Primer actor de carácter, D. Alejo Pacheco.

Segundo actor y suplir al primero, D. Cárlos Soriano.

Galanes jóvenes.

D. Claudio Coniele y D. Domingo García.

Actores.

D. José Barie, D. Manuel del Pozo, D. José García, D. Luis Mazoli, D. Maximino Fernandez y D. Dionisio Caso.

Apuntadores, D. José de la Calle, D. Fernando Corona, D. Rafael Romero y D. Eduardo García.

PAMPLONA.

Compañía de zarzuela.

Representante de la empresa, D. Ramon Vilches.

Maestro y director, D. Rafael Martin.

Primeras tiples, doña Estéfana Corona, doña Elisa de Valle y doña Rosa Corona.

Segunda idem, doña Carlota Ramos.

Caracteristica, doña Cármen Moreno de Vera.

Papel de su carácter, doña Matilde Amor.

Papel de menor edad, doña Carlota Ferrer.

Tenor, D. Eduardo Campo.

Barítono, D. Camilo Barbati de Cicatone.

Bajo, D. Tomás Iturriaga.

Tenor cómico, D. Hermenegildo Mandanedo.

Partiquinos, D. Juan Lamberto y D. Manuel Lozada.

Apuntador, D. Agustín Martí.

Pintor y maquinista, D. Estéban Jimenez.

Asentista de vestuario, D. José Ramos.

MADRID.

El miércoles por la noche tuvo lugar en el Príncipe el estreno de *La Llave de oro*, drama nuevo del señor Eguilaz. Hubo muchos aplausos, saliendo el actor á la escena en el final del segundo acto y en el del tercero. Este fue el ...

Sr. ...

2120

CURSO COMPLETO

de

MATEMÁTICAS PURAS

por

D. JOSE ODRIOZOLA,

Brigadier de Infantería, Coronel de Artillería, etc., etc.

Geometría Elemental.

SEGOVIA:
Imprenta y Lit. de D. E. Baeza.
1855.

Con la correspondiente autorizacion del Autor, se reimprime esta parte de su obra de Matemáticas por cuenta del Colegio de Artillería, y para el uso particular de su Academia.

Todo ejemplar que no lleve la firma del Oficial comisionado se tendrá por falso y contrahecho, y se procederá contra el que lo reimprima ó venda.

TRATADO SEGUNDO.

Geometria Elemental.

Leccion Preliminar.

1. La Geometria es aquella de las ciencias matemáticas en que se trata de la *estension,* cantidad inseparable de los cuerpos en quienes la consideramos de tres especies diferentes con los nombres de *volúmen, superficie* y *línea.* El espacio que el cuerpo ocupa es su *bulto* ó *volúmen;* el aspecto esterior ó término del bulto es la *superficie* del cuerpo; y el contorno ó término de la superficie es la *línea.* Siguiendo por este órden

llega el geómetra finalmente al término ó estremo de la línea al cual llama *punto*, y que por su naturaleza no es cantidad, sino el principio ó término inicial desde el cual empieza toda estension á tomar valor creciendo sucesivamente y sin interrupcion, la línea en *longitud*, la superficie en *longitud* y *latitud* juntamente, y asimismo el volúmen en *longitud*, *latitud* y *profundidad*.

Para discurrir acerca de estas tres clases de cantidades geométricas y el punto, que como se ha dicho son inseparables del cuerpo, necesitamos fijar nuestra consideracion sobre cualquiera de dichas cuatro cosas aisladamente haciendo abstraccion de las demas, así como el aritmético sobre el peso que tambien es una cantidad inseparable de los cuerpos.

2. La estension ofrece dos clases de cuestiones: trátase á veces de hallar el *valor* de las líneas, de las superficies ó de los volúmenes: otras veces la *posicion* de algun punto ó de todos los que en número infinito componen las líneas y superficies. Los conocimientos que se adquieren en ambas cuestiones proceden de comparar segun reglas lógicas cantidades de una misma especie, viniendo finalmente á las relaciones que hay entre lo que se busca y lo que se conoce. El valor de la estension es relativo á unidad de medida, y la posicion de un objeto es relativa á lugares que se fijan de antemano.

3. Segun lo manifestado en el artículo primero, las líneas por su naturaleza pueden considerarse rastros del punto *A* moviéndose hácia *B* (fig. 1), á manera que trazamos una raya con la punta de la pluma. Se llama *recta* la línea ó distancia mas corta desde *A* á *B*, y se nombra *AB*. Todas las demas entre dichos puntos son *curvas* como *AFCHB*, ó compuestas de varias rectas como *AJEB*. Por la definicion de la línea recta, y admitiendo por axioma que *entre todos los caminos imaginables desde un punto á otro, solo uno es el mas corto*, se pueden establecer los teoremas elementales que siguen.

I.° *Desde un punto* A *á otro* B *no se puede dirigir mas que una recta, y si muchas curvas;* pues todas las que se dirijan de la primera clase coincidirán sobre una misma segun el axioma, y puede no suceder esto en las curvas entre sí por la infinidad de caminos que pueden seguir.

II.° *Está prolongada la recta* AB *hasta un punto* S, *siempre que la parte* BS *agregada satisface á la circunstancia de ser* ABS *la mas corta línea posible entre* A *y* S *pasando por* B: pues de este modo, la parte *BS* de la recta *AS* lo es tambien de la recta *AB*. Lo mismo hay que entender acerca de la prolongacion *AP* del otro estremo. De esta suerte se puede sin fin prolongar una recta *AB* hácia sus estremos, y por ello hay que reputar en general *indefinida* la recta;

aunque somos árbitros de tomar en ella la parte que se quiera terminada por ambos estremos, ó terminada por uno é indefinida por otro.

III.° *Dos puntos cualesquiera* A *y* B *determinan la posicion de una línea recta* AB; *y cuantas rectas* PB, AS *se puedan imaginar que tengan dos puntos comunes con* AB, *coinciden con ella.* Lo cual se funda en el razonamiento del teorema I.°

IV.° *Dos rectas que se cortan solo pueden tener un punto comun, como* AB *y* AC *el punto comun* A; porque si tuviesen dos ó mas puntos comunes, está demostrado que coincidirían las rectas.

4. Tambien la superficie puede ser considerada como rastro de una línea moviéndose de un lugar á otro, á manera que un carpintero y un tornero trazan con el filo de sus instrumentos las figuras superficiales del cuerpo que desbastan; y es bien claro que, si la tal línea se aplica despues á la superficie en la misma posicion que tenia cuando la engendró, coincidirá con ella. Se llama *plana* la superficie á quien se ajusta la línea recta sobrepuesta en todas direcciones; merece singular atencion por su simplicidad y por los usos que de ella se hacen, y comunmente se la da el nombre sustantivo *plano*. Segun la definicion de la superficie, es indefinido el plano así como la recta que le engendra.

De un modo análogo se puede imaginar que el volúmen es el rastro que dejaria una superficie que se moviese, á manera de lo que sucede con una bejiga al inflarla, con la hoja de un libro cuando se la vuelve, con la superficie del agua que va subiendo en un vaso, etc.

5. Con frecuencia se usan en la Geometría los nombres *espacio, identidad, igualdad, semejanza* y *simetría*; y es necesario convenir en sus definiciones.

El espacio en general se considera indefinido: se distinguen el *espacio plano* que es la misma superficie plana, y el *espacio* propiamente dicho que es la inmensa cabidad en que habitamos ó una parte de ella. En ambos casos puede ser tambien definido el espacio: sucede así cuando se cierra en el plano alguna parte con un contorno lineal, que empezando desde un punto vuelve á terminar en el mismo, sin quedar abierto por lado alguno: y en el espacio propiamente dicho, cuando se cierra una porcion de él con una superficie, que empezando desde una línea vuelve á terminar en la misma sin dejar abertura alguna.

Toda cantidad geométrica tiene figura; las hay de figura invariable, como por ejemplo la línea recta y el plano; y de figura variable, como son todas aquellas que en lo sucesivo comprenderemos bajo una misma denominacion sin embargo de las variedades que las distinguen entre sí. Son *figuras planas* las descriptibles en la superficie plana; abiertas ó indefinidas unas, como las que en la lámina 1.ª se indican con los números 5, 6, 7,....; y cerradas otras, como las que indican los números 17, 18..... las cuales forman espacio plano limitado.

Son idénticas dos figuras de Geometría tales que, puesta una en lugar de otra, pueden coincidir todos los puntos correspondientes de ambas entre sí.

En Geometría son iguales dos cantidades, idénticas ó no, con tal que tengan un mismo valor, conforme á la significacion que en Algebra se atribuye á esta voz: de suerte que pueden ser iguales dos cantidades geométricas sin verificarse la identidad.

La semejanza de dos cantidades geométricas no se refiere sino á la figura de ellas, como se esplicará mas adelante.

La simetría de dos cantidades se refiere á la colocacion relativa de que son capaces por su figura, las planas en el plano y los bultos en el espacio.

Las definiciones de este artículo y del precedente, como todas las demas de la leccion preliminar que aquí termina, presentan solamente un bosquejo de los objetos que ocupan la atencion del geómetra. En su ciencia, asi como en el curso de todas las investigaciones del entendímiento, hay que marchar siempre de lo simple á lo complicado, y por esto se divide la Geometría elemental en dos partes. En la primera se trata de figuras descriptas en el plano, y en la segunda de las que estan situadas en el espacio propiamente dicho. Tanto en uno como en otro caso hay figuras de que no se hace mencion en los elementos de esta ciencia; muchas por sus cualidades estan reservadas para cuando se trate de las discusiones geométricas por medio de la análisis, prescindiendo aun entonces de infinitas otras por las razones que se dirán.

Geometria Plana.

CAPÍTULO PRIMERO.

LÍNEAS Y ÁNGULOS.

LECCION PRIMERA.

Composicion y descomposicion de las líneas.

6. Para hallar una recta equivalente á la suma de otras, como AB, BC y CD (fig. 3), se toman en la prolongacion de una, AB por ejemplo, las BC y CD sucesivamente, empezando una en el

punto mismo final de la que precede, y será AD' la suma pedida, cuya espresion geométrica aparece en el mismo resultado, y ademas, por ser cantidad se podrá espresar tambien en lenguage del cálculo segun la forma

$$AD'=AB+BC+CD.$$

Si los tres sumandos fueren iguales, resulta

$$AD'=3\times AB:$$

y en general, si hay m sumandos iguales,

$$AD'=m\times AB.$$

En esta espresion es m número abstracto entero; y así, para hallar una recta que sea m veces mayor que otra dada, hay que ajustar en una indefinida m veces consecutivas dicha dada. Mas adelante sabremos construir de otro modo una recta múltipla de otra cualquiera, y tambien una que con ésta tenga la razon que se pida.

7. Para saber la diferencia entre dos rectas CB, AB, se sobreponen ajustadas por un estremo. Supóngase que se ha de restar CB de AB; ajustando los estremos B y B, pueden ocurrir tres casos en la superposicion.

1.° Si es $AB=CB$, resulta

$$AB-CB=0,$$

y el punto C caerá en A estremo del restando.

2.° Si es $AB > CB$, el punto C caerá entre A y B, y será

$$AB - CB = AC'$$

cantidad positiva.

3.° Si es $CB > AB$, caerá C mas allá de A como en C''; y si en $AB - CB$ se sustituye por CB su igual $AB + AC''$, será

$$AB - AB - AC'' = -AC''$$

la espresion del resíduo. En donde se ve que, restada una línea de otra menor, resulta signo negativo para la diferencia, y que tomando el punto A por origen de las diferencias, las positivas caen respecto de este punto hácia la parte opuesta de las negativas: luego, *siempre que en alguna espresion aparezca una recta con signo negativo y otra con signo positivo, habiéndose de construir, se tomarán hácia partes opuestas de un punto* A *elegido en cualquiera recta indefinida, puesto que una recta cambia de signo al pasar por cero considerándola como resíduo de una resta.*

8. Conforme al princípio general de que las cosas comparadas han de ser de una especie, la línea se mide con otra línea que sirva de unidad, sobreponiendo esta á la que se ha de valuar consecutivamente desde un estremo á otro las veces que en ella tenga cabida. Aun exigiria el ri-

gor geométrico que la unidad y la línea medida fuesen de la misma naturaleza; esto es, recta para recta, y para cada curva otra que se ajustase á ella en la superposicion, si la doctrina de los límites no hubiese enseñado á medir todas con la unidad recta, como diremos á debido tiempo. Sea de uno ú otro modo, la espresion de las veces que el tipo de mesura cabe en la línea se llama número en lenguage aritmético: así, cuando la recta AH contiene m veces á la medida CD, se escribe

$$AH=m\times CD;$$

y suponiendo sea unidad CD, como en Aritmética, resulta

$$AH=m,$$

que es el valor de una línea espresada en número, y el número espresado en una línea. Por lo cual se dice que es dada una longitud AH, ya en el caso de estar construida, ya en el de ser dada la espresion de su valor numéricamente.

9. Cuando se ha de medir una recta á quien llamaremos p, se sobrepone, como se ha dicho, otra q tomada por unidad las veces que quepa desde un estremo á otro: y si resulta caber n veces cabalmente, será

$$p=q\times n, \text{ y } \frac{p}{q}=n$$

la razon de las dos líneas espresada en número entero.

Mas cuando, hechas las superposiciones sucesivas, resulta algun esceso ó defecto d, será $p=nq\pm d$; y para ver si la razon de p á q es algun número fraccionario, trátese de buscar máxima medida comun de ellas. Supóngase que en efecto hay una recta b, por pequeña que sea, medida exacta de p y q simultáneamente, y que de las mediciones resulta ser h el número de veces que está contenida en p, y k el de veces que está en q; dividiendo una por otra las ecuaciones

$$p=b\times h \quad \text{y} \quad q=b\times k,$$

viene

$$\frac{p}{q}=\frac{b\times h}{b\times k}=\frac{h}{k},$$

es decir, espresada en número fraccionario la razon de las líneas p y q, suponiendo $\frac{h}{k}$ irreductible, ó en el caso contrario reduciéndola á su espresion mas simple.

Si nunca resulta medicion sin resíduo en una ú otra de las líneas, aun con la mas pequeña unidad imaginable, p y q no tienen medida comun, los números que espresen las magnitudes de estas líneas son incomensurables entre sí, y la razon $\frac{p}{q}$ entre ellas es número irracional puesto que no puede ser apreciada jamas exactamente (Alg. elem. 102). Tal es el orígen de los números irracionales en esta parte de la Geometría, y el concepto de dos líneas incomensurables entre sí. Con lo cual sabemos ya lo que significan los números positivos, negativos, enteros, fraccionarios é irracionales en las comparaciones de líneas rectas.

10. Se dice que un contorno rectilíneo ABC, (fig. 1) ó curvilíneo $AFCHB$ es *convexo*, cuando una recta de cualquiera modo encaminada solo puede cortarle en dos puntos. En esta inteligencia, supónganse trazados varios contornos convexos desde A á B, y llámese *interior* al que esté descripto entre la recta AB y otro *esterior* que le envuelva; y sea de ellos $AFCHB$ un contorno convexo curvo, y ACB un rectilíneo convexo que tenga comunes con aquel los puntos A, C, B. Por la propiedad característica de las rectas (3), verifícase $AC<AFC$, $CB<CHB$, de donde

$$ACB<AFCHB:$$

luego, un contorno convexo curvo esterior es mas largo que un rectilíneo convexo interior compuesto de rectas que concurren en puntos de la curva.

Dirigidas tambien AE y DB rectas, tenemos $AE<ACE$, y añadiendo EB resulta

$$AEB<ACB:$$

asimismo es $DB<DEB$, y añadiendo AD, será

$$ADB<AEB:$$

luego, con mas esceso

$$ADB<ACB:$$

igualmente por ser $JE<JC+CE$, resultan contornos rectilíneos $AJEB<ACB$. El método mismo de la demostracion autoriza para asegurar que, *tratándose de contornos convexos, el rectilíneo esterior es mas largo que el interior tambien rectilíneo:* y por lo demostrado antes, con mas razon *un contorno convexo esterior curvilíneo será mayor que cualquiera interior rectilíneo convexo.*

Imagínese una curva convexa $AGDKB$ (fig. 2) esterior al contorno rectilíneo ADB, que tiene con ella comunes los puntos A, D, B; dirigidas á los puntos comunes desde la curva las rectas GA, GD, KD, KB, se verifica en los contornos rectilíneos

$$ADB<AGDKB.$$

Dirigidas despues otras rectas desde la curva á los puntos comunes que han resultado, será igualmente

$$AGDKB<AJGLDMKNB.$$

Prosiguiendo el sistema de dirigir nuevas rectas á los puntos comunes que vayan resultando, desde otros intermedios de la curva, se irán trazando contornos rectilíneos mas largos que los interiores de su especie, pero siempre menores que la curva á quien sucesivamente se van acercando, sin que jamás pueda coincidir con ella la mas cercana imaginable, á causa del número infinito de puntos que la componen. Hé aquí una línea curva á quien, respecto de los contornos rectilíneos, conviene la definicion de *límite* dada en el artículo (65) de Algebra elemental.

Ultimamente, supongamos trazado desde el estremo A al B de la curva convexa un contorno rectilíneo convexo esterior $AEFB$, cuyas partes tengan á lo mas un punto comun cada una con ella: y puesto que el contorno interior rectilíneo al fin, si fuera posible llegar, se ajustaria con dicha curva sin dejar de ser siempre menor que el esterior rectilíneo $AEFB$ por lo demostrado antes, se sigue *que una curva convexa es menor tambien que cualquiera contorno rectilíneo convexo esterior, trazado de estremo á estremo de aquella.*

11. Visto que los valores lineales pueden ser espresados por números, tambien el cálculo general podrá ser aplicado á esta clase de estension; y mas adelante se demostrará que á todas las cantidades geométricas. Cuando se traducen las relaciones entre dichas cantidades á lenguaje del

cálculo, se dice *aplicar el Algebra á la Geometría;* y cuando se traducen las espresiones algébricas á figuras en que las cantidades esten conforme á la relacion escrita, se dice *construir* ésta. Fácil es inferir y en adelante habrá ocasiones de observar que, si en el cálculo una cantidad fuese dependiente de algun número irracional, esto es de la razon entre dos líneas incomensurables entre sí, tambien la espresion de aquella será irracional.

Mas en la Geometría se construyen asimismo cantidades sin que preceda espresion algébrica, como ha sucedido en la suma y resta que se acaban de hacer, y como generalmente se procede en casi toda la Geometría elemental. Se dice entonces hallar el resultado *gráficamente* ó por *construccion,* ó segun la *Geometría descriptiva.* Por este medio, aunque fuesen incomensurables los datos é irracional el resultado que dependiese de ellos, queda construida la figura; al paso que no es posible hallar su espresion cabal, ni tampoco hubiera sido el construir la figura exactamente por su espresion irracional. De suerte que, en las operaciones de Geometría descriptiva ó independientes del cálculo, se manejan las cantidades incomensurables lo mismo que las comensurables.

En las construcciones se emplean dos instrumentos necesarios, que son la *regla* y el *compas;*

aquella para trazar líneas rectas, y éste para tomar en la recta indefinida una parte de valor determinado, es decir para trasportar á ella una estension trazada en otra, y que sea dato para la construccion geométrica que se vaya á ejecutar.

LECCION SEGUNDA.

Rectas que se cortan.

12. La recta *GC* que corta á la *AD* (fig. 5), puede hallarse relativamente á esta en diferentes posiciones, segun las cuales varía el espacio comprendido entre las dos que se llama *ángulo*. Se nombra éste con tres letras indicativas de puntos, uno peculiar de cada recta, y otro comun que se anuncia siempre con la segunda de las tres letras escritas en fila, como *ABC*, *CBD*, *ABG*, *GBD* que son los nombres de los cuatro en que la cruz divide el espacio plano que circunda al punto de interseccion *B*. Se llama *vértice* del ángulo el punto *B*, y *lados* las líneas que forman el ángulo. Este se nombra tambien por la letra del vértice solamente, con tal que no haya lugar á confusion de lenguaje, y entonces se dice el ángulo *B* ó el ángulo en *B*.

Cuando los ángulos *ABC* y *CBD* que estan á un lado de la recta AD son desiguales, se dice que la recta BC es *oblicua* respecto AD, é igualmente AD respecto de BC. El mayor ángulo ABC de los dos que una recta forma con otra por un lado de ésta es *obtuso* y el menor CBD *agudo*.

Cuando BC' forma con AD los ángulos ABC' y $C'BD$ (fig. 6) iguales, se dice que la una es *perpendicular* á la otra, y *rectos* los dos ángulos iguales. Por ello se establece que el ángulo recto es mayor que el agudo, y menor que el obtuso, ó lo que es lo mismo, que haciendo girar á la recta BC sobre el punto B desde BD hasta BA, el ángulo recto es el paso del agudo á obtuso. Y puesto que el valor del ángulo determina la posicion en que una recta se halla respecto de otra, diremos que son entre sí mas ó menos oblicuas estas segun el ángulo que forman se diferencia mas ó menos del recto.

15. Dados dos ángulos BAC, FAD (fig. 7) á fin de hallar otro cuya magnitud sea equivalente á la suma, se hace coincidir el vértice del uno sobre el del otro en disposicion que el lado AC de aquel caiga sobre AF de éste, y el ángulo BAC fuera del ángulo FAD, formando así ambos uno solo cuyo valor será

$$B'AD = FAD + BAC.$$

Si hubiese otro ángulo, sumando GAB se aplicaria en igual forma á continuacion del resultado anterior, y tendriamos

$$G'AD=FAD+BAC+GAB.$$

Lo mismo se procede cuando haya mas sumandos; y si fueren iguales todos resultará un total múltiplo de cada uno de ellos.

La resta de dos ángulos FAD y BAC se ejecuta haciendo coincidir los vértices, y un lado AB del sustraendo sobre AF del minuendo, en disposicion que los dos espacios angulares caigan hácia una misma parte. Si el minuendo es mayor se tendrá

$$C'AD=FAD-BAC$$

cantidad positiva. Si los ángulos son iguales, AC caerá sobre AD y la diferencia será nula. Si el sustraendo es mayor, el lado AC caerá en AC'' fuera del ángulo FAD; y si en $FAD-BAC$ se sustituye por BAC su equivalente suma $FAD+DAC''$, resultará $-DAC''$ la diferencia, separada de la positiva con la recta AD. En donde vemos que, *si en una espresion de cálculo dada para construir hay ángulos positivos y negativos, despues de tomar una recta* AD *por origen de ángulos han de construirse hácia parte diferente los de signos contrarios.*

Valuar un ángulo es hallar cuantas veces contiene á otro que se toma por unidad de medida.

Sea BAC (fig. 8) el ángulo que se ha de valuar, y FAC la unidad de medida: sobreponiendo ésta de modo que coincidan los vértices y los lados AC, resulta el ángulo

$$F'AC=FAC.$$

Sobreponiendo en seguida el lado AC de la unidad sobre AF' como para sumarla con $F'AC$, se tendrá

$$F''AC=2FAC;$$

y por este órden $3FAC$, $4FAC$,..... Si en la última superposicion cae AF sobre AB despues de n repeticiones, será

$$BAC=n\times FAC,\ FAC=\frac{BAC}{n}\ \text{y}\ \frac{BAC}{FAC}=n.$$

Cuando no se verifica la coincidencia final, porque sobra ó falta un pequeño espacio angular d, es

$$BAC=n\times FAC\pm d;$$

pero si no obstante hay un pequeño ángulo t que sea comun medida de FAC y BAC, de modo que se verifiquen

$$BAC=h\times t,\quad FAC=k\times t,$$

la razon de los ángulos será

$$\frac{BAC}{FAC}=\frac{h}{k}\ \text{número fraccionario.}$$

Ultimamente, si á pesar de repetidas indagaciones no se encuentra ángulo, por pequeño que sea, que mida exactamente á los ángulos BAC y FAC, son en este caso incomensurables entre sí, y la razon $\frac{BAC}{FAC}$ jamas podrá ser espresada exactamente en número entero ni fraccionario.

14. TEOREMA I.° (fig. 9) *Si una recta* GD *es perpendicular á otra* AB, *tiene la misma inclinacion por una y otra parte de* AB, *asi como ésta es perpendicular tambien á* GD *por ambas partes, resultando de su interseccion cuatro ángulos iguales rectos que componen todo el espacio plano que rodea al vértice comun* C.

Puesto que por construccion es la recta GD perpendicular á AB, resultarán como se ha dicho dos ángulos rectos ACG *y* GCB sobre la recta AB. Siendo pues recto el ángulo GCA, y CD prolongacion de GC, tambien será recto el ángulo ACD; y como se puede razonar lo mismo acerca de GCB y BCD, se debe concluir que los ángulos ACD y BCD iguales á los ACG y GCB son iguales entre sí.

En esto se funda la última parte del teorema; pues visiblemente los cuatro ángulos que resultan de la interseccion C de las perpendiculares, componen todo el espacio plano que hay al rededor de ella; y como estos son rectos la suma de cuatro ángulos rectos hecha del modo que se sabe (15) ocupará dicho espacio.

II.° *Haciendo pasar por un punto* C *cualquiera número de rectas, la suma de todos los ángulos que forman vale cuatro rectos, y la suma de los que formen por cada lado de una de ellas vale dos rectos.*

La primera parte de este teorema es consecuencia inmediata del que precede, puesto que visiblemente la suma de todos los ángulos que resultan de la interseccion de cualquiera número de rectas en el punto C, forma el total mismo de los cuatro ángulos que forman las dos perpendiculares. Tan evidente es la segunda parte del teorema , pues la suma de todos los ángulos que resultan de la interseccion de cualquiera número de rectas hácia un lado de una de ellas, forma el total mismo de los dos ángulos que resultan hácia el mismo lado de dicha recta cortada por una perpendicular; y segun la definicion del artículo (12) son rectos estos dos ángulos.

Lo que falta ó sobra á un ángulo para recto se llama *complemento*, y lo que le falta para dos rectos *suplemento*: asi, el ángulo FCB tendrá por complemento GCF y por suplemento ACF. Siendo R el valor del ángulo recto, las espresiones del complemento y del suplemento de un ángulo V, serán $R—V$ y $2R—V$. Desde ahora se previene que en todo el tratado usaremos de la letra R para espresar el valor del ángulo recto; de consiguiente $2R, 3R, \ldots mR, \frac{R}{2}, \frac{R}{3}, \ldots \frac{R}{m}$ serán valores numéricos de ángulos que se refieren al del recto. Para simplificar el lenguaje, se llaman comunmente *de una misma naturaleza* los ángulos comparados cuando son todos agudos, ó todos obtusos, ó todos rectos.

15. Teorema. *Los ángulos opuestos en el vértice son iguales.* De los cuatro ángulos descritos por dos rectas (fig. 9) GD y EF que se cruzan, llámanse *opuestos en el vértice* los que tienen sus lados en prolongacion, tales como GCF y ECD entre sí, é igualmente GCE y FCD. Para descubrir la verdad importante enunciada acerca de los ángulos opuestos en el vértice tómense en consideracion GCF y ECD, y como por lo demostrado tenemos

$$GCF+FCD=2R, \text{ y } FCD+ECD=2R,$$

viene por supresion de cantidades comunes,

$$GCF=ECD.$$

Del mismo modo se demostrará la igualdad de ángulos

$$GCE=FCD.$$

Segun este principio, todos los ángulos que al rededor del punto C se puedan formar hácia un lado de la recta $G\,D$, tienen sus correspondientes iguales hácia el otro lado de dicha recta: *luego el valor de cada uno de todos los ángulos imaginables está entre* cero *y* 2R.

16. TEOREMA. *Los ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son iguales, siendo de una naturaleza,* y *suplemento uno de otro siendo de distinta.*

En los ángulos $A\,C\,B$ y $G\,C\,D$ (fig. 10) sean los lados respectivamente perpendiculares, de modo que se verifique

$$A\,C\,G = R = B\,C\,D;$$

restando la parte $B\,C\,G$ será

$$A\,C\,B = G\,C\,D.$$

Prolongando $B\,C$ hasta cualquiera punto H despues del vértice, tambien los ángulos $A\,C\,H$ y $G\,C\,D$ tienen sus lados perpendiculares, y por

$$A\,C\,B + A\,C\,H = 2\,R,$$

sustituyendo $G\,C\,D$ por su igual $A\,C\,B$, será

$$A\,C\,H + G\,C\,D = 2\,R.$$

17. TEOREMA. (fig. 11) *Por un punto* G *que esté fuera de la recta* AB, *ó por* C *que esté en ella, no puede pasar mas que una recta que sea perpendicular á* AB.

Suponiendo GC perpendicular bajada desde G á AB; si tambien lo fuese GB, seria recto el ángulo GBC; y formando

$$CBD=GBC,$$

ó sea la estampa de la figura GCB por bajo del lado CB comun resultaría recto CBD. Tambien prolongando GB hasta H seria recto CBH, á que se sigue el absurdo

$$CBD=CBH.$$

Luego, desde un punto G fuera de una recta, no se puede bajar á ella mas que una perpendicular.

Si ademas de la perpendicular CG se pudiese levantar otra CL en el punto C de la recta AB, resultaria

$$GCA=LCA=R,$$

lo cual es imposible. Luego, tampoco desde un punto C de una recta se puede levantar mas que una perpendicular á ella.

18. Teorema. (fig. 11) *Si dos rectas* AM *y* GD *se cortan, solo en caso de ser perpendiculares gozan la propiedad de que cada punto* B *de la una diste igualmente de otros dos* G *y* D *de la otra tomados á iguales distancias del punto* C *de concurso, y la de formar con las oblicuas iguales* BG *y* BD *los ángulos en* B *iguales una perpendicular, y tambien los en* G *y* D *la otra.*

Tomados en la perpendicular GD los puntos G y D equidistantes de C, y sobrepuesto el ángulo BCD á BCG sobre el lado comun CB, el punto D coincidirá con G, resultando las igualdades de líneas y ángulos

$$GB=DB,\quad CGB=CDB,\quad GBC=CBD.$$

La primera ecuacion significa que cualquiera punto B de la perpendicular CB dista igualmente de otros dos correspondientes, tomados de uno y otro lado del pie C equidistantes de él en la GD á quien es perpendicular. Solamente los puntos de la perpendicular tienen esta propiedad; pues otro punto L fuera de ella dá

$$LG<LB+BG; \text{ y por } BG=BD, \text{ es } LG<LD.$$

La segunda y tercera ecuaciones manifiestan que los dos ángulos formados por dichas oblicuas iguales con cada perpendicular son iguales.

19. Teoremas que se fundan en los principios demostrados en el artículo precedente (fig. 11).

I.° *Dos puntos* A *y* B *ó* C *y* B *tales que cada uno esté equidistante de otros dos* G *y* D *de la recta* GD, *determinan la recta* AB *perpendicular á* GD *en el punto* C *de esta.*

En atencion á que solo pertenece á las perpendiculares la propiedad de que cada punto de una diste igualmente de dos de la otra, tomados uno á un lado y otro á otro del punto de concurso equidistantes de él, y que para determinar la posicion de una recta bastan dos puntos, debemos concluir que es cierta la proposicion.

II.° *La mas corta distancia desde un punto* G *á una recta* AB *es la perpendicular* GC *limitada por el punto y por la recta.*

Pues, por la hilacion

$$GD=2\,GC<GB+BD=2\,GB,$$

fundada en el artículo (10) será $GC<GB$.

Recíprocamente, *si* GC *es la menor distancia desde el punto* G *á la recta* AB, *será perpendicular*. Porque, si no lo fuese GC y si GB, para satisfacer á lo demostrado se habria de verificar $GB<GC$ contra el supuesto.

III.° *La oblicua* GM *mas desviada del pie* C *de la perpendicular es mayor que otra cualquiera* GB *mas próxima.*

Pues, por las relaciones conocidas

$$GM+MD=2\,GM>GB+BD=2\,GB,$$

será $GM>GB$.

Recíprocamente, *siendo* GM>GB, *ha de ser con precision* CM>CB; porque á no ser esto, caeria el punto M en M' y resultaria el absurdo $GM'>GB$.

LECCION TERCERA.

Rectas paralelas.

20. Las rectas descritas en un plano (fig. 12) que aun prolongadas indefinidamente no se cortan, se llaman *paralelas*. Si dos rectas AB y CD son cortadas por otra GH, á quien llamaremos secante, resultan en los puntos L y J de interseccion con la secante cuatro ángulos *internos* que son los que estan entre las dos primeras, y cuatro *esternos* que estan fuera de su intérvalo. Estos ocho ángulos toman de dos en dos diversos nombres. ALJ y LJD, CJL y BLJ son *alternos internos*: ALH y DJG como tambien BLH y CJG son *alternos esternos*: se llaman *correspondientes* los que estan á un lado de GH, uno interno y otro esterno como HJD y HLB, é igualmente GLB y GJD; y lo mismo sucede en el otro lado de GH.

21. TEOREMA. *Si dos rectas son perpendiculares á otra, son paralelas entre sí.*

Porque siendo AB y CD perpendiculares á EF, si prolongadas aquellas concurren en un punto, desde él se podrán dirigir dos perpendiculares á EF, lo cual es imposible (17).

22. TEOREMA. *Siendo los ángulos alternos internos iguales, las rectas son paralelas.*

Si las rectas AB y CD estan cortadas por la secante GH en los puntos L y J, de modo que los ángulos ALG, HJD alternos internos sean iguales; dirigida desde el punto K medio de la secante JL la FE perpendicular á AB, tómese $EP=EL$, y habrá (18) las igualdades de líneas

$$PK=KL=KJ,$$

como tambien (18) y (15) las de ángulos

$$PKE=EKL=FKJ \quad \text{y} \quad KPE=KLE=KJF.$$

Sobrepuesto FKJ á PKE debidamente, coincidirán KJ sobre KP y KF sobre KE, y el punto J en P: como por el supuesto es $KJF=KPE$, se ajustarán JF y PE, é igualmente los puntos E y F, resultando EF perpendicular á CD, y por el artículo (21) demostrado el paralelismo de las rectas AB y CD.

23. TEOREMA. *Siendo iguales los ángulos alternos esternos, las rectas son paralelas.*

Sean los ángulos alternos esternos HLB y CJG iguales; como cada uno de estos es igual á su opuesto en el vértice, se sigue por el artículo precedente, que las rectas AB y CD son paralelas.

24. TEOREMA. *Verificándose la igualdad de los ángulos correspondientes, son paralelas las rectas.*

Cuando son iguales los ángulos correspondientes como HLB y HJD, por la misma razon de ser iguales los opuestos en el vértice HJD y CJG, se deduce la igualdad de los alternos esternos $HLB=CJG$, y de aqui el ser paralelas las rectas AB y CD segun el teorema precedente.

25. TEOREMA. *Siendo los dos ángulos internos hácia un lado de la secante* GH *suplemento uno de otro, son paralelas las rectas.*

Supuesto $BLG+HJD=2R$, será

$$HJD=HLB, \text{ á causa de } HLB+BLG=2R;$$

y de resultas paralelas las rectas AB y CD segun el artículo precedente.

De aqui se deduce *que por un punto* L *solo puede pasar una recta* LB *que sea paralela á otra dada* CD; pues, por dicho punto L solo puede pasar una recta LB que forme con la secante JL el ángulo BLJ suplemento de LJD.

26. TEOREMAS recíprocos de los cinco demostrados en los artículos precedentes.

I.° *Si dos rectas* AB *y* CD (fig. 13) *son paralelas, la perpendicular* EF *á una de ellas lo será tambien á la otra.*

En el concepto de ser EF perpendicular á AB; si la paralela CD ó lo que es lo mismo su parte FD no es perpendicular á EF, séalo FM interior ó FK esterior, por consiguiente $EFM=R$

ó $EFK=R$, y de resultas (21) FM ó FK paralela á AB; lo cual es imposible (25): y asi la paralela CD goza solamente la propiedad de que sea $EFD=R$.

II.° *Si dos paralelas son cortadas por una secante, forman los ángulos alternos internos iguales.*

Sean (fig. 12) AB y CD paralelas, GH secante en J y L, EF otra que siendo perpendicular á las paralelas divida por medio á JL en K, y diríjase $KP=KL$: resultarán

$$JKF=EKL=EKP, \quad KJ=KP,$$

y por ello en la superposicion coincidirán los ángulos JKF y EKP como tambien los puntos J y P: no pudiéndose desde P dirigir mas que una perpendicular á EF, coincidirán JF y PE, resultando necesariamente

$$KJF=KPE=KLE.$$

Visto que son iguales KJF y KLE, se sigue que lo han de ser tambien los suplementos CJK y KLB.

III.° *Si dos paralelas están cortadas por una secante, serán iguales los ángulos alternos esternos.*

Pues, por las igualdades $HLB=ELK$ y $CJG=KJF$ segun el artículo (15,) será por el teorema precedente $HLB=CJG$, de consiguiente los suplementos $ALH=GJD$.

IV.° *Si dos paralelas están cortadas por una secante, serán iguales los ángulos correspondientes.*

Habiéndose demostrado la igualdad de los alternos esternos $HLB=CJG$, y la de los opuestos en el vértice $CJG=KJF$, se sigue la igualdad de los correspondientes

$$HLB=KJF,$$

y de aquí la de sus suplementos

$$KLB=GJF.$$

V.° *Siendo cortadas por una secante dos paralelas, los ángulos internos de cada lado son suplemento uno de otro.*

Puesto que son iguales los ángulos correspondientes HLB y KJF, será

$$BLK+KJF=2R.$$

27. TEORÊMA. (fig. 14) *Cuando dos rectas son paralelas á otra, son paralelas entre sí.*

Supuestas AB y CD paralelas á EF, y siendo GH secante en G, K, H, se verificará entre las paralelas AB y EF la propiedad

$$BGH+FHG=2R;$$

y entre las paralelas CD y EF tambien

$$DKH+FHG=2R:$$

formando de estas dos igualdades una sola y suprimiendo cantidades comunes, viene á quedar

$$BGH=DKH,$$

demostracion de ser AB y CD paralelas (24).

28. TEOREMA. *Son iguales ó suplementarios entre sí los ángulos que tengan sus lados respectivamente paralelos.*

Si los ángulos BAC y EDF (fig. 15) tienen sus lados respectivamente paralelos, prolongando el lado ED hasta concurrir en H con el del otro ángulo, resultan de las paralelas DF y HC cortadas por la secante EH paralela á BA, las igualdades de ángulos correspondientes

$$EDF=EHC=BAC,$$

como tambien las de sus suplementarios, y de los opuestos á sus vértices, que son todos los que puede haber de lados paralelos.

29. *Las paralelas estan equidistantes en toda su estension ilimitada.*

Siendo paralelas AB y CD (fig. 16), diríjanse las secantes perpendiculares AC, EF, BD...... que ligan los puntos equidistantes A, E, B de AB con los C, F, D de CD. Sobreponiendo ahora la figura $AEFC$ á la $BEFD$ en disposicion que AE caiga sobre BE desde el punto E comun, coincidirán las rectas FC, FD (17), como tambien los puntos A, B, y los ángulos EAC, EBD. Ademas, por ser BD la menor distancia desde B á la recta FD y tambien AC desde A á FC, será

$$BD=AC.$$

Lo mismo podrá demostrarse respecto de otros dos puntos de cada paralela y de cuantos fueren imaginables en ellas.

30. TEOREMA. I.° *Las partes de paralelas interceptadas por otras paralelas son iguales.*

Siendo AC y BG paralelas (fig. 17), como tambien entre sí las secantes AB y CD, dirijanse á las primeras las perpendiculares AF y CG: sobrepuesto el ángulo BAF á DCG, por ser iguales estos (28), coincidirán sus lados; y tambien los puntos F y G por ser $AF=CG$ (29): no pudiéndose levantar en el punto comun G mas perpendiculares que una (17), caerá FB sobre GD, y el punto B en D por coincidencia respectiva de las dos líneas que concurren. Habiendo pues demostrado que se ajustan los estremos de las paralelas AB y CD, resultan estas iguales.

Ademas, tomando $GD=GD'$ se verifica (18)

$$CD'=CD=AB:$$

de suerte que dos rectas paralelas pueden interceptar partes iguales de dos secantes no paralelas; mas téngase presente que CD y CD' tienen la misma inclinacion respecto de la secante perpendicular CG, una á un lado y otra al otro de dicha perpendicular.

II.° Inversamente, *suponiendo* AB *y* CD *iguales y paralelas, las rectas* AC *y* BD *que ligan sus estremos son paralelas y de consiguiente iguales.*

Porque si AC no es paralela á BD, y si otra recta AM dirigida desde A que cortará con precision á DC en el punto M fuera de C, será por lo demostrado antes $AB=MD$; y como se ha supuesto $AB=CD$, venimos al absurdo de ser MD y CD iguales.

LECCION IV.

Rectas proporcionales.

31. Si $\frac{M}{N}=m$ espresa la razon de dos líneas M y N, como tambien $\frac{P}{Q}=m$ la de otras dos, será $\frac{M}{N}=\frac{P}{Q}$ la espresion de cuatro líneas proporcionales por cociente, siendo M, N, P, Q números que se refieren á la unidad lineal.

32. TEOREMA. *Dividida una recta en partes iguales, las paralelas encaminadas desde los puntos de division á otra recta cuya posicion es arbitraria, dividen tambien á esta en igual número de partes iguales entre si.*

Tomadas en la recta AH las partes AB, BD, DE,... iguales (fig. 18), y dirigidas desde los puntos A, B, D, E,... paralelas, dividirán á la secante $a\,h$ arbitraria en otras tantas partes ab, bd, de... cuya relacion se trata de hallar. Desde los puntos a, b, d, e,... trácense paralelas á la recta AH, y estas cortarán á las primeras en los puntos p, p', p''.... Por construccion hay entre los ángulos (26, IV.°) y (28) las igualdades

$$pab = p'\ bd = p''\ de = \ldots\ldots:$$

asimismo tambien

$$apb = bp'\ d = dp''\ e = \ldots\ldots\ldots:$$

y entre sus lados (30) las igualdades

$$ap = bp' = dp'' = \ldots\ldots$$

Sobreponiendo el ángulo $b\,p'\,d$ á su igual $a\,p\,b$, en disposicion que coincidan los vértices p, p' y lados ap, bp' iguales, caerá el punto b en a, y por las igualdades respectivas de los ángulos caerán bd sobre ab y $p'd$ sobre pb, resultando el punto d en b y por ello $ab=bd$. Lo mismo se demostrarán las igualdades

$$bd=de,\ de=ef\ldots\ldots$$

El encadenamiento de igualdades

$$ab=bd,\ de=ef=\ldots\ldots$$

es la demostracion que se pedia.

33. TEOREMA. (fig. 18) *Las rectas paralelas de un sistema dividen á dos secantes* AH *y* ah *arbitrariamente dirigidas en igual número de partes, tales que las de una son proporcionales á sus correspondientes de la otra.*

Para la demostracion del teorema necesitamos primeramente suponer dividida AH en partes iguales á AB, y ah en igual número de partes iguales á ab, por medio de paralelas como en el artículo precedente. En este concepto, siendo n el número de partes de cada recta, espresan sus todos las ecuaciones

$$AH=AB\times n;\quad ah=ab\times n;$$

de donde $\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{ah}{ab}$.

Cuando no fuere AH múltipla de AB, pero si comensurables entre sí estas líneas, el número n es fraccionario; mas la ecuacion precedente se verifica lo mismo.

En el caso de AH y AB incomensurables entre sí, figúrese HK último residuo tal que se verifique

$$\frac{AK}{AB}=\frac{ak}{ab}.$$

ecuacion que por las equivalencias

$$AK=AH-HK \text{ y } ak=ah-hk,$$

viene á ser

$$\frac{AH}{AB}-\frac{HK}{AB}=\frac{ah}{ab}-\frac{hk}{ab}.$$

Haciendo las divisiones AB, BD.... cada vez mas pequeñas, puede conseguirse que la diferencia HK decrezca cuanto se quiera, de que resultará lo mismo á hk; pero nunca llegarán á ser nulas por el supuesto de irracionalidad (Alg. elem. 102. 3.°). Segun esto es aplicable el principio de los límites (Alg. elem. 66.) por el cual hay entre las constantes la relacion $\frac{AH}{AB}=\frac{ah}{ab}$. De suerte que siempre se verifica el teorema establecido para el caso de líneas comensurables.

En otra forma (Alg. elem. 158.) la proporcion hallada es $AH:AB::ah:ab$,
de que viene tambien

$$AH-AB:AB::ah-ab:ab;$$

esto es $\frac{BH}{AB}=\frac{bh}{ab}$.

Comparando esta ecuacion con $\frac{AH}{AB}=\frac{ah}{ab}$,

resulta $\frac{AH}{BH}=\frac{ah}{bh}$.

Como por este método se halla tambien igualdad de razones entre otras cualesquiera partes correspondientes, debemos concluir que está demostrada la proposicion.

34. TEOREMA. I.° *Cuando concurren las secantes de las paralelas, las distancias desde el punto de concurso á los de division son proporcionales á las demas partes interceptadas por las paralelas.*

Si las rectas AH y ah concurren en el punto A (fig. 19), por el mismo sistema de paralelas Bb, Hh,.... quedará Ah dividida en partes proporcionales á las respectivas de AH, á causa de ser por lo demostrado en el artículo (30) las partes

$$Ab=ab, \quad Ah=ah;$$

y sustituyendo en las proporciones del artículo precedente, resulta la demostracion pedida

$$\frac{AH}{AB}=\frac{Ah}{Ab}; \quad \frac{AB}{BH}=\frac{Ab}{bh}; \quad \frac{AH}{BH}=\frac{Ah}{bh}.$$

II.° Recíprocamente: *son paralelas las rectas* Bb y Hh *que cortan en partes proporcionales á* *dos secantes que terminan en un punto de concurso ó en una recta.*

Pues si no fuese Hh paralela á Bb y sí otra recta Hg, resultaría

$$\frac{AB}{AH}=\frac{Ab}{Ag}$$

y como por construccion tenemos

$$\frac{AB}{AH}=\frac{Ab}{Ah},$$ se incurriria en el absurdo

$$\frac{Ab}{Ah}=\frac{Ab}{Ag};$$ esto es $Ah=Ag$.

35. TEOREMA. *Las partes de paralelas interceptadas entre dos rectas que concurren, son proporcionales á las distancias respectivas desde el punto de concurso de las rectas á los puntos en que las paralelas cortan á cada recta.*

Segun el primer principio del artículo (34), dirigidas BB' paralela á Ah (fig. 19), y bb' paralela á AH será respecto del vértice H,

$$\frac{AH}{AB}=\frac{Hh}{B'h},$$

y respecto del vértice h asi mismo

$$\frac{Ah}{Ab}=\frac{Hh}{Hb'}:$$

sustitúyase por $B'h$ y Hb' su equivalente Bb, y se tendrán las proporciones que se pidieron demostrar las cuales se refieren al ángulo HAh y á las paralelas Bb, Hh,

$$\frac{AH}{AB}=\frac{Hh}{Bb};\quad \frac{Ah}{Ab}=\frac{Hh}{Bb}.$$

Este principio se verifica igualmente tomando las distancias desde los puntos en que otra paralela corte á los lados del ángulo, como A y a en la figura 18, en virtud de la conformidad que hay entre el principio del artículo (33) y el primero del artículo (34).

36. *Si tres paralelas equidistantes consecutivamente son cortadas por dos secantes que concurren, será la parte* Cc *interceptada en la paralela del medio, igual á la semisuma de las partes* Bb *y* Dd *interceptadas en las otras dos paralelas.*

Entre las paralelas interceptadas por los lados del ángulo HAh divididos en partes iguales (fig. 20), hay la relacion particular enunciada. En efecto, tomándose

$$AC=2\times AB,\quad AD=3\times AB,$$

por la proporcionalidad entre las paralelas y las distancias desde sus estremos al vértice A, resultará

$$Cc=2\times Bb,\quad Dd=3Bb=Bb+Cc;$$

::

multiplicando por 2 esta última ecuacion y sustituyendo despues $Dd+3Bb$ por $2Dd$, viene

$$Cc=\frac{Bb+Dd}{2}.$$

De igual modo se demuestra que es

$$Dd=\frac{Cc+Ee}{2},$$

y en general lo mismo de una paralela y otras dos equidistantes de ella.

Este resultado es conforme á la propiedad de la progresion aritmética (Alg. elem. 156.) que forman los valores de las paralelas consecutivas equidistantes entre sí, de la cual es diferencia el término primero mismo ó paralela próxima al vértice.

57. TEOREMA. *Todas las rectas que concurren en un punto serán cortadas en partes proporcionales por dos rectas paralelas que las encuentren.*

Muchas rectas que concurren en un punto A (fig. 23), cortadas por dos paralelas BJ, CK, en B, D, G, J y C, F, H, K, dan (54) la seguida de razones iguales

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AF}{AD},\quad \frac{AF}{AD}=\frac{AH}{AG},\ldots\ldots\ldots\ldots$$

de donde $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{AH}{AG}\ldots\ldots\ldots\ldots$

38. PROBLEMAS de construcciones, que se resuelven por lo demostrado en los artículos precedentes.

1.° *Construir en cualquiera punto* C *dado* (fig. 21), *una recta* CF *paralela á* BD.

Trácese una recta AC que pasando por C corte á la BD, y tambien otra AD que corte á las dos: tómense en AD y BD desde los puntos A y B en que cortan á AC las partes

$$AG=AD, \quad BB'=BD,$$

y la recta GB' indefinida será paralela á AC (34 II.°). Si ahora se toma en GB' desde el punto B' en que corta á BD, la parte $B'C'$ igual á BC, será la recta $C'C$ y su prolongacion CF paralela á BD segun se pide (30.) Del mismo modo se pueden construir cuantas rectas se quieran paralelas á BD en puntos dados de AB prolongada indefinidamente, por ejemplo en E; pues tomando desde B' en GB' la parte $B'E'$ igual á BE, será $E'E$ la paralela que se pide.

II.° *Dividir una recta dada* AH (fig. 20) *en cierto número de partes iguales.*

Trazando en A otra recta Ah arbitrariamente, y tomando en esta las partes Ab, bc, cd,....... iguales, desde el estremo h de la última encamínese al estremo H la recta hH; y dirigidas las paralelas bB, cC....., las intersecciones B, C,..... son los puntos de division (34).

Supongamos que se haya de dividir AH en cinco partes; tomando cinco iguales de cualquiera magnitud en Ah desde A, y construida en la quinta division h la recta hH, las paralelas á ésta levantadas en los puntos e, d, c, b cortarán á la propuesta AH en cinco partes iguales.

III.° *Hallar geométricamente una cuarta proporcional á tres rectas dadas* M, N, P. (fig. 21)

Formando un ángulo cualquiera FAC, sobre uno de sus lados se toman $AB=M$, $AC=N$, y sobre el otro $AD=P$; dirigida BD y la paralela CF, será AF cuarta proporcional, pues resulta (34)

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AF}.$$

Tambien se puede construir por la fórmula $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CF}$ segun el artículo (35): en cuyo caso se toman en la recta AC las partes AB y AC dadas; y levantando las paralelas BD y CF, se toma en una de ellas la tercera línea dada como BD. Dirigida AD, cortará á la otra paralela en el punto F, resultando FC cuarta proporcional á las tres rectas dadas.

IV.° *Dividir una recta* AH (fig. 22), *de valor fijo, en partes proporcionales á las* Mm, mn,.... *de otra dada* MN.

En uno de los estremos A de AH fórmese ángulo con otra recta arbitraria Ah, y tómense en esta con el compás las partes $Ab=Mm$, $bc=mn$.....; trazando despues la recta hH desde la última division h al estremo H, y por último paralelas á ella desde los puntos b, c,....., resultan (34)

$$\frac{AB}{Ab}=\frac{BC}{bc},\quad \frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\ \text{esto es}$$

$$\frac{AB}{Ab}=\frac{BC}{cb}=\frac{CD}{cd}\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

que, sustituyendo por Ab, bc,...... sus iguales, vienen á ser

$$\frac{AB}{Mm}=\frac{BC}{mn}=\frac{CD}{no}=\ldots\ldots\ldots\ldots$$

V.° *Construir escalas geométricas de rectas comensurables.*

En las prácticas de Geometría se hace grande uso de la construccion de líneas proporcionales, formando por los principios demostrados escalas de medidas, á manera que con los números se forman en Aritmética progresiones arregladas á la escala que se quiera.

Para ello se traza un ángulo BAC (fig. 24) de lados indefinidos; se divide la estension arbitraria AB en el número de partes iguales que se quiera, y las paralelas bc, $b'c'$, $b''c''$,..... interceptadas son dobles, triples, etc., de bc (35):

de modo que si hay n divisiones en AB, la última paralela es

$$BC = n \times bc.$$

Tomadas en la prolongacion de BC las partes CD, DE, EF...... iguales á BC, resultan medidas dobles, triples, etc. de $BC = n \times bc$, como

$$BD = 2n \times bc, \quad BE = 3n \times bc.....$$

Siendo $BC = 1$, resulta $bc = \frac{1}{n}$, $b'c' = \frac{2}{n}$.........

hasta $BC = \frac{n}{n} = 1$; y despues $BD = 2$, $BE = 3$.

En la escala decimal ó de líneas proporcionales segun el sistema actual de numeracion, es $n = 10$. Prolongadas bc, $b'c'$, $b''c''$........ y trazando desde los puntos D, E, F... paralelas á CA, resultan intersecciones propias para tomar con una sola abertura de compás cualquiera número de unidades y décimas. Para tomar por ejemplo 18,7 se fijan las puntas del compás en t y en $b^{v'}$; asi mismo para tomar 9,5, se fijan las puntas del compás en los puntos t' y b^{v}: etc.

La escala duodecimal ó de pies, pulgadas y líneas, se construye dividiendo AB' en doce partes iguales: si la paralela bc es una línea, será $B'C'$ una pulgada; y si es bc pulgada, será $B'C'$

el pie relativo á la pulgada. Construidas las paralelas como en la escala decimal, se podrán tomar con una abertura de compás las dimensiones que se quieran.

LECCION QUINTA.

De la línea circular y sus relaciones con el ángulo.

39. La única línea curva cuyas propiedades examinamos en estos elementos es el *círculo*, como *A H F D G* (fig. 25): y tiene la cualidad esencial de que todos sus puntos distan igualmente de uno *C*, llamado *centro*, y que se halla dentro del espacio cerrado por la línea. La distancia constante $AC=r$ es *radio*: la curva completa es *circunferencia*; una parte cualquiera *A H* es *arco*; una recta cualquiera como *H D* de estremo á estremo de un arco *H F D* se llama *cuerda*; la que pasa por el centro como *A D* es *diámetro*.

La cuerda divide á la circunferencia en dos arcos, y al espacio plano cerrado por la circunferencia, en dos partes llamadas *segmentos* circulares.

Dos rádios como *C A* y *C H* que forman ángulo, cortan la porcion *A C H* del espacio circular llamada *sector*.

Ademas del rádio, diámetro, arco y cuerda, hay en el círculo otras dos líneas de mucha importancia. Es *tangente* la recta *HG* (fig. 32) que tiene un punto *D* solo comun con la circunferencia, y *secante*, la recta *HN* que, cortando á la circunferencia en dos puntos como la cuerda (fig. 37), aun sigue fuera del espacio circular. Asimismo se dice que son tangentes mutuamente dos círculos cuyas circunferencias tienen solo un punto comun *B* (fig. 38), y secantes cuando se cortan las circunferencias entre sí.

40. TEOREMA I.° *La circunferencia del círculo no puede ser cortada por una recta* HD (fig. 25) *en mas puntos que dos.*

Pues en caso de haber tres ó mas de interseccion, dirigiendo á ellos rádios, sucederia el absurdo (18) de poderse encaminar tres ó mas oblicuas iguales desde *C* á la recta *HD*.

II.° *El diámetro es la mayor cuerda, y equivale á dos radios.*

Porque siendo *AD* diámetro, *HC* y *CD* radios y ligando los estremos *H* y *D* de estos con la cuerda *HD*; siempre se verifican las relaciones (3)

$$HC+CD=AD>HD.$$

III.° *El diámetro divide á la circunferencia en dos arcos idénticos y al círculo en dos segmentos idénticos tambien.*

En efecto, puesto el arco *AFD*, á quien subtende el diámetro sobre el restante *AJD* en disposicion que sean comunes los puntos *A, C, D,* coincidirán los dos arcos desde un estremo á otro por distar en toda su estension igualmente del centro, y tambien los segmentos en su totalidad.

41. TEOREMA. I.° *En un mismo círculo ó en círculos de iguales rádios, á iguales arcos corresponden iguales cuerdas é idénticos segmentos y sectores.*

Si el arco *AG* es igual á *GJ* (fig. 25) del mismo círculo, sobreponiendo el primero al segundo de modo que sea comun el punto *G* y centro *C*, coincidirán los puntos *A* y *J*; y como no se puede dirigir desde *G* á *J* mas que una recta, se ajustarán las cuerdas *AG* y *GJ*. Al mismo tiempo se ajustarán los segmentos *AG* y *GJ* por coincidir las líneas que los forman, y tambien los sectores *ACG* y *GCJ* por igual razon.

Cada una de las cuerdas *AG* y *GJ* subtende ademas otro arco; y estos nuevos arcos iguales entre sí por residuos de la circunferencia, coincidirán tambien en la superposicion siendo del mismo modo. Suponiéndolos pues en tal estado, y aplicando el razonamiento mismo del otro caso, se hallará que aun siendo mayores que la semicircunferencia los arcos iguales, subtenden cuerdas iguales.

II.° Recíprocamente: *á cuerdas iguales corresponden arcos iguales, ambos menores ó ambos mayores que la semicircunferencia ó iguales á* *ella, con tal que se refieran aquellas á un mismo círculo ó á círculos de iguales radios.*

Suponiendo iguales las cuerdas AG, GJ, y sobrepuestas con sus arcos de modo que sea comun el estremo G y centro C, coincidirán A y J: y debiendo satisfacer los arcos AG, GJ á la definicion de la curva, se ajustarán en toda su estension. Mas, la cuerda AG subtende el arco AG y tambien al restante $AFDG$ de la circunferencia: igualmente la cuerda GJ pertenece al arco GJ y tambien al restante de la circunferencia; la demostracion misma hace conocer, que al sobreponerse las cuerdas AG y GJ se ajustarán tambien los arcos restantes de la circunferencia. Y la misma correspondencia tienen las cuerdas con los segmentos y con los sectores.

Ajustándose pues los dos arcos de una cuerda con los respectivos de otra igual, referidos á un mismo radio, se deduce *que son idénticos los círculos de iguales radios.*

42. TEOREMA. I.° *A menor arco corresponde menor cuerda, comparando entre sí arcos que no sean mayores que la semicircunferencia.*

Siendo $AHFD$ (fig. 25) una semicircunferencia: HFD una parte de ella, y FD otra parte menor, tírense desde el estremo D comun de los arcos, las cuerdas AD, HD, FD correspondientes, y márquense los radios CH, y CF que cortará en K á la cuerda HD. Por ser

$CH < CK + KH$, es $CH - CK = KF < KH$;

pero $DF < DK + KF$, luego con mas razon

$$DF < DH < DA.$$

II.° Recíprocamente *á menor cuerda corresponde menor arco, no siendo los arcos mayores que la semicircunferencia.*

Sobreponiendo los arcos DF y DH, el primero de la cuerda menor DF y el segundo de la mayor DH, en disposicion que sea comun el punto D y centro C; si el arco DF fuese mayor que DH, resultaría segun el teorema I.° la cuerda DF mayor que la DH; lo cual es contrario al dato. Tampoco puede ser (41)

arco DF=arc.DH: luego arc.DF<arc.DH.

A pesar de los teoremas precedentes, hay que librarse de creer que los arcos estan siempre en razon de las cuerdas. Para el convencimiento de que no hay proporcion basta el observar que, siendo los arcos $AG = GJ$, se verifica

cuerdas. $AG + GJ > AJ$, ó bien

$AG > \frac{AJ}{2}$; al paso que arc. AG=arc.$\frac{AJ}{2}$.

45. La sumacion y resta de arcos, é igualmente las demas comparaciones, se deben hacer en

el supuesto de pertenecer á un círculo mismo ó círculos de igual radio. Debiendo sumar los arcos DH y BA (fig. 26), se ajustan los centros C, c y los estremos B y H de manera que el arco HD sea continuacion de AB; de que resultará

$$AB+HD=AD'.$$

Si hubiese mas arcos que sumar, se disponen igualmente á continuacion del arco AD'.

Para la resta, se ajusta el estremo H del uno al estremo A del otro y los centros al sobreponer un arco al otro: si el restando AB es mayor, se hallará

$$BD''=AB-HD:$$

si son iguales, el punto D coincidirá con B y será

$$AB-HD=0:$$

si $HD>AB$, el estremo D caerá fuera del punto B como en D''', y será

$$AB-HD=AB-(AB+BD''')=-BD'''.$$

Por lo cual, *tomando el punto* B *por orígen de los arcos, han de construirse los negativos hácia parte opuesta de los positivos en la misma circunferencia.*

Por la correspondencia de igualdad entre cuerdas y arcos (41), se hacen mas comodamente las sumas y restas de arcos, construyendo el círculo y ajustando los estremos de las cuerdas respectivas á la circunferencia con la propiedad que exige cada operacion de estas. Así haremos en lo sucesivo dichas operaciones y la siguiente de valuar los arcos.

Se mide un arco AB (fig. 27) tomando en él consecutivamente la cuerda hk del arco que se toma por unidad cuantas veces quepa. Se ajusta primeramente el estremo k con B, y h con el punto h' del arco que se ha de medir: desde h' se repite sucesivamente la operacion: y si en la última coincide h con A despues de n puntos marcados, el arco AB será n veces mayor que el arco hk, lo que se espresa en $AB=n\times hk=n$, suprimiendo la unidad; y la razon

$\frac{AB}{hk}=n$ es número entero.

Si hechas n mediciones parciales, no cae h en A, pero tienen medida comun m los dos arcos como

$AB=p\times m$, $hk=q\times m$, resulta la razon

$\frac{AB}{hk}=\frac{p}{q}$ número fraccionario.

Pero, si los arcos comparados fuesen tales que la razon entre ellos no pueda ser espresada en número entero ni fraccionario por pequeño que se imagine, serán incomensurables entre sí.

44. TEOREMA. *Los ángulos cuyo vértice se halla en el centro de un círculo, estan en razon de los arcos que interceptan sus lados en la circunferencia.*

Dirigidos radios al centro desde los puntos h', h'', h''',... de la circunferencia (fig. 27), marcados por la superposicion consecutiva de la unidad lineal hk; resultan tantos ángulos iguales á hck, como veces ha cabido el arco de este en AB: y siendo n el número exacto de medidas, el mismo será de unidades angulares contenidas en ACB. Las razones

$$\frac{AB}{hk}=n, \quad \frac{ACB}{hck}=n, \quad \text{dan} \quad \frac{ACB}{hck}=\frac{AB}{hk}.$$

Si el arco de medida está con AB en la razon fraccionaria $\frac{AB}{hk}=\frac{p}{q}$, será tambien

$$\frac{ACB}{hck}=\frac{p}{q}, \text{ y por tanto } \frac{ACB}{hck}=\frac{AB}{hk}.$$

No siendo comensurables entre sí los arcos AB y hk, supongamos que dividido este en partes iguales y trasladadas al arco AB, falte ó sobre el pequeño AD para la comun medida. Por ser BD y hk comensurables, tenemos

$$\frac{BCD}{hck}=\frac{BD}{hk},$$

que sustituyendo equivale á

$$\frac{ACB}{hck}\pm\frac{ACD}{hck}=\frac{AB}{hk}\pm\frac{AD}{hk}.$$

Siendo árbitros de aumentar el número de divisiones en el arco hk hasta el infinito, tambien se podrá disminuir la diferencia AD y con ella ACD indefinidamente, sin llegar jamás á la nulidad; por tanto, es aplicable el principio de los límites (Alg. elem. 66) $\frac{ACB}{hck}=\frac{AB}{hk}$: con lo cual está demostrada la proposicion en toda la generalidad.

45. TEOREMA. I.° *Dos diámetros cortan á la circunferencia en cuatro arcos de dos en dos iguales; y si los diámetros fueren perpendiculares, serán iguales los cuatro arcos.*

Puesto que son los ángulos proporcionales á los arcos que interceptan en la circunferencia cuyo centro sea vértice comun de aquellos, y que son iguales los ángulos opuestos en el vértice, se infiere que el arco interceptado por dos diámetros hácia una parte es igual al interceptado hácia la opuesta y como en caso de ser perpendiculares los diámetros resultan iguales los cuatro ángulos, tambien lo serán los cuatro arcos, que en este caso se llaman *cuadrantes.*

II.° *El arco puede ser considerado como cabal medida del ángulo.*

Si en la ecuacion hallada $\frac{ACB}{hck}=\frac{AB}{hk}$ (fig. 27), se suprimen hk y hck como unidades respectivas de arcos y ángulos, viene $ACB=AB$, espresion abreviada del mismo concepto y que dice ser el arco medida del ángulo; esto es, que tienen igual número de unidades de su especie uno y otro, salvándose de este modo el escollo en que se incurriria creyendo ser comparacion entre cantidades de especie diferente. Por esto valuar un ángulo es lo mismo que valuar su arco; y así tambien el sumar ó restar ángulos, lo mismo que hacer tales operaciones con los arcos correspondientes. Aunque todo ángulo es menor que dos rectos, la suma de dos ó mas puede ascender á mayor cantidad, y el lenguaje que resulta de valuar el ángulo por el arco es acomodado para espresar valores angulares por grandes que sean.

III.° *En la magnitud de un ángulo no influye el ser sus lados mas ó menos largos, sino el que intercepten parte mayor ó menor de una circunferencia misma, sea cualquiera su radio.*

Las equivalencias $\frac{BCD}{BCA}=\frac{BD}{BA}=\frac{FG}{FH}$

(fig. 28), que simultáneamente existen (44), siendo los arcos BDA y FGH referentes al mismo centro C, pero descritos con radios desiguales, demuestran la verdad enunciada en la proposicion.

IV.° *Los arcos concéntricos interceptados por un ángulo de vértice en el centro, estan en la razon de las circunferencias á que pertenecen.*

De la ecuacion anterior procede $\frac{BD}{FG}=\frac{BA}{FH}$,

sean cualesquiera los ángulos: con que, supuesto recto BCA, serán BA y FH cuadrantes; y multiplicando por cuatro numerador y denominador,

viene $\frac{BD}{FG}=\frac{4\times BA}{4\times FH}$. Se llaman *semejantes* los

arcos BD y FG interceptados por un ángulo en círculos de radios diferentes, cuyo centro C comun es vértice del ángulo.

Como puede ser medida del ángulo BCD el arco de cualquiera circunferencia interceptado por él, es evidente que para valuar ángulos hay que dividir todas las circunferencias imaginables en igual número de partes relativas á la estension de cada una. Por esto se divide la circunferencia en 360 ó en 400 partes llamadas *grados*, y cada grado en partes menores: de suerte que el valor gradual ó angular de dos arcos semejantes es el mismo, á pesar de que el esterior es más largo.

V.° *Los ángulos de los sectores no son proporcionales á las cuerdas de los arcos correspondientes.*

Porque no siguen los arcos de un círculo la razon de sus cuerdas (42).

46. PROBLEMAS. Enterados de que el arco circular mide al ángulo, y éste la inclinacion de una línea recta con referencia á otra fija, se proponen los problemas siguientes con objeto de ensayarse en algunas construcciones fundamentales.

I.° *Dado el ángulo* DAE (fig. 29) *construir otro igual.*

Tómese en el ángulo dado el radio arbitrario AC; y desde A con el compás, fija una punta en A, descríbase el arco circular CB. Hecha esta preparacion y dirigida con la regla una recta HN, tómese sobre ella con el compás el radio $HF=AC$ y constrúyase desde H el arco FK: por último, tomando con el compás desde F la cuerda $FG=CB$ y tirando desde H á G la recta HG, ésta completará el ángulo FHG igual á DAE (41) y (44).

II.° *Bajar una perpendicular á la recta* AB *desde un punto* C (fig. 30), *que está fuera de ella: y desde el punto* F *de dicha recta levantar una perpendicular.*

Para lo primero, desde C con radio mayor que la perpendicular CF márquense los puntos D y E, en que el arco circular descrito corte á la recta: desde estos puntos, con el mismo ó cualquiera radio mayor que $\frac{DE}{2}$, descríbanse arcos que se cortarán en H; y la recta HC será perpendicular á AB (19, I.°).

Para lo segundo se toman con el compás, desde el punto F de la recta en que se ha de levantar perpendicular, los puntos D y E equidistantes de F: desde estos puntos, con radio arbitrario mayor que $\frac{DE}{2}$, descríbanse arcos circulares que se cortarán en H; y la recta HF será perpendicular á AB (19, I.°).

III.° *Dividir la recta* AB (fig. 20) *en dos partes iguales.*

Desde los estremos A y B, con radio mayor que $\frac{AB}{2}$, descríbanse hácia los dos lados de la recta arcos que se cortarán en C y G: la recta CG dividirá en el punto F á la dada en las partes AF y FB iguales: pues, á causa de $AG=GB$, y $CA=CB$, será CG perpendicular á AB, por consiguiente

$$AF=FB \text{ (18)}.$$

IV.° *Dada la recta* AB (fig. 31), *construir una paralela que pase por* H.

Trazada la secante HG de posicion arbitraria, descríbase desde el punto de interseccion K al arco GL con cualquiera radio KG, y con el mismo radio desde H el arco MN; tomada la cuerda GL y trasladada á MN, dirijase la recta HN que será paralela á AB (24). Lo mismo se resuelve el problema valiéndose de cualquiera otro sistema de ángulos (lecc. III).

Bien se deja conocer que este modo de construir en punto dado la paralela á una recta, es mas breve y espedito que el de la práctica I.ª del artículo (38).

LECCION SESTA.

Perpendiculares y paralelas en el círculo.

47. TEOREMA. I.° *El radio perpendicular á una cuerda divide á esta y al arco en dos partes iguales; y la recta que divida en dos partes iguales al arco y juntamente á la cuerda, pasa por el centro y es perpendicular á la cuerda.*

Siendo en el primer caso por suposicion el radio CO perpendicular á la cuerda NM (fig. 32), y por naturaleza los radios CN y CM iguales, estan los estremos N y M de la cuerda NM equidistantes del punto P en que la perpendicular CO la corta (18): y asi tenemos

$$NP=PM, \quad \text{cuerda } OM=\text{cuerda } ON$$

y por ello arco OM=arco ON (41).

En el segundo caso de la proposicion, sabemos que la recta OP pasa por los medios O y P del arco y de la cuerda: y como dos puntos determinan la posicion de una recta, coincidirá OP con la que segun se acaba de demostrar pasa por dichos dos puntos, con la propiedad de ser radio y perpendicular á la cuerda.

II.° *El radio que divide á la cuerda en dos partes iguales, es perpendicular á ella y divide al arco en dos partes iguales; y el radio que divide en dos partes iguales al arco, es perpendicular á la cuerda y la divide en dos partes iguales.*

En el primer caso tenemos los datos $CN=CM$, $NP=PM$; luego, el rado CO que tiene los puntos C y P de este modo (19, I.°), es perpendicular á la cuerda NM: y de consiguiente (18) serán las cuerdas $NO=OM$, y (41) los arcos $NO=OM$.

En el segundo caso los datos son, $CN=CM$, arcos $NO=OM$, de consiguiente cuerdas $NO=OM$:

luego, el radio CO que tiene los puntos C y O en esta disposicion es perpendicular á la cuerda NM (19, I.°), con la propiedad inherente $NP=PM$ que le corresponde segun el teorema I.° del artículo.

III.° *La recta perdendicular á la cuerda y que la divida en dos partes iguales, pasa por el centro y por medio del arco; y la recta que siendo perpendicular á la cuerda divide al arco en dos partes iguales, pasa por el centro y por medio de la cuerda.*

En el primer caso los datos son $NP=PM$, y ser OP perpendicular á NM á lo que es inherente la propiedad de contener todos los puntos equidistantes de los estremos N y M de la cuerda: y como dentro del círculo se halla tambien el centro C equistante de N y M, precisamente será C punto de la perpendicular OP; y ademas, al punto O en que corta el arco pertenece (18) cuerda NO=cuerda OM, y de resultas arco NO=arco OM.

En el segundo caso tenemos por dato la igualdad de arcos $NO=OM$, á que es inherente la igualdad de cuerdas $NO=OM$; y ademas tambien es dada la condicion de ser OP perpendicular á la cuerda NM: y como desde O no se puede encaminar á esta mas que una perpendicular, coincidirá precisamente con la que divide á NM en dos partes iguales y que pasa por el centro, segun el teorema I.°

Por lo demostrado en este artículo vemos que, cortando la recta CP á una cuerda, si se verifican dos de las cuatro condiciones, pasar por el centro, por medio de la cuerda, por medio del arco, y ser perpendicular á la cuerda, se verificarán tambien las otras dos.

48. TEOREMA. I.° *En un círculo dos cuerdas iguales están equidistantes del centro.*

A las cuerdas AD, DB (fig. 33) iguales en un círculo diríjanse desde el centro C las perpendiculares CH, CL, que concurrirán con las cuerdas en sus puntos medios H, L; y líguense al centro con radios los estremos A, D, B de las cuerdas. Sobreponiendo una cuerda á otra de modo que se ajusten sus estremos, se confundirá el punto H con L por ser los medios de las cuerdas ajustadas: y como solo se puede levantar en el punto comun una perpendicular, caerá CH sobre CL, y por las igualdades de oblícuas $CA=CB=CD$ será $CL=CH$ (19, III.°).

II.° Recíprocamente: *en un círculo dos cuerdas equidistantes del centro son iguales.*

Supóngase la igualdad de distancias al centro $CH=CL$, ambas por su naturaleza perpendiculares á las cuerdas respectivas AD y DB: sobreponiendo CL á CH de modo que coincidan los puntos H y L, siendo comun C, tambien coincidirán las cuerdas, porque en el punto H solo puede levantarse una perpendicular. Ademas, por ser

$CA=CB=CD$ radios dirigidos á los estremos A, B, D de las cuerdas sobrepuestas, desde C punto de la perpendicular comun á ellas, necesariamente han de coincidir dichos radios de cada lado de las perpendiculares ajustadas (18), y de consiguiente sus respectivos puntos de concurso con las cuerdas, que son los estremos de estas.

49. TEOREMA. I.° *De dos cuerdas desiguales en un círculo la menor dista mas del centro.*

Sea la cuerda AD mayor que DB (fig. 34); dirigidas las perpendiculares respectivas á ellas CH, CL, y sobrepuestas una á otra de modo que se ajuste el punto L con H, los estremos de la cuerda menor DB caerán en D' y B' equidistantes de H; y los radios CB, CD dirigidos á dichos estremos concurrirán en el punto K de la perpendicular comun HC, mas distante de la cuerda AD que el centro C, por ser $D'C$ menor que el radio, y con mas razon menores aun todas las oblicuas entre $D'C$ y CH (19, III.°).

II.° Recíprocamente: *de dos cuerdas en un círculo la mas distante del centro es la menor.*

Estando BD mas distante del centro C que AD, si se dirigen las perpendiculares CL, CH, y se sobreponen de modo que coincidan los puntos L y H, el vértice del ángulo BCD caerá en K mas distante que el centro; y por ser iguales las oblicuas, los estremos de la cuerda BD mas distante del centro caerán en B' y D', entre el pie comun de las perpendiculares y los estremos de la cuerda mas cercana al centro, pues AK es mayor que AC, y solo puede ser igual á AC una oblicua $D'K$ entre AK y HK (10, III.°).

50. PROBLEMAS cuya solucion pende de los principios demostrados.

I.° *Dividir un arco* NM (fig. 35), *ó ángulo* NCM *en dos partes iguales.*

Levantando en P medio de la cuerda un perpendicular PC, ó lo que es lo mismo dirigiendo (46, III.°) desde el vértice C del ángulo al medio P de la cuerda la recta CP, prolongándola divide al arco en dos iguales y por consiguiente al ángulo (47). Dividiendo así mismo cada mitad resulta el ángulo dividido en 2×2 partes. Dividiendo cada cuarto en dos, se tiene el ángulo total dividido en $2\times2\times2=2^3$ partes. *De suerte que repitiendo la biseccion cuantas veces se quiera, se descompone sucesivamente el arco y el ángulo en* 2, *en* 2^2, *en* 2^3...... *y generalmente en* 2^m, *partes iguales, siendo* m *el número de veces que se repite la biseccion.*

II.° *Trazar una circunferencia que pase por dos puntos dados* N *y* M. (fig. 35).

Dividiendo la recta NM en dos partes iguales y levantando en su medio P una perpendicular PC, se traza desde cualquiera punto C de ella con el radio $CN=CM$ un círculo (18), el cual satisface al problema. Como son infinitos los puntos de dicha perpendicular, *será tambien infinito el número de circunferencias que podrán pasar por dos puntos dados* N *y* M.

Si fuere dado tambien el punto *C* de la perpendicular, está determinado entonces el radio $CN=CM$: y *no hay mas que una circunferencia á quien pertenezcan dos puntos y el centro dados.*

III.° *Hallar el centro de un arco* AB (fig. 34) *propuesto.*

Divídase el arco de la cuestion en dos partes iguales ó desiguales *AD, DB;* y levantando perpendiculares desde los puntos *H* y *L*, medios de sus cuerdas, en ambas perpendiculares está el centro del círculo (47, III.°): y como por construccion concurrirán en el punto *C* que dista igualmente de *A, D, B,* sin que haya otro que tenga esta propiedad (18), será *C* el centro del círculo á que pertenece el arco *AB*.

IV.° *Dados tres puntos* A, B, D, (fig. 34) *que no esten en linea recta, construir una circunferencia que pase por todos ellos.*

Dirigidas las rectas *AD, DB*, en los puntos *H* y *L* de sus medios levántense las perpendiculares *HC* y *LC*; y el punto *C* en que concurren dista igualmente de los dados *A, D, B,* (18): luego, la circunferencia descrita con el radio *CA*, pasará por los tres puntos *A, D, B*. Como ningun otro punto del círculo ó fuera de él tiene esta propiedad de *C*, se sigue que por *tres puntos dados que no esten* *en línea recta puede pasar una circunferencia sola; y que las circunferencias á que simultáneamente correspondan tres puntos, tendrán un mismo centro y radio, por lo cual han de coincidir en toda su estension.*

51. TEOREMA. *Los arcos de una circunferencia interceptados por dos cuerdas paralelas son iguales.*

Dirigidas las cuerdas paralelas AB, DE (figura 36) y el diámetro GF perpendicular á ellas, serán los arcos $DF=FE$, $AG=GB$ (47); por otra parte (40, III.°)

$$GA+AD+DF=FE+EB+BG;$$

de donde $AD=BE$, suprimiendo partes iguales.

52. TEOREMA. I.° *El radio dirigido al punto de contacto es perpendicular á la tangente.*

No teniendo la tangente HG (fig. 32) mas punto comun que el de contacto D con la circunferencia, y hallándose fuera de ésta todos los demas de aquella, se sigue que la recta DC es la mas corta de cuantas pueden dirigirse desde el centro C á la tangente; propiedad que solo pertenece á la perpendicular (19, II.°).

II.° Reciprocamente: *la perpendicular al radio en su estremo* D *es tangente del círculo.*

Siendo HG perpendicular al radio CD en su estremo D, cuantas oblícuas puedan dirigirse á ella desde C serán mayores que el rádio (19, II.°); esto es, todos los puntos de la perpendicular HG

caen fuera de la circunferencia, y solo *D* en ella.

53. TEOREMA. *En el círculo son iguales los arcos comprendidos entre el punto de contacto y los estremos de la cuerda paralela á la tangente.*

El radio *C D* perpendicular á la tangente *H G* será tambien perpendicular á la cuerda *B F* paralela á la tangente (26, I.°); y por lo demostrado antes (47) el arco *D B*=*D F*.

54. PROBLEMAS cuya solucion se funda en ser la tangente perpendicular al radio que pasa por el punto de contacto.

I.° *Tirar una tangente al círculo en cualquiera punto* D *de su circunferencia.*

Se traza el radio *C D*; y la perpendicular *D H* que se construya en *D* (46, II.°) será la tangente pedida.

II.° *Trazar la circunferencia á que sea tangente una recta dada* BD (fig. 37).

Se levanta en el punto *B* que deba ser de contacto la perdendicular *B A*; y todos los puntos de esta podrán ser centros de circunferencias respectivas que satisfagan á la condicion: de suerte que *es indefinido el número de circunferencias á que puede ser tangente una recta dada, en el punto que se quiera de la recta*. Pero si concurre otra condicion mas, ya es determinado el problema, como se manifiesta en el siguiente caso.

III.° *Dada la recta* DB *y el punto* E *fuera de ella, hacer que pase por este punto una circunfe-*

rencia á quien sea tangente DB *en el punto* B.

Dirigidas la recta BE y la perpendicular HC á ella en su medio H, y desde el punto B la perpendicular BC á la recta dada BD; el punto C en que se encuentren las perpendiculares será centro del círculo único, que puede cumplir con las condiciones propuestas (47, III.°) y (52, I.°). Si el punto E hubiese estado á la otra parte de DB, tambien el círculo resultaría en este espacio, y el centro siempre en la misma recta CB perpendicular en B á la tangente.

55. TEOREMA. *Todas las circunferencias de tangente comun* BD (fig. 37), *cuyos centros estén hácia un lado del punto* B, *serán tangentes entre sí interiormente; y las que tengan sus centros á lados opuestos del punto* B *serán mútuas tangentes esteriormente.*

Puesto que es infinito el número de circunferencias distintas á que puede ser tangente á un mismo tiempo en el punto B la recta dada BD, sin mas condiciones; supóngase C el centro de uno de los círculos, N el de otro tangente esteriormente, y N' el del tangente interior. Como todos los centros se hallan en AP perpendicular á la tangente comun BD, será la distancia desde un centro á otro de los dos círculos $CB+BN$ si se tocan esteriormente: y $CB-N'B$ si se tocan interiormente. Esta ecuacion última da

$$CB=CN'+N'B:$$

y encaminando las rectas CK, $N'K$ á otro punto K de la circunferencia de radio mayor, será

$$CB=CK<CN'+N'K; \text{ esto es}$$

$$CN'+N'B<CN'+N'K, \quad \text{ó} \quad N'B<N'K.$$

Lo cual dice que el punto F de la circunferencia de radio menor está dentro del círculo de radio mayor, es decir, *que si dos circunferencias se tocan interiormente* la de mayor radio envuelve á la de menor. Si en la primera ecuacion que fué $CN=CB+BN$, se restituyen por CB y BN las distancias CK, NK desde los centros de los círculos tangentes esteriormente al punto K que puedan tener comun ademas de B, resulta

$$CN=CK+NK,$$

lo cual es imposible (3) mientras el punto K no se ajuste á B: luego, dos círculos tangentes esteriormente, solo tienen de comun el punto B de contacto.

56. TEOREMA. I.° *Dos circunferencias, que sin ser tangentes tienen un punto comun, se cortan en éste y ademas en otro: la línea de centros de estos dos círculos secantes es perpendicular á la cuerda comun; y la distancia entre centros de círculos secantes es menor que la suma, y mayor que la diferencia de sus radios* (fig. 38).

Si dos circunferencias cuyos centros son C y

N, tienen el punto D comun fuera de la línea AP de los centros, bajando á esta desde D la perpendicular DK, y tomadas en ella $DB=BK$, por construccion serán $CD=CK$, $ND=NK$, el punto K comun á las dos circunferencias, DK cuerda comun á ellas, $CN<CD+ND$ y $CN>CD-ND$.

II.° *En las circunferencias que no se tocan ni cortan* (fig. 39), *si están descritas esteriormente, será la distancia desde un centro á otro mayor que la suma de radios; y si están descritas interiormente, será la distancia de un centro á otro menor que la diferencia de radios.*

En cuanto á lo primero fácil es observar que,

por ser $CN=CF+FG+GN$, resulta

$$CN>CF+GN.$$

En cuanto á lo segundo, tambien por causa de

$CN'=CF-N'G'-G'F$ será $CN'<CF-G'N'$.

57. TEOREMA. Inversamente; *verificándose que la distancia desde un centro á otro es mayor ó menor ó igual á la suma de radios, sucede que las circunferencias no se cortan ni tocan, ó se cortan, ó se tocan, siendo esteriores: asimismo los interiores, cuando dicha distancia de centros es mayor ó menor ó igual á la diferencia de radios, se cortan, ó no se cortan ni tocan, ó se tocan.*

Tomando por ejemplo un caso en consideracion, sea d la distancia de centros, r el radio de un círculo y r' del otro: $d=r+r'$ solo pertenece á los círculos tangentes esteriormente; porque si tambien á los demas, se deducirán los absurdos

$$r+r'=r-r', \quad r+r'<r+r' \text{ etc.}$$

De un modo semejante se hacen los razonamientos para los demas casos.

LECCION SÉTIMA.

Angulos cuyo vértice se halla fuera del centro circular, medidos por los arcos que interceptan.

58. TEOREMA. *Todo ángulo cuyo vértice está en la circunferencia, y sus lados son dos cuerdas ó un diámetro y una cuerda, ó la tangente y una cuerda, ó secante y cuerda, tiene por medida la mitad del arco que interceptan sus lados.*

Tómese en consideracion primeramente el ángulo BFD (fig. 40) con el vértice F en la circunferencia, formado por la cuerda BF y el diámetro FD. Construyendo otro diámetro HG paralelo á la cuerda BF, será el ángulo $BFD=GCD$, y la medida de uno y otro el arco GD; este es igual á FH por ser medidas de ángulos opuestos al vértice; y $FH=BG$ por interceptados entre paralelas; luego, $\frac{BD}{2}=GD$ medida del ángulo BFD.

Sean lados del ángulo con el vértice F en la circunferencia dos cuerdas AF y FL, una á cada lado del diámetro FD; la medida de

$$AFL=AFD+DFL \text{ es}$$

$$\frac{AD}{2}+\frac{DL}{2}=\frac{AL}{2}.$$

Si las cuerdas son AF y FB á un mismo lado del diámetro, la medida de

$$AFB=AFD-BFD \text{ es} \quad \frac{AD}{2}-\frac{BD}{2}=\frac{AB}{2}.$$

El ángulo NFD, formado por la tangente y el diámetro que pasa por el punto de contacto, es recto (52); y como tal tendrá por medida la mitad de la semicircunferencia, que es el arco

$\frac{FAD}{2}$. El ángulo NFA formado por la tangente y una cuerda en el punto de contacto, es el complemento de AFD, y tiene por medida la mitad del arco que intercepta, por ser los arcos

$$\frac{FAD}{2}-\frac{AD}{2}=\frac{FA}{2}.$$

Igualmente, el ángulo AFP suplemento de AFN tiene por medida el arco $\frac{ADLF}{2}$, por ser este el que unido al $\frac{FA}{2}$ completa la semicircunferencia que es la medida del doble recto. Luego, el ángulo formado por tangente y cuerda en el punto de contacto, tiene por medida la mitad del arco que abraza.

El ángulo MFL (fig. 40) formado por la secante MA y la cuerda FL que concurren en la circunferencia, es suplemento de AFL que tiene por medida el arco $\frac{AL}{2}$; y siendo este arco quien unido á los $\frac{AF}{2}$ y $\frac{FL}{2}$ completa la semicircunferencia, la medida del ángulo MFL será la suma de arcos

$$\frac{AF}{2}+\frac{FL}{2}=\frac{AFL}{2}.$$

Luego, el ángulo formado por secante y cuerda tiene por medida la mitad de la suma de arcos, comprendidos entre el vértice y los otros dos puntos en que cortan á la circunferencia la cuerda y la secante.

El ángulo cuyo vértice se halla en la circunferencia se llama *inscrito*; y en la propiedad general que se acaba de demostrar estan comprendidas las particulares que siguen.

1.ª *La mitad del arco interceptado por el ángulo mas obtuso posible inscrito será menor precisamente que la semicircunferencia.*

2.ª *El ángulo inscrito cuyos lados interceptan la semicircunferencia es recto.*

3.ª *Todos los ángulos inscritos cuyos lados intercepten un mismo arco ó arcos iguales son iguales.*

59. PROBLEMAS cuya solucion consiste en los principios demostrados acerca de los ángulos inscritos.

I.° *Levantar en el estremo* B *de la recta* AB (figura 41), *sin prolongarla, una perpendicular.*

Si desde el centro *C* arbitrario fuera de la recta se describe una circunferencia que pase por *B*, y se prolonga *AB* hasta encontrar en *F* á la circunferencia, el diámetro *FD* que pase por la interseccion *F* marcará el punto *D* segundo estremo de la semicircunferencia, y la cuerda *DB* será perpendicular por la segunda consecuencia del artículo precedente. Este modo de construir una perpendicular es preferible á veces al del artículo (46, II.°), en especial para dirigir la tangente de otro círculo en un punto *B* de su circunferencia, estremo siempre de radio.

II.° *Desde un punto* G (fig. 42) *fuera de la circunferencia* FAF′ *dirigir á esta la tangente.*

Encaminando al centro *C* la recta *GC*, desde su punto medio *N* se describe con el radio *NC* la circunferencia, que cortará á la propuesta en los puntos *F* y *F′*: dirigidas las cuerdas *GF* y *FC*, el ángulo *CFG* es recto, lo mismo que el *CF′G* que forman las cuerdas *CF′* y *F′G*. Luego, *desde un punto* G *fuera de una circunferencia vienen á ésta dos tangentes, una á cada lado de la línea* CG *encaminada al centro* C.

III.° *Dados que sean un ángulo* N (fig. 43) *y dos puntos* A, B, *hacer que pase por ellos una circunferencia tal que el ángulo* AFB *inscrito sea igual á* N. Problema que tambien se enuncia diciendo, *construir un segmento circular capaz de un ángulo dado* N.

Dirigida la recta *AB*, constrúyase en *B* el ángulo *ABD* igual á *N*: despues en *B* y en *H* medio de *AB* elévense las perpendiculares *HC* y *BC*, respectivas á los lados del ángulo construido; el punto *C* en que se cortan las perpendiculares es centro y *CB* radio del círculo, que pasando por *A* y *B* tiene iguales á *N* todos los ángulos, como *AFB*, inscritos en el otro segmento, porque hay las igualdades $N=ABD=AFB$.

60. TEOREMA. *El ángulo cuyo vértice está en cualquiera punto dentro de la circunferencia, tiene por medida la semisuma de los arcos que*

interceptan sus lados prolongándolos por una y otra parte.

Sea el ángulo GDH (fig. 44) con el vértice D fuera del centro, pero en el espacio circular: prolongando sus lados por una y otra parte hasta que corten á la circunferencia en los cuatro puntos G, H, C, A, y dirigida CJ paralela á AH, el ángulo GCJ tiene por medida el arco

$$\frac{GH+HJ}{2}=\frac{GH+AC}{2},$$

lo mismo que su igual GDH por correspondiente.

61. TEOREMA. *El ángulo formado por dos secantes ó por una secante y una tangente que concurren fuera del círculo, tiene por medida la semidiferencia de los arcos que interceptan sus lados.*

Si el ángulo GBH (fig. 44) tiene su vértice fuera del círculo, y sus lados son dos secantes BG, BH, cortarán éstos á la circunferencia en cuatro puntos C, P, H, G. Dirigida CL paralela á BH, el ángulo $GCL=GBH$ tiene por medida

$$\frac{GH-LH}{2}=\frac{GH-CP}{2}.$$

Si el ángulo B está formado por la secante BH y la tangente BF; dirigiendo desde F punto de contacto la cuerda FM paralela á BH, el ángulo $NFM=FBH$ tiene por medida el arco

$$\frac{FM}{2}=\frac{FH-MH}{2}=\frac{FH-FP}{2}.$$

62. Con el objeto de reasumir para alivio de la memoria todo lo demostrado acerca de las medidas angulares, lo repetimos aquí.

1.° El ángulo cuyo vértice está dentro del círculo tiene por medida la semisuma de los arcos que interceptan sus lados, prolongándolos por una y otra parte del vértice.

2.° El ángulo cuyo vértice está en el centro, tambien incluido en el caso anterior, tiene por medida el arco que intercepta por un lado.

3.° El ángulo con el vértice en la circunferencia ó inscrito, tiene por medida la mitad del arco que interceptan sus lados.

4.° El ángulo cuyo vértice está fuera del círculo vale la semidiferencia de los arcos que interceptan sus lados.

LECCION OCTAVA.

Triángulos.

63. Se llama *triángulo rectilíneo* la figura cerrada por tres líneas rectas; consta de tres *ángulos* y tres *lados*, y se enuncia por las letras de sus vértices escritas en fila, como ABC (fig. 49).

El triángulo que tiene sus tres lados desiguales se nombra *escaleno;* el que tiene dos iguales, *isósceles;* y el que los tres iguales, *equilátero.* Tambien toma nombres por sus ángulos; cuando tiene agudos los tres se llama *acutángulo*; cuando tiene un ángulo obtuso es *obtusángulo;* y cuando tiene recto uno es *rectángulo.*

En el triángulo rectángulo el lado opuesto al ángulo recto es *hipotenusa*, y *cateto* cada uno de los otros dos lados. *Base* del triángulo es un lado cualquiera; *altura* del triángulo es la perpendicular á la base, dirigida desde el vértice opuesto; mas, en el isósceles se llama por escelencia base el lado desigual, y altura la perpendicular bajada á dicha base desde el ángulo opuesto que se nombra vértice de triángulo isosceles.

Desde luego se vé por la definicion de la línea recta, que *en el triángulo un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos.*

Se dice *inscrito* al círculo un triángulo cuando los tres vértices están en la circunferencia, como ABC (fig. 45), y *circunscrito* el DFG formado por tres tangentes: en el primer caso el círculo está circunscrito al triángulo, y en el segundo inscrito.

64. TEOREMAS. I.° *Los tres ángulos de un triángulo sumados valen tanto como dos rectos.*

Ya que siempre puede pasar una circunferencia por tres puntos dados que no esten en una recta (50, IV.°), circunscríbase una circunferencia al triángulo ABC (fig. 45); y por lo demostrado en el artículo (58) resulta que los tres ángulos valen media circunferencia ó dos rectos.

II.° *Dados dos ángulos de un triángulo está determinado el tercero.* Porque es la diferencia de dos cantidades determinadas: se construye restando del recto doble $2R$ la suma de los ángulos dados, ó formando sobre una recta arbitraria DG los ángulos dados en D y en G (46, I.°), para tener el tercero en F.

III.° *El triángulo en que hay un ángulo recto ó un obtuso, tiene agudos los otros dos; y en el rectángulo serán los dos agudos complemento uno de otro: mas puede tener agudos los tres ángulos un triángulo, y solo entonces podrán ser estos iguales.* Todos estos teoremas están fundados en que la suma de los tres ángulos de un triángulo no es mas ni menos que la de dos rectos: y por consiguiente, dado un ángulo está determinada la suma de los otros dos.

IV.° *La perpendicular bajada desde el vértice á la base que tiene ángulos adyacentes agudos, cae dentro del triángulo.* Como en ABC (fig. 47), la perpendicular BD á la base AC. Porque si cayese fuera como BK, resultaria la suma de ángulos

$$ABC+ACB=ABK+AKB,$$

lo que es un imposible á causa de ser

$$ABC<ABK \text{ y } ACB<AKB.$$

V.° *Cuando uno de los ángulos adjacentes á la base es obtuso, cae la perpendicular fuera del triángulo.* Como en BCF la BD perpendicular á la base CF; porque si cayese dentro, esto es, fuese perpendicular BK, habria en el triángulo BCK un ángulo obtuso en C y uno recto en K, lo que es imposible.

VI.° *El ángulo esterior de un triángulo vale tanto como la suma de los dos interiores opuestos á los lados del esterior.*

Si en el triángulo ABC (fig. 45) se prolonga el lado AC, resulta el ángulo BCH que se llama *esterior:* trazada una circunferencia que pase por los vértices A, B, C, el ángulo BCH tiene por medida el arco $\frac{BC+CA}{2}$, que el es valor tambien de los ángulos en A y B sumados.

VII.° *Dos triángulos que tienen ángulos respectivamente iguales, pueden tener los lados correspondientes desiguales.* Pues asi sucede en los triángulos DFG, $D'F'G'$ (fig. 46) construidos sobre una recta DG arbitraria con los ángulos en D, D' iguales, y en G, G' tambien iguales entre sí (28), de que resultan iguales los terceros F y F' por el teorema II.°

65. TEOREMA. *En un triángulo á lados iguales corresponden iguales ángulos opuestos, como tambien lados iguales á los ángulos iguales, y al*

mayor lado se opone el mayor ángulo, y al mayor ángulo el mayor lado.

Dado cualquiera triángulo *A B C* (fig. 45), para demostrar la correspondencia que hay entre lados y ángulos circunscríbase el círculo á dicho triángulo; y es visible la circunstancia de que la suma de los tres arcos cuyas mitades miden los ángulos equivale á la circunferencia. Establecido esto vamos á demostrar las proposiciones.

En el triángulo equilátero los lados subtenden arcos iguales (41) que son menores que la semicircunferencia (58, 1.ª): y como las mitades de éstos, ó lo que es igual los todos, están en razon de los ángulos del triángulo (58), se sigue que el triángulo equilátero es necesariamente equiángulo. Inversamente, el triángulo equiángulo es equilátero; porque sus ángulos abrazan arcos iguales menores que la semicircunferencia (58, 1.ª), y estos están en razon de los ángulos del triángulo duplicados (58), ó lo que es igual, en razon de los mismos ángulos en este caso.

En el triángulo isósceles los lados iguales subtenden arcos iguales (41), y por la condicion cada uno de los del caso ha de ser menor que la semicircunferencia: y como los arcos están en razon de los ángulos (58), se sigue que son iguales los ángulos opuestos á los lados iguales del triángulo isósceles. Inversamente, un triángulo que tenga dos ángulos iguales será isósceles, porque los ángulos iguales abrazan arcos iguales menores que la semicircunferencia por la condicion, y las cuerdas están en razon de los ángulos en este caso.

En el triángulo escaleno, si los tres ángulos son agudos, los lados subtenden arcos menores que la semicircunferencia; y como entonces mayor cuerda subtende mayor arco, y mayor arco subtende mayor cuerda (42), se sigue que en el triángulo escaleno acutángulo, á lado mayor se opone ángulo mayor, y al ángulo mayor lado mayor.

Si un ángulo es recto la misma demostracion tiene lugar aun.

Ultimamente, si un ángulo del escaleno es obtuso, abrazará un arco mayor que la semicircunferencia; cada uno de los otros abrazará arco menor que ella; y no podemos usar del teorema (42) para comparar las tres cuerdas con estos arcos. Pero, sabemos por una parte que la suma de dichos tres arcos debe ser igual á la circunferencia; y por otra, que lo que falta al arco abrazado por el obtuso para la circunferencia entera es la suma de los arcos abrazados por los otros dos ángulos, de consiguiente será mayor que cada uno de estos dicha falta, aunque menor que la semicircunferencia: aplicando pues á estos arcos el teorema (42), se sigue que en el triángulo escaleno obtusángulo al mayor ángulo se opone el mayor lado, y al mayor lado el mayor ángulo.

Quedan ya demostrados los teoremas comprendidos en el general de la proposicion. Sin embargo, como no siguen los arcos en razon de las cuerdas (45, V.°), se deduce que los ángulos de un triángulo no son proporcionales á los lados opuestos.

66. TEOREMA. I.° *La perpendicular bajada desde el vértice del triángulo isósceles á la base, divide á esta y al ángulo opuesto en dos partes iguales.*

En el triángulo isósceles $A\,C\,B$ (fig. 48), desde el vértice C con el radio $C\,A = C\,B$ descríbase un círculo, y bajando $C\,D$ perpendicular á la base $A\,B$ del triángulo, divide á esta recta en dos partes iguales por ser cuerda, y tambien al arco $A\,B$ (47).

II.° *Si en el triángulo isósceles se baja una recta desde el vértice al medio de la base, será dicha recta perpendicular á la base, y dividirá al ángulo opuesto en dos partes iguales.*

Este teorema es el mismo de la primera parte del teorema II.° del artículo (47), haciendo la preparacion de trazar el arco con el lado del triángulo isósceles.

III.° *Si una recta divide al ángulo del vértice del triángulo isósceles en dos iguales, tambien dividirá á la base en dos partes iguales y será perpendicular á ella.*

Esta es la verdad misma recíproca del teorema II.° del artículo (47), tomando el valor gradual del arco por el valor del ángulo.

LECCION NOVENA.

Triángulos idénticos.

67. Son *idénticos* los triángulos cuando sobrepuestos debidamente coinciden todas sus partes, en cuyo caso las propiedades del uno pertenecen tambien al otro necesariamente. Se deja conocer que los triángulos han de ser idéndicos, siempre que los tres vértices del uno caigan sobre los del otro, porque se ajustarán los lados y ángulos correspondientes (5, I.°).

68. TEOREMA. I.° *Son idénticos dos triángulos, siempre que el uno tenga dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales á dos lados y ángulo comprendido por estos en el otro.*

Los triángulos ABC y DFG (fig. 49 y 50), en que se verifica la igualdad de los lados $AB=DF$, $BC=FG$ y la de los ángulos $B=F$, sobrepuestos de modo que coincidan dichos ángulos y lados iguales darán el punto G en C y D en A, resultando $DG=AC$ y por ello la coincidencia respectiva de los triángulos en todas sus partes.

II.° *Son idénticos dos triángulos rectángulos siempre que los catetos del uno sean respectiva-*

mente iguales á los del otro. Pues bastan estas condiciones para que se verifiquen todas las que se han exigido para la identidad segun el teorema precedente, á causa de que todos los ángulos rectos son iguales.

69. TEOREMA. I.° *Son idénticos dos triángulos, cuando el uno tiene un lado y dos ángulos respectivamente iguales á un lado y dos ángulos del otro.*

Dos ángulos de un triángulo respectivamente iguales á dos de otro constituyen igualdad entre los terceros (64). Si ademas los triángulos ABC y DFG tienen un lado igual como $AC=DG$; sobrepuestos los dos triángulos de modo que coincidan los estremos correspondientes D en A y G en C, se ajustarán los ángulos adyacentes y por necesidad el punto F sobre B, resultando el ajustarse los dos triángulos en todas sus partes.

II.° *En los triángulos rectángulos basta que un ángulo agudo y un lado del uno sean iguales á un ángulo agudo y un lado del otro, para determinar su identidad*: porque hay siempre en ellos otro ángulo igual, que es el recto.

70. TEOREMA. *Son idénticos dos triángulos cuando el uno tiene los tres lados respectivamente iguales á los tres del otro.*

Si dos triángulos ABC y DFG (fig. 51 y 50), tienen los lados $DG=AC$, $DF=AB$, $FG=BC$, sobrepóngase el segundo al primero de modo que coincidan los puntos D en A y G en C. Despues con el radio $DF=AB$ descríbase desde A el arco nn', y desde C con el radio $CB=GF$ descríbase el arco mm'; el punto de concurso B, único que hácia esta parte satisface á un tiempo á las condiciones dadas $AB=DF$ y $CB=FG$, será comun á los dos triángulos sobrepuestos, resultando los ángulos $A=D$, $C=G$, $B=F$, y por ello idénticos los dos triángulos.

71. TEOREMA. I.° *Son idénticos dos triángulos, ambos obtusángulos ó acutángulos, cuando sean dos lados de uno respectivamente iguales á dos del otro, y el ángulo opuesto á uno de estos lados en un triángulo sea igual á su correspondiente en el otro.*

Sobrepuestos dos triángulos ABC, DFG (fig. 49 y 50), que tienen los ángulos $A=D$ y los lados $AC=DG$, $BC=FG$ de modo que coincidan los ángulos iguales, el punto G caerá en C; mas, el lado FG puede ajustarse con BC y tambien con su igual $B'C$; de manera que las igualdades supuestas se verifican, ya entre los triángulos DFG y ABC, ya tambien entre DFG y $AB'C$. Pero, si ademas concurre la condicion de ser obtuso el ángulo F, habrá de coincidir con BC el lado FG; y si fuese agudo el ángulo F, se ajustaria FG á $B'C$. Por lo cual, es indispensable la condicion de ser de una misma naturaleza los triángulos.

II.° *Son idénticos dos triángulos rectángulos* *cuando el uno tenga la hipotenusa y un cateto respectivamente iguales á la hipotenusa y un cateto del otro.*

Si en los triángulos $AB''C$ y DFG, ademas de $AC=DG$ y $BC''=FG$, son rectos los ángulos B'' y F; despues de ajustar DG á AC, con el radio $FG=B''C$ descríbase un arco desde el centro C: y como desde A puede venir una sola tangente AB'' hácia esta parte, coincidirán los puntos F y B''.

72. Haciendo finalmente un resúmen de los casos en que está determinada la identidad de los triángulos, recordamos las siguientes verdades. 1.ª Son idénticos dos triángulos siempre que de las seis cantidades ó bien tres ángulos y tres lados que constituyen la figura, haya en el uno tres, incluso un lado, iguales á otras tres correspondientes del otro, con la circunstancia de ser ambos triángulos acutángulos ú obtusángulos cuando los datos en cada triángulo son dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos. Se vé que está esceptuado el caso de ser los tres ángulos del uno iguales á sus correspondientes del otro, por lo que se ha manifestado en el teorema VII.º del artículo (64). 2.ª Son idénticos dos triángulos rectángulos cuando el uno tiene dos lados, ó un lado y un ángulo agudo, iguales á sus correspondientes del otrc.

Hecho el recuerdo de los casos mencionados, y considerando que dos triángulos idénticos vienen á ser uno mismo repetido, se sigue *que está determinado el triángulo siempre que de sus seis elementos haya dados tres, incluso un lado.* El modo de construir el triángulo determinado así se esplica en el siguiente artículo.

73. PROBLEMAS de construir triángulos y de inscribir el círculo á un triángulo dado.

I.º *Construir un triángulo con los datos necesarios.*

Para construir un triángulo determinado por cualquiera sistema de condiciones que se acaban de manifestar, se han de practicar las operaciones geométricas segun el mismo órden con que se han hecho las comparaciones al demostrar la identidad. Se construye primero un lado conocido; y desde sus estremos con el compás se trazan arcos, ya para marcar el tercer vértice cuando son conocidos los lados (70), ya las cuerdas de los ángulos conocidos (46, I.º), prévia escala si fuesen dados en números los valores lineales.

Al hacer la operacion se observará que en cada caso se pueden construir dos triángulos idénticos sobre el lado conocido, uno hácia cada parte del espacio que separa esta recta. Tratándose por ejemplo del caso comprendido en el artículo (70), veremos que los arcos mm' nn' (fig. 51) tambien se cortan en otro punto P á la parte opuesta de AC; la recta AC que pasa por los centros es perpendicular á la cuerda comun BP, y ademas $AB=AP$, $BL=LP$, resultando los ángulos $BAC=CAP$. Por igual razon los ángulos $BCA=ACP$, los lados $BC=CP$ y los triángulos ABC, APC idénticos entre sí y á DFG. Puesto que por ambas construcciones hay conformidad en los resultados, debe concluirse que está demostrado el teorema (70) de uno y otro modo.

La causa de ser las dos soluciones una misma en realidad, proviene de que las figuras planas admiten superposicion por ambas faces; lo que no sucede en las del espacio como veremos cuando se trate de ellas (162) y (175).

No queremos pasar en silencio otra observacion importante propia de este lugar; y es, que la posicion del punto B en el plano está determinada no solo por los datos del triángulo oblicuángulo ABC, sino tambien por los del rectángulo ALB, como por ejemplo AB y el ángulo agudo BAL, ó bien los catetos AL y LB (fig. 52). Se hace mucho uso de este último medio para marcar en un plano diversos puntos, construyendo triángulos rectángulos con un cateto tomado en la linea fija AC desde el *origen* A, y otro cateto en la perpendicular elevada á la distancia correspondiente de dicho origen. Para esto se coordenan de antemano las perpendiculares AC y AD indefinidas por ambos estremos; y de esta suerte la posicion de cada punto, por ejemplo B, está determinada por las distancias simultáneas BL y AL á las dos rectas *coordenadas* fijas; lo cual ofrece un ejemplo de lo que se indicó en el artículo (2) acerca de la posicion.

Cuando entre los puntos asi marcados en el plano á uno y otro lado de una recta $A\,C$ (fig. 55), hay dos como B y B' tales que la recta $B\,B'$ sea perpendicular á $A\,C$ y dividida por ésta en dos partes iguales $B\,H$ y $B'H$, se dice que los puntos B y B' estan *simétricamente situados* respecto de la recta AC. Asimismo, si las rectas BE y $B'E'$ se hallan de modo que $B\,B'$ y $E\,E'$ sean perpendiculares á $A\,C$ y esten divididas dichas perpendiculares por $A\,C$ en dos partes iguales, se dice que $B\,E$ y $B'E'$ estan simétricamente situadas respecto de $A\,C$ (fig. 56). Lo mismo se debe entender en cuanto á dos curvas cuyos puntos todos de dos en dos esten asi.

II.º *Inscribir el circulo al triángulo* DFG (fig. 45) *dado.*

Puesto que se pide construir el círculo á que sean tangentes los lados $D\,F$, $F\,G$, $D\,G$, supóngase por un momento ser J, K, L los puntos de contacto, y de consiguiente elevadas las perpendiculares $J\,O$, $L\,O$ que concurrirán en el centro O del círculo (52). De esto resulta que los triángulos rectángulos $D\,O\,J$, $D\,O\,L$ que tienen la hipotenusa comun $D\,O$ son idénticos (71), y en ellos se verifica la igualdad de ángulos $O\,D\,J = O\,D\,L$, es decir que dicha hipotenusa divide al ángulo D del triángulo propuesto en dos partes iguales. Por la misma razon la hipotenusa OF divide al ángulo F en dos iguales entre sí, despues de análogas suposiciones, y lo mismo la hipotenusa OG al ángulo G. Hasta ahora hemos caminado sobre el supuesto de ser J, K, L los puntos de contacto: pero la cuestion es hallar estos y el centro O, lo cual se consigue por el mismo razonamiento que se acaba de hacer. En efecto, el resultado nos dice *que dividiendo cada uno de los ángulos del triángulo en dos partes iguales* (50), *el punto* O *en que se cortan las rectas que los dividen es centro del círculo inscrito, y radio de éste la perpendicular bajada desde dicho centro á cualquiera de los lados* (46, II.°).

74. TEOREMA. *Dados para un triángulo dos lados* AB *y* BC (fig. 54), *el tercer lado será mayor segun sea mayor el ángulo que se forme con las rectas dadas*; y recíprocamente, *este ángulo resultará mayor segun sea mayor el tercer lado:* es decir que, *si en un triángulo crece un ángulo sin alterarse el valor de los lados de este, crece el lado opuesto, y si crece el lado crece el ángulo opuesto.*

Tomando por radio el lado BC (fig. 55), trácese desde el estremo B del otro lado AB un círculo $C'CC''$; y tirados los radios BC', BC, BC'', complétense los triángulos ABC', ABC,

ABC'' sucesivos desde el menor agudo hasta el mayor obtuso, para observar las variaciones de los lados AC', AC, AC''. Con este objeto tomamos el punto intermedio C de modo que el ángulo ACB sea recto, esto es AC tangente. En el triángulo ABC' se vé desde luego por la inecuacion (10) $AC'+C'B<AC+CB$, que suprimiendo cantidades iguales resulta $AC'<AC$. Asimismo, en el triángulo ABC'', tenemos por una parte $BC''<BD+DC''$ y por otra $AC<AD+DC$: sumando las dos inecuaciones y reduciendo viene á resultar $AC<AC''$.

Queda pues demostrado que en el triángulo, siendo constantes los valores de dos lados, el tercero va creciendo segun el ángulo opuesto es mayor. Recíprocamente se verifica que, segun el tercer lado es mayor, el ángulo opuesto va tambien siendo mayor, como se hace ver por inecuaciones de ángulos que resultan, aunque omitimos aquí el verificarlas por la suma facilidad con que lo puede hacer por si el lector. Por tanto, se concluye que está demostrado el teorema propuesto.

Sin embargo, como no están los ángulos en razon de las cuerdas (45, V.°). se deduce que el ángulo de un triángulo no crece proporcionalmente al lado opuesto.

LECCION DÉCIMA.

Triángulos semejantes.

75. Se llaman *semejantes* dos triángulos cuando dos ángulos del uno son respectivamente iguales á dos del otro, á que se sigue necesariamente el ser tambien iguales entre si los terceros ángulos (64). Los lados opuestos á los ángulos iguales son *homólogos*, de modo que cada lado de un triángulo tiene su homólogo en el semejante. Para construir un triángulo semejante á otro dado GHK (fig. 56 y 57), se forma un ángulo A igual á H, se toma sobre uno de sus lados indefinidos cualquiera parte; y construyendo en el estremo de esta un ángulo igual á su correspondiente, de modo que cierre la figura, quedará trazado al triángulo semejante; que para ser el único posible necesita otra condicion mas en el problema (73, I.º).

76. TEOREMA. I.º *La secante paralela á un lado del triángulo corta los otros dos en segmentos proporcionales.*

En el triángulo ACF (fig. 56) dirijase BD paralela á CF; y por ser $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DF}$ segun el artículo (34), resulta demostrada la proporcion.

II.° Recíprocamente: *si la recta* BD *corta los lados* AC *y* AF *del triángulo* ACF *en partes proporcionales, como* $\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AF}$, *la recta* BD *es paralela al tercer lado* CF *del triángulo.* Porque sino, supongamos CM paralela á BD, á que sigue necesariamente

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AM};$$

y como tenemos el dato preciso de la otra proporcion, resulta por igualdad de razones el absurdo $AF=AM$.

77. TEOREMA. *En el triángulo la secante paralela á un lado forma con los segmentos de los otros dos un triángulo semejante al total hácia el ángulo opuesto á dicho lado.*

En los triángulos ABD y ACF, siendo BD paralela á CF, son los tres ángulos del uno respectivamente iguales á los tres del otro, (26): y por tanto está cumplida la condicion de semejanza.

78. TEOREMA. *En los triángulos semejantes son proporcionales los lados homólogos.*

Si en dos triángulos CAF y GHK (fig. 56 y 57) es cada ángulo del uno igual á su correspondiente del otro; sobrepuesto el segundo triángulo al primero, de modo que caiga el ángulo GHK

sobre su igual CAF con el vértice H en A, y los lados HG y HK sobre sus homólogos AC y AF, el punto G caerá en G' sobre AC, y K en K' sobre AF; serán idénticos los triángulos GHK, $G'AK'$, y por consiguiente $G'K'$ paralela á CF, á causa de ser iguales los angulos G' y C, ó bien á causa de iguales los ángulos K' y F. De esto resulta (34) y (35)

$$\frac{AG'}{AC}=\frac{AK'}{AF},\quad \frac{AG'}{AC}=\frac{G'K'}{CF};$$

y sustituyendo HG por AG', HK por AK' y GK por $G'K'$, viene

$$\frac{HG}{AC}=\frac{HK}{AF}=\frac{GK}{CF}.$$

79. TEOREMA. *Dos triángulos son semejantes cuando los lados del uno son respectivamente proporcionales á los del otro.*

Supuestos proporcionales los lados del triángulo ACF á los de GHK, de modo que se verifique

$$\frac{HG}{AC}=\frac{HK}{AF}=\frac{GK}{CF},$$

córtense $AG'=HG$, $AK'=HK$. La recta $G'K'$ será paralela á CF, con motivo de la proporcionalidad supuesta; y por tanto los triángulos $AG'K'$ y ACF semejantes, resultando

$$\frac{AC}{CF}=\frac{AG'}{G'K'}.$$

Como por el supuesto es tambien

$$\frac{AC}{CF}=\frac{HG}{GK}, \text{ viene } \frac{AG'}{G'K'}=\frac{HG}{GK};$$

esto es $G'K'=GK$, los triángulos $AG'K'$ y HGK idénticos, y los tres ángulos de HGK respectivamente iguales á los de ACF. La proposicion que se acaba de demostrar es la recíproca de la anterior.

80. TEOREMA. *Son semejantes dos triángulos cuando el uno tiene un ángulo igual al del otro, y los lados que forman dicho ángulo en el uno proporcionales á los que forman su igual en el otro.*

Supóngase que en los triángulos CAF y GHK (fig. 56 y 57) son los ángulos $A=H$, y proporcionales los lados que los forman como $\frac{AC}{HG}=\frac{AF}{HK}$; sobrepuesto el segundo triángulo al primero de modo que coincidan los vértices y lados respectivos de los ángulos A y H, el punto G caerá en G', y K en K', resultando idénticos los triángulos $AG'K'$, HGK; y por la proporcion supuesta será

$$\frac{AC}{AG'}=\frac{AF}{AK'};$$

esto es, $G'K'$ paralela á CF y semejantes por ello (77) los triángulos ACF y $AG'K'$.

Segun esto, para formar un triángulo semejante á otro dado GHK de un modo diferente que en el artículo (75), se construye un ángulo A igual á H; y cortando sus lados indefinidos proporcionalmente á HG y HK, la recta que ligue los estremos de aquellos ya cortados completará el triángulo semejante.

81. TEOREMA. *Son semejantes dos triángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos.*

Si dos triángulos ACF y HGK (fig. 56 y 57) tienen sus lados respectivamente paralelos, AC y HG entre sí, CF y GK igualmente, como tambien AF y HK; sobrepuesto el segundo al primero de modo que coincidan H en A y HG sobre AC, si el punto G cae en G' y se traza $G'K'$ paralela CF, sesultarán entre los ángulos las igualdades

$$G'=G=C \quad (26, \text{IV.°}), \quad K'=K=F.$$

Asimismo se verá que los ángulos H y A son iguales, aunque basta que sean dos entre sí para serlo los terceros y semejantes los triángulos (75).

82. TEOREMA. *Son semejantes dos triángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares.*

Si dos triángulos ABC y DFG (fig. 58) tienen sus lados respectivamente perpendiculares, como GD á AB, FD á AC, y GF á BC; prolongada

FD hasta concurrir con AC, hay entre sumas de ángulos la equivalencia

$$DAH+ADH=R=GDF+FDB,$$

que restando ángulos opuestos en el vértice, se reduce á $DAH=GDF$. Prolongando, si es necesario, los otros dos lados hasta concurrir con los respectivos del otro triángulo, se demostrará del mismo modo que los ángulos G y B son iguales como tambien F y C.

83. TEOREMA. I.° *La perpendicular bajada desde el vértice del ángulo recto á la hipotenusa, divide al triángulo rectángulo en dos semejantes al total y por ello entre sí.*

Bajando desde el vértice B del ángulo recto ABC (fig. 59) la recta BD perpendicular á la hipotenusa AC, los dos ángulos en D serán iguales á ABC. Los triángulos ABC y ADB rectángulos, con el agudo A comun, tendrán tambien iguales los terceros ángulos ABD y ACB. Asímismo los triángulos rectángulos ABC y DBC, con el agudo comun C, tendrán iguales los terceros BAC y DBC: en consecuencia son semejantes los tres triángulos ABC, ABD, DBC.

Comparando lados homólogos de los triángulos semejantes que acabamos de reconócer, dedúcense los teoremas que siguen.

II.° *La perpendicular* BD *bajada desde el vértice del ángulo recto á la hipotenusa es media* *proporcional entre los segmentos* AD *y* DC *de esta.*

Por la semejanza de los triángulos parciales en que la perpendicular BD divide al ABC, será

$$\frac{AD}{BD}=\frac{BD}{DC}, \text{ de donde } AD\times DC=\overline{BD}^2.$$

III.° *Cada cateto* AB, BC *del triángulo rectángulo dividido, es media proporcional entre su hipotenusa y el segmento de esta correspondiente á dicho cateto.*

Entre los lados del triángulo ABC y de cada uno de los parciales hay tambien las relaciones que siguen.

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AC},\ \frac{DC}{BC}=\frac{BC}{AC}$$

de donde $AD\times AC=\overline{AB}^2$, $DC\times AC=\overline{BC}^2$.

IV.° *Las potencias segundas de los catetos* AB *y* BC *del triángulo rectángulo están en razon de los segmentos en que la perpendicular bajada desde el vértice divide á la hipotenusa.*

Dividiendo una por otra las dos últimas ecuaciones, resulta $\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2}=\dfrac{AD}{DC}$.

V.° *En el triángulo rectángulo la segunda potencia de la hipotenusa vale tanto como la suma de segundas potencias de sus catetos.*

Sumando las ecuaciones finales del teorema (III.°) viene $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = (AD+DC)\times AC = \overline{AC}^2$.

Por este principio, dados los valores numéricos de dos lados en un triángulo rectángulo, está determinado el tercero numéricamente: pues, siendo b la hipotenusa, c un cateto y a el otro, la ecuacion hallada viene á ser

$$b^2=c^2+a^2, \text{ y dá } b=\sqrt{(c^2+a^2)}$$

$$c=\sqrt{(b^2-a^2)},\ a=\sqrt{(b^2-c^2)},$$

84. TEOREMA. *En el triángulo* ABC (fig. 60), *la segunda potencia del lado opuesto al ángulo agudo* B, *es menor que la suma de segundas potencias de los otros dos lados con la diferencia* 2(AB×BD), *siendo* D *el punto en que el lado adyacente* AB *queda cortado por la perpendicular* CD *bajada á él desde el ángulo* C. *Y en el triángulo* ABC′ *la segunda potencia del lado opuesto al ángulo* B *obtuso, es mayor que la suma de segundas potencias de los otros dos lados con el esceso* 2(AB×BD′), *siendo* D′ *el punto en que el lado adjacente prolongado concurre con la perpendicular* C′D′ *bajada á él desde* C′.

Sea B agudo como en el triángulo ABC, ú obtuso como en ABC'; dirigidas desde C y C' las CD y $C'D'$ perpendiculares á el lado AB, caerán dentro ó fuera del triángulo segun el ángulo B fuere agudo ú obtuso (64, IV.° y V.°), y resultarán las ecuaciones

$$\overline{CD}^2=\overline{AC}^2-\overline{AD}^2=\overline{CB}^2-\overline{BD}^2,$$

$$\overline{C'D'}^2=\overline{AC'}^2-\overline{AD'}^2=\overline{C'B'}^2-\overline{BD'}^2.$$

Como hay las equivalencias $AD=AB-BD$ y $AD'=AB+BD'$, las ecuaciones precedentes despues de sustituir cantidades iguales, desenvolver binomios y reducir, vienen á ser

$$\overline{AC}^2=\overline{CB}^2+\overline{AB}^2-2(AB\times BD)$$

$$\overline{AC'}^2=\overline{C'B}^2+\overline{AB}^2+2(AB\times BD').$$

Por estas relaciones y la que se halló en el triángulo rectángulo, (83, V.°) vemos, que en el triángulo la segunda potencia de un lado pasa de menor á mayor que la suma de segundas potencias de los otros dos lados, al pasar el ángulo opuesto de agudo á obtuso, es decir, en el acto de ser dicho ángulo recto.

Espresando con la letra x cualquiera de las distancias BD ó BD', y con las minúsculas a, b, c los lados opuestos á los ángulos de mayúsculas respectivas, estan cifradas las dos últimas conclusiones en la ecuacion doble

$$b^2=a^2+c^2\pm 2cx;$$

que, en el caso de B recto viene á ser la misma que se halló para el triángulo rectángulo (83, V.°).

85. TEOREMA. *El triángulo de los lados* a, b, c *será rectángulo y* b *su hipotenusa siempre que se verifique la igualdad* $b^2=a^2+c^2$: *y será acutángulo con el ángulo opuesto á* b *agudo, ú obtusángulo con el ángulo opuesto á* b *obtuso, segun se verifique una ú otra de las ecuaciones comprendidas en* $b^2=a^2+c^2\mp 2cx$, *siendo* x *la distancia desde el vértice hasta el punto en que el lado adyacente concurre con la perpendicular bajada á él desde el ángulo opuesto.*

Las tres proposiciones que se acaban de enunciar son las recíprocas de las demostradas anteriormente (83, V.°) y (84), y se prueban con facilidad por absurdo. Por ejemplo, si verificada la ecuacion $b^2=a^2+c^2$ no es recto el ángulo opuesto al lado b, será agudo ú obtuso y entonces b^2 mayor ó menor que a^2+c^2 contra el supuesto. Lo mismo se demostrarán las otras dos proposiciones, cuya verificacion confiamos al estudiante. De aqui se deduce que, dados los valores respectivos de los tres lados de un triángulo, fácil será conocer si hay algun ángulo recto ú obtuso y cuál de ellos es, observando si la segunda potencia del mayor escede, iguala, ó no alcanza ó la suma de segundas potencias de los dos menores.

86. TEOREMA. *En el triángulo, la recta que divide á un ángulo en dos iguales corta el lado opuesto en partes proporcionales á los otros dos lados.*

En el triángulo ABC (fig. 61) divídase el ángulo B en dos iguales con la recta BF; y prolongada AB hasta que concurra en D con CD paralela á BF, será por el artículo (34)

$$\frac{AB}{AF}=\frac{BD}{FC}.$$

Al mismo tiempo, la igualdad de los ángulos $FBC=BCD=ABF=ADC$ prueba que el triángulo BCD es isósceles y $BD=BC$. Sustituyendo en la proporcion BC por BD, resulta la que se trataba de hallar

$$\frac{AB}{AF}=\frac{BC}{FC}.$$

En el artículo (66) vimos verificado el caso particular del triángulo isósceles.

87. TEOREMA. *Cuando dos cuerdas de un círculo se cortan, el producto de segmentos de una equivale al de otra;* ó lo que es igual, *las cuerdas se cortan en segmentos inversamente proporcionales.*

Dos cuerdas AD y BF (fig. 62) que se cortan en H forman los ángulos opuestos en el vértice iguales: ligando despues los estremos B y D, A y F, con las cuerdas BD y AF, los ángulos DBF y DAF son iguales; y los triángulos BHD, AHF que tienen dos ángulos respectivamente iguales son semejantes. Comparando lados homólogos, resulta la espresion pedida

$$AH \times HD = BH \times HF.$$

88. TEOREMA. I.° *La perpendicular bajada desde la circunferencia al diámetro* (fig. 59) *es media proporcional entre los segmentos en que este resulta dividido por aquella.*

Cuando es diámetro una de las cuerdas como AC, y corta la cuerda BH perpendicular á él, son iguales los segmentos BD y DH de la cuerda (47): y el principio demostrado antes viene á ser en este caso

$$\overline{BD}^2 = AD \times DC.$$

II.° *Las perpendiculares bajadas desde la circunferencia al diámetro van decreciendo segun se alejan del centro;* es decir, *que la media proporcional decrece segun va siendo mayor la diferencia de los estremos, cuya suma no varia de valor.*

Nos consta que BD es mitad de la cuerda en que se halla (47), y que la cuerda mas distante del centro es la menor (49): luego el teorema está justificado.

PROBLEMA. *Constituir una media proporcional á dos rectas* p *y* q *dadas.*

La solucion se funda en el teorema I.° de este artículo. Pues tomando una recta $AC=p+q$, con el radio $\frac{p+q}{2}$ se describe el círculo ABC, y la perpendicular BD levantada en D punto divisorio de las rectas p y q es la media proporcional.

89. TEOREMA. *Si dos secantes que concurren fuera del círculo, se prolongan hasta encontrar á la circunferencia en los segundos puntos de intersección con ella, el producto de una secante por su parte esterna es igual al producto análogo de la otra secante.*

Cortada una circunferencia (fig. 65) por dos secantes AF, AH, y dirigidas desde un punto á otro de interseccion, como se ve en la figura, las cuerdas FB y DH; los triángulos AFB y AHD que tienen el ángulo A comun y los ángulos F y H iguales, son semejantes. La comparacion de los lados homólogos da la verdad propuesta

$$AF\times AD=AH\times AB.$$

90. TEOREMA. *La parte de la tangente interceptada por una secante es media proporcional entre la secante toda y su parte esterior.*

Sea GH una secante y GB tangente en el punto B; dirigidas desde B las cuerdas BH y BE á las intersecciones de secante y curva, resultan los triángulos GHB y GBE semejantes, por ser comun el ángulo G y ademas $GHB=GBE$ (58). Comparando lados correspondientes hallaremos la relacion

$$GE\times GH=\overline{GB}^2.$$

Se usa de esta propiedad para resolver el problema siguiente.

PROBLEMA. *Dividir una recta* GB (fig. 64) *dada, en dos partes* GL *y* LB *tales, que la mayor* GL *sea media proporcional entre la otra parte* LB *y el total* GB, á lo que se llama *dividir una recta en media y estrema razon.*

Siguiendo por un momento el espíritu del Algebra, nuestro problema está cifrado en

$$\overline{GL}^2=GB\times LB;$$

que, á causa de $LB=GB-GL$, recibe la forma

$\overline{GL}^2=GB\times(GB-GL)$; la cual se puede trasformar en $GL\times(GL+GB)=\overline{GB}^2$.

Consiste pues en determinar GL, de modo que GB sea media proporcional entre GL y $GL+GB$, y esto se conseguirá por una construccion tal, que GB sea tangente cortada por una secante de la longitud $GL+GB$, cuya parte esterior sea tan larga como GL. Para ello levántese en B una perpendicular: cortada en esta la parte

$BC=\frac{BG}{2}$, y construido con este rádio el círculo tírese la secante GC. Se verifica en él por el

teorema, $\overline{GB}^2=GE\times(GE+GB)$; y marcando sobre la recta dada la parte $GL=GE$, será

$\overline{GB}^2=GL\times(GL+GB)$, ó lo que es igual,

$$\overline{GL}^2=GB\times LB.$$

91. TEOREMA. *Si dos rectas que concurren en un punto dentro ó fuera del círculo se prolongan hasta encontrar á la circunferencia en los puntos posibles, quedan cortadas en partes recíprocamente proporcionales, contándose las partes desde el punto de concurso de las rectas hasta los de concurso de ellas con la circunferencia.*

Observando lo que tienen de comun los principios demostrados últimamente acerca de dos rectas que se cortan referidas al círculo, se deduce que están incluidos en el teorema general que enunciamos; y como toda recta de las circunstancias que se exigen será con precision diámetro, cuerda, secante ó tangente; se sigue está demostrada la proposicion.

LECCION UNDECIMA.

Polígonos.

92. Toda figura cerrada por líneas rectas se llama *polígono*, como $ABCFG$ (fig. 65), que tiene todos sus ángulos *salientes*, y como $ABCDFG$ que tiene salientes todos sus ángulos escepto el *entrante* que forman en B los *lados* CD y DF del polígono. Mas, en estos elementos solo trataremos de polígonos *convexos*, es decir, de los que tienen salientes todos sus ángulos; que es el caso en que una recta puede cortar su *contorno* ó *perímetro* en dos puntos solamente (10). El número de ángulos ó vértices de un polígono visiblemente es el mismo que el de lados.

La recta, como AC ó AF, dirigida de un ángulo á otro no contiguo, se llama *diagonal* del polígono; y si desde un ángulo A se dirigen diagonales á todos los demas, resulta dividido el polígono en tantos triángulos como lados tiene menos dos: es decir, que resultan así n—2 triángulos siendo n el número de lados del polígono. Otro de los modos que se usa para descomponer-le en triángulos consiste en trazar rectas como KA, KB.... (fig. 66) desde un punto K interior de la figura á todos los vértices: y entonces resultan tantos triángulos como lados tiene el polígono, es decir, n número de triángulos en el polígono que tenga n lados. Para distinguir unos de otros los ángulos que se puedan considerar en estas figuras, llámanse *ángulos del polígono* los comprendidos por cada dos lados de él, como ABC, BCD....: y se llaman *esteriores* los suplementos de aquellos, como LBC, MCD.....

Los polígonos toman los nombres por el número de lados que tienen; llamándose triángulo el de tres lados cuyas modificaciones y propiedades conocemos ya; *cuadrilátero* el que consta de cuatro lados; *pentágono* el de cinco, *exágono* el de seis, *eptágono* el de siete, *octágono* el de ocho, *enágono* el de nueve, *decágono* el de diez, *undecágono* el de once, y asi sucesivamente los de mayor número de lados. Se llama *regular* el polígono cuando son iguales todos sus ángulos y todos sus lados, diciéndose por ejemplo pentágono regular, exágono regular, etc. (fig. 67).

93. TEOREMA. *Dados todos los ángulos menos uno y todos los lados menos los dos del ángulo desconocido, como tambien el órden de su colocacion, está determinado el polígono.*

Polígonos idénticos son los que sobrepuestos coinciden en todas sus partes; por lo cual, el problema de construir un polígono idéntico á otro dado es el mismo de construir un polígono con lados y ángulos dados, previniéndose ademas el órden de su colocacion respectiva. Dados pues, n—1 ángulos y n—2 lados de un polígono de n lados, para construir otro $ABCDEFG$ (figura 66) idéntico se toma un lado AG, y en sus estremos se forman los ángulos adyacentes A y G, que correspondan: tomando en seguida sobre el lado indefinido de uno de estos la parte AB, segun el valor que se diere para este lado del polígono, se construye en B el ángulo correspondiente. Continuando así se llegará por fin á formar el ángulo E, cuyo lado indefinido EF cortará por sí mismo al indefinido del ángulo G en el punto F, y quedarán así determinados GF y FE, como tambien el ángulo F comprendido del polígono.

Así como en el caso demostrado hemos visto que de los $2n$ elementos del polígono han bastado $2n$—3 para determinarle, el hecho induce á creer tambien que siempre para construir un polígono de n lados deberán bastar $2n$—3 datos, siendo n—2 lados y n—1 ángulos. Mas, á pesar de que hay relaciones entre lados y ángulos del polígono, aun está por resolver el problema general de hallar dichos dos cualesquiera lados y un ángulo, dados los $2n$—3 elementos restantes; y solo en el triángulo, que es el polígono de menos lados, está resuelto completamente (Lec. IX).

94. TEOREMA. *La suma de los ángulos del polígono vale tantas veces dos ángulos rectos como lados tiene menos dos; y la suma de los esteriores vale cuatro rectos.*

Las rectas dirigidas desde un punto K (fig. 66) interior á todos los ángulos del polígono, le dividen en tantos triángulos como lados tiene. Siendo pues n el número de ellos, y R el ángulo recto, todos los ángulos que resultan así en la figura juntos valen $2nR$ por lo demostrado en el artículo (64); los formados en K juntos (14) valen $4R$: y restando estos de aquellos, resulta que la suma de los del polígono es $2nR—4R=2R(n—2)$. Segun esto, en el triángulo es $n=3$, y $2R$ la suma de ángulos. En el cuadrilátero es $n=4$, y $4R$ la suma de ángulos. En el pentágono, es $6R$ la suma de ángulos, etc. Como el polígono regular tiene iguales todos sus ángulos (fig. 67), será el valor de cada uno $\frac{n-2}{n}\times 2R$; de consiguiente $\frac{2}{3}R$ el del triángulo regular; R el del cuadrilátero regular; $\frac{6}{5}R$ el del pentágono regular, etc.

Prolongando cada lado del polígono por uno de sus estremos, resultan los ángulos esteriores LBC, MCD,.... suplementos respectivos de los interiores adyacentes del polígono: y como hay tantos suplementarios como ángulos tiene, asciende á la suma $2nR-2R(n-2)=4R$ el valor de todos los ángulos formados esteriormente por cada lado y la prolongacion del inmediato; que es la segunda parte del teorema. En el polígono regular será $\frac{4R}{n}$ el valor de cada ángulo esterior; de consiguiente $\frac{4}{3}R$ el del esterior del triángulo regular; R el del cuadrilátero regular, etc.

95. Dejando para mas adelante lo demas que se dirá de los polígonos en general, tomemos en consideracion ahora los cuadriláteros entre los cuales se distinguen con nombres propios los que vamos á definir. *Trapecio* es el cuadrilátero $ABCD$ (fig. 68), que tiene dos lados BC y AD paralelos, sin serlo entre sí los otros dos. *Paralelógramo* es el cuadrilátero $ABEF$ ó $ACDF$ (fig. 69 y 70), que tiene sus lados de dos en dos paralelos entre sí, á lo cual es inherente la propiedad de ser iguales de dos en dos sus lados (50). Cuando el paralelógramo tiene los cuatro ángulos rectos se llama *rectángulo* como $ACDF$ en la misma figura 69; y si ademas tiene iguales los cuatro lados se llama *cuadrado*, como $ABEF$ en la misma figura. Cuando no son rectos los ángulos del paralelógramo como en la figura 70, se llama *oblicuángulo*, distinguiéndose con el nombre de *rombo* el paralelógramo oblicuángulo que tiene igua-

les sus cuatro lados, como $ABEF$ en dicha figura 70. Sentadas estas definiciones, pasemos á manifestar en los teoremas que siguen algunas propiedades de los paralelógramos.

TEOREMA. I.° *El cuadrilátero que tiene los lados opuestos iguales entre sí, es paralelógramo.*

Siendo en el cuadrilátero $ABDF$ (fig. 71) los lados $AB=FD$, $BD=AF$, y tirada la diagonal AD, resulta dividido en dos triángulos idénticos por ser los tres lados del uno iguales á sus correspondientes del otro: comparando los ángulos opuestos á los lados correspondientes, se hallarán las igualdades de ángulos $BDA=DAF$, $ADF=BAD$, y por ello serán paralelas BD á AF y BA á DF.

II.° *El paralelógramo tiene iguales entre sí los ángulos opuestos; cada dos contiguos suplementarios entre sí; y resulta dividido en dos triángulos idénticos por la diagonal.*

Tirando la diagonal AD en el paralelógramo $ABDF$, por lo demostrado en la teoría de paralelas (26) resultan las igualdades de ángulos $BDA=DAF$, $ADF=BAD$, y las sumas de estas $BDF=BAF$: tirando la otra diagonal BF, por un razonamiento análogo se viene á parar á la igualdad de ángulos $ABD=AFD$. Segun esto y lo demostrado en el artículo (94), tenemos la igualdad de ángulos.

$2ABD+2BDF=4R$; y reduciendo,

$ABD+BDF=2R$, por consiguiente

$$BAF+AFD=2R.$$

Cada diagonal divide al paralelógramo en dos triángulos que tienen de lado comun dicha diagonal, y por la definicion de la figura los otros dos lados de cada triángulo son respectivamente iguales á los del otro; luego son idénticos los dos triángulos en que la diagonal divide al paralelógramo.

III.° *Cada diagonal del paralelógramo está cortada por la otra en dos partes iguales.*

Visiblemente se cortan las diagonales AD y BF en el punto C, y forman con los lados del paralelógramo cuatro triángulos que tienen un vértice comun en C. Los triángulos ACB y DCF son idénticos, por la igualdad de lados $AB=FD$ y de los ángulos del uno respectivamente á los del otro. Comparando los lados correspondientes á los ángulos iguales, se hallan $AC=CD$ y $BC=CF$.

IV.° *En el cuadrado y el rombo la diagonal divide á cada ángulo en dos partes iguales, y es perpendicular á la otra; de que resulta dividida la figura en cuatro triángulos rectángulos idénticos por las dos diagonales.*

Cuando fueren iguales los cuatro lados del paralelógramo $ABEF$ (fig. 69 y 70) tirando las diagonales AE y BF, que se cortan en O, resulta á un tiempo $AB=BE$; $AO=OE$; y por ello BF es perpendicular á AE y divide al ángulo B en dos iguales, á lo cual es consiguiente el ser los triángulos ABO y BOE rectángulos idénticos. Por un razonamiento análogo se demuestra la biseccion de cada ángulo en partes iguales y la identidad de triángulos BOE y EOF, como tambien de EOF y AOF: luego por iguales á otros resultan iguales entre sí los cuatro triángulos rectángulos en que dividen las diagonales al cuadrado y al rombo.

En el caso particular de ser un cuadrado la figura, hay la circunstancia de igualdad de sus cuatro ángulos y por consiguiente de todas las mitades, á que se sigue el ser isósceles idénticos los cuatro triángulos é iguales todas las cuatro partes de las diagonales.

V.° TEOREMA. *En el paralelógramo la suma de segundas potencias de las diagonales es igual á la suma de segundas potencias de todos los lados.*

Si en el paralelógramo $ABCD$ (fig. 72) se bajan desde los vértices A y B á la base DC ó su prolongacion las perpendiculares AF y BG, los triángulos ADC y BDC formados por cada diagonal y dos lados del paralelógramo dan (84)

$$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{DC}^2-2\,DC\times DF,$$

$$\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{DC}^2+2DC\times CG:$$

sumando las dos ecuaciones, y teniendo presentes los datos

$AB=DC$, $DF=FG-FC=CG$, se viene á

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AD}^2+\overline{BC}^2+\overline{DC}^2+\overline{AB}^2.$$

96. PROBLEMAS de construir el cuadrado y el rectángulo.

I.° *Dándose el lado* AF (fig. 69) *construir el cuadrado sobre él.*

Levantando perpendiculares á la recta dada en sus estremos A y F (46, II.°) ó (59, I.°), y cortando en ellas las partes AB y FE iguales á el lado AF, la recta BE completará el cuadrado AE.

Si se quiere construir de otro modo, levántese la perpendicular AB en el estremo A de la recta dada; córtese $AB=AF$, y desde los puntos B y F con el radio AF trácense los arcos que se cortarán en E: tirando por último las rectas BE y FE quedará completa la figura, que tiene iguales sus cuatro lados y rectos sus ángulos, pues por construccion son idénticos y rectángulos é isosceles los dos triángulos de la hipotenusa comun BF (70).

II.° *Dada la diagonal* BF, *construir el cuadrado.*

Desde el punto O medio de BF levántese la perpendicular AE (46, III.°): tomando en ella las partes OA y OE iguales á BO, y ligando con rectas los cuatro puntos B, A, F, E, quedará construido el cuadrado (95, IV.°). Igualmente se construye la figura formando en los estremos de la diagonal dada, á uno y otro lado de ella, los ángulos semirectos (46, 1.°) FBA, FBE, AFB, BFE; pues por construccion serán rectángulos, isósceles é idénticos los triángulos de la hipotenusa comun BF (64) y (65).

III.° *Dándose los lados* AF *y* AC (fig. 69), *construir el rectángulo.*

Formando en el estremo A del lado AF un ángulo recto, tómese en el nuevo lado del ángulo la parte AC dada; y construyendo en los estremos C y F ángulos rectos sobre los lados AF y AC, quedará construido el rectángulo (94).

Si en vez de construir en los estremos C y F ángulos rectos, se trazan arcos desde dichos puntos, con el rádio AF desde C y con AC desde F se cortarán en el punto D, y las rectas CD y DF completarán el rectángulo; pues por construccion son triángulos idénticos rectángulos los de la hipotenusa comun CF (70).

IV.° *Construir el rectángulo, dada la diagonal* CF *y el ángulo* ACF *que ha de formar con un lado.*

Constrúyanse en los estremos C y F sobre CF los ángulos ACF y CFD iguales al dado; y en los mismos puntos sobre las rectas CA y FD hácia la diagonal constrúyanse los ángulos rectos ACD y AFD; con lo que los nuevos lados de estos ángulos cortarán á los primeros en los puntos A y D vértices del rectángulo que se pide (64) y (95).

En cuanto al modo general de construir cualquiera polígono, y al número de condiciones ó datos necesarios para que la figura que se pide esté determinada, téngase presente lo dicho en el artículo (95), sobre cuya materia se adquirirán otras luces en las lecciones que siguen.

LECCION DUODECIMA.

De los polígonos inscrito y circunscrito al círculo.

97. Si todos los vértices de los ángulos del polígono están en la circunferencia, es el polígono *inscrito;* y *circunscrito* si los lados son tangentes al círculo. Por la definicion misma se infiere, que los polígonos inscritibles tienen la cualidad de que dentro de su contorno haya un punto equidistante de todos los vértices de sus ángulos; y los circunscritibles la de tener un punto equidistante de sus lados.

98. TEOREMA. *El polígono regular tiene un punto equidistante de sus vértices y equidistante de sus lados, y queda dividido por las rectas dirigidas á los vértices desde dicho punto, en*

triángulos isósceles idénticos cuyas bases son los lados del polígono.

Divídase cada uno de los dos ángulos A y B del polígono regular $ABCDFG$ (fig. 67), en dos iguales, por medio de las rectas AK, BK; y desde el punto K en que se cortan tírese KC á otro ángulo C inmediato del polígono. Despues de esta operacion se observará que los triángulos AKB y BKC tienen KB comun, $AB=BC$ y los ángulos en B iguales; por lo cual son idénticos y $KA=KB=KC$, como tambien el ángulo $KCB=KBC=KAB$ mitad del ángulo del polígono, y por ello isósceles dichos triángulos. Del mismo modo se demuestra que la recta KD dirigida desde K á otro vértice contiguo D, forma el triángulo CKD idéntico á los dos anteriores; y sucesivamente, que todas las rectas dirigidas desde K á los vértices del polígono son iguales, y forman de dos en dos con un lado del polígono triángulos isósceles idénticos cuyas bases son los lados del polígono. Ademas, por la identidad de dichos triángulos isósceles tendrán todos la misma altura KJ, es decir, que el punto K está equidistante de todos los lados del polígono.

Llámase *centro* del polígono regular el punto K; *radio del polígono* ó *radio oblicuo* la distancia KB desde el centro á los vértices; *apotema* ó *radio recto* la distancia KJ desde el centro á los lados, y *ángulo del centro* cada uno de los formados por dos consecutivos radios del polígono. Cada ángulo del centro en el polígono regular de n lados vale $\frac{4R}{n}$, por ser $4R$ la suma de todos (14, II.°); y así, el ángulo del centro del triángulo regular vale $\frac{4}{3}R$; el del cuadrilátero regular R; el del pentágono regular $\frac{4}{5}R$, etc.; que son los mismos valores respectivos de los ángulos esteriores (94).

99. TEOREMA. *Dado un polígono regular, se puede circunscribir el círculo á él.*

En efecto, habiéndose demostrado que todos los radios CA, CB, CD..... (fig. 73) del polígono regular son iguales, la circunferencia descrita con cualquiera de ellos desde el centro C pasará por todos los vértices del polígono; y por ser isósceles todos los triángulos ACB, BCD..., será cada lado del polígono cuerda del círculo, es decir, circunscrito este al polígono y con un mismo centro C ambos.

100. *Dado un polígono regular se puede inscribir el círculo á él.*

Por estar equidistantes del centro del polígono regular abd, (fig. 73) todos sus lados; tanto como es la estension del apotema CK, si con este radio se describe un círculo pasará por todos los puntos K, K',.... de los lados, en que se cortan estos con los apotemas; y como todas las rectas que se pueden dirigir desde el centro del polígono á los lados son mas largas que el apotema (19, II.°), se sigue que cada lado del polígono tiene comun con su circunferencia un solo punto, y que todos los demas de cada lado salen fuera del círculo; esto es, que los lados del polígono regular son tangentes del círculo descrito desde el centro del polígono con su apotema.

101. Está demostrado que en todo polígono regular dado se puede inscribir y circunscribir el círculo; pero la recíproca de esta doble conclusion no se puede establecer, porque aun estan irresueltos los problemas de inscribir y circunscribir polígonos de cualquier número de lados en círculo dado; y solamente se han podido resolver en algunos casos que vamos á manifestar.

TEOREMA. I.° *El lado del exágono regular es igual al radio del círculo circunscrito.*

Suponiendo la cuerda $A\,B$ (fig. 74) lado de un exágono regular, y M el centro del círculo dado; en el triángulo isósceles $A\,M\,B$ el ángulo M del centro vale $\frac{4}{6}R=\frac{2}{3}\,R$; sus ángulos en A y en B juntos valen $2\,R-\frac{2}{3}\,R=\frac{4}{3}R$, y cada uno

$\frac{2}{3}R$: luego es equilátero el triángulo; y por ello, aplicando el radio del círculo dado seis veces consecutivamente á su circunferencia, resultará el exágono inscrito.

Construido el exágono, las cuerdas como GB de los arcos dobles serán lados del triángulo regular inscrito (41): y esto nos dice el modo de inscribir el triángulo regular al círculo. Tambien es fácil hallar la espresion de su lado GB; pues trazando los radios GM y BM ademas de los lados GA y AB del exágono, y el radio AM, resulta el rombo $GMBA$ cuyas diagonales forman en O cuatro ángulos rectos, cortándose una á otra en dos partes iguales (95). Por lo cual suponiendo r el radio del círculo, será

$$MO=\frac{1}{2}r,$$

$$GO=\sqrt{(GM^2-MO^2)}=\sqrt{(r^2-\frac{1}{4}r^2)}=\frac{r}{2}\sqrt{3},$$

y por consiguiente $r\sqrt{3}$ la espresion numérica del lado del triángulo equilátero inscrito. Dividiendo cada arco GB del triángulo equilátero inscrito en 2^m partes iguales (50, I.°), resultan polígonos regulares inscritos de 3×2^m lados.

II.° *La distancia que hay entre los estremos* A *y* B (fig. 75.) *de dos diámetros* AD *y* BF *per-*

pendiculares de un circulo, es lado del cuadrado inscrito en él.

El ángulo del centro en el cuadrado vale $\frac{4}{4}R=R$; luego construyendo en el círculo dos diámetros AD y BF perpendiculares, las cuerdas que ligan sus estremos serán lados del cuadrado inscrito (41) y (45, 1.°).

La espresion del lado AB del cuadrado presenta una circunstancia notable: pues, entre los lados del triángulo rectángulo ABC que forman el lado AB del cuadrado y las semidiagonales AC y CB, hay la relacion (83, V.°)

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{CB}^2=2r^2$$

de la cual viene

$$AB=r\sqrt{2}, \quad \text{ó bien} \quad \frac{AB}{2r}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

en donde vemos *que la diagonal del cuadrado es incomensurable con su lado;* esto es, que no tienen medida comun exacta las dos líneas, ejemplo de lo espuesto en la medicion de esta clase de cantidades (9). Dividiendo cada arco AB que subtende el lado del cuadrado en 2^n partes iguales, y trazando las cuerdas de estas, resultan los polígonos regulares inscritos de 4×2^n lados.

III.° *Dividiendo el radio del círculo en me-*

dia y estrema razon (90), *la parte mayor es igual á el lado del decágono regular inscrito.* (fig. 76).

Siendo AB lado del decágono regular inscrito, el ángulo C del centro vale $\frac{2}{5}R$, y cada uno de los ángulos A y B del triángulo CAB tiene de valor $\frac{1}{2}(2R-\frac{2}{5}R)=\frac{4}{5}R$: de suerte que si dividimos el ángulo A por medio con la recta AG, los triángulos CAB y GAB son semejantes, por tener comun el ángulo B é iguales los ángulos C y GAB. De dicha semejanza resulta la igualdad de ángulos $AGB=ABG$ y de las líneas $AG=AB$: y comparando lados homólogos, viene para el lado del decágono regular inscrito

$$AB=\sqrt{(GB\times CB)}=\sqrt{(r\times GB)}.$$

Por ser los ángulos C y CAG iguales, á que sigue $CG=GA=AB$, la ecuacion anterior elevando al cuadrado y sustituyendo se convierte en

$\frac{GB}{CG}=\frac{CG}{CB}$ como se propuso demostrar.

Se deja conocer que construido el lado AB del decágono, el duplo del arco AB subtende la cuerda AD lado del pentágono regular inscrito. La division del arco AD en 2^m partes dá cuerdas para lados de los polígonos de 5×2^m lados.

IV.° *Restando del arco del exágono el del decágono, la cuerda de la diferencia que resultare es el lado del pentedecágono regular inscrito.*

Sabemos que la cuerda del arco $\frac{C}{15}$ en la circunferencia C, es lado del polígono regular de 15 lados, y se halla facilmente por una simple resta. Pues, el arco del exágono es $\frac{C}{6}$, el del decágono $\frac{C}{10}$, y $\frac{C}{6}-\frac{C}{10}=\frac{C}{15}$.

Dividiendo el arco á que subtende el lado del pentedecágono en 2^m partes iguales, resultan los correspondientes á los polígonos de 15×2^m lados.

Ultimamente, aunque se saben inscribir los polígonos de 2^n+1 número de lados, con tal que 2^n+1 sea número primero, se omite aqui la demostracion que por su delicadeza y proligidad nos ocuparia demasiado.

Los polígonos comprendidos en los casos que se han enunciado, son los únicos que se saben inscribir con prévio conocimiento del correspondiente lado. Para inscribir otro cualquiera, nos vemos precisados á usar de tanteos: siendo por ejemplo n el número de lados, hay que dividir la circunferencia en n partes iguales á tanteo por medio del compás, aplicando sucesivamente sus puntas á la circunferencia.

102. TEOREMA. *Sabida la espresion del lado* AB (fig. 84) *del polígono regular inscrito que tenga* n *lados, se halla la del lado* AL *del regular que tenga* 2n *lados, inscrito en el mismo círculo cuyo radio es* OA.

En efecto, tirando el apotema OQ, los triángulos rectángulos AOQ y ALQ dan á causa de $LQ=OA-OQ$, las ecuaciones

$$OQ=\sqrt{\left(\overline{OA}^2-\frac{1}{4}\overline{AB}^2\right)};$$

$$AL=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\overline{AB}^2+(OA-OQ)^2\right)}:$$

por la primera se tiene el valor de OQ, pues el radio OA y el lado AB del polígono inscrito son conocidos: y sustituyendo OQ en la segunda, se viene al valor AL que se busca. Hallado asi el valor del lado correspondiente al polígono de $2n$ lados, se tendrá igualmente el de $2n\times2$; despues el de $2n\times2\times2$; y asi sucesivamente el de cualquiera polígono regular, incluido precisamente en la fórmula general $n\times2^m$, siendo n el número de lados que tenga uno de los elementales dados á conocer anteriormente.

103. TEOREMA. *Inscrito un polígono regular, se puede circunscribir otro de igual número de*

lados: é inversamente, *dado el circunscrito se puede inscribir aquel.*

Dado el polígono $ABC....$ (fig. 74) inscrito, constrúyanse las tangentes ga, ab, $bc....$ al círculo, en los vértices A, $B....$ Los triángulos AaB, BbC,.... tienen iguales sus bases, y tambien los ángulos adyacentes á ellas por ser diferencias de otros iguales (98); por lo cual serán idénticos dichos triángulos, y $ab=bc=cd=.....$ lados del polígono regular circunscrito, que visiblemente resulta de igual número de lados que el inscrito en el mismo círculo. En donde vemos que para circunscribir al círculo un polígono regular del mismo número de lados que otro inscrito á él, de modo que formen ángulos iguales los lados del uno con los del otro, basta levantar tangentes en los vértices del inscrito.

Tambien se construye de otro modo el polígono circunscrito al mismo círculo, dado el inscrito. En el estremo K (fig. 75) del radio CK del círculo, perpendicular á el lado AB del inscrito, levántese la tangente ab; y prolongando los radios oblícuos CA y CB hasta la tangente, resulta el triángulo CAJ semejante á los CaK y CbK, é idénticos estos entre sí; por consiguiente $ab=2Kb$. Hay que demostrar ahora que b es vértice del polígono circunscrito, y Kb mitad de su lado. Levantando para ello en b la recta bd paralela á BD, formará con CK' y Cb triángulo semejante á BCL y por consiguiente á KCB. Comparando lados homólogos, viene $CK=CK'$, $Kb=bK'$: esto es, bK' tangente y semilado del polígono circunscrito que tiene en b uno de sus vértices. Tambien prolongando el radio oblicuo CD hasta la tangente bK' resulta $K'd=K'b$, y d otro vértice del polígono circunscrito. Desde d se empiezan las construcciones y razonamientos mismos que desde b, para demostrar que dK'' y $K''f$ son otros dos semilados, y f otro vértice: y así sucesivamente. Luego, para construir un polígono circunscrito regular con igual número de lados que otro inscrito, de modo que los lados de éste sean paralelos á los de aquel, basta levantar tangentes en los estremos de los radios del círculo perpendiculares á los lados del inscrito.

Inversamente, habiendo de inscribir el polígono, dado el circunscrito, las demostraciones análogas á las anteriores nos conducirán á que las cuerdas que subtenden los arcos interceptados por los radios rectos, ó por los oblicuos del circunscrito, son lados del inscrito que resultarán de uno ú otro modo colocados.

Puesto que dado un polígono regular inscrito se sabe circunscribir el de igual número de lados, el problema de circunscribir polígonos regulares está resuelto en igual número de casos que el de inscribirlos. Entre los lados AB y ab (fig. 84) del inscrito y circunscrito al círculo cuyo radio es

$OA = OL = \ldots.$, siendo OL apotema de este y OQ el de aquel, hay las dos siguientes relaciones que vienen de comparar los lados de los triángulos semejantes OaL y OAQ, duplicando despues aL y AQ,

$$\frac{ab}{OA} = \frac{AB}{OQ};\quad OQ = \sqrt{\left(\overline{OA}^2 - \frac{1}{4}\overline{AB}^2\right)}.$$

Cuando se dá el inscrito, es incognita ab: si es dado el circunscrito, son incógnitas AB y OQ, y eliminando una incógnita se tendrá el valor de la otra.

104. Nada diremos en general sobre los polígonos irregulares inscritibles, ó circunscritibles, aunque gozan esta propiedad todos aquellos cuyos lados pueden ser cuerdas ó tangentes del círculo: y solo manifestaremos en los teoremas que siguen algunas propiedades de los cuadriláteros inscritibles.

TEOREMA. I.° *En el cuadrilátero inscrito la suma de cada dos ángulos opuestos es igual á dos rectos.*

Suponiendo inscrito el cuadrilátero $ABDF$ (fig. 77): es visible que, por estar los vértices en la circunferencia y abrazar á toda ella cada dos ángulos opuestos, vale tanto como dos rectos la suma de dichos opuestos.

II.° Reciprocamente: *el cuadrilátero en que* *la suma de dos ángulos opuestos valga dos rectos es inscritible.*

Porque si alguno de los vértices cayese en B' fuera del círculo, ó en B'' dentro, seria la suma de los ángulos B'' y F, ó B' y F mayor ó menor que dos rectos (60 y 61); lo que es contra el supuesto. Vemos pues, que siempre se puede circunscribir el círculo á un rectángulo, y á todo cuadrilátero cuyos dos ángulos opuestos juntos valgan dos rectos.

Para circunscribir la circunferencia, dado el cuadrilátero inscritible, se levantan perpendiculares en medio de dos lados, y el punto de concurso es el centro; porque, no pudiendo pasar mas que una circunferencia por tres vértices (50, IV.°) claro es que el cuarto ha de estar en ella.

III.° *En todo cuadrilátero inscritible, es el producto de las diagonales equivalente á la suma de productos de los lados opuestos.*

En el cuadrilátero $ABDF$ (fig. 78) inscrito trácense las diagonales AD y BF, y fórmese sobre el lado BD el ángulo $HBD=ABF$ con la recta BH, que suponemos corta en H á la diagonal AD: y como por otra parte es $AFB=ADB$ (58, 3.ª), resultan semejantes los triángulos AFB y HBD. Ademas hay las igualdades de ángulos $ABH=FBD$ por sumas de otros iguales, como tambien (58, 3.ª) $BAD=BFD$, y en consecuencia los triángulos ABH y FBD son semejantes. Comparando lados homólogos en las dos semejanzas demostradas, resultan

$$\frac{HD}{BD}=\frac{AF}{BF}, \quad \frac{AH}{AB}=\frac{FD}{BF};$$

de donde

$$HD\times BF=AF\times BD, \quad AH\times BF=FD\times AB.$$

La suma de estas ecuaciones reducida á la espresion

$$BF\times AD=AF\times BD+FD\times AB$$

hace ver que está demostrado el teorema propuesto.

LECCION DECIMATERCIA.

Polígonos semejantes y comparaciones de sus líneas.

105. Son semejantes los polígonos $ABD...$, y $abd...$ (fig. 79) divisibles en igual número de triángulos T, T', T'',.... el uno, y t, t', t'',... el otro, respectivamente semejantes, como T á t, T' á t',... y situados en el mismo órden. La definicion es aplicable (fig. 82) igualmente á los polígonos descompuestos en triángulos con rectas

dirigidas á los vértices desde cualquiera punto O interior de ellos. Conforme á la definicion segun el primer método; dado un polígono $ABD...$, (fig. 79) se construye otro $abd....$ semejante tomando una recta ab de magnitud y posicion arbitraria, sobre la cual se completa el triángulo abd semejante á ABD (75) ó (80); en seguida sobre ad el triángulo adf semejante á ADF; y así sucesivamente hasta completar el polígono.

106. TEOREMA. *En los polígonos semejantes se verifican esclusivamente las propiedades de ser cada ángulo de uno igual á su correspondiente del otro, los lados y diagonales homólogos proporcionales, y los perímetros proporcionales tambien con los lados y diagonales homólogos.*

Los triángulos ABD y abd (fig. 79) semejantes de dos polígonos tales $ABDFG...$ y $abdfg...$ tienen iguales los ángulos B y b como tambien D y d, verificándose ademas

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BD}{bd}=\frac{AD}{ad} \text{ (75) y (78).}$$

En los triángulos semejantes ADF y adf sucede asimismo ser iguales los ángulos D y d como tambien F y f, con las proporciones siguientes

$$\frac{AD}{ad}=\frac{DF}{df}=\frac{AF}{af}.$$

De las dos semejanzas resulta ser el ángulo

$$BDF = bdf \text{ y } \frac{AB}{ab} = \frac{BD}{bd} = \frac{DF}{df}.$$

Del mismo modo se demuestra que son los ángulos $DFG = dfg$, y que los lados tienen la relacion

$\frac{DF}{df} = \frac{FG}{fg}$ y asi sucesivamente hasta el último

triángulo. Conclúyese que en los polígonos semejantes cada ángulo de uno es igual á su respectivo del otro, y que los lados y diagonales de aquel son respectivamente proporcionales á los de éste. Se dicen *homólogas* las lineas correspondientes de todas las figuras semejantes, asi como en los triángulos.

Recíprocamente; siendo iguales los ángulos correspondientes de dos polígonos ABD..... y abd... (fig. 79) y proporcionales sus lados homólogos, serán semejantes los triángulos T y t, por

ser $\frac{AB}{ab} = \frac{BD}{bd}$ y los ángulos B y b iguales; los

triángulos T' y t' son tambien semejantes, á causa de tener iguales los ángulos D y d por residuos de iguales, y

$$\frac{AD}{ad} = \frac{BD}{bd} = \frac{DF}{df}.$$

Pudiéndose demostrar lo mismo respecto de los triángulos sucesivos, debe concluirse que son semejantes los polígonos que tienen iguales los ángulos correspondientes y proporcionales los lados homólogos. De aquí se deduce que son semejantes dos polígonos regulares de igual número de lados: pues los lados del uno tienen razon de igualdad entre sí, y lo mismo los del segundo; ademas, circunscribiendo los círculos, cada ángulo de los polígonos abrazará un arco cuyo valor gradual será el mismo que el del arco abrazado por el ángulo correspondiente del otro polígono.

Por último, de las ecuaciones (fig. 79)

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BD}{bd}=\frac{DF}{df}$$ viene (Alg. elem. 159)

$$\frac{AB+BD+DF+\dots\dots}{ab+bd+df+\dots\dots}=\frac{AB}{ab}=\dots\dots;$$

y como los lados son proporcionales á las diagonales, está demostrada la última parte del teorema. En el polígono regular tienen razon de igualdad los lados entre sí, lo mismo los rádios y tambien los apotemas: de consiguiente, en dos polígonos regulares semejantes ó de un mismo número de lados, están estos en razon de rádios y apotemas; y por ello los perímetros en razon de los rádios y apotemas tambien.

Segun la propiedad recíproca demostrada, que es la simultaneidad de la semejanza de los polígonos, con la igualdad de sus ángulos y proporcionalidad de sus líneas homólogas; para construir un polígono abd... semejante á otro dado ABD..., en vez del método que indicamos en el precedente artículo se puede usar el que sigue. Construir primeramente un lado ab arbitrario ó dado, homólogo de AB, y en cada estremo de este lado el ángulo igual á su correspondiente del polígono ABD...; despues cortar cada lado indefinido del ángulo proporcionalmente de modo que se verifique

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BD}{bd}=\text{.....};$$

y asi sucesivamente hasta el penúltimo ángulo cuyo lado se cortará con el que venga del otro ramal del polígono, y dichos lados cerrarán por sí la figura formando el último ángulo (93).

107. TEOREMA. *Las distancias homólogas entre dos puntos tomados en cada polígono de los semejantes están en razon de los lados: por consecuencia, los perímetros de dos polígonos semejantes en razon de dichas distancias homólogas.*

Si en dos polígonos semejantes desde los ángulos iguales A y a se dirigen las rectas AK y ak (fig. 80) á lados homólogos DF y df, quedando estos cortados proporcionalmente, será

$$\frac{DK}{KF}=\frac{dk}{kf}\text{; y de aqui viene}$$

$$\frac{DF}{df}=\frac{DK}{dk}=\frac{KF}{kf}=\frac{AB}{ab}=\frac{AD}{ad}=\ldots.\ (106):$$

demostracion de que, si dos lados homólogos de polígonos semejantes fueren cortados en partes proporcionales por dos rectas dirigidas desde ángulos correspondientes, dichas partes proporcionales entre sí tambien serán proporcionales á los lados y diagonales homólogas del polígono.

Los triángulos ADK y adk son semejantes, porque tienen sus ángulos en D y d iguales y proporcionales los lados que comprenden á estos ángulos, de que procede $\frac{AD}{ad}=\frac{AK}{ak}$. Como por otra parte las diagonales AD y ad son proporcionales á todos los lados homólogos de los polígonos, resulta que las rectas AK y ak dirigidas desde algunos correspondientes á lados homólogos, de manera que los dividan en partes proporcionales, son tambien proporcionales á cualquiera lados homólogos del polígono.

Los polígonos $ABDK$ y $abdk$ parciales son semejantes; y por ello las rectas KL y kl dirigidas desde ángulos correspondientes á lados homólogos, de modo que los corten en partes proporcionales, darán

$$\frac{LK}{lk}=\frac{AB}{ab}=\frac{BD}{bd}=\text{etc.}$$

Las rectas LK y lk tienen ademas la propiedad de cortar cada una dos lados en partes proporcionales: luego, las rectas LK y lk así dirigidas en dos polígonos semejantes, serán proporcionales á los lados y diagonales homólogas.

Dividiendo asi sucesivamente los dos polígonos por rectas dirigidas de ángulos á lados, resultarán homólogas todas las líneas tiradas de una misma manera y serán proporcionales á los lados de los polígonos, por consiguiente á los perímetros (106).

108. TEOREMA. I.° *Si en los estremos de la recta* ah, *de magnitud y posicion arbitraria, se forman los ángulos* i, i′, i″, i‴,.... (fig. 81) *iguales á los correspondientes* v, v′, v″, v‴,.... *de un polígono dado* ABDF....., *y los ángulos* o, o′, o″, o‴,...... *iguales á sus correspondientes* z, z′, z″, z‴,.... *las intersecciones de los lados en* b, d, f, g.... *serán vértices del polígono semejante á* ABDF....

Para que se verifique el teorema, bastará demostrar que son semejantes los triángulos parciales que componen los dos polígonos. En efecto, los triángulos ABH y abh son semejantes, por tener iguales los ángulos en A y a sumas de iguales, y los ángulos en H y h por construccion;

por iguales razones, semejantes ADH y adh, AFH y afh....... Comparando lados homólogos, resulta para los triángulos parciales BAD, DAF,....... bad, daf,....... de que se trata,

$$\frac{AH}{ah}=\frac{AB}{ab}=\frac{AD}{ad}=\frac{AF}{af}=\dots\dots\dots\dots$$

Las rectas bd, df, fg,... completan dichos triángulos bad, daf, fag,.... semejantes respectivamente á los triángulos BAD, DAF,... por tener los ángulos v, v', v'',.... iguales á los correspondientes i, i', i'',.... como tambien proporcionales los lados de estos (80): luego, el polígono $abdfgh$ así construido es semejante al lado $ABDFGH$. Este método de construir un polígono semejante á otro dado, se emplea en la formacion de dibujos geométricos que representan alguna parte de la superficie terrestre, como se verá en el tratado de Trigonometría.

II.° *Si en el polígono* ABDF... (fig. 82) *desde cualquiera punto* O *interior se dirigen á los vértices rectas; y se toman en ellas partes proporcionales, es decir*

$$\frac{OA}{Oa}=\frac{OB}{Ob}=\frac{OD}{Od}=\dots$$ *el polígono* abdf....

cerrado con las rectas ab, bd, df,.... *es semejante á* ABDF....

En efecto, serán (76, I.°) paralelas AB y ab, *BD* y *bd*..., proporcionales los lados, iguales los ángulos correspondientes, y por ello semejantes los polígonos *ABD*.... *abd*.... (fig. 83) Si *O* fuese centro de polígonos regulares, serán idénticos todos los triángulos de cada uno y semejantes á los del otro.

109. TEOREMA. I.° *El arco es mayor que la cuerda, y menor que la tangente interceptada por los radios que pasan por los estremos del arco; y la circunferencia es mayor que el perímetro del polígono inscrito, y menor que el del circunscrito de igual número de lados.*

Cada lado *AB* (fig. 84) del polígono regular inscrito es menor que el arco *AB* (10); y por consiguiente la suma de aquellos, ó el perímetro del polígono, menor que la circunferencia circunscrita. Dividiendo cada arco *AB*, *BC*...., en dos partes iguales, y trazando las cuerdas de estas *AL*, *LB*, *BN*, *NC*,.... resulta (10) el polígono *ALBNC*....>*ABC*...., aunque siempre menor que la circunferencia. Continuando la biseccion de los arcos iguales *AL*, *LB*,.... ó duplicacion del número de lados, y asi en adelante, resultará cada vez un perímetro regular inscrito mas aproximado al valor de la circunferencia, sin dejar de ser menor que ella. Con lo cual estan demostradas la primera y segunda parte de la proposicion en cuanto al polígono inscrito.

Siendo *abc*.... polígono circunscrito de tantos lados como el inscrito ABC...; asimismo $hjkm$... de tantos como $ALBN$........, resultan hipotenusas $aj+kb>$catetos $AJ+KB$; y por ello, tangente $ab>AJKB>$arco AB (10), sumas ó perímetro $abc...>AJkmi...>$circunferencia ABC... continuando la duplicacion del número de lados, irá cada vez resultando un perímetro regular circunscrito menor, y mas aproximado á ser igual con la circunferencia del círculo, sin dejar de ser mayor que ella. Quedan pues demostradas tambien las dos partes de la proposicion en cuanto al polígono circunscrito.

II.° *La circunferencia es límite de los polígonos regulares inscritos y circunscritos.* (fig. 84.)

Habiéndose demostrado que la circunferencia es menor que el perímetro del polígono circunscrito, y mayor que el del inscrito, y que ambos se van acercando á ella á medida que se duplica el número de lados; supongamos P y p los perímetros de dos polígonos regulares con igual número de lados, circunscrito el uno é inscrito el otro á la misma circunferencia, como tambien r y t los apotemas OL y OQ. Segun lo demostrado anteriormente es $\frac{P}{p}=\frac{r}{t}$, de donde

$$\frac{P-p}{p}=\frac{r-t}{t},\quad P-p=\frac{p}{t}(r-t).$$

Como P y p van aproximándose al valor de la circunferencia intermedia, creciendo t con p mientras r permanece constante, se sigue que $r-t$ decrece sucesivamente así como $P-p$ al paso que se aumenta el número de lados. Por otra parte jamás quede ser $t>r$ ni $p>P$; luego

$$r-t=o \text{ y } P-p=o$$

son los límites de $r-t$ y $P-p$; á cuyo tiempo confundiéndose los dos polígonos inscrito y circunscrito, se ajustarán á la circunferencia que por naturaleza está siempre entre los dos.

110. TEOREMA. I.° *Las circunferencias están en razon de sus rádios, diámetros, y cualesquiera líneas homólogas proporcionales con estos.*

Sean P y p (fig. 83) los contornos de dos polígonos regulares semejante inscritos en las circunferencias C y c, de los rádios $OA=r$, $Oa=t$: sean tambien Δ y δ las diferencias respectivas entre cada polígono y la circunferencia circunscrita á él. Las condiciones

$$C-P=\Delta \text{ y } c-p=\delta \text{ dan } \frac{P}{p}=\frac{C-\Delta}{c-\delta}=\frac{r}{t},$$

por ser los polígonos como los radios; de donde

$$tC-t\Delta=rc-r\delta.$$

En esta ecuacion son constantes C y c como tambien r y t, pero variables Δ y δ que se pueden hacer cuan pequeños se quieran á medida que se aumente el número de lados, sin que puedan llegar jamás á cero ni pasar de este límite. De suerte que ha lugar á la ecuacion (Alg. elem. 66) $tC=rc$, de donde $\frac{C}{c}=\frac{r}{t}=\frac{2r}{2t}$.

II.° *Los ángulos del centro, medidos por arcos de radios desiguales, son entre sí como los cocientes de los arcos respectivos divididos por los rádios.*

Segun el resultado precedente y el del artículo (45, IV.°) tenemos $\frac{BD}{BC}=\frac{FG}{FC}$ (fig. 28);

y por lo demostrado en el artículo (44) acerca de los ángulos, $\frac{BCD}{BCA}=\frac{BD}{BA}=\frac{BD}{BC}:\frac{BA}{BC}$. Sustituyendo por $\frac{BD}{BC}$ su equivalente será

$$\frac{BCD}{BCA}=\frac{FG}{FC}:\frac{BA}{BC};$$

espresion de la verdad que se propuso.

111 PROBLEMA. *Descubrir la razon de la circunferencia al diámetro, ó lo que es igual, de la semicircunferencia al radio.*

Si en la ecuacion $\frac{C}{2r}=\frac{c}{2t}$ conociésemos la razon $\frac{c}{2t}=\pi$ entre una circunferencia estendida en línea recta y su diámetro, ó lo que es igual entre la semicircunferencia y el rádio, podríamos hallar la longitud de otra circunferencia C, dado su diámetro $2r$, en una cuarta proporcional $C=2\pi r$. Inmediatamente sabremos hallar la espresion de π que en lo sucesivo emplearemos con frecuencia, y es

$$\pi=3,1415926\ldots\ldots$$

Entre tanto de la ecuacion $C=2\pi r$ viene para el rádio de una circunferencia cuya estension C es dada,

$$r=\frac{C}{2\pi}=0,159155\times C.$$

Suponiendo $r=1$, resulta $\pi=\frac{1}{2}C$. Luego π es el número que espresa la longitud de la circunferencia estendida en línea recta, siendo unidad el diámetro; ó bien la longitud de la semicircunferencia, siendo unidad el radio. Aunque directamente no es aplicable la unidad recta á la línea curva que se ha de medir, se halla el valor numérico π midiendo con el radio $r=1$ los perímetros del polígono inscrito y del circunscrito de muchos lados que se acerquen á la igualdad entre sí, por consiguiente á confundirse con la circunferencia intermedia segun vamos á practicarlo.

Las equivalencias del artículo (102), hecha la sustitucion de r por OA (fig. 84), y á causa de

$\frac{1}{4}\overline{AB}^2+\overline{OQ}^2=r^2$, vienen á ser

$$AL=\sqrt{\{2r(r-OQ)\}};\quad OQ=\sqrt{(r^2-\frac{1}{4}\overline{AB}^2)}.$$

Las del artículo (105) son la segunda que se ha escrito, y ademas $\frac{ab}{r}=\frac{AB}{OQ}$. Haciendo para simplificar $AB=\alpha$, $AL=\beta$, lados de los polígonos inscritos de n y de $2n$ lados; como tambien $r=1$, $OQ=r'$, y $ab=\gamma$ lado del polígono circunscrito de igual número de lados que el inscrito; las tres equivalencias serán

$$\beta=\sqrt{(2-2r')};\quad r'=\sqrt{(1-\frac{1}{4}\alpha^2)};\quad \gamma=\frac{\alpha}{r'}.$$

Tomando desde luego por α el lado de un polígono inscrito de n lados que tenga valor exacto conocido, hállese el lado β del inscrito que tenga $2n$

lados; en seguida el de $2^2 n$ lados, y asi sucesivamente. Sabemos por ejemplo que el lado del exágono inscrito es igual al radio (101, 1.º): haciendo pues $\alpha=1$, resulta el lado del duodecágono inscrito $\beta=0,5176.....$ haciendo de nuevo $\alpha=0,5176.....$, será el lado del polígono de 24 lados $\beta=0,2610.......$ y asi sucesivamente. Por último, llegando á un valor bastante pequeño del lado inscrito α y de resultas al de r', la equivalencia $\gamma=\frac{\alpha}{r'}$ dá el lado del circunscrito. Multiplicando α y γ por la mitad del número de lados que tengan los polígonos á que corresponden, se tendrán los valores de los semiperímetros inscrito y circunscrito: y la parte de los números en que se conformen las espresiones de los semiperímetros espresa la longitud de la semicircunferencia $\pi=\frac{1}{2}C$ próximamente. Por ejemplo, á la cuarta operacion se halla para el polígono inscrito de 96 lados $\alpha=0,06540....$ de que resulta para el polígono circunscrito de igual número de lados $\gamma=0,06543....$ Multiplicando por 48 los valores de α y γ, las mitades de los perímetros inscrito y circunscrito de 96 las dos serán 3,1392... y 3,1410.... De suerte que la espresion de π es exacta hasta $\pi=3,1$.

Se ha hecho el ensayo con polígonos de pocos lados; mas, continuando el método de aproximacion que se ha manifestado se puede llegar al valor de π escrito antes con siete decimales, y aun al de muchos mas; pues ha habido quien le ha calculado hasta ciento y cincuenta decimales, sin haber obtenido por eso mas que una aproximacion, á causa de ser π número irracional como se demostrará á debido tiempo.

Por este método halló Arquimedes próximamente $\pi=\frac{22}{7}$; y Metius $\pi=\frac{355}{113}$ aun mas exacto. Cuando se trate de los métodos generales de aproximacion, se darán á conocer caminos mas espeditos de hallar π con grande rapidez.

CAPÍTULO SEGUNDO.

ÁREAS DE LAS FIGURAS PLANAS.

LECCION PRIMERA.

Medicion de áreas planas.

112. La cantidad superficial de una figura se llama comunmente *área* de ella. Conforme á lo que digimos en la leccion preliminar, son idénticas dos áreas cuando consideradas en el estado de superposicion se demuestra que coinciden todos sus puntos, de modo que se confunda una figura con otra; á lo cual es consiguiente el que tambien se ajusten las líneas de una figura á sus correspondientes de la idéntica: de suerte que identidad de figuras, de sus áreas y de sus líneas homólogas suceden juntamente en dos figuras idénticas.

113. Medir una área es indagar cuántas veces cabe en ella otra que se toma por unidad de medida. Si el área S contiene n número de veces al

área unidad s, será $\frac{S}{s}=n=\frac{n}{1}$. Y suprimiendo las unidades abstracta y concreta, viene $S=n$: de modo que una área puede estar espresada en número, y construirse éste en área.

Si $\frac{S}{s}$ no viene espresada en número entero, por no caber exactamente s en S, pueden ocurrir dos casos. 1.° Tener comun medida t, como $S=ht$, $s=kt$; en cuyo caso la razon $\frac{S}{s}=\frac{h}{k}$ será número fraccionario. 2.° Si despues de las posibles indagaciones no tuviesen medida comun las dos áreas, no habrá número entero ni fraccionario que esprese la razon $\frac{S}{s}$, y las áreas serán inconmensurables entre sí.

Las áreas que contienen á la de medida igual número de veces, son iguales ó equivalentes; y para espresar su igualdad ó desigualdad se pueden usar los signos $=$ y $<$ como en las demas cantidades. Claro es que dos áreas idénticas son iguales, y que dos no idénticas ni de una clase pueden ser iguales tambien.

114. TEOREMA. *Los paralelógramos de iguales*

bases é iguales alturas tienen iguales áreas (figura 85).

El rectángulo AB y el paralelógramo AD que tienen la misma base AF y la misma altura FB, serán iguales con tal que las partes del uno lo sean á las correspondientes del otro. En ellos hay $CB=GD$, $CG=CB-GB=BD$; y los triángulos ACG y FBD idénticos, por $CG=BD$, $CA=BF$, $AG=FD$: agregando cada triángulo al trapecio $AGBF$, resultan el rectángulo AB y el paralelógramo AD iguales. Del mismo modo se demostrará la igualdad entre el rectángulo AB y cualquiera paralelógramo que tenga la misma base AF y altura FB, de que resulta ser iguales entre sí todos estos paralelógramos.

115. TEOREMA. *Los triángulos de iguales bases é iguales alturas tienen iguales áreas* (fig. 86).

Teniendo los triángulos ACB y ACF la misma base AC y alturas iguales, la recta BF que liga sus vértices B y F será paralela á AC (30, II.°), y completando los paralelógramos $ADBC$ y $AEFC$, tendrán estos iguales alturas como tambien una base misma. Por dividir la diagonal AB al paralelógramo $ADBC$ en dos triángulos ACB y BAD idénticos (95, II.°), el valor de cada uno será la mitad del paralelógramo. Tambien el otro paralelógramo $AEFC$, de la misma base y altura, está dividido por su diagonal AF en dos triángulos AEF y ACF, cada uno de los cuales tiene de área la mitad de su paralelógramo. Y por ser iguales todos los paralelógramos de iguales bases y alturas, resulta precisamente la mitad del uno igual á la mitad del otro.

PROBLEMA. *Trasformar un polígono en otro de igual área que tenga un lado menos* (fig. 87).

Si en el polígono $ABCDF$ se tira la diagonal CF que separe el triángulo CDF, la recta DG paralela á CF, se prolonga BC hasta que concurra con DG, y se dirige FG; los triángulos CDF y CFG son iguales por tener la misma base CF y la misma altura DH, resultando los polígonos $ABGF=ABCDF$. De tal modo se halla un polígono igual á otro, y con un lado menos: y continuando segun este método se tendrá uno con dos lados menos, y por último un triángulo equivalente al polígono propuesto.

116. TEOREMA. *Las áreas de los paralelógramos que tienen bases iguales, están en razon de las alturas: y las áreas de los que tienen iguales alturas están en razon de las bases* (fig. 88).

Si la altura AB del rectángulo AC se divide en partes iguales en los puntos 1, 2....; y desde estos se tiran paralelas á la base AD, quedará dividido el rectángulo en tantos otros iguales entre sí cuantas fueren las partes de AB: de modo que, suponiendo Ah una de las partes del rectángulo, y m el número de todas las de su altura, será $AC=m\times Ah$. Lo cual es un ejemplo de medir el área, conforme á la definicion que dimos en el artículo (113): y que nos es preciso aquí para la inteligencia de lo que sigue.

Dos rectángulos AC y FK, que tengan iguales bases $AD=FL$, y cuyas alturas AB y FG sean comensurables entre sí, como $AB=m\times Dh$, $FG=n\times Dh$, tendrán por medida comun la unidad superficial Ah, y el valor de cada uno será

$$AC=m\times Ah,\quad FK=n\times Ah.$$

Dividiendo resulta $\frac{AC}{FK}=\frac{m}{n}$;

y por el supuesto de AB y FG comensurables,

tenemos $\frac{AB}{FG}=\frac{m}{n}$: luego, $\frac{AC}{FK}=\frac{AB}{FG}$.

Si las alturas AB y FG son incomensurables, porque la mas pequeña unidad lineal que mida exactamente á AB no caiga en el estremo G de FG, sino en P, de suerte que se verifique $AB=m\times Dh$, $FP=n\times Dh$; será

$$\frac{FK}{AC}+\frac{PK}{AC}=\frac{FG}{AB}+\frac{GP}{AB}.$$

Como la diferencia lineal GP puede disminuirse cuanto se quiera y con ella el área PK, sin llegar jamás á la nulidad ni pasar de ella, habrá entre las constantes (Alg. elem. 66) la relacion

$$\frac{FK}{AC}=\frac{FG}{AB}.$$

Está pues demostrado que las áreas de los rectángulos de bases iguales están en razon de sus alturas: y como pueden ser igualmente AB y FG bases, AD y FL alturas; podemos concluir diciendo que las áreas de los rectángulos tambien estarán en razon de bases cuando tengan iguales alturas.

Sustituyendo á los rectángulos paralelógramos (114) que tengan la misma base, y cuyas alturas sean las respectivas de los rectángulos, es evidente que las áreas de los paralelógramos de iguales bases están en razon de sus alturas, y en razon de las bases teniendo iguales alturas.

117. TEOREMA. *Las áreas de dos paralelógramos están en razon de los productos de base por altura de cada uno.*

Si dos rectángulos AC y ac (fig. 89) tienen desiguales bases y alturas; sobreponiendo el segundo al primero de modo que coincidan los ángulos a y A, caerá el punto b sobre AB, y d sobre AD. Supóngase $Ad'=ad$, $Ab'=ab$: trazando el rectángulo Ac' con estos lados y prolongando $b'c'$ hasta concurrir en F con el lado DC, tenemos por el artículo precedente

$\frac{AC}{AF}=\frac{AB}{Ab'}$ y $\frac{AF}{Ac'}=\frac{AD}{Ad'}$: el producto de las dos ecuaciones, $\frac{AC}{ac}=\frac{AB\times AD}{ab\times ad}$, es la demostracion de que las áreas de los rectángulos están en razon de los productos de base por altura. Sustituyendo á los rectángulos paralelógramos de su misma base y altura (114), tambien las áreas de los paralelógramos están en razon de los productos de base por altura, como se propuso demostrar.

Siendo B y b las bases, A y a las alturas de dos paralelógramos P y p, el teorema anterior se espresa en $\frac{P}{p}=\frac{A}{a}\times\frac{B}{b}$. Tomando p, a, b, por unidades de P, A, B, será $P=A\times B$; en que P, A, B, son números que se deben considerar abstractos proporcionales á los concretos de su especie. Esta espresion abreviada del teorema antecedente se pronuncia diciendo *el área del paralelógramo es el producto de base por altura.* En caso de $A=B$, es $P=A^2$ un cuadrado; y de aquí toma este nombre la segunda potencia de cualquiera número.

118. PROBLEMA. *Valuar el área de un paralelógramo.*

Para valuar en número racional segun el principio del artículo precedente el área de un paralelógramo P (fig. 90) que tenga la altura A y la base B, se toma por unidad superficial otro paralelógramo b, sea ó no semejante que tenga a y b por altura y base, tales que $B=nb$ y $A=ma$ sean racionales. Acomodando b las veces que quepa en B, y a en A de la misma manera, P contendrá á p el número de veces $n\times m$. En efecto,

sustituyendo en la ecuacion $\dfrac{P}{p}=\dfrac{A\times B}{a\times b}$ por A B

sus equivalentes ma y nb, viene $\dfrac{P}{p}=m\times n$, de

donde $$P=m\times n\times p;$$

es decir el valor del área P igual á $m\times n$ veces el área p.

Si es $a=b$, la fórmula $\dfrac{P}{p}=\dfrac{A\times B}{b\times b}$ se aplica del

mismo modo á la medicion de P, ajustando b las veces que cupiese en A y en B: entonces la unidad superficial es un cuadrado.

119. TEOREMA. *Siempre se puede usar del cuadrado como unidad de medida para valuar las áreas planas.*

Tratando de aplicar la fórmula $P=A\times B$ al cuadrado P, hemos visto (117) que por $A=B$ es $P=A^2$; y comparando con el paralelógramo $P'=A'\times B'$, será

$$\frac{P}{P'}=\frac{A^2}{A'\times B'}.$$

Si es $P=P'$, viene $A^2=A'\times B'$, fórmula propia para construir un cuadrado igual á un paralelógramo cualquiera, pues el lado A de aquel es una media proporcional entre A' y B', sea que A, A', B' espresen líneas ó números proporcionales con ellas. Como siempre nos es posible construir una media proporcional (88), tambien para medir áreas puede tomarse siempre por unidad de medida un cuadrado, y por consiguiente la misma unidad lineal b para medir base y altura en la disposicion que esplicamos en el artículo precedente. Tal es en efecto la unidad superficial adoptada en la Geometria por la simplicidad; y asi, $P=A\times B$ espresa el número de unidades cuadradas que tiene el área P siendo A el número de veces que en la base cabe el lado del cuadrado, y B el número de veces que cabe en la altura.

120. TEOREMAS demostrados acerca de los productos de líneas, que ahora se traducen al lenguage de los valores superficiales. En los resultados de líneas proporcionales referentes al triángulo y círculo, (cap. I.° lecc. X) fueron considerados como números los factores y potencias de estos: mas, ahora que sabemos la significacion geométrica de dichas potencias y productos, y atendiendo á la proporcionalidad entre números

y líneas, podemos espresar aquellos teoremas en el siguiente lenguage.

I.° $b^2=c^2+a^2$, relacion hallada entre los lados del triángulo rectángulo ABC (fig. 59) (83, V.°) dice *que el cuadrado construido sobre la hipotenusa* b *de un triángulo rectángulo, es equivalente á la suma de cuadrados construidos sobre los catetos* c *y* a.

II.° $b^2=a^2+c^2\pm 2cx$, perteneciente á los triángulos acutángulo y obtusángulo (84), significa *que el cuadrado construido sobre el lado* b *opuesto al ángulo agudo ú obtuso, es equivalente á la suma de cuadrados construidos sobre los otros dos lados* a *y* c, *restando en el acutángulo de dicha suma, y por el contrario agregando á ella en el obtusángulo, dos veces el rectángulo cuyos lados desiguales son* c *y* x.

En ambos casos a, b, c, (fig. 60) son lados opuestos á los ángulos A, B, C: en el primero es B agudo, en el segundo obtuso, y siempre x la distancia desde el vértice B hasta donde concurre c con la perpendicular bajada á ella desde C.

III.° $k^2=f\times g$ dice *que el cuadrado construido sobre* k *es equivalente al rectángulo cuyos lados sean* f *y* g: que es el teorema I.° del artículo (88), siendo f y g los segmentos de un diámetro cortado por la perpendicular, cuya parte interceptada entre la circunferencia y el diámetro es k.

Lo mismo se pudiera demostrar directamente construyendo cuadrados con una línea y rectángulos con otras dos líneas, cuyos valores generales hemos espresado con las letras a, b, c en los dos primeros teoremas, y con k, f, g en el tercero : pues, las sumas y restas debidamente ejecutadas en las áreas construidas conducirán á los resultados que se han enunciado. Se omite esta duplicada demostracion, por considerar suficiente la que procede de la doctrina desenvuelta para satisfacer al rigor geométrico.

En el mismo sentido se pueden entender los teoremas comprendidos en el general del artículo (91); pues la igualdad de dos productos, como $h\times k=f\times g$, siendo h, k, f, g números ó líneas proporcionales con ellos, significa que el rectángulo construido con los lados h y k es equivalente al construido con los f y g. En general, toda igualdad que hayamos hallado ó hallásemos entre productos y potencias segundas de las líneas, no debe ofrecernos ya dificultad alguna en su significacion geométrica teniendo presente la doctrina de los artículos precedentes.

121. TEOREMA. *El área de un triángulo es el semiproducto de su base por su altura.*

Por ser el triángulo F mitad del paralelógramo P de la base B y altura A (95. II°). será el área de aquel (118) $F=\dfrac{A\times B}{2}$.

PROBLEMA. *Construir un cuadrado equivalente á un triángulo de la altura* A *y base* B *dadas.*

Siendo x media proporcional entre A y $\frac{B}{2}$, ó lo que es lo mismo entre B y $\frac{A}{2}$, la equivalencia $F = \frac{A \times B}{2} = x^2$ manifiesta que, para construir un cuadrado equivalente á un triángulo de conocidas dimensiones A y B, se halle la media proporcional entre una de ellas y la mitad de la otra, y dicha media proporcional será lado del cuadrado que se pide.

122. TEOREMA. *El área del trapecio es el producto de la distancia entre sus lados paralelos multiplicada por la semisuma de estos, ó por la parte de paralela equidistante de ellos, que interceptan los otros dos lados.*

El área del polígono es la suma de los triángulos en que se puede dividir. Por tanto el área del trapecio S (fig. 68) cuyos lados paralelos sean en números B y b, como tambien a la distancia $K\ H$ que hay entre estos, vale,

$$S = \frac{B+b}{2} \times a.$$

La paralela $FG=c$ que divide la altura a en dos partes iguales tiene la propiedad (56) $\frac{B+b}{2}=c$; y sustituyendo en la ecuacion primera, resulta $S=a\times c$.

123. TEOREMA. *I.° El área del polígono regular equivale al semiproducto de su perímetro por el apotema: y el área del círculo es límite de áreas de los polígonos regulares inscrito y circunscrito.*

Por ser el polígono regular divisible en triángulos idénticos (93); su área P (fig. 84), supuesta F la de cada triángulo y n el número de estos, vale $P=n\times F$: y por tener todos bases iguales cuya suma es el perímetro X del polígono, y una misma altura que es el apotema r, será el área del polígono regular

$$P=\frac{X\times r}{2}.$$

Siendo r apotema del circunscrito á un círculo, y r' apotema del inscrito con igual número de lados, será el área P del primero $P=\frac{X\times r}{2}$, y el área P' del segundo $P'=\frac{X'\times r'}{2}$, supuestos X y X' los perímetros respectivos: de suerte que la diferencia entre el inscrito y circunscrito es

$$P-P'=\frac{X\times r}{2}-\frac{X'\times r'}{2}.$$

Por lo demostrado (109), á medida que se aumenta el número de lados, se van acercando á la igualdad X y X' entre sí y á la circunferencia intermedia, al mismo tiempo que r' se acerca al radio constante r del círculo, sin que jamás pueda llegar á ser $r'=r$ ni $r'>r$, por consiguiente ni $X'=X$, $X'>X$, $P'=P$, $P'>P$, y sí aproximarse cuanto se quiera; condiciones precisas y suficientes para que el área del círculo sea límite de áreas de los polígonos regulares inscrito y circunscrito.

II.° *El área del círculo es el semiproducto de la circunferencia por el radio.*

Sea S el área de un círculo, que teniendo la circunferencia C (fig. 84) y el radio r esté inscrito en el polígono regular: sea tambien δ la diferencia de sus áreas, y ε la de sus perímetros. El área del polígono es

$$S+\delta=\frac{1}{2}\,r\,(C+\varepsilon);$$

y aumentando el número de lados indefinidamente se hacen δ y ε cuan pequeñas se quieran, sin jamas anularse ni pasar á negativas: luego, por lo demostrado (Alg. elem. 66) se verifica

$$S=\frac{1}{2}r\times C=\pi r^2,$$

á causa de $C=2\pi r$, supuesta π la razon entre la circunferencia y el diámetro ó entre sus mitades.

Comparando esta espresion á las que se hallaron para las figuras rectilíneas, vemos que el área de un círculo equivale á la de un triángulo que tenga por base la circunferencia de aquel rectificada y por altura el radio; y á la de un paralelógramo que tenga por base dicha circunferencia estendida en línea recta y por altura el semiradio, ó bien el radio por altura y la semicircunferencia por base.

124. TEOREMA. *El área del sector es el semiproducto del arco por el radio.*

La cuarta parte del área circular ó $\frac{1}{4}\pi r^2$ es el área del cuadrante, y $\frac{1}{2}\pi r$ su arco. Reproduciendo aqui los razonamientos del artículo (44) con el objeto de hallar las relaciones entre sectores y arcos, fácil es deducir que son proporcionales. Así, el cuadrante y otro sector s que tenga el arco a del mismo círculo, están en razon

$$\frac{s}{\frac{1}{4}\pi r^2}=\frac{a}{\frac{1}{2}\pi r}, \text{ de donde } s=\frac{1}{2}r\times a.$$

Siendo n la razon entre la circunferencia y el arco, es $a=\frac{2\pi r}{n}$ y el sector vale $s=\frac{\pi r^2}{n}$.

El área del segmento AMB (fig. 83) es igual al sector $AOBM$ menos el triángulo AOB.

125. TEOREMA. 1.° *El área de la corona circular comprendida entre dos circunferencias concéntricas descritas con los radios* r *y* r' *tiene de valor* $\pi(r^2-r'^2)$.

Inscribiendo polígonos semejantes regulares de lados paralelos á los círculos concéntricos AB....., ab....., los trapecios que los lados paralelos forman con los radios serán en el límite partes del área comprendida entre las dos circunferencias, y la suma de estas partes componen la corona comprendida entre las dos circunferencias completas. Fácil seria reducir el valor de la corona por la espresion de la suma de trapecios iguales, pero una simple resta nos le dará á conocer; pues nombrando S y S' las áreas de los círculos, como tambien r y r' sus radios, el valor de la corona será

$$S-S'=\pi(r^2-r'^2).$$

II.° *El área de la porcion de corona interceptada por el sector equivale á* $\frac{1}{2}(ra-r'a')$, *siendo* r *y* r' *los radios de los círculos, como tambien* a *y* a' *los arcos comprendidos por el sector.*

Habiéndose demostrado en el artículo precedente que $s=\frac{1}{2}ra$ es la espresion del área del sector; y siendo evidente que el área de que se trata es la diferencia de los dos sectores semejantes que los radios r y r' formen con los arcos a y a' de dos círculos concéntricos, resulta para el valor de dicha porcion de corona el valor

$$s-s=\frac{1}{2}(ra-r'a').$$

LECCION SEGUNDA.

Comparacion de áreas planas.

126. TEOREMA. *Dos áreas planas están en razon de los productos á que son iguales.*

Siendo S y S' dos áreas de cualquiera forma, espresadas en $S=M\times N$ y $S'=m\times n$, por tener la primera las dimensiones M y N así como la segunda *m* y *n*; divídase una ecuacion por otra, y resultará $\frac{S}{S'}=\frac{M\times N}{m\times n}$.

Si en esta igualdad se tratase de hallar geométricamente una de las áreas S ó S', habrian de dársenos tres de las cantidades lineales M, N, m, n, para conocer la cuarta por construccion (58, III.°), y por último la figura de quien fuese la incógnita; pero la cuestion queda reducida á mas simple en algunos casos, por las modificaciones que la igualdad padece en virtud de circunstancias que concurran en las figuras comparadas, como se observa en los siguientes problemas.

PROBLEMA. 1.° *Construir un paralelógramo* P′ (fig. 91) *que esté con otro dado* P *en la razon de los números ó líneas dadas* H *y* h.

En la leccion precedente se ha manifestado que las áreas de los paralelógramos están en razon de las alturas siendo las bases iguales, y en razon de las bases cuando son iguales las alturas (116): de consiguiente, para construir un paralelógramo P' que esté con otro P en razon de H á h se podrá hacer uso de la proporcion $\frac{P}{P'}=\frac{N}{n}$, siendo N la base de P, y n la de P', en el concepto de tener la misma altura M ambos. En este problema son incógnitas P' y n, pero hay ademas la ecuacion $\frac{N}{n}=\frac{H}{h}$ en que solo n es incógnita. Para la solucion se toma en la base $DL=N$ dada, prolongándola en caso necesario, una parte $DG=n$ que esté con N en la razon $\frac{h}{H}$ (58, III.°); y todos los paralelógramos que se construyan con la altura M del propuesto y la base n hallada tendrán la misma área que se pide. Si ademas por condicion hubiese de ser rectángulo el nuevo paralelógramo, solo el rectángulo formado con los lados M y n (96) satisface al problema.

II.° *Construir un triángulo* T′ (fig. 91) *que esté con otro dado* T *en la razon de los números ó líneas* k *y* K.

Tambien los triángulos T y T', el primero con las dimensiones lineales M y N, y el segundo con m y n, están (121) en la razon

$$\frac{T}{T'}=\frac{M\times N}{m\times n}.$$

Lo cual nos dice que las áreas de dos triángulos están en razon de los productos respectivos de base por altura. La misma espresion manifiesta que las áreas de dos triángulos de iguales alturas están en la razon de sus bases; y si tienen iguales bases, las áreas están en razon de las alturas.

Segun esto, para construir un triángulo T' que esté con otro T en la razon de k á K, siendo estos números ó líneas, fórmese arbitrariamente si no fuere ya dado el triángulo T con la base N y altura M: tomando en la base N, prolongada en caso necesario, la parte n que se deduzca de la proporcion $\frac{K}{k}=\frac{N}{n}$, cualquiera triángulo T' que tenga por base n y la misma altura M del triángulo dado satisface á $\frac{T}{T'}=\frac{K}{k}=\frac{N}{n}$.

127. TEOREMA. *Si dos triángulos tienen un ángulo del mismo valor, sus áreas están en razon de los dos rectángulos construidos con los lados que comprenden dicho ángulo de cada figura.*

Supuestos dos triángulos ABC y abc (fig. 92) con los ángulos $A=a$, y bajadas las perpendiculares BD y bd á las bases, sus áreas están en la razon $\frac{T}{T'}=\frac{AC\times BD}{ac\times bd}$, como ya se sabe; ademas, los triángulos ABD y abd semejantes dan $\frac{BD}{bd}=\frac{AB}{ab}$, y por ello resulta

$$\frac{T}{T'}=\frac{AC\times AB}{ac\times ab}.$$

128. TEOREMA. *Las áreas de los triángulos semejantes son como los cuadrados de sus líneas homólogas.*

Los triángulos ABC y abc (fig. 93) semejantes cuyas áreas sean T y T', las alturas BD y bd, y las bases AC y ac, ademas de la propiedad $\frac{T}{T'}=\frac{AC}{ac}\times\frac{BD}{bd}$, tienen por la semejanza, $\frac{AB}{ab}=\frac{AC}{ac}=\frac{BD}{bd}=$......; y sustituyendo, viene

$$\frac{T}{T'}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{ac}^2}=\frac{\overline{BD}^2}{\overline{bd}^2}=\text{etc.}$$

129. TEOREMA. *Las áreas de los polígonos semejantes son como los cuadrados de cualesquiera líneas homólogas; y las áreas de los regulares como los radios cuadrados de los círculos inscritos y circunscritos.*

Dos polígonos P y P' (fig. 79) semejantes son divisibles en igual número de triángulos respectivamente semejantes: llamándose T, T', T''.... y t, t' t''.... los triángulos en que están divididos los polígonos serán

$$\frac{T}{t}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2},\ \frac{T'}{t'}=\frac{\overline{DF}^2}{\overline{df}^2}\text{.......;}$$

y por la igualdad de razones consecutivas entre los lados (106) ha lugar á las equivalencias que siguen.

$$\frac{T+T'+\ldots.}{t+t'+\ldots\ldots}=\frac{T}{t}=\frac{T'}{t'}=\ldots=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2}=\frac{\overline{DF}^2}{\overline{df}^2}=\ldots.;$$

manifestacion de que las áreas de los polígonos semejantes están en razon de los cuadrados de sus lados homólogos. Como en el artículo (107) se demostró ser proporcionales los lados con las demas líneas homólogas, y en los (99) y (100) ser los radios de los círculos inscrito y circunscrito al polígono regular, apotema y radio de éste, se debe concluir que está patentizado el teorema propuesto.

130. *Las áreas circulares están en razon de los cuadrados de sus radios y de sus diámetros.*

Comparando las áreas S y S' (fig. 83) de dos círculos cuyos radios sean r y r' (123, II.°) resulta la igualdad $\frac{S}{S'}=\frac{\pi r^2}{\pi r'^2}=\frac{r^2}{r'^2}=\frac{4r^2}{4r'^2}$.

131. TEOREMA. *Si dos figuras semejantes tienen por lados homólogos los catetos de un triángulo rectángulo, las áreas de dichas dos figuras semejantes están en razon de los segmentos de la hipotenusa, cortada por la perpendicular que baja desde el ángulo recto del triángulo.*

Dados dos lados homólogos FG y GH (fig. 94) de dos figuras semejantes, cuyas áreas llamaremos S y S', y construido un triángulo rectángulo cuyos catetos sean dichos lados; bájese desde el ángulo recto la perpendicular GE á la hipotenusa la cual quedará cortada en los segmentos FE y EH. Tenemos por una parte (129) y (130)

$\frac{S}{S'}=\frac{\overline{FG}^2}{\overline{GH}^2}$, y por otra (83, IV.°) $\frac{\overline{FG}^2}{\overline{HG}^2}=\frac{FE}{EH}$: de

suerte que sustituyendo esta última razon por su igual, resulta $\frac{S}{S'}=\frac{FE}{EH}$.

132. TEOREMA. *Construidas tres áreas semejantes de quienes sean líneas homólogas los lados de un triángulo rectángulo, la formada sobre la hipotenusa es igual á la suma de las formadas sobre los catetos.*

Tres áreas semejantes P, P', P'' (fig. 94) que tengan los lados homólogos FH, FG, GH, están

en la razon $\frac{P}{\overline{FH}^2}=\frac{P'}{\overline{FG}^2}=\frac{P''}{\overline{GH}^2}$: y si los tres lados homólogos de la doble ecuacion anterior son lados de un triángulo rectángulo, hay entre ellos

la relacion $\overline{FH}^2=\overline{FG}^2+\overline{GH}^2$, y por consiguiente será $P=P'+P''$: en donde vemos generalizado el teorema 1.º del artículo (120).

Este principio es aplicable á la formacion de una figura cuya área deba ser equivalente á la suma ó diferencia de otras muchas semejantes á la que se ha de construir. Para la ejecucion se halla desde luego la suma ó diferencia de dos; despues la del resultado y otra de las dadas; y finalmente la suma ó diferencia de la dada restante y del resultado anterior. El modo de hallar cada suma ó diferencia es como se vé por lo que sigue.

En los casos de ser irregulares las figuras, hay que investigar cada lado homólogo de la que se ha de construir. Si las dadas fuesen regulares con los lados homólogos A' y A''; para construir la figura de la suma basta conocer su lado A homólogo, que se halla construyendo un ángulo recto con los catetos A' y A'', de que resulta la hipotenusa A. Si hubiese que formar una área equivalente á la diferencia de dos áreas regulares P y P'' de quienes sean lados homólogos A y A'' supuesto $A>A''$; construido el ángulo recto, desde el estremo del cateto A'' conocido se traza con el radio A un arco, que cortará en el lado indefinido el cateto A' lado homólogo de la diferencia.

Finalmente la igualdad $A^2=A'^2+A''^2$ hace ver, que es indeterminado el problema de hallar los lados A' y A'' de dos figuras regulares semejantes á una dada, equivalente á la suma de aquellas; pues hay dos incógnitas, y satisfacen á la cuestion todos los catetos de los innumerables triángulos rectángulos inscritos en la semicircunferencia.

153. PROBLEMAS *de las figuras isoperímetras.*

Concluiremos la Geometría plana manifestando cuáles de las figuras que se han tomado en consideracion hasta aquí, gozan la propiedad de tener *máximo* ó *mínimo* valor superficial entre las *isoperímetras* ó de contornos equivalentes; teniendo entendido que se dice máxima cantidad cualquiera que sea la mas grande entre todas las de su especie, y mínima la que sea mas pequeña entre ellas. El asunto que nos proponemos está esplicado en los problemas siguientes.

I.° *Dada la base para un triángulo, construir el que tenga máxima área entre todos los triángulos isoperímetros que se puedan formar sobre ella.*

Si los triángulos ABC isósceles y ADC (fig. 95) escaleno con la base comun AC son isoperímetros, y desde el vértice B del isósceles describimos con el radio $AB=BC$ una circunferencia, esta cortará en un punto E á la recta AB prolongada; y trazando la recta EC, será recto el ángulo ACE inscrito. Desde el vértice D del escaleno con el radio DC descríbase tambien otra circunferencia, y sea F el punto en que corte á la recta EC. Últimamente trácese la recta AF y bajando desde B y D las BG y DH perpendiculares á EC, serán $EG=GC$ y $FH=HC$. Por condicion tenemos; $AD+DF=AE$: y por lo demostrado (10), $AF<AD+DF$: luego será $AF<AE$, de consiguiente (19) $FC<EC$, ó bien sus mitades $HC<GC$ que son las alturas respectivas de los triángulos en cuestion. Y como las áreas de los triángulos que tienen bases iguales estan en razon de las alturas, debemos concluir que *entre todos los triángulos isoperímetros de iguales bases tiene mayor área el que tiene iguales entre sí los otros dos lados.*

II.° *¿Entre todos los polígonos isoperímetros que tengan igual número de lados, qué circunstancia deberán tener estos lados para que sea máxima el área?*

La cuestion se reduce á observar una figura equilátera, y otra isoperímetra (fig. 96) no equilátera del mismo número de lados; y segun el resultado del problema precedente, *ha de ser equilátero el polígono para ser máximo entre todos los isoperímetros de un mismo número de lados.* Porque si el $abcdefg$ con los lados ab y bc iguales no es mayor que el $ahcdefg$ con los lados ah y hc desiguales, trazando la diagonal ac resultarian las áreas
$abc+cdefga<ahc+cdefga$; esto es, la con-

secuencia absurda $abc<ahc$. Lo mismo se demuestra que han de ser iguales bc y cd, y sucesivamente los demas lados.

III.° *Dados para un triángulo dos lados, construir el que tenga máxima área.*

Con los lados AC y CB (fig. 97) dados constrúyase el ángulo ACB agudo, ACB' recto, y ACB'' obtuso: trácense los terceros lados AB, AB', AB''; y describiendo desde C con el radio CB la circunferencia, estarán en ella los puntos B, B', B''. Las áreas de los triángulos construidos están en razon de las alturas; y la altura $B'C=BC=B''C$ del rectángulo es mayor, por ser las oblícuas $B'C$ y $B''C$ mayores que las perpendiculares $B'G$ y $B''H$: de consiguiente vemos que *entre todos los triángulos construibles con dos lados dados, tiene mayor área aquel en que dichos lados formen ángulo recto.*

IV.° *Dados para un polígono todos los lados menos uno, determinar el que tenga máxima área.*

Sean AB, BC, CD, DE, EM (fig. 98) los lados que se dan para formar el polígono cuyo último lado AM no conocemos aun; y tomando en consideracion los vértices A, D, M solamente, tírense las diagonales AD y DM. Desde luego supongamos que las dos partes $ABCD$ y DEM están construidas como es necesario para ser máxima el área del polígono, esto es, la suma de las partes $ABCD+ADM+DEM$; condicion que determina las rectas AD y DM lados del triángulo ADM: y como por el problema III.° el triángulo máximo que se puede formar con dos lados determinados es rectángulo, se sigue que el ángulo ADM es recto; de consiguiente, haciendo pasar una circunferencia por los tres puntos A, D, M, será AM su diámetro. Igualmente se demuestra sucesivamente que los demas vértices se hallan tambien en la misma circunferencia cuyo diámetro es AM; luego, *el polígono de mayor área que se puede construir con todos los lados menos uno dados, es el inscrito en la semicircunferencia que tiene por diámetro el lado restante.*

Tambien es fácil convencerse de que, sea cualquiera la colocacion respectiva de los lados que se den, siempre será un mismo círculo aquel en que se deban inscribir los lados. Agregando por ejemplo, la parte $ABCD$ á DEM de suerte que el punto A coincida con M para formar la máxima suma de áreas $DEM+MB'C'D'+D'MD$, están determinadas las rectas DM y MD' como tambien el ángulo DMD' recto, y el diámetro $D'D$ que será igual á AM por ser ambos del círculo que pasa por los tres puntos D, E, M.

V.° *¿Dados para un polígono todos los lados, qué propiedad deberá gozar el que se forme con ellos, para tener área máxima?*

Sean dos polígonos $ABCDEFG$ (fig. 96 y 99) inscrito y $abcdefg$ no inscritible los que se comparan, de iguales lados como $AB=ab$, $BC=bc$...: tírese el diámetro AM y las cuerdas DM y ME: por último, sobre $de=DE$ constrúyase el triángulo dme que sea idéntico á DME, y tírese am. Segun lo demostrado en el problema IV.°, el área $ABCDM$ es mayor que $abcdm$, y $AGFEM$ mayor que $agfem$, ó bien el área $ABCDMEFG>abcdmefg$; y esta espresion dice *que el polígono inscritible tiene mayor área que el no inscritible de igual número de lados, iguales respectivamente á los de aquel*. Por el raciocinio mismo que hicimos en el problema IV.° se hace ver, que solo hay un círculo circunscritible al polígono máximo, sea cualquiera el órden de los lados.

Si todos los lados fuesen iguales entre sí, el polígono inscrito tendrá necesariamente iguales tambien todos sus ángulos, al paso que no sucederá así en el no inscritible: luego, por el resultado del II.° problema, *entre todos los polígonos isoperímetros de un mismo número de lados, el regular es máximo*.

VI.° *¿Si dos polígonos regulares son isoperímetros, y el uno tiene mas lados que el otro, cuál será el de la máxima área?*

Sea AB (fig. 100) semilado del polígono de mas lados, O su centro y OB su apotema; como tambien $A'D$ semilado del otro polígono, O' su centro y $O'D$ su apotema. En la figura se suponen los centros O y O' situados á cualquiera distancia $O O'$, y en esta recta los apotemas, de consiguiente $A O B$ y $A' O' D$ semiángulos del centro correspondientes á los respectivos polígonos; y como estos ángulos son desiguales, las líneas $O A$ y $O' A'$ prolongadas han de concurrir en un punto E. Bajando pues desde E á la línea $O O'$ la perpendicular $E F$, sea F el punto de concurso, y desde los centros O y O' descríbanse los arcos $F G$ y $F H$ que terminan en las respectivas rectas $O E$ y $O' E$.

Trazada ya la figura y nombrando los ángulos con las letras O y O' de sus vértices, recuérdese que al fin del artículo (110) se demostró la verdad

$$\frac{O}{O'} = \frac{F G}{O F} : \frac{F H}{O' F}.$$

Por otra parte, nombrándose P y P' los perímetros de los dos polígonos, y R el ángulo recto nos consta (41) y (99) que hay entre ángulos y líneas las relaciones $\frac{4R}{O} = \frac{P}{A B}$, $\frac{4R}{O'} = \frac{P'}{A' D}$:

y como son iguales por condicion los perímetros P y P', tenemos $\frac{O}{O'} = \frac{A B}{A' D}$,

::

esto es, $\frac{AB}{A'D} = \frac{FG}{OF} : \frac{FH}{O'F}$; de donde viene por operacion simple de cálculo

$$\frac{AB \times OF}{A'D \times O'F} = \frac{FG}{FH}.$$

Los triángulos AOB y EOF semejantes dan $AB \times OF = OB \times EF$; y los $A'O'D$ y $EO'F$ semejantes dan $A'D \times O'F = O'D \times EF$. Sustituyendo estos valores de numerador y denominador en la fraccion que antecede, resulta

$$\frac{OB}{O'D} = \frac{FG}{FH}.$$

Con el fin de ver cuál de estos dos apotemas es mayor constrúyase la figura $O'JK$ idéntica á $O'KF$, trazando el ángulo $JO'E$ igual á $EO'F$, tomando $O'J$ igual á $O'F$, y describiendo el arco JK idéntico á KF con el radio JO'' igual á OF. Desde luego se advierte que por ser el radio OF mayor que $O'F$, el arco FK envuelve al FH (55), de consiguiente JKF á JHF; y por ello será (10) $JKF > JHF$ ó bien $FK > FH$ y con mas razon $FG > FH$: luego por la ecuacion escrita últimamente vemos que el apotema OB es mayor que el $O'D$. Como se sabe que las áreas de los dos polígonos están en razon de los productos de perímetro por apotema (123), y tenemos por condicion iguales los perímetros, resulta el área del polígono á que corresponde OB mayor que la del polígono á que corresponde $O'D$; quedando así demostrado que *de dos polígonos regulares isoperímetros, el que tenga mas lados tiene mayor área.*

VII.° *¿Si un círculo y un polígono son isoperímetros, cual de estas dos figuras tendrá mayor área?*

La cuestion solo debe referirse al polígono regular, por la consecuencia del problema V.° En este concepto, sean AB (fig. 101) semilado del polígono y O su centro, como tambien $A'D$ el arco del círculo isoperímetro interceptado por los radios $O'A'$ y $O'D$ lados del ángulo $A'O'D$ igual á AOB, y por ello, $m\times A'D$ la circunferencia y $m\times AB$ el perímetro del polígono. Las áreas C del círculo y P del polígono son respectivamente m veces las áreas del sector $A'O'D$ y triángulo AOB; y comparando se tiene (123) y (124)

$$\frac{C}{P}=\frac{A'D\times O'D}{AB\times OB}=\frac{O'D}{OB},$$ á causa de $A'D=AB$ por

condicion. Tirando la tangente DE, que encontrará en E al radio $O'A'$ prolongado, los triángulos semejantes $O'DE$ y OBA darán, sustituyendo $A'D$ por AB, la proporcion

$$\frac{O'D}{OB}=\frac{ED}{A'D};$$ y será de resultas

$$\frac{C}{P}=\frac{ED}{A'D}=\frac{ED\times\frac{1}{2}O'D}{A'D\times\frac{1}{2}O'D};$$

es decir, que el área del círculo á la del polígono como la del triángulo $EO'D$ á la del sector $A'O'D$: y por ser esta menor que aquella, se sigue que *el área del círculo es mayor que la de todo polígono que tenga su perímetro igual á la circunferencia de aquel.*

Geometría del Espacio.

CAPÍTULO PRIMERO.

LÍNEAS RECTAS, PLANOS Y ÁNGULOS.

LECCION PRIMERA.

De la línea recta y el plano.

134. Todas las cantidades geométricas tomadas en consideracion hasta aquí están situadas en el plano; y ahora vamos á tratar de las que se hallan en un plano y fuera de él. Pronto veremos por la esperiencia el modo de ligar las relaciones de las cantidades situadas en un plano á las re-

laciones de las que se hallan en otro, con la mediacion de alguna cantidad comun á los dos planos.

Una recta BA (fig. 102) es perpendicular á un plano $CDGA$, si lo es á todas las rectas AC, AD, etc. describibles en él desde el punto A en que la perpendicular encuentra al plano. Es *proyeccion* de un punto del espacio sobre un plano, aquel en que la perpendicular bajada desde dicho punto encuentra al plano; así, supuesta BA perpendicular al plano $CDGA$ es A proyeccion de B, y con las mismas circunstancias para LP es L proyeccion de P.

Dos rectas en el espacio son paralelas cuando prolongadas indefinidamente no concurren, con la circunstancia de que, si la una se moviese paralelamente á sí misma hasta encontrar á la otra, coincidan las dos.

Son paralelos dos planos, ó una recta y un plano, cuando no se encuentran prolongados indefinidamente.

135. TEOREMA. *Si una recta tiene dos puntos en un plano, en él estará toda ella.*

Por la definicion (4) del plano, la recta sobrepuesta á él en todas direcciones se ajustará en todos sus puntos; y por lo demostrado en el artículo (5), todas las rectas que tengan comunes dos puntos coincidirán: luego, la que tenga éstos en un plano se ajustará á él completamente.

136. TEOREMA. *La interseccion de dos planos es una línea recta.*

La interseccion de dos planos AB y HG (fig. 103) es la única línea que en toda su estension se ajusta á los dos planos juntamente, por ser una continuacion de puntos comunes á ellos: y si desde dos puntos p y q de la interseccion se dirige la recta pq, estará toda simultáneamente en los dos planos por lo demostrado en el artículo precedente. Luego, la recta pq es la interseccion de dos planos, por ser la única línea comun á ellos.

137. TEOREMA. *Una recta puede ser comun á muchos planos; por lo cual no determina sola por sí la posicion de uno de ellos en el espacio.*

Si por los puntos A y B (fig. 104) de la interseccion de los planos ABC y ABC' pasa otro ABC'', tambien la recta AB será interseccion de este con cada uno de aquellos, por consiguiente interseccion comun de los tres planos. Lo mismo se discurrirá haciendo pasar otro plano, y así sucesivamente los que se quieran por los puntos A y B, como sucede imaginando al plano ABC en la infinidad de posiciones que tomará girando al rededor de la recta fija AB.

138. TEOREMA. I.° *Por tres puntos del espacio siempre puede pasar un plano; y si los tres puntos no están en línea recta, determinan la posicion de un plano en el espacio.*

Dados tres puntos cualesquiera A, B, C (fig. 104) del espacio, y ligándolos con rectas, forman la figura triangular ABC; y para convencerse de que es una figura plana basta considerar que el plano en que se halla la recta AB, girando al rededor de esta ha llegado al punto C; pues dirigidas AC y BC en el plano que pasando por la recta AB pase tambien por C, se ajustarán á él (135).

En cuanto á la segunda parte del teorema; si los puntos A, B, C fueren comunes á otro plano, tambien se ajustarán á este dichas rectas, y asi á todos los planos imaginables. Cada plano de estos puede considerarse formado por la recta BC que asida al punto C fijo comun á todos se mueve resbalándose por la recta fija AB comun tambien (4): y dicha recta en cualquiera posicion $B'C$ de su movimiento tendrá dos puntos B y C en todos los planos, y de consiguiente se ajustará á todos ellos; luego, tambien los planos coincidirán entre sí.

Lo mismo se puede razonar acerca de todos los planos que tuviesen comunes los tres puntos A, B, C'; y de esta suerte hacer palpable que dos de estos A y B comunes á muchos planos, con otro de los C, C', C''.... del espacio determinan los planos ABC, ABC', ABC''..... distintos.

II.° *Por dos rectas que se cortan siempre puede pasar un plano.*

Como tres puntos *A, B, C* (fig. 104) pueden fijar la posicion de dos rectas *AB* y *BC*, con tal que uno de ellos, *B* por ejemplo, sea comun (5); y la recta que tiene dos puntos en un plano se halla en él (135), siempre las dos rectas *AB* y *BC* que se corten en *B* se ajustarán al plano que pase por los tres puntos *A, B, C*.

III.° *Dos rectas que se cortan fijan la posicion de un plano.*

Por ser las rectas *AB* y *BC* únicas que se pueden dirigir desde *B* á *C* y *A*, como tambien solo uno el plano que puede pasar por dichos tres puntos, se sigue que el teorema propuesto está demostrado.

IV.° *Dada una recta* AB *y un punto* F *del espacio fuera de ella, sola una paralela* GF *á* AB *puede pasar por* F.

Siendo la recta *GF* paralela en el espacio á *AB*, hágase pasar un plano *ABF* por la recta *AB* y el punto *F*; trazando en el plano desde el punto *F* una paralela á *AB*, y haciendo mover á *AB* paralelamente á sí misma hasta el punto *F*, se confundirá por la definicion de paralelas con *GF* del espacio y al mismo tiempo con la trazada en el plano; lo que hace ver que son una misma; luego, por la consecuencia del artículo (25) está demostrado el teorema.

V.° *Siempre puede pasar un plano por dos paralelas del espacio, y solo uno puede pasar por* *dos paralelas dadas; de consiguiente, lo demostrado acerca de las paralelas descritas en un plano conviene igualmente á dos del espacio.*

Puesto que las paralelas GF y AB del plano en que se hallan son las mismas del espacio, se sigue que siempre puede pasar un plano por dos paralelas del espacio.

Por ser el plano ABF el único que puede pasar por la recta AB y el punto F del espacio juntamente, segun el teorema 1.º; y no poder pasar por F mas paralela á AB que la GF, resulta demostrada la segunda parte de la proposicion.

139. TEOREMA. 1.º *Si una recta es perpendicular á otras dos que concurran en un punto con ella, es perpendicular al plano determinado por dichas dos.*

Sea la recta BA (fig. 105) del espacio perpendicular á dos rectas fijas AD y AC que concurren en A con la primera; y cortando $AD = AC$, dirijanse las rectas CD, BC, BD, como tambien desde F medio de CD las FB y FA.

Estas construcciones tienen por objeto formar con cada dos rectas un plano, en donde cierre triángulo con ellas una de las otras mencionadas que al mismo tiempo sea lado de otro triángulo en otro plano, á fin de comparar las líneas de un plano con las de otro por medio de la comun á los dos, conforme á la indicacion hecha al principio de la leccion. Prevenidos pues para el razonamiento de este modo, obsérvese en primer lugar que tenemos por construccion el triángulo CAD isósceles y AF perpendicular á CD En segundo lugar, los triángulos rectángulos BAD y BAC dan

$$\overline{BD}^2=\overline{BA}^2+\overline{AD}^2=\overline{BC}^2 \text{ ó } BD=BC;$$

esto es, el triángulo BCD isósceles, y BF perpendicular á CD: de resultas $\overline{BF}^2=\overline{BC}^2-\overline{CF}^2$, y por otra parte $\overline{BC}^2=\overline{BA}^2+\overline{AC}^2$. Sumando las dos últimas ecuaciones y sustituyendo despues $\overline{AF}^2$ por $\overline{AC}^2-\overline{CF}^2$, viene $\overline{BF}^2=\overline{AF}^2+\overline{BA}^2$ y por ello es BA perpendicular á AF.

Si á otro punto H de la recta CD se dirigen AH y BH, se verifican ademas de $BF^2=AF^2+BA^2$, las ecuaciones procedentes de los triángulos BFH y AFH, $\overline{BH}^2=\overline{BF}^2+\overline{FH}^2$ y $\overline{AF}^2=\overline{AH}^2-\overline{FH}^2$: y la suma $\overline{BH}^2=\overline{BA}^2+\overline{AH}^2$ hace ver que AH es perpendicular á BA. Por este método se demuestra que BA es perpendicular á cuantas rectas pueden dirigirse desde A en el plano triangular ACD fijado por AC y AD perpendiculares á BA.

Del mismo modo se hace ver esta verdad respecto de todas las líneas del plano indefinido CAD que pasan por A. En efecto, prolongando CA hasta G, se verifica en el plano BCA la relacion de ángulos $BAC+BAG=2R$; $BAG=BAC=R$. Tambien en el plano BDA, prolongando DA hasta K será $BAD+BAK=2R$; $BAK=BAD=R$. Siendo BA perpendicular á AG y AK que se hallan en el plano indefinido CAD, será perpendicular á todas las rectas que pasando por A se puedan describir en el ángulo KAG. Por igual razon BA perpendicular á todas las rectas descriptibles desde A en el ángulo CAK y en DAG: luego, perpendicular á cuantas pueden dirigirse desde A en el plano CAD indefinido por todas partes.

II.° *Todas las oblicuas que en número infinito pueden venir desde un punto* B (fig. 105.) *de la perpendicular, á la circunferencia descrita en el plano con cualquiera radio desde el pie* A *de ella, son iguales: y reciprocamente, siendo iguales tres oblicuas que salen de un punto* B *del espacio hácia un plano, la recta que baja desde dicho estremo comun de ellas al centro del círculo de los otros estremos, es perpendicular al plano que estos determinan.*

En cuanto á lo primero tomando

$AD=AC=AG=AK=\ldots\ldots$ en el plano será

$$\overline{BD}^2=\overline{BA}^2+\overline{AD}^2,\quad \overline{BC}^2=\overline{BA}^2+\overline{AC}^2,\ \text{etc.}$$

de donde $BD=BC=BG=$etc.

En cuanto á la segunda parte del teorema, siendo iguales las oblicuas BC, BG y BD, trácese la circunferencia que deba pasar por los tres puntos C, G, D; y hallado el centro A elévese la recta AB, que será perpendicular al plano CDG: pues de lo contrario, habria otro punto en él, ademas de A, que estuviese equidistante de los puntos C, D, G para satisfacer á la primera parte del teorema; lo cual es imposible (50, IV.°).

De aquí se deduce el modo de bajar desde un punto B del espacio, la perpendicular BA al plano CAD; pues tomando en él tres puntos G, D, C equidistantes de B, el centro A de la semicircunferencia que pasa por estos tres, el cual sabemos hallar (50, IV.°), es el punto de concurso de la perpendicular con el plano, ó la proyeccion del punto B.

III.° *Si tres rectas* AB, AD, AG *son perpendiculares entre sí, será cada una perpendicular al plano de las otras dos.* Porque á cada una de estas rectas asisten las dos condiciones del teorema primero, necesarias para ser perpendicular al plano determinado por las dos restantes.

IV.° *Desde un punto* B *del espacio ó desde* A *tomado en un plano, no se puede bajar á este pla-*

no mas que una perpendicular. Porque en todos los planos BCA, BDA... desde B solo puede venir una perpendicular á las rectas CA, DA.... (17).

V.° *La distancia ó línea mas corta desde un punto del espacio á un plano es la perpendicular* BA *terminada por el punto y por el plano.*

Por ser BA la mas corta línea desde B á las rectas CG, DK..... que cruzándose en A forman el plano, considerando infinito su número, se sigue que BA es la distancia mas corta desde B á dicho plano.

VI.° *De las oblicuas que desde un punto* B *de la perpendicular puedan venir á un plano, las mas desviadas del pie* A *de ella son las mas largas.*

Tomando en la recta CG del plano dos puntos P y Q mas distantes de A que C y G, será

$$\overline{BP}^2 = \overline{BA}^2 + (AC+CP)^2,$$

$$\overline{BQ}^2 = \overline{BA}^2 + (AG \times GQ)^2; \text{ y } BP>BC,\ BQ>BG,$$

$$\text{por ser } \overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 \text{ y } \overline{BG}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AG}^2.$$

VII.° *Por un punto* A *de una recta* AB (fig. 106) *solo puede pasar un plano* ACD *que sea perpendicular á ella.*

Porque si hubiese otro $AC'D'$, en el plano secante BAH sería BA perpendicular á un tiempo á las rectas AL seccion del uno, y AH seccion del otro; lo cual es imposible (17).

140. TEOREMA. *Dos planos* LM *y* NP (fig. 107) *perpendiculares á la recta* AB *en los puntos* A *y* B *son paralelos entre sí.*

Si estos planos se encontrasen, prolongándolos cuanto es imaginable, en una recta que pase por el punto *E* cualquiera del espacio, se podrian trazar en ellos las rectas *E B* y *E A* desde dicho punto *E* de su comun seccion á los puntos *A* y *B*; y estas rectas no serian perpendiculares á *AB* (17) y por ello tampoco los planos segun la definicion (134); luego, la proposicion es cierta.

Con este motivo, trazando en los planos perpendiculares á *B A* unas rectas que pasen por los estremos *A* y *B*, como tambien otras que no pasen por estos puntos, es facil observar algunas particularidades de la Geometría en el espacio. 1.ª Una recta del espacio puede ser perpendicular á muchas que se hallen en distintos planos, sin que sean paralelas. 2.ª Puede haber en el espacio rectas que sin encontrarse jamás no sean paralelas.

141. TEOREMA. *Dada la recta* CD (fig. 102) *en el plano* CAD *á quien es perpendicular la recta* BA *del espacio, si se tira desde su pie* A *la recta* AF *perpendicular á* CD, *y desde* F *se dirige á cualquier punto* B *de* BA *la recta* FB, *será* CD *perpendicular á la recta* FB *y por consiguiente al plano* BFA.

Supóngase cualquiera recta *CD* en el plano

CAD á quien sea perpendicular la recta *BA*, y desde el pie *A* dirijase á *CD* la perpendicular *FA*. Cortando las partes *FC*=*FD*, será *BC*=*BD*, y *CD* perpendicular á *FB* que divide por medio á la base *CD* del triángulo isósceles *CBD*. La recta *CD* perpendicular á las *FA* y *FB*, lo es al mismo tiempo al plano *BFA*.

142. TEOREMA. I.° *Si dos rectas* BA *y* HF (fig. 102) *son paralelas, y una de ellas* BA *es perpendicular al plano* AFD, *tambien la otra* HF *será perpendicular al mismo plano.*

Sea *BFA* el plano de las dos paralelas, y la recta *FD* del plano *AFD* perpendicular en *F* á las rectas *AF* y *FB*, y por consiguiente al plano *BFA* de las paralelas. Por ser *DF* perpendicular al plano *BFA*, lo será á todas las rectas de dicho plano que pasen por *F*, una de las cuales es *HF*, y esta será tambien perpendicular á *FA* que lo es á *BA*; luego, por ser *HF* perpendicular á *FA* y *FD* es perpendicular al plano *AFD*.

II.° *Si dos rectas* AB *y* FH *son perpendiculares á un plano, son paralelas entre sí.* Porque sino, pudiéramos en el punto *F* de dicho plano levantar otra perpendicular *FG*, lo cual es imposible (139, IV.°).

III.° *Dos rectas* FH *y* LP *paralelas á una tercera* AB *son paralelas entre sí en el espacio.* Porque, supuesto un plano *FAL* perpendicular á la recta *AB*, será tambien perpendicular á cada una delas otras dos paralelas, y estas por consiguiente paralelas entre sí.

143. TEOREMA. *Las intersecciones* pq *y* mn (fig. 103.) *de dos planos* AB *y* DF *paralelos con otro plano* HG *que los corta, son paralelas entre sí.*

Por no poderse jamas encontrar uno á otro dos planos paralelos, tampoco se encontrarán dichas líneas que se hallen en estos: ademas estan tambien las dos en el plano *HG*, y no pudiendo concurrir son paralelas en él: satisfacen pues completamente á la definicion de paralelas (134).

144. TEOREMA. *Si la recta* pm *es perpendicular al plano* AB, *lo es igualmente á otro* DF *paralelo al primero.*

Dirigiendo el plano *qpm* que corte á los otros dos, las intersecciones *pq* y *mn* con ellos son paralelas y se hallan en el plano *qpm*; y así, *pm* perpendicular á *pq* tambien lo es á *mn* (26, I.°). La posicion del plano secante *qpm* puede variar al rededor de *pm*, y en cada posicion será *pm* perpendicular á las rectas *pq'* y *mn'*; y siendo perpendicular *pm* á las rectas *mn* y *mn'*, lo será al plano *DF* en que se hallan estas.

145. TEOREMA. *Las rectas* pm *y* qn *paralelas, interceptadas por planos paralelos, son iguales.*

Segun lo demostrado (143), los planos paralelos *AB* y *DF* cortados por *HG* tienen las intersecciones *mn* y *pq* paralelas que se hallan en el plano *HG*, y si en él se dirigen *pm* y *qn* paralelas entre sí terminadas por *mn* y *pq*, es decir, por los planos *AB* y *DF*, serán tambien iguales (30).

146. TEOREMA. *Si una recta* Gg (fig. 108) *es paralela á otra* Dd, *tambien lo será á todo plano* Fd *que pase por* Dd.

Porque el plano *Dg* de las *Dd* y *Gg* no puede tener con cada uno de los que pasen por *Dd* mas que una interseccion *Dd*, y solo en un punto de esta recta podria concurrir *Gg* con dichos planos; pero á causa de ser paralelas *Gg* y *Dd* no concurren; luego, tampoco *Gg* con ninguno de los planos que pasan por *Dd*.

147. TEOREMA. *Si los lados* DG *y* DF *de un ángulo son paralelos respectivamente á los* AC *y* AB *de otro del espacio, los planos del los ángulos son paralelos entre sí.*

Desde el punto *D* bájese al plano *BAC* la perpendicular *Dd*, que lo será tambien á las rectas *df* y *dg* paralelas á las correspondientes *AB* y *AC* en un mismo plano: al mismo tiempo *Dd* es perpendicular á *DG* paralela á *dg* en el plano *dG* (26, 1.°), como tambien á *DF* paralela á *df* en el plano *dF*; esto es, *Dd* perpendicular á un mismo tiempo á los planos *FDG* y *BAC*, resultando estos paralelos entre sí (140).

148. TEOREMA. *Dadas en el espacio dos rec-*

tas AB *y* CD (fig. 109), *que sin ser paralelas no puedan encontrarse, siempre podrán pasar por ellas planos paralelos; y la perpendicular á estos será la distancia mas corta entre las dos rectas.*

Para lo primero basta dirigir desde un punto de cada recta una paralela á la otra, como *A F* y *D G* que determinarán los planos *B A F* y *CDG* paralelos (147).

En cuanto á la segunda parte del teorema discúrrase, que no pudiendo dichas rectas dadas acercarse una á otra mas que los planos, será la mas corta distancia entre ellos otra que siendo perpendicular á los dos planos paralelos concurra con dichas rectas. En efecto, desde *A* dirijase *A H* perpendicular al plano *C D G*, y lo será tambien al *B A F*; el plano *H A B* hará las dos secciones *A B* y *H L* paralelas (143), y esta última prolongada encontrará necesariamente á *C D* en el punto *T*: ligando las rectas *TL* y *A B* en el plano *H A B* con la recta *TS* paralela á *HA*, será igual á esta y perpendicular á los planos *GDC* y *F A B* (142), y á las rectas *A B* y *C D*. Luego, *TS* perpendicular á las rectas y á los planos es la mas corta distancia entre aquellas; ó bien otra cualquiera *H A* perpendicular comun á los planos en que estan las rectas.

149. TEOREMA. *Si dos rectas son cortadas por tres planos paralelos entre sí* (fig. 110) *las partes*

de ellas comprendidas entre dos de los planos son proporcionales á las partes comprendidas entre uno de estos y el tercero.

Siendo AB y DC dos rectas cortadas en B y C, en F y H, en A y D, por tres planos paralelos; tírense las rectas AC, BC, AD, como tambien las FG y GH desde el punto G en que el plano intermedio corta á la recta AC. En el plano BCA se verifica (143) y (34) $\frac{BF}{FA}=\frac{CG}{GA}$, y en el plano CAD es $\frac{CG}{GA}=\frac{CH}{HD}$; de donde se tiene $\frac{BF}{FA}=\frac{CH}{HD}$; y componiendo esta, resulta $\frac{AB}{DC}=\frac{AF}{DH}=\frac{FB}{HC}$ como se propuso demostrar.

LECCION SEGUNDA.

Angulos diedros.

150. Dos planos BC y BF (fig. 111) que se cortan en BA pueden estar mas ó menos abiertos antes de su encuentro: esta abertura o espacio comprendido entre dos planos que concurren

se l'ama ángulo *diedro* ó de dos *caras* que son los planos; y la comun seccion de ellos BA es *arista* de dicho ángulo. Se nombra el diedro por medio de cuatro letras ordenadas en fila como $GBAC$, enunciando las dos letras del medio la arista, las tres primeras uno de los planos, y las tres últimas el otro. Ultimamente, cortando los dos planos del ángulo diedro por otro plano BGD, resulta descrito en este el ángulo plano GBD, que forman las intersecciones BG y BD del plano secante con las caras del diedro.

151. TEOREMA. *Todas las secciones paralelas de un ángulo diedro son ángulos planos iguales* (fig. 111).

Cortando el ángulo diedro $GBAC$ con dos planos paralelos GBD y QPT, tomando en seguida las rectas $BD=PT$, $BG=PQ$, y dirigidas DT y GQ; el cuadrilátero BT y el BQ son paralelógramos (145) y (30) y $DT=BP=GQ$. Trazadas DG y TQ, tambien DQ es paralelógramo y por tanto $DG=TQ$. Resulta, pues, que son idénticos los triángulos GBD y QPT y en ellos iguales los ángulos planos B y P.

La proposicion recíproca de la que se acaba de probar no se verifica siendo las secciones oblícuas á la arista del diedro. En efecto, suponiendo ETH la seccion perpendicular, serán ET, EH, TH perpendiculares á la arista BA y á sus paralelas DC y GF; por lo cual, tomando

$EA = EP = HJ = HQ$, y dirigidas en planos correspondientes las rectas TA, TJ, AJ, hay las igualdades $TA = TP$, $TJ = TQ$, (18), y $AJ = PQ$ (30); esto es, el triángulo ATJ idéntico á PTQ. De suerte que pueden ser iguales los ángulos planos que resultan de cortar un diedro por planos no paralelos, excepto en el caso de secante perpendicular á la arista.

Por esta razon y á fin de proceder con simplicidad, se ha elegido para medida del diedro el ángulo HET plano que resulta de la seccion perpendicular á la arista; y segun este ángulo plano es agudo, recto ú obtuso, recibe uno de tales nombres el diedro á quien mide.

152. Valuar un ángulo diedro $FBAD$ (figura 112) es indagar las veces que otro $fbad$ está contenido en él. Córtense los dos con planos perpendiculares á las aristas, y sean FBC y fbc las secciones ó medidas respectivas de los diedros: ajustada la arista ab con AB y el plano bg con BG, en disposicion que los vértices B y b de los ángulos planos coincidan, tambien se ajustarán los planos secantes FBC y fbc, como si se hubieran cortado los ángulos diedros despues de sobreponer uno á otro, con un plano perpendicular á la arista comun; y quedará trazado en el plano BFC el ángulo FBK igual á fbc. Haciendo girar al diedro medidor sobre la arista BA de modo que bf coincida sobre BK,

se ajustará bc con BK': y asi sucesivamente las veces que el ángulo plano fbc cabe en FBC. Si el mayor B contiene al menor b exactamente n veces, será $B=n\times b$. Si á pesar de no estar contenido b en B exactamente cierto número de veces, tienen comun medida, será n número fraccionario; y si no tienen medida comun, será n irracional.

153. TEOREMA. *Los ángulos diedros estan en razon de los ángulos planos que resultan en secciones perpendiculares á sus aristas.*

Si dos ángulos diedros D y D' están espresados por $D=n\times b$ y $D'=m\times b$, siendo b el diedro que sirve de unidad contenido n veces en D y m veces en D', será $\frac{D}{D'}=\frac{n}{m}$; segun el método de valuacion esplicado en el artículo precedente, serán tambien $P=n\times p$ y $P'=m\times p$ los ángulos planos correspondientes que resulten de cortar los diedros con planos perpendiculares á las aristas, suponiendo p la unidad de medida; y de estas ecuaciones procede $\frac{P}{P'}=\frac{n}{m}$. Comparando los resultados, viene $\frac{D}{D'}=\frac{P}{P'}$.

Segun el teorema que se acaba de comprobar, en los ángulos diedros se verifican los mismos teoremas que en los ángulos planos; y en efecto es fácil demostrar los que siguen describiendo para ello una circunferencia en el plano que corta todos los diedros imaginables formados al rededor de la arista comun *BA* (fig. 113). 1.° Son iguales los ángulos diedros opuestos á la arista, como los rectilíneos opuestos al vértice: y por un razonamiento análogo al del artículo (15) se deduce que todos los ángulos diedros posibles estan comprendidos entre cero y la suma de dos rectos. 2.° Dos diedros, cualquiera que abracen la semicircunferencia son suplementarios mútuamente; y si un plano es perpendicular á otro, ambos diedros rectos. 3.° Dos diedros que juntos abracen el cuadrante son complementarios entre sí. 4.° Cuantos diedros resultan de la interseccion comun *BA* de muchos planos valen cuatro rectos. 5.° Cortados dos planos paralelos por otro, son iguales los ángulos diedros alternos internos, los alternos esternos y los correspondientes.

154. TEOREMA. *Siendo la recta* BA (fig. 114) *perpendicular á un plano* KL, *todos los planos que pasen por* BA *son perpendiculares á dicho plano, es decir, que forman con* KL *ángulos diedros rectos.*

Siendo *ABF* un plano que pase por la perpendicular, *BA*, y *AJ* su comun seccion con el plano *KL*, ó la arista del diedro que forman; la recta *Am* perpendicular á dicha arista en el punto *A*, forma con *BA* el ángulo plano *BAm* recto y medida del diedro. Asi mismo, siendo *AC* comun seccion de otro plano *BAC* con el fijo *KL*, y *An* perpendicular á la arista *AC* del nuevo diedro, será el plano *BC* perpendicular á *KL*. Por igual razon serán perpendiculares á *KL* todos los planos que pasen por *BA*.

155. TEOREMA. *Dada en el plano* KL *la recta* AJ, *solo un plano* BJ *perpendicular á* KL *puede pasar por dicha recta.*

La razon es, que la recta dada y la perpendicular *BA* á ella y al plano *KL* fijan la posicion del único plano perpendicular *BJ* (138, III.°), á causa de que en *A* es *BA* única perpendicular al plano *KL* (139, IV.°).

156. TEOREMA. I.° *Si dos planos* DF *y* KL (fig. 114) *son perpendiculares y* AJ *su comun seccion, la recta* BA *perpendicular á ella y que esté en uno de los planos, como en* DF, *será perpendicular al otro.*

Construida en el plano *KL* la recta *Am* perpendicular á la arista *AJ* en el punto *A*, determina con *BA* el plano *BAm* perpendicular á la arista *AJ* (159, I.°) y forma con *BA* el ángulo plano *BAm* que debe ser recto por serlo el diedro de dicha arista: y de consiguiente la recta *BA* perpendicular á las rectas *AJ* y *Am* lo es al *plano KL* en que se hallan (159).

II.° Recíprocamente: *siendo los planos* D F *y* K L *perpendiculares, la recta* B A *perpendicular al plano* K L *en la comun seccion* A J, *está necesariamente en el plano* D F.

Porque sino, en el punto *A* de un plano se podrian levantar dos perpendiculares; lo cual es un absurdo (159, IV.).

157. TEOREMA. *Si un plano es perpendicular á otros que se cortan, la comun seccion de estos es perpendicular al primero, y por consiguiente á sus intersecciones con los segundos.*

Sea *A B* la comun seccion de los planos *A H*, *A F*,... perpendiculares al *K L* á quien cortan en A *C*, *AJ*,... de suerte que *A* es punto comun á todos los planos y sus intersecciones. La perpendicular al plano *K L* en el punto *A* está (156, II.°) simultaneamente en todos los planos *A H*, *A F*...; y como estos planos no tienen mas línea comun que la interseccion *B A*, se sigue que el teorema está comprobado.

158. TEOREMA. I.° *Si un plano* BDG (fig. 111) *forma con otros dos* B A D *y* B A G *que se cortan ángulos diedros dados y abiertos hácia parte determinada, todos los paralelos á él tienen la misma propiedad que es peculiar de ellos solamente.*

Los planos *B D G* y *P T Q* paralelos, al cortar el diedro de la arista *B A* forman con sus planos

BAD y BAG otros cuatro diedros de las aristas BD, BG, PT, PQ. Los diedros de las aristas BD y PT son iguales, como tambien entre sí los de las aristas BG y PQ; porque, sobrepuesta la porcion inferior del sistema de planos á la superior en disposicion que la arista PA caiga sobre BP y el punto P en B, con las aberturas hácia un mismo lado, tambien la recta PT caerá sobre BD, y PQ sobre BG (26, IV.º): de consiguiente se ajustarán los planos respectivos de los diedros mencionados por coincidir los puntos que los determinan.

Solamente dichos planos tienen esta propiedad, pues la seccion ATJ de otro no paralelo no puede caer sobre BDG, al hacer la superposicion de los puntos A en B y de la arista AK sobre BA: porque, si bien la arista AJ puede ajustarse á BG, la AT no caerá en BD por su diferente inclinacion: luego, tampoco el plano ATJ se ajustará al BDG.

II.º *Solo un plano* BDG *cumple con las tres condiciones de pasar por un punto* B *comun á dos planos fijos* AD *y* AG; *formar con ellos ángulos diedros determinados; y abiertos hácia una misma parte determinada.*

Por el teorema anterior nos consta que solamente los planos paralelos á BDG pueden formar dichos ángulos diedros dados: y como por un punto B no puede pasar mas plano paralelo á

BDG que el mismo, se sigue que la proposicion es cierta.

159. TEOREMA. I.° *En el plano* KL (fig. 114) *las proyecciones* A *y* J *de dos puntos* B *y* F *de una recta que está en el espacio, determinan la recta* AJ *proyeccion de* BF.

La proposicion es evidente; porque, el sistema de perpendiculares bajadas desde todos los puntos de *BF* forman el plano perpendicular *AF* (158, V.°) que se llama *proyectante*, cuya interseccion con *KL* es la recta *Af*.

Asi tambien la proyeccion de *BH* será *AC*; y el ángulo plano *CAJ proyeccion del ángulo plano HBF* del espacio, sean paralelos ó no los lados de este al plano *KL*. La *proyeccion de una curva* es la linea que en el plano de proyeccion resulta del conjunto de proyecciones de todos sus puntos; asi, la figura *M* (fig. 115) causa la proyeccion *m*. De aqui se deduce que: 1.° la proyeccion sobre un plano causada por cualquiera figura rectilinea del espacio, se halla proyectando los vértices de la figura, y ligando las proyecciones de estos con lineas rectas correspondientes: 2.° todas las lineas rectas ó curvas y figuras descritas en el plano *AF* (fig. 114) perpendicular á *KL* darán sobre éste proyecciones, que coincidiendo con la seccion recta *AJ* se diferenciarán solo en longitud; y la proyeccion de la recta perpendicular es un punto.

II. *Toda figura plana rectilinea y su proyeccion sobre plano paralelo al de aquella son idénticas.*

Si los planos *MN* y *KL* del triángulo *ABC* (fig. 116) y de su proyeccion *abc* son paralelos, concurren las circunstancias de ser *Bb* perpendicular á *AB* y *BC* como tambien á *ab* y *bc*, resultando en los cuadriláteros *Ab* y *Bc* paralelas é iguales *AB* y *ab*, *BC* y *bc* (143): ademas, hay las igualdades de ángulos planos *ABC*=*abc* por secciones paralelas del ángulo diedro *ABbc*: luego, los triángulos *ABC* y *abc* son idénticos. Como el polígono es divisible en triángulos, debe concluirse que se verifica la identidad enunciada.

La consideracion de los límites haria ver, que así mismo son idénticas una curva plana y su proyeccion sobre plano paralelo; mas en estos elementos solo podríamos ocuparnos de la demostracion con referencia al círculo, por ser la única curva de que se trata en ellos: y para verificarla por sí el estudiante creemos que basten las nociones que haya adquirido hasta aquí.

III.° *Son paralelas las proyecciones* ab *y* cd (fig. 115) *de dos rectas* AB *y* CD *del espacio, sean ó no paralelas, con tal que esten descritas en los planos paralelos* aB *y* cD *proyectantes.*

Esto se verifica por ser paralelas las intersecciones *ab* y *cd* del plano *KL* con los paralelos *aB* y *cD* (134).

IV.° *Una recta es mayor que su proyeccion sobre un plano no paralelo á dicha recta.*

Siendo cd proyeccion de la recta CD sobre el plano KL de la proyeccion, no paralelo á CD; y trazada en el plano proyectante la recta cD' paralela á CD serán iguales estas (50, 1.°); y el triángulo rectángulo cdD' manifiesta la desigualdad $cd < CD$.

El ángulo $D'cd$ que forma la recta CD ó una paralela á ella con su proyeccion, mide la inclinacion ú oblicuidad de la recta dicha respecto del plano KL en que está proyectada.

LECCION TERCERA.

Angulos poliedros.

160. Si mas de dos rectas AV, BV, CV.... (fig. 117 y 122) que no estan en un plano se encuentran en el punto V, el sistema de planos determinados por cada dos rectas contiguas forman un espacio angular cerrado por V, que se llama *ángulo poliedro* ó de muchas *caras* ó *ángulo sólido*. Las intersecciones de los planos ó caras son *aristas* del ángulo sólido, y al mismo tiempo de los ángulos diedros que forman sus caras de dos en dos: el punto V es *vértice* del ángulo sólido y de sus *ángulos planos* AVB, BVC, etc.

Son idénticos los ángulos poliedros cuando sobrepuestos debidamente quedan ajustados vértices y aristas, de consiguiente sus ángulos planos y diedros; debiendo tener para ello igual número de caras, y con la circunstancia esencial de hallarse estas ordenadas de igual modo en ambos. El ángulo sólido toma el nombre segun el número de sus caras ó ángulos planos: es *triedro, tetraedro, pentaedro, exaedro, eptaedro,* etc. el que tiene tres, cuatro cinco, seis, siete, etc. caras. El triedro es el mas simple, por ser necesarios tres planos á lo menos para cerrar un espacio que solo quede ilimitado por la parte opuesta al vértice.

161. TEOREMA. *En el ángulo triedro la suma de dos ángulos planos es mayor que el tercero.*

En el triedro $ABDV$ sea AVD (fig. 120) el mayor ángulo plano; y dirigida en él una recta VC de suerte que divida el ángulo $AVC=AVB$, córtense $VB=VC$, y ademas todas las caras por un plano que pase por los puntos B y C. Los triángulos AVB y AVC son idénticos (68), y en ellos $AB=AC$; y por $AB+BD>AC+CD$ será $BD>CD$. En los triángulos BVD y CVD que tienen $VB=VC$ y VD comun, serán los ángulos $BVD>CVD$ (74), y añadiendo partes iguales á cada miembro resulta

$$AVB+BVD>AVC+CVD=AVD.$$

162. TEOREMA. 1.º *Si los ángulos planos de un triedro son iguales respectivamente á los ángulos planos de otro triedro, los diedros del uno tambien serán iguales á los correspondientes del otro.*

En los triedros $ABCV$ y $A'B'C'V'$ (fig. 117 118 y 119) que tengan los ángulos planos respectivamente iguales, como $AVB=A'V'B'$, $BVC=B'V'C'$, $AVC=A'V'C'$, córtense las aristas $VB=V'B'$ con los planos ABC y $A'B'C'$ perpendiculares á ellas. Los triángulos AVB y $A'V'B'$ serán idénticos por tener un lado y dos ángulos respectivamente iguales: y por la misma causa serán idénticos los triángulos BVC y $B'V'C'$. De modo que los triángulos AVC y $A'V'C'$ serán idénticos por tener iguales ángulos en V y los lados $AV=A'V'$, $VC=V'C'$; resultando $AC=A'C'$, y los triángulos ABC y $A'B'C'$ idénticos por tener respectivamente iguales sus tres lados. Por último, á causa de los ángulos planos $ABC=A'B'C'$, ha de verificarse precisamente la igualdad de diedros

$$ABVC=A'B'V'C' \quad (151).$$

Del mismo modo, cortando nuevamente los triedros por planos perpendiculares á otras dos aristas correspondientes, se demuestra que los respectivos diedros son iguales: y por tanto queda comprobada la proposicion.

II.° *Si dos triedros* ABCV *y* A'B'C'V' (figura 117 y 118) *tienen todos sus ángulos planos respectivamente iguales, y haciendo coincidir uno de ellos del primero sobre su igual del segundo, cae otro de este hácia su correspondiente de aquel, serán idénticos los triedros.*

En efecto, por ser iguales los ángulos planos AVC y $A'V'C'$, coincidiendo estos caerán las aristas VC sobre $V'C'$ y VA sobre $V'A'$. Debiendo los diedros formados sobre estas aristas ser iguales por lo demostrado en el teorema anterior, y por suposicion inclinadas hácia una parte misma las caras AVB y $A'V'B'$, coincidirán estas; y por la igualdad de los ángulos planos $AVB=A'V'B'$, tambien la arista VB caerá sobre $V'B'$. Por último, á causa de coincidir las aristas VB sobre $V'B'$ y VC sobre $V'C'$, se ajustará la cara BVC sobre $B'V'C'$. Luego, los dos triedros se ajustan en todas sus partes, lo que constituye la identidad.

III.° *Pueden ser iguales entre si todas las partes correspondientes de los ángulos poliedros una á una, y no por eso coincidir los todos en la superposicion* (fig. 117 y 1 119).

Esto se verifica siempre que sobrepuestos dos ángulos planos iguales, no se inclina el inmediato hácia un mismo lado en ambos, como sucede en $ABCV$ y $A'B'C'V'$; pues aplicadas de suerte que coincidan los ángulos iguales BVC y

$B' V' C'$, no se puede efectuar la superposicion de lo restante, porque las demas caras de la una se van alejando de sus homólogas en la otra, sin embargo de ser iguales por lo demostrado en el teorema I.° los correspondientes diedros. Esta igualdad de todas las partes correspondientes que no se puede comprobar por coincidencia de superposicion simultánea de los todos, se llama *simetria*, y ángulos poliedros *simétricos* aquellos en que se verifiquen estas condiciones. Por esto es circunstancia indispensable para la identidad de los ángulos sólidos, la de estar igualmente ordenados los ángulos planos en ambos (160).

Se dice que estan *simétricamente puestos respecto de un plano* dos ángulos poliedros, cuando dicho plano es perpendicular y divide en dos partes iguales á la recta $V V'$ que liga los vértices, y á todas las demas rectas como $B B'$ que ligan los puntos de un ángulo sólido á sus correspondientes del otro.

165. TEOREMA. I.° *En un ángulo triedro son iguales los diedros opuestos á los ángulos planos iguales.*

Supóngase en el triedro $A B C V$ (fig. 121) iguales los ángulos planos $A V B$ y $B V C$, y divídase el tercero $A V C$ en dos iguales $A V H$ y $H V C$ con el plano $H V B$ que pasa por la arista $V B$; de que resultan los tres ángulos planos del triedro $A H B V$ iguales respectivamente á los de

$HBCV$, y por ello (162, I.°) iguales entre sí los diedros de las aristas VA y VC opuestos á los ángulos planos que supusimos iguales.

II.° Recíprocamente: *en un triedro son iguales los ángulos planos opuestos á driedros iguales.*

Si en el triedro $ABCV$ siendo iguales los diedros de las aristas VA y VC fuese el ángulo $BVC>AVB$, fórmese el ángulo $A'VB=BVC$ en el plano que pasando por la arista VB venga á la tercera cara del triedro propuesto. Dividiendo el triedro $A'BCV$ con otro plano que pasando por VB partiese el ángulo plano $A'VC$ en dos iguales, tendríamos descompuesto dicho triedro en dos simétricos, y resultarian iguales los diedros de las aristas VA' y VC; pero como por el supuesto son iguales los diedros de las aristas VA y VC, se sigue que serian iguales los diedros de las aristas VA' y VA; lo cual es un absurdo evidente; porque entonces, sobreponiendo el diedro de la arista VA' al del arista VA desde el plano comun AVC, se ajustaria el plano $A'VB$ con AVB, y formarian ambos con el BVC un mismo diedro en la arista VB; lo que no puede ser (158, II.°).

III.° *En el triedro de dos ángulos planos iguales, el plano que pasando por el diedro intermedio divide al ángulo plano opuesto en dos iguales, es perpendicular á la cara de este ángulo y divide á dicho diedro opuesto en dos iguales.*

Para convencerse de ello obsérvese que en el triedro $ABCV$ de dos ángulos planos iguales, el plano HVB que pasando por la arista VB divide al tercer ángulo plano AVC en dos iguales, divide al triedro $ABCV$ en dos triedros cuyos diedros de la arista comun VH son iguales (162), como tambien entre sí los de la arista comun VB.

IV.° *En un triedro al mayor ángulo diedro se opone el mayor ángulo plano.*

Dado el triedro $ABDV$ (fig. 120) que tenga el diedro de la arista VB mayor que el de la arista VA, fórmese con el plano BVC que pasa por la arista VB y con el AVB el diedro $AVBC$ igual al de la arista VA, á que se sigue por lo demostrado en el II.° teorema la igualdad de ángulos planos $AVC=BVC$; y tendremos en los dos triedros que resultan (161) las relaciones de ángulos planos

$$BVC+CVD>BVD,$$

ó bien por sustitucion,

$$AVC+CVD=AVC>BVD.$$

V.° Recíprocamente: *en el triedro al mayor ángulo plano se opone el mayor diedro.*

Porque, siendo en el triedro $ABDV$ el ángulo plano AVD mayor que BVD; si fuesen iguales los diedros de las aristas VB y VA, resulta por lo demostrado en el teorema II.° que serian iguales los ángulos planos AVD y BVD contra el dato propuesto; y si fuese el diedro de la arista VA mayor que el de la arista VB, resultaria por la demostracion del teorema IV.° ser el ángulo plano BVD mayor que AVD, lo que tambien es contrario al dato.

164. TEOREMA. I.° *La suma de ángulos planos de todo ángulo sólido vale menos que la de cuatro rectos.*

Con cualquiera número de planos fórmese el ángulo poliedro $ABCDFV$... (fig. 122); y cortando todos con otro plano, la seccion $ABCDF$... limitará sus caras indefinidas, reduciéndolas á triángulos ABV, $BC\hat{V}$, etc., los cuales de dos en dos con un ángulo del polígono $ABCDF$ que resulta de la seccion forman triedros, cuyos vértices respectivos estan en A, B, C,.... En los ángulos planos de estos se verifica (161),
$ABC<ABV+CBV$, $BCD<BCV+DCV$, etc., resultando que la suma de ángulos del polígono es menor que la de ángulos de las bases de los triángulos. Siendo n el número de lados del polígono y R el ángulo recto, es $2nR$ el valor de todos los ángulos que hay en los triángulos del vértice comun V, asi como $2R\,(n-2)$ el valor de los ángulos del polígono (94); y la conclusion precedente está espresada en $2nR-V>2R(n-2)$, que se reduce á $V<4R$, supuesta V la suma de ángulos planos del vértice del poliedro.

II.° *No se pueden formar con los ángulos de un triángulo regular sino ángulos sólidos de 3, 4 y 5 caras.*

Segun el teorema precedente, habiendo de formar ángulos poliedros de ángulos planos iguales, hay que atender al número de estos y al valor de uno de ellos. Cada ángulo del triangulo equilátero vale $\frac{2}{3}R$ segun el artículo (94); y el ángulo sólido de 3, 4, 5.... caras que haya de tener cada ángulo del vértice igual al del triángulo equilátero, ha de satisfacer al principio que se acaba de establecer: lo cual solo se verifica en las tres primeras inecuaciones que siguen;

$$3\times\frac{2}{3}R<4R;\ 4\times\frac{2}{3}R<4R;\ 5\times\frac{2}{3}R<4R;$$

$$6\times\frac{2}{3}R=4R;\ 7\times\frac{2}{3}R>4R;$$

por consiguiente mayores que $4R$ las sumas de mas ángulos planos iguales al del triángulo equilátero.

III.° *Con los ángulos del cuadrado solo se puede formar el ángulo sólido de tres caras.*

Porque, el valor del ángulo del cuadrado es R; y $3\times R<4R$; $4\times R=4R$; $5\times R>4R$: y con mas esceso mayores que $4R$ las sumas de mayor número de ángulos del cuadrado.

IV.° *No se puede formar con ángulos del pentágono regular sino el ángulo sólido de tres caras.*

El ángulo del pentágono regular vale $\frac{6}{5}R$; por consiguiente

$$3\times\frac{6}{5}R<4R;\quad 4\times\frac{6}{5}R>4R.$$

V.° *Con ángulos del exágono regular no puede formarse ángulo sólido; y lo mismo sucede con los ángulos de polígonos que tengan mas lados.*

En efecto, el ángulo del exágono es $\frac{4}{3}R$, y resulta

$$3\times\frac{4}{3}R=4R;\quad 4\times\frac{4}{3}R>4R:$$

de suerte que ni aun se puede formar el triedro que es el ángulo sólido de menos caras. El ángulo del eptágono es mayor, y por ello tampoco se puede formar con él uno sólido: y con mas razon se puede asegurar lo mismo de los ángulos correspondientes á polígonos regulares de mas lados. De suerte que en todo son cinco los ángulos poliedros que se pueden formar con ángulos de polígonos regulares: con el del triángulo se forman los de tres, de cuatro y de cinco caras; con el del cuadrado uno de tres caras; y con el del pentágono otro tambien de tres caras.

CAPÍTULO SEGUNDO.

POLIEDROS Y CUERPOS REDONDOS.

LECCION PRIMERA.

Poliedros.

165. El espacio cerrado por planos es un *poliedro* (fig. 120, 122 y 125), y toma el nombre por el número de caras poligonales que tiene: *tetraedro*, *exaedro*, *octaedro*, *dodecaedro*, *icosaedro*, etc. son cuerpos terminados por cuatro, seis, ocho, doce, veinte, etc. caras. De suerte que en ellos hay ángulos poliedros, diedros y planos; siendo aristas las intersecciones de cada plano con sus adyacentes, y *diagonal* del poliedro la recta que liga los vértices de dos ángulos sólidos no adyacentes. Solo trataremos aquí de los poliedros convexos ó compuestos de ángulos poliedros salientes; el caracter de una superficie convexa

consiste como el de la línea (10), en que una recta de cualquiera suerte dirigida solo puede tener dos puntos comunes con ella. Llámase *poliedro regular* aquel cuyas caras son polígonos regulares idénticos y los ángulos sólidos idénticos tambien, lo cual exige que todas las aristas y ángulos diedros y planos sean iguales. El número de poliedros regulares no puede pasar de cinco, supuesto que solo se pueden formar otros tantos ángulos sólidos con ángulos planos iguales. En efecto, existen los cinco cuerpos poliedros regulares posibles; el tetraedro, el octaedro y el icosaedro que están formados por triángulos; el exaedro ó cubo formado de cuadrados; y el dodecaedro de pentágonos. El que quiera enterarse del modo con que se construyen con solo el dato de una cara ó una arista, lea el apéndice á los libros VI y VII de la Geometría de Legendre.

166. Entre los poliedros merecen particular atencion la *pirámide* y el *prisma*: por lo cual vamos á ocuparnos especialmente en las definiciones relativas á estas dos clases de figuras.

Cortando con un plano todas las caras de un ángulo *V* sólido; ó lo que es igual, si desde un punto V (fig. 122) del espacio se dirijen rectas *VA*, *VB*.., á los vértices de un polígono *A B C*.., resulta la pirámide, figura que necesariamente ha de constar de cuatro caras á lo menos, una que es *base* poligonal de cualquiera número de lados,

::

y las demas triangulares: de suerte que siendo base de cada uno de estos un lado del polígono, concurren los ángulos opuestos á dichas bases en un vértice comun V que se llama *cúspide*. La figura de la base dá á la pirámide el nombre de *triangular*, *cuadrada*, *pentagonal*, etc., segun aquella sea triángulo, cuadrilátero, pentágono, etc.; la pirámide triangular ó tetraedro es la mas simple de las pirámides y de toda clase de poliedros. La perpendicular VO (fig. 123 y 124) bajada desde el cúspide á la base ó prolongacion de ella es *altura de la pirámide*. Se puede considerar esta figura formada por el movimiento de una recta, que gira sobre el punto fijo V tocando siempre dicha recta al perímetro de la base. En este sentido se llama *generatriz* la recta que se mueve, y *directriz* la línea terminal, de la base en que va resbalando la generatriz. Aunque á la pirámide solo puede convenirla definicion de poliedro regular, cuando sea tetraedro, sin embargo se llama *pirámide regular* cuando la base es polígono regular, y ademas cae en el centro de esta la perpendicular bajada del cúspide. Segun la definicion de pirámide regular son iguales las oblícuas VA, VB, VC, VD.... (fig. 123) á que llamaremos aristas laterales (139, II.°), y por esto necesariamente las caras laterales de la pirámide regular son triángulos isósceles idénticos.

El prisma es un poliedro que teniendo dos caras poligonales idénticas y paralelas, está terminado por paralelógramos de lado á lado correspondientes de los polígonos, que son *bases* del prisma y le dan su nombre de *triangular, pentagonal*, etc. Por naturaleza cada ángulo sólido A (fig. 125 y 126) del prisma consta necesariamente de tres caras. Se puede considerar engendrado el prisma por una recta *generatriz* que se mueve paralelamente á sí misma resbalando sobre la *directriz* ó contorno de la base; por esto llamaremos generatriz del prisma á cualquiera de sus *arista laterales* ó desde una á otra base, y directriz la línea terminal de la base sobre que va resbalando aquella. Si la generatriz es perpendicular á las bases ó polígonos, se dice *prisma recto*; si es oblicua, *prisma oblicuo*; y en ambos casos la parte de perpendicular á las bases comprendida entre ellas es *altura* del prisma. Se dice *prisma regular* cuando es recto y tiene por bases polígonos regulares. Si las bases son tambien paralelógramos, el prisma que es un exaedro entonces, se llama *paralelepipedo*; distinguiéndose con el nombre de *rectangular* cuando son rectos los ángulos de la base, y perpendicular á ella la generatriz. Finalmente, el paralelepipedo rectangular que tiene iguales todas las aristas se llama *cubo*.

167. TEOREMA. *En el prisma toda seccion paralela á la base es un polígono idéntico á ella* (fig. 125).

Si el prisma de la base *A B C D F* está cortado con un plano paralelo á ella, resulta la seccion poligonal *G H L J K* del mismo número de lados que la base, por tener cada uno de estos polígonos tantos lados como caras laterales el prisma. En el cuadrilátero *A K* son iguales las paralelas *A G* y *F K* (145), y las intersecciones *A F* y *G K* paralelas é iguales (145), y lo mismo se verifica en los demas planos laterales *F J*, *D L*,.... etc. del prisma. Por otra parte, los ángulos planos *A F D* y *G K J* son iguales como secciones paralelas del diedro *G K F D*, y lo mismo sucede en los demas ángulos planos correspondientes. Luego, los polígonos *A B C D F* y *G H L J K* son idénticos.

168. TEOREMA. I.° *En el paralelepípedo son paralelas é idénticas de dos en dos las caras opuestas.*

Por la definicion tiene el paralelepípedo iguales y paralelas las aristas *A F* y *B G*, *A C* y *B D* (fig. 126); asimismo *A F* y *C J*, *A B* y *C D*; luego, tambien paralelas é idénticas de dos en dos las caras opuestas (147) y (151).

II.° Recíprocamente: *el exaedro cuyas caras son de dos en dos paralelas es un paralelepípedo.*

Suponiendo paralelas de dos en dos todas las caras de un exaedro *A H*, la cara *F A C J* cortará los planos *F G H J* y *A B D C* paralelos segun las rectas *F J* y *A C* paralelas, y tambien los planos *A F G B* y *C J H D* paralelos segun las rectas *F A* y JC paralelas (145): de modo que $AFJC$ es un paralelógramo. Por este órden se demuestra que todas las caras son paralelógramos.

Por otra parte, en los paralelógramos opuestos se verifica $AC=BD$, $AF=BG$, $CJ=DH$; los ángulos $FAC=GBD$, $ACJ=BDH$ por secciones paralelas de un ángulo diedro; de que resulta ser idénticos los paralelógramos AJ y BH. Por este método se hace ver igualmente que son idénticas de dos en dos las demas caras; aunque basta haber demostrado que lo son AJ y BH, para satisfacer á la definicion (166) considerándolas como bases.

169. TEOREMA. *Toda pirámide es divisible en tetraedros, y todo prisma en prismas triangulares.*

Dividiendo la base de la pirámide en triángulos con rectas dirigidas desde un vértice G (figuras 130 y 124) á todos los demas no adyacentes á él, ó desde un punto interior O á todos los vértices, cada recta de estas con otra y un lado ó con dos lados de la base en el primer caso, y cada dos con un lado de la base en el segundo, forman triángulos cuya suma es la base de la pirámide: ademas, cada recta con una arista lateral determina un plano que pasa por el cúspide. Cortando la pirámide segun dichos planos, resulta dividido en tetraedros; y por ello siempre es divisible en tetraedros la pirámide.

Como de uno y otro modo se pueden tambien dividir en triángulos respectivamente idénticos las bases del prisma, resulta éste divisible siempre en triangulares (fig. 125).

170. TEOREMA. *El poliedro es divisible siempre en pirámides y por consiguiente en tetraedros.*

Si desde un punto cualquiera interior del poliedro se dirigen rectas á los vértices, cada dos de ellas determinan un plano que pasará tambien por la arista que une los dos vértices á que se encaminan las rectas. Suponiendo secantes todos los planos, quedará partido el poliedro en pirámides: cada una tendrá por base una cara del poliedro y tantas caras laterales ella como lados el plano de la base; si ademas en caso necesario se divide cada pirámide segun el primer modo del artículo anterior, quedará partido en tetraedros el poliedro. Hay tambien otro modo de dividir el poliedro en tetraedros, que consiste en dirigir planos secantes desde un vértice á cada dos de los demas del poliedro; pues asi los vértices de cuatro en cuatro, incluso áquel de donde parten los planos, determinan todos los tetraedros que componen el poliedro.

LECCION SEGUNDA.

Poliedros idénticos y simétricos.

171. TEOREMA. *Dos poliedros convexos que tengan igual número de vértices, de modo que todos los de uno coincidan con sus correspondientes del otro, son idénticos.*

Son idénticos dos poliedros cuando puesto el uno en el lugar del otro ocupa aquel completamente el lugar de este, ó lo que es lo mismo, cuando todas las partes reunidas del uno coinciden con las correspondientes reunidas del otro: para lo cual habrán de tener igual número de ángulos poliedros idénticos. En esta inteligencia, vamos á demostrar que para la identidad basta que coincidan todos los vértices del uno, con los del otro.

Pues, no pudiendo pasar mas que una recta por dos puntos fijos, las que se dirijan desde cada vértice sobrepuesto á otros contiguos serán aristas comunes de los poliedros, las cuales coincidirán y serán iguales. Por otra parte, debiendo coincidir dos planos que tengan comunes tres puntos, se ajustarán las caras correspondientes puesto que estan limitadas con perímetros idénticos: luego, son idénticos los poliedros.

172. TEOREMA. *Son idénticos dos tetraedros*

cuando un ángulo sólido V *del uno está formado de triángulos respectivamente idénticos á los de un ángulo sólido* V′ *del otro, hallándose colocadas con el mismo órden dichas caras en ambos.*

Sobrepuestos los triedros V y V' (fig. 117 y 118) debidamente, coincidirán sus aristas y caras (162, II.°); y por ser los triángulos del uno idénticos á los del otro, caerán los puntos A sobre A', B sobre B', C sobre C' resultando coincidir todos los vértices respectivos, y por consiguiente los dos tetraedros idénticos.

173. TEOREMA. *Dos tetraedros que tienen idénticos dos triángulos correspondientes* AVB *y* A′V′B′, BVC *y* B′V′C′ *situados del mismo modo, é iguales los diedros formados por ellos, son idénticos.*

En efecto, verificándose la superposicion de los diedros iguales de modo que coincidan los vértices V y V', se ajustarán sus caras; y por la identidad de ellas una á una resultarán confundidos uno con otro los vértices correspondientes A y A', B y B', C y C'; por consiguiente un tetraedro con otro.

174. TEOREMA. *Son idénticos dos prismas cuando el uno tiene sus caras respectivamente idénticas á las del otro, y ordenadas de igual modo; y con las mismas condiciones tambien son idénticas dos pirámides.*

Si en los prismas AL y $A'L'$ (fig. 125) las bases y caras laterales del uno son respectivamente idénticas á las del otro, y estan situadas con el mismo órden en ambos; como todos los ángulos sólidos del prisma son triedros, bastan las condiciones dadas para que los de uno de dichos prismas sean idénticos respectivamente á los del otro (162, II.°), y por ello iguales los diedros correspondientes. De suerte, que si se procede á la superposicion empezando por ajustar en debida forma los ángulos triedros K y K', coincidirán los demas vértices en que terminan las caras de dichos triedros K y K'; esto es, los puntos A', F', D' sobre los correspondientes A, F, D, y los puntos $G'H'L'J'$ sobre G, H, L, J. Por las mismas razones de ser las caras del triedro G idénticas á las de G', las de H á las de H',.... y asi sucesivamente, concurriendo ademas la circunstancia de igualmente ordenadas, se ajustarán unas á otras en toda su estension: y por consiguiente tambien los demas vértices de las bases inferiores, como B y B', C y C', etc.

De un modo análogo se demuestra la identidad de dos pirámides, por ser tambien triedros todos los ángulos sólidos adyacentes á la base de una pirámide cualquiera.

175. TEOREMA. *Dos poliedros de igual número de vértices, y disponibles simétricamente respecto de un plano, son simétricos.*

Hay figuras tales, que á pesar de tener una sus partes constituyentes idénticas á las de otra, el órden con que estan dispuestas hace que no puedan coincidir los todos en la superposicion. En el ángulo triedro se hizo notar un ejemplo de esta propiedad; y nuestras propias manos, aunque cuerpos irregulares, ofrecen ocasion de meditar sobre esto; pues, aunque fueren idénticas las partes correspondientes de ellas, jamas será posible que una mano ocupe el lugar de la otra de cualquiera modo que se coloquen. Se llaman *simétricos* dos poliedros de igual número de caras tales que siendo idénticas las del uno á sus correspondientes del otro, é iguales los diedros uno á uno no coincidan los todos en la superposicion: si dos poliedros estan situados uno hácia cada lado del plano MN (fig. 127) de modo que cada vértice del uno y su correspondiente del otro disten igualmente del plano y se hallen en la misma perpendicular, se dice que estos cuerpos estan *simétricamente colocados.*

Establecidas estas definiciones, vamos á demostrar el teorema propuesto, refiriéndonos por la simplicidad á dos tetraedros; pues el método es aplicable igualmente á dos poliedros cualesquiera, por lo que sabemos (169) y (170): y para ello supónganse colocados simétricamente dos poliedros $ABCD$........ y $A'B'C'D'$......., siendo correspondientes los vértices de la misma letra. Dirigidas las perpendiculares al plano MN de proyeccion, resultarán cuadriláteros como $ABQP$ y $A'B'QP$ que tendrán un lado comun QP; y si sobreponemos los dos cuadriláteros nombrados empezando por el lado comun QP, coincidirán los puntos A y A', é igualmente B y B', resultando las aristas $AB=A'B'$. Del mismo modo se hará ver, con la superposicion de los demas cuadriláteros correspondientes, que C' caerá en C, D' en D, etc. y por consiguiente ser iguales las aristas y demas líneas homólogas entre sí. Por las igualdades $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $AC=A'C'$, los triángulos ABC y $A'B'C'$ son idénticos; y lo mismo se demuestra la identidad de los demas triángulos homólogos. Segun esto, tambien cada diedro de un tetraedro, es igual á su correspondiente del otro, por lo demostrado en el artículo (162, I.°); con lo cual está completamente manifestada la identidad de aristas, ángulos planos, y diedros de los dos tetraedros.

Si cada uno de los tetraedros es parte de un poliedro, se procede igualmente para la comprobacion relativa á los demas tetraedros parciales. Por tanto, son respectivamente idénticas todas las partes constituyentes de los poliedros simetricamente situados: mas, procediendo á la superposicion, se verá que ajustadas dos caras idénticas las demas de un poliedro estan invertidas en sus posiciones respecto de las del otro, es decir, que cierran las de éste la figura hácia la parte opuesta que las de aquel, siendo el término divisorio del espacio el plano de las caras ajustadas.

176. TEOREMA. *El plano que pasa por las diagonales correspondientes de las bases de un paralelepípedo, le divide en dos prismas triangulares simétricos.*

Cortando un paralelepipedo $A\,G$ (fig. 128) con un plano que pase por las aristas paralelas $A\,H$ y $C\,G$ opuestas, en cuyo caso tambien pasa por las diagonales que ligan á éstas (135), quedará el paralelepipedo partido en dos prismas triángulares. Por ser paralelas $H\,G$ y $A\,C$ (143), como tambien $A\,H$ y $G\,C$ paralelas é iguales, será $A\,G$ un paralelógramo comun á las dos partes del paralelepípedo. Son ademas paralelas é idénticas las bases $A\,C\,D$, $H\,G\,J$, $A\,B\,C$, $F\,H\,G$ por lo demostrado (95, II.°); y las demas caras de los prismas tambien de dos en dos idénticas respectivamente (168). Por último, á causa de la identidad de caras de un prisma respecto de las correspondientes del otro, serán iguales los diedros de los ángulos triedros uno á uno (162, I.°). Resultan todas las partes que constituyen uno de dichos prismas idénticas á las respectivas análogas que constituyen el otro; mas, al aplicar dos caras correspondientes para observar si coinciden los todos en la superposicion, se ve que no. Ajustando, por ejemplo, la cara $J\,G\,H$ á $B\,A\,C$, el prisma $A\,J\,G$ toma la posicion $B C C'$ á la parte opuesta del otro prisma parcial $B C H$.

Aunque basta para comprobar la simetría de los dos semiparalelepipedos la identidad de caras y de ángulos diedros del uno á los del otro, sin poderse verificar la superposicion de los todos segun la definicion del artículo precedente, sin embargo procederemos á ratificarlo haciendo ver que son disponibles simétricamente respecto del plano $B A C$ elegido á voluntad. Sean d y f las proyecciones de los vértices opuestos y correspondientes D y F sobre los planos de las bases; y dirijanse las rectas $G d$ y $J d$ por una parte, las $B f$ y $A f$ por otra. Los triángulos $D J d$ y $F B f$ son idénticos, por ser $J D = B F$, $D d = F f$, é iguales los ángulos comprendidos, de que resulta $J d = B f$. Por razones análogas es $G d = A f$: luego el triángulo $A B F$ idéntico á $G J d$; y al hacer la inversion del semiparalelepipedo $A J G$, caerá el punto d en f. Resulta, pues que la recta $F D'$ es perpendicular al plano de la base $B A C$; que éste la divide por medio en f; y que por ello el vértice del ángulo sólido $D' = D$ y el opuesto correspondiente F del paralelepipedo estan situados simétricamente. De igual modo se demuestra que los vértices de los demas ángulos sólidos correspondientes se hallan dispuestos simétricamente, porque lo están C' y H, A' y G.

177. TEOREMA. *Las diagonales del paralelepi-*

pedo se dividen mutuamente en dos partes iguales entre sí.

Habiendo hecho ver al principio del artículo precedente que la seccion plana AG (fig. 128) que pasa por los vértices opuestos A y C, H y G correspondientes de las bases del paralelepípedo es un paralelógramo; se deja conocer que sus diagonales AG y HC que serán tambien del paralelepípedo, se cortarán entre sí en dos partes iguales (95, III.°).

LECCION TERCERA.

Poliedros semejantes.

178. Son semejantes dos tetraedros cuando los ángulos triedros del uno son respectivamente idénticos á los del otro, y cada dos correspondientes estan formados de triángulos semejantes y ordenados de igual manera en ambos. Se deja conocer que á la identidad de triedros es inherente la igualdad de diedros correspondientes; y á la semejanza de caras la proporcionalidad entre todas las aristas, porque en los tetraedros $A'B'C'V'$ y $FGHV$ (fig. 129) semejantes hay por

una parte $\frac{A'B'}{FG}=\frac{B'C'}{GH}=\frac{A'C'}{FH}$, y por otra

$$\frac{A'B'}{FG}=\frac{A'V'}{FV}=\frac{B'V'}{GV}=\frac{C'V'}{HV}.$$

Dos poliedros se dice que son semejantes cuando dirigidas diagonales desde dos ángulos sólidos homólogos á todos los demas, quedan los cuerpos descompuestos en tetraedros semejantes y colocados en el mismo órden, por los planos que dichas diagonales determinan.

179. TEOREMA. *Son semejantes dos tetraedros, cuando tiene cada uno un ángulo triedro formado de triángulos semejantes á los respectivos del otro y ordenados igualmente;* ó lo que es igual, *cuando todas las aristas de un tetraedro son proporcionales á sus correspondientes del otro, y estan en ambos ordenadas en la misma disposicion.*

Cuando son semejantes y estan ordenados igualmente los triángulos de que estan formados dos ángulos triedros V' y V (fig. 129) de dos tetraedros $A'B'C'V'$ y $FGHV$, si se cortan en el segundo las aristas $VA=V'A'$, $VB=V'B'$, $VC=V'C'$ con un plano que pase por los tres puntos A, B, C, resultarán idénticos los tetraedros $ABCV$ y $A'B'C'V'$, que tienen idénticos y debidamente ordenados los triángulos que forman los ángulos triedros V y V' (172). Por ser los triángulos VAB, VBC, VAC respectivamente semejantes á VFG, VGH, VFH, resultan las igualdades $$\frac{AB}{FG}=\frac{BC}{GH}=\frac{AC}{FH};$$

por ello semejantes los triángulos ABC y FGH; y los triedros de los vertices A, B, C idénticos respectivamente á los triedros de los vértices F, G, H, por estar formados de ángulos planos correspondientes iguales dispuestos segun el mismo órden: luego, tambien son iguales los diedros homólogos de los tetraedros $FGHV$ y $ABCV$ á quien es idéntico $A'B'C'V'$. Vemos, pues, que existen todas las condiciones de semejanza en los tetraedros $A'B'C'V'$ y $FGHV$.

180. TEOREMA. *Son semejantes dos tetraedros* A'B'C'V' *y* FGHV *si tienen semejantes las caras* A'V'C' *á* FVH (fig. 129) *y* A'V'B' *á* FVG, *é iguales los diedros formados por ellas.*

Ajustando el vértice V' á V, y el diedro de la arista $V'A'$ al de la arista VF, coincidirán tambien las aristas $V'B'$ con VG, y $V'C'$ con VH, por las igualdades de ángulos planos $A'V'B'=FVG$ y $A'V'C'=FVH$, quedando asi marcados los puntos A, B, C, y el tetraedro $ABCV$ idéntico á $A'B'C'V'$. Luego, por las condiciones dadas en la proposicion serán las aristas de $ABCV$ proporcionales á las de $FGHV$

(78) y (80), y por el teorema anterior semejantes los tetraedros $A'B'C'V'$ y $FGHV$.

181. TEOREMA. *Son semejantes dos pirámides que tienen igual número de caras respectivamente semejantes y ordenadas de igual modo en ambas.*

En efecto, las bases poligonales semejantes de ellas (fig. 150) $A'B'C'D'$...... y $FGHJ$....... son divisibles en triángulos respectivamente semejantes, y resulta de esto que son idénticos los ángulos triedros en B' y G, en C' y H, en etc. (162); y por ello iguales los diedros correspondientes, ya de los tetraedros ya de las pirámides. Existen, pues, todas las cualidades de pirámides semejantes, conforme á la definicion de poliedros que gozan esta propiedad (178).

182. TEOREMA. *Cortada una pirámide* FGH... V *por un plano paralelo á la base* FGHJ..., *la seccion* ABCD...... *es semejante á la base.*

Cada ángulo diedro que forman de dos en dos las caras triangulares de la pirámide cortada por planos paralelos produce ángulos planos iguales (151); y así, los polígonos $ABCD$.... y $FGHJ$.... tienen sus ángulos respectivamente iguales. Ademas, en los triángulos VAB y VFG sucede $\frac{AB}{FG}=\frac{VB}{VG}$ (143) y (76); y en los triángulos VBC y VGH es $\frac{VB}{VG}=\frac{BC}{GH}$; de que resultan semejantes los triángulos ABC y FGH. De igual manera se demuestra la semejanza de los demas triángulos que componen los polígonos $FGHJ$.... base, y $ABCD$..... seccion, lo que constituye la semejanza de éstos.

183. TEOREMA. I.° *El plano secante paralelo á la base de una pirámide separa de la total otra semejante á ella* (fig. 130).

El plano secante $ABCD$......... paralelo á la base $FGHJ$....... divide á cada cara triangular de la pirámide separando otro triángulo semejante á dicha cara (143) y (77); de suerte que en las pirámides $VABCD$........ y $VFGHJ$....... son semejantes las caras homólogas y estan ordenadas en la misma disposicion: luego, son semejantes dichas pirámides.

II.° *Las aristas y cualesquiera líneas homólogas de dos pirámides semejantes son proporcionales.*

La semejanza de las pirámides $V'A'B'C'D'$.... y $VFGHJ$...... por la de sus caras, ó bien por la de los tetraedros en que se divide, produce las proporciones de las aristas

$$\frac{V'A'}{VF}=\frac{V'B'}{VG}=\frac{V'D'}{VJ}=\ldots\ldots=\frac{A'B'}{FG}=\ldots$$

De la proporcion $\frac{VA}{VF}=\frac{AB}{FG}$, que se verifica por el teorema que acabamos de demostrar y por el precedente, viene

$$\frac{VA}{VF-VA}=\frac{AB}{FG-AB}$$

que sirve para hallar la cuarta proporcional desconocida VA, cuando propuesto un *tronco de pirámide* como AH se quiera saber la situacion del cúspide V, por el cálculo geométrico (38), ó por el aritmético.

III.° *Los perímetros de dos secciones paralelas á la base en la pirámide son proporcionales á dos aristas cualesquiera correspondientes de las dos pirámides que resultan por las secciones.*

Siendo (fig. 130) $ABCDE......$ y $FGHJM.....$ dos secciones paralelas á la base de la pirámide, y por ello semejantes las pirámides parciales que interceptan, tenemos $\frac{FG}{AB}=\frac{GH}{BC}=\frac{HJ}{CD}=......$ segun el teorema precedente; y componiendo, resulta la razon de perímetros

$$\frac{FG+GH+HJ+.......}{AB+BC+CD+.......}=\frac{GH}{BC}=\frac{VH}{VC}.$$

IV.° *En la pirámide los perímetros de dos secciones paralelas á la base están en la razon de las distancias al cúspide.*

Dirijida desde el vértice comun V la recta VL perpendicular á los planos secantes, y suponiendo L y K los puntos en que encuentran á las secciones $FGHJ$..... y $ABCD$....., serán en el plano VLH semejantes los triángulos VLH y VKC, y por ello $\frac{VH}{VC}=\frac{VL}{VK}$. Sustituyendo en el resultado antecedente, se tiene

$$\frac{FG+GH+HJ+\ldots\ldots}{AB+BC+CD+\ldots\ldots}=\frac{VL}{VK}.$$

V.° *Las áreas de secciones paralelas á la base de la pirámide son como los cuadrados de sus distancias al cúspide.*

Suponiendo la misma construccion del teorema precedente, y por las equivalencias de razones $\frac{GH}{BC}=\frac{VH}{VC}=\frac{VL}{VK}$ segun el teorema II.°, será tambien $\frac{\overline{GH}^2}{\overline{BC}^2}=\frac{\overline{VL}^2}{\overline{VK}^2}$; y como á causa de la semejanza de las secciones cuyas áreas sean S y s, nos consta la proporcion $\frac{S}{s}=\frac{\overline{GH}^2}{\overline{BC}^2}$, se sigue

$$\frac{S}{s}=\frac{\overline{VL}^2}{\overline{VK}^2}.$$

184. TEOREMA. *En los poliedros semejantes son proporcionales las aristas y demas líneas homólogas, semejantes las caras homólogas, é idénticos los ángulos sólidos homólogos.*

En general, por la semejanza respectiva de los tetraedros que componen dos poliedros semejantes (fig. 130); comparando lados y líneas homólogas como se ha hecho en las pirámides, resulta una série de razones equivalentes entre ellas. Por la misma condicion de ser semejantes los tetraedros de una pirámide y los de su semejante, serán tambien semejantes las caras de una á las respectivas de la otra. Asimismo, los ángulos diedros de los tetraedros componen sumas iguales, es decir, diedros respectivamente iguales en los poliedros semejantes, y por ello serán idénticos respectivamente los ángulos sólidos de un poliedro y los de su semejante.

LECCION CUARTA.

Cuerpos redondos.

185. En la Geometría elemental solo tres fi-

guras redondas se toman en consideracion; el *cono*, el *cilindro* y la *esfera*.

El cono de que tratamos por ahora es la figura formada por una recta *A V* (fig. 151), que girando en un punto fijo *V* del espacio va durante su movimiento resbalándose sobre la circunferencia de un circulo *A D*. *Superficie cónica* es la que engendra la recta *A V* en toda ó en parte de su vuelta; y *volúmen cónico* es el espacio cerrado por la superficie que engendra la recta y por el círculo *A D*, *base del cono*. La perpendicular bajada al plano de la base desde el *cúspide V* es *altura* del cono. Si la perpendicular cae en el centro del círculo de la base, decimos que es *cono recto;* y si cae fuera de este punto, *cono oblicuo*. Siempre la recta dirigida desde el cúspide al centro de la base es *eje del cono*. Ultimamente, nótese que la recta generatriz por ser indefinida describe dos conos opuestos en el cúspide.

Aunque en estos elementos se trata solo de los conos con base circular, se da tambien este nombre generalmente á toda figura formada como ella, siendo base ó línea directriz cualquiera línea curva plana, sobre quien vaya resbalándose una recta generatriz que gira en un punto cualquiera del espacio, como se verá en otro tratado de la obra cuando podamos generalizar mas las consideraciones geométricas.

186. TEOREMA. I.° *Toda seccion cónica paralela á la base es un círculo.*

Imagínese que en toda la marcha de la recta generatriz $A\,V$ (fig. 131) siguen tambien girando el rádio $C\,A$ en el plano de la base, y otra recta indefinida $c\,a$ constantemente paralela á éste con el estremo c en el eje $V\,C$. En una de las posiciones del sistema hay $\frac{VC}{CA}=\frac{Vc}{ca}$; en otra $\frac{VC}{CD}=\frac{Vc}{cd}$; y asimismo en las innumerables posiciones: de suerte que se verifica la seguida de razones iguales $\frac{Vc}{ca}=\frac{Vc}{cd}=$.................. indefinidamente, y por ella siempre $c\,a$ tiene un mismo valor durante la vuelta: es decir que $c\,a$ engendra al rededor del centro c otro círculo paralelo al $A\,D$. Como al mismo tiempo la recta indefinida $c\,a$ engendra el plano secante, será dicho círculo interseccion del cono con el plano engendrado.

II.° *Cortando el cono con un plano* AVD (figura 131) *que pase por el cúspide* V *y un diámetro* AD *de la base, y cortándole ademas con otro plano* ad *paralelo á la base, son proporcionales* *las líneas de seccion homólogas de los dos conos*

que resultan como $\frac{VA}{VD}=\frac{Va}{Vd}=\frac{AD}{ad}=\frac{CD}{cd}$.

En el plano *A V D* son paralelas las rectas *A D* y *a d* por intersecciones de dicho plano con los paralelos *A D* y *a d* (145); y de resultas semejantes los triángulos *A V D* y *a V d*, y por ello cierta la proposicion. La parte *A D d a* del cuerpo es un *tronco de cono*, y la proporcion entre los rádios de las secciones y sus distancias al cúspide manifestará el lugar del cúspide de un tronco propuesto, á manera que el de un tronco de pirámide (183, II.°).

III.° *Los perímetros de dos secciones paralelas á la base en el cono son como las distancias* VL *y* VK *desde el cúspide á los planos secantes; y las áreas de estas secciones como los cuadrados de dichas distancias.*

Suponiendo la preparacion del teorema anterior, pero de suerte que el plano secante que pasa por el cúspide sea *F V L* perpendicular á la base se hallan en dicho plano las intersecciones *C L* y *c K*, paralelas por lo dicho antes; de resultas los triángulos *V C L* y *V c K* son semejantes, y

por ello $\frac{VC}{Vc}=\frac{VL}{VK}$: como la primera razon de éstas es la misma de los rádios *CD* y *cd*, facilmente se puede concluir el razonamiento de la prueba (110) (130).

187. El CILINDRO es la figura formada por una recta *BC* que se mueve paralelamente á sí misma, resbalándose sobre la circunferencia de un círculo *AB* (fig. 132), ó bien por el movimiento de dicha recta resbalándose sobre las circunferencias de dos círculos iguales *AB* y *DC* paralelos que son *bases* del cilindro. *Superficie cilíndrica* es la engendrada por la recta *BC*; y *volúmen cilíndrico* es el espacio cerrado por dicha superficie y las dos bases. La parte de recta perpendicular á los dos planos de las bases comprendida entre ellos es *altura* del cilindro; y si esta pasa por los centros de los círculos, el cilindro es *recto*; mas en otro caso, es *oblicuo*. Siempre la recta *FG* que liga los centros es *eje* del cilindro, y paralela é igual necesariamente á la generatriz *BC*, por ligar ambas los estremos de las paralelas é iguales *FB* y *GC* (30, II.°). En general se da este mismo nombre á las figuras engendradas por una recta que se mueve paralelamente á sí misma resbalándose por el contorno de una curva plana de cualquiera naturaleza; y asi, los cilindros de base circular forman una clase entre todas las figuras de tal nombre, y de ella trataremos solamente por ahora.

188. TEOREMA. *Cortado el cilindro con un*

plano paralelo á las bases, la seccion es otro círculo idéntico á ellas.

Imagínese que juntamente con la recta generatriz $B\,C$ (fig. 132) se mueven los radios $G\,C$ y $F\,B$ de las bases, y una recta $K\,L$ paralela á dichos radios con el punto K en el eje. Las rectas $F\,G$ y $B\,C$ son paralelas é iguales en toda la marcha, como tambien $F\,B$ y $G\,C$. Luego, $K\,L$ paralela siempre á estas é interceptada por las primeras, igual precisamente á las segundas (30, I.°), describe un circulo paralelo é idéntico á las bases en el plano que engendra paralelo á ellas, y que se puede considerar secante del cilindro.

189. La ESFERA es una figura formada por la semicircunferencia $A\,F\,B$ (fig. 133) moviéndose al rededor del diámetro $A\,B$, eje del movimiento, sobre sus dos estremos fijos A y B que se llaman *polos* de la esfera. Por la generacion de esta figura estan todos los puntos de su superficie equidistantes del centro C de la circunferencia generatriz: por esta razon es C *centro* de la esfera; la distancia constante $C\,H$ desde el centro á la superficie *radio* de la esfera; y el doble radio $A\,B$ *diámetro* de ella. Las perpendiculares, como $L\,H$, desde la circunferencia generatriz al diámetro describen en su movimiento *circulos paralelos*, como $G\,H$; se llama *circulo máximo* el que describe el rádio ó la perpendicular $C\,J$ que pasa por el centro; y desde esta hácia los polos A y B van

siendo sucesivamente menores las circunferencias en razon de las perpendiculares (88) y (110). Los polos A y B de la esfera lo son tambien del círculo máximo engendrado por el radio CJ perpendicular al diámetro AB, y de todos los demas círculos paralelos á dicho máximo.

El sector circular ACH del semicírculo generador describe en el movimiento de la generacion el *sector esférico* $GCHA$; cuya parte superficial esférica GHA se llama *casquete.*

190. TEOREMA. *Toda seccion hecha en la esfera con un plano es un círculo, cuyo centro se halla en el punto* p *proyeccion del centro esférico sobre el plano secante.*

Cortada la esfera por un plano MK (fig. 153) en cualquiera direccion, las rectas CM, CN, CK dirigidas desde el centro C á todos los puntos de la seccion lineal MNK...... de la superficie son iguales por radios de la esfera; luego, dicha seccion es un círculo (139) á cuyo centro p viene la perpendicular Cp bajada desde C. Si el plano secante pasa por el centro de la esfera, este mismo será centro de la seccion, la cual es entonces círculo máximo. Los polos de este y de todos los círculos paralelos á él son los estremos del diámetro perpendicular á los planos secantes.

De esto se deduce que los perímetros de dos secciones planas hechas en la esfera están en razon de sus respectivos radios, y que las áreas de dichas secciones están en razon de los cuadrados de sus radios.

La parte de esfera interceptada por cualquiera plano secante *MK* es un *segmento*: el menor es *MBKNp*, y el mayor la parte restante en que se halla el centro. Si el plano secante pasa por el centro de la esfera, los segmentos serán iguales, y se llaman semiesferas ó *emisferios*. La parte de superficie *GDFH* interceptada por dos planos secantes paralelos es *zona esférica*; de suerte que el casquete, ó bien la superficie esférica del segmento, es en realidad una zona final.

191. TEOREMA. *Cortada la esfera por un plano* GH (fig. 133) *cada punto de la circunferencia* GH *que resulta se halla á igual distancia esférica del polo* A *como tambien del otro polo* B *de dicha circunferencia.*

Por la definicion del polo, es *AB* diámetro perpendicular al plano *GH* y pasa por el centro *L* del círculo *GH*; á que sigue el (139, II.°) ser iguales las cuerdas *AG* y *AH* del círculo generador en todas las infinitas posiciones que toma durante su movimiento, y de resultas la igualdad de todos los arcos correspondientes. Restando de la circunferencia generatriz cada uno de estos, resultan iguales tambien entre sí los suplementarios, de los cuales son *GB* y *HB*.

Este principio enseña el modo de trazar en la superficie esférica una circunferencia *GH* y todas las paralelas á ella, cuyos polos comunes son *A* y *B*; pues, fijando el estremo de un hilo en cualquiera de estos, ó bien el de un compás curvo, ú otra linea del mismo intervalo, y haciendo resbalar á dicho hilo sobre la superficie, el otro estremo de él trazará la circunferencia. Si es dado el polo, y un punto *G* por donde ha de pasar la circunferencia, ésta queda determinada por dichas dos condiciones y la tácita aneja á ellas de ser el plano de la circunferencia perpendicular al eje *A B*: y si el circulo que se ha de trazar es el máximo *E J*, el intervalo del hilo es el cuadrante *A E*. Si el polo es desconocido, pero dados dos puntos por donde ha de pasar la circunferencia *E J* del circulo máximo, se hallan sus polos describiendo con un intervalo igual al cuadrante desde cada punto dado circulos máximos que se cortarán en *A* y *B*, polos del que ha de pasar por aquellos.

192. TEOREMA. *Dos circulos máximos* AB *y* DF (fig. 134) *de una esfera se cortan mutuamente en dos partes iguales.*

Considerando á dichos circulos máximos como intersecciones de la esfera por planos secantes, la comun seccion de los dos planos entre sí es una recta *G H* que pasa por el centro, y por los puntos *G* y *H* de la superficie esférica; de consiguiente *GH* es diámetro de los dos circulos máximos (189), que los divide en partes iguales (40, III.°).

La parte de volúmen comprendida entre dos semicírculos máximos es *ungula* ó *cuña* esférica; la parte de superficie comprendida entre dos semicircunferencias máximas se llama *huso* esférico; y la figura angular que forman en la superficie de la esfera dos circunferencias máximas se llama *ángulo esférico,* de quien es *vértice* el punto en que concurren; ángulo que se aprecia por el valor del diedro que forman los planos de dichas circunferencias.

193. TEOREMA. I.° *Si el radio* CA (fig. 133) *de la esfera es perpendicular al plano* QP *que pasa por el estremo* A *de dicho radio, el plano y todas las rectas descritibles en él desde* A *son tangentes á la esfera.*

Se llama *plano tangente* á la esfera el que solo tiene un punto comun con ella: y segun la condicion del teorema todas las rectas dirigidas desde *C* al plano serán mayores que *C A* (139): por consiguiente los puntos, como *T,* en que le encuentren estarán fuera de la esfera y solo *A* en ella: luego, el plano es tangente á la esfera y todas las rectas de dicho plano que pasan por el punto *A* de contacto son tangentes al mismo tiempo á ella.

II.° Recíprocamente: *el radio dirigido al punto de contacto es perpendicular al plano de tangente y á todas las rectas descritibles en él desde dicho punto.*

Dirigiendo desde el centro el rádio CA al punto A de contacto, y rectas como CT á otros puntos de dicho plano, es $CA<CT$. Siendo pues CA la mas corta distancia desde el centro al plano tangente, es perpendicular á él (159).

194. TEOREMA. I.º *Los ángulos planos del triedro formado por tres planos que concurren en el centro de la esfera, tienen por medidas respectivas los lados del triángulo esférico que trazan en la superficie de ella; y los ángulos diedros del triedro, ó sean los ángulos esféricos del triángulo, tienen asimismo por medidas los ángulos planos que forman de dos en dos las tangentes de los lados en el punto de concurso.*

Tres círculos máximos $AFBD$, AB y DF (figura 134) limitan una parte de superficie esférica como DGB que se llama *triángulo esférico*, de quien son *lados* los arcos de dichos círculos interceptados mutuamente. Si á los puntos B, D, G en que se cortan de dos en dos sus lados curvilíneos se dirigen desde el centro los radios CB, CD, CG, determinan de dos en dos tres planos secantes de la esfera en cuya superficie corta cada plano el respectivo lado del triángulo esférico; y formarán estos planos en C un ángulo triedro, cuyos ángulos planos tendrán por medida los arcos de círculos iguales DB, DG, GB, lados del triángulo.

En cuanto á la segunda parte del teorema, sabemos que la medida de un ángulo diedro es el ángulo plano que forman las intersecciones de sus caras con otro plano perpendicular á la arista (151): y como (193) la de cada diedro del triedro determinado por el triángulo esférico es perpendicular á las dos tangentes de los arcos en el punto de concurso con ella (193), de consiguiente al plano que fijan: se sigue que el ángulo formado por estas tangentes es medida del diedro, y por tanto (192) del ángulo esférico.

II.° *La suma de dos lados del triángulo esférico es mayor que el tercer lado.*

Por ser la suma de dos ángulos planos del triedro en *C* mayor que el tercero (161), se sigue que la suma de dos lados del triángulo esférico es mayor que el tercero.

III.° *La línea mas corta descritible en la superficie de la esfera desde un punto* A *á otro* G, *es el arco* AG *del círculo máximo que pasa por dichos puntos.*

Porque, si otra curva $AJLG$ es la que se trata de comparar al arco AG, tomando en ella diversos puntos J, L,.... y haciendo pasar por cada dos de éstos el correspondiente círculo máximo (191), será siempre

$AJ+JG>AG$; $JL+LG>JG$.........; luego,

$$AG<AJ+JG<AJ+JL+LG<\ldots\ldots$$

Por esta razon se llama *distancia esférica* entre dos puntos A y G el arco del círculo máximo AG que pasa por ellos, así como distancia rectilínea la cuerda de dicho arco.

IV.° *La suma de los lados del polígono esférico es menor que la circunferencia de un círculo máximo.*

Se llama *polígono esférico* la figura cerrada en la superficie de la esfera por arcos de círculos máximos, arcos que son *lados* del polígono (fig. 134). Considerando, pues, á éstos como secciones de la superficie esférica por planos que forman ángulo sólido en el centro de la esfera, cada ángulo plano del sólido está medido por su correspondiente lado del polígono esférico; y como la suma de dichos ángulos planos es menor que la de cuatro rectos (164, I.°), resulta comprobada la proposicion.

V.° *La suma de los ángulos de un triángulo esférico es menor que la de seis rectos.*

En el artículo (153) se demostró que cada ángulo diedro es menor que dos rectos; luego, la suma de los diedros de un triedro y por consiguiente de los tres ángulos de un triángulo esférico es menor que la suma de seis rectos. En el tratado siguiente hallaremos el límite inferior de esta suma: entretanto decimos que se llama *rectángulo* el triángulo esférico que tiene algun ángulo recto; *birectángulo* el que tiene dos rectos; y *trirectángulo* el que tiene rectos los tres, como

::

es fácil inferir puede suceder, atendiendo á que son rectos los tres diedros del triedro en el paralelepípedo rectangular.

195. TEOREMA. 1.º *Si la recta* VB (fig. 135) *es generatriz del cono* ABV, *del cilindro* VBD, *y del plano que pasa por otra recta* MB *tangente comun en* B *á los círculos de las bases que se toquen esteriormente; estas tres superficies son tangentes entre sí esteriormente en toda la recta* VB.

Se llaman en general *superficies tangentes* aquellas que sin cortarse tienen algun punto ó línea comun, como sucede en las del caso. En efecto, la recta *VB* se halla en todas tres superficies por ser generatriz de ellas; y ningun otro punto *H* de las redondas puede estar en el plano, ni á la parte opuesta del plano, porque, cortándolas con otro plano paralelo á las bases y que pase por *H*, la seccion *A'HB'*...... ó *B'HD'*...... de éstas es un círculo (186) y (188), mientras la del plano *MVB* es una recta *M'B'* paralela á *MB* (143), y que pasa por el punto *B'* de *VB*, comun á los dos círculos que resultan con los centros *C'*. Cortando ahora las superficies redondas con otro plano *VC'B'*, serán *CB* y *C'B'* paralelas (143); luego, los lados del ángulo *CBM* paralelos á los del ángulo *C'B'M'*: de suerte que al ajustarse estas paralelas segun la definicion (134), coincidirán los ángulos respectivos y de consiguiente serán iguales: y como *CBM* es recto, se sigue que tambien lo es $C'B'M'$. Tirando pues, el radio $C'H$ hasta el punto F de $M'B'$, será $C'B'<C'F$; lo cual dice, que el plano MB no tiene de comun con las superficies redondas ni éstas entre sí, mas puntos que todos los de la generatriz VB; y que todos los demas de cada una de ellas estan hácia una parte misma del espacio que separa el plano.

II.° *Cortando el cono ó el cilindro con un plano* E'EG *que pasa por la cuerda* EG (fig. 136) *de la base paralela á la tangente* MB, *y por las generatrices correspondientes á los estremos* E *y* G *de la cuerda, toda la superficie redonda comprendida entre dichas generatrices y el plano tangente* MVB *está fuera del plano secante y hácia un mismo lado de él.*

Para convencerse de ello considérese que, siendo H un punto de la parte superficial del cono ó cilindro comprendida entre dichas dos generatrices EE' y GG', si se cortan con otro plano que pasando por H sea paralelo á la base, resultará que la seccion de la superficie redonda es un círculo $E'HG'$, mientras la del plano $EE'G$ es una recta $E'G'$ cuerda del círculo; y por los radios $C'E'=C'G'$, será isósceles el triángulo $E'C'G'$: de suerte que tirando el radio $C'H$, que cortará á la cuerda en K entre sus estremos por el dato de la proposicion, venimos á concluir $C'H=C'E'>CK$ (19, III.°). Lo cual dice que el plano que pasa por dos generatrices del cono ó cilindro, no tiene con la superficie de estos cuerpos mas puntos comunes que los de dichas generatrices, y que toda la parte superficial redonda comprendida entre éstas se halla hácia una parte misma del espacio que divide el plano secante.

196. TEOREMA. *El cono, el cilindro y la esfera son límites respectivos de la pirámide, del prisma y del poliedro inscritos y circunscritos.*

Si en la base del cono se inscriben ó circunscriben polígonos regulares (fig. 137), la recta generatriz moviéndose sobre el cúspide en disposicion que siempre toque al perímetro del polígono, describirá pirámide inscrita ó circunscrita al cono. Si en las bases circulares del cilindro (fig. 138) se inscriben ó circunscriben polígonos de modo que sean paralelos sus lados correspondientes, la recta generatriz dirigida por ellos en su movimiento trazará prismas inscritos ó circunscritos al cilindro. Haciendo lo mismo en el semicírculo generador de la esfera (fig. 143), resultarán troncos de conos inscritos ó circunscritos á la esfera, despues de dar vuelta el semicírculo al rededor del diámetro. Es evidente que en cualquiera de los tres casos la figura circunscrita contiene á la redonda, y esta á la inscrita (190), (193) y (195): y como las diferencias de figuras proceden de las diferencias entre el círculo y el polígono, siendo en el límite iguales éstos (190), tambien entonces la figura redonda se ajustaria al poliedro. De modo que el cono es límite de la pirámide, el cilíndro del prisma, y la esfera del poliedro en general. Sin embargo de esta evidencia, en las siguientes lecciones se demostrará este principio relativamente á las superficies y á los volúmenes.

LECCION QUINTA.

Superficies de poliedros y cuerpos redondos.

197. TEOREMA. *La superficie* S *del poliedro regular de* n *número de caras tiene de valor* $S=n\times s$, *siendo* s *el de una de ellas.*

La superficie del poliedro es la suma de superficies ó áreas de todas sus caras; por lo que, llamándose aquella S y estas s, s', s'',......... resulta la espresion $S=s+s'+s''+$..............: por consiguiente, siendo $s=s'=s''=$.........., tendremos $S=n\times s$.

198. TEOREMA. I.° *La superficie lateral* S *del prisma recto es el producto del perímetro* p *de su base por la altura comun* a *de las caras laterales* (fig. 138).

Porque, siendo las áreas s, s',...... de los rectángulos que forman las caras laterales $s=b\times a$,

$s'=b'\times a, \ldots\ldots$ supuestos $b, b', \ldots\ldots$ lados de la base poligonal; resulta

$p=b+b'+\ldots\ldots$ y $(b+b'+b''+\ldots\ldots)\times a=p\times a=S$.

II.° *La superficie lateral del prisma oblicuo es el producto de la arista que une sus lados por el perimetro del poligono resultado de la seccion perpendicular á esta.*

Cortando el prisma oblicuo con el plano COD (fig. 139) perpendicular á las aristas que unen sus lados, cada paralelógramo lateral tiene de superficie el producto de la arista por la seccion perpendicular (147) á ellas, seccion que no puede ser idéntica á las bases (159): de modo que las superficies $LG=LA\times CO$, $GB=BF\times OD$, etc. componen la superficie completa lateral, cuyo valor á causa de la igualdad de aristas $LA=BF=\ldots\ldots\ldots$ será

$$S=BF\times(CO+OD+\ldots\ldots\ldots).$$

199. TEOREMA. *La superficie del cilindro es el producto de su lado por el contorno de la seccion perpendicular á este.*

Siendo S (fig. 138 y 139) la superficie del cilindro circunscrito á un prisma, Δ la diferencia entre las superficies del cilindro y prisma, como tambien p' el contorno de la seccion perpendicular al eje, δ la diferencia de este contorno al del polígono inscrito de la seccion, y a la arista lateral BF del prisma, ó *lado* del cilindro; las dos conclusiones precedentes están espresadas en $S-\Delta=(p'-\delta)\times a$. Al paso que se aumente el número de lados en el polígono inscrito, va decreciendo δ indefinidamente sin llegar jamás á la nulidad ni á cambiar de signo, y para que subsista la ecuacion es preciso que suceda lo mismo á Δ por ser S cantidad constante: de suerte que ha lugar al principio de los límites (Alg. elem. 66) $S=p'\times a$.

Se deja conocer que en el cilindro recto la seccion perpendicular al eje es idéntica á las bases (188), mientras en el cilindro oblicuo será precisamente una curva distinta de las bases circulares (159).

200. TEOREMA. *La superficie lateral de la pirámide regular es el semiproducto del perímetro de la base por la altura comun de sus caras laterales.*

En la pirámide regular (fig. 157), bajadas desde el cúspide perpendiculares á las bases de los triángulos, serán todas iguales, y cada una altura de su respectivo triángulo. Siendo pues h dicha altura comun VG, y p el perímetro $ABCD$..... de la base, la superficie S lateral de la pirámide

está espresada en $S=\frac{1}{2}p\times h$.

201. TEOREMA. *La superficie del cono recto es el semiproducto del lado por la circunferencia de la base; ó bien el producto del lado multipli-*

cado por la circunferencia de la seccion hecha en medio de su altura paralelamente á la base.

Circunscrito el polígono regular al círculo de la base de un cono recto, y formada desde el cúspide comun la pirámide regular circunscrita, sea S la superficie lateral del cono, Δ la diferencia entre dicha superficie y la de la pirámide circunscrita, p' la circunferencia de la base del cono, δ el esceso del perímetro del polígono circunscrito, sobre la circunferencia, y h la altura comun VG de los triángulos laterales ó *lado* del cono recto. Por lo demostrado será la superficie

de la pirámide circunscrita $S+\Delta=\frac{1}{2}h\ (p'+\delta)$:

y siguiendo el método del artículo (199) sabemos que las cantidades variables δ y Δ se van acercando á la nulidad conforme se aumenta el número de lados, sin llegar jamás á cero ni á negativas. Luego, en la espresion escrita se verifica

(Algebra elem. 66) $S=\frac{1}{2}p'\times h$.

La seccion hecha en medio de VG paralelamete á la base dará un círculo cuya circunferen-

cia será $\frac{1}{2}p'$ (186, II.° y III.°): luego, tambien

la superficie del cono recto es producto de su lado multiplicado por la circunferencia de la seccion hecha en medio de su altura paralelamente á la base.

La superficie de la pirámide oblicua es la suma de las caras triangulares; y su espresion consta de tantos términos como caras tiene la figura. El cono oblicuo es límite de la pirámide; mas, por falta de espresion regular para la superficie de la pirámide oblicua, sucede lo mismo para el cono oblicuo: y por tanto, su investigacion pertenece á otro tratado.

202. TEOREMA. *Hallar las figuras de las superficies cilíndricas, recta y oblicua y de la cónica recta, estendidas en un plano.*

Estendida en línea recta HH' (fig. 140) la directriz ó circunferencia de la base de un cilindro recto, la cual entra como una de las dimensiones en su valor superficial, y haciendo marchar á la generatriz hH paralelamente á sí misma sobre su perpendicular HH' desde un estremo á otro, resulta el rectángulo Hh', y la superficie de este será idéntica á la lateral del cilindro recto desarrollada en plano; pues los dos factores de ambas superficies conservan en cada punto de una y su correspondiente de la otra una misma relacion.

Estendida en línea recta mm' (fig. 141) el contorno de la seccion perpendicular á la generatriz hH del cilindro oblicuo, y haciendo marchar á hH paralelamente á sí misma sobre su perpendicular mm', de modo que en cada punto de esta recta se verifique tener aquella las partes correspondientes hm,........ kn,........ etc. superiores, y las mH,...... nK,...... inferiores; la figura Hh' es idéntica á la lateral del cilindro oblicuo desarrollada en plano, porque los factores de ambas superficies conservan en cada punto de una y su correspondiente de la otra una misma relacion.

Si con el radio VH (fig. 142) lado del cono recto se describe un arco circular, y se toma en él la parte HH' igual á la circunferencia de la base del cono, el sector VHH' será idéntico á la superficie lateral del cono desarrollada en plano; porque los factores de ambas superficies conservan una relacion misma en cada punto de una y su correspondiente de la otra.

203. TEOREMA. *La superficie lateral de un tronco de pirámide regular es el producto de la semisuma de los perímetros de sus bases por la altura de una de sus caras; ó el producto de esta altura por el perímetro de la seccion equidistante de sus bases y paralela á ellas.*

El tronco Ac de pirámide regular tiene la superficie lateral formada de trapecios idénticos; y siendo S (fig. 137) dicha superficie, s la de un trapecio, y n el número de estos, tendremos

$S=n\times s=n\times\frac{1}{2}(AB+ab)\times Gg$, supuesta Gg la altura comun de los trapecios. Cortando el tronco con un plano paralelo á las bases y que pase por el medio de las aristas, la seccion $a'\,b'$ de uno de los trapecios equivale (36) á la semisuma $\frac{1}{2}(AB+ab)$; por lo cual será $S=n\times a'\,b'\times Gg$.

204. TEOREMA. *La superficie lateral de un tronco cónico recto es el producto de su lado por la semisuma de circunferencias de las bases; ó el producto del lado por el perímetro de la seccion paralela á las bases y equidistante de ellas.*

La superficie lateral S del tronco de cono interceptado por una seccion ac paralela á la base, es la diferencia de las superficies del cono total y del semejante que separó el plano; de suerte que supuestas P y p las circunferencias de las bases de estos, el valor superficial del tronco será $S=\frac{1}{2}P\times VG-\frac{1}{2}p\times Vg$. Sustituyendo en esta espresion $Vg+gG$ por VG teniendo presente la equivalencia $P\times VG=p\times VG$ (186), y supuesto $gG=K$, resulta $S=K\times\frac{1}{2}(P+p)$.

Como en el límite el tronco de pirámide se ajustaria al del cono (201), entonces el perímetro p' de una seccion paralela á las bases del tronco cónico y equidistante de ellas, será igual á la semisuma de dichas bases ó $p'=\frac{1}{2}(P+p)$, y de aqui se viene á $S=p'\times K$.

La parte de corona circular $hHH'h'$ comprendida entre los arcos hh' y HH' (fig. 142) equivalentes á las bases mayor y menor del tronco cónico, y trazados con los rádios VH y Vh lados del cono total y del parcial que le falta, es la superficie de dicho tronco desarrollada, por verificarse entre los factores de ambas superficies una misma relacion en cada punto de una y su correspondiente de la otra.

205. TEOREMA. I.° *La superficie de la esfera es el producto de la circunferencia del círculo máximo por su diámetro, y cuadrupla de la de su círculo máximo.*

El simipolígono regular $DBA....F$ (fig. 143) circunscrito al semicírculo $dHL........f$, produce en su revolucion sobre el diámetro df tantas figuras cónicas rectas como lados tiene, y la superficie total será la suma de dichas parciales. El lado BD engendra el cono cuya superficie, suponiendo HK perpendicular bajada al diámetro desde H punto medio de BD, será $s=BD\times circ.HK$.

Dirigido el radio HC, perpendicular necesariamente á dicho lado (52), serán los triángulos HCK y BND semejantes por tener los ángulos N y H rectos como tambien HCD y DBN iguales á causa de ser sus lados perpendiculares respectivamente; y comparando lados homólogos se hallará

$$\frac{HC}{HK}=\frac{BD}{DN}.$$

Por otra parte las circunferencias descritas con los rádios HC y HK son como estos radios; y sustituyendo viene $\frac{\text{circ. } HC}{\text{circ. } HK}=\frac{BD}{DN}$, de donde

$$\text{circ. } HC\times DN=\text{circ. } HK\times BD.$$

Sustituyendo equivalentes en la espresion de la superficie cónica engendrada por BD, será

$$s=\text{circ. } HC\times DN.$$

La superficie del tronco cónico engendrado por BA será tambien $s'=\text{circ. } LM\times AB$, suponiendo LM perpendicular bajada al diámetro desde L punto medio de AB. Dirigido el radio LC, por la misma razon anterior los triángulos semejantes LCM y ABJ dan $\frac{\text{circ. } LC}{\text{circ. } LM}=\frac{AB}{BJ}$,

de donde $\text{circ. } LC\times BJ=\text{circ. } LM\times AB.$

Sustituyendo equivalentes, viene la espresion de la superficie producida por AB (fig. 145) que será

$$s'=\text{circ.}\,LC\times BJ.$$

Del mismo modo se demuestra que cada figura redonda originada por la revolucion de cada lado, tiene de superficie el producto de la circunferencia descrita con el radio de la esfera por la parte del diámetro igual á la altura del cuerpo engendrado. La suma de todas compone la superficie total, y suponiendo S la superficie de la esfera, Δ la diferencia entre ella y la suma de superficies cónicas circunscritas, r el radio del círculo inscrito, y δ la diferencia $Dd=Ff$ entre los radios del círculo y del polígono circunscrito, será

$$S+\Delta=s+s'+s''+\ldots=\text{circ.}\,r\times2(r+\delta)=2\pi r\times2(r+\delta);$$

espresion en donde sabemos que creciendo el número de lados decrece indefinidamente la diferencia δ (109, H.ª), á que se sigue la necesidad de suceder lo mismo á Δ para que subsista la ecuacion por ser S invariable. Constando, pues cada miembro de la ecuacion de dos partes, invariable una y decreciente otra hácia su límite, resulta (Alg. elem. 66) para la superficie de la esfera

$$S=\text{circ.}\,r\times2r=4\pi r^2.$$

La superficie del círculo máximo en la esfera del radio r es πr^2; la de la esfera $4\pi r^2$: luego, esta es cuadrupla de la del círculo máximo, como se propuso demostrar en la segunda parte de la proposicion.

La planificacion de la esfera se hace construyendo una figura plana cuadrupla de su círculo máximo: esto es, tendiendo en línea recta la circunferencia, y dando cuadrupla altura á la figura plana cuya área sea igual á la del círculo máximo (123). Claro es que por depender de π los valores superficiales del círculo y de la esfera, solo se obtendrán aproximadas sus espresiones numéricas (111). Lo mismo sucede al cilindro y al cono, puesto que la espresion de su superficie depende del valor de la circunferencia rectificada. La fórmula $S=4\pi r^2$, da

$$r=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi}}=0,282095..........\times\sqrt{S};$$

espresion propia para hallar el radio de una esfera cuya superficie S sea dada.

II.° *La superficie del casquete esférico y tambien de la zona es el producto de la circunferencia del círculo máximo por la parte de diámetro que corresponde á cada figura.*

La suma de algunas superficies s, s', s'',...... engendradas por la revolucion del semipolígono, suponiendo a la parte del diámetro desde el estremo d hasta la base inferior del último trozo cónico, y δ la diferencia Dd, será

$s+s'+s''+......=2\pi r\times(a+\delta)$, ó bien

$S+\Delta=2\pi r\times(a+\delta)$; siendo S la superficie esférica inscrita y Δ el esceso de la correspondiente á la figura circunscrita. Como δ y Δ decrecen indefinidamente hasta su límite, por el principio citado antes será la superficie del casquete esférico $S=2\pi r\times a$. Quitando al casquete otro, queda la zona esférica; cuya superficie, supuestas a y a' las alturas de los casquetes, será $2\pi r\times(a-a')$.

III.° *La superficie de la esfera equivale á la lateral del cilindro circunscrito á ella.*

El cilindro recto que tiene por bases círculos iguales al máximo de la esfera y por altura el diámetro (fig. 144), se dice circunscrito á la esfera cuando está construido sirviendo de eje dicho diámetro: y la espresion de la superficie lateral del

cilindro es $\quad\quad\quad \text{circ.}\,r\times 2r=4\pi r^2$;

la misma que se halló para la esfera. Añadiendo á la superficie lateral del cilindro sus dos bases, la total de esta figura vale seis círculos máximos,

y entonces la superficie de la esfera vale $\frac{2}{3}$ de la

total del cilindro circunscrito.

206. TEOREMA. I.° *La superficie* ABA'CA *del huso esférico es á la superficie de la esfera, como*

el ángulo que forman los lados del huso es á cuatro ángulos rectos.

Imagínese que el semicírculo máximo cuyo diámetro es $A\,A'$ va dando vuelta al rededor de este eje, y que habiendo empezado desde $A\,C\,A'$ ha llegado á $A\,B\,A'$ despues de haber formado el uso $A\,B\,A'\,C\,A$ cuyo ángulo A está medido por el que forman las tangentes $A\,G$ y $A\,G'$ de la curva en ambas posiciones. Es indudable que la semicircunferencia $A\,C\,A'$ y su tangente $A\,G$ se mueven juntamente, describiendo aquella el uso á medida que la tangente el ángulo, ambas por continuidad; en términos que cuando el ángulo sea $m \times G\,A\,G'$, resultará el uso $m \times A\,B\,A'\,C\,A$; hasta que llegando á dar vuelta completa la semicircunferencia generatriz, vendrá el valor angular descrito por la tangente $A\,G'$ á ser $m \times G\,A\,G' = 4R$, y el valor del huso á ser la superficie S de la esfera ó $m \times A\,B\,A'\,C\,A = S$. De las dos ecuaciones últimas viene la proporcion que se pedia

$$\frac{A\,B\,A'\,C\,A}{S} = \frac{G\,A\,G'}{4R}.$$

Tambien se deja conocer que cuando $A\,B\,A'$ haya recorrido el cuadrante $G\,G''$, será su plano perpendicular al de $A\,C\,A'$, y dividirán estos dos planos á la esfera en cuatro husos rectangulares. Si ademas se supone otro plano $D'\,D$ perpendicular á los dos y que pase por el centro, resultará la superficie esférica dividida en ocho triángulos esféricos iguales trirectángulos y con todos sus lados cuadrantes. Llamándose s la superficie de uno de ellos, y sustituyendo en el resultado anterior por S su equivalente $8s$, tendremos

$$\frac{ABA'CA}{2s}=\frac{GAG'}{R}.$$

Si se toma por unidad de superficie s y por unidad angular R, la igualdad queda reducida á $ABA'CA=2GAG'$, la cual en lenguage abreviado nos dice que la superficie del huso esférico es duplo del ángulo que forman los lados.

II.° *La superficie de un triángulo esférico* ABC (fig. 144) *es á la del triángulo trirectángulo ú octava parte de la esfera, como el esceso de la suma de los tres ángulos de aquel sobre dos rectos es á un ángulo recto.*

Prolónguense los tres lados hasta completar las circunferencias á que pertenecen, y resultará que cada ángulo del triángulo ABC es vértice de cuatro husos en que se divide la superficie esférica. Siendo vértices correspondientes A y A', B y B', C y C' (fig. 144). Fijando la atencion en el emisferio del triángulo, vemos que se compone del triángulo mismo á que llamaremos T, del triángulo CBA' á que llamaremos α, del $AC'B$ á que llamaremos γ, y del $BC'A'$ á que llamaremos β: esto es, el valor de la semiesfera

$$\frac{S}{2}=T+\alpha+\epsilon+\gamma\ (*).$$

Por otra parte, nombrándose A, B, C los ángulos del triángulo propuesto ABC cuya superficie es T, se verifican por el teorema anterior del lenguage abreviado las igualdades $\alpha=2A-T$, $\epsilon=2B-A'B'C'$, $\gamma=2C-T$. De todas estas partes solamente el triángulo $A'B'C'$ se halla en el emisferio opuesto, y goza de las cualidades de tener todos sus ángulos y lados respectivamente iguales á los del triángulo T, pero si se quisiere proceder á la superposicion se hallaria que no coinciden por ser simétricos. No obstante son iguales las superficies de ellos; pues porque segun la figura (* 144) los polos P y P' de los casquetes, á quienes podemos considerar inscritos los triángulos ABC y $A'B'C'$, distan igualmente de los vértices (191), y las distancias esféricas PA, PB, PC y $P'A', P'B', P'C'$, forman con los lados triángulos idénticos uno á uno, como PAB y $P'A'B'$, PAC y $P'A'C'$, PBC y $P'B'C'$, (163, I.°) y (194, I.°); que se ajustarán sobreponiéndolos de modo que coincidan los ángulos de los polos. De suerte que las sumas de unos y otros formarán la igualdad de áreas $ABC=A'B'C'$ cuando los polos caigan dentro de los triángulos; y cuando caen fuera como en el caso de la figura (* 144), resulta la misma igualdad restando de las sumas iguales $PAC+PBC$ y $P'A'C'+P'B'C'$ las partes iguales PAB de la una, y $P'A'B'$ de la otra: y en este concepto diremos que $A'B'C'$ es equivalente á T. Sustituyendo pues en la ecuacion ((*)) los valores de α, β, γ, tendremos

$\frac{S}{2}=2A+2B+2C-2T$. Como $\frac{S}{2}$ equivale á dos

husos rectángulos, será por el teorema anterior

abreviado $\frac{S}{2}=4R$; y sustituyendo en la ecuacion que antecede, se halla despues de las reducciones la espresion abreviada del teorema propuesto $T=A+B+C-2R$ (**).

No se debe olvidar que T se refiere á la unidad de superficie s que es la octava parte de la esférica total, y el segundo miembro á la unidad angular R, y que cada unidad de estas es divisor tácito del miembro correspondiente: sustituyendo pues, estas unidades suprimidas por la brevedad, tendremos en lenguage completo

$$\frac{T}{s}=\frac{A+B+C-2R}{R}.$$

La diferencia que hay entre la suma de los tres ángulos de un triángulo esférico y la suma de dos rectos se llama *esceso esférico*; y por lo que se acaba de demostrar vemos que las superficies de dos triángulos esféricos estan en razon de sus correspondientes escesos esféricos.

LECCION SESTA.

Volúmen de poliedros y cuerpos redondos.

207. El espacio comprendido en la figura de un cuerpo es su volúmen, como se dijo en el artículo (1); y aqui tratamos de valuar esta cantidad en las diversas figuras de cuerpos que se toman en consideracion en la Geometría elemental. Dos figuras idénticas tienen evidentemente iguales volúmenes; mas, pronto veremos que dos cuerpos de figuras no idénticas pueden tener volúmenes iguales; asi como se ha visto que dos figuras planas no idénticas pueden tener iguales áreas, y dos poliedros ó figuras redondas no idénticas tener iguales superficies: y aun tener igual valor superficial una figura plana y una redonda. De modo que la espresion de igualdad y el signo con que se indica pertenecen esclusivamente á dos cantidades ó valores iguales de una especie, sean líneas, superficies ó volúmenes; mientras la identidad se verifica solo cuando se ajustan las de una misma figura, conforme á lo enunciado en el artículo (5).

208. TEOREMA. *En un prisma la parte interceptada por dos planos paralelos es igual á la interceptada por otros dos paralelos entre sí, cuando la parte de arista comprendida por estos es igual á la comprendida por aquellos.*

La porcion prismática HB (fig. 145) comprendida entre una seccion paralela á la base, y otra no paralela á ella que atraviese todos los lados se llama *prisma truncado*. Si en el prisma HB truncado comprendido entre las secciones HQ y AB, se toman sobre la arista las partes $HF=AC$, y se hacen las secciones FK paralela á HQ, y CD paralela á AB, resultan los dos prismas ordinarios HK y CB. Sobreponiendo los prismas truncados HD y FB de modo que se ajusten sus bases idénticas HQ y FK, tambien se ajustarán los dos prismas truncados sobrepuestos, por ser $HCFA$ y $QD=KB$, resultando los volúmenes $HD=FB$, ó
$HK+FD=FD+CB$, y de aquí $HK=CB$.

209. TEOREMA. *Dos prismas simétricos son equivalentes en volúmen.*

Dado un prisma CB (fig. 146.) y prolongadas las aristas indefinidamente, córtense con un plano MN perpendicular á ellas: tómense en una desde el punto H en que está cortada por el plano MN las partes $C'H=CH$ y $A'H=AH$; y haciendo lo mismo con las demas aristas, los planos $A'B'$ y $C'D'$ que pasen por los puntos equidistantes de MN asi marcados, forman el prisma $C'B'$ simétrico á CB, en los cuales se verifican las igualdades de aristas $AC = A'C' = ...$ (175). Haciendo ademas las secciones FK y $F'K'$ paralelas al plano MN, y equidistantes de él con la circunstancia de intervalos $HF = HF' = AC = A'C'$ resultarán los prismas HK y HK', y por el teorema del artículo precedente se verificarán las igualdades de volúmenes $HK' = C'B'$ y $HK = CB$. Como son idénticos los prismas HK y HK', y por ello iguales sus volúmenes, tendremos por las igualdades anteriores la final $CB = C'B'$.

210. TEOREMA. *Dos paralelepípedos de bases idénticas é iguales alturas tienen volúmenes iguales.*

Si dos paralelepípedos BK y AH (fig. 147) de bases idénticas y de alturas iguales son considerados en el estado de superposicion, de manera que AC sea base comun y las alturas caigan hácia un mismo lado de AC, pueden ocurrir dos casos.

1.° Caer sus caras laterales BL y BF en un mismo plano AM, á que seguirá necesariamente el hallarse tambien sus opuestas CK y CG en un mismo plano DN. En este caso los triángulos ALF y BMJ son idénticos por tener sus lados uno á uno paralelos; é igualmente los paralelógramos laterales AK y BN, como tambien los

A G y *B H* entre sí (168): de modo que los prismas triangulares *A K* y *B N* tienen idénticas respectivamente todas sus caras, y se hallan estas ordenadas igualmente en ambos; luego son idénticos (174), y por ello equivalentes. Añadiendo á cada uno el cuerpo *A N* intermedio, resultan de igual volúmen los paralelepípedos *B K* y *A H*.

II.° Si los paralelepípedos *B K* y *A H* (fig. 148) de bases idénticas ajustadas en *A C* é iguales alturas, no tienen dos caras correspondientes laterales en un mismo plano, al menos lo estarán sus bases idénticas superiores *L N* y *F H* despues de ajustarse las inferiores, por el dato de iguales alturas. Prolongando dos lados de una de dichas bases superiores como *L M* y *K N*, é igualmente los *F G* y *J H* de la otra, resulta el paralelógramo *O Q* idéntico á ellas (30) y base superior del paralelepípedo *A P*, que teniendo la misma base y altura que los propuestos se halla respecto de cada uno de ellos en el caso 1.° Luego tambien en el presente que es el único posible ademas de aquel, tienen iguales volúmenes los paralelepípedos de la proposicion.

211. TEOREMA. *Es posible siempre construir un paralelepípedo rectangular* AH *igual á otro oblicuo* AQ *dado.*

Primeramente se elevan desde los vértices de la base *A C* (fig. 149) del prisma oblicuo perpendiculares al plano de ella; estas quedarán cortadas con el plano de la base superior del paralelepípedo oblicuo, y determinado asi uno oblicuángulo recto AM (166), que por el artículo precedente será igual al propuesto. Fórmese despues en el plano AC el rectángulo AF con las rectas AE y BF perpendiculares al lado AB de la base AC que será equivalente á AF (114); y elevada desde E y F que son los otros dos vértices del rectángulo las perpendiculares EK y FH al plano de la base, resultará determinado el paralelepípedo AH rectangular é igual á AM por tener la misma base AJ y altura AE. Tambien se puede construir un paralelepípedo de oblicuidad arbitraria equivalente á otro dado, siguiendo un método análogo al de la construccion del rectangular: operacion que omitimos por la suma facilidad con que la puede ejecutar el estudiante por sí.

212. TEOREMA. *Los volúmenes de dos paralelepípedos rectangulares que tienen idénticas bases, están en razon de las alturas.*

Si dos paralelepípedos AB y $A'B'$ rectangulares de bases idénticas como AC y $A'C'$ (fig. 150), se sobreponen de modo que se ajusten dichas bases, tambien las aristas coincidirán (139, IV.°); y es indudable que si aplicamos el de menor altura al otro sucesivamente desde una base á otra de éste cuantas veces quepa una altura en otra, el paralelepípedo de mayor altura contendrá al de menor tantas veces cuantas la arista $A'D'$ quepa en la AD, pues las bases coincidirán siempre (167). Si al cabo de n número de aplicaciones aquella contiene á ésta de modo que en la última caiga D' en D, será $AD=n\times A'D'$, y los paralelepípedos tendrán la relacion $AB=n\times A'B'$; luego, entre los paralelepípedos y sus alturas hay la relacion $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AD}{A'D'}$.

Si no cabiendo $A'D'$ en AD exactamente cierto número de veces, tienen sin embargo medida comun Aa, entonces será n número fraccionario, y se deduce la misma relacion que cuando n es entero. Si no tienen medida comun AD y $A'D'$, será n irracional: pero supuesto G un punto de la arista AD que marque la parte AG, tal que resulte $\frac{AG}{A'D'}$ racional, tambien lo será $\frac{AH}{A'B'}$, y tendrá lugar la ecuacion

$$\frac{AB}{A'B'}+\frac{DH}{A'B'}=\frac{AD}{A'D'}+\frac{DG}{A'D'}.$$

Como DH volúmen y DG línea son variables que indefinidamente se acercan á la igualdad, segun vaya siendo menor la comun medida de alturas que se busque, tambien aqui se cumple la ecuacion entre las constantes (Alg. elem. 66)

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AD}{A'D'}.$$

213. TEOREMA. *Los volúmenes de dos paralelepípedos rectangulares que tienen iguales alturas, están en razon de las áreas de las bases* (figuras 151 y 152).

Si los paralelepípedos rectangulares AM y am de las bases $ACBD$ $acbd$, cuyos volúmenes llamaremos P y p, tienen sus alturas AE y ag iguales; sobrepuesto el paralelepípedo p á P de modo que los ángulos sólidos d y D coincidan, será FL un paralelepípedo idéntico á p que resultará marcado en P, con sus tres aristas FD, BD, KD sobre las del ángulo sólido D, é iguales respectivamente á las del cuerpo p, y con la FH paralela á BD en la base. Prolongada FH hasta que concurra en O con el lado CB de la base de P, será FO perpendicular al lado AD paralelo á CB, y el paralelepípedo FM rectangular de la misma base FK que la ae del paralelepípedo am, al paso que dicho paralelepípedo FM tiene la base DM comun al paralelepípedo AM. Nombrándose Q el paralelepípedo FM, será conforme á lo demostrado en el artículo anterior

$\frac{P}{Q}=\frac{AD}{FD}$, $\frac{Q}{P}=\frac{FO}{FH}$; y de la multiplicacion resulta, reemplazando cantidades iguales, la relacion enunciada entre volúmenes y áreas de las bases $\frac{P}{p}=\frac{AD\times AC}{ad\times ac}$.

214. TEOREMA. *Los volúmenes de dos paralelepipedos rectangulares están en razon de los productos de las alturas por las áreas de las bases respectivas; esto, es, en razon del producto de tres números al producto de otros tres respectivamente proporcionales á las líneas que constituyen bases y alturas.*

Sean los paralelepipedos rectangulares $AM=P$ (fig. 152 y 153), y $am=p$, de bases DT y dc como tambien de alturas DK' y dg arbitrarias, los que vamos á comparar. Considerándolos en el estado de superposicion de modo que coincidan los ángulos triedros idénticos D y d, quedará en el volúmen P terminado el paralelepípedo FL idéntico á p, con sus aristas FD, GD, KD sobre las del triedro D, iguales respectivamente á las del cuerpo p: y prolongadas sus aristas paralelas á DK hasta la base superior de P, quedará trazado el paralelepípedo FL', á que llamaremos Q, de la base FG. Siendo DK' altura comun de P y Q, es $\frac{P}{Q}=\frac{DT}{FG}$: y por ser FG base comun de p y Q, es $\frac{Q}{p}=\frac{DK'}{DK}$: de la multiplicacion viene $\frac{P}{p}=\frac{DT\times DK'}{FG\times DK}=\frac{B\times A}{b\times a}$, siendo B y b las bases de los paralelepípedos propuestos que tengan las alturas A y a.

215. TEOREMA. *El volúmen del paralelepipedo rectangular tiene de valor el producto de base por altura.*

Supuestas L y K las dimensiones rectilíneas de la base B de un paralelepípedo, como tambien l y k las de la base b de otro cualquiera, la ecuacion en que está cifrado el teorema precedente será

$$\frac{P}{p}=\frac{A\times L\times K}{a\times l\times k}$$

que como sabemos puede cifrarse bajo la forma

$$\frac{P}{p}=\frac{A}{a}\times\frac{L}{l}\times\frac{K}{k}.$$

Si en esta espresion tomamos las cantidades a, l, k por unidades de las aristas correspondientes de P, y por unidad de volúmen el paralelepípedo p, resulta

$$P=A\times L\times K;$$

espresion abreviada de la precedente y que se debe considerar como una relacion entre números.

Cuando es $A=K=L$, resulta $P=A^3$ (fig. 152 y 153) el paralelepípedo es entonces cubo, y de aquí toma este nombre la tercera potencia de cualquiera cantidad. Tambien en el caso de $a=l=k$, es $p=a^3$ cubo: y tal es en efecto la unidad de volúmen que se emplea siempre á causa de su simplicidad.

216. TEOREMA. I.° *El volúmen del prisma es el producto de base por altura; y por ello, dos prismas de bases equivalentes y alturas iguales tienen el mismo volúmen.*

El teorema general que se acaba de establecer en cuanto al volúmen del paralelepípedo rectangular puede generalizarse á todos los oblicuángulos, y aun á los prismas, como se hace ver en el siguiente exámen de los casos.

1.° El paralelepípedo rectangular tiene igual volúmen que otro cualquiera oblicuángulo de su misma altura y equivalente base (211); y por ello es aplicable á todos los paralelepípedos el teorema (215).

2.° Por ser divisible todo paralelepípedo en dos prismas simétricos triangulares (176), y estos equivalentes en volúmen (209), conviene á las mitades el teorema de los todos entre sí. En fuerza de este encadenamiento de principios, y supuestas A, L, K las tres dimensiones de base y altura del paralelepípedo, el volúmen del prisma triangular es $\frac{A\times K\times L}{2}$, conforme al teorema del artículo precedente.

3.° El prisma es divisible en triangulares (169), y tiene de volúmen la suma de éstos. Si el prisma es regular con el número n de lados en la base; dividiéndole en prismas triangulares que tengan por arista comun el eje, serán idénticos todos los triangulares, y el volúmen del prisma regular tiene de valor $n\times\frac{A\times K\times L}{2}$, supuestas A, K, L las tres dimensiones comunes de los parciales.

Si es irregular el prisma, los triángulos de las bases serán desiguales; pero suponiendo K y L, acentuadas, las dimensiones respectivas de dichas bases parciales, y A la comun altura de los prismas triangulares, será la espresion del volúmen total del prisma

$$P=A\left(\frac{K'\times L'}{2}+\frac{K''\times L''}{2}+\text{etc.}\right).$$

II.° *El volúmen del cilindro es producto de base por altura; y por ello, tendrán el mismo volúmen dos cilindros de iguales alturas y bases equivalentes* (fig. 138 y 139).

Inscribiendo el prisma al cilindro, sea V el volúmen de éste, A su altura y B la superficie de la base, como tambien $V-\Delta$ el volúmen del prisma, y $B-\varepsilon$ la superficie de su base. La espresion del teorema precedente es
$V-\Delta=A\times(B-\varepsilon)$; y por ser ε cantidad que va

decreciendo indefinidamente sin jamás anularse ni cambiar de signo (123), exige que suceda lo mismo á Δ por ser V constante: de suerte que ha lugar (Alg. elem. 66) á la ecuacion $V = A \times B$.

217. TEOREMA. *Los volúmenes de dos prismas, y los de dos cilindros entre sí, son como las bases en casos de iguales alturas, y como las alturas en caso de iguales bases.*

Siendo P y p dos prismas ó cilindros con las bases B y b, y con las alturas A y a, será $\dfrac{P}{p} = \dfrac{A \times B}{a \times b}$: de donde, si es $B = b$, viene $\dfrac{P}{p} = \dfrac{A}{a}$;

y si $A = a$, viene $\dfrac{P}{p} = \dfrac{B}{b}$.

218. TEOREMA. *El tetraedro es límite de las sumas de prismas inscritos y circunscritos á él.*

Dividiendo el tetraedro $ABCV$ con planos paralelos á la base ABC y equidistantes entre sí, levántense desde los puntos A, A'........ y B, B'....... (fig. 154) en que cortan á las aristas los planos, rectas paralelas á la otra arista lateral CV hasta encontrar á dichos planos en los puntos D, D'...... G, G'......, y quedará trazado un prisma esterior ó circunscrito en cada tronco del tetraedro, como DC en el tronco $ABCFA'B'$. Bajadas desde los mismos puntos de seccion paralelas á la arista VC, quedarán trazados prismas interiores correspondientes, como $A'C$ inscrito al mismo tronco $ABCFA'B'$. Cada prisma interior será idéntico al esterior que tiene encima; y por tanto, la suma de diferencias entre los esteriores é interiores, será el prisma DC esterior: ademas, cada diferencia como DE está dividida por el plano ABV en dos partes, y la suma de las de cada lado del plano es la diferencia por esceso ó por defecto entre el tetraedro y la suma de prismas esteriores ó interiores, entre quienes el tetraedro está encerrado siempre. Al paso que se aumenta el número de prismas, decrece la altura de cada uno y por consiguiente su volúmen, acercándose al mismo tiempo á igualarse con el tetraedro las sumas de esteriores é interiores indefinidamente, sin que jamás pueda ser la primera menor ni la segunda mayor que él; condiciones precisas y suficientes para ser el tetraedro límite de una y otra suma.

219. TEOREMA. *Dos tetraedros de bases equivalentes y alturas iguales son iguales en volúmen.*

Sean dos tetraedros T y T' de alturas iguales y bases equivalentes, como tambien Δ y Δ' las diferencias entre las sumas de prismas esteriores y los tetraedros. Situados los tetraedros con sus bases en un mismo plano, y cortados por planos paralelos á la base y equidistantes entre sí, resultarán secciones equivalentes que sean como las bases, por la razon comun de los cuadrados

::

de las distancias al cúspide (185); habrá igual número de prismas en ambos, y cada uno de los de T tendrá igual volúmen que su correspondiente de T' (216); y por tanto serán iguales las sumas, ó $T+\Delta=T'+\Delta'$. Como T y T' son constantes mientras Δ y Δ' se acercan á cero indefinidamente sin llegar jamás á él ni pasar á negativas, ha lugar á $T=T'$.

220. TEOREMA. *El tetraedro es tercera parte del prisma que tenga la misma base y la misma altura que él.*

Sobre la base ABC del tetraedro $ABCV$ fórmese el prisma ABD (fig. 155) triangular que tenga la misma altura que él: y restando de este prisma el tetraedro, quedará la pirámide cuadrangular $AFDCV$ con el cúspide en V. El plano FVC divide á su base paralelógrama AD en dos triángulos idénticos, y á la pirámide en dos tetraedros que teniendo por bases dichos triángulos y comun altura son iguales en volúmen. Por otra parte, el tetraedro $ABCV$, considerando ser cúspide el punto A ó el C, es igual á cada uno de los otros dos por tener igual base y altura que ellos; luego, aunque se considere ABC base del tetraedro $ABCV$ y del prisma ABD de iguales alturas, será este triplo de aquel.

221. TEOREMA. *El volúmen del tetraedro es tercera parte del producto de base por altura.*

Por ser el volúmen del prisma P que tenga la base B y altura A la cantidad $P=A\times B$, el del tetraedro será por el teorema anterior

$$T=\frac{P}{3}=\frac{A\times B}{3}.$$

222. TEOREMA. I.° *El volúmen de la pirámide es tercera parte del producto de base por altura.*

Dividiendo la base de la pirámide P (fig. 130) en triángulos con diagonales, los planos que vengan desde el cúspide segun ellas partirán la pirámide en tetraedros T', T''... de comun altura A y con las bases B', B''..... (169), y se verificarán las espresiones de volúmenes $T'=\frac{A\times B'}{3}$, $T''=\frac{A\times B''}{3}$, etc. La suma es la pirámide cuya base componen las áreas $B'+B''+B'''+$etc., y por consiguiente el volúmen está espresado en

$$P=\frac{A}{3}(B'+B''+B'''+\ldots\ldots \text{etc.}).$$

II.° *El volúmen del cono es tercera parte del producto de base por altura.*

Si se circunscribe al cono la pirámide (196) y se nombra V el volúmen del cono, B' su base, A la altura (fig. 137), como tambien Δ el esceso del volúmen de la pirámide, y δ el esceso de su base; el teorema que se acaba de hallar es

$V+\Delta=\frac{A}{3}(B'+\delta)$, de donde por el raciocinio análogo al del artículo (216, II.°) se viene á

$V=\frac{1}{3}A\times B'=\frac{1}{3}\pi r^2\times A$, siendo r el radio de la base B'.

III.° *El volúmen del poliedro regular es la tercera parte del producto de su superficie por la altura comun de las pirámides en que se puede descomponer.*

El volúmen del poliedro en general se obtendrá descomponiéndole en pirámides (169). El poliedro regular está compuesto de pirámides rectas idénticas; y suponiendo n el número de ellas, s la base de una, y a su altura, será el volúmen del poliedro regular de n caras $\frac{1}{3}ns\times a=\frac{1}{3}S\times a$, haciendo $ns=S$.

223. TEOREMA. *El volúmen del prisma triangular truncado es la tercera parte del producto de una de sus bases por la suma de las distancias que hay desde esta á los tres vértices de la otra base* (fig. 156).

Un prisma triangular ABD truncado puede ser descompuesto en los tetraedros $ABCV$, $FACV$, $FDCV$; y los cúspides de los dos últimos pueden considerarse en B sín que por esto varíe de valor su altura, por ser la recta BV paralela á sus bases (146). Tambien se puede tomar por base del tercero el triángulo $ADC=FDC$; de suerte que la suma de los tres tetraedros en que fué dividido el prisma es equivalente á la suma $ABCF+ABCD+ABCV$, en que los dos primeros tetraedros son ficticios equivalentes á los del prisma. Si ahora convenimos en que en los términos de la suma enuncien las tres primeras letras base, y la última el vértice de cada tetraedro, y llamamos K, K', K'' las distancias desde la base comun ABC á dichos vértices, será el volúmen P del prisma $P=\frac{ABC}{3}(K+K'+K'')$.

Cualquiera prisma truncado es divisible en triangulares truncados, á manera del prisma recto (169), y la suma de estos es el volúmen de aquel.

224. TEOREMA. *El tronco de pirámide cortada por plano paralelo á la base equivale en volúmen á la tercera parte del producto de la altura del tronco, por la suma de las dos bases y otra que sea media proporcional entre éstas* (fig. 130 y 129).

Sea $FGHJMV$ la pirámide, y FC el tronco que resulta de cortarla por el plano *A C* paralelo al de la base *F H*. Supóngase ademas al tetraedro *F G H V* de base y altura equivalentes á las de la pirámide, y por ello del mismo volúmen, cortado tambien por el plano *A C* paralelo á la base á la misma distancia que lo fué la pirámide; de lo que habrá resultado un tronco *F G* de tetraedro con la misma altura que el de la pirámide, y con la base mayor *F G H* equivalente á la mayor *F G H J M* de ella. Ademas, puesto que las dos pirámides completas tienen iguales alturas, fácil es deducir (183) que la seccion *A B C* del tetraedro es á la *A B C D E* de la pirámide como la base *F G H* de aquel es á la *F G H J M* de ésta; es decir, que son iguales las secciones, á que se sigue la equivalencia entre el tetraedro parcial *A B C V* y la pirámide *A B C D E V* (121). Restando de los totales estas partes, vemos que son iguales los troncos *F G H C A B* del tetraedro y *F G H J M E A B C D* de la pirámide; y por consiguiente bastará demostrar que el teorema propuesto se verifica en el tronco del tetraedro.

Con tal objeto imagínese en el tronco *FGHCAB* del tetraedro, con sus bases *A B C* y *F G H* paralelas, un plano *F B H* que pasa por los tres vértices *F*, *B*, *H*; (fig. 129) el cual dividirá al tronco en dos partes, una que será el tetraedro *F G H B* con la base mayor del tronco y su misma altura, y otra que será la pirámide cuadrangular $FHCAB$, ambas con su vértice en B. Otro plano ABH dividirá esta pirámide en dos tetraedros; el uno es $ABCH$ con la base menor del tronco y su misma altura, y el otro es $AFHB$. Mas, este último equivale al ficticio que se puede imaginar con la misma base FAH y el vértice P en vez de B, marcando el punto P en la recta FG por encuentro de BP paralela á FA, y de consiguiente al plano de la base FAH. Aun se puede considerar que el tetraedro $AFHP$ tiene por base el triángulo FHP, y A por vértice; de consiguiente la misma altura del tronco descompuesto y de los otros dos tetraedros parciales, de los que el uno tenia por base la menor del tronco y el otro la mayor. De suerte que solo nos resta probar que la base FPH del tercero es media proporcional entre las bases FGH y ABC. Para ello tenemos entre los triángulos ABC y FPH de iguales alturas considerando AC y FH bases, y entre los FPH y FGH tambien de iguales alturas considerando FP y FG sus bases, las relaciones (121) y (126)

$$\frac{ABC}{FPH}=\frac{AC}{FH};\quad \frac{FPH}{FGH}=\frac{FP}{FG}=\frac{AB}{FG}:$$

y como por la semejanza de los triángulos ABC y FGH es $\frac{AC}{FH}=\frac{AB}{FG}$, se sigue la igualdad $\frac{ABC}{FPH}=\frac{FPH}{FGH}$ que se buscaba.

Habiéndose, pues, demostrado que el tronco de pirámide es igual al de un tetraedro de base y altura iguales (fig. 130), y que éste se compone de tres tetraedros de la misma altura a del tronco, y cuyas bases son la mayor B, la menor b, y una media proporcional $\sqrt{bB}$ entre estas; se sigue que el volúmen Q del tronco de pirámide con sus bases B y b paralelas y con la altura a, está espresado en

$$Q=\frac{1}{3}a(B+b+\sqrt{Bb}).$$

En vista de ello se deja conocer, que por ser el cono límite de la pirámide corresponde la misma espresion al tronco del cono con bases paralelas: y si suponemos r y r' los radios de sus bases B y b, será $B=\pi r^2$, $b=\pi r'^2$, $Bb=\pi^2 r^2 r'^2$ y $\sqrt{Bb}=\pi rr'$: y por consiguiente la espresion del tronco de cono de bases paralelas con la altura a es $\frac{1}{3}\pi a(r^2+r'^2+rr')$.

225. TEOREMA. *El volúmen de la esfera es el tercio del producto de la superficie por el radio.*

Para que se pueda valuar el volúmen de la esfera (fig. 143), considérese que cada sólido engendrado por la revolucion del semipolígono circunscrito al semicírculo generador es necesariamente un trozo cónico recto de bases paralelas; y que circunscribiendo pirámides á los conos resulta un poliedro circunscrito á la esfera cuya superficie es al fin límite de la del poliedro (201) y (205). Si desde el centro se dirigen radios á los vértices del poliedro, resulta dividido éste en otro sistema de pirámides rectas cuyo cúspide comun es el centro, y altura el radio de la esfera por ser tangentes á ella las caras del poliedro bases de dichas pirámides. En atencion á esto, siendo V, S, r, el volúmen, la superficie y el radio de la esfera, como tambien Δ la diferencia de volúmenes y δ la diferencia de superficies entre la esfera y el poliedro; por lo demostrado acerca del volúmen de la pirámide, será la suma de todas las que componen el poliedro

$V+\Delta=\frac{1}{3}r\times(S+\delta)$. Puesto que segun lo manifestado antes la superficie S es límite de la del poliedro, necesariamente las diferencias δ y de resultas Δ se van acercando indefinidamente á cero, y por ello (Alg. elem. 66) la espresion del volúmen de la esfera (205) es $V=\frac{1}{3}r\times S=\frac{4}{3}\pi r^3$.

La fórmula que se acaba de hallar da esta otra,

$r=\sqrt[3]{\left(\frac{3}{4\pi}\right)}\times\sqrt[3]{V}=0,620355\times\sqrt[3]{V}$, para conocer el radio de una esfera cuyo volúmen es dado.

226. TEOREMA. *El volúmen del sector equivale á* $\frac{2}{3}\pi r^2 x$, *siendo* r *el radio de la esfera y* x *la parte de radio perteneciente á la altura ó ságita del casquete.*

La parte de superficie poliedral circunscrita correspondiente á un casquete esférico, es el conjunto de bases de las pirámides que resultaron en las construcciones del artículo precedente. Llamándose, pues, V el volúmen del sector esférico inscrito en el conjunto de pirámides, s la superficie de casquete, Δ la diferencia de volúmen entre el sector esférico y el conjunto de pirámides, y δ la diferencia de superficies de casquete y poliedro, será el volúmen de dichas pirámides reunidas $V+\Delta=\frac{1}{3}r(s+\delta)$. Las diferencias δ y Δ van por lo manifestado en el artículo anterior decreciendo indefinidamente segun se aumenta el número de pirámides, sin llegar jamas á cero ni pasar de él: de suerte que por el principio de los límites (Alg. elem. 66) será el volúmen del sector $V = \frac{1}{3} r \times s = \frac{2}{3} \pi r^2 x$, supuesta x la parte de diámetro ó ságita correspondiente al casquete.

Restando el cono GCH del sector $AGCH$, (fig. 133) se tiene el volúmen del casquete GHA; y restando del sector $ADCF$ el casquete AGH y el cono DCF, se conoce el volúmen de la porcion esférica cumprendida entre dos secciones planas DF y GH.

227. TEOREMA. *El volúmen de la esfera vale dos terceras partes del cilindro circunscrito.*

La esfera vale $\frac{4}{3} \pi r^3$; el cilindro circunscrito á ella vale $2 \pi r^3$, de donde viene la razon $\frac{V}{V'} = \frac{2}{3}$ entre el volúmen V de la esfera y V' del cilindro.

LECCION SETIMA.

Comparacion de superficies y de volúmenes entre sí.

228. TEOREMA. *Las superficies capaces de espresion regular están en razon de los productos de sus dos respectivas dimensiones.*

Cuando la figura de un cuerpo es de tal naturaleza que se puede espresar el valor S de la superficie suya en producto de dos dimensiones como $S=A\times B$, se dice que es capaz de espresion regular. Comparando esta superficie á otra de espresion regular cualquiera $S'=A'\times B'$, hay entre ellas la relacion $\frac{S}{S'}=\frac{A\times B}{A'\times B'}$ que dice ser las superficies de dichos cuerpos como los productos de sus dimensiones.

Obsérvese que la condicion $S=S'$ es como $A\times B=A'\times B'$, y no dependiendo esta igualdad de ser cada dimension en una figura igual á su correspondiente en la otra, sino de ser iguales los productos, presenta modos de formar una superficie equivalente á otra. Aunque por ahora se omiten las aplicaciones, convendrá ejercitarse en los problemas que envuelven los siguientes generales.

I.° *Dada una superficie, hallar las dimensiones para formar otra equivalente; ó conocer los factores* A *y* B *del número que representa la superficie* S=A×B.

II.° *Dadas las dimensiones de una superficie, formar otra de base ó altura dada, que siendo de su misma naturaleza equivalga exacta ó próximamente á la primera.*

La solucion consiste en hallar por el método geométrico, ó por el de números, la cuarta proporcional en $\frac{A}{A'}=\frac{B'}{B}$.

III.° *Dada una superficie, formar otra equivalente de naturaleza distinta cuya base ó altura sea dada.* La solucion consiste en lo mismo.

229. TEOREMA. *Dos superficies capaces de espresion regular, que tienen comun cualquiera de las dos dimensiones, están en razon de la otra.*

La proporcion $\frac{S}{S'}=\frac{A\times B}{A'\times B'}$ se reduce á

$\frac{S}{S'}=\frac{A}{A'}$, siendo $B=B'$, y á $\frac{S}{S'}=\frac{B}{B'}$, siendo $A=A'$:

de suerte que si en el primer caso es $A=n\times A'$ y en el segundo $B=n\times B'$, será en ambos $S=n\times S'$. Luego, para formar una superficie n veces mayor ó menor que otra dada, las dimensiones de aquella serán una de las de ésta y la otra n veces mayor ó menor; y este resultado conduce á la solucion de los siguientes problemas.

I.° *Dadas las dimensiones de una superficie, formar otra de la misma naturaleza* n *veces mayor ó menor.*

II.° *Dadas las dimensiones de una superficie, formar otra de naturaleza diferente* n *veces mayor ó menor.*

230. TEOREMA. *Las superficies de dos figuras semejantes, capaces de espresion regular, están en razon de los cuadrados de cada dimension de una y la correspondiente de la otra, y por ello tambien en razon de los cuadrados de cualesquiera líneas homólogas.*

Cuando se trata de dos figuras semejantes en la proporcion $\frac{S}{S'}=\frac{A\times B}{A'\times B'}$, las líneas A y B son respectivamente homólogas de A' y B', y está demostrado que en tales figuras son proporcionales las líneas homólogas como $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}$. Sustituyendo, pues, una razon por otra de éstas en la general de las superficies, viene

$$\frac{S}{S'}=\frac{A^2}{A'^2}=\frac{B^2}{B'^2}.$$

Por ser semejantes las esferas, están las superficies de éstas S y S' incluidas en el caso general: y á mayor abundamiento la comparacion de las espresiones (205) conduce al mismo resultado; pues, por una parte hay $\frac{S}{S'}=\frac{4\pi r^2}{4\pi r'^2}=\frac{r^2}{r'^2}$, y por lo demostrado en el círculo son los radios como dos cualesquiera líneas homólogas; luego, las superficies esféricas proporcionales á los cuadrados de dos líneas homólogas.

Por lo demostrado en este artículo y en el (121) se resuelven varios problemas de superficies semejantes. El que con mas frecuencia se puede ofrecer es; *formar una figura cuya superficie* S *sea* n *veces mayor ó menor que otra* S′ *dada semejante*. Para ello discúrrase que $\frac{S}{S'}=\frac{A^2}{A'^2}$ es como $\frac{S}{nS'}=\frac{A^2}{nA'^2}$; y la condicion $S=nS'$ como $A^2=nA'^2$ ó bien $A=A'\sqrt{n}$; es decir, que el lado A que se busca es producto del conocido homólogo A' multiplicado por el número $\sqrt{n}$.

231. TEOREMA. *Dos volúmenes capaces de espresion regular están en razon de los productos de sus tres dimensiones respectivas.*

Se ha visto que en general el volúmen V capaz de espresion regular depende de tres dimensiones, como $V=A\times B\times C$: y si se compara con otro $V'=A'\times B'\times C'$, viene

$$\frac{V}{V'}=\frac{A\times B\times C}{A'\times B'\times C'}.$$

Si ha de ser $V=V'$, resulta

$$A\times B\times C=A'\times B'\times C';$$

igualdad que puede quedar satisfecha por muchos sistemas de factores, y que por ello ofrece distintos medios de formar un volúmen equivalente á otro dado, como se exije en los problemas que están comprendidos en los siguientes generales.

I.° *Dado un volúmen, hallar las dimensiones para formar otro equivalente, ó los factores* A, B, C *del número que le espresa cuando es compuesto.*

II.° *Dadas las dimensiones de un volúmen, formar otro equivalente de la misma naturaleza, dadas para ello dos dimensiones de éste.*

La solucion, suponiendo por ejemplo C' desconocida, consiste en hallar una cuarta proporcional por $\frac{A\times B}{A'\times B'}=\frac{C'}{C}$. Mas, para ello hay que buscar primero otra x por $\frac{A\times B}{A'}=x$; y sustituyendo en la primera el valor x conocido, se tiene la proporcion $\frac{x}{B'}=\frac{C'}{C}$ final, que se debe construir para tener C'.

III.° *Dadas las dimensiones de un volúmen, formar otro equivalente de naturaleza distinta, dadas tambien dos dimensiones de éste.* La solucion se tiene como en el caso anterior.

252. TEOREMA. *Dos volúmenes capaces de espresion regular, que tienen comunes dos de las tres dimensiones, están en razon de la tercera.*

La proporcion $\frac{V}{V'}=\frac{A\times B\times C}{A'\times B'\times C'}$ se reduce á

$\frac{V}{V'}=\frac{A}{A'}$ en caso de $B\times C=B'\times C'$; y asi en los

demas casos. De suerte que si ha de ser $V=nV'$ basta hacer $A=nA'$: y asi, para que un volúmen sea n veces mayor ó menor que otro dado, basta que tenga dos dimensiones iguales á las de éste, y la tercera n veces mayor ó menor. Sobre esto ocurren los siguientes problemas.

I.° *Dado un volúmen, formar otro de su misma naturaleza* n *veces mayor ó menor.*

II.° *Dado un volúmen, formar otro de naturaleza distinta* n *veces mayor ó menor.*

Estos problemas se resuelven á beneficio de lo que consta en la leccion precedente.

253. *Los volúmenes de dos figuras semejantes son como los cubos de sus dimensiones homólogas, y como los cubos de cualesquiera líneas homólogas.*

En las figuras semejantes las líneas A, B, C de

$\frac{V}{V'}=\frac{A\times B\times C}{A'\times B'\times C'}$ son respectivamente homólogas de A', B', C'; y está demostrado que en tales figuras son proporcionales todas las lineas homólogas como $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$. Sustituyendo en la razon general de volúmenes una por otra de estas iguales resulta

$$\frac{V}{V'}=\frac{A^3}{A'^3}=\frac{B^3}{B'^3}=\frac{C^3}{C'^3}.$$

El problema de esta especie que con mas frecuencia ocurre es el siguiente. *Dado un volúmen* V', *hallar otro* V *semejante* n *veces mayor ó menor*. Para ello la ecuacion $\frac{V}{V'}=\frac{A^3}{A'^3}$ es como $\frac{V}{nV'}=\frac{A^3}{nA'^3}$; y la condicion $V=nV'$ como $A^3=nA'^3$, ó $A=A'\times\sqrt[3]{n}$: la cual nos dice que el lado A del volúmen V que se busca es el producto del lado A, conocido por el número $\sqrt[3]{n}$.

234. TEOREMA. *El volúmen de una esfera es mayor que el de un poliedro regular que tenga superficie equivalente.*

Finalmente, vamos á comparar el volúmen de una esfera con el de un poliedro regular que tenga igual superficie que ella: y para el objeto sean en la esfera, E el volúmen, S la superficie y r el rádio; como tambien en el poliedro, P el volúmen, S la superficie, y a la altura comun de las pirámides rectas que componen el poliedro. Segun lo demostrado (225) y (222) tenemos $E=\frac{1}{3}r\times S$, $P=\frac{1}{3}a\times S$; y comparando será $\frac{E}{P}=\frac{r}{a}$.

Para cerciorarnos de cuál volúmen es mayor, considérese que si fuera r igual á a, el poliedro sería circunscrito á la esfera y entonces la superficie de esta menor que la del poliedro (205), lo cual aun se verificaria con mas esceso en caso de $a>r$. Puesto que no puede ser a igual á r ni mayor, tampoco podrá ser P igual á E ni mayor: es decir, que la esfera tiene mayor volúmen que el poliedro regular á igualdad de superficies.

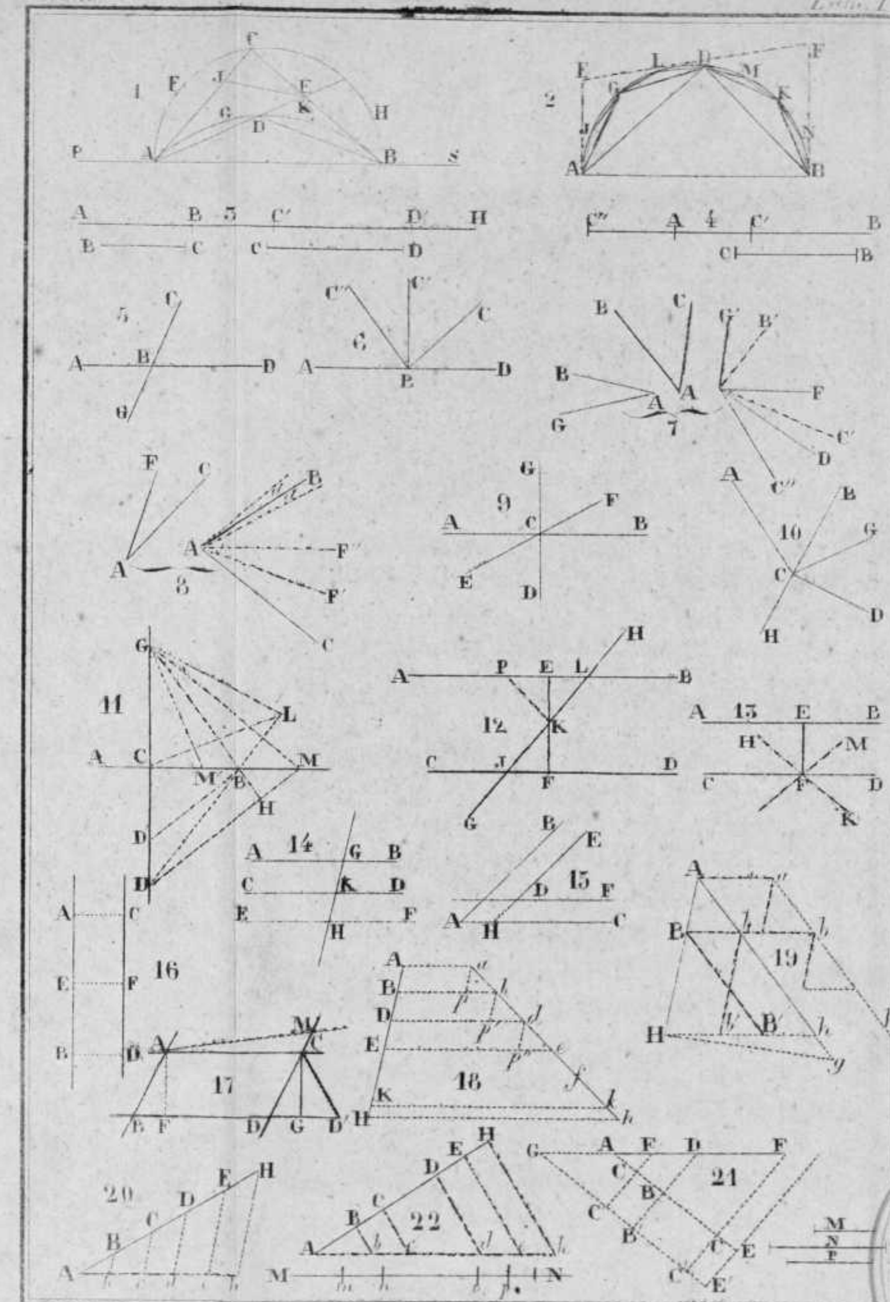
Aquí vemos un resultado análogo al que se halló tratando del círculo y polígono isoperímetros (133), y sería conveniente discurrir acerca de las demas analogías de esta clase; pero desistimos de la empresa por atender á los demas ramos de la obra.

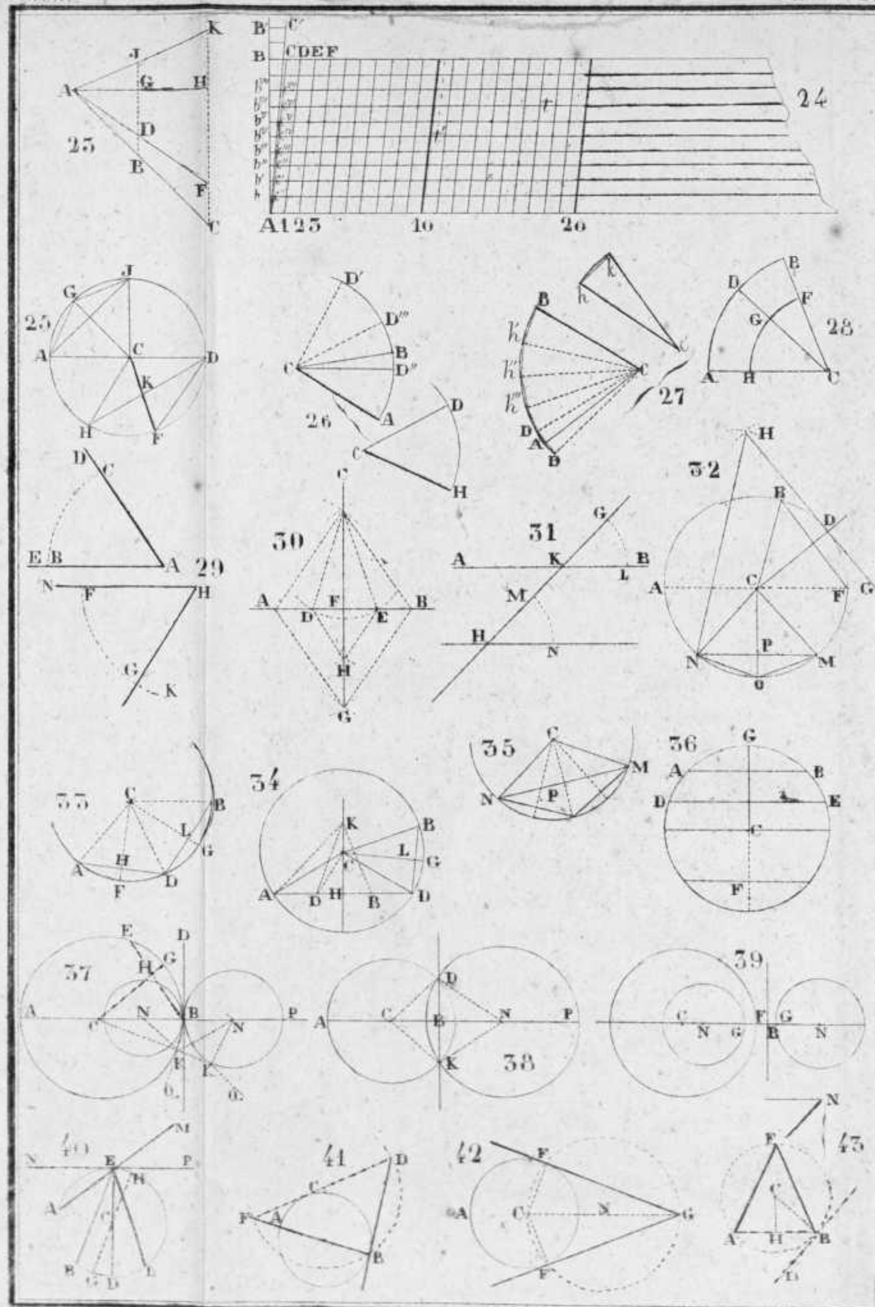
INDICE.

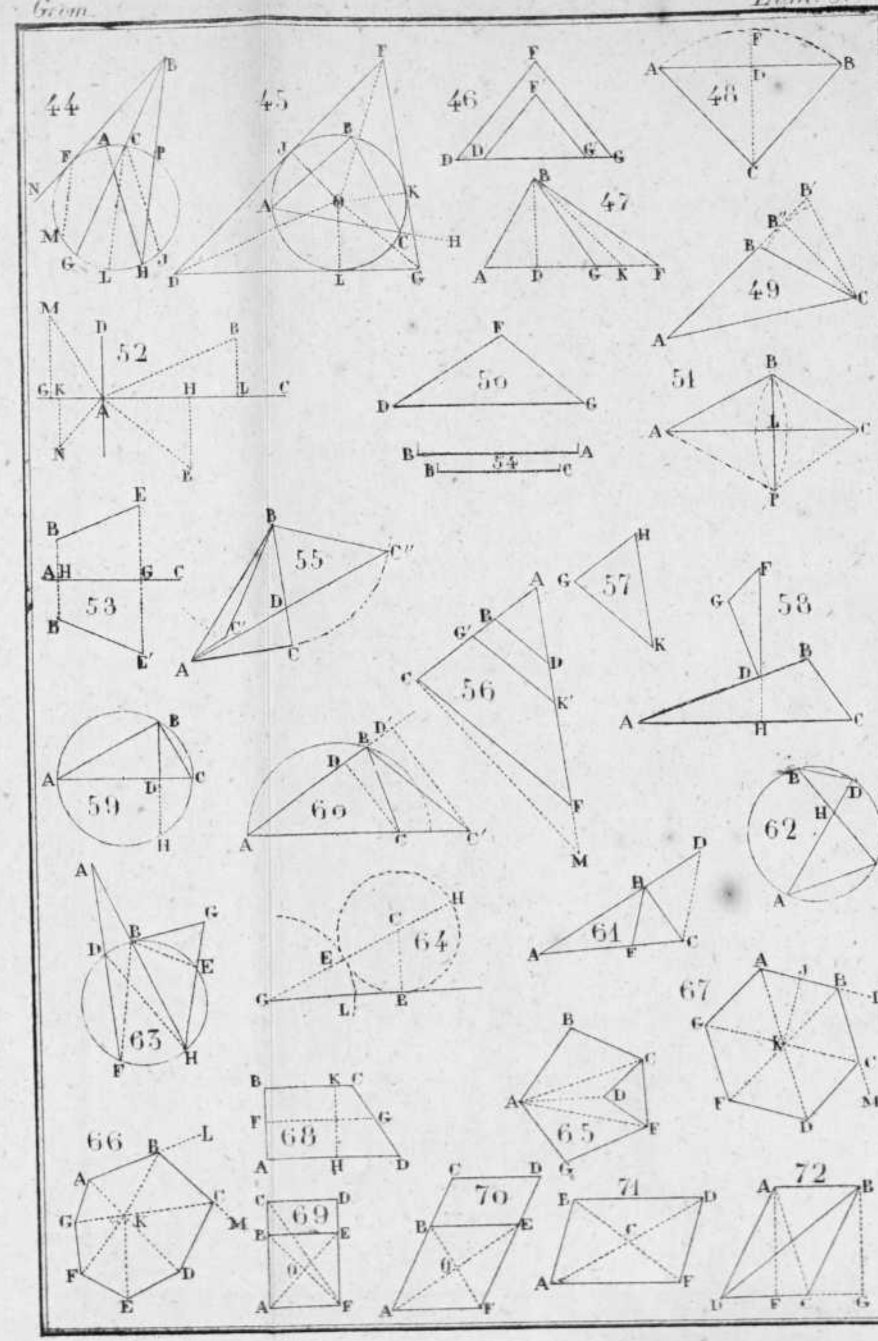
Tratado II. GEOMETRIA ELEMENTAL.

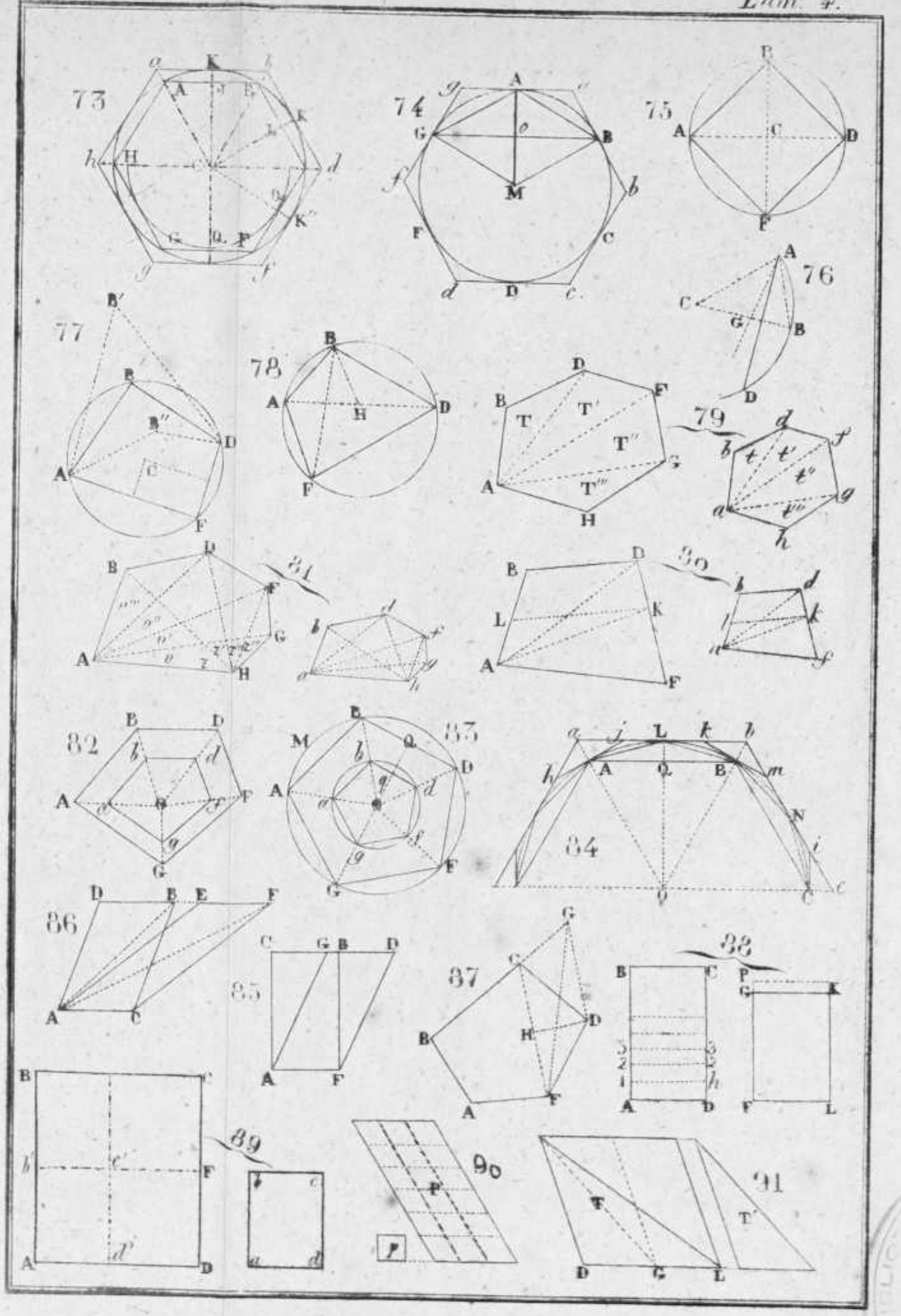
GEOMETRIA PLANA.

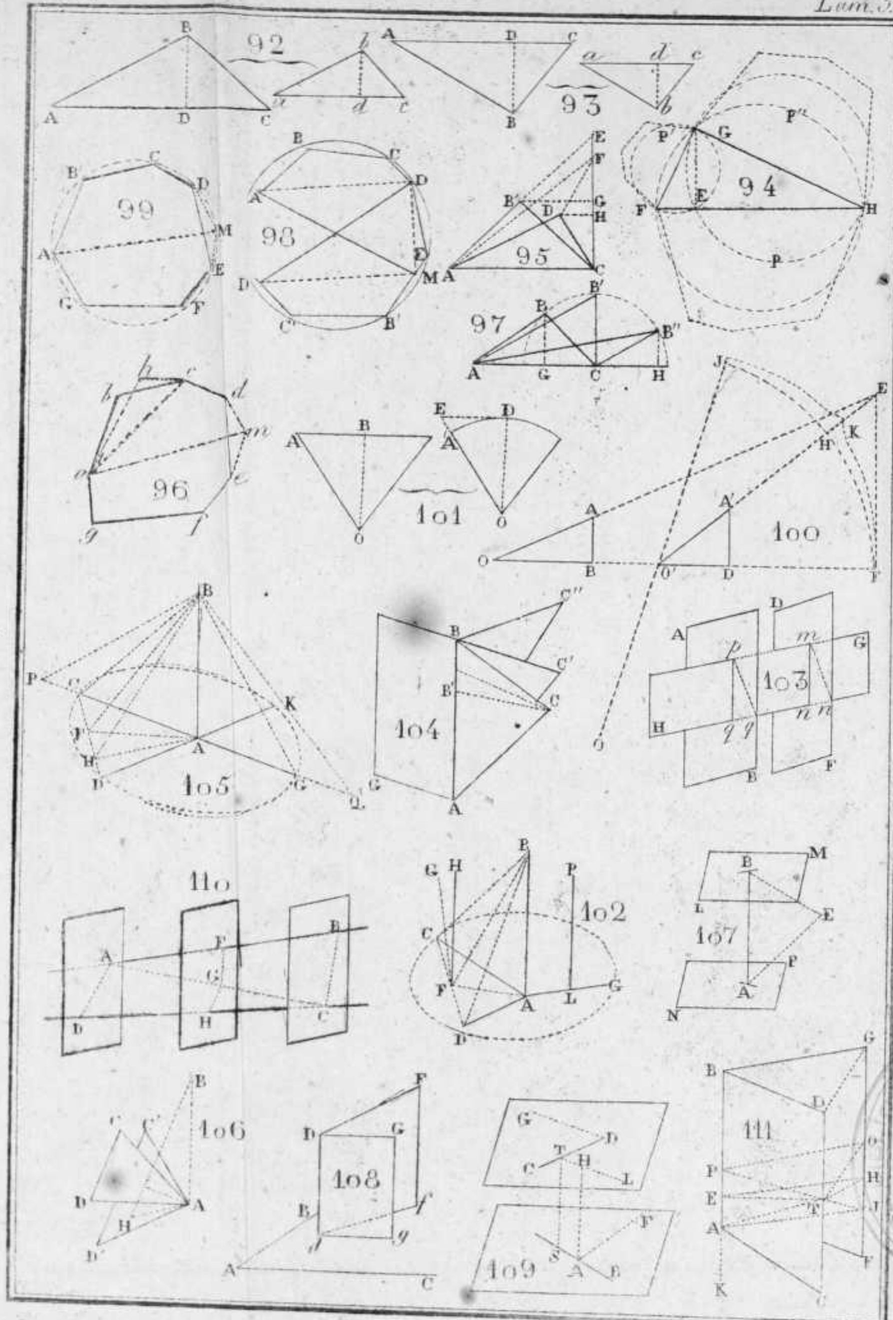
Capítulo I. *Líneas y ángulos.*

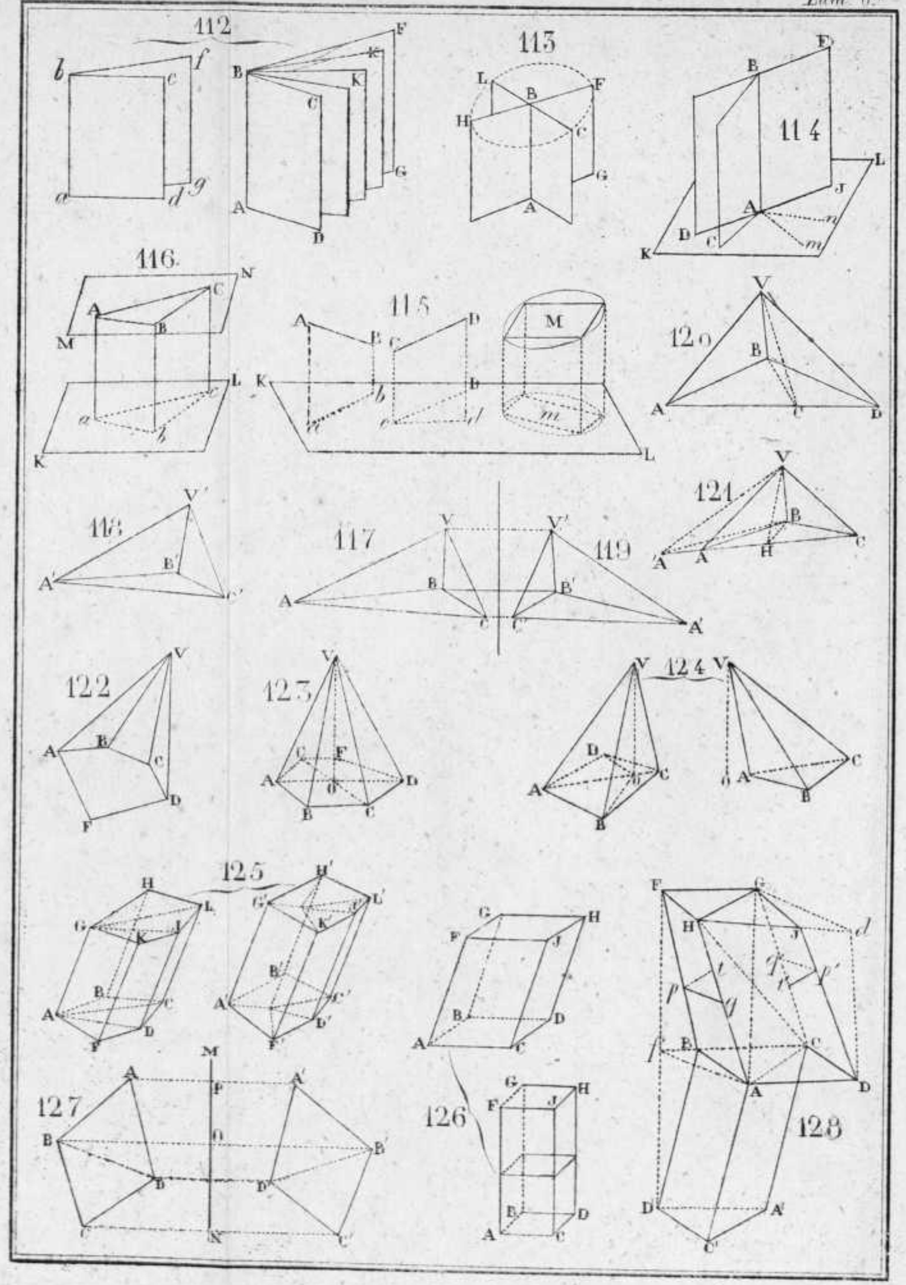


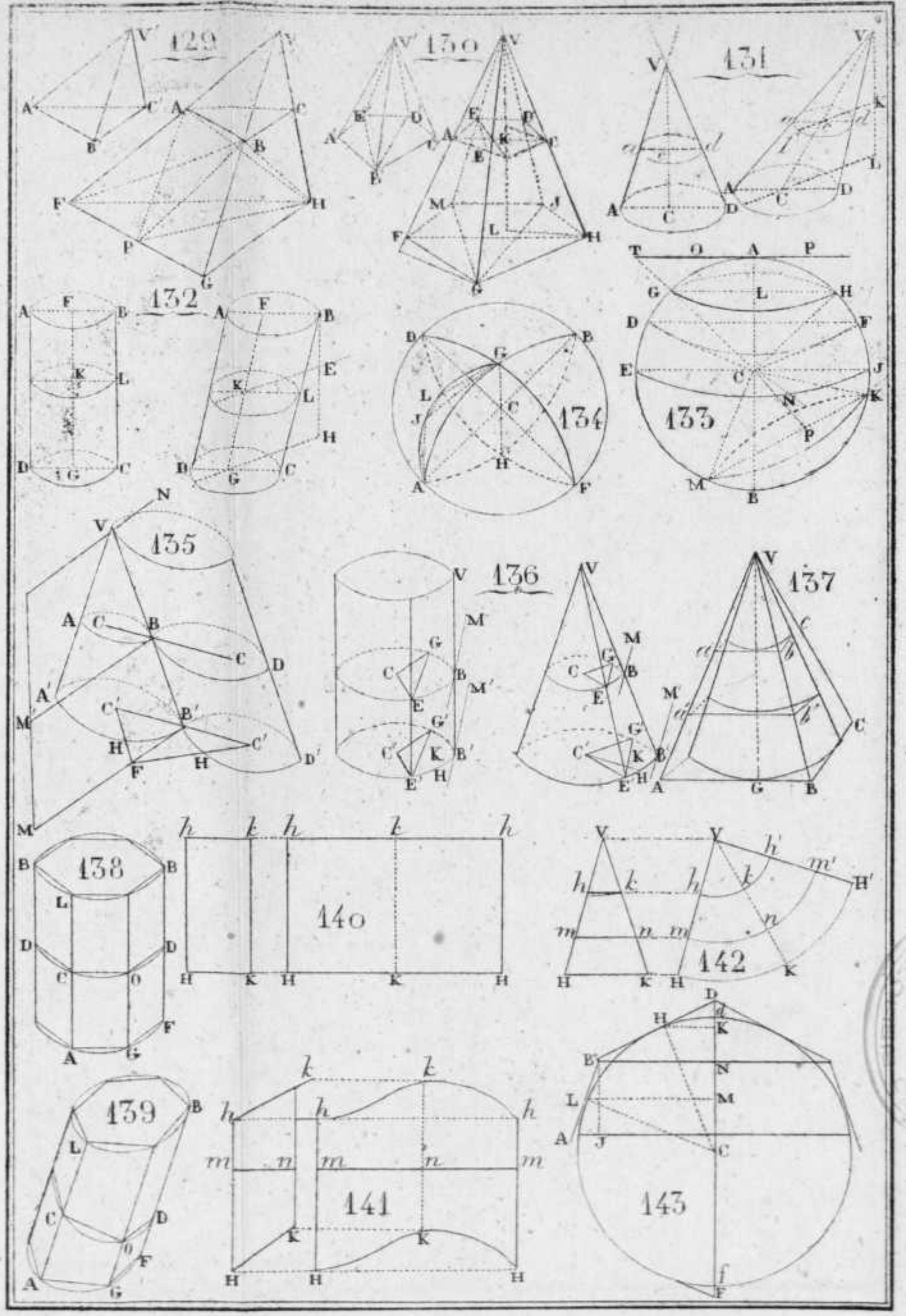


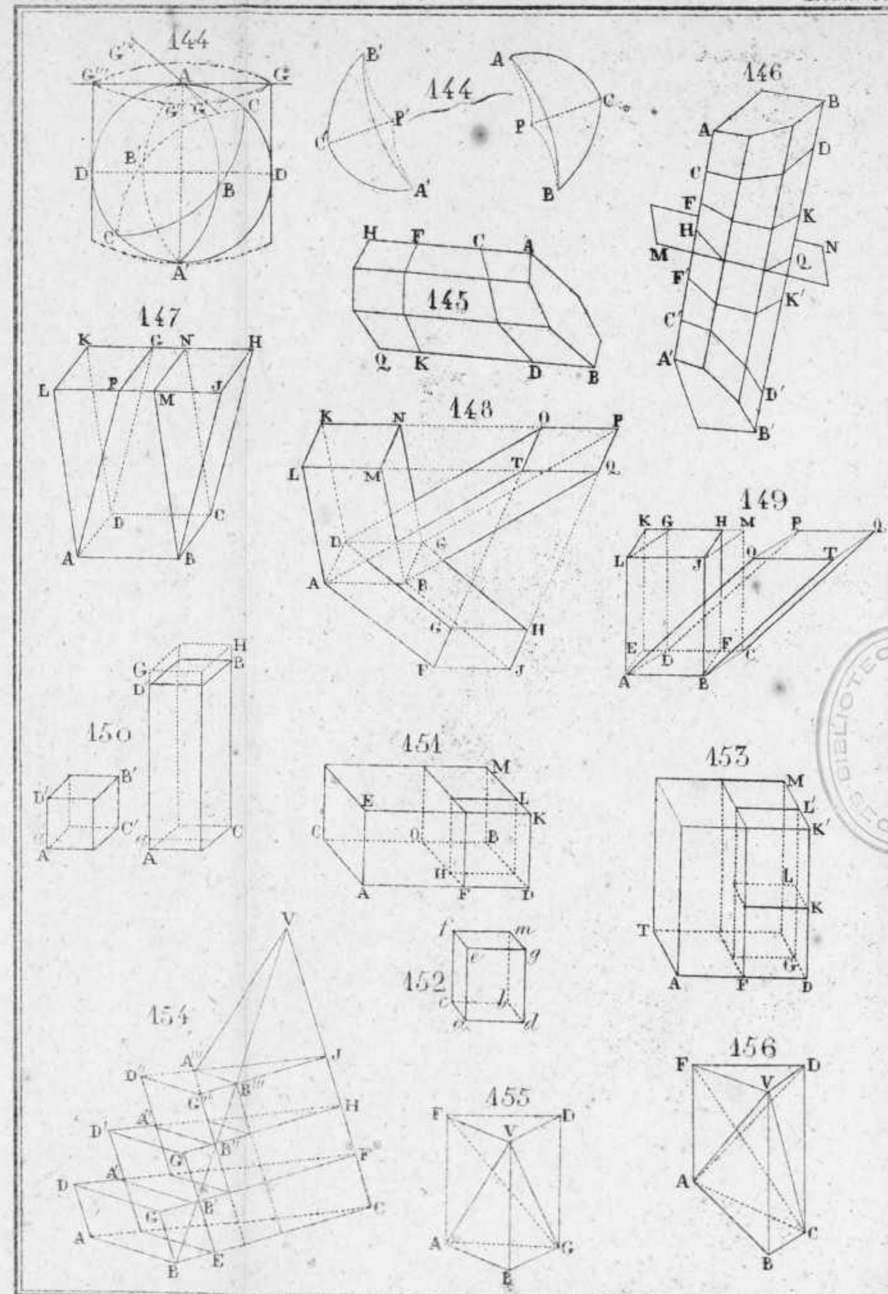

44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72


73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91


92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111


112
113
114
116
115
120
118
117
119
121
122
123
124
125
126
127
128


129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143


144
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156

[illegible] estaño es demasiado grande, ó, que será necesario conmezclar á un término que no resulte [illegible] puro; ó, que no puede ser sino contrario á las ideas que se han propuesto, eligiendo para los cañones una aligacion dura, nerviosa y sólida, el mezclarle una aligacion agria, frágil, como es el metal blanco, y tan diametralmente opuesta á las propiedades que debe tener un metal para la artillería. Cual sea la proporcion del cobre y del estaño de que resulte el bronce puro, y cuales sean sus propiedades comparadas con el del bronce actual, es un problema que todavía no está resuelto.

195. El análisis del bronce de que hemos hablado supone su composicion de solo cobre y estaño; pero algunos hacen entrar el zinc en ella; y aun han pretendido formar un metal al mismo fin de solo zinc y cobre. En el dia la mezcla del zinc con el cobre solo es para la composicion del laton, de cuya mezcla resulta un metal mas duro, menos oxidable y de color amarillo. Para saber la cantidad de zinc contenida en el laton se hace lo mismo que en el bronce, es decir, se disuelve el metal en el ácido [illegible] pero despues [illegible]

ODRIOZOLA

MATEMATICA

2