LECCIONES

DE

MATEMATICAS ELEMENTALES

POR

D. Tomás Mallo López

Catedrático numerario, por oposición, de dicha asignatura
en el Instituto General y Técnico de León

Trigonometría rectilínea y esférica

TERCERA EDICION

LEON
Imp. de Maximino A. Miñón
1906

LECCIONES

DE

MATEMATICAS ELEMENTALES

POR

D. Tomás Mallo López

Catedrático numerario, por oposición, de dicha asignatura
en el Instituto General y Técnico de León

Trigonometría rectilínea y esférica

TERCERA EDICION

LEON
Imp. de Maximino A. Miñón
1906

Erratas más notables que deben corregirse

Pag.ª	Línea (*)	Dice	Debe decir
8	20	*si lo tienen*	*si lo tiene*
8	22	*si lo tienen*	*si lo tiene*
9	2	$\cos a$	$\cos \alpha$
9	3	$\cos a$	$\mathrm{sn}\, \alpha$
12	—10	*tan contínuo*	*también contínuo*
28	9	$\frac{1}{2}OA+AC<\frac{1}{2}OA+AT$	$\frac{1}{2}OA\times AC<\frac{1}{2}OA\times AT$
32	13	*logaritmos, senos*	*logaritmos senos*
32	13 y 14	*logaritmos, tangentes*	*logaritmos tangentes*
32	14	*logaritmos, secantes*	*logaritmos secantes*
34	—4	*aumentados*	*aumentadas*

(*) Los números de las líneas, precedidos de una rayita, indican que debe principiarse á contar por la parte inferior de la página.

PRÓLOGO

Este volumen trata de lo que nosotros llamamos *Aspecto general de la Geometría,* atendiendo las razones aducidas en nuestra *Introducción al estudio de las Matemáticas elementales*, y consta de una lección preliminar y de tres libros. En la lección preliminar estudiamos la manera de representar analíticamente los segmentos y los ángulos rectilíneos, y razonamos la división en tres libros. El libro primero, que trata de las líneas trigonométricas en general, está dividido en dos capítulos, el primero de los cuales comprende diversas relaciones entre líneas trigonométricas, y el segundo todo lo relativo á tablas logarítmico trigonométricas. El libro segundo, que trata de la trigonometría rectilínea, está también dividido en dos capítulos, el primero de los cuales comprende la resolución de triángulos rectángulos, y el segundo, la de triángulos oblicuángulos. El libro tercero, que trata de la trigonometría esférica, está dividido en otros dos capítulos, el primero de los cuales, comprende la resolución de triángulos esféricos rectángulos y rectiláteros, y el segundo, la de triángulos esféricos oblicuángulos. Y, al final, resolvemos algunos problemas, como aplicaciones notables de la trigonometría.

Expuesto concisamente el plan, que detallamos en el índice, réstanos manifestar que nuestro objeto, al escribir esta obrita, ha sido armonizar lo racional con lo didáctico, para, de esta suerte, hacer lo más ameno posible el estudio de las Matemáticas. Si hemos dado siquiera un paso en la consecución de tal fin, quedarán completamente satisfechas nuestras aspiraciones.

ÍNDICE

INDICE

ASPECTO GENERAL DE LA GEOMETRIA

LECCIÓN 1.ª

Nociones preliminares

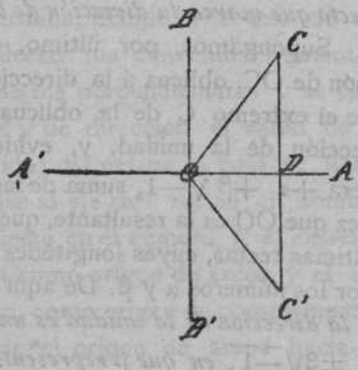
1. *El aspecto general de la Geometría estudia las leyes relativas á los hechos de extensión*; es decir: no considera cada extensión en particular, sino un conjunto de extensiones que, por cumplir con unas mismas condiciones, obedecen á una ley.

2. Las leyes relativas á los hechos de la extensión, se expresan por medio de fórmulas, que nos permiten apreciar debidamente, no solo la magnitud, sino también la posición y la figura de las extensiones.

Para la determinación de estas fórmulas, es necesario saber antes representar, mediante una expresión literal, la magnitud y posición de una recta y de un ángulo rectilíneo dados.

3. Si trazamos en un plano dos rectas AA′ y BB′, perpendiculares entre sí, y consideramos *(Fig. 1.ª)* el punto O en que se encuentran como origen de segmentos rectilíneos y la recta OA como unidad de dirección, *toda recta*, tal como la OA, *que tenga la misma dirección que la unidad, es una cantidad evidentemente positiva, y se representa por el número que expresa la medida de su longitud precedido del signo +, ó sin signo alguno antepuesto; y la recta que*, como OA′, *tenga dirección opuesta á la de la unidad, es*

FIGURA 1.ª



una cantidad negativa, que se representa por el número que expresa su magnitud precedido del signo —.

Para hallar la expresión de OB, perpendicular á la dirección de la unidad, tomemos sobre OA y OA′, á partir del origen, una longitud igual á la de OB, y representemos estas tres longitudes iguales por el número a. En magnitud, OB es media proporcional entre OA y OA′, porque OB, OA y OA′ tienen, por construcción, la misma longitud a; en dirección, también es OB media proporcional entre OA y OA′, porque el ángulo que forma OA con OB es igual al que OB forma con OA′; luego la expresión de OB, si ha de ser su fiel representante, será también media proporcional entre las expresiones $+a$ y $-a$ de OA y de OA′; es decir, que se verificará: *expresión de OB* $= \pm\sqrt{(+a)\times(-a)} = \pm\sqrt{-a^2} = \pm a\sqrt{-1}$. Ahora bien; la expresión $\pm a\sqrt{-1}$, según indica el signo $\pm$ que la precede, representa dos rectas de igual longitud y de direcciones opuestas, y como una de esas rectas es OB, la otra será OB′, de igual longitud que OB y de dirección opuesta. Por consiguiente y puesto que es $\pm a\sqrt{-1} = a\times(\pm\sqrt{-1})$, *la recta que sea perpendicular á la dirección de la unidad, es una cantidad imaginaria, cuya expresión se obtiene multiplicando el número que representa su medida por* $\pm\sqrt{-1}$, *debiéndose tomar el signo + ó el signo —, según que dicha perpendicular esté encima ó debajo de la recta que marca la dirección de la unidad.*

Supongamos, por último, que se quiere hallar la expresión de OC, oblícua á la dirección de la unidad: tracemos, desde el extremo C de la oblícua, la perpendicular CD á la dirección de la unidad, y, evidentemente, la expresión de OC será $+\alpha+\beta\sqrt{-1}$, suma de las expresiones de OD y DC, toda vez que OC es la resultante, que pudiéramos llamar, de estas dos últimas rectas, cuyas longitudes respectivas hemos representado por los números α y β. De aquí se deduce que *toda recta oblícua á la dirección de la unidad es una cantidad compleja de la forma* $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$, *en que* β *representa la longitud de la perpendicular trazada á la dirección de la unidad, desde el extremo de la oblí-*

cua, y α *la distancia entre el origen y el pie de dicha perpendicular.*

ESCOLIOS.—1.º Cada una de las expresiones $+a$, $-a$, $+a\sqrt{-1}$ y $+\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$, es un producto de dos factores, el primero de los cuales se llama *coeficiente de magnitud* ó *módulo*, y el segundo, *coeficiente de dirección ó argumento*. El módulo de las cuatro primeras expresiones es a evidentemente; el módulo de la última, según el teorema de PITÁGORAS, es $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, y los respectivos argumentos que se obtienen dividiendo cada una de dichas expresiones por su módulo correspondiente, son: $+1$, -1, $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$, y $+\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\pm\frac{\beta^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sqrt{-1}$. Es preciso advertir que α lleva el signo *menos*, cuando se toma á la izquierda del origen.

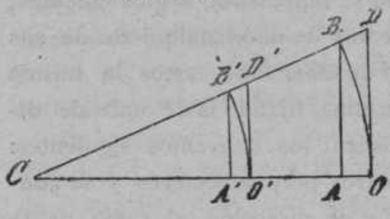
2.º Cuando la recta, cuya expresión nos propongamos determinar, no tenga su origen en coincidencia con el origen de segmentos rectilíneos, se toma á partir de este último punto y sobre la paralela trazada por él á la recta dada, una longitud igual á la de esta recta, y estamos en uno de los casos anteriores.

4. La magnitud de un ángulo se representa, según sabemos, por el número que expresa la medida de uno cualquiera de sus arcos correspondientes, en virtud de tener todos estos la misma graduación; y la posición se determina, fijando la de uno de dichos arcos, para lo cual se establecen los convenios siguientes: se trazan en un círculo dos diámetros perpendiculares y se considera como unidad de magnitud y de dirección el radio de la derecha del primero de los referidos diámetros, el cual se llama eje real; el diámetro perpendicular al eje real recibe el nombre de eje imaginario, según lo expuesto en el número 3; el extremo derecho del eje real se considera como origen de arcos, y el extremo superior del eje imaginario, como origen de complementos de arcos; los arcos, que van desde el origen de arcos hacia el origen de complementos, se consideran como positivos, y los descritos en sentido contrario como negativos; los arcos cuya suma literal es un cuadrante, se llaman complementarios, y tienen el mismo extremo, y los arcos cuya suma literal es igual á una semicircunferencia reciben el nombre de suplementarios. *(Fig. 3.ª)*

5. Siendo difícil establecer relaciones directas y sencillas entre las expresiones de los segmentos rectilíneos y las de los arcos, es preciso sustituir las expresiones de los arcos por las de ciertas rectas, de tal manera relacionadas con los arcos á quienes afectan, que, conocidos estos, en magnitud y posición, es muy fácil determinar la magnitud y posición de aquéllas, y al contrario. Dicha sustitución se justifica demostrando el siguiente teorema.

Si, dado un ángulo, se describe con un radio arbitrario su arco correspondiente, se verifica que son constantes, independientemente de la longitud del radio, los cocientes de dividir por éste: 1.º La perpendicular trazada desde el extremo del arco al diámetro que pasa por el origen; 2.º La tangente al arco en su origen, comprendida entre este punto y la prolongación del diámetro que pasa por el extremo, y 3.º la distancia entre el centro y el extremo de dicha tangente.=En efecto: las relaciones $\frac{AB}{CO}=\frac{A'B'}{CO'}$, $\frac{DO}{CO}=\frac{D'O'}{CO'}$ y $\frac{CD}{CO}=\frac{C'D'}{CO'}$ son evidentes, en virtud de la semejanza de los triángulos rectángulos CAB y CA'B', COD y C'O'D' *(Fig. 2.ª)*

FIGURA 2.ª



ESCOLIO.—En virtud del teorema anterior, el radio del arco, correspondiente á un ángulo dado, puede tener una longitud arbitraria, que *se toma siempre por unidad;* lo cual hace que los cocientes de dividir por el radio las tres rectas, á que se refiere el teorema, sean respectivamente iguales á ellas mismas. Estas rectas que dependen del arco á que afectan, y, por lo tanto, del ángulo correspondiente, son las que sustituyen á los ángulos, por lo cual reciben el nombre de *líneas goniométricas*, y, más comunmente, el de *líneas trigonométricas*, en atención á ser el triángulo la figura fundamental de la Geometría.

6. Las fórmulas que nos proponemos determinar con el fin de expresar sintéticamente las leyes relativas á los hechos de la extensión, nos sirven también para *resolver las figuras geométricas, operación que consiste en calcular los elementos desconocidos de una figura en función de los elementos conocidos que la determinan.* Ahora bien; como la figura fundamental de Planimetría es el triángulo rectilíneo, y la fundamental de Estereometría, el triángulo esférico, la resolución de figuras queda reducida á la de triángulos, por lo cual el aspecto general de la Geometría se divide en dos partes, denominadas: TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA, *que trata de resolver triángulos rectilíneos,* y TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA, *que se ocupa en la resolución de triángulos esféricos*; pero, siendo necesario, para el estudio de cada una de estas partes, el conocimiento de todo lo relativo á la teoría de las líneas trigonométricas, el cuadro sintético de la división del aspecto general de la Geometría, es el siguiente:

ASPECTO GENERAL DE LA GEOMETRÍA

Líneas trigonométricas

Planimetría	Trigonometría rectilínea.	Aplicaciones	
Estereometría	Trigonometría esférica.	Aplicaciones	

LIBRO PRIMERO

Líneas trigonométricas

CAPÍTULO I

Relaciones entre las líneas trigonométricas

LECCIÓN 2ª.

Líneas trigonométricas de un arco

7. LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS DE UN ARCO *son ciertas rectas, de tal manera relacionadas con el arco á quien corresponden, que, conocido éste, en magnitud y posición, se puede determinar la magnitud y posición de aquéllas; y recíprocamente: conocida la magnitud y posición de las líneas trigonométricas, correspondientes á un arco dado, se puede determinar la magnitud y posición del arco.*—Las principales líneas trigonométricas de un arco, son *el seno*, *la tangente* y *la secante*.

COLÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS DE UN ARCO *son las líneas trigonométricas del complemento de dicho arco.*—Las principales colíneas trigonométricas de un arco, son *el coseno, la cotangente* y *la cosecante.*

SENO DE UN ARCO *es la perpendicular trazada desde el extremo del arco al diámetro que pasa por el origen.*

COSENO DE UN ARCO *es el seno de su complemento, ó la distancia entre el centro y el pie del seno.*

TANGENTE DE UN ARCO *es la porción de la tangente al arco en su origen, comprendida entre este punto y la prolongación del diámetro que pasa por el extremo del arco.*

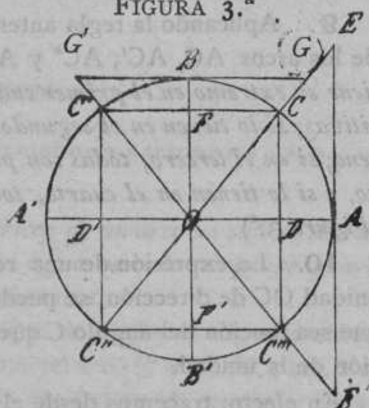
COTANGENTE DE UN ARCO *es la tangente de su complemento.*

SECANTE DE UN ARCO *es la distancia entre el centro y el extremo de su tangente.*

COSECANTE DE UN ARCO *es la secante de su complemento.*

Las líneas y colíneas trigonométricas principales de un arco se representan abreviadamente anteponiendo á la expresión del arco las características *sn.*, *cos.*, *tg.*, *ctg.*, *sc.* y *csc.* Así, siendo la *a* la expresión del arco AC (*Fig.* 3.ª), se tendrá: CD=sn.*a*, CF=cos.*a*, AE=tg.*a*, BG=ctg.*a*, OE=sc.*a* y OG=csc.*a*.

FIGURA 3.ª



ESCOLIO.—Además de las líneas y colíneas trigonométricas principales que hemos definido, hay otras tres líneas auxiliares, *el senoverso*, *el verso* y *el subverso*, cuyas correspondientes colíneas son respectivamente *el cosenoverso*, *el coverso* y *el subcoverso*.—SENOVERSO DE UN ARCO *es la distancia entre el pie de su seno y el origen*; COSENOVERSO DE UN ARCO *es el senoverso de su complemento*; VERSO DE UN ARCO *es la mitad de su senoverso*; COVERSO DE UN ARCO *es el verso de su complemento;* SUBVERSO DE UN ARCO *es el verso de su complemento*, y SUBCOVERSO DE UN ARCO *es el verso de su complemento á 270°*.—El verso, el coverso, el subverso y el subcoverso, se llaman *líneas de Mendoza*, por haber sido este célebre matemático español el primero que las dió á conocer en sus excelentes *Tablas de Navegación*.—Siendo de muy poco uso las líneas y colíneas Trigonométricas auxiliares, limitaremos nuestro estudio á las principales, debiendo advertir que, al decir, en lo sucesivo, *líneas trigonométricas de un arco*, queremos expresar *líneas y colíneas trigonométricas principales de dicho arco.*

8. *Cualquiera que sea el arco de que se trate, el coseno y la cotangente son siempre reales, el seno y la tangente imaginarias y la secante y la cosecante complejas*, porque las dos primeras son paralelas, las dos siguientes perpendiculares y las dos últimas oblícuas á la dirección de la unidad (3). Más, como una línea trigonométrica puede ser positiva ó negativa, estableceremos la siguiente REGLA: *las líneas* (seno, tangente y secante) *son positivas, cuando están encima del eje real, y negativas, cuando están debajo; las colíneas* (coseno, cotangente y cosecante) *son positivas, cuando están á la derecha del eje imaginario, y negativas, cuando están á la izquierda.*

9. Aplicando la regla anterior á las lineas trigonométricas de los arcos AC, AC′, AC″ y AC‴, se observa que *si un arco tiene su extremo en el primer cuadrante, todas sus líneas son positivas; si lo tienen en el segundo, son todas negativas, menos el seno; si en el tercero, todas son positivas, menos el seno y el coseno, y si lo tienen en el cuarto, todas negativas menos el coseno.* (*Figura* 3.ª)

10. La expresión de una recta (*Fig.* 2.ª) DC oblícua á la unidad OC de dirección, se puede transformar en otra expresión que sea función del ángulo C que forme dicha recta con la dirección de la unidad.

En efecto: tracemos desde el extremo D de la oblícua DC la perpendicular DO á la dirección OC de la unidad; describamos con un radio CO′=1, el arco correspondiente al ángulo C; tracemos la perpendicular A′B′ á C′O, y designemos por los números *a* y *b* las longitudes respectivas de las rectas OC y DC. Según sabemos por el número 3 y su escolio, la expresión de DC es $a+b\sqrt{-1}$, la cual es igual á $\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{-1}\right)$. Ahora bien; $\sqrt{a^2+b^2}$ es la magnitud de DC, que podemos representar por el número *m*; $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a}{m}=\frac{OC}{DC}=\frac{CA'}{CB'}=CA'=\cos.a$, y $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b}{m}=\frac{DO}{DC}=\frac{A'B'}{CB'}=A'B'=\text{sen}.a$; luego la expresión $a+b\sqrt{-1}$ es igual á $m\,(\cos.\alpha+\text{sen}.\alpha\sqrt{-1})$, que es la expresión trigonométrica de DC. Por consiguiente, *la expresión trigonométrica de un segmento rectilíneo oblícuo á la dirección de la unidad se obtiene multiplicando el número que expresa su longitud por el coeficiente* $\cos.\alpha+\text{sen}\ \alpha\sqrt{-1}$, *siendo* α *el arco, de radio igual á uno, correspondiente al ángulo que dicho segmento forma con la direccion de la unidad.—Cuando la longitud de la recta sea igual á la unidad, su expresión trigonométrica queda reducida á* $\cos.\alpha+\sqrt{-1}\ \text{sen}.\alpha$.

LECCION 3.ª

Variaciones de las líneas trigonométricas de un arco

11. *Las líneas trigonométricas de un arco no sufren variación alguna, ni en magnitud ni en signo, cuando se agrega al arco un número cualquiera de circunferencias.*

En efecto: la magnitud y el signo de las líneas trigonométricas de un arco, dependen del extremo del arco (7 y 9). Si, pues, á un arco *a* se le agrega un número cualquiera de circunferencias, como resulta otro arco *a'* con el mismo extremo que el anterior, se verifican las siguientes igualdades, que demuestran el teorema: $\text{sn}a=\text{sn}a'$, $\cos a=\cos a'$, $\text{tg}a=\text{tg}a'$, $\text{sc}a=\text{sc}a'$ y $\text{csc}a=\text{csc}a'$.

ESCOLIO.—El teorema anterior puede también enunciarse diciendo: *dos arcos, que se diferencian en un múltiplo de la circunferencia, tienen las mismas líneas trigonométricas.*

12. *Las líneas trigonométricas de un arco no sufren variación alguna en su magnitud, cuando se agrega al arco un número* *impar de semicircunferencias, pero el seno y el coseno varían de signo.*

En efecto: agregar á un arco un número impar de semicircunferencias, es lo mismo que agregarle primero una semicircunferencia y después un número entero de circunferencias, porque un número impar de semicircunferencias equivale á una semicircunferencia más un número par de semicircunferencias, el cual, á su vez, equivale á un número de circunferencias mitad del anterior. Si, pues, á un arco cualquiera, tal como AC (*Fig.* 3.ª), se le agrega una semicircunferencia, resulta otro arco AC″, con su extremo en el cuadrante opuesto; por lo cual (9), y por ser iguales los triángulos rectángulos ODC y OD′C″, se verifican las siguientes igualdades: snAC= −snAC″, cosAC=− cosAC″, tgAC=tgAC″, ctgAC=ctgAC″, scAC=scAC″ y cscAC=cscAC″. Agregando, ahora, al arco AC″ un número cualquiera de circunferencias, resulta otro arco, cuyas líneas trigonométricas son respectivamente iguales á las del mismo nombre del arco AC″ (11).

ESCOLIO.—El teorema anterior puede también enunciarse diciendo: *dos arcos que se diferencian en un número impar de semicircunferencias, ó cuyos extremos son simétricos con relación al centro, tienen sus líneas trigonométricas del mismo nombre iguales en magnitud y en signo, menos los senos y los cosenos, que son de signo contrario.*

13. *Dos arcos, cuyos extremos son simétricos con relación al eje real, ó con relación al eje imaginario, tienen sus líneas trigonométricas del mismo nombre iguales en magnitud y de signo contrario, menos los cosenos, en el primer caso, y los senos, en el segundo, que son del mismo signo* (*Fig.* 3.ª)

En efecto: de lo dicho en el número 9 y de la igualdad de los triángulos rectángulos ODC y ODC‴, OAE y OAE′, OBG y OBG′, se deducen las siguientes igualdades que demuestran el teorema: snAC‴=DC‴= − DC=—snAC, cosAC‴=OD=cosAC, tgAC‴=AE′=—AE= −tgAC, ctgAC‴=BG′=—BG=− ctgAC, scAC‴=OE′=—OE= −scAC y cscAC‴=OG′=—OG=—cscAC; snAC′=D′C′=DC=snAC, cosAC′

$=OD'=-OD=-\cos AC$, $tgAC'=AE'=-AE=-tgAC$, $ctgAC'=BG'=-BG=-ctgAC$, $scAC'=OE'=-OE=-scAC$ y $cscAC'=OG'=-OG=-cscAC$.

COROLARIOS. 1.° *Dos arcos de igual magnitud, uno positivo y el otro negativo, tienen sus líneas trigonométricas del mismo nombre iguales en magnitud y de signo contrario, menos los cosenos, que son del mismo signo.* Porque los extremos de dichos arcos son simétricos con relación al eje real.

2.° *Dos arcos suplementarios tienen sus líneas trigonométricas del mismo nombre iguales en magnitud y de signo contrario, menos los senos, que son del mismo signo.* Porque los extremos de dichos arcos son simétricos con relación al eje imaginario.

3.° *Las líneas trigonométricas de un arco, que no tenga su extremo en el primer cuadrante, son iguales en magnitud á las líneas trigonométricas de un arco menor que un cuadrante.* Porque el extremo de dicho arco es simétrico del extremo de un arco menor que un cuadrante, verificándose la simetría con relación al eje imaginario, con relación al centro, ó con relación al eje real, según que el extremo del referido arco esté en el segundo, en el tercero, ó en el cuarto cuadrante.

4.° *Las líneas trigonométricas de un arco cualquiera son iguales en magnitud á las del mismo nombre, correspondientes á un arco que no exceda de 45°.* Porque, según el corolario anterior, las líneas trigonométricas de un arco cualquiera tienen igual magnitud que las del mismo nombre, correspondientes á un arco menor que un cuadrante. Si este arco, menor que un cuadrante, pasa de 45°, sus líneas y colíneas son respectivamente las colíneas y las líneas del arco complementario, el cual es evidentemente menor que 45°.

14. Si un arco crece de un modo contínuo desde cero hasta el infinito negativo, sus líneas trigonométricas sufren las mismas variaciones de magnitud que cuando el arco crece de un modo contínuo desde cero hasta el infinito positivo (núm. 13, C.° 1.°), y las variaciones de magnitud que experimentan las líneas trigonométricas de un arco, al crecer éste de un modo contínuo desde cero hasta el infinito positivo, son las mismas que hasta llegar el arco, en su crecimiento contínuo, á los 360°, porque todo arco mayor que una circunferencia tiene el mismo extremo que un arco que no exceda de 360°.

Las variaciones de magnitud que experimentan las líneas trigonométricas de un arco, al crecer éste de un modo contínuo desde cero hasta 360°, son las que expresa el siguiente cuadro:

Arco	Seno	Coseno	Tangente	Co-tangente	Secante	Co-secante
$a=0°$	0	1	0	∞	1	∞
a crece	crece	decrece	crece	decrece	crece	decrece
$a=90°$	1	0	∞	0	∞	1
a crece	decrece	crece	decrece	crece	decrece	crece
$a=180°$	0	1	0	∞	1	∞
a crece	crece	decrece	crece	decrece	crece	decrece
$a=270°$	1	0	∞	0	∞	1
a crece	decrece	crece	decrece	crece	decrece	crece
$a=360°$	0	1	0	∞	1	∞

De lo expuesto se deduce que, *si un arco crece de un modo contínuo, en el sentido positivo ó en el negativo, desde cero hasta el infinito, sus líneas trigonométricas varían en magnitud, de un modo tan contínuo, entre los límites siguientes: de cero á uno el seno y el coseno, de cero á infinito la tangente y la cotangente, y de uno á infinito la secante y la cosecante.*

ESCOLIOS.—1.° Si un arco varía de un modo contínuo, positiva ó negativamente, desde cero hasta el infinito, sus líneas trigonométricas varían de signo, en el momento de pasar el arco de un cuadrante al siguiente, (9). *Al pasar el arco del primer cuadrante al segundo, y al contrario, ó del tercer cuadrante al cuarto, y al contrario, todas las líneas varían de signo, menos el seno; y al pasar el arco del tercer cuadrante al segundo, y al* *contrario, ó del cuarto cuadrante al primero, y al contrario, todas las líneas varían de signo, menos el coseno.*

2.° *Si un arco crece de un modo continuo desde cero hasta el infinito positivo ó negativo, las expresiones de sus líneas trigonométricas*, según se desprende de lo anteriormente expuesto y de lo dicho en los números 8 y 10, *varían entre los límites siguientes: de* $\sqrt{-1}$ *á* $-\sqrt{-1}$ *el seno, de* $+1$ *á* -1 *el coseno, de* $+\infty\sqrt{-1}$ *á* $-\infty\sqrt{-1}$ *la tangente, de* $+\infty$ *á* $-\infty$ *la cotangente, de* $+1$ *á* $+\infty\sqrt{-1}$ *y de* $+1$ *á* $-\infty\sqrt{-1}$ *la secante, de* $+\infty\sqrt{-1}$ *á* $+\sqrt{-1}$ *y de* $+\sqrt{-1}$ *á* $-\infty\sqrt{-1}$ *la cosecante.* El seno y el coseno varían de signo al pasar por cero, la tangente y la cotangente al pasar por cero ó por el infinito, y la secante y la cosecante al pasar por el infinito.

LECCION 4.ª

Expresiones generales de los arcos

15. *Hallar la expresión general de todos los arcos que tienen el mismo extremo.*

El extremo dado puede ser un punto del primer cuadrante, del segundo, del tercero ó del cuarto. En cada uno de estos casos, el problema se resuelve agregando un número $2m\pi$ de circunferencias positivas ó negativas á la expresión correspondiente al arco de menor magnitud, entre todos los que tengan por extremo el referido punto.

16. *Hallar la expresión general de todos los arcos qne tienen el mismo seno.*

Si el seno conocido es $\left\{\begin{matrix}\text{positivo} = +n\sqrt{-1} \\ \text{negativo} = -n\sqrt{-1}\end{matrix}\right\}$, tómese *(Figura 3.ª)*, sobre el eje imaginario, á partir del centro, $\left\{\begin{matrix}\text{encima} \\ \text{debajo}\end{matrix}\right\}$ el eje real una longitud igual á la magnitud *n* del seno propuesto, y trácese, por el extremo de dicha longitud, la paralela al eje real. Los puntos $\left\{\begin{matrix} C \text{ y } C' \\ C''' \text{ y } C'' \end{matrix}\right\}$, en que esta paralela corta á la circunferencia, son los extremos de todos los arcos, cuyo seno es igual al dado (13), y cuyas expresiones respectivas son (15) $\left\{\begin{matrix} 2m\pi + a \text{ y } (2m+1)\pi - a \\ 2m\pi - a \text{ y } (2m+1)\pi + a \end{matrix}\right\}$, en que *m* es un número entero cualquiera, positivo ó negativo, incluso cero, y *a* representa la magnitud del menor arco, entre todos aquellos, cuyo seno tiene la magnitud dada *n*.

17. *Hallar la expresión general de todos los arcos que tienen el mismo coseno.*

Si el coseno conocido es $\left\{\begin{matrix} \text{positivo} = +n \\ \text{negativo} = -n \end{matrix}\right\}$, tómese *(Fig. 3.ª)*, sobre el eje real, á partir del centro, $\left\{\begin{matrix} \text{á la derecha} \\ \text{á la izquierda} \end{matrix}\right\}$ del eje imaginario, una longitud igual á la magnitud *n* del coseno dado, y trácese, por el extremo de dicha longitud, la paralela al eje imaginario. Los puntos $\left\{\begin{matrix} C \text{ y } C''' \\ C' \text{ y } C'' \end{matrix}\right\}$, en que esta paralela corta á la circunferencia, son los extremos de todos los arcos, cuyo coseno es igual al dado (13), y cuya expresión general es (15) $\left\{\begin{matrix} 2m\pi \pm a \\ (2m+1)\pi \pm a \end{matrix}\right\}$ en que *m* es un número entero cualquiera, positivo ó negativo, incluso cero, y *a* representa la magnitud del menor arco, entre todos aquellos, cuyo coseno tiene una magnitud *n* igual á la dada.

18. *Hallar la expresión general de todos los arcos que tienen la misma tangente.*

Si la tangente conocida es $\left\{\begin{matrix} \text{positiva} = +n\sqrt{-1} \\ \text{negativa} = -n\sqrt{-1} \end{matrix}\right\}$, tómese *(Figura 3.ª)*, sobre la tangente á la circunferencia en el origen de arcos, á partir de este punto, $\left\{\begin{matrix} \text{encima} \\ \text{debajo} \end{matrix}\right\}$ del eje real, una longitud igual á la magnitud *n* de la tangente propuesta, y trácese la recta que pasa por el extremo de dicha longitud y por el centro. Los puntos $\begin{Bmatrix} C \text{ y } C'' \\ C''' \text{ y } C' \end{Bmatrix}$, en que esa recta corta á la circunferencia, son los extremos de todos los arcos, cuya tangente es igual á la dada (12 E.°), y cuya expresión general es (15) $\begin{Bmatrix} m\pi + a \\ m\pi - a \end{Bmatrix}$, en que *m* es un número entero cualquiera, positivo ó negativo, incluso cero, y *a* representa la magnitud del menor arco, entre todos aquellos, cuya tangente tiene una magnitud *n* igual á la dada.

ESCOLIO.—Las expresiones respectivas de todos los arcos que tienen por extremos los puntos $\begin{Bmatrix} C \text{ y } C''' \\ C'' \text{ y } C' \end{Bmatrix}$, son $\begin{Bmatrix} 2m\pi + a \text{ y} \\ 2m\pi - a \text{ y} \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} (2m+1)\pi + a \\ (2m+1)\pi - a \end{Bmatrix}$. La primera representa un número par de semicircunferencias, positivas ó negativas, más el arco $\begin{Bmatrix} +a \\ -a \end{Bmatrix}$, y la segunda un número impar de semicircunferencias, positivas ó negativas, más el mismo arco $\begin{Bmatrix} +a \\ -a \end{Bmatrix}$. Por lo tanto, pueden ambas condensarse, digámoslo así, en una sola expresión $\begin{Bmatrix} m\pi + a \\ m\pi - a \end{Bmatrix}$ que represente un número cualquiera *m*, par ó impar, de semicircunferencias, positivas ó negativas.

19. *Hallar la expresión general de todos los arcos que tienen la misma cotangente.*

Si la cotangente conocida es $\begin{Bmatrix} \text{positiva} = +n \\ \text{negativa} = -n \end{Bmatrix}$ tómese (*Fig.* 3.ª) sobre la tangente á la circunferencia en el origen de complementos, á partir de este punto, $\begin{Bmatrix} \text{á la derecha} \\ \text{á la izquierda} \end{Bmatrix}$ del eje imaginario, una longitud igual á la magnitud *n* de la cotangente propuesta, y trácese la recta que pasa por el extremo de dicha longitud y por el centro. Los puntos $\begin{Bmatrix} C \text{ y } C'' \\ C' \text{ y } C''' \end{Bmatrix}$, en que esa recta corta á la circunferencia, son los extremos de todos los arcos, cuya cotangente es igual á la dada (12 E.º), y cuya expresión general es (15 y 18 E.º) $\begin{Bmatrix} m\pi + a \\ m\pi - a \end{Bmatrix}$, en que m es un número entero cualquiera, positivo ó negativo, incluso cero, y a representa la magnitud del menor arco, entre todos aquellos, cuya contangente tiene una magnitud n igual á la dada.

20. *Hallar la expresión general de todos los arcos que tienen la misma secante.*

Si la secante viene dada por su expresión general $\begin{Bmatrix} 1+n\sqrt{-1} \\ 1-n\sqrt{-1} \end{Bmatrix}$ tómese (*Fig.* 3.ª), sobre la tangente á la circunferencia en el origen de arcos, á partir de este punto, $\begin{Bmatrix} \text{encima} \\ \text{debajo} \end{Bmatrix}$ del eje real, una longitud igual á la magnitud n, y trácese la recta que pasa por el extremo de dicha longitud y por el centro. Los puntos $\begin{Bmatrix} C \text{ y } C'' \\ C''' \text{ y } C' \end{Bmatrix}$, en que esa recta corta á la circunferencia, son los extremos de todos los arcos, cuya secante es igual á la dada (12, E.º), y cuya expresión general es $\begin{Bmatrix} m\pi + a \\ m\pi - a \end{Bmatrix}$ (15 y 18, E.º), en que m es un número entero cualquiera, positivo ó negativo, incluso cero, y a representa la magnitud del menor arco, entre todos aquellos, cuya secante tiene por coeficiente de la parte imaginaria una magnitud n, que es la dada, en la expresión general $\begin{Bmatrix} 1+n\sqrt{-1} \\ 1-n\sqrt{-1} \end{Bmatrix}$.

Si como generalmente ocurre, la secante viene dada solo por el número α que expresa su magnitud, precedido del signo *más* ó del signo *menos*, para proceder como anteriormente, es preciso determinar antes la expresión general $1 \pm n\sqrt{-1}$, en la cual no hay más incógnita que n. Esto se consigue, teniendo en cuenta que el módulo $\sqrt{1+n^2}$ de dicha expresión es igual al número dado α (3, E.º). En su virtud, se tendrá sucesivamente: $\sqrt{1+n^2}=\alpha$; $1+n^2=\alpha^2$; $n^2=\alpha^2-1$ y $n=\sqrt{\alpha^2-1}$.

21. *Hallar la expresión general de todos los arcos que tienen la misma cosecante.*

Si la cosecante viene dada por su expresión general $\left\{\begin{matrix}\sqrt{-1}+n \\ \sqrt{-1}-n\end{matrix}\right\}$, tómese (Fig. 2.ª), sobre la tangente á la circunferencia en el origen de complementos, á partir de este punto, $\left\{\begin{matrix}\text{á la derecha} \\ \text{á la izquierda}\end{matrix}\right\}$ del eje imaginario, una longitud igual á la magnitud n, y trácese la recta que une el extremo de dicha longitud con el centro. Los puntos $\left\{\begin{matrix}C \text{ y } C'' \\ C' \text{ y } C'''\end{matrix}\right\}$ en que esa recta corta á la circunferencia, son los extremos de todos los arcos, cuya cosecante es igual á la dada (12, E.º), y cuya expresión general es $\left\{\begin{matrix}m\pi+a \\ m\pi-a\end{matrix}\right\}$ (15 y 18, E.º), en que m es un número entero cualquiera, positivo ó negativo, incluso cero, y a representa la magnitud del menor arco, entre todos aquellos, cuya cosecante tiene por coeficiente de su parte imaginaria una magnitud igual á n.

Si la cosecante viene dada solo por el número que expresa su magnitud, precedido del signo más ó del signo menos, se procede como hemos explicado en el problema anterior.

22. ESCOLIO GENERAL.—El problema: «dado un arco, hallar cada una de sus líneas trigonométricas», tiene una solución única, que se determina, gráficamente, aplicando el procedimiento que inmediatamente se desprende de la definición de cada una de las líneas trigonométricas de un arco dado, ó numéricamente, por medio de las tablas trigonométricas, que más adelante explicaremos; pero el problema inverso: «dada una línea, determinar el arco correspondiente», es indeterminado, porque á cada línea trigonométrica dada corresponden infinidad de arcos, que se determinan dando á m todos los valores enteros posibles, desde cero hasta el infinito, positivo ó negativo, en las fórmulas establecidas al resolver los problemas de los números 16, 17, 18, 19, 20 y 21, después de que, por el método explicado en dichos números, ó por medio de las tablas, se haya determinado el arco a, menor de todos los comprendidos en las referidas fórmulas.

La indeterminación de este problema inverso desaparece por completo, cuando se sabe de antemano que el arco, de que se trata, no es mayor que $\frac{\pi}{2}$, porque todo arco, que no exceda de un cuadrante, tiene cada una de sus líneas trigonométricas diferentes de las del mismo nombre, correspondientes á cualquier otro arco que tampoco pase de un cuadrante (14). Si el arco no es mayor que 180°, puede ser determinado, sin ambigüedad, por cada una de sus líneas trigonométricas, menos por el seno, porque éste determina dos arcos, menores que 180°, cuyos extremos son simétricos con relación al eje imaginario (13). Si el arco puede llegar á valer 360°, es necesario, para determinarlo, el conocimiento simultáneo de dos líneas, siempre que no sean estas las que forman una cualquiera de las combinaciones binarias que pueden hacerse con la tangente, la cotangente, la secante y la cosecante, porque dos cualesquiera de estas líneas determinan dos arcos, cuyos extremos son simétricos con relación al centro.

LECCIÓN 5.ª

Relaciones entre las líneas trigonométricas de un arco

23. Si convenimos en designar las expresiones generales de las líneas trigonométricas de un arco a por las notaciones Sna, $Cosa$, Tga, $Ctga$, Sca y $Csca$, y suponemos que las magnitudes, representadas por *sna*, *cosa*, *tga*, *ctga*, *sca* y *csca*, son susceptibles de ser positivas y negativas, podremos establecer las siguientes igualdades (3, 8 y 10): $Sna = sna\sqrt{-1}$; de donde: $sna = \frac{Sna}{\sqrt{-1}}$;

$Cosa = cosa$; $Tga = tga\sqrt{-1}$; de donde: $tga = \frac{Tga}{\sqrt{-1}}$; $Ctga = ctga$;

$Sca = sca\ (cosa + \sqrt{-1}\ sna)$; de donde: $sca = \frac{Sca}{cosa + \sqrt{-1}\ sna}$;

$Csca = csca\ (cosa + \sqrt{-1}\ scna)$; de donde: $csca = \frac{Csca}{cosa + \sqrt{-1}\ sna}$

Estas igualdades nos permiten transformar las relaciones que existen entre las magnitudes, positivas ó negativas, de las líneas trigonométricas de un arco, en las relaciones análogas entre sus expresiones generales, y viceversa; mas, como ordinariamente se opera con las magnitudes, y no con las expresiones generales de las líneas, y como, por otra parte, es más fácil hallar las relaciones que hay entre las primeras que las ligan á las segundas, nos limitaremos á determinar las relaciones entre las magnitudes de las líneas trigonométricas de un arco; debiendo advertir: 1.º que, cuando, en adelante, hablemos de relaciones entre las líneas trigonométricas de un arco, se sobreentenderá que nos referimos á las que existen entre sus magnitudes, lo mismo cuando éstas son positivas que cuando son negativas; y 2.º que en Trigonometría siempre se supone que el radio se toma por unidad, porque, si así no fuera, bastaría sustituir cada línea por su razón al radio (5), en las fórmulas obtenidas en el supuesto de ser el radio la unidad, para pasar á las fórmulas análogas, que se obtendrían directamente, aunque con menos facilidad, si no se tomára por unidad el radio.

24. *Las relaciones fundamentales entre las líneas trigonométricas de un mismo arco son las siguientes*:

$$sn^2a + cos^2a = 1 \ldots \text{(I)};\ tga = \frac{sna}{cosa} \ldots \text{(II)};\ ctga = \frac{cosa}{sna} \ldots \text{(III)};$$

$$sca = \frac{1}{cosa} \ldots \text{(IV)};\ csa = \frac{1}{sna} \ldots \text{(V)}.$$

En efecto: designando por *a* el arco AC (Fig. 3.ª); aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo COD; comparando los triángulos semejantes COD y EOA, BOG y FOC, y teniendo en cuenta que es $OA=OC=OB=1$, $CD=FO=sna$, $CF=OD=cosa$, $AE=tga$, $OE=sca$, $BG=ctga$ y $OG=csca$, se pueden establecer las relaciones (I), (II), (III), (IV) y (V), que nos hemos propuesto demostrar, y que son completamente generales, porque se verifican, según acabamos de ver, no solo para un arco que, como el AC, tenga su extremo en el primer cuadrante, sino también para un arco cualquiera (13, C.º 3.º), aunque el extremo de éste coincida con uno de los extremos de cualquiera de los ejes (14).

ESCOLIO.—Por la simple inspección de las relaciones anteriores, vemos: 1.º que el seno y el coseno son las únicas líneas que, en realidad, pueden considerarse como principales; y 2.º que *el seno, la tangente y la secante, son respectivamente recíprocas de la cosecante, de la cotangente y del coseno.*

25. Las relaciones, establecidas en el número anterior, nos permiten resolver los problemas siguientes:

1.º *Dado el seno de un arco, hallar cada una de las demás líneas.*—Trasponienño sn^2a en la relación (I), y extrayendo la raiz cuadrada de los dos miembros de la igualdad resultante, se tiene: $cosa=\sqrt{1-sn^2a}$. Teniendo en cuenta este valor y las demás relaciones, podemos escribir:

$$tga=\frac{sna}{\sqrt{1-sn^2a}};\ ctga=\frac{\sqrt{1-sn^2a}}{sna};\ sca=\frac{1}{\sqrt{1-sn^2a}};\ csca=\frac{1}{sna}.$$

2.º *Dado el coseno de un arco, hallar cada una de las demás líneas trigonométricas.*—Trasponiendo cos^2a en la relación (I), y extrayendo la raiz cuadrada de los dos miembros de la igualdad resultante, se tiene: $sna=\sqrt{1-cos^2a}$. Teniendo en cuenta este valor y las demás relaciones, podemos escribir:

$$tga=\frac{\sqrt{1-cos^2a}}{cosa};\ ctga=\frac{cosa}{\sqrt{1-cos^2a}};\ sca=\frac{1}{cosa};\ csca=\frac{1}{\sqrt{1-cos^2a}}$$

3.º *Dada la tangente de un arco, hallar cada una de las demás líneas trigonométricas.*—Elevando al cuadrado la relación

(II), y agregando la unidad á los dos miembros de la igualdad resultante, se tiene: $1+tg^2a=\frac{sn^2a}{cos^2a}+1=\frac{sn^2a+cos^2a}{cos^2a}=\frac{1}{cos^2a}$; de donde: $cos^2a=\frac{1}{1+tg^2a}$; ó bien: $cosa=\frac{1}{\sqrt{1-tg^2a}}$. Teniendo en cuenta este valor y las relaciones fundamentales, podemos escribir:

$$sna=\frac{tga}{\sqrt{1-tg^2a}};\ ctga=\frac{1}{tga};\ sca=\sqrt{1+tg^2a};csca=\frac{\sqrt{1-tg^2a}}{tga}.$$

4.° *Dada la cotangente de un arco, hallar cada una de las demás líneas trigonométricas.*—Elevando al cuadrado la relación (III), y agregando la unidad á los dos miembros de la igualdad resultante, se tiene:

$$1+ctg^2a=1+\frac{cos^2a}{sn^2a}=\frac{sn^2a+cos^2a}{sn^2a}=\frac{1}{sn^2a};$$

de donde: $sn^2a=\frac{1}{1+ctg^2a}$; ó bien: $sna=\frac{1}{\sqrt{1+ctg^2a}}$. Teniendo en cuenta este valor y las relaciones fundamentales, podemos escribir: $cosa=\frac{ctga}{\sqrt{1+ctg^2a}}$; $tga=\frac{1}{ctga}$; $sca=\frac{\sqrt{1+ctg^2a}}{ctga}$; $csca=\sqrt{1+ctg^2a}$.

5.° *Dada la secante de un arco, hallar cada una de las demás líneas trigonométricas.*—La relación (IV) dá: $cosa=\frac{1}{sca}$. Teniendo en cuenta este valor y las relaciones fundamentales podemos escribir; $sna=\frac{\sqrt{sc^2a-1}}{sca}$; $tga=\sqrt{sc^2a-1}$; $ctga=\frac{1}{\sqrt{sc^2a-1}}$; $csca=\frac{sca}{\sqrt{sc^2a-1}}$.

6.° *Dada la cosecante de un arco, hallar cada una de las demás líneas trigonométricas.*—La relación (V) dá: $sna=\frac{1}{csca}$.

Teniendo en cuenta este valor y las relaciones fundamentales, podemos escribir: $\cos a = \frac{\sqrt{\csc^2 a - 1}}{\csc a}$; $\operatorname{tg} a = \frac{1}{\sqrt{\csc^2 a - 1}}$;

$\operatorname{ctg} a = \sqrt{\csc^2 a - 1}$; $\operatorname{sc} a = \frac{\csc a}{\sqrt{\csc^2 a - 1}}$.

ESCOLIOS.—1.º Al determinar las fórmulas que resuelven los problemas anteriores, hemos prescindido del doble signo $\pm$ que debe afectar á todo radical de 2.º grado, porque, según hemos advertido en el número 23, aquí solo tratamos de las magnitudes de las líneas.

2.º Cuando hayamos de aplicar las fórmulas precedentes, á la resolución de algún caso particular, conviene racionalizar previamente los denominadores que no sean racionales. Así, para aplicar la fórmula: $\operatorname{sn} a = \frac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}$, multiplicaremos los dos términos del segundo miembro por su denominador, y resultará: $\operatorname{sn} a = \frac{\operatorname{tg} a \sqrt{1 + \operatorname{ta}^2 a}}{1 + \operatorname{tg}^2 a}$.

3.º Teniendo en cuenta que *el seno* CD *de un arco* AC (Figura 3.ª) *menor que un cuadrante es de igual longitud que la mitad de la cuerda* CC‴ *del arco duplo* CAC‴, en virtud de la propiedad de que goza todo diámetro perpendicular á una cuerda CC‴, y recordando los valores de los lados de algunos polígonos regulares inscritos, así como las fórmulas fundamentales (24), podemos hallar los valores numéricos de las líneas trigonométricas de algunos arcos particulares. Así por ejemplo las líneas trigonométricas de los arcos de 30° y 45° son las siguientes; $\operatorname{sn} 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$, $\operatorname{sc} 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

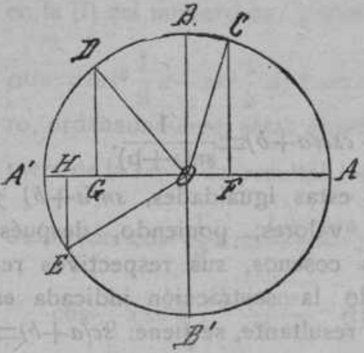
$$\csc 30^\circ = 2;\ \operatorname{sn} 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1,$$

$$\operatorname{sc} 45^\circ = \csc 45^\circ = \sqrt{2}.$$

LECCIÓN 6.ª

Operaciones con los arcos y sus líneas trigonométricas

FIGURA 4.ª



26. *Hallar las líneas trigonométricas de la suma y de la diferencia de dos arcos.*

1.° Sean AC y AD (Figura 4.ª) dos arcos cualesquiera, cuyas respectivas magnitudes representaremos por a y b, y sea AF la suma de dichos dos arcos, que vendrá representada por $a+b$. Siendo la longitud del radio igual á la unidad, las expresiones respectivas de los radios OC, OD y OF serán (10): $cosa+\sqrt{-1}sna$, $cosb+\sqrt{-1}snb$ y $cos\,(a+b)+\sqrt{-1}\,sn(a+b)$; pero lo mismo en posición que en magnitud, OF es respecto de OC, lo que es OH respecto de la unidad OA$=+1$; luego OF es el producto de OC por OD, y por consecuencia, $cos\ (a+b)+\sqrt{-1}\ sn\ (a+b) = (cosa+ +\sqrt{-1}\ cna)\ (cosb+\sqrt{-1}\ snb) = (cosa\ cosb - sna\ snb) + (sna\ cosb+cosa\ snb)\ \sqrt{-1}$. Igualando las partes reales, así como las coeficientes de las partes imaginarias, resulta: $sn\ (a+b) = sna\ cosb+cosa\ snb$ (I); $cos(a+b)=cosa\ cosb-sna\ snb$. (II).

2.° Si, en las fórmulas anteriores, sustituimos b por $-b$, se tiene (13, C.° 1.°): $sn\ (a-b)=sna\ cosb-cosa\ snb$ (I); $cos(a-b)=cosa\ cosb+sna\ snb$ (II).

3.° Sabemos (24) que

$$tg(a+b)=\frac{sn(a+b)}{cos(a+b)} \text{ y } ctg(a+b)=\frac{cos(a+b)}{sn(a+b)}$$

Sustituyendo, en cada una de estas igualdades; $sn(a+b)$ y $cos(a+b)$ por sus respectivos valores, hallados anteriormente, y dividiendo los dos términos de la primera fracción resultante por *cosa cosb*, y los dos términos de la segunda por *sna snb*, se tiene:

$$tg(a+b)=\frac{tga+tgb}{1-tga\ tgb}\ \text{(I)};\quad ctg\,(a+b)=\frac{ctga\ ctgb-1}{ctga-ctgb}.\ \text{(II)}.$$

4.° Si, en las dos fórmulas precedentes, sustituimos *b* por —*b*, se tiene (13, C.° 1.°) : $tg\,(a-b)=\frac{tga+tgb}{1+tga\ tgb}$. (I); $ctg\,(a-b)$ $=\frac{1+ctga\ ctgb}{ctgb-ctga}$ (II).

5.° Sabemos (24) que

$$sc(a+b)=\frac{1}{cos(a+b)}\ \text{y}\ csc(a+b)=\frac{1}{sn(a+b)}.$$

Sustituyendo, en cada una de estas igualdades, *sn(a+b) y cos(a+b)* por sus respectivos valores; poniendo, después, en vez de los senos y de los cosenos, sus respectivos recíprocos, (24, E.°), y efectuando la sustracción indicada en el denominador de la fracción resultante, se tiene: $sc(a+b)=$ $\frac{sca\ scb\ csca\ cscb}{csca\ cscb-sca\ scb}$ (I); $csc(a+b)=\frac{sca\ scb\ csca\ cscb}{sca\ cscb+csca\ scb}$. (II).

6.° Si, en las dos fórmulas precedentes, ponemos —*b* en lugar de *b*, resulta (13, C.° 1.°):

$$sc(a-b)=\frac{sca\ scb\ csca\ cscb}{sca\ scb+csca\ cscb}.\ \text{(I)};$$

$$csc(a-b)=\frac{sca\ scb\ csca\ cscb}{sca\ cscb-csca\ scb}.\ \text{(II)}$$

ESCOLIO.—Las fórmulas, que expresan los valores de las líneas trigonométricas de la suma de dos arcos, pueden aplicarse á determinar las líneas de la suma de tres ó más arcos. Así, por ejemplo tenemos: $sn(a+b+c)=sn(a+b)\ cosc+cos(a+b)\ snc=$ $(sna\ cosb+cosa\ snb)\ cosc+(csna\ csnb-sna\ snb)snc=sna\ cosb\ cosc$ $+cosa\ snb\ cosc+cosa\ cosb\ snc-sna\ snb\ snc$. Análogamente hallaríamos las demás líneas de $a+b+c$, y pasaríamos de la suma de tres arcos á la de cuatro, de ésta á la de cinco, y así sucesivamente.

27. *Hallar las líneas trigonométricas del duplo y de la mitad de un arco.*

1.° Si, en las fórmulas, obtenidas (26, 1.°, 2.° y 3.°) hacemos $b=a$, resulta: $sn2a=2sna\,cosa$...(I); $cos2a=cos^2a-sn^2a$. (II);
$tg2a=\frac{2tga}{1-tg^2a}$ (III); $ctg2a=\frac{ctg^2a-1}{2ctga}$ (IV); $sc2a=\frac{sc^2a\,csc^2a}{csc^2a-sc^2a}$. (V;
$csc2a=\frac{sca\,csca}{2}$ (VI).

2.° Si, en la fórmula (II), que hemos concluido de hallar, y en la (I) del número 24, ponemos $\frac{1}{2}a$, en vez de a, se tiene $cosa=cos^2\frac{1}{2}a-sn^2\frac{1}{2}a$; $1=cos^2\frac{1}{2}a+sn^2\frac{1}{2}a$. Sumando, primero, ordenadamente, estas igualdades, y restando, después, la primera de la segunda, resulta: $1+cosa=2cos^2\frac{1}{2}a$; $1-cosa=2sn^2\frac{1}{2}a$; de donde: $cos^2\frac{1}{2}a=\frac{1+cosa}{2}$; $sn^2\frac{1}{2}a=\frac{1-cosa}{2}$; ó bien:

$$cos\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{1+cosa}{2}}\ \text{(I)};\quad sn\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{1-cosa}{2}}.\ \text{(II)};$$

y por consiguiente (24):

$$tg\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{1-cosa}{1+cosa}}..\text{(III)};\quad ctg\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{1+cosa}{1-cosa}}.\ \text{(IV)};$$

$$sc\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{2(1+cosa)}{1+cosa}}...\text{(V)};\quad csc\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{2(1-cosa)}{1-cosa}}.\ \text{(VI)}.$$

Escolio.—Las fórmulas (I) y (II) precedentes, suelen también emplearse en la siguiente forma:

$$2cos^2\frac{1}{2}a=1+cosa\ (1);\quad 2sn^2\frac{1}{2}a=1-cosa\ (2)$$

28. *Hallar la suma y la diferencia de dos líneas trigonométricas del mismo nombre, pertenecientes á dos arcos distintos.*

1.° Si a y b son dos arcos cualesquiera, y designamos por a' y b', respectivamente, la semisuma y la semidiferencia de dichos arcos, se tendrá: $a'=\frac{a+b}{2}$; $b'=\frac{a-b}{2}$; de donde, sumando y restando, sale: $a=a'+b'$; $b=a'-b'$. Si, ahora, aplicamos á los arcos a' y b' las fórmulas halladas (26, 1.° y 2.°) resulta: $sn(a'+b')=sna'\,cosb'+cosa'\,snb'$; $sn(a'-b')=sna'\,cosb'-cosa'\,snb'$;

$cos(a'+b')=cosa'cosb'-sna'snb'; cos(a'+b')=cosa'cosb'+sna'snb'$
Combinando por suma y por resta, sucesivamente, las dos primeras de estas cuatro igualdades, y haciendo lo mismo con las otras dos, se obtienen las siguientes: $sn(a'+b')+sn(a'-b')=2sna'cosb'$; $sn(a'+b')-sn(a'-b')=2cosa'snb'$; $cos(a'+b')+cos(a'-b')=2cosa'cosb'$; $cos(a'+b')-cos(a'-b')-2sna'snb'$. Y sustituyendo a', b', $a'+b'$ y $a'-b'$ por sus respectivos valores, se tiene finalmente:

$$sna+snb=2sn\frac{a+b}{2}cos\frac{a-b}{2}...(I); sna-snb=2cos\frac{a+b}{2}sn\frac{a-b}{2}...(II);$$

$$cosa+cosb=2cos\frac{a+b}{2}cos\frac{a-b}{2}. \text{ (III)};$$

$$cosa-cosb=-2sn\frac{a+b}{2}sn\frac{a-b}{2}. \text{ (IV)}.$$

ESCOLIO.—Dividiendo, miembro á miembro, las fórmulas (I) y (II), que concluimos de establecer resulta: $\frac{sna+snb}{sna-snb}=$
$\frac{2sn\frac{1}{2}(a+b)cos\frac{1}{2}(a-b)}{2cos\frac{1}{2}(a+b)sn\frac{1}{2}(a-b)}=tg\frac{1}{2}(a+b)ctg\frac{1}{2}(a-b)=tg\frac{1}{2}(a+b)$
$\times\frac{1}{tg\frac{1}{2}(a-b)}=\frac{tg\frac{1}{2}(a+b)}{tg\frac{1}{2}(a-b)}$. (I). Por lo tanto: *la suma de los senos de dos arcos, partida por su diferencia, es igual á la tangente de la semisuma de dichos arcos, partida por su semidiferencia.*

2.° Teniendo en cuenta las fórmulas (II), (III), (IV) y (V) del número 24, las (I) del 26 (1.° y 2.°) y las del 28 (1.°), podemos escribir:

$$tga+tgb=\frac{sn(a+b)}{cosa\,cosb}. \text{ (I)}; \quad tga-tgb=\frac{sn(a-b)}{cosa\,cosb}. \text{ (II)};$$

$$ctga+ctgb=\frac{sn(a+b)}{sna\,snb}. \text{ (III)}; \quad ctga-ctgb=\frac{sn(b-a)}{sna\,snb}. \text{ (IV)};$$

$$sca+scb=\frac{2cos\frac{1}{2}(a+b)cos\frac{1}{2}(a-b)}{cosa\,cosb}. \text{ (V)};$$

$$sca-scb=\frac{2sn\frac{1}{2}(a+b)sn\frac{1}{2}(a-b)}{cosa\,cosb}. \text{ (VI)};$$

$$csca+cscb=\frac{2sn\frac{1}{2}(a+b\,cos\frac{1}{2}(a-b)}{sna\,snb}. \text{ (VII)};$$

$$csca-cscb=\frac{2cos\frac{1}{2}(a+b)sn\frac{1}{2}(a-b)}{sna\,snb}. \text{ (VIII.}$$

CAPÍTULO II

Tablas trigonométricas

LECCIÓN 7ª.

Construcción de unas tablas trigonométricas

29. TABLAS TRIGONOMÉTRICAS, *son estados ó cuadros que contienen, en progresión aritmética creciente, arcos que no pasan de 90°, juntamente con los valores numéricos de las líneas trigonométricas de dichos arcos, ó los logaritmos de estos valores numéricos.* De esta definición se deduce que las tablas trigonométricas pueden ser *naturales* ó *logarítmicas*, según que contengan, además de los arcos, los valores numéricos de sus líneas trigonométricas, ó los logaritmos de esto valores numéricos. No es necesario que las tablas contengan arcos mayores que 90°, porque las líneas trigonométricas de un arco mayor que un cuadrante tienen igual valor que las líneas del mismo nombre, correspondientes á un arco menor que un cuadrante (13, C.° 3.°), y, por lo que respecta al signo, éste se conoce siempre sabiendo en qué cuadrante tiene el arco su extremo (9). Como los arcos crecen de un modo contínuo, y, por lo mismo, desde cero hasta 90° hay infinidad de arcos, las tablas solo pueden contener los arcos creciendo en progresión aritmética; por ejemplo: de 1″ en 1″, de 10″ en 10″, de 1′ en 1′ ó de 10′ en 10′. Para construir unas tablas, solo es necesario hallar directamente los valores numéricos de las líneas trigonométricas correspondientes á los arcos que figuran en ellas hasta 45°, porque las líneas y colíneas de un arco, que, sin exceder de 90°, pase de 45°, son respectivamente las colíneas y las líneas de otro arco menor que 45° (13, C.° 4.°). En la construcción de unas tablas, se empieza por determinar el valor numérico de las líneas del arco menor que ha de figurar en ellas; para conseguir esto, demostraremos los teoremas siguientes.

30. *Todo arco positivo, menor que un cuadrante, es mayor que su seno y menor que su tangente.*

En efecto: si el arco AC (fig.ª 3.ª), que representaremos por a, es positivo y menor que un cuadrante, su seno CD es menor que la cuerda AC, porque el primero es perpendicular y la segunda oblícua al diámetro AA', y como la cuerda AC es menor que el arco que subtiende, se tiene, evidentemente: $sna < a$. Por otra parte: el area del sector OAC es menor que el area del triángulo OAT; luego si es $\frac{1}{2}\ OA + AC < \frac{1}{2}\ OA + AT$, también será $AC = a < AT = tga$. Se tiene, pues, la siguiente limitación: $sna < a < tga$.

COROLARIO. *La relación entre el seno de un arco positivo menor que un cuadrante y el mismo arco, tiene por límite la unidad, cuando el arco tiende hacia cero.*

En efecto: de las desigualdades $sna < a$ y $tga = \frac{sna}{cosa} > a$, se deducen respectivamente las siguientes: $\frac{sna}{a} < 1$ y $\frac{sna}{a} > cosa$; mas como el limite de $cosa$ es la unidad, cuando a tiende hacia cero, con mayor razón será la unidad el límite de $\frac{sna}{a}$.

31. *El seno de un arco positivo, menor que un cuadrante, es mayor que la diferencia entre el arco y la cuarta parte del cubo de dicho arco.*

En efecto: según el teorema anterior, se verifica: $tga = \frac{sna}{cosa} > a$; de donde: $\frac{sn \frac{1}{2} a}{cos \frac{1}{2} a} > \frac{1}{2} a$; y, por lo tanto: $sn \frac{1}{2} a > \frac{1}{2} a \, cos \frac{1}{2} a$ Multiplicando los dos miembros de esta última desigualdad por $2 \, cos \frac{1}{2} a$, resulta: $2sn \frac{1}{2} a \, cos \frac{1}{2} a > a \, cos^2 \frac{1}{2} a$. Teniendo en cuenta que $2sn \frac{1}{2} a \, cos \frac{1}{2} a = sna$ (27, 1.º), y que $cos^2 \frac{1}{2} a = 1 - sn^2 \frac{1}{2} a$ (24, I), podemos escribir: $sna > a(1 - sn^2 \frac{1}{2} a) = a - asn^2 \frac{1}{2} a$; pero como es $sn \frac{1}{2} a < \frac{1}{2} a$, también será $sn^2 \frac{1}{2} a < \frac{a^2}{4}$. Si en la diferencia $a - a \, sn^2 \frac{1}{2} a$ ponemos $\frac{a^2}{4}$ en vez de $sn^2 \frac{1}{2} a$, dicha diferencia disminuye, por aumentar el sustraendo, y se convierte en $a-a\dfrac{a^2}{4}=a-\dfrac{a^3}{4}$;

y como es $sna>a-asn^2\frac{1}{2}a$, con mayor razón será $sna>a-\dfrac{a^3}{4}$, que es lo que nos habíamos propuesto demostrar.

32. Siendo igual á un minuto el arco menor de las tablas que nosotros usaremos, vamos á resolver los siguientes problemas.

1.º *Hallar el valor numérico del arco de un minuto.*— Como la longitud de la media circunferencia, ó del arco de 180°, es igual á π, en el supuesto de que el radio se tome por unidad, la longitud del arco de un grado será $\dfrac{\pi}{180}$, y del arco de $1'$ vendrá expresado por

$$\frac{\pi}{180}:60=\frac{\pi}{180\times60}=\frac{3'141592...}{10800}=0'000290888208.....$$

2.º *Hallar el valor del seno de un minuto.* —Según los teoremas 30 y 31, se verifica:

$$0'000290888208....>sn\,1'>0'000290888208...$$

$$-\frac{0'000290888208^3...}{4}>0'000290888208.....-\frac{0'0003^3}{4}.=$$

$$=0'000290888208..-\frac{0'000000000027}{4}>0'000290888208....$$

$$-\frac{0'000000000028}{4}=0'000290888208....-0'000000000007$$

$=0'000290888201$. Vemos, pues, que el valor del seno de un minuto está comprendido entre los valores 0'000290888208.... y 0'000290888201, cuya diferencia 0'000000000007 es menor que una unidad del undécimo órden subdécuplo, y, por lo tanto, cualquiera de dichos dos valores será el del seno de un minuto, con un error menor que una unidad del expresado órden.

3.º *Hallar el valor del coseno de un minuto.*—Sabemos que $2sn^2\dfrac{a}{2}=1-cosa$; de donde: $cosa=1-2sn^2\dfrac{a}{2}$; pero siendo $sn\dfrac{a}{2}<\dfrac{a}{2}$, también será $sn^2\dfrac{a}{2}<\dfrac{a^2}{4}$; luego, si sustituimos

$sn^2\frac{a}{2}$ por $\frac{a^2}{4}$, se tendrá: $cos a = 1 - 2 \times \frac{a^2}{4}$, con un error $E =$ $= \left(1 - 2sn^2\frac{a}{2}\right) - \left(1 - 2 \times \frac{a^2}{4}\right) = 1 - 2sn^2\frac{a}{2} - 1 + 2 \times \frac{a^2}{4}$ $= -2sn^2\frac{a}{2} + 2 \times \frac{a^2}{4} = 2\left(\frac{a^2}{4} - sn^2\frac{a}{2}\right) = 2\left(\frac{a}{2} + sn\frac{a}{2}\right)$ $\left(\frac{a}{2} - sn\frac{a}{2}\right)$. Sumando $\frac{a}{2}$ á los dos miembros de la desigualdad $sn\frac{a}{2} < \frac{a}{2}$, y despejando $\frac{1}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^3$ en la desigualdad $sn\frac{a}{2} > \frac{a}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^3$, resulta: $\frac{a}{2} + sn\frac{a}{2} < a; \frac{1}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^3$ $> \frac{a}{2} - sn\frac{a}{2}$; y si en la igualdad $E = 2\left(\frac{a}{2} + sn\frac{a}{2}\right) \times$ $\times \left(\frac{a}{2} - sn\frac{a}{2}\right)$, ponemos a en vez de $\frac{a}{2} + sn\frac{a}{2}$, y $\frac{1}{4}$ $\left(\frac{a}{2}\right)^3$ en vez $\frac{a}{2} - sn\frac{a}{2}$, se tiene: $E < 2 \times a \times \frac{1}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^3$ $= \frac{a}{2} \times \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \left(\frac{a}{2}\right)^4$. Pero, como el arco de un minuto es menor que $0'0003 < 0'0005 = \frac{5}{10000} = \frac{5}{10 \times 1000} =$ $= \frac{1}{2 \times 10^3}$, se verificará: $\frac{1'}{2} < \frac{1}{4 \times 10^3}$ y $\left(\frac{1'}{2}\right)^4 < \left(\frac{1}{4 \times 10^3}\right)^4$ $= \frac{1}{4^4 \times (10^3)^4} = \frac{1}{256 \times 10^{12}} < \frac{1}{200 \times 10^{12}} = \frac{1}{2 \times 10^2 \times 10^{12}} =$ $= \frac{1}{2 \times 10^{14}}$; luego el error que se comete tomado por $cos\, 1'$ el valor $1 - 2 \times \frac{1'^2}{4} = 1 - 2 \times \frac{0'000290888086^2}{4} = 0'99999995769$, no llega á media unidad del 14.° órden subdécuplo.

Conocidos el seno y el coseno de un minuto, se hallan las demás líneas trigonométricas, teniendo en cuenta las relaciones (24), y una vez determinadas todas las líneas del arco de un minuto, se pueden obtener las de los demás arcos, hasta 45°, mediante las fórmulas que expresan las líneas de la suma de dos arcos, y las que expresan las del duplo de un arco; pero, para la determinación del seno y del coseno, es preferible hacer uso del siguiente teorema, debido á SIMPSON.

33. *El* $\left\{\begin{matrix}\textit{seno}\\ \textit{coseno}\end{matrix}\right\}$ *de un arco, múltiplo de otro, es igual al* $\left\{\begin{matrix}\textit{seno}\\ \textit{coseno}\end{matrix}\right\}$ *del múltiplo precedente, multiplicando por el duplo del coseno del arco dado, menos el* $\left\{\begin{matrix}\textit{seno}\\ \textit{coseno}\end{matrix}\right\}$ *del múltiplo anteprecedente.*

En efecto: sumando las igualdades $sn(a+b)=....$ y $sn(a-b)=.....$, así como las $cos\,(a+b)=....$ y $cos\,(a-b)=....$, se tiene: $sn\,(a+b)+sn\,(a-b)=2sna\,cos\,b;\ cos\,(a+b)+cos\,(a-b)=2\,cosa\,cos\,b$. Haciendo $b=\alpha$ y $a=m\alpha$, resulta: $sn\,(m\alpha+\alpha)+sn(m\alpha-\alpha)=sn(m+1)\alpha+sn(m-1)\alpha=2snm\alpha\,cos\alpha$; $cos\,(m\alpha+\alpha)+cos\,(m\alpha-\alpha)=cos\,(m+1)\,\alpha+cos(m-1)\alpha=2\,cosm\,\alpha\,cos\,\alpha$; de donde: $sn(m+1)\alpha=snm\alpha\times 2cos\alpha-sn(m-1)\alpha....\ (I)$; $cos(m+1)\alpha=cosm\alpha\times 2cos\alpha-cos(m-1)\alpha.....\ (II)$.

Para aplicar estas fórmulas, se supone que es $\alpha=1'$, y se dá á m, sucesivamente, los valores 1, 2, 3,.... Así para $m=1$ tenemos: $sn2'=2sn1'cos1'$; $cos2'=2cos^2 1'-1$. Para $m=2$, resulta: $sn3'=sn2'+2cos1'-sn1'$; $cos3'=cos2'\times 2cos1'-cos1'$.

ESCOLIO GENERAL.—Conviene advertir que, procediendo según hemos explicado, podríamos llegar á formar unas tablas trigonométricas naturales, y, tomando logaritmos, unas tablas trigonométricas logarítmicas; pero este método elemental, expuesto solo con el fin de probar la posibilidad de construir, mediante él, unas tablas, es sumamente engorroso y deficiente; por lo cual los constructores de tablas emplean métodos superiores mucho más rápidos y seguros.

LECCION 8.ª

Disposición y uso directo de las tablas logarítmico-trigonométricas

34. Puesto que las tablas trigonométricas logarítmicas facilitan más los cálculos, á que se aplican, que las naturales, sólo trataremos aquí de las primeras, debiendo advertir que, entre las diferentes tablas logarítmico-trigonométricas construidas, damos la preferencia á las de triple entrada por que, además de contener los logaritmos de todas las líneas trigonométricas con una aproximación más que suficiente para las aplicaciones ordinarias de la Trigonometría, son de más fácil manejo que todas las demás, tanto nacionales como extranjeras.

35. Las tablas de triple entrada, que, para mayor comodidad de nuestros alumnos, insertamos al final de esta lección, son tres: *la de logaritmos, senos y cosenos, la de logaritmos, tangentes y cotangentes, y la de logaritmos, secantes y cosecantes.* Cada una de ellas consta de dos páginas contrapuestas, continuación una de otra, y está formada por dos partes, que son la central ó principal, de la derecha, y la auxiliar, de la izquierda.

La columna $\left\{\begin{matrix}\text{descendente}\\ \text{ascendente}\end{matrix}\right\}$ de la parte principal, que encabeza con la letra $\left\{\begin{matrix}G\\ C\end{matrix}\right\}$, está constituida por los números, 0, 1 2, 3,..... 87, 88, 89, que á la vez que representan grados, son indicadores de filas; y la fila $\left\{\begin{matrix}\text{superior}\\ \text{inferior}\end{matrix}\right\}$ de la misma parte principal, que también encabeza con la letra $\left\{\begin{matrix}G\\ C\end{matrix}\right\}$, está constituida $\left\{\begin{matrix}\text{de izquierda á derecha}\\ \text{de derecha á izquierda}\end{matrix}\right\}$ por los números 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, que, á la vez que representan minutos, son indicadores de columnas. Todas las demás filas y columnas interiores de la parte central están formadas por números de cuatro cifras, que representan mantisas logarítmicas, aproximadas en menos de media diezmilésima. La parte ó tablita auxiliar, que está situada á la derecha de la principal, contiene filas de á nueve números, de una, dos ó tres cifras cada uno, las cuales tienen por indicadores $\left\{\begin{array}{l}\text{superiores}\\ \text{inferiores}\cdots\end{array}\right\}$ los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, escritos $\left\{\begin{array}{l}\text{de izquierda á derecha}\\ \text{de derecha á izquierda}\end{array}\right\}$.

36. Las tablas, que someramente acabamos de describir, sirven, como todas las demás tablas logarítmico-trigonométricas, para resolver los dos problemas siguientes: 1.° *dado un arco, hallar el logaritmo de una cualquiera de sus líneas trigonométricas;* y 2.° *dado el logaritmo de una línea trigonométrica, hallar el arco correspondiente.* Para hallar el logaritmo de cualquier línea trigonométrica, correspondiente á un arco dado, que es de lo que vamos á tratar en esta lección, haremos uso directo de tablas, y distinguiremos varios casos, que se resuelven aplicando las reglas que exponemos á continuación, las cuales se limitan á explicar cómo se determinan las mantisas logarítmicas, porque la característica, que debe anteponerse á cada mantisa hallada, es la que se encuentra al principio de la fila correspondiente, ó la más próxima de las anteriores, á menos que la mantisa hallada esté precedida de una estrellita, pues entonces le corresponde la característica que hay al principio de la fila siguiente.

37. Reglas para determinar las mantisas logarítmicas de las líneas trigonométricas correspondientes á un arco dado.—1.ª *La mantisa logarítmica de cualquier* $\left\{\begin{array}{l}\textit{línea}\\ \textit{colínea}\end{array}\right\}$ *de un arco, que solo consta de grados, se encuentra inmediatamente* $\left\{\begin{array}{l}\textit{á la derecha}\\ \textit{á la izquierda}\end{array}\right\}$ *del número de grados dado, el cual deberá buscarse en la columna* $\left\{\begin{array}{l}\textit{descendente}\\ \textit{ascendente}\end{array}\right\}$ *que encabeza con la letra* $\left\{\begin{array}{l}G\\ C\end{array}\right\}$.

Ejemplos:

$lgsn 25^\circ = \bar{1}'6259$; $lgtg\ 44^\circ = \bar{1}'9848$; $lgsc\ 75^\circ = 0'5870$.
$lgcos\ 84^\circ = \bar{1}'0192$; $lgctg\ 13^\circ = 0'6366$; $lgcsc\ 7^\circ = 0'9141$.

2.ª *La mantisa logarítmica de cualquier* $\left\{ \begin{array}{l} \textit{línea} \\ \textit{colínea} \end{array} \right\}$ *de un arco, que consta de grados y decenas de minutos, se encuentra en el concurso de la fila, indicada por el número de grados, con la columna, cuyo indicador* $\left\{ \begin{array}{l} \textit{superior} \\ \textit{inferior} \end{array} \right\}$ *es el número de decenas de minuto.*

Ejemplos:

$lgsn\ (70^\circ - 20') = \bar{1}'9739$; $lgtg\ (28^\circ - 40') = \bar{1}'7378$; $lgsc\ (89^\circ - 30') = 2'0592$.
$lgcos\ (54^\circ - 40') = \bar{1}'7622$; $lgctg\ (42^\circ - 30') = 0'0379$; $lgcsc\ (35^\circ - 10') = 0'2396$.

3.ª *La mantisa logarítmica de cualquier* $\left\{ \begin{array}{l} \textit{línea} \\ \textit{colínea} \end{array} \right\}$ *de un arco, que solo consta de decenas de minuto, se encuentra en la primera fila interior* $\left\{ \begin{array}{l} \textit{superior} \\ \textit{inferior} \end{array} \right\}$ *inmediatamente* $\left\{ \begin{array}{l} \textit{debajo} \\ \textit{encima} \end{array} \right\}$ *del número de decenas de minuto.*

Ejemplos:

$lgsn\ 10' = \overline{3'}\,4637$; $lgtg\ 50' = \overline{2'}\,1627$; $lgsc\ 60' = 0'0001$.
$lgcos\ 10' = 0'0000$; $lctg\ 40' = 1'9342$; $lgcsc\ 20' = 2'2352$.

4.ª *La mantisa logarítmica de cualquier* $\left\{ \begin{array}{l} \textit{línea} \\ \textit{colínea} \end{array} \right\}$ *de un arco, que consta de grados, decenas de minuto y unidades de minuto, se obtiene, agregando, á la mantisa correspondiente á los grados y decenas de minuto, aumentados en diez minutos las de las colíneas, el número que, en la tablita auxiliar se encuentra en el concurso de la fila, cuyo indicador es el número de grados, con la columna, cuyo indicador* $\left\{ \begin{array}{l} \textit{superior} \\ \textit{inferior} \end{array} \right\}$ *son las unidades de minuto.*

Ejemplos:

$$lgsn\,(9^0\text{--}11')=\left\{\begin{matrix}\bar{1}'2022\\ 8\end{matrix}\right\}=\bar{1}'2030. \qquad lgcos\,(74^0\text{--}57')=\left\{\begin{matrix}\bar{1},4130\\ 14\end{matrix}\right\}=\bar{1}'4144.$$

$$lgtg\,(40^\circ\text{--}57')=\left\{\begin{matrix}\bar{1}'9366\\ 18\end{matrix}\right\}=\bar{1}'9384. \qquad lgctg\,(55^\circ\text{--}17')=\left\{\begin{matrix}\bar{1}'8398\\ 8\end{matrix}\right\}=\bar{1}'8406.$$

$$lgsc\,(84^\circ\text{--}35')=\left\{\begin{matrix}1'0184\\ 66\end{matrix}\right\}=1'0250. \qquad lgcsc\,(23^\circ\text{--}26')=\left\{\begin{matrix}0'3993\\ 12\end{matrix}\right\}=0'4005.$$

5.ª *La mantisa logarítmica de cualquier* $\left\{\begin{matrix}\textit{línea}\\ \textit{colínea}\end{matrix}\right\}$ *de un arco, que solo consta de grados y unidades de minuto, se obtiene, agregando, á la mantisa que en la* $\left\{\begin{matrix}\textit{primera}\\ \textit{segunda}\end{matrix}\right\}$ *columna interior está* $\left\{\begin{matrix}\textit{inmediata}\\ \textit{frente}\end{matrix}\right\}$ *al número de grados, el número, que, en la tablita auxiliar, se encuentra donde concurre la fila, indicada por el número de grados, con la columna, cuyo indicador* $\left\{\begin{matrix}\textit{superior}\\ \textit{inferior}\end{matrix}\right\}$ *son las unidades de minuto.*

Ejemplos:

$$lgsn\,(35^\circ\text{--}9')=\left\{\begin{matrix}\bar{1}'7586\\ 16\end{matrix}\right\}=\bar{1}'7602. \qquad lgcos\,(77^\circ\text{--}8')=\left\{\begin{matrix}\bar{1}'3466\\ 11\end{matrix}\right\}=\bar{1}'3477.$$

$$lgtg\,(40^\circ\text{--}2')=\left\{\begin{matrix}\bar{1}'9238\\ 5\end{matrix}\right\}=\bar{1}'9243. \qquad lgctg\,(64^\circ\text{--}5')=\left\{\begin{matrix}\bar{1}'6850\\ 16\end{matrix}\right\}=1'6866.$$

$$lgsc\,(56^\circ\text{--}4')=\left\{\begin{matrix}0'2524\\ 8\end{matrix}\right\}=0'2532. \qquad lgcsc\,(30^\circ\text{--}1')=\left\{\begin{matrix}0'2988\\ 19\end{matrix}\right\}=0'3007.$$

6.° *La mantisa logarítmica de cualquier* $\left\{\begin{matrix}\textit{línea}\\ \textit{colínea}\end{matrix}\right\}$ *de un arco, que consta de grados, minutos y segundos, se obtiene, transformando el número de segundos en decimal de minuto, y agregando á la mantisa correspondiente á los grados* $\left\{\begin{matrix}\textit{y minutos.}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \textit{y decenas de minuto, aumentadas en } 10'\end{matrix}\right\}$, *los números que, en la tablita auxiliar, se encuentran donde concurre la fila, indicada por el número de grados, con las columnas, cuyos indicadores* $\left\{\begin{matrix}\textit{superiores}\\ \textit{inferiores}\end{matrix}\right\}$ *son las* $\left\{\begin{matrix}\textit{decimales de minuto}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \textit{las unidades y decimales de minuto, aumentadas en 1 todas menos la última}\end{matrix}\right\}$;

debiendo advertir que cada uno de estos sumandos se refieren á unidades del orden inmediato inferior al del sumando anterior, y que el resultado debe limitarse á cuatro cifras.

Ejemplos:

$$lgsn\,(7^{\circ}\text{---}24'\text{---}57'') = lgsn\,(7^{\circ}\text{--}24'95') = \left\{\begin{array}{r} \overline{1}'1060 \\ 39 \\ 87 \\ 48 \end{array}\right\} = \overline{1}'1108.$$

$$lgtg\,(39^{\circ}\text{---}17'\text{--}\ 48'') = lgtg\,(39\text{--}17'8') = \left\{\begin{array}{r} \overline{1}'9110 \\ 18 \\ 21 \end{array}\right\} = \overline{1}'9130.$$

$$lgsc\,(84^{\circ}\text{---}38'\text{--}4'') = lgsc\,(84^{\circ}\text{--}38'07') = \left\{\begin{array}{r} 1'0184 \\ 106 \\ 092 \end{array}\right\} = 1'0291.$$

$$lgcos\,(78^{\circ}\text{--}39'\text{--}53'') = \left\{\begin{array}{r} \overline{1}'2934 \\ 06 \\ 12 \end{array}\right\} = \overline{1}'2935$$

$$lgctg\,(33^{\circ}\text{---}7'\text{---}15'') = \left\{\begin{array}{r} 0'1847 \\ 5 \\ 19 \\ 14 \end{array}\right\} = 0'1854.$$

$$lgcsc\,(40^{\circ}\text{---}15\text{---}6'') = \left\{\begin{array}{r} 0'1889 \\ 6 \\ 13 \end{array}\right\} = 0'1896$$

7.ª *Para hallar la mantisa logarítmica*

$\left\{\begin{array}{l} \textit{del seno y de la tangente-------} \\ \textit{de la cosecante y de la cotangente} \end{array}\right\}$ *de un arco menor de 5 grados, como no hay tablita auxiliar, lo que se hace es agregar, á la mantisa correspondiente á los grados y* $\left\{\begin{array}{l} \textit{decenas de minuto------------------} \\ \textit{decenas de minuto, aumentadas en 10'} \end{array}\right\}$, *el logaritmo vulgar del arco* $\left\{\begin{array}{l} \textit{propuesto} \\ \textit{aumentado} \end{array}\right\}$, *reducido á minutos, y el cologaritmo del* $\left\{\begin{array}{l} \textit{mismo arco, limitado á decenas de minuto} \\ \textit{arco primitivo, reducido también á minutos---} \end{array}\right\}$.

Ejemplos:

$$lgsn\,(1.^{\circ}\text{--}\,7')=\left\{\begin{array}{ll} lgsn\,(1.^{\circ}\text{---}0')= & \bar{2}'2419 \\ lg\ 67 = & 1'8261 \\ clg\ 60 = & \bar{2}'2218 \end{array}\right\}=\bar{2}'2898.$$

$$lgtg\ 3.^{\circ}\text{---}\,52')=\left\{\begin{array}{ll} lgtg\,(3.^{\circ}\text{--}\,50')= & \bar{2}'8261 \\ lg\ 232 = & 2'3655 \\ clg\ 230 = & 3'\,383 \end{array}\right\}=\bar{2},8297.$$

$$lgcsc\,(2.^{\circ}\text{--}\,35,)=\left\{\begin{array}{ll} lgcsc\,(2.^{\circ}\text{--}\,40')= & 1'3323 \\ lg\ 160 = & 2'2041 \\ clg\ 155 = & \bar{3}'8097 \end{array}\right\}=1'3461.$$

$$lgctg\,(4.^{\circ}\text{---}\,57')=\left\{\begin{array}{ll} lgctg\,(4.^{\circ}\text{----}60)= & 1'0580 \\ lg\ 300 = & 2'4771 \\ clg\ 297 = & \bar{3}'5272 \end{array}\right\}=1'0623.$$

8.ª *Para hallar la mantisa logarítmica* $\left\{\begin{array}{l}\textit{de la tangente y de la secante} \\ \textit{de la cotangente y del coseno----}\end{array}\right\}$ *de un arco, comprendido entre 85 y 90 grados, como no hay tablita auxiliar, lo que se hace es agregar, á la mantisa correspondiente al arco formado por los grados* $\left\{\begin{array}{l}\textit{y decenas de minuto---- -------- --------} \\ \textit{y decenas de minuto aumentadas en 10'}\end{array}\right\}$, *el logaritmo vulgar del complemento del* $\left\{\begin{array}{l}\textit{mismo arco---------} \\ \textit{del arco primitivo}\end{array}\right\}$, *reducido á minutos, y el cologaritmo del complemento del arco primitivo* $\left\{\begin{array}{l}\textit{reducido también á minutos} \\ \textit{limitado á decenas de minuto}\end{array}\right\}$.

Ejemplos:

$$lgtg\,(88.^{\circ}\text{---}57')=\left\{\begin{array}{ll} lgtg\,(88^{\circ}\text{---}50')= & 1'6911 \\ lg\ 70 = & 1'8451 \\ clg\ 63 = & \bar{2}'2007 \end{array}\right\}=1'7369$$

$$lgsc\,(89^{\circ}\text{---}46')=\left\{\begin{array}{ll} lgsc\,(89^{0}\text{---}40')= & 2,2352 \\ lg\quad 20 = & 1'3010 \\ clg\quad 14 = & \bar{2}'8539 \end{array}\right\}=2'3901.$$

$$lgctg\ 89^{\circ}\text{---}\,6')=\left\{\begin{array}{ll} lgctg\,(89^{\circ}\text{---}10')= & \bar{2}'1627 \\ lg\quad 54 = & 1'7324 \\ clg\quad 50 = & \bar{2}'3010 \end{array}\right\}=\bar{2}'1961.$$

$$lgcos\,(87^{0}\text{---}38')=\left\{\begin{array}{ll} lgcos\,(87\text{---}40')= & \bar{2}'6097 \\ lg\quad 142 = & 2'1523 \\ clg\quad 140 = & \bar{3}'8536 \end{array}\right\}=\bar{2}'6156.$$

ESCOLIOS.=*Los logaritmos de las líneas trigonométricas de un arco, mayor que 90° y menor que 360°, se determinan, en cuanto al valor absoluto se refiere, hallando los logaritmos de las líneas del arco que resulta de restar* $\left\{\begin{array}{l}\textit{el arco dado de } 180^{\circ}\\ 180^{\circ} \textit{ del arco dado----}\\ \textit{el arco dado de } 360^{\circ}\textit{---}\end{array}\right\}$, *cuando dicho arco dado está comprendido entre* $\left\{\begin{array}{l}90^{\circ}\ y\ 180^{\circ}\\ 180^{\circ}\ y\ 270^{\circ}\\ 270^{\circ}\ y\ 360^{\circ}\end{array}\right\}$; *y los logaritmos de las líneas trigonométricas de un arco mayor que una circunferencia, se determinan hallando los de las líneas del resto de dividir el arco propuesto por 360°.*

Ejemplos:

lgsn (125° -17′)=*lgsn* [180°—(125°--17′)]=*lgsn* (54°-- 43′)= $\bar{1}$'9119; *lgtg* (194°---12′)= *lgtg* [(194°---12′) — 180°] = *lgtg* (14°--12′) =$\bar{1}$'4031; *lgsc*285°--10′)=*lgsc* [360° — (285°--10′)]=*lgsc* (74°--50′)=0'5823; *lgctg* 2.752°=*lgctg* (7×360+232°)=*lgctg* 232°—180° *lgctg* 232°)=*lgctg* 52° =$\bar{1}$'8928.

2.° *Para hallar el cologaritmo de una linea trigonométrica, se determina el logaritmo de su recíproca.*

Ejemplos:

clgsn (40°-- 15′--6″)=*lgcsc* (40--15′--6″) = 0'1896 ; *clcgc*) (84°--38′--4″)=*lgsc* (48°--38′--4″)=$\bar{1}$'0291; *clgtg* (42°- 30′)= *lgctg* (42°--30′) = 0'0379 ; *clgctg* (33°- 17′--48″) = *lgtg* (33°--17′--48″) = $\bar{1}$'9130 ; *clgsc* (78°--39′--53″) = *lgcos* 78°--39′--53″)=$\bar{1}$'2935; *clgcsc* (7° -24′- 57″)=*lgsn* (7°- 24′ --57″)= $\bar{1}$'1108.

I

TABLA

DE

LOGARITMOS

SENOS Y COSENOS

LOGARITMOS SENOS

G.	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'		1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
0°	——	$\bar{3}$.4637	7648	9408	*0658	*1627	*2419	89°	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1°	$\bar{2}$.2419	3088	3668	4179	4637	5050	5428	88°	-	-	-	-	-		-	-	-
2°	5428	5776	6097	6397	6677	6940	7188	87°	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3°	7188	7423	7645	7857	8059	8251	8436	86°	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4°	8436	8613	8783	8946	9104	9256	9403	85°	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5°	9403	9545	9682	9816	9945	*0070	*0192	84°	13	26	40	53	66	79	92	106	119
6°	$\bar{1}$.0192	0311	0426	0539	0648	0755	0859	83°	11	22	33	45	56	67	78	89	100
7°	0859	0961	1060	1157	1252	1345	1436	82°	10	19	29	39	48	58	67	77	87
8°	1436	1525	1612	1697	1781	1863	1943	81°	8	17	25	34	42	51	59	68	76
9°	1943	2022	2100	2176	2251	2324	2397	80	8	15	23	30	38	45	53	61	68
10°	2397	2468	2538	2606	2674	2740	2806	79°	7	14	20	27	34	41	48	55	61
11°	2806	2870	2934	2997	3058	3119	3179	78°	6	12	19	25	31	37	44	50	56
12°	3179	3238	3296	3353	3410	3466	3521	77°	6	11	17	23	29	34	40	46	51
13°	3521	3575	3629	3682	3734	3786	3837	76°	5	11	16	21	26	32	37	42	47
14°	3837	3887	3937	3986	4035	4083	4130	75°	5	10	15	20	24	29	34	39	44
15°	4130	4177	4223	4269	4314	4359	4403	74°	5	9	14	18	23	27	32	36	41
16°	4403	4447	4491	4533	4576	4618	4659	73°	4	9	13	17	21	26	30	34	38
17°	4659	4700	4741	4781	4821	4861	4900	72°	4	8	12	16	20	24	28	32	36
18°	4900	4939	4977	5015	5052	5090	5126	71°	4	8	11	15	19	23	26	30	34
19°	5126	5163	5199	5235	5270	5306	5341	70°	4	7	11	14	18	21	25	29	32
20°	5341	5375	5409	5443	5477	5510	5543	69°	3	7	10	14	17	20	24	27	30
21°	5543	5576	5609	5641	5673	5704	5736	68°	3	6	10	13	16	19	22	26	29
22°	5736	5767	5798	5828	5859	5889	5919	67°	3	6	9	12	15	18	21	24	27
23°	5919	5948	5978	6007	6036	6065	6093	66°	3	6	9	12	15	17	20	23	26
24°	6093	6121	6149	6177	6205	6232	6259	65°	3	6	8	11	14	17	19	22	25
25°	6259	6286	6313	6340	6366	6392	6418	64°	3	5	8	11	13	16	19	21	24
26°	6418	6444	6470	6495	6521	6546	6570	63°	3	5	8	10	13	15	18	20	23
27°	6570	6595	6620	6644	6668	6692	6716	62°	2	5	7	10	12	15	17	19	22
28°	6716	6740	6763	6787	6810	6833	6856	61°	2	5	7	9	12	14	16	19	21
29°	6856	6878	6901	6923	6946	6968	6990	60°	2	4	7	9	11	13	16	18	20
30°	6990	7012	7033	7055	7076	7097	7118	59°	2	4	6	9	11	13	15	17	19
31°	7118	7139	7160	7181	7201	7222	7242	58°	2	4	6	8	10	12	14	16	19
32°	7242	7262	7282	7302	7322	7342	7361	57°	2	4	6	8	10	12	14	16	18
33°	7361	7380	7400	7419	7438	7457	7476	56°	2	4	6	8	10	11	13	15	17
34°	7476	7494	7513	7531	7550	7568	7586	55°	2	4	6	7	9	11	13	15	17
35°	7586	7604	7622	7640	7657	7675	7692	54°	2	4	5	7	9	11	12	14	16
36°	7692	7710	7727	7744	7761	7778	7795	53°	2	3	5	7	9	10	12	14	15
37°	7795	7811	7828	7844	7861	7877	7893	52°	2	3	5	7	8	10	12	13	15
38°	7893	7910	7926	7941	7957	7973	7989	51°	2	3	5	6	8	10	11	13	14
39°	7989	8004	8020	8035	8050	8066	8081	50°	2	3	5	6	8	9	11	12	14
40°	8081	8096	8111	8125	8140	8155	8169	49°	1	3	4	6	7	9	10	12	13
41°	8169	8184	8198	8213	8227	8241	8255	48°	1	3	4	6	7	9	10	11	13
42°	8255	8269	8283	8297	8311	8324	8338	47°	1	3	4	6	7	8	10	11	12
43°	8338	8351	8365	8378	8391	8405	8418	46°	1	3	4	5	7	8	9	11	12
44°	8418	8431	8444	8457	8469	8482	8495	45°	1	3	4	5	6	8	9	10	12
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	C.	9'	8'	7'	6'	5'	4'	3'	2'	1'

LOGARITMOS COSENOS

LOGARITMOS SENOS

G.	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'		1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
45°	$\bar{1}$.8495	8507	8520	8532	8545	8557	8569	44°	1	2	4	5	6	7	9	10	11
46°	8569	8582	8594	8606	8618	8629	8641	43°	1	2	4	5	6	7	8	10	11
47°	8641	8653	8665	8776	8688	8699	8711	42°	1	2	3	5	6	7	8	9	10
48°	8711	8722	8733	8645	8756	8767	8778	41°	1	2	3	4	6	7	8	9	10
49°	8778	8789	8800	8810	8821	8832	8843	40°	1	2	3	4	5	6	8	9	10
50°	8843	8853	8864	8874	8884	8895	8905	39°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
51°	8905	8915	8925	8935	8945	8955	8965	38°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
52°	8965	8975	8985	8995	9004	9014	9023	37°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
53°	9023	9033	9042	9052	9061	9070	9080	36°	1	2	3	4	5	6	7	7	8
54°	9080	9089	9098	9107	9116	9125	9134	35°	1	2	3	4	5	5	6	7	8
55°	9134	9142	9151	9160	9169	9177	9186	34°	1	2	3	3	4	5	6	7	8
56°	9186	9194	9203	9211	9219	9228	9236	33°	1	2	3	3	4	5	6	7	8
57°	9236	9244	9252	9260	9268	9276	9284	32°	1	2	2	3	4	5	6	6	7
58°	9284	9292	9300	9308	9315	9323	9331	31°	1	2	2	3	4	5	5	6	7
59°	9331	9338	9346	9353	9361	9368	9375	30°	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60°	9375	9383	9390	9397	9404	9411	9418	29°	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61°	9418	9425	9432	9439	9446	9453	9459	28°	1	1	2	3	3	4	5	5	6
62°	9459	9466	9473	9479	9485	9492	9499	27°	1	1	2	3	3	4	5	5	6
63°	9499	9505	9512	9518	9524	9530	9537	26°	1	1	2	3	3	4	4	5	6
64°	9537	9543	9549	9555	9561	9567	9573	25°	1	1	2	2	3	4	4	5	5
65°	9573	9579	9584	9590	9596	9602	9607	24°	1	1	2	2	3	3	4	5	5
66°	9607	9613	9618	9624	9629	9635	9640	23°	1	1	2	2	3	3	4	4	5
67°	9640	9646	9651	9656	9661	9667	7972	22°	1	1	2	2	3	3	4	4	5
68°	9672	9677	9682	9687	9692	9697	9702	21°	0	1	1	2	2	3	3	4	4
69°	9702	9706	9711	9716	9721	9725	9730	20°	0	1	1	2	2	3	3	4	4
70°	9730	9734	9739	9743	9748	9752	9757	19°	0	1	1	2	2	3	3	4	4
71°	9757	9761	9765	9770	9774	9778	9782	18°	0	1	1	2	2	3	3	3	4
72°	9782	9786	9790	9794	9798	9802	9806	17°	0	1	1	2	2	2	3	3	4
73°	9806	9810	9814	9817	9821	9825	9828	16°	0	1	1	1	2	2	3	3	3
74°	9828	9832	9836	9839	8843	9846	9849	15°	0	1	1	1	2	2	2	3	3
75°	9849	9853	9856	9859	9863	9866	9869	14°	0	1	1	1	2	2	2	3	3
76°	9869	9872	9875	9878	9881	9884	9887	13°	0	1	1	1	2	2	2	2	3
77°	9887	9890	9893	9896	9899	9901	9904	12°	0	1	1	1	1	2	2	2	3
78°	9904	9907	9909	9912	9914	9917	9919	11°	0	1	1	1	1	2	2	2	2
79°	9919	9922	9924	9927	9929	9931	9934	10°	0	0	1	1	1	1	2	2	2
80°	9934	9936	9938	9940	9942	9944	9946	9°	0	0	1	1	1	1	1	2	2
81°	9946	9948	9950	9952	9954	9956	9958	8°	0	0	1	1	1	1	1	2	2
82°	9958	9959	9961	9963	9964	9966	9968	7°	0	0	0	1	1	1	1	1	1
83°	9968	9969	9971	9972	9973	9975	9976	6°	0	0	0	1	1	1	1	1	1
84°	9976	9977	9979	9980	9981	9982	9983	5°	0	0	0	0	1	1	1	1	1
85°	9983	9985	9986	9987	9988	9989	9989	4°	0	0	0	0	0	1	1	1	1
86°	9989	9990	9991	9992	9993	9993	9994	3°	0	0	0	0	0	0	1	1	1
87°	9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	2°	0	0	0	0	0	0	0	0	0
88°	9997	9998	9998	9999	9999	9999	9999	1°	0	0	0	0	0	0	0	0	0
89°	0.9999	*0000	*0000	*0000	*0000	*0000	*0000	0°	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	C.	9'	8'	7'	6'	5'	4'	3'	2'	1'

LOGARITMOS COSENOS

EQUIVALENCIAS GONIOMÉTRICAS

SENOS Y COSENOS

$$\begin{aligned}\operatorname{sn} a &= \operatorname{csn}(90^\circ - a)\\ &= -\operatorname{csn}(90^\circ + a)\\ &= \operatorname{sn}(180^\circ - a)\\ &= \frac{1}{\operatorname{csc} a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{csn} a &= \operatorname{sn}(90^\circ - a)\\ &= \operatorname{sn}(90^\circ + a)\\ &= -\operatorname{csn}(180^\circ - a)\\ &= \frac{1}{\operatorname{sc} a}\end{aligned}$$

II

TABLA

DE

LOGARITMOS

TANGENTES Y COTANGENTES

LOGARITMOS TANGENTES

G.	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'		1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
0°	—	$\bar{3}$.4637	7648	9409	*0658	*1627	*2419	89°	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1°	$\bar{2}$.2419	3089	3669	4181	4638	5053	5431	88°	-	-	-	-	-		-	-	-
2°	5431	5779	6101	6401	6682	6945	7194	87°	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3°	7194	7429	7652	7865	8067	8261	8446	86°	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4°	8446	8624	8795	8960	9118	9272	9420	85°	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5°	9420	9563	9701	9836	9966	*0093	*0216	84°	13	27	40	53	67	80	93	107	120
6°	$\bar{1}$.0216	0336	0453	0567	0678	0786	0891	83°	11	23	34	45	56	68	79	90	102
7°	0891	0995	1096	1194	1291	1385	1478	82°	10	20	29	39	49	59	69	78	88
8°	1478	1569	1658	1745	1831	1915	1997	81°	9	17	26	35	43	52	61	69	78
9°	1997	2078	2158	2236	2313	2389	2463	80°	8	16	23	31	39	47	54	62	70
10°	2463	2536	2609	2680	2750	2819	2887	79°	7	14	21	28	35	42	49	56	64
11°	2887	2953	3020	3085	3149	3212	3275	78°	6	13	19	26	32	39	45	52	58
12°	3275	3336	3397	3458	3517	3576	3634	77°	6	12	18	24	30	36	42	48	54
13°	3634	3691	3748	3804	3859	3914	3968	76°	6	11	17	22	28	33	39	45	50
14°	3968	4021	4074	4127	4178	4230	4281	75°	5	10	16	21	26	31	37	42	47
15°	4281	4331	4381	4430	4479	4527	4575	74°	5	10	15	20	25	29	34	39	44
16°	4575	4622	4669	4716	4762	4808	4853	73°	5	9	14	19	23	28	32	37	42
17°	4853	4898	4943	4987	5031	5075	5118	72°	4	9	13	18	22	26	31	35	40
18°	5118	5161	5203	5245	5287	5329	5370	71°	4	8	13	17	21	25	29	34	38
19°	5370	5411	5451	5491	5531	5571	5611	70°	4	8	12	16	20	24	28	32	36
20°	5611	5650	5689	5727	5766	5804	5842	69°	4	8	12	15	19	23	27	31	35
21°	5842	5879	5917	5954	5991	6028	6064	68°	4	7	11	15	19	22	26	30	33
22°	6064	6100	6136	6172	6208	6243	6279	67°	4	7	11	14	18	21	25	29	32
23°	6279	6314	6348	6383	6417	6452	6486	66°	3	7	10	14	17	21	24	28	31
24°	6486	6520	6553	6587	6620	6654	6687	65°	3	7	10	13	17	20	23	27	30
25°	6687	6720	6752	6785	6817	6850	6882	64°	3	7	10	13	16	20	23	26	29
26°	6882	6914	6946	6977	7009	7040	7072	63°	3	6	9	13	16	19	22	25	28
27°	7072	7103	7134	7165	7196	7226	7257	62°	3	6	9	12	15	19	22	25	28
28°	7257	7287	7317	7348	7378	7408	7438	61°	3	6	9	12	15	18	21	24	27
29°	7438	7467	7497	7526	7556	7585	7614	60°	3	6	9	12	15	18	21	24	27
30°	7614	7644	7673	7701	7730	7759	7788	59°	3	6	9	12	14	17	20	23	26
31°	7788	7816	7845	7873	7902	7930	7958	58°	3	6	9	11	14	17	20	23	26
32°	7958	7986	8014	8042	8070	8097	8125	57°	3	6	8	11	14	17	20	22	25
33°	8125	8153	8180	8208	8235	8263	8290	56°	3	5	8	11	14	16	19	22	25
34°	8290	8317	8344	8371	8398	8425	8452	55°	3	5	8	11	14	16	19	22	24
35°	8452	8479	8506	8533	8559	8586	8613	54°	3	5	8	11	13	16	19	21	24
36°	8613	8639	8666	8692	8718	8745	8771	53°	3	5	8	11	13	16	18	21	24
37°	8771	8797	8824	8850	8876	8902	8928	52°	3	5	8	10	13	16	18	21	24
38°	8928	8954	8980	9006	9032	9058	9084	51°	3	5	8	10	13	16	18	21	23
39°	9084	9110	9135	9161	9187	9212	9238	50°	3	5	8	10	13	15	18	21	23
40°	9238	9264	9289	9315	9341	9366	9392	49°	3	5	8	10	13	15	18	20	23
41°	9392	9417	9443	9468	9494	9519	9544	48°	3	5	8	10	13	15	18	20	23
42°	9544	9570	9595	9621	9646	9671	9697	47°	3	5	8	10	13	15	18	20	23
43°	9697	9722	9747	9772	9798	9823	9848	46°	3	5	8	10	13	15	18	20	23
44°	0.9848	9874	9899	9924	9949	*9975	*0000	45°	3	5	8	10	13	15	18	20	23
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	C.	9'	8'	7'	6'	5'	4'	3'	2'	1'

LOGARITMOS COTANGENTES

LOGARITMOS TANGENTES

G.	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'		1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
45°	0·0000	0025	0051	0076	0101	0126	0152	44°	3	5	8	10	13	15	18	20	23
46°	0152	0177	0202	0228	0253	0278	0303	43°	3	5	8	10	13	15	18	20	23
47°	0303	0329	0354	0379	0405	0430	0456	42°	3	5	8	10	13	15	18	20	23
48°	0456	0481	0506	0532	0557	0583	0608	41°	3	5	8	10	13	15	18	20	23
49°	0608	0634	0659	0685	0711	0736	0762	40°	3	5	8	10	13	15	18	20	23
50°	0762	0788	0813	0839	0865	0890	0916	39°	3	5	8	10	13	15	18	21	23
51°	0916	0942	0968	0994	1020	1046	1072	38°	3	5	8	10	13	16	18	21	23
52°	1072	1098	1124	1150	1176	1203	1229	37°	3	5	8	10	13	16	18	21	24
53°	1229	1255	1282	1308	1334	1361	1387	36°	3	5	8	11	13	16	18	21	24
54°	1387	1414	1441	1467	1494	1521	1548	35°	3	5	8	11	13	16	19	21	24
55°	1548	1575	1602	1629	1656	1683	1710	34°	3	5	8	11	14	16	19	22	24
56°	1710	1737	1765	1792	1820	1847	1875	33°	3	5	8	11	14	16	19	22	25
57°	1875	1903	1930	1958	1986	2014	2042	32°	3	6	8	11	14	17	20	22	25
58°	2042	2070	2098	2127	2155	2184	2212	31°	3	6	9	11	14	17	20	23	26
59°	2212	2241	2270	2299	2327	2356	2386	30°	3	6	9	12	14	17	20	23	26
60°	2386	2415	2444	2474	2503	2533	2562	29°	3	6	9	12	15	18	21	24	27
61°	2562	2592	2622	2652	2683	2713	2743	28°	3	6	9	12	15	18	21	24	27
62°	2743	2774	2804	2835	2866	2897	2928	27°	3	6	9	12	15	19	22	25	28
63°	2928	2960	2991	3023	3054	3086	3118	26°	3	6	9	13	16	19	22	25	28
64°	3118	3150	3183	3215	3248	3280	3313	25°	3	7	10	13	16	20	23	26	29
65°	3313	3346	3380	3413	3447	3480	3514	24°	3	7	10	13	17	20	23	27	30
66°	3514	3548	3583	3617	3652	3686	3721	23°	3	7	10	14	17	21	24	28	31
67°	3721	3757	3792	3828	3864	3900	3936	22°	4	7	11	14	18	21	25	29	32
68°	3936	3972	4009	4046	4083	4121	4158	21°	4	7	11	15	19	22	26	30	33
69°	4158	4196	4234	4273	4311	4350	4389	20°	4	8	12	15	19	23	27	31	35
70°	4389	4429	4469	4509	4549	4589	4630	19°	4	8	12	16	20	24	28	32	36
71°	4630	4671	4713	4755	4797	4839	4882	18°	4	8	13	17	21	25	29	34	38
72°	4882	4925	4969	5013	5057	5102	5147	17°	4	9	13	18	22	26	31	35	40
73°	5147	5192	5238	5284	5331	5378	5425	16°	5	9	14	19	23	28	32	37	42
74°	5425	5473	5521	5570	5619	5669	5719	15°	5	10	15	20	25	29	34	39	44
75°	5719	5770	5822	5873	5926	5979	6032	14°	5	10	16	21	26	31	37	42	47
76°	6032	6086	6141	6196	6252	6309	6366	13°	6	11	17	22	28	33	39	45	50
77°	6366	6424	6483	6542	6603	6664	6725	12°	6	12	18	24	30	36	42	48	54
78°	6725	6788	6851	6915	6980	7047	7113	11°	6	13	19	26	32	39	45	52	58
79°	7113	7181	7250	7320	7391	7464	7537	10°	7	14	21	28	35	42	49	56	64
80°	7537	7611	7687	7764	7842	7922	8003	9°	8	16	23	31	39	47	54	62	70
81°	8003	8085	8169	8255	8342	8431	8522	8°	9	17	26	35	43	52	61	69	78
82°	8522	8615	8709	8806	8904	9005	9109	7°	10	20	29	39	49	59	69	78	88
83°	9109	9214	9322	9433	9547	9664	9784	6°	11	23	34	45	56	68	79	90	102
84°	9784	9907	*0034	*0164	*0299	*0437	*0580	5°	13	27	40	53	67	80	93	107	120
85°	1.0580	0728	0882	1040	1205	1376	1554	4°	-	-	-	-	-	-	-	-	-
86°	1554	1739	1933	2135	2348	2571	2806	3°	-	-	-	-	-		-	-	-
87°	2806	3055	3318	3599	3899	4221	4569	2°	-	-	-	-	-	-	-	-	-
88°	4569	4947	5362	5819	6331	6911	7581	1°	-	-	-	-	-	-	-	-	-
89°	2.7581	8373	9342	*0591	*2352	*5363	——	0°	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	C	9'	8'	7'	6'	5'	4'	3'	2'	1'

LOGARITMOS COTANGENTES

EQUIVALENCIAS GONIOMÉTRICAS

TANGENTES Y COTANGENTES

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{ctg}(90^\circ - a)$$
$$= -\operatorname{ctg}(90^\circ + a)$$
$$= -\operatorname{tg}(180^\circ - a)$$
$$= \frac{1}{\operatorname{ctg} a}$$

$$\operatorname{ctg} a = \operatorname{tg}(90^\circ - a)$$
$$= -\operatorname{tg}(90^\circ + a)$$
$$= -\operatorname{ctg}(180^\circ - a)$$
$$= \frac{1}{\operatorname{tg} a}$$

III

TABLA

DE

LOGARITMOS

SECANTES Y COSECANTES

LOGARITMOS SECANTES

G.	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'		1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
0°	0.0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	89°	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1°	0001	0001	0001	0001	0002	0002	0003	88°	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2°	0003	0003	0004	0004	0005	0005	0006	87°	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3°	0006	0007	0007	0008	0009	0010	0011	86°	0	0	0	0	0	0	1	1	1
4°	0011	0011	0012	0013	0014	0015	0017	85°	0	0	0	0	0	1	1	1	1
5°	0017	0018	0019	0020	0021	0023	0024	84°	0	0	0	0	1	1	1	1	1
6°	0024	0025	0027	0028	0029	0031	0032	83°	0	0	0	1	1	1	1	1	1
7°	0032	0034	0036	0037	0039	0041	0042	82°	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8°	0042	0044	0046	0048	0050	0052	0054	81°	0	0	1	1	1	1	1	2	2
9°	0054	0056	0058	0060	0062	0064	0066	80°	0	0	1	1	1	1	1	2	2
10°	0066	0069	0071	0073	0076	0078	0081	79°	0	0	1	1	1	1	2	2	2
11°	0081	0083	0086	0088	0091	0093	0096	78°	0	1	1	1	1	2	2	2	2
12°	0096	0099	0101	0104	0107	0110	0113	77°	0	1	1	1	1	2	2	2	3
13°	0113	0116	0119	0122	0125	0128	0131	76°	0	1	1	1	2	2	2	2	3
14°	0131	0134	0137	0141	0144	0147	0151	75°	0	1	1	1	2	2	2	3	3
15°	0151	0154	0157	0161	0164	0168	0172	74°	0	1	1	1	2	2	2	3	3
16°	0172	0175	0179	0183	0186	0190	0194	73°	0	1	1	1	2	2	3	3	3
17°	0194	0198	0202	0206	0210	0214	0218	72°	0	1	1	2	2	2	3	3	4
18°	0218	0222	0226	0230	0235	0239	0243	71°	0	1	1	2	2	3	3	3	4
19°	0243	0248	0252	0257	0261	0266	0270	70°	0	1	1	2	2	3	3	4	4
20°	0270	0275	0279	0284	0289	0294	0298	69°	0	1	1	2	2	3	3	4	4
21°	0298	0303	0308	0313	0318	0323	0328	68°	0	1	1	2	2	3	3	4	4
22°	0328	0333	0339	0344	0349	0354	0360	67°	1	1	2	2	3	3	4	4	5
23°	0360	0365	0371	0376	0382	0387	0393	66°	1	1	2	2	3	3	4	4	5
24°	0393	0398	0404	0410	0416	0421	0427	65°	1	1	2	2	3	3	4	5	5
25°	0427	0433	0439	0445	0451	0457	0463	64°	1	1	2	2	3	4	4	5	5
26°	0463	0470	0476	0482	0488	0495	0501	63°	1	1	2	3	3	4	4	5	6
27°	0501	0508	0514	0521	0527	0534	0541	62°	1	1	2	3	3	4	5	5	6
28°	0541	0547	0554	0561	0568	0575	0582	61°	1	1	2	3	3	4	5	5	6
29°	0582	0589	0596	0603	0610	0617	0625	60°	1	1	2	3	4	4	5	6	6
30°	0625	0632	0639	0647	0654	0662	0669	59°	1	1	2	3	4	4	5	6	7
31°	0669	0677	0685	0692	0700	0708	0716	58°	1	2	2	3	4	5	5	6	7
32°	0716	0724	0732	0740	0748	0756	0764	57°	1	2	2	3	4	5	6	6	7
33°	0764	0772	0781	0789	0797	0806	0814	56°	1	2	3	3	4	5	6	7	8
34°	0814	0823	0831	0840	0849	0858	0866	55°	1	2	3	3	4	5	6	7	8
35°	0866	0875	0884	0893	0902	0911	0920	54°	1	2	3	4	5	5	6	7	8
36°	0920	0930	0939	0948	0958	0967	0977	53°	1	2	3	4	5	6	7	7	8
37°	0977	0986	0996	1005	1015	1025	1035	52°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
38°	1035	1045	1055	1065	1075	1085	1095	51°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
39°	1095	1105	1116	1126	1136	1147	1157	50°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
40°	1157	1168	1179	1190	1200	1211	1222	49°	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41°	1222	1233	1244	1255	1267	1278	1289	48°	1	2	3	4	6	7	8	9	10
42°	1289	1301	1312	1324	1335	1347	1359	47°	1	2	3	5	6	7	8	9	10
43°	1359	1371	1382	1394	1406	1418	1431	46°	1	2	4	5	6	7	8	10	11
44°	1431	1443	1455	1468	1480	1493	1505	45°	1	2	4	5	6	7	9	10	11
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	C.	9'	8'	7'	6'	5'	4'	3'	2'	1'

LOGARITMOS COSECANTES

LOGARITMOS SECANTES

G.	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'		1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'
45°	0.1515	1518	1531	1543	1556	1569	1582	44°	1	3	4	5	6	8	9	10	12
46°	1582	1595	1609	1622	1635	1649	1662	43°	1	3	4	5	7	8	9	11	12
47°	1662	1676	1689	1703	1717	1731	1745	42°	1	3	4	6	7	8	10	11	12
48°	1745	1759	1773	1787	1802	1816	1831	41°	1	3	4	6	7	9	10	11	13
49°	1831	1845	1860	1875	1889	1904	1919	40°	1	3	4	6	7	9	10	12	13
50°	1919	1934	1950	1965	1980	1996	2011	39°	2	3	5	6	8	9	11	12	14
51°	2011	2027	2043	2059	2074	2090	2107	38°	2	3	5	6	8	10	11	13	14
52°	2107	2123	2139	2156	2172	2189	2205	37°	2	3	5	7	8	10	12	13	15
53°	2205	2222	2239	2256	2273	2290	2308	36°	2	3	5	7	9	10	12	14	15
54°	2308	2325	2343	2360	2378	2396	2414	35°	2	4	5	7	9	11	12	14	16
55°	2414	2432	2450	2469	2487	2506	2524	34°	2	4	6	7	9	11	13	15	17
56°	2524	2543	2562	2581	2600	2620	2639	33°	2	4	6	8	10	11	13	15	17
57°	2639	2658	2678	2698	2718	2738	2758	32°	2	4	6	8	10	12	14	16	18
58°	2758	2778	2799	2819	2840	2861	2882	31°	2	4	6	8	10	12	14	16	19
59°	2882	2903	2924	2945	2967	2988	3010	30°	2	4	6	9	11	13	15	17	19
60°	3010	3032	3054	3077	3099	3122	3144	29°	2	4	7	9	11	13	16	18	20
61°	3144	3167	3190	3213	3237	3260	3284	28°	2	5	7	9	12	14	16	19	21
62°	3284	3308	3332	3356	3380	3405	3430	27°	2	5	7	10	12	15	17	19	22
63°	3430	3454	3479	3505	3530	3556	3582	26°	3	5	8	10	13	15	18	20	23
64°	3582	3608	3634	3660	3687	3714	3741	25°	3	5	8	11	13	16	19	21	24
65°	3741	3768	3795	3823	3851	3879	3907	24°	3	6	8	11	14	17	19	22	25
66°	3907	3935	3964	3993	4022	4052	4081	23°	3	6	9	12	15	17	20	23	26
67°	4081	4111	4141	4172	4202	4233	4264	22°	3	6	9	12	15	18	21	24	27
68°	4264	4296	4327	4359	4391	4424	4457	21°	3	6	10	13	16	19	22	26	29
69°	4457	4490	4523	4557	4591	4625	4659	20°	3	7	10	14	17	20	24	27	30
70°	4659	4694	4730	4765	4801	4837	4874	19°	4	7	11	14	18	21	25	29	32
71°	4874	4910	4948	4985	5023	5061	5100	18°	4	8	11	15	19	23	26	30	34
72°	5100	5139	5179	5219	5259	5300	5341	17°	4	8	12	16	20	24	28	32	36
73°	5341	5382	5424	5467	5509	5553	5597	16°	4	9	13	17	21	26	30	34	38
74°	5597	5641	5686	5731	5777	5823	5870	15°	5	9	14	18	23	27	32	36	41
75°	5870	5917	5965	6014	6063	6113	6163	14°	5	10	15	20	24	29	34	39	44
76°	6163	6214	6266	6318	6371	6425	6479	13°	5	11	16	21	26	32	37	42	47
77°	6479	6534	6590	6647	6704	6762	6821	12°	6	11	17	23	29	34	40	46	51
78°	6821	6881	6942	7003	7066	7130	7194	11°	6	12	19	25	31	37	44	50	56
79°	7194	7260	7326	7394	7462	7532	7603	10°	7	14	20	27	34	41	48	55	61
80°	7603	7676	7749	7824	7900	7978	8057	9°	8	15	23	30	38	45	53	61	68
81°	8057	8137	8219	8303	8388	8475	8564	8°	8	17	25	34	42	51	59	68	76
82°	8564	8655	8748	8843	8940	9039	9141	7°	10	19	29	39	48	58	67	77	87
83°	9141	9245	9352	9461	9574	9689	9808	6°	11	22	33	45	56	67	78	89	100
84°	9808	9930	*0055	*0184	*0318	*0455	*0597	5°	13	26	40	53	66	79	92	106	119
85°	1.0597	0744	0896	1054	1217	1387	1564	4°	-	-	-	-	-	-	-	-	-
86°	1564	1749	1941	2143	2355	2577	2812	3°	-	-	-	-	-	-	-	-	-
87°	2812	3060	3323	3603	3903	4224	4572	2°	-	-	-	-	-	-	-	-	-
88°	4572	4950	5363	5821	6332	6912	7581	1°	-	-	-	-	-	-	-	-	-
89°	2.7581	8373	9342	*0592	*2352	*5363	——	0°	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	C.	9'	8'	7'	6'	5'	4'	3'	2'	1'

LOGARITMOS COSECANTES

EQUIVALENCIAS GONIOMÉTRICAS

SECANTES Y COSECANTES

$$\operatorname{sc} a = \operatorname{csc}(90^\circ - a)$$
$$= \operatorname{csc}(90^\circ + a)$$
$$= -\operatorname{sc}(180^\circ - a)$$
$$= \frac{1}{\operatorname{csn} a}$$

$$\operatorname{csc} a = \operatorname{sc}(90^\circ - a)$$
$$= -\operatorname{sc}(90^\circ + a)$$
$$= \operatorname{csc}(180^\circ - a)$$
$$= \frac{1}{\operatorname{sn} a}$$

LECCION 9.ª

Uso inverso de las tablas logarítmico-trigonométricas.

38. Para hallar el arco correspondiente á una línea trigonométrica, cuyo logaritmo se conoce, haremos uso inverso de las tablas logarítmico-trigonométricas, distinguiendo varios casos, que se resuelven aplicando las reglas siguientes:

1.ª *Para hallar los grados de que consta el arco correspondiente á una* $\left\{\begin{matrix}\textit{línea}\\ \textit{colínea}\end{matrix}\right\}$ *trigonométrica, cuyo logaritmo se conoce, se busca la mantisa de dicho logaritmo en la primera columna* $\left\{\begin{matrix}\textit{de la izquierda}\\ \textit{de la derecha}\end{matrix}\right\}$, *y el número de grados que se encuentra inmediato á la mantisa dada, ó la más próxima* $\left\{\begin{matrix}\textit{menor}\\ \textit{mayor}\end{matrix}\right\}$, *cuando aquella no aparece en la referida columna, será el número de grados buscado.*

Ejemplos:

$\mathrm{antlgsn}\ \overline{1}'0192 = 6^\circ$; $\mathrm{antlgtg}\ 0'2577 = 61^\circ$; $\mathrm{antlgsc}\ 0'0716 = 32^\circ$
$\mathrm{antlgcos}\ \overline{1}'9876 = 13^\circ$; $\mathrm{antlgctg}\ \overline{1},5842 = 69^\circ$;
$\mathrm{antlgcsc}\ 1'0594 = 5^\circ$.

2.ª *Para hallar los grados y decenas de minuto de que consta el arco correspondiente á una* $\left\{\begin{matrix}\textit{línea}\\ \textit{colínea}\end{matrix}\right\}$, *cuyo logaritmo se conoce, se busca la mantisa de dicho logaritmo en la parte interior de la tabla, y los indicadores de la fila y columna que concurren en la mantisa dada, ó en la más próxima* $\left\{\begin{matrix}\textit{menor}\\ \textit{mayor}\end{matrix}\right\}$, *cuando aquella no se encuentra en la tabla, son, respectivamente, los grados y decenas de minuto que se buscan.*

Ejemplos:

antlgsn $\overline{1}$'9846=74°---50'; antlgtg 0'1111=52°---10'; antlgsc 0'1274=41°--40'.

antlgcos $\overline{1}$'9880=13°---20'; antlgctg $\overline{1}$'7526=60°--30'; antlgcsc 1'0314=5°---20'.

3.ª *Para hallar los grados y minutos de que consta el arco correspondiente á una* $\left\{\begin{matrix}\textit{línea}\\ \textit{colínea}\end{matrix}\right\}$, *cuyo logaritmo se conoce, se determinan, en primer término, los grados y decenas de minuto; después, se busca en la tablita auxiliar, y en la fila indicada por el número de grados, la diferencia entre la mantisa dada y la tabular inmediata* $\left\{\begin{matrix}\textit{inferior}\\ \textit{superior}\end{matrix}\right\}$, *y el indicador* $\left\{\begin{matrix}\textit{superior}\\ \textit{inferior}\end{matrix}\right\}$ *de la columna donde se encuentra dicha diferencia, ó la más próxima menor, es el número de unidades de minuto.*

Ejemplos:

antlgsn $\overline{1}$'6129=24°---13'; antlgtg 0'1353=53°---47'; antlgsc 0'7650=80°---6'.

antlgcos $\overline{1}$'3883=75°--51'; antlgctg $\overline{1}$'6789=64°--29'; antlgcsc 0'4875=19°-- 0'.

4.ª *Para hallar los grados, minutos y segundos de que consta el arco correspondiente á una* $\left\{\begin{matrix}\textit{línea}\\ \textit{colínea}\end{matrix}\right\}$, *cuyo logaritmo se conoce, se determinan, en primer término, los grados y minutos; después, se buscan en la tablita auxiliar, y en la fila indicada por el número de grados, los décuplos de las que llamaremos diferencias derivadas, y los indicadores* $\left\{\begin{matrix}\textit{superiores}\text{ ....}\\ \textit{inferiores, disminuidos en 1 todos menos el último}\end{matrix}\right\}$ *de las columnas donde se encuentran los décuplos de dichas diferencias, ó los números menores más próximos á ellos, son las decimales* (décimas, centésimas,..) *de minuto, que conviene reducir á segundos, limitando el resultado á decenas de segundo.*

Las llamadas *diferencias derivadas* se determinan procediendo del modo siguiente: se resta, de la mantisa logarítmica dada, la tabular inmediata inferior, y si el resto no está en la tablita auxiliar, y en la fila indicada por el número de grados, la diferencia entre dicho resto y el número inmediato menor, que se encuentra en la referida fila, es la *primer diferencia derivada;* se multiplica esta primer diferencia por 10, y, si el producto no está en la referida fila de la tablita auxiliar, la diferencia entre dicho producto y el número inmediato menor de la misma fila es la *segunda diferencia derivada*; y así se continúa hasta que aparezca en la tablita auxiliar el décuplo de una diferencia derivada.

Ejemplos:

antlgsn $\overline{1}'5678 = 21^{\circ}$----$41'63' = 21^{\circ}$----$41'$----$38''$; antlgtg $\overline{1}'9773 = 43^{\circ}$---$30'4' = 43^{\circ}$---$30'$---$20''$; antlgsc $0'2468 =$ $= 55$---$29'$-$30''$.

antlgcos $\overline{1}'2345 = 80^{\circ}$--$7'$--$10''$; antlgctg $0'7688 = 9^{\circ}$--$39'$--$50''$; antlgcsc $0'5535 = 16^{\circ}$-- $15'$--$0''$.

5.ª *Para hallar el arco correspondiente*

á un seno ó tangente-------
á una cosecante ó cotangente, } *cuyo logaritmo dado carece de tablita auxiliar, por ser el arco que buscamos menor de 5°, se determinan, en primer término, los grados y decenas de minuto, y después se agrega, á la diferencia entre la mantisa propuesta y la inmediata* { *inferior* / *superior* } *el logaritmo vulgar del arco hallado, reducido á minutos; el antilogaritmo de la suma expresará en minutos el arco buscado.*

Ejemplos:

antlgsn $\overline{3}'9952 = 34'$; antlgtg $\overline{2}'8165 = 3^{\circ}$-- $45'$.

antlgcsc $\overline{1}'6498 = 1^{\circ}$---$17'$; antlgctg $1'0623 = 4^{\circ}$---$57'$.

6.ª *Para hallar el arco correspondiente*

á una tangente ó secante
á una cotangente ó coseno }, *cuyo logaritmo dado carece de tablita*

auxiliar, por hallarse el arco que buscamos comprendido entre 85 y 90 grados, se determina el arco, menor de 5°, que resulta de considerar

$\left\{\begin{array}{l}\textit{la tangente como cotangente, y la secante como cosecante} \\ \textit{la cotangente como tangente y el coseno como seno} \cdots\end{array}\right\}$,

y después se resta de 90° el arco hallado.

Ejemplos:

antlgtg $1'1777 = 86° \text{---} 12'$; antlgsc $2'2575 = 89° \text{---} 41'$.

antlgctg $\overline{2}'\,1961 = 89° \text{---} 6'$; antlgcos $\overline{2}'\,9057 = 85° \text{---} 23'$.

ESCOLIOS.—Determinado, por medio de las tablas, el arco, menor de 90°, correspondiente á una línea trigonométrica conocida, para hallar todas las demás soluciones del problema, no hay más que dar valores á m en las expresiones generales de los arcos que tienen una misma línea trigonométrica dada en valor y en signo.

2.° *Para hallar un arco, dado el cologaritmo de una de sus líneas trigonométricas, se considera el cologaritmo dado como logaritmo de la línea recíproca.*

Ejemplos:

antclgsn $0'5535$ = antlgcsc $0'5535 = 16° \text{---} 14'$.

antclgctg $\overline{1}'\,9773$ = antlgtg $\overline{1}'\,9773 = 43° \text{--} 30' \text{---} 20''$.

LIBRO II

Trigonometría rectilínea

CAPÍTULO I

Triángulos rectángulos

LECCIÓN 10.ª

Fórmulas para resolver triángulos rectángulos y casos generales de resolución.

39. Como un triángulo rectángulo queda determinado, sin ambigüedad, por dos de sus lados, ó por un lado y un ángulo agudo, para poder resolverlo, solo necesitamos hallar fórmulas que relacionen dos lados y un ángulo agudo, puesto que la relación, que liga á los tres lados, ya la conocemos por el teorema de PITÁGORAS.

40. *En todo triángulo rectángulo se verifica*: *1.º un cateto es igual á la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto al cateto, ó por el coseno del comprendido entre la hipotenusa y el cateto; 2.º un cateto es igual al otro multiplicado por la tangente del ángulo opuesto al primero, ó por la cotangente del opuesto al segundo.*

En efecto: sean a, b, c la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo, y A, B, C los ángulos respectivamente opuestos, á los arcos, de radio igual á la unidad, correspondientes á dichos ángulos. Si tomamos por unidad de dirección el cateto CA, la expresión de la hipotenusa será (2 y 10): $b+c\sqrt{-1}=a(\cos C+\sqrt{-1}\,sn C)=a\cos C+\sqrt{-1}\,a\,sn C$; de donde: $b=a\cos C=a\,sn B$; $c=a\,sn C=a\cos B$. Dividiendo cada una de estas igualdades últimas por la otra, resulta: $\frac{b}{c}=ctg C=tg B$; $\frac{c}{b}=tg C=ctg B$; ó bién: $b=c.\,tg\,B=c.\,ctg\,C$; $c=b.\,tg\,C=b.\,ctg\,B$.

ESCOLIO.—De las fórmulas, que hemos concluido de hallar, y que sirven para relacionar dos lados y un ángulo agudo; de la relación, que, según el teorema de PITÁGORAS, liga entre sí á los tres lados, y de la propiedad que tienen de ser complementarios los dos ángulos agudos, se deducen las fórmulas que, á continuación, escribimos ordenadas, con el fin de aplicar, en cada caso, las que expresen las incógnitas en función directa de los datos, para que, procediendo de esta manera, disminuyan las causas de error. Las demás fórmulas pueden emplearse, después de resuelto el triángulo, como medio de comprobación de los resultados.

Valores de a	Valores de b	Valores de c	Valores de B	Valores de C
$a=\sqrt{b^2+c^2}$	$b=\sqrt{a^2-c^2}$	$c=\sqrt{a^2-b^2}$	$B=90°-C$	$C=90°-B$
$a=b:sn\,B$	$b=a.\,sn\,B$	$c=a.\,sn\,C$	$sn\,B=b:a$	$sn\,C=c:a$
$a=b:\cos C$	$b=a.\cos C$	$c=a.\cos B$	$\cos B=c:a$	$\cos C=b:a$
$a=c:sn\,C$	$b=c.\,tg\,B$	$c=b.\,tg\,C$	$tg\,B=b:c$	$tg\,C=c:b$
$a=c:\cos B$	$b=c.\,ctg\,C$	$c=b.\,ctg\,B$	$ctg\,B=c:b$	$ctg\,C=b:c$

41. Los casos generales de resolución de triángulos rectángulos son cuatro, y se enuncian diciendo: *resolver un triángulo rectángulo, dados los dos catetos, un ángulo agudo y la hipotenusa, un cateto y un ángulo agudo, un cateto y la hipotenusa.*

En cada uno de estos casos, se procede según expresa el siguiente cuadro:

Casos	Datos	Incógnitas	Fórmulas	Cálculo logarítmico
1.°	$b = 2315'52$ m	a	$a = \sqrt{b^2+c^2}$	$a = \text{antlg}\left[\frac{1}{2}\lg(b^2+c^2)\right] = 3581'92$ m
		B	$\text{tg}\, B = b : c$	$B = \text{antlgtg}\,(\lg b + \text{clg}c) = 40° \cdots 16' \cdots 27'2''$
	$c = 2732'86$ m	C	$\text{tg}\, C = c : b$	$C = \text{antlg tg}\,(\lg c + \text{clg}b) = 49° \cdots 43' \cdots 32'8''$
2.°	$a = 3581'92$ m	b	$b = a\,\text{sn}\, B$	$b = \text{antlg}\,(\lg a + \lg \text{sn}\, B) = 2315'52$ m
		c	$c = a.\cos B$	$c = \text{antlg}\,(\lg a + \lg \cos B) = 2732'86$ m
	$B = 40° \cdots 16' \cdots 22''$	C	$C = 90° - B$	$C = 49° \cdots 43' \cdots 38''$
3.°	$b = 2515'52$ m	a	$a = b : \text{sn}\, B$	$a = \text{antlg}\,(\lg b + \text{clg}\,\text{sn}\, B) = 3581'92$ m
		c	$c = b.\,\text{ctg}\, B$	$c = \text{antlg}\,(\lg b + \lg \text{ctg}\, B) = 2732'86$ m
	$B = 40° \cdots 16' \cdots 27'2''$	C	$C = 90° = B$	$C = 49° \cdots 43' \cdots 38''$
4.°	$b = 2515'52$ m	c	$c = \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)}$	$c = \text{antlg}\left\{\frac{1}{2}\left[\lg(a+b)+\lg(a-b)\right]\right\} = 2732'86$ m
		B	$\text{sn}\, B = b : a$	$B = \text{antlg sn}\,(\lg b + \text{clg}a) = 40° \cdots 16' \cdots 27'2''$
	$a = 3581'92$ m	C	$\cos C = b : a$	$C = \text{antlg cos}\,(\lg b + \text{clg}a) = 49° \cdots 43' \cdots 32'8''$

CAPÍTULO II

Triángulos oblicuángulos

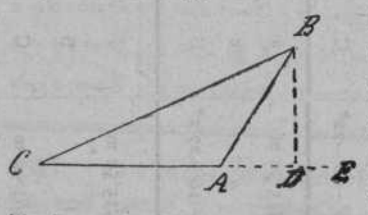
LECCIÓN 11.ª

Fórmulas fundamentales y derivadas para la resolución de triángulos oblicuángulos

42. Como un triángulo oblicuángulo queda determinado por tres de sus seis elementos, entre los cuales tiene que figurar un lado, por lo menos, necesitamos, para poder resolverlo, hallar fórmulas que relacionen los tres lados y dos ángulos, los tres lados y un ángulo, y dos lados y dos ángulos; pues la que liga á los tres ángulos es, según sabemos, $A+B+C=180^{\circ}$.

43. *En todo triángulo se verifica: 1.º los lados son proporcionales á los senos de sus ángulos opuestos; 2.º un lado cualquiera es igual á la suma de los productos que resultan de multiplicar cada uno de los otros dos lados por el coseno del ángulo que forma con el primero; y 3.º el cuadrado de un lado cualquiera es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, más el duplo de su producto por el coseno del ángulo comprendido.*

FIGURA 5.ª



En efecto: como, en el triángulo A B C (fig.ª 5.ª), el lado C B es la suma ó resultante de los CA y AB, la expresión del primero será igual á la suma de las expresiones de los otros dos; luego, si tomamos por unidad de dirección la recta CE, se tendrá (10): $a(\cos C+\sqrt{-1}\,\mathrm{sn}\,C)=b+c\left[\cos(180^{\circ}-A)+\sqrt{-1}\,\mathrm{sn}\,(180^{\circ}-A)\right]=b+c\,(-\cos A+\sqrt{-1}\,\mathrm{sn}\,A)$. Efectuando las operaciones indicadas en los dos miembros, é igualando, después, los coeficientes de $\sqrt{-1}$, así como los términos reales, resulta sucesivamente: $a\cos C+\sqrt{-1}\, a\,\mathrm{sn}\, C=$ $=b-c.\cos A+\sqrt{-1}\; c.\,\mathrm{sn}A$; $a.\,\mathrm{sn}\, C=c.\,\mathrm{sn}\, A$--(I); $a.\cos C=$ $b-c.\cos A$---(II). De estas últimas igualdades se deducen respectivamente las dos siguientes: $\frac{a}{c}=\frac{\mathrm{sn}\, A}{\mathrm{sn}\, C}$; $b=a.\cos C+c.\cos A$.

Elevando al cuadrado las relaciones (I) y (II), y sumando los resultados, se tiene: $a^2\,\mathrm{sn}^2\, C+a^2\cos^2 C=c^2\,\mathrm{sn}^2 A+b^2+c^2\cos^2 A-$ $2bc.\cos A$; de donde: $a^2(\mathrm{sn}^2 C+\cos^2 C)=b^2+c^2(\mathrm{sn}^2 A+\cos^2 A)-$ $2bc.\cos A$; ó bien: $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$. Queda, pues, demostrado el teorema.

ESCOLIOS.—1.° Aplicando las fórmulas obtenidas á los tres lados, y teniendo en cuenta la relación que liga á los tres ángulos, podemos escribir los tres sistemas siguientes de fórmulas fundamentales:

(I)-----$A+B+C=180°$; $\frac{a}{\mathrm{sn}A}=\frac{b}{\mathrm{sn}B}=\frac{c}{\mathrm{sn}C}$

(II) ---- $a=b.\cos C+c.\cos B$; $b=a\cos C+c.\cos A$; $c=a\cos B+$ $b\cos A$.

(III)------$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$; $b^2=a^2+c^2-2ac.\cos B$; $c^2=a^2+$ $b^2-2ab.\cos C$.

2.° Las relaciones, que hemos concluido de establecer, no solo son suficientes para resolver, en todos los casos que pueden presentarse, un triángulo oblicuángulo, sinó que también sirven para resolver un triángulo rectángulo, haciendo $A=90°$, y teniendo en cuenta que $\mathrm{sn}90°=1$ y $\cos 90°=0$. A pesar de esto, demostraremos los teoremas que siguen, con objeto de obtener, mediante las fórmulas anteriores, otras, que se llaman derivadas, y que son más cómodas para el cálculo logarítmico.

44. *En todo triángulo, la suma de los lados, partida por su diferencia, es igual á la tangente de la semisuma de los ángulos respectivamente opuestos, partida por la tangente de la semidiferencia de los mismos ángulos.*

En efecto: de la fórmula fundamental $\frac{a}{b}=\frac{snA}{snB}$ se deduce: $\frac{a+b}{a-b}=\frac{snA+snB}{snA-snB}$; pero como es $\frac{snA+snB}{snA-snB}=\frac{tg\frac{1}{2}(A+B)}{tg\frac{1}{2}(A-B)}$, se tiene: $\frac{a+b}{a-b}=\frac{tg\frac{1}{2}(A+B)}{tg\frac{1}{2}(A-B)}$, según queríamos demostrar.

ESCOLIO.—De la relación precedente se deduce: $(a+b)tg\frac{1}{2}(A-B)=(a-b)tg\frac{1}{2}(A+B)$; $tg\frac{1}{2}(A-B)=tg\frac{1}{2}(A+B)\times\frac{a-b}{a+b}$; pero, siendo $A+B=180^0-C$, también será $\frac{1}{2}(A+B)=90^0-\frac{1}{2}C$; y como $tg\frac{1}{2}(A+B)=tg(90^0-\frac{1}{2}C)=ctg\frac{1}{2}C$, se tendrá por último:

$$tg\tfrac{1}{2}(A-B)=ctg\tfrac{1}{2}C\times\frac{a-b}{a+b}.$$

Luego: *la tangente de la semidiferencia de dos ángulos de un triángulo es igual á la cotangente de la mitad del tercer ángulo, multiplicada por el cociente de dividir la diferencia por la suma de los lados respectivamente opuestos á dichos dos ángulos.*

45. *En todo triángulo se verifica:* 1.º *el seno de la mitad de un ángulo es igual á la raíz cuadrada de una fracción, que tiene por denominador el producto de los lados que forman dicho ángulo, y cuyo numerador es el producto de las diferencias entre el semiperímetro y los mismos lados;* 2.º *el coseno de la mitad de un ángulo es igual á la raíz cuadrada de una fracción, que tiene por denominador el producto de los lados que forman dicho ángulo, y cuyo numerador es el producto del semiperímetro por la diferencia entre el semiperímetro y el lado opuesto al mismo ángulo;* 3.º *la tangente de la mitad de un ángulo es igual á la raíz cuadrada de una fracción, que tiene por denominador el producto del semiperímetro por la diferencia entre el semiperímetro y el lado opuesto á dicho ángulo, y cuyo numerador es el producto de las diferencias entre el semiperímetro y los lados que forman el mismo ángulo; y* 4.º *la cotangente de la mitad de un ángulo es igual á la raíz cuadrada de una fracción, que tiene por denominador el producto de las diferencias entre el semiperímetro y los lados que forman dicho ángulo, y cuyo numerador es el producto del semi-*

perimetro por la diferencia entre el semiperímetro y el lado opuesto al mismo ángulo.

En efecto: si del primer miembro de la identidad $1=1$ restamos $\cos A$, y del segundo su valor $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, deducido de la relación fundamental $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$, se tiene:

$$1-\cos A=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=$$

$\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{2bc}$. Si hacemos $a+b+c=2p$, será: $a+b-c$ $a+b+c-2c=2p-2c=2(p-c)$, $a+c-b=2(p-b)$ y $b+c-a=2(p-a)$. Luego sustituyendo $a+b-c$ y $a+c-b$ por sus respectivos valores, y teniendo en cuenta que es $1-\cos A=2sn^2\frac{1}{2}A$, resulta: $2sn^2\frac{1}{2}A=\frac{2(p-b)+2(p-c)}{2bc}=\frac{2(p-b)(p-c)}{bc}$; ó bien:

$$sn\,\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\;\text{.----(I).}$$

Si al primer miembro de la identidad $1=1$, le sumamos $\cos A$, y al segundo su valor

$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, resulta: $1+\cos A=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=$

$$\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc}=$$

$\frac{2p\times 2(p-a)}{2bc}=\frac{2p(p-a)}{bc}$; pero, como es $1+\cos A=2\cos^2\frac{1}{2}A$, se tiene: $2\cos^2\frac{1}{2}A=\frac{p(p-a)}{bc}$; ó bien: $\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$. (II).

Dividiendo cada una de las igualdades (I) y (II) por la otra, podemos escribir las dos siguientes:

$$tg\,\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}};\quad ctg\,\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}.$$

Queda, pues, demostrado el teorema, puesto que las cuatro fórmulas halladas son aplicables á los tres ángulos, ESCOLIO.—Para resolver un triángulo oblicuángulo, en los casos que vamos á distinguir, se emplean generalmente, como más cómodas para el cálculo logarítmico, las siguientes relaciones, aplicables á todos los elementos análogos.

$$\text{(I)} \cdots\cdots\cdots A + B + C = 180^\circ.$$

$$\text{(II)} \cdots\cdots\cdots \frac{a}{\mathrm{sn}A} = \frac{b}{\mathrm{sn}B} = \frac{c}{\mathrm{sn}C}.$$

$$\text{(III)} \cdots\cdots\cdots tg\tfrac{1}{2}(A- B) = \mathrm{ctg}\tfrac{1}{2}C \times \frac{a-b}{a+b}.$$

$$\text{(IV)} \cdots\cdots\cdots \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b\,(p-c)}{p\,(p-a)}}.$$

LECCION 12.ª

Casos generales de resolución de triángulos oblicuángulos

46. Los casos generales de resolución de triángulos oblicuángulos son cuatro que se enuncian diciendo: *resolver un triángulo oblicuángulo, dados un lado y dos ángulos, dos lados y el ángulo comprendido, los tres lados, y dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.*

En cada uno de estos casos, se procede según expresa el siguiente cuadro:

Casos	Datos	Incógnitas	Fórmulas	Cálculo logarítmico
1.º	$a = 98'89$ m	C	$A+B+C=180^\circ$	$C=180^\circ-(A+B)=75^\circ \cdot 8' \cdot 23''$.
	$A=36^\circ \cdot 25' \cdot 20''$	b	$\frac{a}{b}=\frac{snA}{snB}$	$b=\frac{asnB}{snA}=antlg\,(lga+lgsnB+clgsnA)=153'33$m.
	$B=68^\circ \cdot 26' \cdot 17''$	c	$\frac{a}{c}=\frac{snA}{snC}$	$c=\frac{asnC}{snA}=antlg\,(lga+lgsnC+clgsnA)=159'36$m.
2.º	$a=97'89$m	A, B...	$A+B+C=180^\circ$	$A+B=180^\circ-C;\ \frac{1}{2}(A+B)=\frac{1}{2}(180^\circ-C)=90^\circ-\frac{1}{2}C$.
			$tg\frac{1}{2}(A-B)=ctg\frac{1}{2}C\frac{a-b}{a+b}$	$\frac{1}{2}(A-B)=antlgtg\,[(lgctg\frac{1}{2}C+lg\,(a-b)+clg\,(a+b)]$.
	$b=153'33$m		$A=\frac{1}{2}(A+B)+\frac{1}{2}(A-B)$	$A=(90^\circ-\frac{1}{2}C)+antlgtg\,[lgctg\frac{1}{2}C+lg\,(a-b)+clg\,(a+b)]=36^\circ \cdot 25' \cdot 20''$.
			$B=\frac{1}{2}(A+B)-\frac{1}{2}(A-B)$(*)	$B=(90^\circ-\frac{1}{2}C)-antlgtg\,[lgctg\frac{1}{2}C+lg\,(a+b)+clg\,(a+b)]=68^\circ \cdot 26' \cdot 17''$.
	$C=75^\circ \cdot 8' \cdot 23''$	c	$\frac{a}{snA}=\frac{c}{snC}$	$c=\frac{asnC}{snA}=antlg\,(lga+lgsnC+clgsnA)=159'36$m.
3.º	$a=97'89$m	A	$tg\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}}$	$A=2\times\frac{1}{2}A=2\,antlgtg\left\{\frac{1}{2}[lg(p-b)+lg(p-c)+clgp+clg\,(p-a)]\right\}=36^\circ \cdot 25' \cdot 20''$
	$b=153'33$m	B	$tg\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-c)}{p\,(p-b)}}$	$B=2+\frac{1}{2}\,B=2antlgtg\left\{\frac{1}{2}\,[lg(p-a)+lg(p-c)+clgp+clg\,(p-b)]\right\}=68^\circ \cdot 26' \cdot 17''$
	$c=159'36$m	C	$tg\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{p\,(p-c)}}$	$C=2+\frac{1}{2}\,C=2antlgtg\left\{\frac{1}{2}\,[lg(p-a)+lg\,(p-b)+clgp+clg(p-c)]\right\}=75^\circ \cdot 8' \cdot 23''$
4.º	$a=97'89$m	B	$\frac{a}{b}=\frac{snA}{snB}$	$snB=\frac{bsnA}{a};\ B=antlgsn\,(lgb+lgsnA+clg)=68 \cdot 29' \cdot 17''$
	$b=153'33$m	C	$A+B+C=180^\circ$	$C=180^\circ-(A+B)=75^\circ \cdot 8' \cdot 23''$
	$A=36^\circ \cdot 25' \cdot 20''$	c	$\frac{a}{c}=\frac{snA}{snC}=\frac{snA}{sn(A+B)}$	$c=\frac{asn(A+B)}{snA}=antlg\,[lga+lgsn\,(A+B)+clgsnA]=159'36$m

(*) Sabemos por Aritmética que *el mayor de dos números es igual á la semisuma más la semidiferencia de los mismas, y el menor igual á la semisuma menos la semidiferenca.*

ESCOLIOS.—1.° En el 4.° caso la incógnita B depende de su seno, y, por lo mismo, puede tener dos valores: uno menor que 90°, que es el que dan las tablas logarítmico-trigonométricas, y el otro mayor que 90°, que es el suplementario del anterior. Además, como C y c dependen de B, es necesario averiguar, por medio de una discusión conveniente, cuándo tendrá el problema dos soluciones, una ó ninguna. Si A es igual ó mayor que 90°, es $B < 90°$, y el problema tiene una solución única; pero, si es $A < 90°$, puede suceder que sea $a > b$, $a = b$, ó $a < b$. Si es $a \overline{\overline{>}} b$, también es $A \overline{\overline{>}} B$, y el problema tendrá una solución única; más, si es $a < b$, A será menor que B, y para averiguar las soluciones del problema, hay que distinguir si es $a > b\,sn\,A$, $a = b\,sn\,A$ ó $a < b\,sn\,A$. En el primer caso hay dos soluciones, por ser $sn\,B < 1$; en el segundo, una, por ser $sn\,B = 1$, y en el tercero, ninguna, por ser $sn\,B > 1$.

2.° En la resolución del 2.° caso, hemos determinado el valor de c, en función de la incógnita A, que, previamente, habíamos hallado, en función directa de los datos; y al resolver el cuarto caso, hemos obtenido, en primer término, el valor de B, por medio de los datos, para poder, después, determinar la incógnita c. Hemos procedido así, porque el método, que se emplea para hallar, tanto en un caso como en el otro, las incógnitas en función directa de los datos, es mucho más laborioso.

LIBRO III

Trigonometría esférica

CAPÍTULO I

Triángulos rectángulos y rectiláteros

LECCIÓN 13.ª

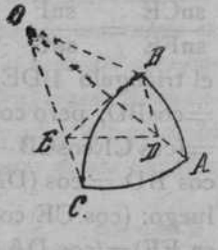
Fórmulas para la resolución de triángulos rectángulos y rectiláteros.

47. Como un triángulo esférico rectángulo ó rectilátero queda determinado por dos de sus elementos, solo necesitamos, para poder resolverlo, hallar fórmulas que relacionen tres elementos, siendo dos de ellos conocidos. Con tal objeto, demostraremos los teoremas siguientes, suponiendo siempre que el radio de la esfera es igual á la unidad.

48. *En todo triángulo esférico rectángulo, el coseno de la hipotenusa es igual al producto de los cosenos de los catetos.*

En efecto: si ABC (fig.ª 6.ª) es un triángulo esférico rectángulo en A, y trazamos, por B, la perpendicular BD á OA, así como, por D, la perpendicular DE á OC, la recta BD será perpendicular al plano AOC, por ser recto el diedro de arista OA, y BE será perpendicular á OC, que está situada en dicho plano, en virtud de uno de los teoremas de las tres perpendiculares; luego, si aplicamos un teorema muy conocido á los triángulos rectángulos OED, ODB y OEB, podremos escribir: $OE = OD.\ \cos b$, $OD = OB.\cos c$ y $OE = OB.\cos a$; pero como esta última igualdad tiene su primer miembro idéntico al primero de la $OE = OB.\cos b.\cos c$. que resulta de multiplicar ordenadamente las $OE = OD.\cos b$ y $OD = OB\ \cos c$, se tiene: $OB\ \cos a = OB\ \cos b\ \cos c$; ó bién: $\cos a = \cos b.\ \cos c$, según queríamos demostrar.

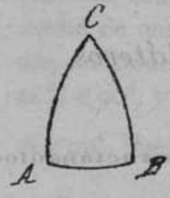
FIGURA 6.ª



49. *En todo triángulo esférico birrectángulo, los senos de los lados son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos.*

En efecto: si ABC (fig.ª 7.ª) es un triángulo rectángulo en A y en B, el punto C será el polo de AB, y AB la medida del ángulo C; luego se tendrá: sna=snA, snb = sn B, snc = sn C; de donde: $\frac{\text{sna}}{\text{snA}}=1$, $\frac{\text{snb}}{\text{snB}}=1$, $\frac{\text{snc}}{\text{snC}}=1$; ó bien: $\frac{\text{sna}}{\text{snA}}=\frac{\text{snb}}{\text{snB}}=\frac{\text{snc}}{\text{snC}}$, según queríamos demostrar.

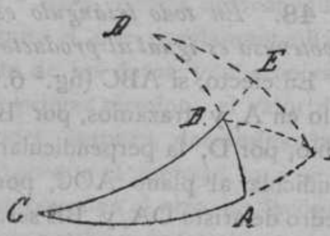
FIGURA 7.ª



50. *En todo triángulo esférico rectángulo, el seno de un cateto es igual al seno de la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto al cateto.*

En efecto: si en el triángulo ABC, rectángulo en A (fig.ª 8.ª), prolongamos los lados CA y CB, hasta que cada uno valga un cuadrante, y prolongamos también los arcos AB y FE, hasta su encuentro en D, los puntos C y D serán los polos respectivos de FE y CF, y, por lo tanto, en los triángulos birrectángulos CFE y DAF, se verificará, según el teorema anterior:

FIGURA 8.ª



$\frac{\text{snCE}}{\text{snFE}}=\frac{\text{snF}}{\text{snC}}$ (I); $\frac{\text{snDF}}{\text{snAD}}=\frac{\text{snA}}{\text{snF}}$ (II). Por ser rectángulo el triángulo BDE, podemos escribir (48): cos BE $\times$ cos DE = =cosBD; pero cosBE $\times$ cosDE=cos(CE—CB)$\times$cos(DF—EF) =(cos CEcosCB — sn CEsn CB) (cosDFcosEF — sn(DFsnEF), y cos BD = cos (DA — BA) = cos DA cos BA — sn DA sn BA; luego: (cos CE cos CB —sn CE sn CB) (cos DF cos EF -- sn DF sn EF)=(cos DA cos BA --sn DA sn BA); y, como los minuendos de los dos miembros de esta igualdad son iguales á cero, por serlo *cos CE, cos DE* y *cos DA*, se tiene: sn CE sn CB sn DF sn EF = sn DA sn BA.

Multiplicando, miembro á miembro, esta igualdad y las (I) y (II), simplificando el resultado, y teniendo en cuenta que CE, DF y AD son cuadrantes, obtenemos sucesivamente:

$$\frac{\operatorname{sn} CE \times \operatorname{sn} DF \times \operatorname{sn} CE \times \operatorname{sn} CB \times \operatorname{sn} DF \times \operatorname{sn} EF}{\operatorname{sn} FE \times \operatorname{sn} AD} = \frac{\operatorname{sn} F \times \operatorname{sn} A \times \operatorname{sn} AD \times \operatorname{sn} BA}{\operatorname{sn} C \times \operatorname{sn} F};$$

$$\frac{\operatorname{sn}^2 CE \times \operatorname{sn}^2 DF \times \operatorname{sn} CB}{\operatorname{sn} AD} = \frac{\operatorname{sn} A \times \operatorname{sn} DA \times \operatorname{sn} BA}{\operatorname{sn} C};$$

$$\operatorname{sn}^2 CE \times \operatorname{sn}^2 DF \times \operatorname{sn} CB = \frac{\operatorname{sn} A \times \operatorname{sn}^2 DA \times \operatorname{sn} BA}{\operatorname{sn} C};\ \operatorname{sn} CB = \frac{\operatorname{sn} BA}{\operatorname{sn} C};$$

$\operatorname{sn} BA = \operatorname{sn} CB \times \operatorname{sn} C$; ó bién: $snc = sna.\ sn\ C$, según nos habíamos propuesto demostrar.

Corolario.—*En todo triángulo esférico rectángulo, el coseno de un ángulo oblícuo, multiplicado por el seno de la hipotenusa, es igual al coseno del cateto opuesto al ángulo oblícuo, multiplicado por el seno del otro cateto.*

En efecto: los triángulos rectángulos BEF y BAF (figura 8.ª) dan (48): $\cos EF \times \cos BE = \cos BF = \cos AB \times \cos AF$; y como CE y CF valen 90°, y el arco EF es la medida del ángulo C, se tiene: $\cos BE = \cos (CE - BC) = \operatorname{sn} BC$; $\cos AF = \cos (CF - AC) = \operatorname{sn} AC$; de donde, sustituyendo, resulta: $\cos C\,sn\,a = \cos c\ sn\ b$, conforme con el enunciado.

51. *En todo triángulo esférico rectángulo se verifica: 1.º la tangente de un cateto es igual á la tangente de la hipotenusa, por el seno del ángulo comprendido; 2.º la tangente de un cateto es igual á la tangente de su ángulo opuesto, por el seno del otro cateto; 3.º el coseno de un ángulo oblícuo es igual al coseno de su cateto opuesto, por el seno del otro ángulo oblícuo; 4.º el coseno de la hipotenusa es igual al producto de las cotangentes de los ángulos oblícuos.*

En efecto: según el corolario anterior, $\cos C = \frac{\cos c \operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a}$, y como (48) $\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}$, se tiene, sustituyendo:

$\cos C = \frac{\cos a \operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a \cos b} = \operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} b$; de donde: $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \operatorname{sn} C$. Dividiendo ordenadamente las fórmulas $\operatorname{sn} c = \operatorname{sn} a \operatorname{sn} C$ y $\cos c \operatorname{sn} b = \operatorname{sn} a \cos C$ (50, c.°), se tiene: $\operatorname{tg} c = \operatorname{sn} b \operatorname{tg} C$. Dividiendo ordenadamente las fórmulas $\cos c \cos b = \operatorname{sn} a \cos C$ y $\operatorname{sn} b = \operatorname{sn} a \operatorname{sn} B$ (50, c.°), tenemos: $\cos c = \frac{\cos C}{\operatorname{sn} B}$; de donde: $\cos C = \cos c \operatorname{sn} B$.

Multiplicando ordenadamente las igualdades $\cos = \frac{\cos C}{\operatorname{sn} B}$ y $\cos b = \frac{\cos B}{\operatorname{sn} C}$, que acabamos de demostrar, y teniendo en cuenta el número 48, resulta: $\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C$. Quedan, pues, demostradas las cuatro partes del teorema.

52. *En todo triángulo esférico rectilátero se verifica: 1.° el coseno del ángulo opuesto al cuadrante es igual á menos el producto de los cosenos de los otros dos ángulos; 2.° el seno de un ángulo adyacente al cuadrante es igual al seno del ángulo opuesto al cuadrante, por el seno del lado opuesto á dicho ángulo adyacente; 3.° la tangente de un ángulo adyacente al cuadrante es igual á menos el producto de la tangente del ángulo opuesto al cuadrante por el coseno del lado no opuesto á dicho ángulo adyacente; 4.° la tangente de un ángulo adyacente al cuadrante es igual al producto del seno del otro ángulo adyacente al cuadrante, por la tangente del lado opuesto al primer ángulo; 5.° el coseno de un lado adyacente al cuadrante es igual al coseno del ángulo opuesto por el seno del otro lado; 6.° el coseno del ángulo opuesto al cuadrante es igual á menos el producto de las cotangentes de los otros dos lados.*

En efecto: designando por A, B, C, a, b, c, los ángulos y los lados de un triángulo rectilátero, y por A', B', C', a', b', c', los del triángulo polar correspondiente, el cual será rectángulo en A', tendremos: $a' = 180° - A$, $b' = 180° - B$, $c' = 180 - C$, $A' = 180° - a$, $B' = 180° - b$, $C' = 180° - c$; luego de las fórmulas $\cos a' = \cos b' \cos C'$, $\operatorname{sn} c' = \operatorname{sn} a' \operatorname{sn} C'$, $\operatorname{tg} b' = \operatorname{tg} a' \cos C'$, $\operatorname{tg} b' = \operatorname{sn} c' \operatorname{tg} B'$, $\cos B' = \cos b' \operatorname{sn} C'$, $\cos a' = \operatorname{tg} B' \operatorname{ctg} C'$, que hemos concluido de hallar para los triángulos rectángulos, se deducen, por simples sustituciones, las siguientes: cos A=—cos B cos C, sn C= sn A sn c, tg B=—tg A cos c, tg B=sn C tg b, cos b=cos B sn c, cos A=—ctgb ctgc, que demuestran el teorema.

ESCOLIOS.—1.° *En todo triángulo esférico rectángulo, ó los tres lados son menores que 90°, ó uno es menor y los otros dos mayores que 90°;* pues de la relación *cos a=cos b cos c*, se deduce que si *cos a* es positivo, *cos b* y *cos c* son ambos positivos ó ambos negativos, lo cual significa que, en el primer caso, *a*, *b* y *c* son menores que 90°, y en el segundo, es $a<90°$ y *b* y *c* mayores que 90°; y si, *cos a* es negativo, *cos b* y *cos c* son uno positivo y el otro negativo, y, por lo tanto, *a* es mayor que 90.°, y *b* y *c* uno mayor y el otro menor que 90°.

2.° *En todo triángulo esférico rectángulo, un cateto y su ángulo opuesto son ambos mayores ó ambos menores que 90°;* pues en la fórmula *cos B=cos b sn C*, *sn C* es siempre positivo, por ser $C<180°$, luego *cos B* y *cos b* tendrán el mismo signo, lo cual significa que *B* y *b* son los dos mayores ó los dos menores que 90°.

3.° *En todo triángulo esférico rectilátero, ó los tres ángulos son mayores que 90°, ó uno es mayor y los otros dos menores que 90°;* pues, de la relación cos A=—cos B cos C, se deduce que, si *cos A* es positivo, *cos B* y *cos C* son uno positivo y el otro negativo, y, por lo tanto, A es menor que 90°, y *B* y *C* uno mayor y el otro menor que 90°; y si *cos A* es negativo, *cos B* y *cos C* son ambos positivos ó ambos negativos, y, por lo tanto, es $a>90°$, y B y C ambos mayores ó ambos menores que 90°.

4.° *En todo triángulo esférico rectilátero, un ángulo adyacente al cuadrante y su lado opuesto son ambos mayores ó menores que 90°;* pues, en la fórmula *cos b=cos B sn c*, *sn c* es siempre positivo, por ser *c* menor que 180°, luego *cos B* y *cos b* tendrán el mismo signo, lo cual significa que *B* y *b* son ambos mayores ó ambos menores que 90°.

5.° Para resolver un triángulo esférico rectángulo ó rectilátero, se hace uso de las fórmulas siguientes, las cuales son aplicables á todos los elementos análogos:

Triángulos esféricos rectángulos.	*Triángulos esféricos rectiláteros.*
$\cos a = \cos b \cos c$	$\cos A = -\cos B \cos C$
$\operatorname{sn} c = \operatorname{sn} a \operatorname{sn} C$	$\operatorname{sn} C = \operatorname{sn} A \operatorname{sn} c$
$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C$	$\operatorname{tg} B = -\operatorname{tg} A \cos c$
$\operatorname{tg} b = \operatorname{sn} c \operatorname{tg} B$	$\operatorname{tg} B = \operatorname{sn} C \operatorname{tg} b$
$\cos B = \cos b \operatorname{sn} C$	$\cos b = \cos B \operatorname{sn} c$
$\cos a = \operatorname{cotg} B \operatorname{ctg} c$	$\cos A = -\operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c$

LECCIÓN 14.ª

Casos generales de resolución de triángulos esféricos rectángulos y rectiláteros.

53. Los casos generales de resolución de triángulos esféricos rectángulos son seis, que se enuncian diciendo: *resolver un triángulo esférico rectángulo, dados la hipotenusa y un cateto, los dos catetos, la hipotenusa y un ángulo oblícuo, un cateto y el ángulo adyacente, y los dos ángulos oblícuos.*

En cada uno de estos casos, se procede según expresa el siguiente cuadro:

Casos.	Datos	Incógnitas	Fórmulas	Cálculo logarítmico
1.°	a=71°--24'--30" b=140°--52'--40"	c B C	cos a=cos b cos c sn b=sn a sn B tg b=tg a cos C	cos c=cos a: cos b; c=antlg cos (lg cos a+clg cos b)=114°--15--53'9" sn B=sn b: sn a; B=antlg sn (lg sn b+clg sn a)=138°--15'--45'4" cos C=tg b: tg a; C=antlg cos (lg tg b+clg tg a)=105°--52'--39"
2.°	b=140°--52'--40" C=114°-15'-53'9"	a B C	cos a=cos b cos c tg b=sn c tg B tg c=sn b tg C	a=antlg cos (lg cos b+lg cos c)=71°-24'--30" tg B=tg b: sn c; B=antlg tg (lg tg b+clg sn c=138°--15'--45'4" tg C=tg c: sn b; C=antlg tg (lg tg c+clg sn b)=105°-52'--39"
3.°	a=71°--24'--30" B=138°-15'-45'4"	b c C	sn b=sn a sn B tg c=tg a cos B cos a=ctg B ctg C	b=antlg sn (lg sn a+lg sn B)=140°--52'--40" c=antlg tg (lg tg a+lg tg B)=114°—15'53'9" ctg C=cos a: ctg B; C=antlg ctg (lg cos a+clg ctgB)=105°--52'--39"
4.°	b=140°--52'--40" B=138°-15'-45'4"	a c C	sn b=sn a sn B tg b=sn c tg B cos B=cos b sn C	sn a=sn b: sn B; a=antlg sn (lg sn b+clg sn B)=71°--24'--30" sn c=tg b: tg B; c=antlg sn (lg tg b+clg tg B)=114°--15'--53'9" sn C=cos B: cos b; C=antig sn (lg cos B+clg cos b)=105°--52'--39'
5.°	b=140°--52'--40" C=105°--52'--39"	a c B	tg b=tg a cos C tg c=sn b tg C cos B=cos b sn C	tg a=tg b: cos C; a=antlg tg (lg tg b+clg cos C)=71°--24'-30" c=antlg tg (lg sn b+lg tg C)=114°--15'-- 53'9" B=antlg cos (lg cos b+lg sn C)=138°--15'--45'4"
6.°	B=138°-15'-45'4" C=105°--52'--39"	a b C	cos a=ctg B ctg C cos B=cos b sn C cos C=cos c sn B	a=antlg cos (lg ctg B+lg ctg C)=71°--24'--30" cos b=cos B: sn C; b=antlg cos (lg cos B+clg sn C)=140°--52'--40" C=antlg cos (lg cos c+lg sn B)=105°--52'--39"

Escolio.—Teniendo en cuenta las propiedades generales de los triángulos esféricos, y los escolios 1.° y 2.° del número 52, es fácil ver: 1.° que los problemas, de los casos 2.°, 3.° y 5.°, son siempre posibles, y tienen una solución única; 2.° que el del primer caso será posible, siempre que sea $sn\, b < sn\, a$, para lo cual es preciso que sea $a = 90^\circ$, ó que, siendo $a \lesseqgtr 90^\circ$, sea $a \lesseqgtr b$, ó $b \lesseqgtr 180^\circ - a$; 3.° que el del 6.° caso será posible siempre que la suma de los ángulos dados esté comprendida entre 90° y 270°, y su diferencia entre —90° y 90°; 4.° que el del cuarto caso tiene dos soluciones, que son, para $b > 90^\circ$, $\left\{\begin{matrix} a, & c, & C, \\ 180^\circ - a, & 180^\circ - c, & 180^\circ - C \end{matrix}\right\}$, y para $b < 90^\circ$, $\left\{\begin{matrix} a, & 180^\circ & c, 180^\circ - C \\ 180^\circ - a, & c, & C, \end{matrix}\right\}$, siendo a, c y C los valores de las incógnitas dados por las tablas; y 5.° que, cuando los problemas de los casos 1.° y 6.° son posibles, tienen una solución única.

54. Los casos generales de resolución de triángulos esféricos rectiláteros son seis, y se enuncian diciendo: *resolver un triángulo esférico rectilátero dados dos ángulos, siendo uno opuesto al cuadrante, dos ángulos, no opuestos al cuadrante, un lado y el ángulo opuesto al cuadrante, un lado y su ángulo opuesto, un ángulo y el lado adyacente, y dos lados.*

En cada uno de estos casos, se procede según expresa el siguiente cuadro:

Casos	Datos	Incógnitas	Fórmulas	Cálculo logarítmico
1.°	$A=108^\circ{-}35'{-}30''$ $B=39^\circ{-}7'{-}20''$	C b c	$\cos A=-\cos B \cos C$ $\operatorname{sn} B=\operatorname{sn} A \operatorname{sn} b$ $\operatorname{tg} B=-\operatorname{tg} A \cos c$	$\cos C=-(\cos A : \cos B)$; $C=\operatorname{antlg} \cos[-(\lg \cos A+\operatorname{clg} \cos B)]=65^\circ{-}44'{-}6'1''$ $\operatorname{sn} b=\operatorname{sn} B : \operatorname{sn} A$; $b=\operatorname{antlg} \operatorname{sn}(\lg \operatorname{sn} B+\operatorname{clg} \operatorname{tg} A)=41^\circ{-}44'{-}14'6''$ $\cos c=-(\operatorname{tg} B : \operatorname{tg} A)$; $c=\operatorname{antlg} \cos[-(\lg \operatorname{tg} B+\operatorname{clg} \operatorname{tg} A)]=74^\circ{-}7'{-}21''$
2.°	$B=39^\circ{-}7'{-}20''$ $C=65^\circ{-}44'{-}6'1''$	A b c	$\cos A=-\cos B \cos C$ $\operatorname{tg} B=\operatorname{sn} C \operatorname{tg} b$ $\operatorname{tg} C=\operatorname{sn} B \operatorname{tg} c$	$A=\operatorname{antlg} \cos[-(\lg \cos B+\lg \cos C)]=180^\circ{-}35'{-}30''$ $\operatorname{tg} b=\operatorname{tg} B : \operatorname{sn} C$; $b=\operatorname{antlg} \operatorname{tg}(\lg \operatorname{tg} B+\operatorname{clg} \operatorname{sn} C)=41^\circ{-}44'{-}14'6''$ $\operatorname{tg} c=\operatorname{tg} C : \operatorname{sn} B$; $c=\operatorname{antlg} \operatorname{tg}(\lg \operatorname{tg} C+\operatorname{clg} \operatorname{sn} B)=74^\circ{-}7'{-}21''$
3.°	$A=180^\circ{-}35'{-}30''$ $b=41^\circ{-}44'{-}14'6''$	B C c	$\operatorname{sn} B=\operatorname{sn} A \operatorname{sn} b$ $\operatorname{tg} C=-\operatorname{tg} A \cos b$ $\cos A=-\operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c$	$B=\operatorname{antlg} \operatorname{sn}(\lg \operatorname{sn} A+\lg \operatorname{sn} b)=39^\circ{-}7'{-}20''$ $C=\operatorname{antlg} \operatorname{tg}[-(\lg \operatorname{tg} A+\lg \cos B)]=65^\circ{-}44'{-}6'1''$ $\operatorname{ctg} c=-(\cos A : \operatorname{ctg} b)$; $c=\operatorname{antlg} \operatorname{ctg}[-(\lg \cos A+\operatorname{clg} \operatorname{ctg} b)]=74^\circ{-}7'{-}21''$
4.°	$b=41^\circ{-}44'{-}14'6''$ $B=39^\circ{-}7'{-}20''$	A C c	$\operatorname{sn} B=\operatorname{sn} A \operatorname{sn} b$ $\operatorname{tg} B=\operatorname{sn} C \operatorname{tg} b$ $\cos b=\cos B \operatorname{sn} c$	$\operatorname{sn} A=\operatorname{sn} B$; $A=\operatorname{antlg} \operatorname{sn}(\lg \operatorname{sn} B+\operatorname{clg} \operatorname{sn} B)=180^\circ{-}35'{-}20''$ $\operatorname{sn} C=\operatorname{tg} B : \operatorname{tg} b$; $C=\operatorname{antlg} \operatorname{sn}(\lg \operatorname{tg} B+\operatorname{clg} \operatorname{tg} b)=65^\circ{-}44'{-}6'1''$ $\operatorname{sn} c=\cos b : \cos B$; $c=\operatorname{antlg} \operatorname{sn}(\lg \cos b+\operatorname{clg} \cos b)=74^\circ{-}7'{-}21''$
5.°	$B=39^\circ{-}7'{-}20''$ $c=74^\circ{-}7'{-}21''$	A C B	$\operatorname{tg} B=-\operatorname{tg} A \cos c$ $\operatorname{tg} C=\operatorname{sn} B \operatorname{tg} c$ $\cos b=\cos B \operatorname{sn} c$	$\operatorname{tg} A=-(\operatorname{tg} B : \cos c)$; $A=\operatorname{antlg} \operatorname{tg}[-(\lg \operatorname{tg} B+\operatorname{clg} \cos c)]=180^\circ{-}35'{-}20''$ $C=\operatorname{antlg} \operatorname{tg}(\lg \operatorname{sn} B+\lg \operatorname{tg} c)=65^\circ{-}44'{-}6'1''$ $\cos B=\cos b : \operatorname{sn} c$; $B=\operatorname{antlg} \cos(\lg \cos b+\operatorname{clg} \operatorname{sn} c)=39^\circ{-}7'{-}20''$
6.°	$b=41^\circ{-}44'{-}14'6''$ $c=74^\circ{-}7'21''$	A B C	$\cos A=-\operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c$ $\cos b=\cos B \operatorname{sn} c$ $\cos c=\cos C \operatorname{sn} b$	$A=\operatorname{antlg} \cos[-(\lg \operatorname{ctg} b+\lg \operatorname{ctg} c)]=180^\circ{-}35'{-}30''$ $\cos B=\cos b : \operatorname{sn} c$; $B=\operatorname{antlg} \cos(\lg \cos b+\lg \operatorname{sn} c)=39^\circ{-}7'{-}20''$ $\cos C=\cos c : \operatorname{sn} b$; $C=\operatorname{antlg} \cos(\lg \cos c+\lg \operatorname{sn} b)=65^\circ{-}44'{-}6'1''$

ESCOLIOS.—1.° Teniendo en cuenta las propiedades generales de los triángulos esféricos, y los escolios 3.° y 4.° del número 52, es fácil ver que las condiciones de posibilidad y las soluciones de los problemas que hemos concluido de resolver, son análogas á las de los casos correspondientes de resolución de triángulos esféricos rectángulos.

2.° Para resolver un triángulo esférico isósceles, basta resolver uno de los triángulos rectángulos iguales, en que el propuesto queda dividido, si se traza el arco de círculo máximo bisector del ángulo opuesto á la base; y para resolver un triángulo esférico, en el que la suma de dos ángulos ó de dos lados sea igual á 180°, basta resolver el triángulo esférico isósceles que se forma prolongando uno de los lados dados y el tercero, ó bien uno de los lados opuestos á uno de los ángulos dados y el opuesto al tercero.

3.° Los triángulos birrectángulos y trirrectángulos no originan ningún caso de resolución, porque los dos lados que forman el ángulo oblícuo de un birrectángulo valen 90°, y el tercer lado es igual al ángulo opuesto, y en el trirrectángulo, los tres lados son iguales á 90°.

CAPÍTULO II

Triángulos oblicuángulos.

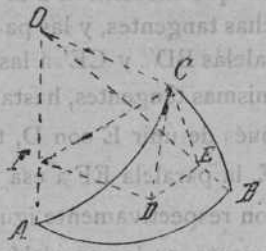
LECCION 15.ª

Fórmulas fundamentales para resolver triángulos oblicuángulos.

55. Como un triángulo esférico oblicuángulo está determinado por tres de sus seis elementos, para poder resolverlo, necesitamos hallar fórmulas que relacionen cuatro elementos, siendo tres de ellos conocidos. Con tal objeto, demostraremos varios teoremas.

56. *En todo triángulo esférico, los senos de los lados son proporcionales á los senos de los ángulos respectivamente opuestos.*

FIGURA 9.ª



En efecto: sea ABC (fig.ª 9.ª) un triángulo esférico, y OABC su tiedro correspondiente. Si trazamos, desde el vértice C, la perpendicular CD al plano AOB, y, desde el pié de esta perpendicular, trazamos las perpendiculares DE y DF á las aristas OB y OA, y, por último, unimos el punto C con los E y F, las rectas CE y CF serán respectivamente perpendiculares á OB y OA, en virtud de uno de los teoremas de las tres perpendiculares, y las rectas CE, OE, CF y OF respectivamente iguales á *sna*, *cosa*, *snb* y *cosb*.

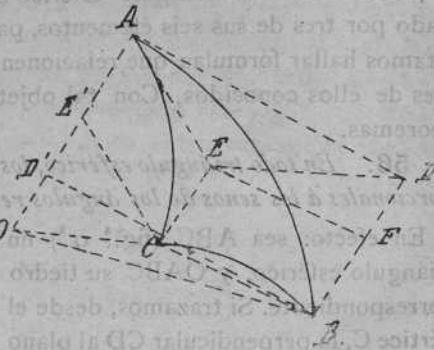
Ahora bien; si, en el plano CFD, tomamos á FD como unidad de dirección, la expresión de CF será igual á $FD+DC\sqrt{-1}$ $=snb(\cos CFD+\sqrt{-1}\,sn\,CFD)=snb\,(\cos A+\sqrt{-1}\,snA)=snb$

$\cos A + \sqrt{-1}\ \text{snb}\ \text{sn}A$; de donde: $DC = \text{snb}\ \text{sna}$; pero en el triángulo CDE, rectángulo en D, se verifica: $DC = \text{sna}\ \text{sn}B$; luego, igualando los dos valores de DC, se tendrá: $\text{sna}\ \text{sn}B = \text{snb}\ \text{sn}A$; de donde: $\frac{\text{sna}}{\text{snb}} = \frac{\text{sn}A}{\text{su}B}$; ó bien: $\frac{\text{sna}}{\text{sn}A} = \frac{\text{snb}}{\text{sn}B}$, según deseábamos demostrar.

57. *En todo triángulo esférico, el coseno de un lado es igual al producto de los cosenos de los otros dos lados, más el producto de los senos de los mismos lados, por el coseno del ángulo comprendido.*

En efecto: sea ABC (figura 10.ª) un triángulo esférico, y OABC su tiedro correspondiente. Si trazamos en A las tangentes AD y AE á los lados c y b; si, desde los vértices B y C, trazamos las paralelas BD y CE á la arista OA, hasta que encuentren á dichas tangentes, y las paralelas BD′ y CE′ á las mismas tangentes, hasta que encuentren á la arista OA, y, si, después de unir E con D, trazamos la cuerda BC del lado a, y, por F, la paralela EF á esa cuerda, las rectas BD′, CE′, OD′ y OE′ son respectivamente iguales snc, snb, $cosc$ y $cosb$, y, por consiguiente, en los paralelógramos ADBD′ y AECE′, se tiene: $AD = BD' = snc$, $BD = AD' = OA - OD' = 1 - cosc$, $AE = CE' = snb$ y $CE = AE' = OA - OE' = 1 - cosb$; pero, en el triángulo AED, es $ED^2 = \text{sn}^2c + \text{sn}^2b - 2\,\text{snc}\,\text{snb}\cos A$, y en el triángulo DEF, rectángulo en D, es $ED^2 = 4\,\text{sn}^2\tfrac{1}{2}a - (\cos c - \cos b)^2$, por ser $EF = BC = 2\,\text{sn}\tfrac{1}{2}a$ y $DF = BD - CE$; luego, igualando los dos valores

FIGURA 10.ª



de ED^2, y verificando transformaciones, resulta: $4sn^2\frac{1}{2}a-(cosc-cosb)^2=sn^2c+sn^2b-2snc\ snb\ cos A$; $4sn^2\frac{1}{2}a=sn^2c+cos^2c+sn^2b+cos^2b-2cosc\ cosb-2snc\ snb\ cosA=2-2\ cosc\ cosb-2snc\ snb\ cosA$; $2sn^2a=1-cosa=1-cosb\ cosc-snb\ snccosA$; $cosa=cos\ cosc+snb\ snc\ cos\ A$, lo que queríamos demostrar.

58. *En todo triángulo esférico, la cotangente de un lado, por el seno de otro, es igual al coseno de éste por el coseno del ángulo comprendido, más el seno del mismo ángulo, por la cotangente del opuesto al primer lado.*

En efecto: en virtud de los dos teoremas precedentes, se verifica: $snc\ snA=sna\ snC$, $cos\ c=cosa\ cosb+sna\ snb\ cosC$, $cos\ a=cos\ b\ cos\ c+sn\ b\ sn\ c\ cos\ A$. Si sustituimos en esta última igualdad los valores de *sn c* y *cos c*, dados, respectivamente, por la primera y la segunda, se tiene: $cos\ a=cos\ b\ (cosa\ cosb+sn\ a\ sn\ b\ cosC)+\frac{sna\ snb\ snC\ cosA}{snA}=cos\ a\ cos^2b+sna\ snb\ cosb\ cosC+sn\ a\ sn\ b\ sn\ C\ ctgA$. Restando de los dos miembros $cos\ a\ cos^2b$, resulta: $cos\ a-cos\ a\ cos^2b=cos\ a\ (1-cos^2b)=cos\ a\ sn^2b=sna\ snb\ cos\ b\ cosC+sn\ a\ sn\ b\ sn\ C\ ctgA$; de donde, dividiendo por *sna s n b*, se deduce: $ctg\ a\ sn\ b=cos\ b\ cos\ C+sn\ C\ ctgA$, según queríamos demostrar.

59. *En todo triángulo esférico, el coseno de un ángulo es igual á menos el producto de los cosenos de los otros dos, más el producto de los senos de los mismos, por el coseno del lado opuesto al primero.*

En efecto: si A, B, C, a, b, c, son los ángulos y los lados de un triángulo esférico, y A', B', C', a', b', c', los del polar correspondiente, y, en la fórmula $cos\ a'=cos\ b'\ cos\ c'+sn\ b'\ sn\ c'\ cosA'$ (57), ponemos en, en vez de a', b', c y A', sus respectivos valores 180^o-A, 180^o-B, 180^o-C y 180^o-a, tendremos: $-cos\ A=cos$

B cos C · sn B sn C cos a; ó bien: cos A=—cos B cos C+sn B sn C cos a, según el enunciado.

ESCOLIO.—De las relaciones obtenidas, al demostrar los cuatro teoremas anteriores, se deducen las fórmulas halladas para resolver triángulos rectángulos y rectiláteros, sin más que hacer *A* y *a* iguales á 90°; y aunque dichas relaciones son suficientes para poder resolver un triángulo esférico oblicuángulo, en los seis casos que vamos á considerar, demostraremos, no obstante, algunos teoremas, con objeto de obtener otras fórmulas más cómodas para el cálculo logarítmico. Tal es el objeto de la lección siguiente.

LECCIÓN 16.ª

Fórmulas derivadas para resolver triángulos esféricos oblicuángulos

60. *En todo triángulo esférico se verifica:* 1.° *el seno de la mitad de un ángulo es igual á la raiz cuadrada de una fracción, que tiene por denominador el producto de los senos de los lados que forman dicho ángulo, y cuyo numerador es el producto de los senos de las diferencias entre el semiperímetro y los mismos lados;* 2.° *el coseno de la mitad de un ángulo es igual á la raiz cuadrada de una fracción, que tiene por denominador el producto de los lados que forman dicho ángulo, y cuyo numerador es el producto del seno del semiperímetro por el seno de la diferencia entre el semiperímetro y el lado opuesto al mismo ángulo;* 3.° *la tangente de la mitad de un ángulo es igual á la raiz cuadrada de una fracción, que tiene por denominador el producto del seno del semiperímetro por el seno de la diferencia entre el semiperímetro y el lado opuesto á dicho ángulo, y cuyo numerador es el producto* *de los senos de las diferencias entre el semiperímetro y los lados que forman el mismo ángulo; 4.º la cotangente de la mitad de un ángulo es igual á la raiz cuadrada de una fracción, que tiene por denominador el producto de los senos de las diferencias entre el semiperímetro y los lados que forman dicho ángulo, y cuyo numerador es el producto del seno del semiperímetro por el seno de la diferencia entre el semiperímetro y el lado opuesto al mismo ángulo.*

En efecto: si, en la fórmula $\operatorname{sn}\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$, sustituimos *cos A* por su valor $\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\operatorname{sn} b\operatorname{sn} c}$, deducido de la relación fundamental $\cos a=\cos b\cos c+\operatorname{sn} b\operatorname{sn} c\cos A$, resulta: $\operatorname{sn}\frac{1}{2}A=$

$$\sqrt{\frac{1-\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\operatorname{sn} b\operatorname{sn} c}}{2}}=\sqrt{\frac{\cos b\cos c+\operatorname{sn} b\operatorname{sn} c-\cos a}{2\operatorname{sn} b\operatorname{sn} c}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\cos(b-c)-\cos a}{2\operatorname{sn} b\operatorname{sn} c}}=\sqrt{\frac{\operatorname{sn}\frac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{sn}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{sn} b\operatorname{sn} c}}.$$ Haciendo $a+b+c=2p$, será: $a+c-b=a+b+c-2b=2p-2b=2(p-b)$; $a+b-c=2(p-c)$; $b+c-a=2(p-a)$. Luego sustituyendo $a+c-b$ y $a+b-c$ por sus respectivos valores, se tiene:

$$\operatorname{sn}\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\operatorname{sn}(p-b)\operatorname{sn}(p-c)}{\operatorname{sn} b\operatorname{sn} c}}\text{---(I)}.$$ Poniendo el valor de *cosA* en la fórmula $\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$, resulta: $\cos\frac{1}{2}A=$

$$\sqrt{\frac{1+\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\operatorname{sn} b\operatorname{sn} c}}{2}}=\sqrt{\frac{\cos a-\cos b\cos c+\operatorname{sn} b\operatorname{sn} c}{2\operatorname{sn} b\operatorname{sn} c}}=$$

$$\sqrt{\frac{\cos a-\cos(b+c)}{2\operatorname{sn} b\operatorname{sn} c}}=\sqrt{\frac{\operatorname{sn}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{sn}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{sn} b\operatorname{sn} c}}=$$

$\sqrt{\dfrac{\text{snp sn }(p-a)}{\text{snb snc}}}$ ----(II). Si dividimos cada una de las fórmulas (I) y (II) por la otra, podemos escribir: $\text{tg } \frac{1}{2} A =$

$$\sqrt{\frac{\text{sn }(p-b)\text{ sn }(p-c)}{\text{snp sn }(p-a)}}\ ;\ \text{ctg } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{snp sn }(p-a)}{\text{sn }(p-b)\text{ sn }(p-c)}}$$

Está, pues, demostrado el teorema.

COROLARIO.—*En todo triángulo esférico se verifica: 1.º el seno de la mitad de un lado es igual á la raíz cuadrada de una fraccion, que tiene por denominador el producto de los senos de los ángulos adyacentes á dicho lado, y cuyo numerador es el producto del seno del semiexceso por el seno de la diferencia entre el ángulo opuesto al mismo lado y el semiexceso; 2.º el coseno de la mitad de un lado es igual á la raíz cuadrada de una fracción, que tiene por denominador el producto de los senos de los ángulos adyacentes á dicho lado, y cuyo numerador es el producto de los senos de las diferencias entre los mismos ángulos y el semiexceso; 3.º la tangente de la mitad de un lado es igual á la raíz cuadrada de una fracción, que tiene por denominador el producto de los senos de las diferencias entre los ángulos adyacentes á dicho lado y el semiexceso, y cuyo numerador es el producto del seno del semiexceso por el seno de la diferencia entre el ángulo opuesto al mismo lado y el semiexceso; 4.º la cotangente de la mitad de un lado es igual á la raíz cuadrada de una fracción, que tiene por denominador el producto del seno del semiexceso, por el seno de la diferencia entre el ángulo opuesto á dicho lado y el semiexceso, y cuyo numerador es el producto de los senos de las diferencias entre los ángulos adyacentes al mismo lado y el semiexceso.*

En efecto: designando por *2 E* el exceso del triángulo esférico propuesto, se tendrá: $A+B+C-180^{\circ}=2E$, y, por lo tanto:

$A+B+C=180^o+2E$. Si aplicamos las fórmulas del teorema al triángulo polar del ABC, resultan las siguientes: $\operatorname{sn}\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\operatorname{sn}E\operatorname{sn}(A-E)}{\operatorname{sn}B\operatorname{sn}C}}$; $\cos\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\operatorname{sn}(B-E)\operatorname{sn}(C-E)}{\operatorname{sn}B\operatorname{sn}C}}$; $\operatorname{tg}\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\operatorname{sn}E\operatorname{sn}(A-E)}{\operatorname{sn}(B-E)\operatorname{sn}(C-E)}}$; $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\operatorname{sn}(B-E)\operatorname{sn}(C-E)}{\operatorname{sn}E\operatorname{sn}(A-E)}}$. Está, pues, demostrado el corolario.

61. Analogías de Delambre.—En la resolución de triángulos esféricos, pueden emplearse, á veces con ventaja, las cuatro fórmulas siguientes, debidas á Delambre:

$$\frac{\operatorname{sn}\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}\ \dots\dots\ (I);$$

$$\frac{\operatorname{sn}\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\operatorname{sn}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sn}\frac{1}{2}c}\ \dots\dots\ (II);$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sn}\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}\ \dots\dots\ (III);$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sn}\frac{1}{2}C}=\frac{\operatorname{sn}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{sn}\frac{1}{2}c}\ \dots\dots\ (IV).$$

Para obtener estas fórmulas, se procede del modo siguiente: multiplicando los valores de $\operatorname{sn}\frac{1}{2}A$ y $\cos\frac{1}{2}B$, y teniendo en cuenta el de $\cos\frac{1}{2}C$ (60), podemos escribir: $\operatorname{sn}\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B =$

$$\sqrt{\frac{\operatorname{sn}(p-b)\operatorname{sn}p\operatorname{sn}(p-c)\operatorname{sn}(p-b)}{\operatorname{sn}b\operatorname{sn}c\operatorname{sn}a\operatorname{sn}c}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\operatorname{sn}^2(p-b)}{\operatorname{sn}^2c}\times\frac{\operatorname{sn}p\operatorname{sn}(p-c)}{\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b}}=\frac{\operatorname{sn}(p-b)}{\operatorname{sn}c}$$

$$\sqrt{\frac{\operatorname{sn}p\operatorname{sn}(p-c)}{\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b}}=\frac{\operatorname{sn}(p-b)}{\operatorname{sn}c}\times\cos\tfrac{1}{2}C;\ \text{de donde:}$$

$$\frac{\operatorname{sn}\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\operatorname{sn}(p-b)}{\operatorname{sn}c}\ \dots\dots\ (1).$$

Análogamente, tendremos: $\dfrac{\cos\frac{1}{2}A \operatorname{sn}\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C}=\dfrac{\operatorname{sn}(p-a)}{\operatorname{sn} c}\ldots(2);$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B}{\operatorname{sn}\frac{1}{2}C}=\frac{\operatorname{sn} p}{\operatorname{sn} c}\ldots(3);\ \frac{\operatorname{sn}\frac{1}{2}A\operatorname{sn}\frac{1}{2}B}{\operatorname{sn}\frac{1}{2}C}=\frac{\operatorname{sn}(p-c)}{\operatorname{sn} c}\ldots(4).$$

Combinando por suma y resta las igualdades (1) y (2), así como las (3) y (4), resulta:

$$\frac{\operatorname{sn}\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\pm\cos\frac{1}{2}A\operatorname{sn}\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\operatorname{sn}(p-b)\pm\operatorname{sn}(p-a)}{\operatorname{sn} c}\ldots(5);$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\pm\operatorname{sn}\frac{1}{2}A\operatorname{sn}\frac{1}{2}B}{\operatorname{sn}\frac{1}{2}C}=\frac{\operatorname{sn} p\pm\operatorname{sn}(p-c)}{\operatorname{sn} c}\ldots(6);$$

pero, siendo $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$, $p-a=\frac{1}{2}(b+c-a)$, $p-b=\frac{1}{2}(a+c-b)$ y $p-c=\frac{1}{2}(a+b-c)$, también será sen $(p-b)+\operatorname{sn}(p-a)=\operatorname{sn}\frac{1}{2}(a+c-b)+\operatorname{sn}\frac{1}{2}(b+c-a)=2\operatorname{sn}\frac{1}{4}(a+c-b+b+c-a)\cos\frac{1}{4}(a+c-b-b-c+a)=2\operatorname{sn}\frac{1}{4}2c\cos\frac{1}{4}2(a-b)=2\operatorname{sn}\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a-b)$, y, de un modo analogo, $\operatorname{sn}(p-b)-\operatorname{sn}(p-a)=2\cos\frac{1}{2}c\operatorname{sn}\frac{1}{2}(a-b)$, $\operatorname{sn} p+\operatorname{sn}(p-c)=2\operatorname{sn}\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}c$, $\operatorname{sn} p-\operatorname{sn}(p-c)=2\cos\frac{1}{2}(a+b)\operatorname{sn}\frac{1}{2}c$. Poniendo estos valores en las igualdades (5) y (6), separando los signos, y teniendo en cuenta que es $\operatorname{sn} c=2\operatorname{sn}\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c$, resultan las cuatro fórmulas (I), (II), (III) y (IV), que nos habíamos propuesto determinar.

62. Analogías de Neper.—Dividiendo la fórmula (I) de Delambre por la (III), la (II) por la (IV), la (IV) por la (III) y la (II) por la (I), resultan las cuatro fórmulas siguientes debidas á Neper, que también pueden emplearse con ventaja en la resolución de triángulos esféricos:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\ldots(I);$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C\operatorname{sn}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sn}\frac{1}{2}(a+b)}\ldots(II);$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a+b)=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\ldots(III);$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a-b)=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}c\operatorname{sn}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sn}\frac{1}{2}(A+B)}\ldots(IV).$$

ESCOLIO.—Para la resolución de triángulos esféricos, en los seis casos que vamos á considerar, haremos uso de las fórmulas siguientes, aplicándolas á todos los elementos análogos:

$A=\frac{1}{2}(A+B)+\frac{1}{2}(A-B)$ ---(1); $B=\frac{1}{2}(A+B)-\frac{1}{2}(A-B)$---(2);

$\frac{\text{sn } a}{\text{sn } A}=\frac{\text{sn } b}{\text{sn } B}=\frac{\text{sn } c}{\text{sn } C}$--(3); $\text{tg}\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\text{sn } E \text{ sn } (A-E)}{\text{sn}(B-E)\text{sn}(C-E)}}$----- (4);

$\text{tg } \frac{1}{2}(A+B)=\frac{\text{ctg}\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}$------ (5); de donde: $\text{ctg } \frac{1}{2} C =$ $\frac{\text{tg}\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}$-----(6); $\text{tg } \frac{1}{2}(A-B)=\frac{\text{ctg}\frac{1}{2}C\text{sn}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{sn}\frac{1}{2}(a+b)}$--(7);

de donde: $\text{ctg}\frac{1}{2}C=\frac{\text{tg}\frac{1}{2}(A-B)\text{sn}\frac{1}{2}(a+b)}{\text{sn}\frac{1}{2}(a-b)}$----- (8); $\text{tg } \frac{1}{2}(a+b) =$ $\frac{\text{tg}\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B}$--(9); de donde: $\text{tg}\frac{1}{2}c=\frac{\text{tg}\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}$ (10).

LECCION 17.ª

Casos generales de resolución de triángulos esféricos oblicuángulos.

63. Los casos de resolución de triángulos esféricos oblicuángulos son seis, y se enuncian diciendo: *resolver un triángulo esférico oblicuángulo dados dos lados y el ángulo comprendido, dos ángulos y el lado adyacente, los tres lados, los tres ángulos, dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, y dos ángulos y el lado apuesto á uno de ellos.*

En cada uno de estos casos se procede, según expresa el siguiente cuadro:

Casos	Datos	Incógnitas	Fórmulas	Cálculo logarítmico
1.º	$a=76^{\circ}\text{--}35'\text{--}36''$	A	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)=\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}$	$\frac{1}{2}(A+B)=\text{antlgtg}[\text{logctg}\frac{1}{2}C+\text{lgcos}\frac{1}{2}(a-b)+\text{clgcos}\frac{1}{2}(a+b)]$
	$b=50^{\circ}\text{--}10'\text{--}30''$	B	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)=\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C\,\text{sn}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{sn}\frac{1}{2}(a+b)}$	$\frac{1}{2}(A-B)=\text{antlgtg}[\text{lgctg}\frac{1}{2}C+\text{lgsn}\frac{1}{2}(a-b)+\text{clgsn}\frac{1}{2}(a+b)]$
	$C=34^{\circ}\text{--}15'\text{--}2'78''$	c	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}c=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}$	$A=\frac{1}{2}(A+B)+\frac{1}{2}(A-B)=121^{\circ}\text{--}36'\text{--}19'48''$
				$B=\frac{1}{2}(A+B)-\frac{1}{2}(A-B)=42^{\circ}\text{--}15'\text{--}13'46''$
				$c=2\,\text{antlgtg}[\text{lgtg}\frac{1}{2}(a+b)+\text{lgcos}\frac{1}{2}(A+B)+\text{clgcos}\frac{1}{2}(A-B)]=40^{\circ}\text{-}0'\text{-}10''$
2.º	$A=121^{\circ}\text{--}36'\text{--}19'48''$	a	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}$	$\frac{1}{2}(a+b)=\text{antlgtg}[\text{lgtg}\frac{1}{2}c+\text{lgcos}\frac{1}{2}(A-B)+\text{clgcos}\frac{1}{2}(A+B)]$
	$B=42^{\circ}\text{--}15'\text{--}13'46''$	b	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}c\,\text{sn}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{sn}\frac{1}{2}(A+B)}$	$\frac{1}{2}(a-b)=\text{antlgtg}[\text{lgtg}\frac{1}{2}c+\text{lgsn}\frac{1}{2}(A-B)+\text{clgsn}\frac{1}{2}(A+B)]$
	$c=40^{\circ}\text{--}0'\text{--}10''$	C	$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)\,\text{sn}\frac{1}{2}(a+b)}{\text{sn}\frac{1}{2}(a-b)}$	$a=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(a-b)=76^{\circ}\text{--}35'\text{--}36''$
				$b=\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)=50^{\circ}\text{--}10'\text{--}30''$
				$C=2\,\text{antlgctg}[\text{lgtg}\frac{1}{2}(A-B)+\text{lgsn}\frac{1}{2}(a+b)+\text{clgsn}\frac{1}{2}(a-b)]=34^{\circ}\ 15'\ 2'78''$
3.º	$a=76^{\circ}\text{--}35'\text{--}36''$	A	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}A=\sqrt{\dfrac{\text{sn}(p-b)\,\text{sn}(p-c)}{\text{sn}p\,\text{sn}(p-a)}}$	$A=2\,\text{antlg}\left\{\frac{1}{2}[\text{lgsn}(p-b)+\text{lgsn}(p-c)+\text{clgsn}p+\text{clgsn}(p-a)]\right\}=121^{\circ}\text{--}36'\text{--}19'48''$
	$b=50^{\circ}\text{--}10'\text{--}30''$	B	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}B=\sqrt{\dfrac{\text{sn}(p-a)\,\text{sn}(p-c)}{\text{sn}p\,\text{sn}(p-b)}}$	$B=2\,\text{antlgtg}\left\{\frac{1}{2}[\text{lgsn}(p-a)+\text{lgsn}(p-c)+\text{clgsn}p+\text{clgsn}(p-b)]\right\}=42^{\circ}\text{--}15'\text{--}13'46''$
	$c=40^{\circ}\text{--}0'10''$	C	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}C=\sqrt{\dfrac{\text{sn}(p-a)\,\text{sn}(p-b)}{\text{sn}p\,\text{sn}(p-c)}}$	$C=2\,\text{antltg}\left\{\frac{1}{2}[\text{lgsn}(p-a)+\text{lgsn}(p-b)+\text{clgsn}p+\text{clgsn}(p-c)]\right\}=34^{\circ}\text{--}15'\text{--}2'78''$
4.º	$A=121^{\circ}\text{--}36'\text{--}19'48''$	a	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}a=\sqrt{\dfrac{\text{sn}E\,\text{sn}(A-E)}{\text{sn}(B-E)\,\text{sn}(C-E)}}$	$a=2\,\text{antlgtg}\left\{\frac{1}{2}[\text{lgsn}E+\text{lgsn}(A-E)+\text{clgsn}(B-E)+\text{clgsn}(C-E)]\right\}=76^{\circ}\text{--}35'\text{--}36''$
	$B=42^{\circ}\text{--}15'\text{--}13'46''$	b	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}b=\sqrt{\dfrac{\text{sn}E\,\text{sn}(B-E)}{\text{sn}(A-E)\,\text{sn}(C-E)}}$	$b=2\,\text{antlgtg}\left\{\frac{1}{2}[\text{lgsn}E+\text{lgsn}(B-E)+\text{clgsn}(A-E)+\text{clgsn}(C-E)]\right\}=50^{\circ}\text{--}10'\text{--}30''$
	$C=34^{\circ}\text{--}15'\text{--}2'78''$	c	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}c=\sqrt{\dfrac{\text{sn}E\,\text{sn}(C-E)}{\text{sn}(A-E)\,\text{sn}(B-E)}}$	$c=2\,\text{antlgtg}\left\{\frac{1}{2}[\text{lgsn}E+\text{lgsn}(C-E)+\text{clgsn}(A-E)+\text{clgsn}(B-E)]\right\}=40^{\circ}\text{--}0'\text{--}10''$
5.º	$a=76^{\circ}\text{--}35'\text{--}36''$	B	$\dfrac{\text{sn}\,a}{\text{sn}\,b}=\dfrac{\text{sn}\,A}{\text{sn}\,B}$; $\text{sn}\,B=\dfrac{\text{sn}\,b\,\text{sn}\,A}{\text{sn}\,a}$	$B=\text{antlgsn}(\text{lgsn}b+\text{lgsn}A+\text{clgsn}a)=42^{\circ}\text{--}15'\text{--}13'46''$
	$b=50^{\circ}\text{--}10'\text{--}30''$	C	$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}$	$C=2\,\text{antlgctg}[\text{lgtg}\frac{1}{2}(A+B)+\text{lgcos}\frac{1}{2}(a+b)+\text{clgcos}\frac{1}{2}(a-b)]=34^{\circ}\text{-}15'\text{-}2'78''$
	$A=121^{\circ}\text{--}36'\text{--}19'48''$	c	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}c=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}$	$c=2\,\text{antlgtg}[\text{lgtg}\frac{1}{2}(a+b)+\text{lgcos}\frac{1}{2}(A+B)+\text{clgcos}\frac{1}{2}(A-B)]=40^{\circ}\text{--}0'\text{--}10''$
6.º	$A=121^{\circ}\text{--}36'\text{--}19'48''$	b	$\dfrac{\text{sn}\,a}{\text{sn}\,b}=\dfrac{\text{sn}\,A}{\text{sn}\,B}$; $\text{sn}\,b=\dfrac{\text{sn}\,a\,\text{sn}\,B}{\text{sn}\,A}$	$b=\text{antlgsn}(\text{lgsn}a+\text{lgsn}B+\text{clgsn}A)=50^{\circ}\text{--}10'\text{--}30''$
	$B=42^{\circ}\text{--}15'\text{--}13'46''$	c	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}c=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}$	$c=2\,\text{antlgtg}[\text{lgtg}\frac{1}{2}(a+b)+\text{lgcos}\frac{1}{2}(A+B)+\text{clgcos}\frac{1}{2}(A-B)]=40^{\circ}\text{--}0'\text{--}10''$
	$a=76^{\circ}\text{--}35'\text{--}36''$	C	$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}$	$C=2\,\text{antlgctg}[\text{lgtg}\frac{1}{2}(A+B)+\text{lgcos}\frac{1}{2}(a+b)+\text{clgcos}\frac{1}{2}(a-b)]=34^{\circ}\text{-}15'\text{-}2'78''$

ESCOLIOS.—1.° Los problemas de los casos 1.° y 2.° son siempre posibles, y tienen una solución única; los de los casos 3.° y 4.° tienen una solución única, cuando son posibles, para lo cual es preciso que, en el tercer caso, la suma de los datos sea menor que 360°, y en el cuarto caso, el exceso esférico esté comprendido entre *cero* y 360°, siendo, además, cada ángulo, mayor que el semiexceso.

2.° En el problema del 5.° caso, el ángulo B puede tener dos valores, porque viene dado por su seno, y lo mismo sucede con C y c, porque dependen de B. Conviene, por lo tanto, discutir el problema, teniendo en cuenta que, para que sea posible, es preciso que se tenga: $snB = \frac{\text{snbsnA}}{\text{sna}} < 1$; ó bien: $sna > snb\ snA$. Siendo $snB < 1$, puede ser A menor, igual ó mayor que 90°, y, en cada uno de estos tres casos, a menor, igual ó mayor que b. Si es $A < 90°$ y $a < b$, será $A < B$, y el problema tendrá una solución, cuando un solo valor de B sea mayor que A, y dos soluciones, cuando los dos valores de B sean mayores que A; si es $A < 90°$ y $a \geqq b$, será $A \geqq B$, y el problema solo tendrá una solucion. Análogamente se prueba que hay una ó dos soluciones, cuando es $A \geqq 90°$; y en cuanto á las incógnitas C y c, es evidente que, en el caso de dos soluciones, los dos valores de dichas incógnitas son menores que 180°, y, en el caso de una solución, uno de ellos es mayor, y el otro menor que 180°.

3.° El problema del caso 6.° se discute como el del 5.°, teniendo, por consecuencia, dos soluciones, una ó ninguna, según los casos.

Aplicaciones del aspecto general de la Geometría

LIBRO I

I. *Determinar, en una circunferencia dada, un arco que tenga: por seno* $\frac{5}{6}$; *por coseno,* $\frac{3}{5}$; *por tangente,* $\frac{10}{7}$; *por cotangente,* $\frac{7}{10}$; *por secante,* $\frac{5}{3}$, *y por cosecante,* $\frac{6}{5}$. = Este problema se resuelve teniendo en cuenta lo dicho en los números 16, 17, 18, 19, 20 y 21.—Si los valores dados fuesen negativos, se procedería de un modo análogo.

II. *Hallar el seno de 60°, 36°, 20°30′ y 15°.*=Para resolver este problema, con un error menor que una diezmilésima, basta tener presente lo dicho en el escolio 3.° del número 25. Así: seno $60^\circ = \frac{1}{2} l_3 = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0'8660$; $sn\ 36^\circ = \frac{1}{2} l_5 = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = 0'5878$; $sn\ 22^\circ 30' = \frac{1}{2} l_8 = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}} = 0'3826$; $sn\ 15^\circ = \frac{1}{2} l_{12} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 0'2588$.—Conocido el seno, es fácil calcular cada una de las demás líneas trigonométricas (25, 1.°).

III. *Sabiendo que la tangente de un arco es—0′8540, calcular cada una de las demás líneas trigonométricas.*=Este problema se resuelve recordando el n.° 9 y el tercer problema del n.° 25. Así, tendremos: $sn\alpha = \pm 0'6495$; $cos\alpha = \mp 0'7404$; $ctg\alpha = -1'1707$; $sc\alpha = -1'3152$, y $csc\alpha = -1'5399$.

IV. *Determinar las líneas trigonométricas del arco de* 1236°. =Este problema se resuelve, aplicando el escolio 1.° del número 37.

V. *Sabiendo que la suma del duplo del seno y del triplo del coseno de un arco es igual á 3, hallar los valores del arco menores que 90°.*=Llamando x al arco pedido, tendremos: $2\ sn\ x +$

$+3\ cos x = 3$; ó bien: $3\ cos x = 3 - 2 sn x$. Elevando al cuadrado, y poniendo, después, en vez de $cos^2 x$, su igual $1 - sn^2 a$, resulta: $9 cos^2 x = 9 - 12 snx + 4 sn^2 x$; $9 - 9 sn^2 x = 9 - 12 snx + 3 sn^2 x$; de donde: $13 sn^2 x - 12 snx = 0$; $snx\ (13 snx - 12) = 0$, y, por tanto: $snx = 0$; $snx = \frac{12}{13} = 0'9230$; $lgsnx = lg\ 0'9230 = \bar{1}'9652$; $x = 0$, y $x = = 67°22'$.

VI. *Determinar el seno de la suma de dos arcos, sabiendo que el seno del 1.° es* $\frac{3}{5}$ *y el del segundo* $\frac{4}{5}$.=Llamando x é y á dichos arcos, tendremos $cos x = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$; $cos y \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$; luego: $sn(x+y) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = 1$.—Lo mismo que hemos hallado el seno de la suma, determinaríamos el seno de la diferencia, y cada una de las demás líneas de la suma y de la diferencia de dos arcos, conociendo solo una de las líneas trigonométricas de cada uno de dichos arcos.

VII. *Hallar los valores de las líneas trigonométricas del arco de 51°.*=Como (II) sn $36° = 0'5878$, y sn $15° = 0'2588$, resulta: sn $(36° + 15°) =$ sn $36°$ cos $15° +$ cos $36°$ sn $15° = 0'7771$; de donde: cos $51° = 0'6293$; tg $51° = 1'2349$; ctg $51° = 0'8099$; sc $51° = 1'5888$; csc $51° = 1'2867$.—Lo mismo pudimos haber aplicado las fórmulas de las demás líneas trigonométricas de la suma de dos arcos.

VIII. *Hallar el seno del duplo de un arco, sabiendo que el seno de dicho arco es—0'4.*=Aplicando la fórmula $sn2a = 2sna\ cosa = 2sna\sqrt{1 - sn^2 a}$, tendremos: $sn2a = 0'3328$.—Del mismo modo hallaríamos aplicando las fórmulas correspondientes, el coseno, la tangente, la cotangente, la secante y la cosecante del duplo de un arco, conociendo el coseno, la tangente, la cotangente, la secante y la cosecante de dicho arco.

IX. *Determinar la cosecante del duplo de un arco, sabiendo que la cotangente de dicho arco es* $\frac{4}{3}$.=Si la cotangente es $\frac{4}{3}$

la tangente será $\frac{3}{4}$, el seno $\frac{3}{4}:\sqrt{1+\frac{9}{16}}=\frac{3}{5}$, el coseno $1:\sqrt{1+\frac{9}{10}}=\frac{4}{5}$, y, según el problema anterior, el seno del duplo $\frac{24}{25}$; luego la cosecante del duplo es $\frac{25}{24}$.

X. *Hallar el seno del triplo de un arco, sabiendo que el seno de dicho arco es 0'4* =Poniendo $2a$, en vez de b, en la fórmula $sn(a+b)=sna\cos b+\cos a\, snb$, resulta: $sn3a=$sna cos2a+cosa sn2a. Sustituyendo $sn2a$ y $\cos 2a$ por sus respectivos valores, se tiene: $sn3a=$sna $(\cos^2 a-sn^2 a)+2sna\cos^2 a$; de donde: $sn3a=sna(1-sn^2a)-sn^3a+2sna(1-sn^2a)=3sna-4sn^3a$, y, por consecuencia, $sn3a=0'944$.

XI. *Determinar el seno de la mitad de un arco, sabiendo que el seno de dicho arco es 0'8.*=El coseno del arco es $\sqrt{1-0'8^2}=0'6$; luego el seno de la mitad será: $\sqrt{\frac{1-0'6}{2}}=\sqrt{0'2}=0'44$.

—Del mismo modo hallaríamos, aplicando las fórmulas correspondientes, el coseno, la tangente, la cotangente, la secante y la cosecante de la mitad de un arco, conociendo el coseno, la tangente, la cotangente, la secante y la cosecante de dicho arco.

XII. *Hallar la tangente de 27°, sabiendo que es* $\cos 54°=$ $=0'5876$.=Tenemos:

$$tg\,27°=\sqrt{\frac{1-\cos 54°}{1+\cos 54°}}=\frac{\sqrt{1-0'5876}}{\sqrt{1+0'5876}}=\sqrt{0'2597}=0'509.$$

XIII. *Hallar la fórmula de* MOIVRE, *que sirve para elevar á la emésima potencia una expresión de la forma* $\cos a+\sqrt{-1}\, sna$. =Puesto que (26,1.°) es $(\cos a+\sqrt{-1}\,sna)(\cos b+\sqrt{-1}\,snb)=$ $=\cos(a+b)+\sqrt{-1}\,sn(a+b)$, también será: $(\cos a+\sqrt{-1}\,sna)$ $(\cos b+\sqrt{-1}\,snb)(\cos c+\sqrt{-1}\,snc)\ldots\ldots=\cos(a+b+c+\ldots\ldots)+$ $+\sqrt{-1}\,sn(a+b+c+\ldots\ldots)$. Haciendo $a=b=c=\ldots\ldots$, y suponiendo igual á m el número de factores, tendremos:

$(\cos a+\sqrt{-1}\,\mathrm{sn}a)^m = \cos ma+\sqrt{-1}\,\mathrm{sn}ma$, que es la fórmula pedida, de la cual se deduce:

$$\sqrt[m]{\cos a+\sqrt{-1}\,\mathrm{sn}a} = \cos\frac{a}{m} = \sqrt{-1}\,\mathrm{sn}\frac{a}{m},$$

porque, elevando el segundo miembro á la emésima potencia, resulta el radicando. Esto nos permite demostrar que la fórmula de MOIVRE es también cierta cuando el exponente es fraccionario. En efecto: $(\cos a+\sqrt{-1}\,\mathrm{sn}a)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(\cos a+\sqrt{-1}\,\mathrm{sn}a)^m} =$

$$=\sqrt[n]{\cos ma+\sqrt{-1}\,\mathrm{sn}ma} = \cos\frac{ma}{n}+\sqrt{-1}\,\mathrm{sn}\frac{ma}{n} =$$

$=\cos\frac{m}{n}a+\sqrt{-1}\,\mathrm{sn}\frac{m}{n}a$. Si el exponente fuera negativo, tendríamos: $(\cos a+\sqrt{-1}\,\mathrm{sn}\,a)^{-m} = \frac{1}{(\cos a+\sqrt{-1}\,\mathrm{sn}\,a)^m} =$

$$\frac{1}{\cos ma+\sqrt{-1}\,\mathrm{sn}ma} = \frac{\cos ma-\sqrt{-1}\,\mathrm{sn}ma}{(\cos ma+\sqrt{-1}\,\mathrm{sn}ma)(\cos ma-\sqrt{-1}\,\mathrm{sn}ma)}$$

$$=\frac{\cos(-ma)+\sqrt{-1}\,\mathrm{sn}(-ma)}{\cos^2 ma+\mathrm{sn}^2 ma} = \cos(-ma)+\sqrt{-1}\,\mathrm{sn}\,(-ma);$$

luego también es cierta la fórmula, cuando el exponente es negativo.

XIV. *Hallar las fórmulas que sirven para conocer el desarrollo del seno y del coseno de un múltiplo cualquiera de un arco.* =Desarrollando el primer miembro de la fórmula de MOIVRE por la fórmula del binomio de NEWTON; igualando el segundo miembro al desarrollo obtenido, é igualando, en el resultado, las partes reales, así como los coeficientes de $\sqrt{-1}$, tendremos:

$$\cos ma = \cos^m a - \binom{m}{2}\cos^{m-2} a\,\mathrm{sn}^2 a + \binom{m}{4}\cos^{m-4} a\,\mathrm{sn}^4 a - \binom{m}{6}\cos^{m-6} a\,\mathrm{sn}^6 a + \ldots\ldots;$$

$$\mathrm{sn}ma = m\cos^{m-1} a\,\mathrm{sn}a - \binom{m}{3}\cos^{m-3} a\,\mathrm{sn}^3 a + \binom{m}{5}\cos^{m-5} a\,\mathrm{sn}^5 a - \binom{m}{7}\cos^{m-7} a\,\mathrm{sn}^7 a + \ldots\ldots$$

XV. *Transformar en producto la expresión msna+ncosa.* = Multiplicando y dividiendo por *m* esta expresión, y haciendo, en el resultado, $\frac{n}{m}=tg\alpha$, lo que siempre es posible, se tiene: $msna+ncosa=m(sna+\frac{n}{m}cosa)=m(sna+tg\alpha cosa)=m(sna+\frac{sn\alpha}{cos\alpha}cosa)=m(sna+\frac{cosasn\alpha}{cos\alpha})=m\times\frac{snacos\alpha+cosasn\alpha}{cos\alpha}=\frac{m}{cos\alpha}(sna\,cos\alpha+cosasn\alpha)=\frac{msn(a+\alpha)}{cos\alpha}$. El valor de α se calcula, por logaritmos, de la manera siguiente: $tg\alpha=\frac{n}{m}$; $\alpha=$antlgtg $(lgn+clgm)$.

XVI. *Transformar en producto la expresión $M\pm N$, siendo M y N cantidades positivas.*=Procediendo de la misma manera que en el problema anterior, tendremos: $M\pm N=M(1\pm\frac{N}{M})=M(1\pm tg^2\alpha)=M(1\pm\frac{sn^2\alpha}{cos^2\alpha})=M(\frac{sn^2\alpha\pm cos^2\alpha}{cos^2\alpha})=\frac{M}{cos^2\alpha}(sn^2\alpha\pm cos^2\alpha)$; de donde: $M+N=\frac{M}{cos^2\alpha}$, y $M-N=\frac{Mcos2\alpha}{cos^2\alpha}$. El valor de α se calcula así: $tg^2\alpha=\frac{N}{M}$; $tg\alpha=\sqrt{\frac{N}{M}}$; $\alpha=$antlgtg$[\frac{1}{2}(lgN+clgM)]$.

LIBRO II

XVII. *Determinar la distancia entre dos puntos visibles, siendo accesible solo uno de ellos.*=Midiendo, sobre el terreno, una recta, llamada *base*, y los ángulos que forman con ella las visuales dirigidas, desde sus extremos, al punto inaccesible, queda la cuestión reducida á resolver un triángulo, del que se conocen un lado y los angulos adyacentes.

XVIII. *Hallar la distancia entre dos puntos visibles, pero inaccesibles*=Se miden una base y los angulos que esta forma con las visuales dirigidas, desde sus extremos, á los puntos dados; se resuelven los dos triángulos, que tienen por base común la medida sobre el terreno, y por vértices, los puntos inaccesibles, y, por último, se resuelve el triángulo, cuyos lados son la distancia pedida y las dos visuales dirigidas desde uno de los extremos de la base. Cuando no sea posible medir una base, desde cuyos vértices sean visibles los dos puntos inaccesibles, se elige un punto, desde el cual se vean los propuestos, y se miden dos bases que partan de dicho punto.

XIX. *Determinar, en terreno horizontal, una altura de pié accesible.*=Se mide, sobre el terreno, una base que parta del pié dado, y se resuelve el triángulo rectángulo, cuyos catetos son la base medida y la altura pedida. De dicho triángulo, se conocen un cateto y un ángulo agudo.

XX. *Determinar, en terreno no horizontal, una altura de pié accesible.*=Se mide, sobre el terreno, una base, que tenga por origen el pié dado, y se resuelve el triángulo, cuyos lados son la base medida, la altura pedida y la distancia entre los extremos de estas dos últimas rectas. De dicho triángulo, se conocen un lado y dos ángulos.

XXI. *Determinar una altura de pié visible, pero inaccesible.* =Se mide, sobre el terreno, una base, y se resuelven sucesivamente tres triángulos, que son los dos formados por la base medida y las visuales desde sus extremos, al extremo y pié de la altura pedida, y el formado por la altura y las visuales, á sus dos extremos, desde uno de los extremos de la base. De los dos primeros triángulos, se conocen un lado y los ángulos adyacentes, y del tercero, dos lados y el ángulo comprendido.

XXII. *Determinar, en terreno horizontal, una altura de pié invisible.*=Se miden, sobre el terreno (fig.ª 5.ª), una base CA y los ángulos BCA y BAC, que ésta forma con las visuales dirigidas, desde sus extremos, al extremo de la altura, y se resuelve el triángulo resultante BCA. La cuestión queda, después, reducida á resolver un triángulo rectángulo BAD, conocida la hipotenusa BA y un ángulo agudo BAD=180°—BAC.

XXIII. *Determinar el área de un triángulo, conocidos dos lados y el ángulo comprendido.*=El área de un triángulo ABC es: $S_3=\frac{1}{2}AC\times BD$, siendo AC la base y BD la altura; pero, como es $AB=b$, y $BD=AB.\,snA=c.\,snA$, resulta: $S_3=\frac{1}{2}bc.snA$. Luego *el área de un triángulo es igual á la mitad del producto de dos lados, por el seno del ángulo comprendido*, y, por consecuencia, *la de un paralelógramo es igual al producto de dos lados por el seno del ángulo comprendido.*

XXIV. *Determinar el área de un triángulo, conocidos un lado y los ángulos adyacentes.*=Poniendo el valor de *b*, deducido de la relación $\frac{b}{snB}=\frac{c}{snC}$, en la fórmula del problema anterior, resulta la expresión: $S_3=\frac{c^2snAsnB}{snC}$, facilmente traducible al lenguaje vulgar.

XXV. *Determinar el área de un triángulo, conocidos los tres lados.*=Sustituyendo *snA* por su valor $2sn\frac{1}{2}Acos\frac{1}{2}A$, en la expresión $S_3=\frac{1}{2}bcsnA$, y, poniendo, en la igualdad resultante, en vez $sn\frac{1}{2}A$ y $cos\frac{1}{2}A$, sus valores respectivos, se obtiene la expresión: $S_3=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, que también se puede traducir al lenguaje ordinario con facilidad.

XXVI. *Determinar el área de un cuadrilátero, conociendo sus diagonales y el ángulo que forman.*=Sumando las áreas $\frac{1}{2}OA\times OC\times snO$, $\frac{1}{2}OC\times OB\times snO$, $\frac{1}{2}OB\times OD\times snO$ y $\frac{1}{2}OD\times\times OA\times snO$ de los cuatro triángulos AOC, COB, BOD y DOA, en que queda dividido el cuadrilátero por sus diagonales, tendremos la expresión: $S_4=\frac{1}{2}AB\times CD\times snO$, que, traducida, dice: *el área de un cuadrilátero es igual á la mitad del producto de sus diagonales, por el seno del ángulo que forman.* – En el rombo y en el cuadrado, es $snO=1$; luego: *el área de un rombo es igual á la mitad del producto de sus diagonales, y la de un cuadrado, igual á la mitad del cuadrado de su diagonal.*

XXVII. *Determinar el área de un polígono regular, conociendo su apotema y el número de lados.*=Siendo OG la apotema, y trazando los radios, queda el polígono descompuesto en *n* triángulos isósceles iguales al AOB, luego se tendrá: $S^n=n\times AOB$

$=n\times\frac{1}{2}AB\times OG=n\times AG\times OG$; pero, como es $AG=OG\times\operatorname{tg} AOB=OG\times\operatorname{tg}\frac{1}{2}AOB=OG\times\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$, resulta: $S_n=n\times\overline{OG}^2\times\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$; lo que dice: *el área de un polígono regular es igual al número de lados, por el cuadrado de la apotema y por la tangente del semiángulo céntrico.*—Teniendo en cuenta la fórmula anterior, se pueden hallar facilmente otras fórmulas, que expresen el área de un polígono regular, en función del radio y del número de lados, y en función del lado y el número de lados.

LIBRO III

XXVIII. *Determinar la distancia entre dos puntos de la superficie terrestre, conocidas sus coordenadas geográficas.*=Se resuelve, primero, un triángulo esférico rectángulo, y, después, otro oblicuángulo. Del 1.°, se conocen los dos catetos (latitud de uno de los puntos y suma ó diferencia de sus longitudes respectivas), y del segundo, dos lados (latitud del otro punto é hipotenusa del triángulo rectángulo resuelto) y el ángulo comprendido (diferencia entre 90° y un ángulo agudo del mismo triángulo rectángulo).

XXIX. *Determinar el área de un triángulo esférico, conociendo sus lados.*=Si, en las fórmulas primera y tercera de DELAMBRE, sustituimos $\frac{1}{2}(A+B)$ por su valor $90^\circ-(\frac{1}{2}C-E)$, deducido de la expresión $2E=A+B+C-180^\circ$, resulta: $\frac{\cos(\frac{1}{2}C-E)}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}$ ...(I); $\frac{\operatorname{sen}(C-E)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}c}$ ... (II). De la igualdad (I) se deduce: $\frac{\cos(\frac{1}{2}C-E)-\cos\frac{1}{2}C}{\cos(\frac{1}{2}C-E)+\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)-\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(a-b)+\cos\frac{1}{2}c}$ Transformando las sumas en productos, se tiene: $\operatorname{tg}\frac{1}{2}E\operatorname{tg}\frac{1}{2}(C-E)=$ $=\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-a)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-b)$....(1). De la igualdad (II), siguiendo un procedimiento análogo, se deduce: $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}E}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(C-E)}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}p\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-c)$.(2). Si multiplicamos ordenadamente las igualdades (1) y (2), resulta, por último, la expresión: $\operatorname{tg}\frac{1}{2}E=\sqrt{\operatorname{tg}p\operatorname{tg}(p-a)\operatorname{tg}(p-b)\operatorname{tg}(p-c)}$, que es muy cómoda para calcular E y, por lo tanto, el área de un triángulo esférico en función de sus lados.

ESCOLIO GENERAL.—Para más aplicaciones de la Trigonometría, nos remitimos á las obras especiales de ejercicios y problemas, y á los tratados de Topografía y Geodesia, que es donde se estudian los instrumentos, de campo y de gabinete, necesarios para la resolución de multitud de problemas.

FIN

Obras del mismo autor

Aritmética.

Algebra.

Geometría.

Nociones de Aritmética, y

Nociones de Geometría.