mismo eje se marcan los puntos *H H'* equidistantes de *o;* desde *F* con la distancia *H E* como radio se trazan los arcos *a' a'* y desde *F'* los *a a;* tómese ahora como radio *H' E* y haciendo centro en *H'* y en *H* trácense otros que cortarán los anteriores en *a, a, a', a'*, y estos serán ya cuatro puntos de la hipérbola. Márquense otros puntos *I, I'*, tambien equidistantes de *o* en el eje mayor, y con los radios *E I* y *E I'* haciendo centro sucesivamente en *I* y en *I'* se trazarán los puntos *b, b, b', b'* y de este modo continuaremos hallando tantos puntos como se quiera, los que se unirán por una curva contínua que pasará por *E* y *E'* equidistantes de *o.*

PROBLEMA 64. *Trazar la hipérbola por un movimiento contínuo.* Para esto se coloca en el fóco *F (Fig.* 85) una regla *F N* que pase por *a'* y que pueda girar alrededor del punto *F;* un cordon cuya longitud sea igual á la longitud *F N* de la regla menos la distancia *E' E;* se fija por un extremo al otro fóco *F'* y por el otro al extremo *N* de la regla, con una punta ó lapicero se tendrá siempre unido el cordon á la regla mientras esta gira alrededor de *F*, que en la posicion que ahora tiene la regla, el cordon tendrá la *F' a N,* y corriendo el punzon ó lapicero á lo largo de aquella irá marcando la punta de este una de las ramas de la hipérbola; cambiando la posicion, se trazará la parte correspondiente á la otra rama.

PROBLEMA 65. *Trazar la tangente y la normal á un punto dado de la hipérbola.* Sea *a'* el punto dado; se une con los fócos *F F'*, y la bisatriz *J P* del ángulo *F a F'* prolongada será la tangente: la normal será la *a' R* perpendicular á la *J P* en el punto *a'*.

Esta construccion está fundada en que la tangente de la hipérbola divide en dos partes iguales el ángulo que forman los radios vectores.

PROBLEMA 66. *Desde un punto* S *fuera de la hipérbola trazar tangentes á las dos ramas.* Con el radio *S F* se traza desde *S* un arco *n* y otro *m;* con el mismo radio desde *F'* se cortan estos arcos en *n* y en *m;* se traza una recta desde *m* que pase por *F'* y prolongada cortará la hipérbola en *T';* este será un punto de tangencia y uniéndolo con el *S,* la recta *S T'* será la una tangente: trácese otra recta que desde *n* pase por *F* y corte la otra rama en *T* que será el otro punto de tangencia y la recta *S T* la segunda tangente.

69. Es muy frecuente en las artes y el dibujo tener que quitar los ángulos que forman dos rectas, reemplazándolos por medio de curvas, para dar formas más elegantes, ó por exigirlo así el dibujo ú objeto que queremos representar ó cons-

truir; resultando combinaciones de dos rectas y una curva que se separa mas ó menos del vértice del ángulo segun las exigencias que en muy diferentes casos pueden ofrecerse. Para que estas curvas no produzcan mal efecto, es indispensable que las rectas con que se unen sean tangentes á aquellas, y á esta imprescindible circunstancia deberán sujetarse siempre, bien sean circulares ó parabólicas, las que tengamos que trazar.

PROBLEMA 67. *Trazar un arco de círculo de un radio dado dentro de un ángulo cuyos lados sean tangentes á él.* Sea *A B C* el ángulo (*Fig.* 86) y *D E* el radio. Sobre el lado *B A* se levantará una perpendicular *F G*, igual á *D E*, se trazará la bisectriz *B S* y la *G O* paralela á la *B A;* en el punto *O* de interseccion se trazará la *O H* paralela á *F G*; en el lado *B C* se tomará una parte *B K*=*B H* y se unirá el punto *K* con el *O*. Los puntos *H, K* serán los de tangencia, las líneas *K O* y *O H* los radios de la curva y haciendo centro en *O* se trazará la *H L K* que será la curva pedida.

PROBLEMA 68. *Trazar la misma curva dado el ángulo A B C y la ságita B L.* Trácese la bisectriz *B S*, tómese desde *B* una distancia *B L* igual á la ságita dada, por el punto *L*, levántese una perpendicular á *B S* que cortará los lados del ángulo en *a* y en *b;* desde estos dos puntos márquense las distancias *a H* y *b K* iguales á *L a* y levántense las perpendiculares *H O* y *K O* á los lados del ángulo; el punto *O* será el centro de la curva y las *O H, O L* y *O K* radios de la misma, con uno de los cuales se traza la *H L K*.

PROBLEMA 69. *Unir los lados de un ángulo por medio de una curva parabólica tangentes á ellos en dos puntos equidistantes del vértice.* Sean *A B* y *A C* (*Fig.* 87) las rectas que forman ángulo en *A*, y sean *M* y *N* los puntos de tangencia: la bisectriz del ángulo *B A C* ó sea la línea *A D*, será el eje de la parábola: siendo *A M*=*A N* la línea *M N* que une los puntos de tangencia será perpendicular al eje, y el punto *V* medio entre *E* y *A* ó sea el pié de la perpendicular y vértice del ángulo, será el vértice de la parábola; si en *M* levantamos la *M G* perpendicular á la *A B* y la mitad de la distancia *E G* la llevamos á la derecha y á la izquierda de *V* sobre el eje nos dará los puntos *H F*, que serán los que correspondan á la directriz *J K* y al fóco *F*. Conocidos estos datos puede trazarse la curva parabólica *M V N* por cualquiera de los medios explicados anteriormente.

PROBLEMA 70. *Unir por medio de una curva parabólica dos rectas tangentes á ella en dos puntos no equidistantes del vértice que formen las rectas.* Sean *A B* (*Fig.* 88) y *A C* las rectas que forman ángulo en *A* y sean *M* y *N* los puntos de tangencia no equidistantes de *A*. Únanse los puntos *M N*, determínese el punto *D*, medio entre *M* y *N* y únase con el *A*; la mitad de la línea *D A* nos dará el punto *E* que lo es de la curva. Si por este trazamos una paralela á *M N*, la *F G* será tangente á la curva en *E* y si unimos los *M E* y *E N* y por los puntos medios de estas líneas trazamos la *m F* y *n G*, los *H* é *I* que están en la mitad de *m F* y *n G*, serán otros puntos de la parábola. Siguiendo de este modo fijaremos todos los puntos que se quieran.

Por el mismo método puede resolverse el problema anterior sin buscar de antemano los fócos.

70. **Molduras.** Las molduras son una combinacion de rectas y curvas que formadas en una chapa de metal y recortadas se emplean para hacerlas de yeso, recorriendo la chapa que se llama *terraja* ó *tarraja* á lo largo del sitio donde se colocan. Las que se usan con más frecuencia en las cornisas, basas, remates, etc., pueden estar sujetas á las dimensiones y formas que determinan los diferentes órdenes de arquitectura, ó pueden ser al capricho del que las hace, segun el objeto á que se dediquen; pero aún en este último caso se emplean parte de las molduras arquitectónicas combinándolas segun conviene

y segun el gusto del que las combina.

Entre las diferentes partes que entran á componerlas se hallan *el filete, la faja, el junquillo, el toro, la media caña, bocel, gola recta, gola reversa, talon, talon reverso, escocia y otras.*

El filete y la faja están formadas por líneas rectas; el junquillo y el toro, por un semicírculo, la media caña y el bocel por un cuarto de círculo, las golas, el talon y la escocia por arcos de círculo.

PROBLEMA 71. *Trazar un filete.* Queda trazado con dos líneas paralelas y una perpendicular á ellas como indica la figura 89, se usa dándole un vuelo ó salida igual á su altura.

La faja *(Fig. 90)* se traza lo mismo que el junquillo, pero el vuelo y la altura puede ser arbitraria si bien debe estar en armonía con el aspecto general del sitio donde se coloca.

PROBLEMA 72. *Trazar el Toro.* Dada la dimension *A B (Fig. 91)* se trazan dos paralelas por *A* y por *B;* la perpendicular á ellas *A B,* que estará en la superficie sobre que ha de volar la moldura se divide en dos partes iguales y por el punto medio *O* se traza la semicircunferencia *A E B* con el radio *A O.*

El junquillo es igual al toro pero de dimensiones mucho menores. *(Fig. 92.)*

PROBLEMA 73. *Trazar una media caña.* Dada la altura *A B (Fig. 93)* trácense las paralelas *A C* y *B D* perpendiculares á *A B* y el cuadrado *A E O B;* desde *O* como centro y con el radio *O B* trácese el arco *E B* que será la media caña.

Del mismo modo se trazará la media caña inversa *(Fig. 94.)*

PROBLEMA 74. *Trazar el bocel.(Fig. 95)* Trazadas las paralelas *A C* y *B C* prolónguese la primera, y haciendo centro en *A* descríbase el arco *E B* tomando por radio la altura *A B* y quedará determinado el bocel.

El bocel inverso *(Fig. 96)* se traza del mismo modo.

PROBLEMA 75. *Trazar la gola recta.* (*Fig.* 97) Despues de trazar las paralelas *A C* y *B D* prolónguese la primera de modo que *A E* sea igual á *A B;* unidos *E* y *B* por una recta se divide esta en dos partes iguales, haciendo centro en *O*, punto medio de aquellas, se traza con el radio *O E* un arco, que con el mismo radio se corta en *F* desde *E* y desde este punto se traza, siempre con el mismo radio, la curva *E O;* del mismo modo se determina el centro *G* y desde él se describe el arco *O B,* quedando trazada la gola.

Por igual procedimiento se trazan, la gola reversa *(Fig. 98);* el talon *(Fig. 99)* y el talon reverso *(Fig. 100),* que se distinguen de la gola por la posicion que ocupan las curvas.

PROBLEMA 76. *Trazar una escocia.*

(*Fig.* 101.) En el punto *A* de la recta *A B* trácese una perpendicular *A C* y desde *C* la *C D* paralela á *A B* siendo *C D*=*C A*; con una de estas como radio descríbase desde *C* el arco de círculo *A D*. En un punto *E* tomado entre *C* y *D* trácese la perpendicular *E F* igual *E D* y con ella por radio trácese desde *E*, la curva *D F*; tírese desde *F* la recta F *G* paralela á *A B* y la curva *A D F* será una escocia entre dichas paralelas.

Ordinariamente el radio *E F* es la mitad del *A C*, cuando se traza esta curva con arcos de círculo, con lo cual hace más elegante, pero es muy frecuente trazarla á capricho sin sujetarse á reglas fijas, y únicamente al buen gusto del que la dibuja.

Del mismo modo se traza la escocia reversa, que se distingue de la anterior en que la curva de mayor radio se coloca en la parte inferior y la menor en la superior.

Combinando estas molduras se forman las cornisas y otros diferentes adornos, pertenecientes á la arquitectura.

CAPÍTULO IV.

Polígonos semejantes y superficies

LECCION 17.

71. Serán semejantes dos polígonos, cuando teniendo el mismo número de lados, los ángulos colocados en el mismo órden sean iguales y los lados adyacentes proporcionales. Tales son los triángulos *E H F* y *E I G* (*Fig.* 54) pues los ángulos en *H* y en *I* están colocados en el mismo órden y son iguales, los en *F* y en *G* se hallan en igual caso y el ángulo en *E* es comun á los dos triángulos; y los lados de uno comparados con los del otro son proporcionales.

El lado *E H* y el *E I* se llaman homólogos como tambien los *H F* é *I G*, y en general los lados adyacentes á ángulos respectivamente iguales se llaman homólogos.

Si tuviéramos que trazar un triángulo semejante á otro, y cuyos lados hubieran de tener una relacion dada, la tercera parte por ejemplo, tomaríamos en uno de sus lados, *E G* la tercera parte de dicho lado desde *E* y trazando la *F H* paralela á la *G I* el triángulo que resultára sería el pedido

Si tuviéramos que trazar un polígono semejante á otro (*Fig.* 42=2.ª) y cuyos lados fueran la mitad de los del polígono dado, trazaríamos la *a' b'* paralela á la *a b* y que fuera la mitad de larga que esta; por el puuto *a'* trazaríamos una paralela á la *a g*; por el punto que la nueva recta encontrase al radio *o g* se tiraría otra paralela al lado *g f* y así continuaríamos hasta llegar á *b'*, y el nuevo polígono sería semejante al anterior.

En toda figura semejante á otra, todas las líneas de la una tienen con las homólogas de la otra la misma relacion; es decir que si una es la tercera parte de la homóloga de la otra, todas las líneas del polígono menor serán la tercera parte de las homólogas del mayor. Por esta razon en dos triángulos semejantes, en los que la base del uno sea la mitad que la del otro, la altura del primero será tambien la mitad de la del segundo, y en general tendrán las alturas la misma relacion que las bases.

Considerando el círculo como un polígono regular de infinito número de lados, todos los círculos serán semejantes y por lo tanto, lo serán tambien sus circunferencias, sus radios sus diámetros y las cuerdas que subtienden iguales ángulos.

Como cualquier polígono, por irregular que sea, podemos descomponerlo en triángulos, para trazar otro semejante á él, podrá construirse triángulo por triángulo, y el completo de estos será el polígono que se desea.

Puede hacerse valiéndonos del método esplicado en la cuarta solucion del problema 26 haciendo que las distancias *m n; n o; o f;* etc. (*Fig.* 42=4.ª) tengan en el que se construya la relacion que se quiera con el que se dá y las *m g; n a; o b;* etc. tengan tambien la misma relacion y resultará un polígono semejante.

72. **Compás de reduccion.** Para facilitar esta operacion se puede hacer uso del *compás de reduccion* (*Fig* 102) el que se compone de dos piezas *A D* y *B C* unidas por un tornillo *T* que se puede correr á voluntad por unas ranuras para colocar las distancias *A B* y *C D* en la proporcion ó relacion que se quiera: á este fin tiene una graduacion en una de las piezas y una línea de fé en el tornillo y colocando en la graduacion, en $\frac{1}{2}$ por ejemplo, la línea *A B* será la mitad de *C D* y si se coloca en $\frac{1}{8}$ será la *C D* ocho veces mayor que *A B*.

Para trazar con él una figura semejante que sea menor que la dada, despues de colocarlo en la relacion que se desee, se tomarán los lados de la figura con las puntas largas y se marcarán en el dibujo con las pequeñas. Si por el contrario quisiéramos hacerla mayor, operaríamos del modo inverso.

73. **Triángulo de reduccion.** Puede usarse para reducir una figura el triángulo de reduccion que consiste en trazar en el papel un triángulo rectángulo cuyos catetos tengan entre sí la relacion que deba tener la figura dada con la que se quiere construir. Tomando una distancia cualquiera en el cateto mayor y trazando en el punto á donde llegue una paralela al cateto menor, esta será la distancia que tendrá la relacion dada con la distancia medida, y por lo tanto la que corresponde al lado homólogo de la nueva figura respecto de la dada.

Trazado este triángulo en un papel, y tirando paralelas muy inmediatas entre sí al cateto menor, no habrá necesidad de estar trazándolas á medida que se van midiendo las distancias, y esto permite utilizarlo con gran rapidez.

Todavía podemos hacer uso del papel cuadriculado *(Fig. 103.)* Si tuviéramos que copiar la figura A, B, C,......,H en la relacion de un medio, la encerraríamos en una cuadrícula; trazaríamos otra cuyos lados fueran la mitad de los de la primera y dentro de ella iríamos colocando los diferentes puntos ó vértices de la figura en el cuadro que le correspondiera, auxiliándonos con la numeracion para hacerlo con mayor facilidad: así veríamos que el vértice *A* se halla en la línea 4.ª de las trazadas de arriba á abajo y en la 2.ª de las de izquierda á derecha, y marcaríamos en la cuadrícula pequeña el punto que le correspondia que es el *a*, y cuando todos los vértices estuvieran colocados se trazarían los lados, obteniendo de este modo una figura semejante á la dada.

Entiéndase que en los procedimientos que acabamos de explicar para trazar una figura semejante á otra y que esté con esta en una relacion dada $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, etc. esta relacion se refiere á la longitud de los lados, no á la superficie de las figuras.

LECCION 18.

74. **Medidas de superficie.** Sabemos que en la superficie hay que considerar dos dimensiones; la longitud y la latitud (4): sabemos tambien que figura en geometría plana se llama la parte de un plano cerrado por líneas, y este plano precisamente es el que hemos de medir. Pero asi como para medir la longitud ó dimension lineal nos valemos de una unidad lineal y conocida, que sirva de término de comparacion, y para saber la longitud de una hebra de hilo tomamos el metro y con él la relacionamos, diciendo que tiene uno, dos ó tres metros lineales; para medir superficies tenemos que relacionarlas con una medida superficial. Así pues, cuando tenemos que embaldosar una habitacion, no basta saber lo que esta tiene de larga ó de ancha, sino que hay necesidad de conocer ambas dimensiones y compararlas con la baldosa, por ejemplo; si la superficie que tuviéramos que embaldosar fuera el de la figura 103 veríamos que en la línea superior de iz-

quierda á derecha caben 7 baldosas del tamaño de cada division, y que en la primera línea de arriba á abajo caben 6; tomando pues 6 filas de á 7 baldosas cada una, serán 42 las necesarias, y diremos que esta superficie mide 42 baldosas. Del mismo modo podríamos haber hecho uso de otra unidad, como el metro, pero como la palabra baldosa puede llevar consigo la idea de su forma, y al metro por ser unidad lineal no le sucede lo mismo, para expresar que hacian falta tan tos cuadros que tuvieran un metro por cada lado, diríamos que media tantos *metros cuadrados*.

En aritmética se dice que un número está elevado al cuadrado cuando se multiplica por sí mismo, así el cuadrado de 5 será 5 multiplicado por 5 igual 25 y el de 6 será $6 \times 6 = 36$: para indicar esta operacion se escribe 6^{2} que se lee 6 elevado al cuadrado.

En Geometría, pues, tenemos que multiplicar unas líneas por otras apreciando numéricamente su valor, y como no todas las superficies son cuadrados perfectos, en cuyo caso bastaría elevar al cuadrado uno de sus lados, es preciso sujetar la medicion de las superficies á reglas fijas que vamos á exponer.

La figura ó superficie de esta se llama *área*, y *área* será el espacio limitado por líneas.

75. **Superficie ó área de un triángulo.** La superficie de un triángulo se halla *multiplicando su base por su altura y dividiendo por dos el producto.* Cuya fórmula llamando B á la base, A á la altura y S á la área será $\frac{1}{2}\ B \times A = S$; es decir que en un triángulo cuya base mida 4 metros y cuya altura mida 3 multiplicaremos 4 por 3 y del producto 12 tomaremos la mitad que será 6 metros cuadrados. Si la unidad hubiera sido la vara el resultado serían varas cuadradas, y en general, el número que resulte serán unidades cuadradas de igual clase que la que hubiera servido de tipo.

Fúndase dicha fórmula en que todo triángulo es la mitad de un parelelógramo de igual base y altura.

Area del cuadrado. El área de un cuadrado será el *producto de su base por su altura* y como la altura es igual á la base, no tendremos que medir mas que una de estas dimensiones y multiplicarla por sí misma, de cuya operacion ha tomado nombre esta figura; su fórmula será $S = B^2$

Los paralelógramos se miden lo mismo que el cuadrado, esto es, multiplicando su base por su altura y la fórmula será $S = B \times A$.

La superficie de un trapecio se halla

multiplicando la altura por la semisuma de las bases paralelas, ó por una línea paralela y equidistante á ellas; y su fórmula, llamando B á la base mayor y b á la menor, será $S = A \times \frac{B+b}{2}$.

En general para averiguar la superficie de un polígono cualquiera se descompondrá en triángulos y hallando el área de cada triángulo y sumando despues la de todos, el total representará la superficie que se mide.

76. Se llama *apotema* á la línea $O\ G$ (*Fig.* 49) ó sea la perpendicular que desde el punto medio de uno de los lados de un polígono regular va al centro de un círculo inscripto ó circunscripto á él y por lo tanto se halla equidistante de todos los vértices. *Radios* del polígono regular son las rectas que desde el centro van á los vértices.

Segun hemos dicho, para hallar la superficie de un polígono regular podíamos descomponerlo en triángulos formados por los lados del polígono y por los radios; tomando aquellos por bases y las apotemas por alturas, y suponiendo que fuera el polígono de 5 lados y que cada uno de estos midiera 4 metros, llamando A á la apotema diríamos, superficie $= \frac{4 \times A}{2} + \frac{4 \times A}{2} + \frac{4 \times A}{2} + \frac{4 \times A}{2} + \frac{4 \times A}{2}$ y esto sería lo mismo si lo expresáramos así $S=\frac{1}{2}$ $(4+4+4+4+4)\times A$ ó lo que es igual $\frac{1}{2}$ $20 \times A$ y como 20 es la suma de todos los lados del polígono, el área del polígono regular será *la mitad del producto de su perímetro por la apotema* y la fórmula $S=\frac{1}{2}$ $P\times A$, en la que P es el perímetro y A la apotema.

Area del círculo. Considerando á la circunferencia como á un polígono de infinito número de lados, el radio y la apotema serán iguales y por lo tanto el área se obtendrá multiplicando la circunferencia por el radio y dividiendo por dos el producto. Para averiguar la dimension de la circunferencia podríamos desarrollarla, pero el cálculo dá una cantidad constante que multiplicada por el radio dá la superficie, y que es fácil retener en la memoria, si no con todas las cifras que se emplean en otras operaciones, con las necesarias para los casos que en las artes y el dibujo pueden ocurrir: esta cantidad constante es 3,141592..... que se distingue ó se expresa con la letra del alfabeto griego π llamada pi, cuya cantidad multiplicada por 2 y despues por el radio nos dá el desarrollo de la circunferencia y puede representarse en esta fórmula: Desarrollo de la circunferencia igual á $2 \times 3, 1415 \times R$, siendo R el radio; ó $2 \pi R$.

Si el producto que resulta de la fórmula anterior lo multiplicamos por la mitad del radio, dará la superficie del círculo, pero tambien el cálculo ha simplificado esta operacion con otra fórmula, que, por entrar los mismos elementos que en la anterior, se retiene con facilidad. Esta se reduce á elevar al cuadrado el radio ó sea á multiplicarlo por sí mismo y despues multiplicar el producto por la cantidad constante 3, 1415.... de donde puede expresarse así la fórmula:

Superficie del círculo $3, 1415 \times R \times R$; ó $3, 1415 \times R^2$; ó, por último, πR^2.

Se llama *sector* de un círculo al espacio comprendido entre dos radios y el arco que estos abrazan; tal es el *A O F* (*Fig.* 48) y *Segmento* al espacio comprendido entre una cuerda y su arco, como *A F* (*Fig.* 49).

Para hallar la superficie del sector hallaremos primero el desarrollo del arco que abraza y lo multiplicaremos por la mitad del radio.

El desarrollo se averigua calculando primero el de la circunferencia á que corresponde, despues veremos el número de grados que mide el ángulo formado por los radios y se hará la siguiente comparacion: la circunferencia abraza 360.°, el ángulo del sector mide, por ejemplo 30.°; el desarrollo del arco estará, pues, con el de la circunferencia en la misma relacion que lo están los 30.° con los 360.° Asi, pues, si la circunferencia mide 90 metros multiplicaremos 90 por la medida del ángulo, ó sea por 30, y el producto se dividirá por 360, y $\frac{90 \times 30}{360} = 7,5$ será el desarrollo que se busca.

Multiplicado este por la mitad del radio nos dará la superficie del sector.

La superficie del segmento es igual á la del sector, menos la del triángulo formado por la cuerda y los radios que pasan por sus extremos, cuando el segmento es menor que medio círculo y si es mayor, á el área que resulte se suma la del triángulo para que dé la del segmento.

LECCION 19.

PROBLEMA 77. *Dada la base de un rectángulo trazarlo con una superficie tambien dada.* Sabemos que multiplicando la base por la altura se obtiene la superficie del rectángulo; luego segun el enunciado del problema su solucion se reduce á buscar un número que multiplicado por la base conocida de la superficie tambien conocida, y este no puede ser otro que el cociente de dividir la superficie por la base. Así, pues, si la base es 4 metros y la superficie 26 metros cuadrados, 26 dividido por 4 será $6^{m}50$, y esta será la altura del rectángulo, pudiendo por lo tanto construirlo.

PROBLEMA 78. *Trazar un círculo que mida una superficie dada.* Se divide la superficie por 3, 14159..... y se halla despues un número que multiplicado por sí mismo sea igual al cociente de la division. Sea la superficie 50, 265 que divida por 3, 14159 dá 16; el número $4 \times 4 = 16$, luego 4 será el radio con que ha de trazarse el círculo.

Para resolver este problema con facilidad, hace falta conocer la operacion que en aritmética se llama extraccion de la raiz cuadrada: con ella se averigua el número que multiplicado por sí mismo dá por producto una cantidad dada; pero suponiendo que algunos de los alumnos no la sepan, diremos que por tanteo se obtiene tambien, aunque es algo molesta la operacion. (a)

77. *Relacion entre las líneas y superficies de las figuras planas.* Así como para hallar la relacion entre dos líneas se comparan sus longitudes, para las áreas se comparan sus superficies, y como las áreas se producen multiplicando las líneas de las figuras por otras líneas de las mismas, de aquí que la relacion entre las líneas y las superficies esté sujeta á este producto. Si comparamos dos cuadrados de los que el lado del uno sea 2 y el del otro 4, estos lados estarán en relacion de 1 á 2 porque el segundo es doble que el primero, pero la superficie del primero será $2\times2=4$ y la del segundo será $4\times4=16$, luego la relacion de las superficies será la de 4 es á 16, y siendo el 4 la cuarta parte de 16, su relacion es de 1 á 4. Observemos ahora que si en la primera relacion 1 es á 2 elevamos al cuadrado estos

(a) Convendria que el Profesor esplicara la raiz cuadrada y la raiz cúbica para cuando se trate de los volúmenes.

números serán $1\times1=1$ y $2\times2=4$, ó lo que es lo mismo, la relacion que encontramos antes para las superficies, y sucederá lo mismo si en vez de 1 á 2 tomamos 2 á 4, porque $2\times2=4$, y $4\times4=16$, tambien igual á la primera que encontramos en las superficies; luego la relacion entre las superficies de dos figuras semejantes, es igual á la de los cuadrados de sus líneas homólogas.

Teniendo esto presente, si queremos construir un cuadrado que tenga doble superficie que otro, no lo trazaremos con lados de doble longitud, pues que resultaria cuatro veces más grande, sino que buscaríamos un número que multiplicado por sí mismo diera un producto que fuera igual á la superficie dada multiplicada por dos, y dicho número seria el valor de la línea que correspondia como lado al cuadrado que deseábamos trazar.

PROBLEMA 79. *Trazar un cuadrado de doble superficie que otro dado.* Si al cuadrado $a\ b\ c\ d$ (*Fig.* 104) le trazamos la diagonal $b\ d$ y tomándola como lado se construye el cuadrado $d\ b\ e\ g$, la superficie de este será doble que la del primero. En efecto, el área de este será $d\ c\times c\ b$ y la del triángulo $d\ b\ e$ será $\frac{1}{2}$ de $d\ e\times c\ b$ $=d\ c\times c\ b$, luego este triángulo y aquel cuadrado tendrán superficies iguales, y como el $d\ b\ e\ g$ se compone de los triángulos *d b e* y *d g e* que son iguales, la superficie de *d b e g* será doble que la del cuadrado *a b c d*.

PROBLEMA 80. *Trazar un polígono semejante á otro y que tenga doble superficie que el que se dá.* Sea el polígono *a b c d e f*. Tómese un lado, *a b* por ejemplo, como radio y trácese un círculo *(Fig.* 105*)* inscríbase en él un cuadrado, y tomando un lado de este como el lado homólogo del polígono dado, constrúyase el nuevo polígono que será de doble superficie que aquel.

Otra solucion: Sobre uno de los lados del polígono dado constrúyase un cuadrado tal como *d e h g;* la diagonal de este *d h* será en el polígono que se construya el lado homólogo del que se dió y resultará de doble superficie.

PROBLEMA 81. *Trazar un polígono semejante á otro que tenga triple superficie que el dado.* Tomando como radio un lado del polígono que se dá trácese un círculo, al que se inscribirá un triángulo equilátero y con el lado de este como homólogo del que se tomó constrúyase el polígono pedido, que tendrá triple superficie que el dado.

PROBLEMA 82. *Trazar un polígono semejante y de cuádruple superficie que otro dado.* Bastará construirlo de modo que el lado del nuevo polígono sea doble del homólogo del polígono dado.

PROBLEMA 83. *Construir un polígono semejante á otro que tenga con él una relacion dada (Fig. 106).* Sea la relacion 2 á 3. Trácese la línea *a c* y divídase en cinco partes iguales, tómense dos hasta *d* y levántese la perpendicular *d b:* tomándose *a c* como diámetro descríbase la semicircunferencia *a b c*, llévese sobre el lado *b c* del triángulo *b a c* un lado del polígono que se dá que llegará á *n* y por este punto se traza la *n m* paralela á la *a c:* esta línea *n m* será en el nuevo polígono el lado homólogo al que se tomó para determinar la distancia *b n*, y construyéndose con él un polígono semejante al dado, estará con él en la relacion de 2 á 3.

78. **Equivalencias.** Se dice que dos figuras son equivalentes cuando sin ser iguales ni semejantes tienen igual área.

Conviene distinguir bien la igualdad, la semejanza y la equivalencia: serán iguales dos figuras cuando superpuestas se confundan; semejantes, cuando sin ser iguales, pudiéramos tomar la una como un *retrato* de la otra, y equivalentes cuando tienen el mismo valor superficial aunque no tengan la misma forma. Valiéndonos de una comparacion vulgar, diremos que un duro es igual á otro duro, que si miramos este duro á través de un cristal que aumente ó disminuya el tamaño de los objetos, la figura del duro vista con auxilio del cristal será semejante á la que realmente tiene el duro, y que un duro es equivalente á cinco pesetas, pues siendo diferentes tienen el mismo valor.

Si queremos construir un polígono equivalente á otro pero con menor número de lados, por ejemplo, un triángulo equivalente á un cuadrado, habremos de buscar para la base y la altura de aquel unas dimensiones tales que multiplicadas entre sí, la mitad de su producto sea igual al que resulte de multiplicar la base por la altura del cuadrado, con lo cual la superficie será la misma.

PROBLEMA. 84. *Construir un triángulo equivalente á un cuadrado.* Sea el cuadrado *a b c d* (*Fig.* 104). Trácese la diagonal *a c* y una paralela á esta desde *b* prolónguese el lado *d c* hasta que encuentre aquella en *e*, y el triángulo *d b e* será equivalente al cuadrado. En efecto, el triángulo *b c d* es igual á la mitad del cuadrado y es igual tambien al triángulo *b c e*, luego este será igual á la otra mitad del cuadrado y juntos los dos ó sea el *d b e* igual al cuadrado.

PROBLEMA 85. *Construir un cuadrado equivalente á un triángulo.* Se halla una media proporcional entre la base y la mitad de la altura del triángulo y esta será el lado del cuadrado que se pide; pues si se multiplica esta por sí misma dará el mismo producto que la base del triángulo multiplicada por la mitad de su altura.

PROBLEMA 86. *Construir un cuadrado*

equivalente á un paralelógramo dado. Se halla una media proporcional entre la base y la altura del paralelógramo, y este será el lado del cuadrado equivalente.

PROBLEMA 87. *Construir un polígono equivalente y con un lado menos que otro dado.* Sea *a b c d e f* (*Fig.* 107) el polígono de seis lados que se dá; trácese la diagonal *b d*, por el punto *c* tírese la *c g* paralela á la diagonal y prolónguese el lado *e d* hasta *g* encuentro de la paralela, se une el punto *b* con el *g* y el polígono *a b g e f* tendrá un lado ménos que el anterior y será equivalente á él, pues el triángulo *b c o* que se quita del anterior es igual en superficie al *d o g* que se añade. En efecto, los triángulos *b g d* y *b c d* son equivalentes por tener base y altura iguales, y si á ambos les quitamos la parte comun *b o d*, resultarán iguales las superficies de *b c o* y *d o g*.

Si este nuevo polígono lo reducimos á un lado ménos por igual procedimiento, y con el que resulte hacemos lo propio; llegaremos á obtener un triángulo equivalente al primer polígono; y si dicho triángulo lo convertimos en cuadrado equivalente (*P.* 85) resultará que todo polígono puede trasformarse en un cuadrado equivalente.

PROBLEMA 88. *Construir un cuadrado equivalente á un círculo.* Este es el problema de la cuadratura del círculo, que hasta el presente no se ha podido resolver, y que es de creer que no se resolverá nunca. Para ello hay que hallar una media proporcional entre la mitad del radio y la circunferencia: pero como sería preciso poder trazar prácticamente con la regla y el compás una recta exactamente igual al desarrollo de la circunferencia, y como este solo se puede hallar aproximado pero nunca igual, de aquí que la resolucion de este problema será tambien aproximada y por lo tanto el cuadrado que se construya será próximamente equivalente al círculo dado y nada más.

LECCION 20.

79. **Instrumentos para medir superficies.** Aunque por muy irregulares que sean los polígonos podemos siempre descomponerlos en figuras que permitan hallar con facilidad su superficie, se han ideado varios aparatos con el fin de invertir ménos tiempo en averiguarla, sujetando el procedimiento á una sencilla operacion de aritmética, por muy irregulares que aquellos sean. Estos aparatos se llaman *planímetros* y entre ellos se hallan la *ruleta de Dupuit*, el planimetro de Beuviere, el de Wetli y otros cuya complicacion no nos permite describirlos, si bien conviene tenerlos á la vista para dar la esplicacion del aparato.

Ruleta de Dupuit (Fig. 108*)*. Se compone este aparato de dos ruedas *A* y *B* unidas á un mango por una guarnicion metálica; la rueda *B* marcha sobre el papel apoyando su circunferencia y lleva adaptado á su eje un piñon que pone en movimiento la rueda *A*. Este piñon tiene diez dientes que engranan en los de dicha rueda que son ciento y resulta que mientras esta dá una vuelta completa, el piñon y la rueda *B* dan diez. Ambas van numeradas desde 0 á 10, correspondiendo los ceros á las agujas *a* y *b* cuando el instrumento está en cero. El desarrollo de la circunferencia de la rueda *B* es igual á un centímetro.

Para hallar la superficie de una figura con este aparato, se prepara aquella trazando en su superficie, rectas paralelas y equidistantes, que lleguen al perímetro, y cuya separacion sea una cantidad conocida y que preste facilidad para la operacion, por ejemplo, un centímetro: con estas rectas habremos dividido la figura en trapecios, cuyas bases serán las paralelas y la altura la distancia que las separa. Recorriendo dichas paralelas con la rueda *B* una tras otra, al terminar la última nos dirá la lectura de ambas ruedas el número de centímetros y fraccion de centímetros que se ha recorrido, y si el dibujo está en escala natural bastará multiplicar esta lectura por la distancia que hay entre dos paralelas para hallar la superficie, que será el producto.

Imaginémonos que al terminar de recorrer las paralelas la aguja de la rueda *B* marca el núm. 7 y la de la rueda *A* señala el 9 y ha dado además dos vueltas completas. Como la rueda *B* en cada vuelta recorre un centímetro, la grande en cada vuelta ha recorrido 10 centímetros, y el número 9 en que se detuvo nos dice que en la última rotacion habia recorrido $\frac{9}{10}$ partes ó sean 9 centímetros, luego lo que esta rueda marca es 29 centímetros: la pequeña cada vuelta que dá hace recorrer un número á la grande y el núm. 7 de su graduacion nos dice que no llegó á dar la última vuelta completa pero que recorrió $\frac{7}{10}$ partes, y siendo el valor de la vuelta un centímetro serán 7 milímetros los recorridos; sumando estos á la lectura de la rueda *A* el total será 29 centímetros y 7 milímetros, ó sea 0,297. Si la distancia entre las paralelas era un centímetro, la superficie será 0,00297 metros cuadrados.

Cuando la escala del dibujo no es la natural y sí la de $\frac{1}{100}$, esto es, que un metro natural representa 100 metros del dibujo, cada centímetro de este será un metro y bastará multiplicar por 100 la lectura hallada en la ruleta para obtener la línea equivalente de la escala, y esta cantidad multiplicarla por lo que en la misma escala tengan de separacion las paralelas. Del mismo modo se procederá cualquiera que sea la escala.

Como se vé, este aparato no hace más que recorrer líneas rectas, y podríamos reemplazarlo con una escala, pero acostumbrado á usarlo se obtienen resultados con mucha rapidez.

No es completamente exacto el sistema, pero como cualquiera que sea el que se use, cuando las áreas se hallan gráficamente, tampoco lo será, se adopta despreciando los errores, que en la mayoria de los casos son muy pequeños, cuando las superficies que se hallan son de poco valor ó cuando aquellas diferencias no nos conducen á mayores errores para otros cálculos.

80. Hay otras varias clases de planímetros, y han llegado á idearse y construirse con admirable perfeccion, pero su esplicacion exige que el discípulo tenga mayor número de conocimientos de los consignados en estas lecciones, si ha de comprender bien su mecanismo, y en tal concepto nos limitaremos á decir que estos instrumentos, más ó ménos complicados, se componen de dos brazos unidos, de los cuales el uno está fijo en el papel y con el otro se recorre, por medio de un estilo ó aguja unida á él, el perímetro de la figura cuya superficie se mide: una rueda que gira, sobre el papel en unos y sobre un plano adosado al aparato en otros, á medida que se mueve la aguja, pone en movimiento á otra que con aquella se halla combinada y en una division que hay en las mismas se lee la superficie limitada por el perímetro recorrido.

Lo mismo que la ruleta pueden los planímetros estar divididos en escala natural ó no, y en todo caso hay que traducirlas á la escala en que esté hecho el dibujo, lo cual se consigue trazando un rectángulo ó un círculo cuyos lados del primero ó el radio del segundo represente una cantidad en la misma escala que esté el dibujo y con esta escala se halla su superficie: se recorre el perímetro con el planímetro y se vé la lectura de este; si fuera la misma que la superficie hallada, el dibujo y el instrumento estarian en la misma escala, y si no se busca un número que multiplicado por la cifra dada en el planímetro dé la superficie medida directamente, para lo cual basta dividir esta por la lectura del aparato. Este número será la cantidad por la que se multiplicarán las lecturas del aparato.

Si se conoce la escala del planímetro, la relacion que tendrá con la del dibujo será la que tengan el cuadrado de ambas escalas.

NOTA. Sería muy conveniente que el Profesor dispusiera de uno ó varios planímetros para poder enseñar prácticamente su uso, y las correcciones que exige el aparato para que las operaciones no resulten equivocadas.

PARTE SEGUNDA.

CAPÍTULO V.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO.

LECCION 21.

81. Se llama línea *vertical* á la que tiene la misma direccion que el radio de la tierra, y se determina por la propiedad que tienen los cuerpos de dirigirse al centro de aquella, cuya propiedad se conoce con el nombre de fuerza de gravedad; así atando un cuerpo pesado al extremo de un hilo, si lo dejamos abandonado á su propio peso sujetando el otro extremo, el cuerpo se dirigirá hácia la tierra, y el hilo, que tomará la direccion de un radio de esta, determinará la línea vertical. A este hilo con el peso se llama *plomada*.

Línea *horizontal* es la perpendicular á la vertical y está determinada en la superficie de las aguas tranquilas: se llama horizontal porque es paralela al horizonte, y así el plano que pasa por el horizonte es horizontal,

En la geometría del espacio se consideran las tres dimensiones de los cuerpos, longitud, latitud y grueso ó espesor; por lo tanto, las líneas que las determinan no pueden estar todas en un plano, de aquí que deba conocerse la posicion relativa de las líneas en el espacio. Estas pueden ser entre sí, paralelas, oblícuas y perpendiculares, y para expresarlas se relacionan siempre con un plano.

82. Tres puntos que no estén en línea recta determinan la posicion de un plano, y por estos tres puntos no puede pasar más que un solo plano: así dos rectas que se corten determinarán la posicion del plano, pues como todos sus puntos se hallan en el mismo, tomando el punto de interseccion y otro punto cualquiera en cada una de las rectas, serán los tres que no están en línea recta.

Dos líneas rectas paralelas determinan tambien esta posicion, porque para que lo sean necesitan estar en el mismo plano, y tomando dos puntos cualquiera de la una y uno de la otra, tendremos los tres puntos que no están en línea recta.

83. Dos planos se cortan en línea recta, y á esta línea se llama *interseccion* de los planos. Si doblamos un papel, la línea que determina el doblez es una recta á

donde concurren las dos partes del papel, que en este caso hacen las veces de dos planos que se cortan, y cuya interseccion es el mismo doblez.

84. Será una línea perpendicular á un plano, cuando trazando en el plano dos rectas que se corten en el pié ó punto donde la linea corte al plano esta sea perpendicular á las dos trazadas en él: por ejemplo, si en un plano horizontal trazamos las rectas expresadas y bajamos al punto de interseccion una vertical, esta formará ángulo recto con cualquiera de las líneas del plano y será perpendicular á ellas; por lo tanto la perpendicular á un plano forma ángulo recto con él en todos sentidos.

Cuando la recta que cae sobre un plano no reune estas condiciones es oblícua.

En el espacio puede haber dos rectas que no se encuentren nunca y no sean paralelas, porque no estén trazadas en el mismo plano; por ejemplo, si en el suelo de una habitacion, que suponemos rectangular, se traza una diagonal, y en el techo, que tendrá la misma forma, se traza otra de modo que vayan cruzadas sus direcciones, estas dos diagonales serán dos rectas que por mucho que se prolonguen no se encontrarán nunca y sin embargo no son paralelas; así pues para que dos líneas situadas en diferentes planos sean paralelas, es necesario que pueda pasar por ellas otro plano: sirviéndonos del ejemplo anterior, si en el suelo y en el techo de una habitacion trazamos dos rectas, de tal modo que levantando un tabique coincida este por uno de sus frentes con la del suelo, y siendo plana su superficie llegue al techo y coincida por el mismo frente con toda la recta allí trazada, las dos rectas serán paralelas. Es por tanto requisito necesario para que dos rectas sean paralelas, que se hallen en el mismo plano ó se pueda hacer pasar por ellas un plano, y que prolongadas al infinito no se encuentren.

Si una recta es perpendicular á un plano, este lo será tambien á la recta.

Una recta será paralela á un plano cuando bajándole perpendiculares desde dos puntos de la recta, estas sean iguales en longitud: en este caso el plano tambien será paralelo á la recta.

PROBLEMA 88. *Determinar una perpendicular á un plano con tres escuadras.* Trácese en el plano una circunferencia tomando por radio el cateto menor de las escuadras ó plantillas, trácense tres radios y colóquense las escuadras en el plano, de modo que el canto del cateto coincida con cada uno de los radios y los otros catetos quedarán unidos fuera del plano: si desde el vértice de estos se tira una línea al centro de la circunferencia será perpendicular al plano.

85. **Niveles.** Para colocar un plano en sentido vertical se hace uso de la plomada, y para colocarlo horizontal, del nivel.

Se llama *nivel* á un aparato que determina siempre la horizontal, por sí mismo ó en combinacion con la plomada. Los hay de tres clases; nivel *de agua*, nivel *de aire* y nivel *de albañil.*

El nivel de agua se compone de un tubo horizontal *A B* (*Fig.* 109) y de otros dos tubos que con él forman ángulo recto *D* y *E* en cada uno de los cuales lleva unidos dos vasos *C C* de cristal, sin fondo: si por uno de estos se echa agua pasará por el tubo y subirá por el brazo opuesto, hasta que aparezca en el vaso correspondiente á este: teniendo el agua la propiedad de permanecer horizontal cuando está en reposo, la línea *a b* que determinan las dos superficies libres del líquido, será horizontal aunque la posicion del tubo *A B* no lo sea.

Para distinguir mejor la superficie del líquido se colorará un poco con cualquier sustancia.

Este aparato puede colocarse sobre un trípode por el punto *P*, y para usarlo conviene que el diámetro interior de los vasos sea igual en ambos.

El nivel de aire es un tubo de cristal cerrado herméticamente, dentro del cual hay una cantidad de alcohol ó de éter, y resguardado por una guarnicion de metal que tiene una base en su parte inferior y una abertura en la superior por la que deja descubierto el tubo (*Fig.* 110).

El alcohol, que no llena por completo el tubo, deja una cantidad de aire que forma una ampolla ó burbuja, la que, colocando horizontal el nivel, queda en la parte central y superior del tubo *A B*. Para conocer si esta se halla exactamente en la parte central y superior del tubo, tiene el cristal unas divisiones equidistantes del centro, y es fácil ver si los extremos *A* y *B* de la burbuja lo están tambien; en este caso el nivel estará horizontal.

El nivel llamado de albañil (*Fig.* 111) consta de una regla *A B* sobre la que van colocados dos listones que forman con ella un triángulo isósceles; en el vértice *C* se halla colocada una plomada *C D* y en el punto medio de la regla hay una línea de *fé* que es la bisectriz del ángulo en *C*.

Cuando la plomada, sin tropezar en ningun lado, tenga su cordon coincidiendo con la línea de *fé*, la línea inferior de los puntos *A* y *B*, que deberá ser perpendicular á la bisectriz del ángulo en *C*, será horizontal.

Para determinar la posicion de un plano son necesarios tres puntos que no estén en línea recta, y por lo tanto, para tener seguridad de que el plano que se quiere nivelar está horizontal, hará falta, no solo que el nivel acuse esta horizontalidad en un sentido ó sea en una sola posicion, pues esto sería conocer la de una línea, sino que habrá de colocársele en otra ó varias direcciones distintas de la primera, y cuando en todas el nivel permanezca horizontal, el plano sobre que descansa lo será tambien.

En las artes y oficios son con más frecuencia usados el nivel de aire y el de albañil, y conviene tener presente que ambos pueden darnos un error en las observaciones si la plataforma $C\ D$ del primero no fuera exactamente paralela á la línea $A\ B$ del tubo de cristal, ó si la línea inferior de los puntos A y B del segundo no fuera perfectamente perpendicular á la línea $C\ D$, ó sea la bisectriz del ángulo en C. Para asegurarse de que lo son, despues de colocarlo horizontalmente se invierte la posicion, haciendo ocupar al extremo A el mismo punto que ocupó el B y á este el que ocupó el A, y si en esta nueva posicion acusa la horizontalidad, el aparato estará bien, no estándolo en caso contrario, y hará falta corregirlo.

En el nivel de aire se corrige esta diferencia por medio del tornillo T que, apretándolo ó aflojándolo, permite acercar ó separar el tubo á la base $C\ D$ por la parte C girando en una charnela F situada al otro extremo, consiguiéndose de este modo el paralelismo entre la línea *A B* y el plano *C D*.

El nivel de albañil no tiene esta correccion, y hay necesidad de señalar en el travesaño una nueva línea que será la bisectriz del ángulo que determine el cordon en las dos posiciones indicadas.

Como estos aparatos son pequeños y hay que usarlos algunas veces para nivelar planos relativamente grandes, conviene en este caso colocar el nivel sobre una regla larga bien recta y puesta de canto, procurando que los dos cantos de la regla sean paralelos, y de este modo queda amplificada la base del nivel y ocupando la mayor parte del plano que se quiere nivelar.

El nivel de agua puesto sobre un trípode se usa para nivelar dos puntos del terreno, es decir, para averiguar cuanto está el uno más alto que el otro con relacion á una horizontal que pase por uno de ellos.

Sean los puntos *A* y *B* (*Fig.* 112) los que van á nivelarse, colocando el nivel *C* en un punto intermedio y un liston dividido en metros y centímetros con una tablilla que se llama *mira* en cada punto *A* y *B*, subiremos la tablilla de *A* hasta que la interseccion de dos líneas que hay pintadas en ella coincida con la prolongacion de la horizontal del nivel ó sea la línea *a b* que acusa el agua contenida en los vasos;

bajaremos la tablilla de *B* hasta que se halle en igual condicion, y leyendo la division de los listones, ó sean las miras, veremos que el de *B* tiene, por ejemplo, 0,60 y el de *A* 1,50; restando estas dos cantidades, la diferencia 90 centímetros será lo que el punto *B* está más alto que el *A*; luego si quisiéramos hacer pasar un plano horizontal por el punto *B* habria que levantar el *A* aquellos 90 centímetros y si dicho plano hubiera de pasar por *A* tendríamos que bajar el *B* igual cantidad.

Los niveles de aire se usan de igual modo, pero estos se hallan generalmente dotados de un anteojo que permite ver las miras á mayor distancia.

LECCION 22.

86. **Proyecciones.** La proyeccion de un punto sobre un plano es el pié de la perpendicular bajada desde dicho punto al plano, y por lo tanto será otro punto.

La proyeccion de una línea recta podrá ser un punto ú otra línea recta, lo primero cuando sea perpendicular al plano de proyeccion; y lo segundo cuando no lo sea.

En el primer caso, estando todos sus puntos en una misma direccion y siendo esta perpendicular al plano, se confundirá con la proyeccion del punto.

En el segundo caso, si por cada punto de la línea bajáramos perpendiculares al plano, resultarian varios puntos proyectados que estarian en línea recta, y por lo tanto la reunion de estas proyecciones seria otra recta. Como la posicion de la recta la determinan dos puntos, proyectando los dos extremos quedaria proyectada toda la recta y determinada la longitud de la proyeccion.

Una recta paralela al plano de proyeccion proyectará otra recta de igual longitud; y como la perpendicular proyecta solo un punto, se deduce que á medida que la posicion de la recta respecto al plano, se va separando de la perpendicular, la longitud de la proyeccion va siendo mayor hasta ser igual á la línea que se proyecta cuando llega á colocarse paralela al plano.

Para dar una idea de las proyecciones en armonía con los conocimientos prácticos esplicados, consideremos las proyecciones como si fueran la sombra producida por el punto ó por la línea, y claro es que respecto á la segunda, la sombra será menor ó mayor segun que la línea se halle en direccion de la luz ó en sentido trasversal.

87. **Planos.** Cuando dos planos se cortan forman un ángulo que se llama *diedro;* así la línea *A B* (*Fig.* 113) comun á los planos *A B D F* y *A B E C* es la *arista* del ángulo diedro; los lados de este ángulo son los planos, y el ángulo, la abertura que estos forman.

Cuando un plano es perpendicular al otro el ángulo diedro que forman será recto, y sino será agudo ú obtuso. Estos ángulos se miden por el *ángulo plano* que forman dos líneas, trazadas una en cada plano, perpendiculares á la línea *A B* en un mismo punto como las *a b* y *a c*.

Todos los ángulos planos trazados en un mismo ángulo diedro son iguales.

Respecto de los ángulos diedros, tendremos presente cuanto se dijo al hablar de los ángulos formados por líneas, y todas las consecuencias deducidas acerca de la igualdad de ángulos y nombres de estos segun su posicion respecto de otros, podrá aplicarse á los diedros.

88. **Volúmenes.** Se llama ángulo *poliedro* ó ángulo sólido á la reunion de tres ó más ángulos planos que concurren en un punto comun á todos sus vértices que se denomina vértice del poliedro, y en el que cada dos ángulos planos tienen un diedro comun. Cuando solo concurren tres planos se llama ángulo *tiedro*.

Todo cuerpo terminado por polígonos es un poliedro, llamándose caras del poliedro á dichos polígonos.

Los poliedros toman nombres diferentes segun el número de caras que tienen, así uno que esté terminado por cuatro caras será un *tetraedro*, el que tenga seis *exaedro*, el que tenga doce *dodecaedro*, etc.

89. Se dá el nombre de *prisma* á un cuerpo que tiene dos caras paralelas é iguales que son polígonos y las demás son paralelógramos. Los ángulos diedros que estas forman se llaman *aristas*, las caras iguales y paralelas, *bases*, y las otras, *caras laterales*. Un cajon *A B* (*Fig.* 114) es un prisma.

Toman nombres los prismas de las figuras de sus bases; así si estas son triángulos, se llaman triangulares; si son cuadriláteros, cuadrangulares; si pentágonos, pentagonales, etc. Las que tienen por bases dos paralelógramos se llaman paralelepípedos, y si las seis caras de prisma son cuadrados, cubo.

Cuando las aristas son perpendiculares á las bases del prisma, este se llama recto, y si no lo son se llama oblícuo (*Figura* 115). Si cortamos un prisma por un plano no paralelo á la base, el prisma que resulta se llama truncado ó tronco de prisma (*Fig.* 116).

Altura del prisma es la perpendicular bajada desde una base á la otra ó á su prolongacion.

Dos prismas que tienen iguales la base y la altura, si ambos son rectos, son iguales.

89. **Cilindro.** Cuando las bases del prisma fueran dos polígonos de infinito número de lados, estas dos bases serian dos círculos, y por lo tanto el prisma tendria infinito número de caras, ó lo que es lo mismo, formarian una superficie curva convexa: en este caso se llama cilindro. Así pues, *cilindro* es un cuerpo que tiene dos bases paralelas é iguales, que son dos círculos, y que está limitado por una superficie curva y uniforme (*Fig.* 117).

La *altura* del cilindro es la perpendicular $C\ D$ que une las dos bases: la recta $A\ B$ que une los dos centros de las bases se llama *eje*, y *lado* á la $C\ D$ paralela al eje que une dos puntos de las circunferencias de las bases.

Se supone engendrado el cilindro por el lado $C\ D$ del rectángulo $A\ C\ D\ B$ que gira alrededor del eje $A\ B$.

90. **Pirámide.** Se dá el nombre de pirámide á un cuerpo que tiene por base un polígono cualquiera y cuyas caras laterales son triángulos que concurren á un punto comun que se llama *vértice* ó *cúspide* de la pirámide (*Fig.* 118).

Cuando la base sea triangular tambien lo será la pirámide; si la base es cuadrangular será cuadrangular la pirámide, y en general llevará el nombre que la base.

Altura de la pirámide es la perpendicular $A\ C$ bajada desde la cúspide C de la pirámide al plano de la base ó su prolongacion; las líneas $C\ D$, $C\ B$, $C\ E$ y $C\ F$ se llaman aristas; los triángulos $E\ C\ B$, $B\ C\ D$, etc., caras laterales. Si la perpendicular bajada desde la cúspide viene á coincidir con el centro de la base y esta es un polígono regular; la pirámide será regular y tendrá todas sus caras laterales iguales.

Si hacemos pasar un plano que corte todas las aristas de la pirámide, habremos dividido esta en dos pedazos (*Fig.* 119): al que corresponde á la base de la pirámide se llama pirámide truncada; que será de bases paralelas cuando el plano que la corte sea paralelo á la base. En este caso las caras laterales del tronco de pirámide serán trapecios, y los polígonos de sus bases semejantes. Al otro pedazo que corresponde á la cúspide se llama pirámide deficiente.

Dos pirámides regulares de igual base y altura son iguales.

91. **Cono.** Si á la base de una pirámide la consideramos como un polígono de infinito número de lados, el número de triángulos que formen sus caras laterales tambien será infinito y por lo tanto la base será un círculo y las caras laterales formarán una superficie curva uniforme: á este cuerpo se llamará *cono*, y se supone engendrado por un triángulo rectángulo tal como $A B C$ (*Fig.* 120), pues si lo hacemos girar alrededor del cateto $C B$ el otro cateto $A B$ describirá un círculo, que será la base del cono, y la hipotenusa $A C$ engendrará la superficie curva exterior.

Altura del cono es la perpendicular $C B$ bajada desde la cúspide á la base, ó sea el cateto que sirvió de eje; *lado* se llama á la recta $A C$ que une un punto de la circunferencia de la base con la cúspide, ó sea la hipotenusa del triángulo generador; y *base* al círculo engendrado por el cateto $A B$.

Lo mismo en el cono que en la pirámide cuando la perpendicular bajada desde la cúspide tiene su pié en el centro de la base, la pirámide ó el cono serán rectos, y cuando no, oblícuos. En el primer caso dicha perpendicular es el eje del cono á la vez que es la altura, y en el segundo, será *eje* del cono la línea que una la cúspide con el centro de la base.

Si cortamos un cono por un plano *ED* paralelo á la base, resultará una parte del cono con una base superior *o* y otra inferior, y otra parte que corresponderá á la cúspide; la primera se llama cono truncado y la segunda cono deficiente. Las dos bases superior é inferior del cono truncado serán dos círculos.

92. **Esfera.** Si á un semicírculo *A C B* (*Fig.* 121) lo hacemos girar alrededor del diámetro *A B* engendrará un cuerpo que se llama *esfera.*

Como todos los puntos de la semicircunferencia *A C B* equidistan del centro *o* y cualquiera que sea la posicion que tome existirá la misma propiedad, resulta que la esfera que sea engendrada por ella tendrá todos sus puntos equidistantes del punto *o*, que será centro de la esfera.

Una recta que desde un punto de la superficie de la esfera se dirija al centro, será un radio, si este radio se prolonga hasta encontrar de nuevo la superficie, será un diámetro, y diremos que radio de la esfera es toda recta que une el centro con un punto de la superficie de esta, y diámetro otra recta que une dos puntos de la misma y pasa por el centro. En tal concepto, todos los radios de una esfera son iguales y todos los diámetros tambien lo son, y unos y otros serán iguales á los del semicírculo generador.

LECCION 23.

93. **Secciones.** Si cortamos un cuerpo cualquiera con un plano, el polígono ó figura que resulte formado por la interseccion ó encuentro del plano con las caras exteriores del cuerpo se llama *seccion.*

Si un prisma se corta con un plano paralelo á las bases, la seccion será un polígono igual á ellas; y si un prisma oblícuo (*Fig.* 115) se corta con un plano perpendicular á sus aristas, tal como *a b c d*, á esta seccion se llama seccion recta.

La seccion dada á un prisma recto por un plano perpendicular á sus bases, es siempre un rectángulo.

La seccion dada á un cilindro paralela á sus bases será un círculo igual á ellas: si la diéramos oblícua resultaria una elipse, y un rectángulo si la damos paralela al eje.

En una pirámide toda seccion paralela á la base es un polígono semejante al de la base, y cuya relacion será la que tengan los cuadrados de las alturas de la pirámide total y de la deficiente. Si la seccion fuera paralela al eje, sería un triángulo.

En un cono la seccion paralela á la base es un círculo; si se inclina un poco la seccion resultará una elipse; si aquella es paralela al lado opuesto al primer punto de contacto del plano con el cono, será una parábola; tal es la *A B C (Fig.* 122*)*: dada la seccion por el eje del cono resulta un triángulo, y si como indica la figura suponemos invertidos dos conos cuyos lados del uno sean la prolongacion de los del otro y que se toquen sus vértices, una seccion paralela al eje, será una hipérbola, como la *F G H I J K.*

Toda seccion dada en una esfera es un círculo: si la seccion pasa por el centro se llama *máximo* el círculo que resulta, y los producidos por secciones que no pasan por el centro, círculos *menores.* Todos los círculos máximos de una esfera son iguales, y dividen á esta en dos partes iguales que se llaman *hemisferios.*

Si en el centro de un círculo máximo levantamos una perpendicular al plano del círculo, y que llegue á la superficie de la esfera por ambos lados *(Fig.* 121*)* los puntos *A* y *B* en que la perpendicular llega á la superficie se llaman *polos.*

94. **Poliedros regulares.** Se llaman poliedros regulares aquellos cuyas caras son todas polígonos regulares é iguales, y cu-

yos ángulos diedros son tambien iguales.

Los poliedros regulares son cinco: *tetraedro*, *octaedro*, *icosaedro*, *exaedro* y *dodecaedro*.

El tetraedro regular (*Fig.* 123) tiene por caras cuatro triángulos equiláteros iguales.

El octaedro regular (*Fig.* 124) está formado por ocho caras que son triángulos equiláteros é iguales.

El icosaedro regular (*Fig.* 125) tiene veinte caras que tambien son triángulos equiláteros é iguales.

El exaedro regular ó cubo (*Fig.* 126) está formado por seis caras que son cuadrados iguales.

El dodecaedro regular (*Fig.* 127) tiene doce caras que son pentágonos regulares é iguales.

No existen más poliedros regulares que estos cinco.

95. **Areas de los poliedros.** El área formada por la suma de las áreas de las caras laterales de un prisma, de un cilindro, de una pirámide ó de un cono, se llama área lateral, y si á esta se suma el área de las bases, se llama área total.

El área lateral de un prisma recto es igual al producto del perímetro de la base por la altura ó sea por una de sus aristas.

El área lateral de un prisma oblicuo, es igual al producto del perímetro de su seccion recta por una de sus aristas.

El área total de un prisma es igual á

la suma del área lateral con la de sus dos bases.

El área lateral del cilindro es igual al producto de la circunferencia de su base por su lado: y la total á la suma de la lateral con la de las dos bases.

El área lateral de una pirámide regular es igual al producto del perímetro de su base por la mitad de la altura de uno de los triángulos que forman sus caras laterales.

El área lateral de una pirámide truncada de bases paralelas, es igual á la semisuma de los perímetros de sus bases, multiplicada por la altura de uno de los trapecios que forman sus caras laterales.

El área total será la suma de la lateral y la de la base en el primer caso, y la de aquella con las de las dos bases paralelas en el segundo.

El área lateral del cono es igual á la mitad del producto de la circunferencia de su base por el lado del cono: la total será la lateral más la superficie de la base.

En un cono truncado de bases paralelas, el área lateral es la semisuma de las circunferencias de ambas bases multiplicada por el lado; y si se le suma la superficie de dichas bases será el área total.

El área de la esfera es igual al producto de la circunferencia de uno de sus círculos máximos por el diámetro y la fórmula será: área ó $A=4 \pi R^2$.

96. **Desarrollo de la superficie de un prisma recto:** Sea el prisma pentagonal *A B (Fig.* 128*):* se traza una línea recta *C D*, se llevan sobre ella los cinco lados del polígono de la base marcando las distancias respectivas y colocando por órden un lado á continuacion del otro como se vé en los puntos *C E F G H D;* por estos se levantan perpendiculares, y en una de ellas se toma una distancia *C I* igual á la altura del prisma; se traza desde *I* la línea *I K* paralela á la *C D* que cortará las perpendiculares en los puntos *I e f g h K* y este será el desarrollo de la superficie lateral. Si en una de las líneas *E F* trazamos el polígono de la base siendo *E F* el lado que le corresponde, resultará el *E F M L J*, y haciendo lo mismo en la línea *e f* tendrémos la otra base *e f m l j*, con lo cual habremos desarrollado la superficie total del prisma.

Desarrollo de una pirámide: Sea la pirámide cuadrangular *C B (Fig.* 129*)*. Trazaremos una recta *c b* igual á la arista *C B* y construiremos el triángulo *c b d* igual á la cara *C B D;* sobre el lado *c d*, trazaremos otro triángulo *c d g* igual al de la otra cara *C D G;* construyendo de este modo los demás triángulos, correspondientes á las caras de la pirámide, nos resultará el desarrollo de la superficie lateral; y si construimos en *b d* un polígono igual á la base, tal como *b d x z*, tendremos desarrollada la superficie total de la pirámide.

Si esta fuera truncada, en vez de los triángulos construiríamos trapecios iguales á las caras laterales; y construyendo despues los polígonos de las bases, obtendríamos la superficie lateral desarrollada y la total.

Desarrollo del cilindro: Se practica la misma operacion que con el prisma, tomando para la línea *C D* (*Fig.* 128) el desarrollo de la circunferencia de la base y trazando un rectángulo con esta línea por base y el lado del cilindro por altura. Un círculo igual á la base tangente á la línea *C D* y otro igual á la *I K* completarán el desarrollo total.

Desarrollo del cono: Con un radio igual al lado *C A* (*Fig.* 130) se traza un arco cuyo desarrollo sea igual á la circunferencia de la base del cono, y uniendo los puntos *C* y *D* con el punto *O*, que sirvió de centro, se tendrá el desarrollo lateral: trazando una circunferencia igual á la base del cono, tangente á la curva *C D* tendremos el desarrollo completo.

Para desarrollar la circunferencia de la base del cono en una línea curva cuyo radio sea el lado del cono, hallaremos el valor numérico de la circunferencia de la base y de la que resultaria trazada con el lado del cono como radio; multiplicando la primera por 360 y dividiendo el producto por la circunferencia mayor, resultará el número de grados que tendrá el ángulo *C O D*, y por lo tanto habremos determinado la posicion de la línea *D O*.

Gráficamente podríamos determinar dicha línea. Trazado un arco con el radio *O C* y fijo este se podria trazar una recta igual al desarrollo de la circunferencia y dividiéndola en partes iguales y pequeñas, tomando una de estas con el compás las llevaríamos sobre la curva *C D* hasta determinar su longitud, y el punto donde este terminara unirlo con el *O*. Tambien podríamos hacer uso del curvímetro (54) haciéndole marchar primero por la circunferencia de la base, ó mejor por su desarrollo y despues por el arco *C D*.

Si el cono fuera truncado trazaríamos desde *O* otro arco de círculo cuyo radio fuera el lado del cono deficiente, que cortaria á la línea *D O* en *L* y la figura *E L D C* sería el desarrollo lateral; el círculo trazado en *R* y otro que se trazara en *r* igual á la base superior del tronco de cono y tangente á la curva *E r L*, sería el desarrollo total.

97. **Semejanza de los poliedros:** Serán semejantes dos poliedros cuando estén limitados por el mismo número de caras, siendo las caras del uno semejantes á las homólogas del otro, y sus ángulos diedros homólogos iguales.

Las superficies laterales y totales de

dos poliedros semejantes tienen entre sí la misma relacion que la que tengan los cuadrados de sus líneas homólogas.

Caras homólogas en dos poliedros semejantes son las adyacentes á ángulos diedros respectivamente iguales y colocados en el mismo sentido.

En una pirámide truncada por un plano paralelo á la base, la pirámide deficiente es semejante á la pirámide total y la relacion que existe entre sus bases es la que tengan el cuadrado de la altura deficiente y el de la total.

Se llaman aristas homólogas en dos poliedros semejantes, á los lados homólogos de las caras homólogas.

LECCION 24.

98. **Volúmenes:** El volúmen de un prisma recto es igual al producto de la superficie de su base por su altura.

El volúmen de un cilindro es igual al producto de la superficie del círculo de su base por su altura.

El volúmen de una pirámide es igual al producto de la superficie de su base por el tercio de su altura.

El volúmen de un cono es igual al producto de la superficie del círculo de su base por el tercio de su altura.

El volúmen de una pirámide ó de un cono truncado de bases paralelas, se encontrará hallando una media proporcional entre sus bases, y la suma de estas con la media proporcional se multiplica por el tercio de la altura: este producto será el volúmen de la pirámide truncada ó del cono truncado.

El volúmen de un paralelepípedo rectangular es igual al producto de sus tres dimensiones, pues como para hallar la superficie de la base multiplicamos dos de ellas y dicha superficie se multiplica por la altura que es la tercera dimension, resulta que multiplicamos las tres.

Cuando alguno de los cuerpos indicados tenga igual base y altura que otro de su misma clase, será igual ó equivalente á este: será igual cuando sus caras laterales y homólogas sean iguales en los dos cuerpos respectivamente, y equivalentes cuando no lo sean.

99. **Superficie de los poliedros regulares.** La superficie lateral de un poliedro regular cualquiera será la de una de sus caras multiplicada por el número de estas.

Para desarrollar un tetraedro regular se trazarán cuatro triángulos equiláteros iguales é iguales tambien á los de las caras del tetraedro dado, trazándolos unidos por uno de sus lados (*Fig.* 131): para formar la figura con este desarrollo, bastará doblarlo por las líneas *a b*, *b c* y *c a* en el uno y *a b*, *b c* y *c d* en el otro, y ambos darán el tetraedro regular.

El exaedro ó cubo se desarrolla trazando seis cuadrados iguales, en la forma que indica la figura 132.

El octaedro regular, dibujando ocho triángulos equiláteros (*Fig.* 133).

El dodecaedro regular, con doce pentágonos regulares é iguales en dos grupos de á seis (*Fig.* 134) unidos por un lado de estos.

El icosaedro, con veinte triángulos equiláteros iguales y enlazados como en la figura 135.

No son necesarias esplicaciones para dar á conocer como se construyen estos desarrollos, porque todos ellos son sencillos y basta ver la figura para comprender la manera de dibujarlos ó trazarlos.

100. **Volúmen.** Si por cada uno de los ángulos tiedros de un poliedro regular hacemos llegar una línea recta á su centro y consideramos que por cada dos líneas inmediatas pasa un plano, habremos convertido el poliedro en tantas pirámides como caras tenga, cuyas caras serán las bases y las perpendiculares que desde el centro de estas se dirijan al centro, serán las alturas. Todas estas pirámides serán iguales porque tienen la base igual, y como todas las caras se separan la misma cantidad ó distancia del centro del poliedro, las alturas serán tambien iguales. En tal concepto, para hallar el volúmen de los poliedros regulares, se multiplicará la superficie del poliedro por el tercio de la distancia que hay desde el centro del poliedro al centro de una de sus caras; lo cual equivale á hallar el volúmen de una de las pirámides en que lo dividimos y multiplicarlo por el número de caras.

El cubo lo demuestra: si al cubo lo dividimos en seis pirámides cuyas bases sean sus seis caras, la altura de una de estas pirámides será igual á la mitad de una de sus aristas, y el volúmen segun esto estará representado por el siguiente ejemplo: si el cubo tiene 6 metros de lado, la superficie de cada una de sus caras será 6×6 y el volúmen de cada pirámide $6\times6\times1$, ó sea el tercio de la mitad de una arista; como tiene seis pirámides iguales el volúmen total será $6\times6\times1\times6$, y como multiplicando por uno una cantidad esta no sufre alteracion, el volúmen será $6\times6\times6$. Ahora bien, hemos dicho (98) que el volúmen de un paralelepípedo se halla multiplicando sus tres dimensiones, y como el cubo es paralelepípedo y sus tres dimensiones son de 6 metros, en el ejemplo presente el resultado encontrado es exacto.

En el exaedro ó cubo se halla el volúmen, como hemos visto multiplicando una de sus aristas dos veces por sí misma, operacion que en aritmética se llama elevar al cubo, nombre que ha tomado de la demostracion geométrica.

101. Para apreciar los espesores de un cuerpo cuyas aristas no lo determinen, se usa el *compás de gruesos:* este compás es igual al de puntas fijas, con la diferencia que tiene las puntas curvas y permite su forma colocar entre ellas el cuerpo, cuyo espesor se mide, sin que lo toque más que con los extremos de las puntas; llevando despues la abertura ó separacion de estas

sobre una escala ó sobre un metro, conoceremos el valor de esta dimension.

102. Considerando la esfera como un poliedro de infinito número de caras iguales y á igual distancia de su centro; y siendo cada una de estas la base de una pirámide cuyo vértice está en el centro de la esfera, su volúmen será la suma del área de todas las caras multiplicada por el tercio de la altura de una de las pirámides. Ahora bien, siendo el número de caras infinito, su límite será la superficie de la esfera y la altura de las pirámides el radio de ella. El volúmen de la esfera será, pues, el producto de su área por el tercio del radio y su fórmula será $V = \frac{4}{3}\ \pi\ R^3$ siendo $V =$ al volúmen; $R =$ al radio y π la cantidad que ya conocemos.

Ejemplo: sea una esfera cuyo diámetro medido con el compás de gruesos dá 6 centímetros; su radio será 3 centímetros, y aplicando la fórmula anterior tendremos $3 \times 3 \times 3 = 9$; este 9 que es el cubo del radio se multiplica por π ó sea por 3,1415..... y su producto 28,2735 se multiplicará por 4 y el resultado 113,0940 se divide por 3, lo cual dará por cociente 37,6980; esta cifra será el volúmen de la esfera, es decir que tiene 37 centímetros cúbicos y una fraccion de centímetro cúbico.

103. Cuando tengamos que hallar el

volúmen de un cuerpo que, aunque terminado por planos, afecte una figura irregular y por lo tanto no pertenezca á ninguno de los enumerados hasta aquí, se puede suponer que este cuerpo está dividido en varias partes, y á este fin haremos pasar por él planos paralelos y equidistantes ó á la distancia conveniente, segun la forma del cuerpo, con lo cual quedará dividido en zonas ó porciones que podremos considerar como prismas ó como pirámides truncadas, segun los casos, y que podremos medir aisladamente; sumando despues los valores encontrados para los diferentes volúmenes parciales, este será el volúmen total.

Esta medicion de volúmenes ó *cubicacion* puede hacerse multiplicando la semisuma de las bases contiguas por la distancia que medie entre ellas, y esto nos dará el volúmen comprendido entre dos planos. Este sistema se emplea para *cubicar* grandes volúmenes.

Si todavía tuviéramos que apreciar el volúmen de un cuerpo irregular que no se prestara por su forma á practicar la operacion que acabamos de expresar, y el cuerpo no fuera muy grande, podríamos seguir otro sistema, cual es preparar una vasija que tuviera una medida conocida ó que fuera fácil de medir; llenarla de agua hasta enrasarla y sumergir en ella el cuerpo, el cual desalojaría una cantidad de agua cuyo volúmen sería igual al del cuerpo que se introdujo; sacando este y midiendo la parte de vasija que quedó sin agua, el volúmen que resultara para esta parte sería el del cuerpo sumergido.

Como se comprende fácilmente, este procedimiento no es aplicable á los cuerpos solubles, porque si se tratara de un terron de azúcar, se disolvería en el agua, ni lo es tampoco cuando los cuerpos son voluminosos, porque tendríamos necesidad de un recipiente cuyas dimensiones estuvieran en armonía con el cuerpo que quisiéramos medir.

APÉNDICE.

IDEA GENERAL
DEL SISTEMA MÉTRICO DE PESAS Y MEDIDAS.

Un sistema de pesas y medidas abraza todos los medios necesarios para apreciar la cantidad en lo que se relaciona con la extension y el peso, y como la cantidad se manifiesta en varias formas, de aquí la necesidad de que aquel comprenda todos los casos.

Respecto á las medidas, se representan con los tres tipos que ya conocemos, la longitud, la superficie y el volúmen; este último hay que conocerlo en los líquidos y otras materias, como los cereales, que conviene retener en un recipiente ó caja, y de aquí la necesidad de las medidas de capacidad; todavía en muchos casos hay que apreciar el volúmen de los cuerpos por su peso, y esto dió orígen á las medidas ponderales ó pesas.

El sistema antiguo de pesas y medidas, todavía no desterrado de entre nosotros, con grave perjuicio de los cambios comerciales, tiene para las medidas lineales la vara con sus divisores, que se usa como de fácil manejo para distancias cortas, y la legua cuando estas son grandes: el pié cuadrado y la vara cuadrada para las superficiales, empleando la fanega y otras varias medidas para apreciar la superficie de las tierras: el pié cúbico y la vara cúbica para medir el volúmen de un cuerpo, cuando este permite apreciarse en esta forma: la fanega, la hemina, el celemin, etc., para medir los áridos como cereales, semillas y otras varias especies: la cántara, el cuartillo y otras para medir los líquidos; y la arroba con sus divisores y sus múltiplos para relacionar el volúmen con el peso.

Este sistema adolece de defectos gravísimos, entre los cuales descuellan dos importantes. El primero es la falta de relacion de las pesas y medidas entre sí, lo que origina tantas medidas tipos como unidades diferentes cuenta, pero como estas sufren alteraciones, ya por la accion atmosférica, ya por otras causas, y no estando relacionadas con algo inalterable y que obedezca á las leyes de la naturaleza, una vez modificada la medida tipo, no es posible restablecerla con exactitud, y de aquí que no podamos asegurar, que si las medidas y pesas que todavía se usan se compararan con los tipos que dieron orígen al sistema, resultarian ser exactamente iguales, ó si hallaríamos diferencias tales que nos hicieran desecharlas como inútiles con relacion á aquellos tipos. Este defecto podia tener mayor importancia, si el mismo sistema se usara en todas partes, pues tal vez en algunas naciones, por efecto de la diferencia de clima, hubieran sufrido más alteraciones que en otras y los cambios se harian con grandes irregularidades: pero esto no sucede y es precisamente el segundo defecto que iniciamos al principio de este párrafo.

En efecto, no solo en cada nacion hay sistemas diferentes de pesas y medidas, sino que tampoco son iguales en toda España, ni en cada provincia de nuestra nacion, y aun en cada pueblo, y todavía hay en muchos pueblos clases de medidas destinadas á un mismo objeto con diferentes nombres y notables diferencias de extension: todo esto, aparte de lo difícil de retener una nomenclatura tan variada y numerosa, imposibilita el conocerlas sin enterarse de antemano para cada operacion ó cambio, de la importancia de la unidad de que se trata.

El sistema métrico decimal de pesas y medidas ha venido á corregir estos defectos y, si como todas las innovaciones, encuentra dificultades en su planteamiento, cuando sea un hecho en todas las naciones de Europa, el comercio se entenderá con suma facilidad y sin la exposicion de los errores que tan frecuentemente ocurren cuando no se conocen completamente los valores de las unidades que originan el tráfico.

Se llama decimal este sistema, porque sus unidades crecen y decrecen de 10 en 10, y métrico porque su base es el metro.

Vamos á dar algunas noticias históricas de este sistema adoptado en España, Francia, Suiza, Piamonte, Bélgica, Luxemburgo, Grecia, Cerdeña y otras naciones.

Un decreto de la Asamblea constituyente francesa en 8 de Mayo de 1790, encargó á la Academia de Ciencias la organizacion de un nuevo sistema de pesas y medidas, y la comision nombrada al efecto resolvió buscar la unidad de longitud en las dimensiones del globo terrestre, despues de desechar para tipo la longitud del péndulo, porque sus oscilaciones varían con las latitudes; midieron, pues, el arco de meridiano que se extiende desde Dunkerque á Barcelona, y con esto y los trabajos practicados por Mr. Picard en 1690 entre Malvoisine y Amiens, y los que se hicieron en 1736 por una comision de sábios, de la que formaron parte los españoles D. Jorge Juan y D. Antonio Ulloa, que fueron enviados al Perú para medir otro arco de meridiano, dedújose que la cuarta parte del meridiano terrestre, ó sea el cuadrante de un círculo máximo que pase por los polos de la tierra, media sobre la superficie del Oceano tranquilo 5130.740 toesas, y dividida esta longitud en diez millones de partes iguales, una de estas fué adoptada como unidad de longitud, llamándole metro, por una ley del 18 Germinal año III (7 de Abril de 1795).

El patron tipo de esta medida, es una regla de platino que sometida á la temperatura del hielo fundente presenta la longitud del metro legal, y fué depositado en los Archivos el 4 Messidor año VII (22 de Junio de 1799).

Resulta, pues, que aunque el patron tipo archivado desapareciera, repitiendo la operacion llevada á cabo en 1790, volvería á conocerse su dimension con igual exactitud.

De esta medida longitudinal se dedujeron todas las demás que componen el sistema.

A las diferentes pesas y medidas y á sus múltiplos y divisores, fué necesario darles nombres que hablaran á la inteligencia, en cambio de los actuales que, con su nomenclatura convencional nada dicen que nos ponga en conocimiento de su valor relativo; y para esto era preciso tambien escoger el idioma del que habian de tomarse las palabras; determinando que fueran el griego y el latin, idiomas de los que han nacido las artes, las ciencias y las letras, y que por esto solo podríamos llamarles universales: así la palabra metro está tomada del griego, que significa *medida*.

Medidas lineales. A la reunion de 10 metros se llama *decámetro*, palabra compuesta de las dos voces griegas *deca* que significa diez y metro, así la palabra decámetro quiere decir diez medidas: á la reunion de 10 decámetros ó sean 100 metros se llama *hectómetro*, en donde *hecto* significa ciento: á la de 10 hectómetros ó sean 1000 metros se dice *kilómetro*, de *kilo* que quiere decir mil: á la de 10 kilómetros ó sean 10.000 metros, *miriámetro*, y *miria* es lo mismo que diez mil. De modo que anteponiendo á la unidad las palabras griegas *deca*, *hecto*, *kilo* y *miria*, tendremos formados los múltiplos de aquella.

La décima parte del metro es un *decímetro*, palabra compuesta de la voz latina *deci* que quiere decir décima parte; si se divide un decímetro en diez partes iguales, el metro quedará dividido en ciento, y á una de estas partes se llama *centímetro*, cuya palabra *centi*, tambien de orígen latino, quiere decir centésima parte, y si un centímetro se divide en diez partes iguales, quedará dividido el metro en mil, y á esta milésima parte se le llama *milímetro*, cuya voz *mili* quiere decir en dicho idioma milésima.

Anteponiendo, pues, las voces *deci*,

centi, mili á la unidad, indicaremos sus divisores. Estas mismas voces, así como las de los múltiplos, se anteponen á las demás unidades del sistema.

Medidas superficiales. Estas medidas constan, segun tenemos dicho, de dos dimensiones, longitud y latitud, y por lo tanto representan superficies; para ellas se toma como unidad el cuadrado, y en este sistema este cuadrado tiene un metro de lado y se llama metro cuadrado. Lo mismo que en las lineales se anteponen las voces ya conocidas, pero debe tenerse muy presente que por ser cuadradas crecen y decrecen de diferente modo que las lineales, como se vé en el siguiente ejemplo:

Supongamos que el cuadrado de la figura 136 tiene un metro de lado y por lo tanto será un metro cuadrado; cada division *a b* del lado *a c* será medio metro y *a b o d* un cuadrado que tendrá medio metro de lado, por lo tanto será medio metro cuadrado. Ahora bien, el metro lineal tiene dos medios metros, y si elevamos al cuadrado este número 2 será $2 \times 2 = 4$, lo cual quiere decir que el metro tiene cuatro medios metros cuadrados, como se vé en la figura; de aquí que la frase medio metro cuadrado, no expresa lo mismo que la mitad de un metro cuadrado, pues á este corresponderán dos cuadrados de medio metro de lado cada uno.

Del mismo modo observaremos que la línea *a c* que representa un metro, está dividida en 10 partes que serán decímetros, y siendo 10 las medidas del lado del cuadrado, 10×10=100 serán los decímetros cuadrados que tiene el metro cuadrado, luego, un decímetro cuadrado no es su décima parte sino la centésima; y todos los divisores ó múltiplos estarán en análoga relacion. Por esta razon cuando las unidades son lineales, cada guarismo á la derecha de otro expresa la unidad de especie inferior inmediata, y en las cuadradas la expresan cada dos guarismos.

Ejemplo:

	Kilo	Hecto	Deca	Metro	Deci	Centi	Mili
Lineales.....	1	2	4	8,	3	2	5

	Metro	Deci	Centi	Mili
Cuadradas.	8,	26	45	32

En el primer caso podemos decir un kilómetro, 2 hectómetros, 4 decámetros, 8 metros, 3 decímetros, 2 centímetros y 5 milímetros, ó sea 1248 metros y 325 milímetros: y en el segundo diremos 8 metros, 26 decímetros, 45 centímetros y 32 milímetros cuadrados; ó bien 8 metros y 264532 milímetros cuadrados.

Medidas agrarias. Estas son las que se emplean para apreciar la extension superficial de los terrenos, y basadas en lo anteriormente esplicado, crecen y decrecen de 100 en 100 con relacion á la unidad.

Esta unidad es el *área*, que está representada por un cuadrado de 10 metros de lado: su único múltiplo la *hectárea* ó sean 100 áreas y es un cuadrado que tiene 100 metros de lado: su único divisor la *centiárea* ó sea un metro cuadrado. Como se vé, el lado de los cuadrados de estas tres unidades de distinto órden crecen de 10 en 10, pero las unidades superficiales crecen de 100 en 100, puesto que el área tiene 100 centiáreas y la hectárea 100 áreas, y segun esto se escriben:

Hectáreas.	Áreas.	Centiáreas.
125	40	16

Medidas cúbicas. Relacionándose estas con los volúmenes, entran á formarlas las tres dimensiones, y la medida será un exaedro ó cubo que tenga por lado la unidad.

La misma observacion hecha para las superficiales, haremos ahora para las medidas cúbicas: un decímetro cúbico es un cubo que tiene un decímetro de lado, y por lo tanto no será la décima parte del metro cúbico, pues teniendo este de lado 10 decímetros, será $10 \times 10 \times 10 = 1000$ y el metro cúbico tendrá 1000 decímetros cúbicos. Así para separar en la escritura los diferentes órdenes de unidades, formaremos grupos de á tres guarismos, á partir de la unidad tipo á derecha y á izquierda, y de este modo en cada grupo estarán los milímetros que serán ménos de mil, pues estos son los que tiene un centímetro; los centímetros que, por igual razon, serán ménos de mil, etc.

Medidas de capacidad. Se emplean estas para los líquidos y áridos; la unidad es el *litro* y está formado por una caja que tiene un decímetro de larga, de ancha y de profunda, medidos en su interior, por lo cual su cabida es un decímetro cúbico.

Aunque estas son medidas cúbicas, se cuentan por el número de unidades sin relacionarlas con el metro cúbico para el uso, ó sea para contarlas, y por lo tanto crecen y decrecen de 10 en 10; así los múltiplos del litro son el *kilólitro* (mil litros) el *hectólitro* (100 litros) el *decálitro* (10 litros) y sus divisores el *decílitro*, el *centílitro* y el *milílitro* (décima, centésima y milésima parte del litro) el kilólitro, que es el metro cúbico, es la *tonelada de arqueo*, medida que se emplea para expresar la capacidad de los buques.

Las medidas mas usadas entre estas son el hectólitro y el litro.

Medidas ponderales ó pesas. Sirven para apreciar el volúmen por el peso. La unidad tipo es el *gramo*, cuyo volúmen es un centímetro cúbico y sus múltiplos y divisores son los mismos que en las anteriores, ó sean el *kilógramo*, el *hectógramo*, etc., para los primeros, y el *decígramo*, el *centígramo* y el *milígramo* para los segundos.

Aunque la unidad tipo para las pesas es el gramo, se adopta sin embargo como unidad usual el kilógramo, ó sea los 1.000 gramos, por ser aquella escesivamente pequeña, y ser preciso por tanto emplear números grandes para precisar pesos que frecuentemente tenemos que apreciar en los usos comunes de la vida. El gramo sería el peso en el vacío de un centímetro cúbico de agua destilada á la temperatura de cuatro grados centígrados, y el kilógramo es, como su nombre lo indica, mil veces mayor, y por tanto y segun lo que dejamos consignado respecto de la forma en que crecen y decrecen las medidas cúbicas, vendrá á ser el peso del agua que á dicha temperatura y con las condiciones indicadas quepa en un vaso cúbico de un decímetro de lado; puesto que el decímetro cúbico equivale segun dejamos indicado á mil centimetros cúbicos.

Esta alteracion hecha respecto de la unidad usual para las pesas, ha hecho preciso adoptar otros dos múltiplos cuya denominacion no se ajusta completamente á lo establecido para los demás del sistema: el quintal métrico, que es igual á 100 kilógramos, y la tonelada métrica que vale 10 quintales ó sea mil kilógramos, y tambien 1000000 de gramos y que viene á ser por tanto, el peso de un metro cúbico de agua.

El siguiente cuadro demuestra de un modo claro cuanto llevamos dicho, el cual lo tomamos de la obra escrita por D. Meliton Martin (a) la que recomendamos como la mejor que conocemos para aprender el sistema métrico, tanto por la claridad de exposicion como por el órden seguido y porque además de los muchos datos que contiene, se esplican en ella algunas nociones de aritmética, y muy especialmente las cantidades decimales.

(a) Nuevo sistema legal de pesas y medidas.

Valores relativos.	MÚLTIPLOS CON LOS NUMERALES GRIEGOS. Miria — 10.000	Kilo — 1.000	Hecto — 100	Deca — 10	Unidades — 1	DIVISORES CON LOS DERIVADOS LATINOS. Deci — 1/10	Centi — 1/100	Mili — 1/1.000
MEDIDAS. —								
Lineales. . .	Miriámetro	Kilómetro	Hectómetro	Decámetro	METRO	Decímetro	Centímetro	Milímetro
Superficiales	»	»	Hectárea	»	ÁREA	»	Centiárea	»
De capacidad	»	Tonelada de arqueo.	Hectólitro	Decálitro	LITRO	Decílitro	Centílitro	Milílitro
Ponderales. .	»	Kilógramo	Hectógramo	Decágramo	GRAMO	Decígramo	Centígramo	Milígramo

Equivalencias. Segun los datos publicados por el Gobierno, la relaciones de equivalencia de las unidades métricas y las antiguas de Castilla es la siguiente:

Metro=1 vara, 7 pulgadas y 805 milésimas de línea.

Area=143 varas cuadradas y 0,115529 de vara cuadrada.

Litro=1 cuartillo y 0,983512 de cuartillo, para líquidos y

Litro=0,864849 de cuartillo para áridos.

Kilógramo=2 libras, 2 onzas, 12 adarmes y 409 milésimas de adarme.

Las medidas antiguas tienen con las del sistema métrico las equivalencias siguientes.

Lineales......	Vara=$0,^{m}835906$ de metro.
Agrarias......	Fanega=$6439,^{m}574075$ metros cuadrados.
De capacidad..	Fanega=$55,^{L}500055$ litros para áridos.
	Cántara=$16,^{L}132935$ litros para líquidos.
	Arroba=$12,^{L}56300$ litros para aceite.
Pesas........	Arroba=$11,^{K}50232$kilógramos.
Id. medicinales.	Libra=$0,^{K}345069$ kilógramos.

La vara corresponde al patron que se halla en el archivo de Burgos, la fanega á la de Avila, las medidas de líquidos á las de Toledo y las pesas al del archivo del Consejo de Madrid.

Peso específico. Se llama peso específico al peso relativo de un cuerpo comparado con otro que tomamos por unidad, teniendo ambos cuerpos igual volúmen. El que se toma como tipo ó término de comparacion es el agua destilada en el vacío á la temperatura de 4 grados centígrados, que como hemos dicho, un decímetro cúbico pesa un kilógramo. Tomando pues, un decímetro cúbico de la sustancia cuyo peso específico queremos averiguar y pesándolo nos dará una cantidad que representará el peso específico de aquella sustancia, y con solo expresarlo así se sabe desde luego que se ha relacionado con el agua destilada en las expresadas condiciones tomando el decímetro cúbico de esta por unidad, á menos que digamos peso específico del metro cúbico, por ejemplo, en cuyo caso se sobreentiende que tambien se tomó el metro cúbico de agua como tipo.

Conocido el peso específico de un cuerpo, podemos conocer su volúmen y conocido este puede deducirse aquel: por ejemplo; sabiendo que una viga de pino cúbica 480 decímetros conoceremos lo que pesa multiplicando el 480 por el peso específico, y siendo este 0,657 pesará la viga 315 kilógramos y 360 gramos: si conociéramos el peso absoluto ó sea lo que pesa la viga dividiendo este por el peso específico nos dará el cociente el número de decímetros cúbicos que tiene.

Los pesos relativos ó específicos de varios cuerpos se indican en el siguiente cuadro.

PESOS ESPECÍFICOS DE ALGUNOS CUERPOS.

		Peso de un decímetro cúbico. *Kilógramos*
Líquidos	Agua destilada	1,0000
	Aceite de linaza	0,9403
	» de almendras	0,9170
	» de olivas	0,9158
	Aguardiente de 22 grados	0,9236
	Espíritu de vino de 36 grados	0,8480
	Leche de vaca	1,0324
	Vino de la provincia de Leon	0,9240
Aridos	Avena	0,4780
	Cebada	0,6330
	Centeno	0,7400
	Salvado	0,2100
	Harina	1,0350

Maderas...	Encina................	0,8600
	Alamo blanco..........	0,3290
	Haya..................	0,8420
	Pino..................	0,6570
	Roble.................	0.9300
	Negrillo..............	0,6710
	Boj...................	1,3280
	Caoba.................	1,0600
	Ebano.................	1,3310
	Nogal.................	0,6710
	Peral.................	0,6610
	Cedro.................	0,5960
	Cerezo................	0,7150
Metales...	Acero.................	7,8100
	Cobre batido..........	8,8785
	Estaño batido.........	7,2994
	Hierro fundido........	7,2070
	» forjado........	7,7880
	Laton.................	8,3950
	Oro puro fundido......	19,2581
	» forjado..........	19,3617
	Plata pura fundida....	10,4743
	» forjada..........	10,5107
	Plomo.................	11,3523
	Zinc..................	6,8610
	Mercurio..............	13,5980
Tierras y rocas...	Alabastro.............	1,8740
	Arcilla...............	1,9300
	Arena de rio..........	1,8800
	Arenisca (piedra).....	1,9332
	Caliza (mármol).......	2,6600
	Cuarzo................	2,7100
	Granito...............	2,7165

Tierras y rocas...	Piedra calcárea........	2,0770
	» pomez.........	0,9145
	Pizarra..............	2,8530
	Yeso.................	0,9600
	Vidrio...............	2,7325
	Tierra vegetal........	1,1100
	» arcillosa........	1,2400
Cales.....	Cal apagada, en polvo..	0,5697
	Cal hidráulica de Zumaya.	1,1480
	Cal viva..............	0,8400
Carbones..	Carbon vegetal........	0,2500
	Carbon de piedra.......	1,3292
	Cok..................	0,3400

Si tuviéramos necesidad de construir un cuerpo geométrico de una materia dada, y cuyo peso tambien fuera dado, el problema consistiría en lo siguiente: Sea la figura dada un prisma triángular, que haya de tener por base un triángulo equilátero, y cuya altura sea doble que un lado de la base: el prisma ha de construirse de hierro fundido y ha de pesar 444 kilógramos.

Segun la tabla anterior, el peso específico del hierro fundido es 7, 207; empezaríamos pues por averiguar el volúmen del prisma ó lo que habia de cubicar para que tuviera el peso que se desea, lo que se consigue dividiendo este peso por el específico, y dará 61,6194 ó lo que es lo mismo 61 decímetros cúbicos y la fraccion 0,6194: construiremos una prisma que tenga las proporciones dadas y siendo estas para el lado del triángulo equilátero de la base 6 decímetros y 12 para la altura del prisma; la altura del triángulo de la base será 5 decímetros y 2 centímetros; la superficie de la base se hallará, como ya sabemos, multiplicando la base del triángulo por su altura y dividiéndolo por 2, ó sea $\frac{6\times5,2}{2}=15,60$; y el volúmen del prisma multiplicando esta superficie por su altura, que será $15,60\times12=$ 187.200.

El prisma que hemos calculado cubicará 187 decímetros cúbicos y 200 centímetros cúbicos, pues la unidad que hemos tomado para todas las líneas ha sido el decímetro; su peso será por consiguiente el producto de este volúmen por el peso específico 7,207 cuyo producto es 1349,1504 kilógramos y como el que queremos ha de pesar 444 resulta que aquel es mayor; esto se vé tambien sin comparar sus pesos, pues hemos visto que el volúmen necesario es 61,6194 decímetros cúbicos menor tambien que el de prisma.

La relacion de dos volúmenes semejantes es la misma que la de los cubos de sus líneas homólogas, y segun este principio podremos averiguar cual será el lado que corresponde al triángulo de la base de un prisma semejante al calculado y cuyo volúmen sea el que queremos, para lo cual compararemos el volúmen del mayor con el del menor y un lado homólogo de aquel con el lado que se busca, formando esta proporcion $V:v::L^3:l^3$ y dando valores á los volúmenes y lados será $187,200:61,6194::6^3:l^3$ ó lo que es igual $187,200:61,6194::216:l^3=\frac{61,6194\times216}{187,200}=$ 71,0992. Si ahora hallamos un número que multiplicado por sí mismo dos veces; ó sea su raiz cúbica, dé 71,0992, que aproximado es 4,1425, este será el lado del triángulo equilátero de la base del prisma y 8,2850 será su altura, segun el enunciado, para que resulte del peso que se quiere.

En efecto si con estos datos hallamos su volúmen se tendrá 4,1425 base del triángulo de la base cuya altura es 3,591 y por lo tanto $\frac{4,1425\times3,591}{2}=7,4378582$ será la superficie de la base del prisma que multiplicada por 8,285 nos dará 61,6226, cifra que si no es exactamente igual á la que se busca, lo és con una aproximacion de menos de un tercio de centímetro cúbico por exceso y esta diferencia podría ser menor aproximando mas cifras decimales.

Si el prisma debiera ser tan preciso en su peso, por tener que servir de pesa, y puesto en la balanza resultara esa pequeña diferencia que al construirlo se nota, se corrige, bien á expensas de la exactitud en la forma ó bien haciendo en su parte inferior una pequeña cabidad que se rellena con otro metal de más ó menos peso específico segun los casos. Esto se hace en la práctica con las colecciones de pesas que afectan formas geométricas, para dejarlas con la exactitud que se requiere.

Sea ahora una caja la que queremos construir, que contenga cuatro arrobas de aceite, y cuya forma sea la de un prisma cuadrangular de doble altura que el lado de su base.

Se comprende desde luego que el prisma que debemos considerar es el formado por el hueco que resultará entre las paredes interiores de la caja, prescindiendo por lo tanto del espesor de estas que podrá ser cualquiera para el caso presente.

Para la resolucion de este problema tendremos en cuenta que, segun las equivalencias que se dejan consignadas anteriormente, una arroba de aceite es igual á 12 litros y 563 milésimas, y si esta cifra la multiplicamos por el número de arrobas que deseamos contenga la caja que vamos á construir, nos dará un producto de 50 litros y 225 milésimas: esta será pues, la cabida de la caja. Ahora bien; el paralelepípedo formado por esta se compone de dos cubos iguales, puesto que la altura es doble que el lado de la base y esta es un cuadrado, y por lo tanto cada uno de estos cubos deberá contener 25 litros y 126 milésimas ó lo que es lo mismo cubicará 25 decímetros cúbicos y 126 centímetros: queda pues reducido el problema á extraer la raiz cúbica de 25,126 ó sea hallar un número que multiplicado dos veces por sí mismo dé en su segundo producto el 25,126, y aquel número será el lado de la base del prisma, que en el caso actual resulta ser 2,92892 ó bien 2 decímetros 92 milímetros y una fraccion de milítro, y la altura será su duplo 5,85784 igual á 5 decímetros 85 milímetros y otra fraccion.

Si la caja hubiera de afectar otra forma, procederíamos segun ésta fuera; sea por ejemplo una zafra de hojadelata, cilíndrica y rematada por un cono que tenga la misma altura que el cilindro, siendo la de este igual al diámetro de su base.

Como el volúmen de un cono que tiene igual base y altura que un cilindro, es la tercera parte del de este, siendo tres el del cilindro, será uno el del cono, y por lo tanto el primero habrá de contener 3 arrobas de aceite y una el segundo, quedando reducido el problema á construir un cilindro hueco cuyo volúmen interior sea $\frac{50,252}{4} \times 3 = 37,689$ esto es, 37 decímetros y 689 centímetros y cuya altura sea igual al diámetro de la base segun las condiciones exigidas, cuyo problema plantearemos de este modo.

La superficie de la base del cilindro será πR^2; su altura debe ser igual al diámetro de aquella, ó sea dos veces el radio, por consiguiente multiplicando πR^2 por $2\ R$ el producto deberá ser el volúmen que se quiere ó sea 37,689: el radio pues será igual á un número que multiplicado dos veces por sí mismo dé por producto el cociente de dividir 37,689 por 2π ó sea por 6, 28. Practicadas las operaciones, resulta para el valor aproximado de dicho número 1,82 y como la unidad que se nos ha dado es el decímetro, la longitud aproximada del radio de la base será 182 milímetros, y la altura del cilindro, el duplo 364.

Conocida la base y la altura, podrá construirse el cono que ha de servir de remate, y la cabida de éste sumada á la del cilindro serán los 50^{L}252 ó sean las 4 arrobas de aceite.

Por procedimientos análogos podremos construir cualquiera figura geométrica que se ajuste á las condiciones que se quiera, pero habremos de repetir que la exactitud completa sólo se obtiene en la mayoría de los casos corrigiendo las pequeñas diferencias que resulten despues de construidas, y por lo tanto sacrificando en esa pequeña parte la exactitud de la forma.

FIN.

INDICE DE MATERIAS

Y

PROGRAMA DE GEOMETRIA

APLICADA Á LAS ARTES Y OFICIOS.

PRELIMINARES.

CAPÍTULO I.

Geometría plana.—Lineas y ángulos.

CAPÍTULO II.

Polígonos.

CAPÍTULO III.

Líneas curvas.

CAPÍTULO IV.

Polígonos semejantes y superficies.

CAPÍTULO V.

PARTE SEGUNDA.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO.

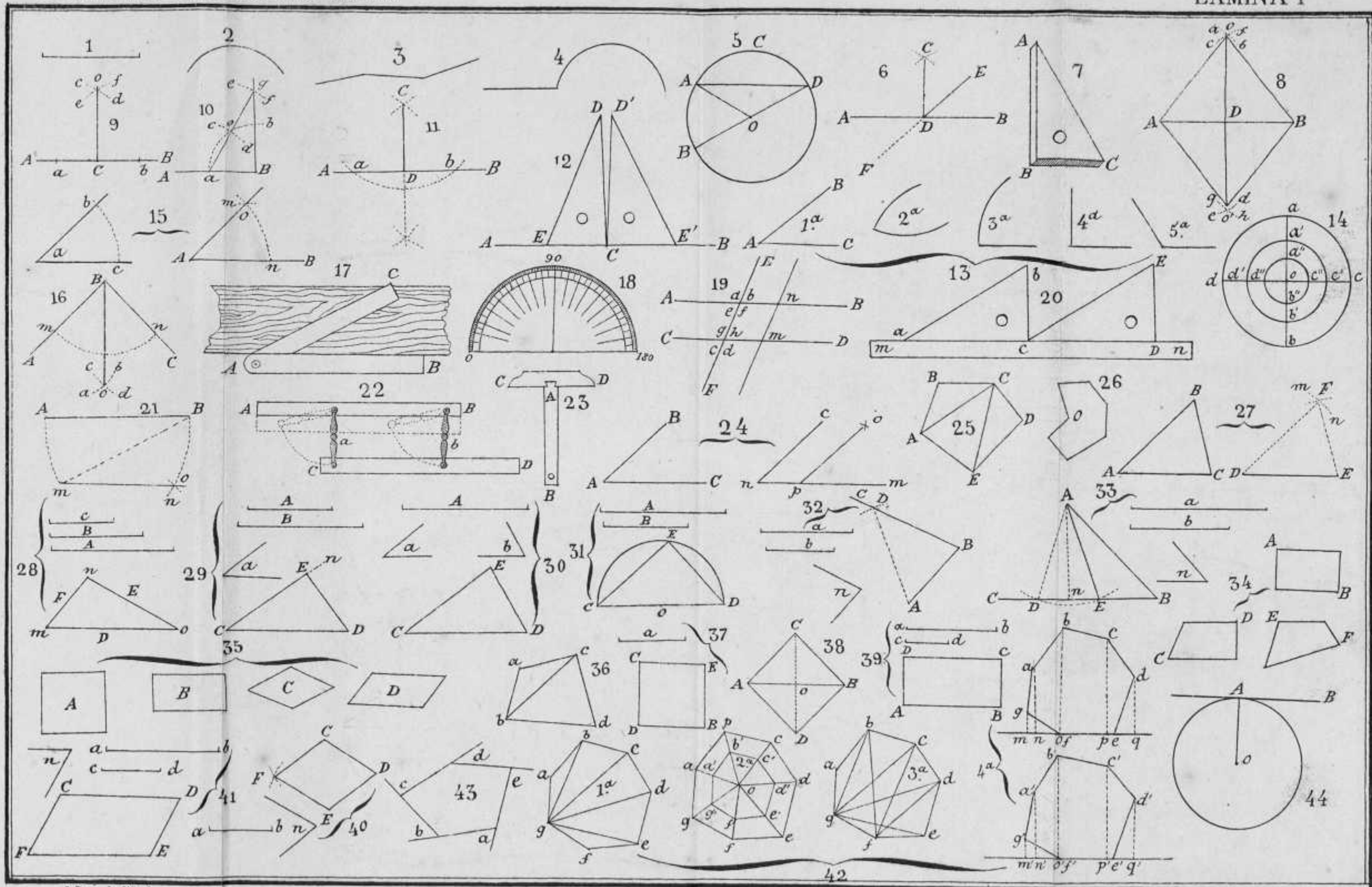
APÉNDICE

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL.

NOTA. El Profesor, en vista del estado de preparacion de los discípulos podrá dividir algunas de estas lecciones en dos, si así lo creyera oportuno al mejor resultado de la enseñanza.

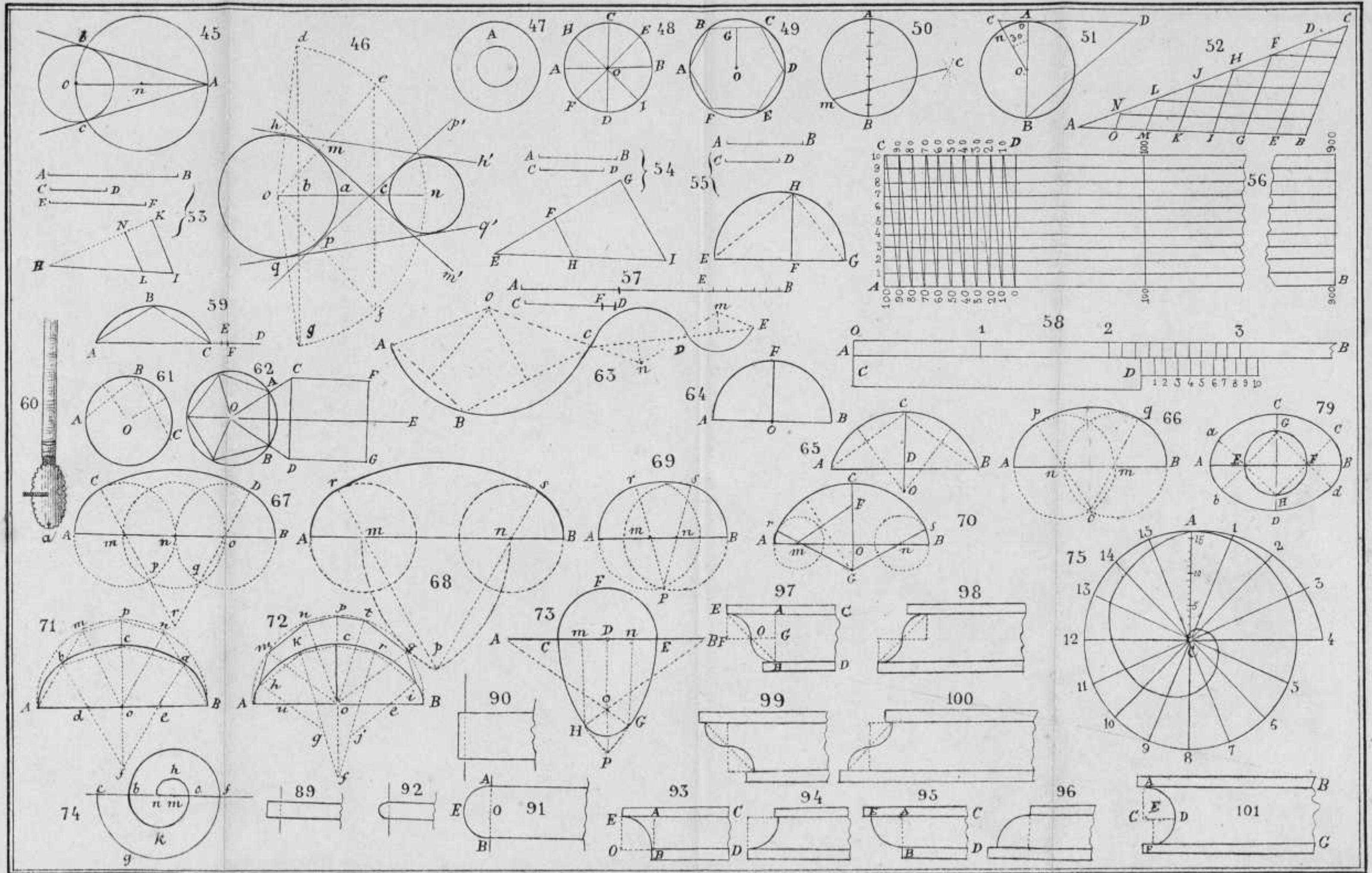
ERRATAS OBSERVADAS.

Pág.	Lín.	DICE.	DEBE DECIR.
47	18	$h'\ m'\ p'\ q'$...	$h\ m\ p\ q$
61	16	60.........	60′,
85	11	$P\ N$ y.....	$P\ N$,
87	1	sea p.......	sea a
97	31	$F'\ a\ N$.....	$F'\ a'\ N$
107	1	sus radios..	y proporcionales sus radios.
117	9	de la.......	dé la
120	10	del polígono dado.....	del que se tomó en el polígono dado
142	5	caras de....	caras del
156	32	(*Fig*. 134)..	(*Fig*. 135)
157	3	135........	134

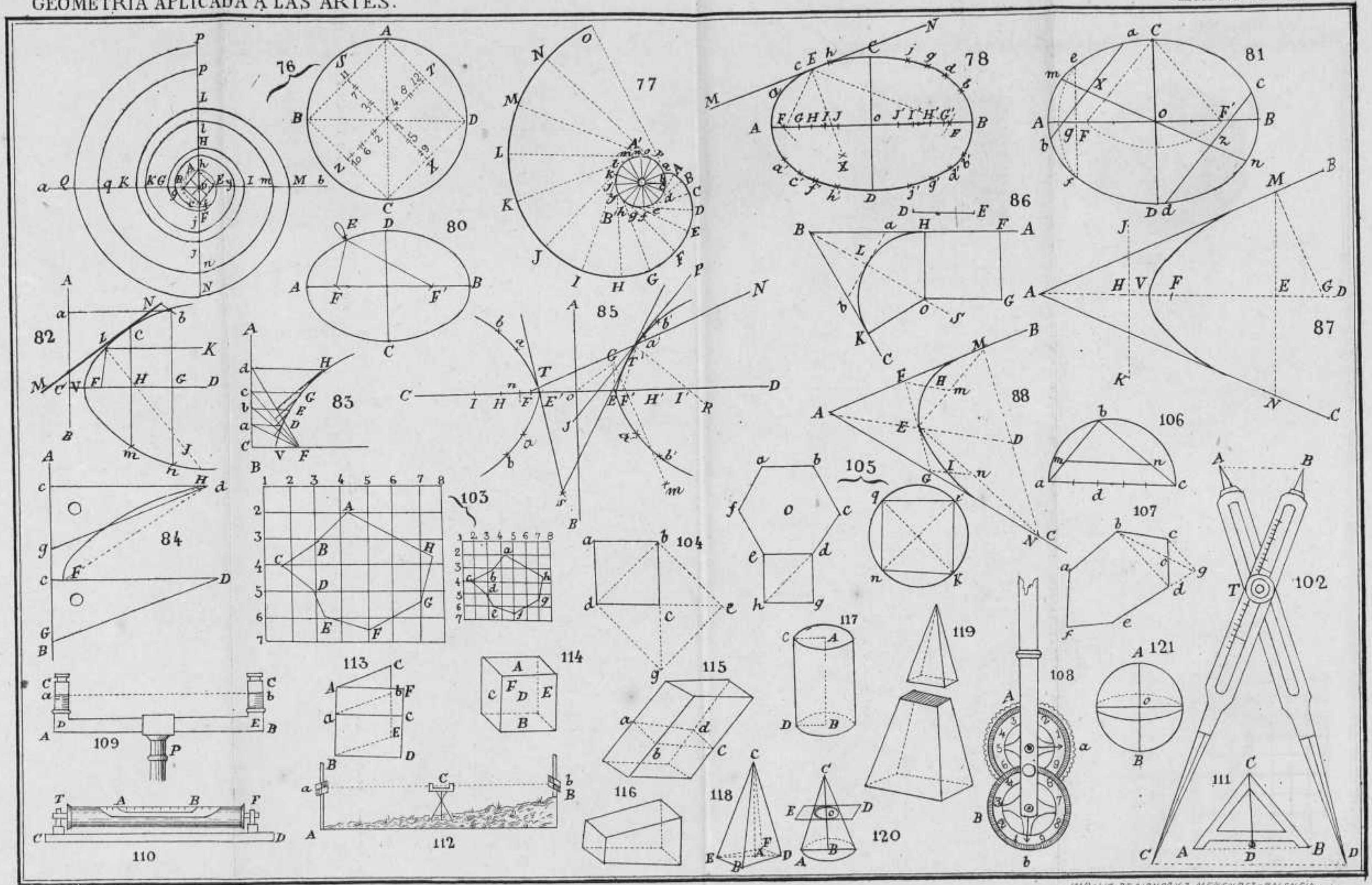


J. Luis. lo litogº

IMP.-LIT. DE ALONSO Y Z. MENENDEZ.-PALENCIA.

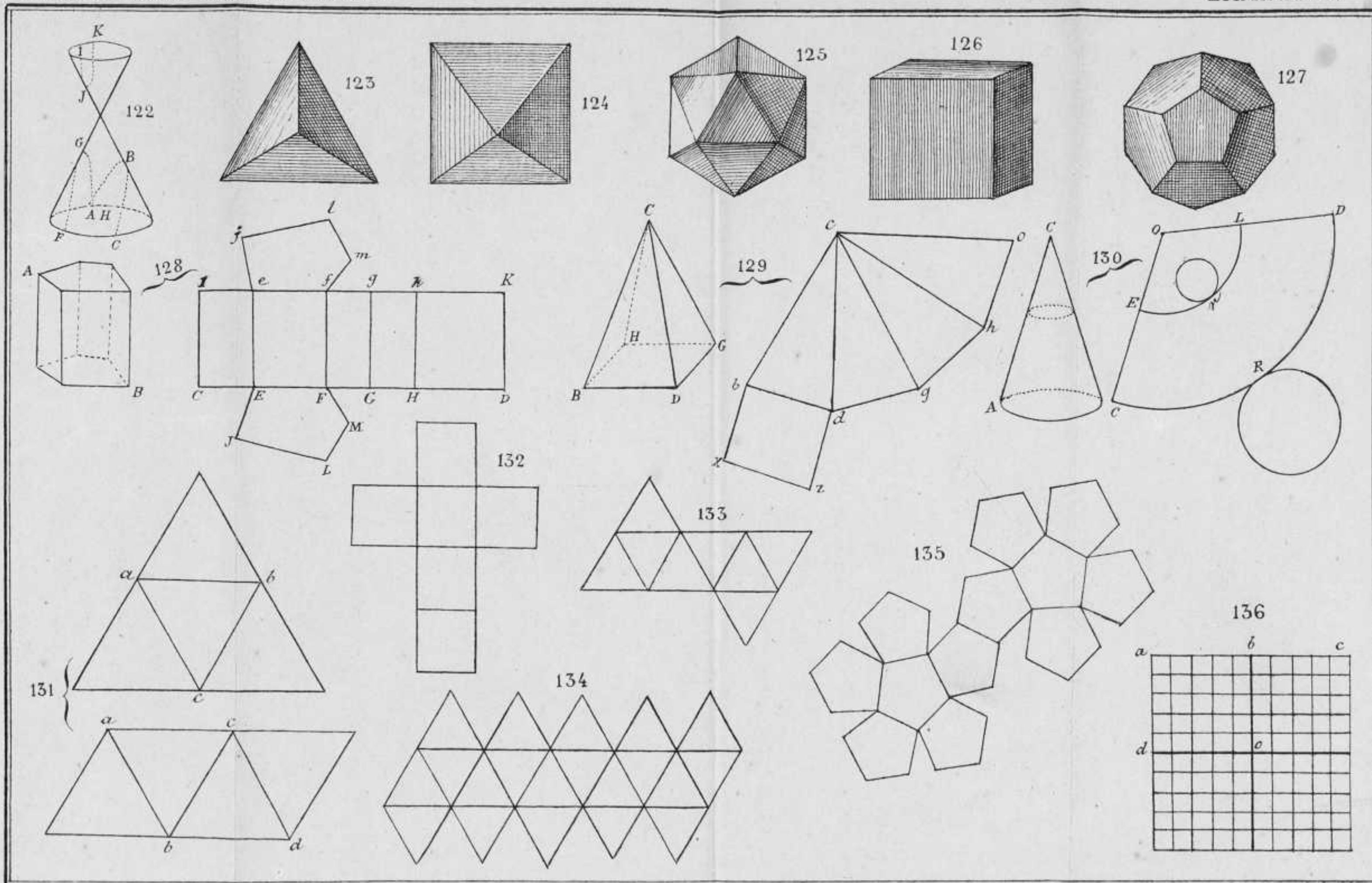


IMP.-LIT. DE ALONSO Y Z. MENENDEZ.-PALENCIA.



J. Luis lo litog.

IMP.-LIT. DE ALONSO Y Z. MENENDEZ-PALENCIA.



IMP.-LIT. DE ALONSO Y E. MENENDEZ.-PALENCIA.