CURSO COMPLETO

DE

MATEMATICAS PURAS

POR

D. JOSÉ ODRIOZOLA,
Brigadier de infantería, Coronel de Artillería, etc., etc.

TOMO I.

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA ELEMENTAL.

SEGOVIA:
MPRENTA DE D. EDUADO BAEZA.

1852.

Con la correspondiente autorizacion del Autor, se reimprime este primer tomo de su obra de Matemáticas por cuenta del Colegio de Artillería, y para el uso particular de su Academia.

Todo ejemplar que no lleve la firma del Oficial comisionado se tendrá por falso y contrahecho, y se procederá contra el que lo reimprima ó venda.

PRÓLOGO.

El deseo de ser útil á mi Patria contribuyendo á la propagacion de los conocimientos matemáticos, y el auxilio que ofrecen para ello los trabajos magistrales de tantos sabios que al cabo de siglos han elevado la ciencia hasta el alto grado en que hoy se halla, me animaron á emprender esta composicion de un curso completo. Siguiendo el consejo de Laplace he procurado fundar en principios generales las doctrinas, porque, ademas de tan respetable autoridad, la práctica en la enseñanza me ha persuadido que se hace así mas cómodo el estudio de la ciencia, y mas ventajoso para recordar las ideas de cada asunto. Yo considero á cada principio general como un polo de todo el sistema de ideas referentes á él, y que dirige al hombre pensador librándole de perderse aun cuando se extravíe por ofuscacion de alguna idea subalterna. Si este método se presenta dificil y repugnante á los jóvenes cuando principian el estudio de la filosofía de la cantidad, no debemos atribuirlo solamente á la edad, y sí principalmente á la costumbre viciosa que de la primera educacion traigan de afirmar cualquiera proposicion general, por analogía con alguna particular que sepan; vicio fecundo en errores, y que se arraiga con el uso sino se arranca en la juventud. Asi me fundo para decir que desde los primeros pasos en las matemáticas debemos empezar con el método de una rigorosa lógica, del cual se irá posesionando el joven conforme progresare con el tiempo en las reglas gramaticales del cálculo. En la primera edicion de la Aritmética y Algebra elemental llevé tal vez hácia el estremo la mira de las teorías generales, y por indicaciones que me han hecho mis amigos la he variado mucho en esta segunda.

Algunos acaso notarán en toda la obra la falta de abundantes ejemplos ó casos particulares de un principio esplicado; mas yo creo que en el testo no deben seguir á una teoría mas aplicaciones que las necesarias para su aclaracion, y que al profesor toca el proponer nuevas diariamente en su academia, y aun exigir de los discípulos resoluciones de otras que proponga para el siguiente dia, precaviendo el que para todos no sea una misma la cuestion. Obligado por este medio cada discípulo á discurrir sobre las materias, adquirirá posesion de las ideas; manifestará su capacidad en las pequeñas composiciones que habrá de formar espresando por escrito el discurso de la cuestion; y con el ejercicio se irá perfeccionando en el arte de pensar y en el de esplicar.

La obra consta de cuatro tomos, en los cuales presento los tratados por el orden mismo con que se han de estudiar; y es como sigue.

En el tomo primero se trata de la *Aritmética* y *Algebra elemental*. El tomo segundo abraza dos tratados, que son: 1.° *Geometría elemental* con prácticas: 2.° *Trigonometría plana y esférica* con aplicaciones á la *Geodesia*. El tomo tercero contiene tambien dos tratados: 1.° *Algebra sublime:* 2.° *Geometría analítica ó aplicacion del Algebra á la Geometría*. El tomo cuarto es un tratado del *cálculo* llamado *infinitesimal*, en que actualmente están comprendidos los cálculos *diferencial, integral* y de *variacion*. Por esta distribucion de materias y la que hago de asuntos de cada una, opino que pueden servir de testo mis libros en todos los establecimientos donde se enseñan Matemáticas, ya para los que solo necesiten algunos conocimientos elementales de ellas, ya tambien para los que hayan de abanzar mas en la carrera de la ciencia.

En cada tomo la numeracion consecutiva de artículos y de fórmulas se refiere solo al tratado correspondiente de los seis que comprende la obra, á fin de citar de un modo no equívoco despues cualquiera principio ya demostrado, cuando fuese necesario para ayudar al entendimiento y testificar alguna asercion. De modo, que en el tomo primero hay una seguida de artículos desde el principio hasta el fin: en el tomo segundo hay una para la Geometría y otra para la Trigonometría: en el tercero hay tambien una seguida para el Algebra sublime y otra para la Geometría analítica; y por último, en el tomo cuarto hay una seguida sola desde el principio hasta el fin. Advierto ademas que se citará el artículo con el número dentro de un paréntesis, y la fórmula con el número ó señal en doble paréntesis como aqui se vé (( )).

José de Odriozola.

TRATADO PRIMERO.

ARITMÉTICA Y ALGEBRA ELEMENTAL.

CAPÍTULO PRIMERO.

Principios y convenios fundamentales.

LECCION PRIMERA.

Objeto del razonamiento en las Matemáticas y principios lógicos en que se funda éste.

1. La *cantidad* es el asunto de las matemáticas, y se adquieren ideas de ella por la repeticion de sensaciones. Todo lo que se puede considerar capaz de recibir aumento ó diminucion es cantidad, como por ejemplo el peso, el bulto, el espacio que un cuerpo arrojado camina, el tiempo que emplea en andar, la fuerza que le arroja, el precio de las mercancías, &c.

La cantidad, por pequeña ó grande que sea, está compuesta de partes: aquella parte que se elige para término de comparacion se llama *unidad*, y la espresion de las veces que ésta se halla contenida en el todo es *número*. Por ejemplo, tratándose de medir la altura de un edificio, esta es la cantidad; y si se toma por término de comparacion otra altura cualquiera, sea la braza, la vara, el pie, &c., sea otra que no sirva de tipo en medidas usuales, esta es la unidad; y la espresion de las varas ó unidades de altura que tiene el edificio es el número. Si habiendo aplicado la vara sucesivamente quince veces, como ya debe saberse, resulta cabal sin la mas mínima diferencia en la última superposicion del tipo, es quince el número, y unidad la vara.

La unidad puede ser mayor ó menor que el número: por ejemplo, si tomando la braza por unidad se quiere medir la longitud de un pie humano, y se halla que coincide cabalmente con la sesta parte de la braza, diremos que el número es un sexto, y unidad la braza. En este ejemplo el número es *fraccionario*; en el anterior de veces cabales es *entero*; y siempre espresa la relacion que hay entre dos magnitudes comparadas.

Como la unidad mas pequeña ó mas grande puede ser aun mayor ó menor, es tambien ella misma otra cantidad; nombre que no pocas veces en la lengua vulgar se da tambien al número, aunque la cantidad es un valor y el número su espresion.

Se dice número *abstracto* cuando espresa cantidad sin referirse á especie; y *concreto* cuando espresa el valor de una cantidad cuya especie se nombra. Por ejemplo, el número quince sin mas especificaciones es abstracto; pero si se dice quince varas, es concreto, porque se refiere á medida, que es una de las especies de la cantidad, así como el peso es otra especie.

2. Ademas de la lengua vulgar en que se espresan comunmente las ideas de todas las cosas, hay para la cantidad lenguages particulares, ó por mejor decir uno solo, porque en él estan comprendidos los demas. En este lenguage, que se llama de *calcular*, hacen oficio de nombres los números, que se espresan con cifras, y la oracion se organiza por medio de signos: pronto serán aquellas y estos objeto de nuestras consideraciones. Entre tanto sépase que, cuando las cifras denotan valores fijos, como nueve, cinco, ochenta, mil, &c., abstractos ó concretos, el lenguage de ellas es *aritmética*: y cuando las cifras representan cualquiera número, como sucede haciendo uso de letras, ya de nuestro alfabeto, ya del griego ú otro, el lenguage de ellas es *álgebra*, como por ejemplo, si hacemos el convenio de espresar cualquiera cantidad, sea abstracta sea concreta, con la letra *b* sin atribuirla valor alguno determinado ó aritmético. En esta aptitud de los caractéres algébricos para representar cualquiera valor que les queramos atribuir, consiste el estar comprendidos

en el lenguage algébrico todos los aritméticos que puede haber.

3. Un lenguage sirve para manifestar los razonamientos: la ciencia de formarlos es *lógica*, y á esta se llama *cálculo* cuando es la cantidad asunto del raciocinio. Se emplea la lógica para investigar lo que se desconoce; pero siempre ha de haber para ello datos ó principios en que fundar el raciocinio, que consiste *en formar tal encadenamiento entre lo conocido y lo desconocido, que al fin sea tan evidente lo uno como lo otro.*

La propuesta que se hace de investigar una verdad se llama *cuestion* ó *problema*: y una verdad ya demostrada es *principio* ó *teorema*. La espresion de la idea en ambos casos se llama *proposicion*.

Los principios fundamentales del cálculo, ó bien, de la lógica matemática (1), de los cuales se deducen otros menos generales y al fin todo lo que se demuestra, son los siguientes, á quienes la razon natural admite como innegables.

1.° *Las cantidades de una misma especie son las únicas comparables entre sí, considerándose de una especie aquellas que se refieren á la misma unidad.* Cuando se trata de la estension, por ejemplo, el valor de una línea solo es comparable con el de otras, el de una superficie con el de otra superficie, y el de un bulto con otro: y cuando se trata de peso, hay que comparar arrobas con arrobas, libras con libras, &c.

2.° *El todo es igual al conjunto de sus partes*: como cuando se dice, que la estension superficial de un reino es el conjunto de estensiones superficiales de todas sus provincias ó de todos sus partidos.

3.° *Cada parte es igual al todo menos el conjunto de las demas partes*: como por ejemplo, si se dice que, gastando de veinte reales diez y seis, quedarán cuatro por gastar.

4.° *El todo es mayor que cualquiera parte suya, y esta menor que el todo.* Un reino, por ejemplo, es mayor que cualquiera de sus provincias; y una de estas por grande que sea, y aun el conjunto de todas menos un pequeño rincon, siempre será menor que el reino en su totalidad.

5.° *Las cantidades iguales á otra son iguales entre sí.* Por esto, si dos valores A y B son iguales, y sabemos que B y C lo son tambien, diremos que A y C son iguales.

6.° *Si de cantidades iguales se quitan partes iguales, lo restante de una de aquellas es igual á lo restante de la otra:*

y si á cantidades iguales se añaden otras iguales, las que resulten son iguales entre sí. Por ejemplo, si llevando dos caballos iguales cargas se les quita ó añade igual número de libras, les quedarán cargas iguales.

7.° *Si á cantidades desiguales se añaden ó quitan partes iguales, quedarán otras cantidades tan desiguales como las primeras, en virtud del principio* 3.° Así sucederá añadiendo ó quitando pesos iguales á las cargas desiguales de dos caballos.

8.° *Es verdadera una proposicion particular comprendida en una general verdadera: mas, puede no ser cierta la general aunque lo sea la particular.* Lo primero sucede en el siguiente ejemplo de lógica general que proponemos, por no poder aun citar los de esta clase de lógica matemática. Estando admitida como cierta la proposicion general de que *todos los hombres tienen algunas necesidades*, será indudable la particular de que *todos los españoles tienen algunas necesidades*, como tambien la mas particular de que *todos los castellanos las tienen*, y así sucesivamente hasta la mas individual. Lo segundo sucede en el siguiente ejemplo: *hay uno ó muchos españoles que andan veinte leguas al dia*; mas no por eso es cierto, *que todos los españoles andan otro tanto.*

Téngase tambien cuidado en no confundir una proposicion con su *recíproca*; pues, aunque sea cierta la una puede no serlo la otra. Tal sucedería si de la proposicion, *el hombre tiene necesidades,* dedugésemos ser cierta la recíproca, *todo el que tuviere necesidades no puede menos de ser hombre*; pues hay otros muchos seres á quienes lo mismo sucede. Mas, pueden ser ciertas las dos recíprocas; y así acontece cuando todos los casos de una estan comprendidos en la otra, como en estas recíprocas; *el que es bueno ama la virtud y abomina el vicio, y el que ama la virtud y abomina el vicio es bueno.*

9.° *Es verdadera una proposicion general siempre que lo sean todas las particulares comprendidas en ella.* El modo mas elegante y rigoroso para demostrar una proposicion general es el deducirla de otra mas general evidente, conforme á la parte primera del principio 8.°. Cuando, sin embargo de comprender una proposicion general muchas particulares, ha sido demostrada sin valerse de estas para el razonamiento, esto es, por el método de dicha primera parte del principio 8.°, se dice que la demostracion es á *priori*, como en el ejemplo de la parte citada, cuando se dedujo que todos los españoles tienen algunas necesidades.

Pero no siempre podemos razonar así: por lo cual, muchas veces hay que demostrar una proposicion general haciendo ver que todas las particulares imaginables comprendidas en ella son exactas y conformes al sentido de aquella. En tal caso se dice, demostrar á *posteriori* ó por *inducion* ó por *analogía* de casos; y es menos apreciable la conclusion entonces, por la sospecha de que puede haber comprendida en ella alguna proposicion particular falsa que no haya ocurrido. La misma proposicion general, *todo hombre tiene algunas necesidades*, en que hemos fundado la demostracion á priori antes, ha sido elevada á principio por la demostracion á posteriori de que, habiendo tenido necesidades un hombre, otro y otro y todos cuantos se han conocido, se debe concluir que todos los hombres por conocer tienen algunas necesidades.

9.° *Si tomando por principio de la demostracion á priori una proposicion general, se viene por encadenamiento rigoroso á una particular evidentemente falsa, se deduce que lo es igualmente la general de que se partió.* De este razonamiento, que se llama *por absurdo*, nos valemos muchas veces para demostrar la falsedad de una proposicion. Suponiendo por ejemplo, ser verdad, que *todos los bultos iguales tienen pesos iguales*, se sigue que una fanega de trigo y una de paja pesan lo mismo; pero como esto es falso á la evidencia, se sigue que lo es igualmente el principio en que se fundó el raciocinio.

LECCION II.

Cifras de aritmética, y sistema de numeracion.

4. Las cifras llamadas romanas, que en algun tiempo se usaron en aritmética, y que aun se emplean á veces en las inscripciones de arquitectura y en la numeracion de partes de un tratado, por su bella figura, son I. V. X. L. C. D. M., y espresan los números que en lengua vulgar estan interpretados por los motes que sobre ellos van escritos en la escala siguiente:

::

uno,	cinco,	diez,	cincuenta,	ciento,	quinientos,	mil.
I.	V.	X.	L.	C.	D.	M.

Los números intermedios, y los que pasan de mil, se espresan combinando estas cifras oportunamente. Desde uno hasta cinco,

uno,	dos,	tres,	cuatro,	cinco:
I.	II.	III.	IV.	V.

desde cinco hasta diez,

cinco,	seis,	siete,	ocho,	nueve,	diez:
V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.

desde diez hasta cincuenta,

diez,	once,....	catorce,	quince,	diez y seis,....
X.	XI.	XIV.	XV.	XVI.

diez y nueve,	veinte,	veinte y uno,....	veinte y nueve,
XIX.	XX.	XXI.	XXIX.

treinta,....	cuarenta,....	cuarenta y nueve,	cincuenta.	
XXX.	XL.	IL.	L.	&c.

Por este orden se combinan las cifras para espresar los demas números, observándose las dos reglas que siguen. Cuando á una cifra se antepone otra de menos valor, hay que quitar éste del valor de aquella: y cuando la cifra de menor significado va despues de la de mayor, hay que agregar el valor de ésta al de aquella.

En la ortografía de nuestra lengua, publicada por la Academia, se ven otras cifras usadas en algun tiempo, y á ella remitimos al que quiera enterarse del modo con que se usaban.

Las cifras aritméticas admitidas actualmente son las diez arábigas, que se llaman *guarismos*,

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

y por los convenios que hay hechos en cuanto al modo de combinarlas, bastan ellas para espresar cualquiera número, por grande ó pequeño que sea. La traducion de dichas diez cifras á lenguage vulgar es como dice el mote sobre-escrito que aqui ponemos á cada una:

cero,	uno,	dos,	tres,	cuatro,	cinco,	seis,	siete,	ocho,	nueve.
0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.

La primera cifra es el símbolo de la nada, la segunda espresa *uno*, la tercera *dos* unos, la cuarta *tres* unos, la quinta *cuatro* unos, y asi hasta la última, que espresa *nueve* unos: por esto se llaman *cifras significativas* las nueve que siguen al cero.

5. La primera idea feliz para establecer el actual *sistema de numeracion*, ó de ordenar las dichas cifras en union de suerte que el conjunto de ella esprese cualquiera número entero, fue la de considerar á este como un total compuesto de partes tales, que tomando la menor por unidad hubiese otra *diez* veces mayor; otra diez veces mayor que la segunda, ó *cien* veces mayor que la primera; otra diez veces mayor que la tercera, ó *mil* veces mayor que la primera; y asi sucesivamente hasta donde se quiera llevar la composicion décupla consecutiva. Era necesario espresar el valor del total compuesto de esta manera, y de aqui provino el convenio de escribir en fila unidos los guarismos suficientes, poniendo á cada uno en el lugar donde se le atribuya el valor que le corresponda segun la escala décupla. Supongamos el sencillo caso de que dicho número total compuesto de partes décuplas, no contenga mas que una sola de cada orden. Escribiendo pues el guarismo 1 tantas veces en fila, cuantos órdenes de partes haya en el todo que se quiera espresar, dicha cifra 1 representará por el lugar que en la fila ocupe, una parte del orden que

pertenezca segun dicha escala de composicion, como

...........11111111.

La cifra última de la fila, que es la primera empezando por la derecha del que escribe, representa la parte menor: el siguiente 1, que es el segundo empezando por la derecha, representa una parte diez veces mayor que la primera: el siguiente 1, que empezando por la derecha es el tercero, representa una parte diez veces mayor que el segundo 1, y cien veces mayor que el primer 1. En general, se cuenta el lugar de cada cifra empezando por la derecha, y cada una vale diez veces mas que la inmediata á su derecha; por consiguiente, fácil es conocer á la vista de la fila á qué orden pertenece lo que representa la cifra por el lugar que ocupa. Cada 1 de estos se llama *unidad*; pero se distingue con su nombre particular la de cada orden, como aparece en los motes sobre-escritos de la siguiente fila

	billon.	centena de millar de millon.	decena de millar de millon.	millar de millon.	centena de millon.	decena de millon.	millon.	centena de millar.	decena de millar.	millar.	centena.	decena.	unidad simple.
....	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

He aquí el modo sencillo de espresar con una misma cifra, el todo organizado con cuantas unidades décuplas se le quiera suponer compuesto. En la nomenclatura de dichas unidades se observa tambien cierta ley de composicion; pues, vemos que los nombres de *unidad*, *decena* y *centena* se repiten de modos análogos de tres en tres cifras de derecha á izquierda; y es fácil continuar en la formacion de nombres de cuantas cifras queramos escribir en la fila abierta que marcan los puntos.

6. Se ha supuesto un todo en que solamente hay una unidad de cada orden, por esplicar de fácil modo la idea del sistema: pero puede suceder que haya de cada orden varias unidades; aunque si llegan á diez, ya componen una del orden mayor inmediato, que debe ser escrita en el puesto que la corresponde.

Decimos pues que, si hay varias unidades de un mismo orden sin llegar á diez, es necesario escribir, en vez del 1, la cifra de las diez arábigas (5) que esprese el número de las dichas partes. Por ejemplo, 18315 se compone de cinco unidades simples, una decena, tres centenas, ocho millares y una decena de millar: asimismo, 3732154698 espresa el conjunto de, ocho unidades, nueve decenas, seis centenas, cuatro millares, cinco decenas de millar, una centena de millar, dos millones, tres decenas de millon, siete centenas de millon y tres millares de millon; segun la interpretacion que aquí presentamos escrita encima de cada cifra:

1	una decena de millar.
8	ocho millares.
3	tres centenas.
1	una decena.
5	cinco unidades.
;	
3	tres millares de millon.
7	siete centenas de millon.
3	tres decenas de millon.
2	dos millones.
1	una centena de millar.
5	cinco decenas de millar.
4	cuatro millares.
6	seis centenas.
9	nueve decenas.
8	ocho unidades.

8. Tambien puede suceder que no haya parte alguna de cierto orden; y en este caso ocupa su lugar el cero. Asi, 3502 espresa un total de dos unidades simples, ninguna decena, cinco centenas y tres millares. En la espresion 6007 no hay decenas ni centenas, sí unidades simples y millares. En 40000 no hay mas que decenas de millar. En 20 solo hay dos decenas. De modo, que cuando haya solo partes de un orden, su número se espresa escribiendo la cifra arábiga que denote el número de partes, y hácia su derecha tantos ceros cuantos fueren menester para que dicha cifra ocupe el puesto de su orden. Por esto, á las decenas seguirá un cero, á las centenas dos, á los millares tres, á las decenas de millar cuatro, á las centenas de mi-

llar cinco, á los millones seis, &c. Con objeto de presentar ejemplos de números en que solo hay una parte de cada orden, es decir, la espresion respectiva de la unidad en cada orden, estan elegidos los casos que siguen, desde la unidad simple hasta el millon.

un millon.	una centena de millar.	una decena de millar.	un millar.	una centena.	una decena.	una unidad simple.
1000000,	100000,	10000,	1000,	100	10,	1.

Es fácil conocer que si en vez de una hubiese mas partes hasta nueve, se ha de escribir en lugar del guarismo 1 el correspondiente de los nueve significados, como en los casos que siguen:

cinco decenas de millar.	nueve millares.	tres centenas.	siete decenas.	ocho unidades.
50000,	9000,	300,	70,	8.

Con estos ejemplos está evidente la utilidad de la cifra cero en el sistema de numeracion, porque sirve, no solo para espresar que no hay partes del orden cuyo lugar ocupa en la fila el cero, sino tambien para en este caso hacer que cada cifra de su izquierda ocupe el puesto del orden correspondiente. Solo por esta última circunstancia es necesario el cero en fila con otras cifras; de suerte, que por no influir en la escala cuando está escrito á la izquierda de significativas, se deduce que es inútil en este caso: por lo cual, 00062 es lo mismo que 62, y esta espresion, mas simple que aquella, carece del defecto de superfluidad.

9. La nomenclatura de las partes de todos los órdenes recibe una pequeña modificacion, al pronunciarse cursivamente la espresion de todo el número. Por ejemplo, los números, 1000000, 100000, 10000, 1000, 100, 10, 1, conservando siempre el nombre sobre-escrito que les pusimos en el artículo anterior, se pronuncian diciendo cuando así conviene, un millon, cien mil, diez mil, mil, ciento, diez, uno: igualmente, los números 4000000, 700000, 20000, 9000, 800, 60, 3, se pronuncian tambien diciendo, cuatro millones, setecientos mil, veinte mil, nueve mil, ochocientos, sesenta, tres. De este modo se cuentan las unidades simples de que se compone el total de cada orden; y del otro, el número de unidades de cada orden; pues, ochocientas unidades simples, por ejemplo, equivalen á ocho centenas.

La pronunciacion de un número por unidades simples, aún es mas ventajosa para espresar cursivamente el valor de un total compuesto de unidades de varios órdenes, ó sea, una fila que contenga varias cifras significativas. Suponiendo, por ejemplo, un número ó total compuesto del conjunto de partes espresadas en los números últimamente escritos, el valor de dicho todo es, 4729863, ó cuatro millones, mas setecientos mil, mas veinte mil, mas nueve mil, mas ochocientos, mas sesenta, mas tres. Comunmente se suprime la conjuncion *mas* en el lenguage aritmético, y dicho número se pronuncia con mas fluidez diciendo que vale, cuatro millones, setecientos veinte y nueve mil, ochocientos sesenta y tres: en donde se advierte que la diccion se divide en tres, que son, ochocientos sesenta y tres, setecientos veinte y nueve mil, y cuatro millones, comprendiendo la primera parte de la diccion las tres cifras de la derecha, la segunda las tres que siguen, y la tercera la cifra 4 restante sola, por no haber mas. Teniendo presente lo dicho en el artículo (6) acerca de la reproduccion de los nombres, *unidad*, *decena*, *centena*, de tres en tres cifras empezando por la derecha, se advertirá que la espresion del número entero en lenguage vulgar está compuesta de un modo conforme al sistema de la numeracion décupla.

La observacion precedente manifiesta un modo fácil de pronunciar en lengua vulgar la espresion de cualquiera número entero, por muchas cifras que tenga; pues, dividiendo la fila con tildes en *periodos* ó porciones de tres en tres cifras, empezando por la derecha, y adoptando la nomenclatura de contar por unidades simples, se leerá el número de modo análogo al caso de 4'729'863, de izquierda á derecha como toda clase de escritura. Cada periodo consta de tantos cientos, dieces y unos, como dicen sus cifras tercera, segunda y primera, y hay que nombrar el orden á que segun el periodo corresponden; pues, en el de la derecha son unidades simples, en el siguiente miles, en el tercero millones, en el cuarto miles de millones, en el quinto billones, etc.

Dado, pues, el número 92'581'605'927'334, y hecha la division de periodos con tildes, resultan cuatro completos, y uno incompleto; con que, espresa un total de unidades simples compuesto de noventa y dos millones, quinientos ochenta y un mil, seiscientos cinco millones, novecientos veinte y siete mil trescientos treinta y cuatro unidades. Asi tambien, 31'728 vale treinta y un mil, setecientos veinte y ocho unidades. El número 605 vale seiscientas cinco unidades. El 6'052 vale seis mil y cincuenta y dos unidades. El 30'007 vale treinta mil y siete unidades. En la pronunciacion se hace siempre una corta pausa al fin de cada periodo.

10. Con la misma facilidad se escribe en cifras aritméticas cualquiera número entero espresado en lengua vulgar: por ejemplo, cuatrocientos cincuenta y dos está cifrada en 452. El número ochenta y un mil, doscientos cuarenta y siete, en 81247. Once millones, cuatrocientos ochenta y seis mil, quinientos ochenta y dos, en 11486582. Trescientos cincuenta mil ochocientos y siete, en 350807. Dos millones y cinco unidades, en 2000005.

11. Lo dicho basta para que no haya dificultad en traducir á lengua vulgar cualquiera número espresado en cifras aritméticas ordenadas en fila, ni tampoco en escribir de este mopo el número entero espresado en lengua vulgar: en cuanto á lo primero, la division de periodos dicta el modo de pronunciar; y en cuanto á lo segundo, la pronunciacion misma indica los lugares de las tildes.

12. Cuando el número está espresado por un solo gua-

rismo se dice que es *digito*; y cuando está espresado por varios guarismos le llamaremos *polidigito*.

13. Mas adelante se dirá el modo de espresar por escrito en aritmética el número fraccionario (1), y de pronunciar cualquiera espresion fraccionaria.

14. Las cifras de la aritmética general ó *álgebra* suelen ser todas las letras de nuestro alfabeto y las del griego, usándose tambien algunos acentos ortográficos ó de otra clase para distinguir con ellos ciertos accidentes de la cantidad espresada por la letra. Es tanta la generalidad de la significacion de las letras en álgebra, que no solo pueden representar cualquiera número segun el actual sistema de numeracion, sino tambien segun otro cualquiera.

Los signos con que se organizan las oraciones algébricas, de que se habló en el artículo (2), son:

$$+,\ -,\ \times,\ .,\ :,\ \sqrt{\ },\ =,\ <,\ >;$$

y á su tiempo esplicaremos las significaciones: pero no podemos dejar aquí de indicar las de $=$, $<$ y $>$, porque sin ellos no hay oracion, como sucede faltando el verbo en la lengua vulgar. El signo $=$ puesto entre dos cantidades A y B, como $A=B$, espresa que A *es igual á* B. El signo $<$ puesto entre dos cantidades, como $A<B$, dice que A *es menor que* B. El mismo signo segun está, ó vuelto, como $B>A$, dice que B *es mayor que* A.

La oracion completa $A=B$ se llama *ecuacion*, ó *igualdad*, ó *equivalencia*; y la $A<B$ ó la $B>A$ se llama *inecuacion*. En ambos casos diremos que es *primer miembro* toda la parte que antecede al signo $=$, ó $<$, ó $>$; y *segundo miembro* toda la parte escrita despues de dicho signo.

ALFABETO GRIEGO.

Letras griegas.	Su pronunciacion.	Análogas de nuestro alfabeto.
Α, α	alfa	a
Β, ϐ, β	beta	b
Γ, γ	gama	g
Δ, δ	delta	d
Ε, ε	epsilon	e breve
Ζ, ζ	dseta	ds
Η, η	eta	e larga
Θ, θ, ϑ	tzeta	ta
Ι, ι	iota	i
Κ, κ	kapa	k
Λ, λ	lamda	l
Μ, μ	mu	m
Ν, ν	nu	n
Ξ, ξ	xi	cs ó x suave
Ο, ο	omicron	o breve
Π, π	pi	p
Ρ, ρ	ro	r
Σ, ς, ϛ, σ	sigma	s
Τ, τ	tau	t
Υ, υ	upsilon	u
Φ, φ	fi	f
Χ, χ	chi	j ó x fuerte
Ψ, ψ	psi	ps
Ω, ω	omega	o larga

CAPITULO II.

Cálculos de sumar, restar, multiplicar y dividir, con las unidades enteras y partes decimales en aritmética.

LECCION PRIMERA.

Sumar con enteros.

15. *Sumar es reducir á una sola espresion varios números que se propongan*; y de consiguiente, sumar enteros en aritmética es formar una fila de guarismos que valga tanto, como todas las filas sueltas que se propongan para la operacion. Si se dan por ejemplo los números 12 y 7 para sumar, *el* total 19 es lo que se pide. Cada uno de los números parciales que se presentan es un *sumando*, como por ejemplo el 12 y el 7; y el total que se hallare es la *suma*, cual en el ejemplo el número 19.

Sería muy penoso el vernos precisados á descomponer cada sumando en tantas unidades simples como representa, para despues juntarlas ó hallar así la suma, á manera que hace la gente ruda cuando cuenta por los dedos de la mano; y para evitar esta necesidad, conviene adquirir destreza en sumar de memoria de dos en dos los números que los guarismos representan, á cuyo fin sirve la tabla siguiente:

TABLA DE SUMAR.

1 y 1 son 2	4 y 1 son 5	7 y 1 son 8
1 y 2 3	4 y 2 6	7 y 2 9
1 y 3 4	4 y 3 7	7 y 3 10
1 y 4 5	4 y 4 8	7 y 4 11
1 y 5 6	4 y 5 9	7 y 5 12
1 y 6 7	4 y 6 10	7 y 6 13
1 y 7 8	4 y 7 11	7 y 7 14
1 y 8 9	4 y 8 12	7 y 8 15
1 y 9 10	4 y 9 13	7 y 9 16
2 y 1 3	5 y 1 6	8 y 1 9
2 y 2 4	5 y 2 7	8 y 2 10
2 y 3 5	5 y 3 8	8 y 3 11
2 y 4 6	5 y 4 9	8 y 4 12
2 y 5 7	5 y 5 10	8 y 5 13
2 y 6 8	5 y 6 11	8 y 6 14
2 y 7 9	5 y 7 12	8 y 7 15
2 y 8 10	5 y 8 13	8 y 8 16
2 y 9 11	5 y 9 14	8 y 9 17
3 y 1 4	6 y 1 7	9 y 1 10
3 y 2 5	6 y 2 8	9 y 2 11
3 y 3 6	6 y 3 9	9 y 3 12
3 y 4 7	6 y 4 10	9 y 4 13
3 y 5 8	6 y 5 11	9 y 5 14
3 y 6 9	6 y 6 12	9 y 6 15
3 y 7 10	6 y 7 13	9 y 7 16
3 y 8 11	6 y 8 14	9 y 8 17
3 y 9 12	6 y 9 15	9 y 9 18

16. Hay un modo propio de ordenar para la sumacion los números, y consiste en *escribir unas filas de sumandos debajo de otras, de modo que las unidades de cada orden de todos ellos formen tambien fila de arriba abajo, á que llamaremos columna; y por último trazando una raya, escribir debajo la suma de cada columna por su orden.*

Tratándose de sumar, por ejemplo, los números 3, 521 y 13, se ordenan de modo que las unidades simples formen una columna, otra las decenas y otra las centenas. Se disponen así los números con el objeto de reunir las unidades de cada orden, y de que los guarismos que espresen las sumas parciales ó de columnas, escritos debajo de todos los sumandos guarden el lugar correspondiente segun el sistema establecido de numeracion. Procedamos pues á calcular, fundándonos en el principio (3, 2.º) de que el todo es la suma de sus partes; y trazada la raya, empezaremos la operacion por la columna de las unidades simples. Se suman primeramente los dos guarismos superiores de la columna de unidades simples, diciendo 3 y 1 son 4; y despues se junta la suma 4 con el tercer guarismo de la columna, diciendo 4 y 3 son 7. Como ya no hay mas guarismos en la columna, se escribe bajo la raya el 7, que es la suma de la columna de unidades simples. Procédase á la sumacion de las decenas, diciendo 2 y 1 son 3, y escríbase el 3 en su lugar bajo la raya. Últimamente, la columna de las centenas en este ejemplo consta solamente de un guarismo, el cual, por no haber con quien sumarle, se escribe bajo la raya en su correspondiente columna.

$$\begin{array}{r} 3 \\ 521 \\ 13 \\ \hline \end{array}$$

Concluido el cálculo vemos, que 7 es la suma de unidades simples, de las decenas es 3, y de las centenas 5, cuyo total asciende á quinientos treinta y siete, ó 5 centenas 3 decenas y 7 unidades.

$$\begin{array}{r} 3 \\ 521 \\ 13 \\ \hline 537 \end{array}$$

El ejemplo que se acaba de practicar está exento de una dificultad muy comun en la sumacion, y es el pasar de 9 la suma de alguna columna, cómo sucederá en el siguiente caso.

El escollo de que se trata se presenta desde luego en la columna de unidades, que es por donde se empieza; pues vemos que asciende á 18 unidades, ó 1 decena y 8 unidades, la suma de ella; pero como, por la regla establecida al principio, solo se deben escribir bajo la raya las unidades simples, hemos puesto en efecto la cifra 8 de ellas, y agregado la 1 decena á la columna de decenas. Por lo cual diremos para la suma de estas, 1 y 1 son 2; en seguida 2 y 3 son 5; y por último 5 y 2 son 7. En las centenas nos hallamos con el mismo escollo, pues asciende la suma de

7618
934
22026
40800
71378

ellas á 23 centenas ó 2 millares y 3 centenas: por lo cual escrita la cifra 3 centenas en su lugar, agregaremos los 2 millares á la columna inmediata. La suma de millares es 11, ó bien un millar y 1 decena de millar: escribiendo pues 1 millar en la columna de millares, agregamos 1 decena de millar á la columna inmediata, que entonces compone 7 decenas de millar.

En cualquiera caso aritmético de sumacion que se proponga se procede así hasta donde alcancen las cifras de los sumandos; y lo dicho basta para establecer la regla de que *se debe sumar en cada columna, el primer guarismo con el segundo, despues la suma de estos con el tercero, despues la suma de los tres con el cuarto, &c.: y si en la suma de cada columna resultan unidades del orden mayor inmediato, se deben agregar estas como un sumando á la columna correspondiente, despues de escribir la suma de las de orden inferior en la suya.* Para vencer siempre el escollo del ejemplo segundo, es necesario estar prevenidos de que en las sumas que pasan de 9, se necesita hacer de memoria la separacion de la parte que se ha de escribir en la misma columna, y la que se ha de agregar á la columna inmediata. En cuanto á la parte que ha de quedar, lo dice por el sonido la misma terminacion de la suma, segun concluya en una ú otra de las diez cifras; como por ejemplo, 8 en la suma 18 de las unidades, 3 en la suma 23 de las centenas, y 1 en la suma 11 de los millares. En cuanto á la parte de suma que se ha de agregar á la columna inmediata, sirve tambien de gobierno la espresion misma de la suma: pues, dicha parte es la restante en la suma, despues de haber dejado la última cifra de ella bajo la columna sumada; como por ejemplo, 1 en la suma 18 de unidades, 2 en la suma 23 de centenas, y 1 en la suma 11 de millares. Para este último objeto de saber cuánto se ha de llevar á la columna inmediata, apréndase á mayor abundamiento la tabla siguiente de sumas, en la cual se observará la separacion de dichas dos partes visiblemente.

Desde 10 hasta 19 se lleva	1	Desde 110 hasta 119...	11
Desde 20 hasta 29..........	2	Desde 120 hasta 129...	12
Desde 30 hasta 39..........	3	... ...	
Desde 40 hasta 49..........	4	... ...	
Desde 50 hasta 59..........	5	Desde 990 hasta 999...	99
Desde 60 hasta 69..........	6	... ...	
Desde 70 hasta 79..........	7	... ...	
Desde 80 hasta 89..........	8	... ...	
Desde 90 hasta 99..........	9	Desde 1000 hasta 1009...	100
Desde 100 hasta 109..........	10	etc.	

Las reglas dadas bastan para sumar cuantas filas se propongan; pero encargamos al principiante que no cese de ejercitarse en muchos ejemplos, hasta adquirir facilidad y destreza en la práctica; y para que ningun caso estraño le pueda sorprender, añadimos aqui los siguientes.

Cuando faltan las unidades simples por terminar con cero todos los sumandos, se escribe cero en el lugar correspondiente de la suma. Si ademas la columna de decenas no tuviere cifras significativas, se escribe tambien cero en la suma, y asi sucesivamente; como en los ejemplos que siguen:

1960		
572100	84000	2004000
30640	500	30000
819000	9200	600000
———;	———;	———.
1423700	93700	2634000

Cuando la columna en que falte cifra significativa es de las intermedias, se escribirá cero en la suma correspondiente, siempre que no hubiese que agregar á ella unidades procedentes de la anterior; pues en caso de haberlas, se escriben estas en dicho lugar; como sucede en los ejemplos que siguen:

47012	90006	7408012
23	81	309021
6005	20	9000
1049	50000	6806045
———;	———;	———.
54089	140107	14532078

17. Se han dado reglas para sumar los enteros abstractos, y las mismas han de observarse cuando sean concretos, sin faltar ademas al principio lógico de ser precisamente de una misma especie y clase todos ellos. Por el lenguage en que se pide una sumacion de números concretos, suele desconocer el principiante la naturaleza del problema, pero la distinguirá meditando un poco.

Se gastan, por ejemplo, en una casa 25 reales en un dia, 8 reales en otro, y 107 en el tercero; y se pide hallar el total gasto de dichos dias. Es evidente que la cuestion se resuelve sumando los gastos parciales; y el cálculo ejecutado manifiesta, que en los tres dias se gastaron 140 reales. Lo mismo se hacen las cuentas de cualesquiera números homogéneos, siendo todos de ganancias ó todos de pérdidas, es decir, cantidades que se deben agregar unas á otras.

25
8
107
140

Muchas veces ocurre la necesidad de sumar varias partidas escritas en una plana, con las escritas en otras; en cuyo caso hay que agregar la suma de cada plana á la otra, como un sumando; ó bien, hallada la suma de cada plana por sí, juntar al fin todas como sumandos. Este último medio se emplea tambien á veces cuando se propone una larga columna de partidas, á fin de que sea menos trascendental cualquiera equivocacion. Supongamos por ejemplo, *que un jugador apunta los reales que diariamente ganó á otro en tres semanas, y quiere saber lo que ganó él y perdió el otro.* Hechas las sumas de reales que espresan las tres cuentas primeras abajo escritas, de siete en siete dias, y reuniendo finalmente las tres sumas semanales, en la cuarta suma halla que la ganancia total suya ó bien la pérdida del contrario es veinte y tres mil ciento y cuatro reales.

26	1010	622	
500	308	87	
9	1500	5	
11	211	26	
8532	9	6000	11339
2191	6	1500	3122
70	78	403	8643
11339;	3122;	8643;	23104.

18. La operacion de sumar dos números, ó bien de agregar á uno de ellos el otro, se indica de un modo general con el signo + puesto entre los dos, que significa la conjuncion *mas*, como por ejemplo 5+2 que se pronuncia *cinco mas dos*: y se llama signo *positivo* el + en el cálculo. Si ademas hay otros sumandos, tambien se ponen á continuacion afectando á cada uno con dicho signo, como 5+2+65+18; &c. Asi se espresa en el álgebra el concepto de sumar los números que se hayan propuesto; y en general en la forma $a+b+c$.... la sumacion de las cantidades generales a, b, c, etc., como practicaremos á debido tiempo. Aqui nos proponemos únicamente el dar las primeras ideas del caracter que á la escritura algébrica distingue. Se llama *polinomio* en general toda frase compuesta de parciales en que á una siguen otras afectadas con sus correspondientes signos positivos ó de adicion: y cada frase parcial ó componente se llama *monomio*, y tambien parte del polinomio. Si este consta de dos monomios, se llama *binomio*; si de tres, *trinomio*; &c.

Cualquiera número espresado en fila segun el modo de la aritmética particular, puede ser descompuesto árbitramente para espresarlo segun el modo de la aritmética general. Por ejemplo, el número 91 equivale á 90+1, á 70+20+1, á 66+18+5+2, &c.; pero de los muchísimos polinomios en que se pudiera descomponer el número 91, el binomio 90+1 es el mas conforme al sistema de numeracion actual, porque cada término contiene unidades de un solo orden; decenas el primer término, y unidades el segundo. El número 3685, descomponiéndole tambien asi, equivale á 3000+600+80+5; el 202710 equivale á 200000+0+2000+700+10+0, &c. Aqui se ve la ingeniosa sencillez del sistema de numeracion actual; pues en realidad, cada fila de guarismos representa sucintamente lo mismo que un polinomio.

Cuando está concluida una sumacion de cantidades ligadas con el signo +, se forma la oracion algébrica con el signo = puesto á continuacion del polinomio que forman los sumandos, y despues del signo la suma: como por ejemplo, 521+14+3=538; y en general $a+b...=s$; conforme al convenio admitido (14).

LECCION II.

Restar con enteros.

19. La operacion *de hallar la diferencia entre dos números* cualesquiera se llama *restar*, y en aritmética es formar una fila de guarismos que esprese las unidades que quedarán, quitando á un número dado las unidades que esprese otro número tambien dado; como por ejemplo, si de 9 se quitan 5, quedarán 4. El número que ha de padecer diminucion, como aqui el 9, se llama *restando* ó *minuendo*; el número que se ha de quitar ó sustraer, como aqui el 5, es *restador* ó *sustraendo*; y la diferencia que queda, como aqui el 4, se llama *diferencia* ó *residuo*, ó *resto*. Por la definicion vemos que *el restando es la suma del restador y el resto*; y pues la suma es el conjunto de unidades de cada orden (16); claro está que el *resto debe ser el conjunto de restos de unidades de cada orden tambien*. Por lo cual, dadas las dos cantidades cuya diferencia se trata de averiguar, *se escribirán las filas de guarismos de manera que las unidades de cada orden formen columna, como en la sumacion, pero con la advertencia de poner el restador debajo del restando; y se trazará bajo la fila inferior una raya, que sirve para separar el resto, que se hallará restando las unidades de cada orden.*

Dado por ejemplo el número 5683 para restando, y el 4321 para restador, dispónganse como acabamos de indicar, y procédase á comparar las unidades de cada órden empezando por la columna de las simples. En ella vemos que de 1 á 3 van 2; y este es el guarismo que se ha de escribir bajo la raya en la columna de unidades simples. En las decenas, de 2 á 8 van 6; y escrito el 6 bajo la raya en la columna de las decenas, se continúa la operacion por el mismo orden, hallando y escribiendo la diferencia 3 de las centenas, y por último, la diferencia 1 de millares; como patentiza la operacion concluida que presentamos, habiendo resultado la diferencia total 1362.

$$\begin{array}{r} 5683 \\ 4321 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5683 \\ 4321 \\ \hline 1362 \end{array}$$

Lo mismo se practica el cálculo en los tres ejemplos que siguen:

$$\begin{array}{r} 935 \\ 124 \\ \hline 811 \end{array}\;; \qquad \begin{array}{r} 1935 \\ 1124 \\ \hline 811 \end{array}\;; \qquad \begin{array}{r} 71935 \\ 31124 \\ \hline 40811 \end{array}.$$

En el segundo se ha omitido el escribir cero millares en el resto, por ser inútil esta cifra al principio de la fila (8).

Si en el restador falta cifra que comparar con el restando, se supone que ocupa el cero aquel lugar, pues nada puede influir esto en los valores, en atencion á que solo puede suceder la falta de cifra al principio de la fila. Sirvan de ejemplos los dos casos adjuntos:

$$\begin{array}{lr} \text{restando} & 6859 \\ \text{restador} & 25 \\ \hline & 6834 \end{array} \text{, es lo mismo que...} \quad \begin{array}{r} 6859 \\ 0025 \\ \hline 6834 \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} \text{restando} & 27305 \\ \text{restador} & 7102 \\ \hline & 20203 \end{array} \text{ es lo mismo que...} \quad \begin{array}{r} 27305 \\ 07102 \\ \hline 20203 \end{array}.$$

20. Puede presentarse en otros ejemplos que se propongan alguno de los escollos que vamos a clasificar.

1.° Cuando espresa mayor número de unidades alguna de las cifras del restador que su respectiva del restando, hay que agregar á esta una unidad del orden mayor inmediato, despojando de ella á la cifra de la izquierda, como en el siguiente ejemplo;

$$\begin{array}{rlr} 5948 & \text{que equivale á...} & 5900+30+18 \\ 3829 & \text{que equivale á...} & 3800+20+\;\,9 \\ \hline 2119 & \text{que equivale á...} & 2100+10+\;\,9. \end{array}$$

Vemos por la espresion aritméticamente ordenada, que al empezar el cálculo por las unidades simples, como está esplicado, ocurre el inconveniente de no poderse quitar 9 unidades de 8: pero, tomando una decena de las cuatro que hay en el minuendo, si agregamos sus 10 unidades á las 8, la cuestion es ya restar 9 unidades de 18, y 2 decenas de 3; y resulta la diferencia total 9 unidades simples, 1 decena, 1 centena y 2 millares; ó dos mil, ciento diez y nueve.

2.° Puede suceder que la cifra inmediata de mayor orden se halle en igual caso al hacer su resta: y entonces hay que recurrir á la de su izquierda, como en el siguiente caso;

7123	equivalente á...	7000+110+13
4085	equivalente á...	4000+ 80+ 5.
3038		

No pudiéndose restar 5 de 3, se toma una decena de las 2; y es 13 así el minuendo parcial de las unidades simples, y 8 la diferencia. Quedó una decena por minuendo de este orden, y siendo imposible tambien su resta, hay que agregar una centena tomada en la cifra inmediata; así el minuendo parcial de las decenas es 11, de quienes restamos 8, y viene la diferencia 3. La resta de las centenas es practicable á pesar de haber quedado cero el minuendo de ellas, por ser lo mismo el sustraendo. Resulta la diferencia total. 3 millares, 0 centenas, 3 decenas y 8 unidades: ó tres mil, treinta y ocho.

3.° A veces el escollo viene solamente en la resta parcial de las cifras que hay en medio de las espresiones, como en el caso actual;

32405	equivalente á	20000+12000+300+100+5
18352	equivalente á	10000+ 8000+300+ 50+2.
14053		

4.° Otras veces, queriendo tomar unidad de orden mayor en la cifra inmediata, ésta carece de ella; y entonces hay que recurrir á la siguiente cifra, como en el caso adjunto;

96502	equivalente á	96000+400+90+12
74318	equivalente á	74000+300+10+ 8.
22184		

Aqui no se pueden restar las unidades simples sin agregar decena; pero no habiéndola en la inmediata cifra, hay que llegar hasta las centenas: se toma una y se distribuyen sus 10 decenas agregando 9 á la cifra de las decenas y 1 á las de unidades, que ya son 12. La operacion es ahora facil, y resulta la diferencia 2 decenas de millar, 2 millares, 1 centena, 8 decenas y 4 unidades; ó veinte y dos mil, ciento ochenta y cuatro.

5.° Cuando la mayoría del restador suceda en las unidades del mayor orden, habiendo igual número de cifras en restando y restador, será absurda la operacion propuesta; como por ejemplo, en los dos casos

$$\begin{array}{r} 5823 \\ 6412 \\ \hline \end{array}\;; \qquad \begin{array}{r} 82499 \\ 82500 \\ \hline \end{array}\;;$$

pues, aunque inadvertidamente fuésemos calculando hasta lo posible, nos hallariamos al fin con la imposibilidad de quitar, en el primer ejemplo 6 millares á 5 millares, y en el segundo 8 decenas de millar á 7 decenas de millar. Sin embargo, nos ilustrarán sobre esta materia las observaciones que se harán despues al tratar de la resta con signos algébricos.

6.º Si el restando terminare con varios ceros, hay que llegar hasta la primera cifra significativa que se encuentre; y tomando en ella una unidad de su orden, distribuirla entre las que necesiten agregacion; como en el ejemplo que sigue,

$$\begin{array}{rll} 2000 & \text{equivalente á} & 1000+900+90+10 \\ 843 & \text{equivalente á} \;\ldots\ldots & 800+40+\;3. \\ \hline 1157 & & \end{array}$$

Vemos en él, que un millar está repartido en 9 centenas, 9 decenas y 10 unidades. Ademas ofrece la cuestion el accidente de no haber millares en el restador; pero es lícito suponer la cifra 0 en su lugar, y hacer así la comparacion de millares.

7.º Vamos á un caso partiºular de esta especie, que es el de ser minuendo la cifra 1 seguida de tantos ceros cuantas cifras hay en el sustraendo; como por ejemplo, en el siguiente caso:

$$\begin{array}{rll} 1000 & \text{equivalente á...} & 900+90+10 \\ 843 & \text{equivalente á...} & 800+40+\;3. \\ \hline 157 & & \end{array}$$

El resultado es la diferencia entre un número y la unidad del orden mayor inmediato, diferencia que se llama *complemento aritmético* de dicho número; como por ejemplo, 157, que es complemento de 843, asi como 843 complemento de 157; pues, cada número de estos es la diferencia que hay entre el otro y 1000.

Tambien, por las restas que se ven á continuacion,

$$\begin{array}{r}10000\\1124\\\hline 8876\end{array},\quad\begin{array}{r}10\\6\\\hline 4\end{array},\quad\begin{array}{r}100000\\84862\\\hline 15138\end{array},$$

resulta ser 8876 y 1124 complementarios mútuamente: asimismo, 4 y 6 complementarios entre sí: é igualmente 15138 y 84862 uno de otro.

21. Por medio de los complementos la operacion de restar se cambia en la de sumar, con la precaucion siguiente.

Tratándose, por ejemplo, de restar 4 unidades de 17, el cálculo ordinario nos daria inmediatamente la diferencia de ellas, que es 13. Para formar idea del cálculo

$$\begin{array}{r}17\\4\\\hline 13\end{array}$$

por complementos discúrrase, que si tomamos el complemento de 4 que es 6, y escribimos éste bajo el minuendo 17, la suma 23 escede en 10 al resto 13. Por lo cual, si á la izquierda del 6 escribimos $\bar{1}$ decena, con raya sobre puesta para recordar que hay que quitar una decena á la suma, pues en vez de restar 4 hemos añadido 6 á 17, resulta la suma 13 cercenando á las decenas una, como se ve en el cálculo.

$$\begin{array}{r}17\\6\\\hline 23\end{array}\qquad\begin{array}{r}17\\\bar{1}6\\\hline 13\end{array}$$

Consiste, pues, la operacion de cambiar una resta en suma por el método del complemento aritmético, en sumar el minuendo con el complemento del sustraendo y quitar una unidad á la suma de las del orden mayor inmediato que preceden al complemento: se funda en que á la suma se quita tanto, como importan juntos el restador y lo que se le añadió á este.

Asimismo, debiendo restar 4 de 125, la diferencia es 121, conforme al método ordinario de restar que practicamos. Para convertir esta operacion en la de sumar, escríbase en lugar del 4 su complemento 6, con $\bar{1}$ á la izquierda para indicar que se debe disminuir la suma de

$$\begin{array}{r}125\\4\\\hline 121\end{array}$$

las decenas en una, como en el cálculo adjunto se ve. No hay duda en que el resultado es legítimo, porque, á la suma de 125 y 6 se quita 10 ó su igual 4+6, cantidad compuesta del restador y lo que se le añadió.

$$\begin{array}{r} 125 \\ \bar{1}6 \\ \hline 121 \end{array}$$

Siguiendo tambien el método de los complementos, en vez de restar 428 de 535 súmese con éste el complemento de aquel, que es 572, y suprimiendo $\bar{1}$ millar, resulta 107 como si se hubiera restado 428 de 535.

$$\begin{array}{r} 535 \\ \bar{1}572 \\ \hline 107 \end{array}$$

22. Despues que el aritmético ha concluido la operacion de restar, puede cerciorarse de la exactitud del resultado por la *prueba*: que consiste en *sumar el restador con el resto*, pues debe salir por suma el restando segun lo establecido en el artículo (19). Practicando, por ejemplo, la prueba en la resta adjunta, hay certeza de no haber padecido equivocacion, porque la suma de resto y restador sale igual al restando.

$$\begin{array}{r} 572180 \\ 285063 \\ \hline 387117 \end{array}$$

En el mismo principio se funda la *prueba* de la sumacion: pues, restando de una suma total hecha, la de todos los sumandos menos uno, si sale la diferencia igual á éste, será prueba de estar bien ejecutada la suma de que se trata.

Asi sucede en el ejemplo que sigue; pues que, si se resta de la suma total 7354 la suma 6539 de los sumados, escepto uno, que aquí es el último, resulta igual á éste la diferencia.

$$\begin{array}{r} 6502 \\ 37 \\ 815 \\ \hline 7354 \end{array}$$

23. Sabiendo las reglas para la resta de los enteros abstractos, su aplicacion á la de concretos no presenta dificultades; y solamente puede haber alguna en acostumbrarse á distinguir la naturaleza de la cuestion que se proponga en lengua vulgar.

Por ejemplo, *un sugeto ha ganado con su trabajo* 76 *reales; á cuenta ha percibido una vez* 8 *reales y otra vez* 5 *reales; y se quiere hallar lo que aun debe de percibir.*

Claro es que se pide restar de la total ganancia la suma de cantidades percibidas: con que, hay una sumacion y una resta: aquella es de sumar 8 reales con 5 reales; y la segunda, restar 13 reales de 76 reales; resulta que aun debe percibir 63 reales.

$$\begin{array}{r} 8 \\ 5 \\ \hline 13 \end{array}; \quad \begin{array}{r} 76 \\ 13 \\ \hline 63 \end{array};$$

24. En la aritmética general la operacion de restar se espresa escribiendo en un mismo renglon el restando y despues el signo —, que se pronuncia *menos*, y al fin el restador; como por ejemplo, 8—5, 1273—495, &c. y en general $S—A$; y se pronuncia 8 *menos* 5, asi como 1273 *menos* 495, &c., y en general S *menos* A. El signo — se llama *negativo* para distinguirle del *positivo* + en el lenguage vulgar, y cuando tratemos de restar cantidades algébricas entenderemos los motivos que hay para llamarse negativo el signo — y positivo el +. Por ahora sólamente nos hemos propuesto el dar las primeras ideas acerca del uso de los signos, para tener este auxilio en los cálculos de aritmética, cuando nos convenga. A lo dicho añadiremos, que despues de haber indicado el problema de restar un número de otro, en el binomio que se forma con el restando y el restador mediante el signo, como por ejemplo 1273—495; se procede á ejecutar la resta segun queda dicho en las reglas de aritmética (19) y (20); y luego que se haya encontrado el resto, como aqui el 778, se forma la oracion algébrica por medio del signo =, segun está admitido (14),

$$1273—495=778.$$

25. La resta es el medio propio de hacer la descomposicion de un número en sumandos, asi como por la sumacion se hace lo inverso, que es componer el número cuando se dieren los sumandos. El problema de componer es absolútamente determinado, porque los sumandos que se den jamás pueden producir mas que aquella suma; pero el problema de la descomposicion en sumandos es indeterminado, porque un número puede ser descompuesto en muchos sistemas de sumandos, como ya está dicho en el artículo (18). Además está sujeto á la restriccion de que cada sumando ha de ser menor que el número dado para descomponer, y siempre igual á la diferencia entre éste y el valor á que ascienda la totalidad de los otros sumandos. Dado por ejemplo el número 1273, podemos elegir

por primer sumando cualquiera número menor. Sea este 825; y restándole de 1273, sale para el total de los otros sumandos el número 448 por la resta, ó bien $825+448=1273$. Si queremos proseguir la descomposicion en polinomio de mas términos, descompóngase 448 en otros dos, eligiendo uno que sea menor que el número 448; y así sucesivamente.

LECCION III.

Multiplicar con enteros.

26. Cuando se propone un problema de sumar varios números iguales, la operacion del cálculo se abrevia ingeniosamente convirtiéndola en la de *multiplicar*. Dados por ejemplo los sumandos 8 y 8, el modo ordinario es cual sabemos en la disposicion que aquí se ve, y en el problema se pide hallar el número que debe resultar *duplicando* el 8. Si el 8 entra por sumando tres veces, el problema será *triplicar* el 8; asi como *cuadruplicar*, *quintuplicar*, etc., y en general *multiplicar*, si entra cuatro veces, cinco veces, etc., y en general cualesquiera número de veces. El número que se ha de multiplicar se llama *multiplicando*; el número que espresa las veces que aquel entra por sumando es *multiplicador*; el resultado es *producto*; y se llaman tambien *factores* de este el multiplicando y el multiplicador, porque ambos hacen que salga el resultado. En el ejemplo propuesto de multiplicar el número 8, este es el multiplicando: el número 2 ó 3 ó 4 etc., por quien se ha de multiplicar, ó bien el que espresa las veces que aquel entra por sumando, es multiplicador; y el número 16 ó 24 ó el 32, etc., es el producto.

$$\begin{array}{r} 8 \\ 8 \\ \hline 16 \end{array}$$

27. El problema de multiplicar cualquiera número dígito por otro tal, está resuelto en la tabla siguiente, que se dice haber sido formada por el filósofo Pitágoras. En ella está omitido el guarismo cero, porque segun la definicion de multiplicar, si fuese cero el multiplicando se pediria una suma de ceros que es cero (16); y si fuese cero el multiplicador, se pediria la contradicion de no entrar por sumando vez alguna el número que fuere multiplicando, y por consiguiente no puede haber producto. Debe aprenderse de memoria cada operacion de las com-

prendidas en la tabla; porque, segun pronto veremos, en saber todas ellas consiste el hallar los productos de números mayores.

TABLA PITAGÓRICA.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Ninguna dificultad presenta el entenderla, pues en la segunda columna y lo mismo en la segunda fila, estan los productos del 2 multiplicado por cada una de las nueve cifras: en la tercera columna ó fila los productos del 3 multiplicado por cada una de dichas cifras, y asi sucesivamente; de modo, que para hallar cualquiera de los productos entre dos de las nueve cifras, se busca en el pequeño cuadro que juntamente corresponde á la columna de un factor y á la fila del otro. Si se trata por ejemplo, del producto que deben dar 5 y 7, se halla en el cuadro que á un mismo tiempo corresponde á la columna del 5 y á la fila del 7, é igualmente en el cuadro que corresponde á la fila del 5 y á la columna del 7. La idea de la operacion se pronuncia diciendo 5 *multiplicado por* 7 *es* 35, ó bien 5 *por* 7 *es* 35; y entiéndase lo mismo en cuanto á otro cualquiera producto.

28. La operacion de multiplicar un número polidígito por un dígito, equivale á la sumacion de tantos sumandos iguales al primero, cuantas unidades tenga el guarismo multiplicador. Si se pide, por ejemplo, el sumar 537 y 537, el número entra por sumando 2 veces y la suma, segun el método ordinario es, lo mismo que duplicar el número 537, ó bien duplicar las unidades, las decenas y las centenas de que consta.

$$\begin{array}{r} 537 \\ 537 \\ \hline 1074 \end{array}$$

Si la cantidad fuese propuesta por sumando 3 veces; la operacion segun el método ordinario, daria un resultado conforme al problema de triplicar el número, ó bien triplicar las unidades, las decenas y las centenas.

$$\begin{array}{r} 537 \\ 537 \\ 537 \\ \hline 1611 \end{array}$$

Sin proseguir mas adelante, se puede conocer que, *sea* *cualquiera la fila de guarismos que se proponga por multiplicando, y cualquiera el guarismo multiplicador, la operacion consiste en multiplicar por este las unidades de cada orden de aquel, siguiendo de menores á mayores; y agregar unos á otros los productos parciales que asi se obtengan, para tener el total producto que se pide.* Segun esta regla, basta la tabla pitagórica tambien para ejecutar las multiplicaciones de esta clase; pues la operacion viene á reducirse á multiplicar un guarismo por otro cada vez, cuidando de colocar en la fila del producto las unidades de cada orden en su respectivo lugar, agregando las del orden mayor que pudiere dar cada multiplicacion parcial, á sus correspondientes de la multiplicacion sucesiva.

Para ello se escribe el multiplicando y debajo el multiplicador, formando columna los guarismos de cada orden, y al fin el producto, separado con una raya; como por ejemplo,

$$\begin{array}{rl} 537 & \text{multiplicando} \\ 3 & \text{multiplicador} \\ \hline 1611 & \text{producto.} \end{array}$$

El cálculo se empieza diciendo 7 por 3 son 21, ó 1 unidad y 2 decenas: se coloca el guarismo 1 en el primer lugar del producto, y se reserva el 2 para el siguiente. Despues diremos 3 por 3 es 9, y 2 que llevaba son 11, ó bien 1 decena y 1 centena: se coloca aquella en su lugar y se reserva para el siguiente la 1 centena. Proseguiremos diciendo 5 por 3 son 15, y 1 que llevaba son 16, ó 6 centenas y 1 millar: se coloca el guarismo 6 centenas en su lugar, y como ya no hay mas producto parcial que hallar, se coloca tambien el guarismo 1 millar en el puesto que le corresponde.

A la misma clase de problemas pertenecen los siguientes, que insertamos para que sirvan de ensayo al principiante, encargándole que se ejercite mucho en otros que le ocurran;

$$\begin{array}{r} 61284 \\ 5 \\ \hline 306420 \end{array}; \quad \begin{array}{r} 1952136 \\ 2 \\ \hline 3904272 \end{array}; \quad \begin{array}{r} 471359182 \\ 4 \\ \hline 1885436728 \end{array}.$$

Si fuere multiplicando un número dígito y multiplicador un polidígito, el problema exigirá que se halle la suma que resultaria, de ser aquel tantas veces sumando como unidades tiene el multiplicador, ó bien, el producto que saliere de multiplicar el multiplicando sucesivamente por cada guarismo del multiplicador; operacion que viene á ser en realidad la misma que se practica en el caso de ser multiplicando la fila, y multiplicador el guarismo solo; pues, la tabla pitagórica da un mismo producto con el multiplicando y el multiplicador cambiados entre sí. Sirvan de ejemplo los casos que siguen;

$$\begin{array}{r} 3 \\ 537 \\ \hline 1611 \end{array}\;;\qquad \begin{array}{r} 5 \\ 61284 \\ \hline 306420 \end{array}\;;\qquad \begin{array}{r} 2 \\ 1952136 \\ \hline 3904272 \end{array}\;.$$

29. Cuando se ha de multiplicar un número polidígito por otro tal, se conocen mas aún las ventajas del cálculo de la multiplicacion, considerando que la sumacion de tantos números como unidades tiene el multiplicador, va siendo mas penosa conforme sea mas crecido el multiplicador. ¿Y qué diriamos si se tuviese que apelar al rudo medio (15) de sumar descomponiendo en unidades simples todos los sumandos?

Para establecer la regla de multiplicar un número polidígito por otro de esta clase, propongamos el ejemplo de ser 82 multiplicando y 23 multiplicador; y hagámonos cargo de que se pide el número que resultaria del sumando 82, repetido 3 veces y ademas 2 decenas de veces: luego, si se encuentran estos dos productos parciales, la suma de ellos es lo que se pide. Escríbase, pues, el multiplicando y debajo el multiplicador, formando columna las unidades de cada orden, y al fin tírese la raya, como aquí hacemos.

$$\begin{array}{rl} 82 & \text{multiplicando} \\ 23 & \text{multiplicador} \\ \hline \end{array}$$

Primeramente se halla el producto del multiplicando por las unidades simples, conforme á lo establecido en el artículo anterior, y se escriben bajo la raya los productos parciales, de modo que tambien las unidades de cada orden ocupen el lugar designado en el sistema de numeracion. En seguida se halla el producto de todo el multiplicando por las decenas, con la precaucion de escribir los productos parciales bajo los que haya de la operacion primera en lugares respectivos, como se ve por el tipo siguiente:

82 multiplicando
23 multiplicador

246 primer producto
164 segundo producto.

El producto primero está formado así: 2 unidades tomadas 3 veces asciénden á 6 unidades; y escrita la cifra 6 en la columna de unidades, se procede al cálculo de las decenas, diciendo 8 decenas 3 veces asciénden, segun la tabla pitagórica, á 24 decenas, ó 4 decenas y 2 centenas. El segundo producto empieza desde 2 unidades del multiplicando tomadas dos decenas de veces, como exige el multiplicador, y se escribe su producto 4 décenas, en el lugar que á estas corresponde: dicho segundo producto consta ademas, de 8 decenas tomadas 2 decenas de veces; y como la tabla pitagórica dice 8 por 2 es 16, que son 6 centenas y 1 millar, se escriben aquellas y este en donde les pertenece. Falta únicamente hallar la suma de los dos productos, conforme á la regla de la sumacion, y es fácil notar que en el segundo producto está suprimido el 0 unidades, que se debia escribir para dar al 4 el carácter de decenas en su fila; mas, por otra parte vemos que es indiferente el que se escriba ó no, puesto que el 4 está en la columna de decenas para la sumacion de que se trata. Resulta, pues, la suma 1886 de los productos, ó producto de los factores propuestos, cuyo cálculo completo es el que se ve ya ejecutado.

82
23

246
164

1886

El método que se ha seguido en este ejemplo para obtener los productos parciales de todo el multiplicando por cada cifra del multiplicador, escribiendo cada cifra de estos productos en la columna de su orden, y al fin sumarlos, es el que se ha de seguir en todos los casos, por el raciocinio en que se ha fundado la operacion, ya sean largas ó ya cortas las filas del multiplicando y multiplicador. Segun dicho razonamiento, han de resultar con precision tantas filas de productos parciales cuantos guarismos tenga el multiplicador; y vemos que para su cálculo basta la tabla pitagórica, pues la dificultad está reducida á ir sucesivamente formando los productos de cada guarismo del multiplicando por cada uno del multiplicador. De suerte, que la regla general de la multiplicacion será, *escribir el multipli-*

cando y debajo el multiplicador formando columna los guarismos de cada orden; hallar los productos parciales, del multiplicando por cada guarismo del multiplicador, por el orden de menores á mayores unidades, escribiendo los productos, unos bajo de otros debajo de la raya, de manera que formen columna las unidades de cada orden, y al fin sumar los productos parciales. Asi están ejecutadas las multiplicaciones que á continuacion proponemos para ejercicio

```
   8293
    132
-------
  16586
 24879
8293
-------
1094676
```

;

```
 621357
     69
-------
5592213
3728142
--------
42873633.
```

39. Pueden ocurrir varios casos particulares en la multiplicacion; unos que presentan ciertas dificultades fáciles de vencer, y otros que ofrecen alguna circunstancia favorable para abreviar el cálculo.

1.° Cuando hay algun cero entre las cifras del multiplicador, ciertamente será nulo el producto parcial de dicha cifra, y por ello se puede suprimir la fila de ceros de que constará, pero sin perjuicio de las demas filas, llevando en cuenta el lugar de los productos significativos. Debiendo, por ejemplo, multiplicar 6172 por 304, hallaremos tres filas de productos, á causa de haber tres cifras en el multiplicador: por la misma razon habrá cinco filas de productos en la multiplicacion de 9285 por 13007; y los cálculos de ambos ejemplos, con arreglo al método general, serán

```
   6172
    304
-------
  24688
  0000
18516
-------
1876288
```

;

```
     9285
    13007
---------
    64995
    0000
   0000
 27855
 9285
---------
120769995.
```

Lo mismo que si se hubiera suprimido la multiplicacion parcial por los ceros, segun ahora lo haremos:

$$\begin{array}{r} 6172 \\ 304 \\ \hline 24688 \\ 18516 \\ \hline 1876288 \end{array} ; \qquad \begin{array}{r} 9285 \\ 13007 \\ \hline 64995 \\ 27855 \\ 9285 \\ \hline 120769995. \end{array}$$

2.° Si termina con ceros el multiplicando ó el multiplicador, serán insignificantes por nulos, tantos productos parciales consecutivos desde las unidades simples, cuantos ceros haya al fin de uno ú otro factor, como sucede en los dos ejemplos que siguen,

$$\begin{array}{r} 307215469 \\ 800 \\ \hline 000000000 \\ 000000000 \\ 2457723752 \\ \hline 245772375200 \end{array} ; \qquad \begin{array}{r} 495000 \\ 17 \\ \hline 3465000 \\ 495000 \\ \hline 8415000 \end{array}$$

y está visible que se pudo abreviar la operacion, suprimiendo los ceros para el cálculo, y añadiéndolos al fin despues del producto total de las cifras significativas.

3.° Cuando ambos factores terminan con ceros, se reunen tantos al fin del producto cuantos hay al fin de aquellos, como sucede en los dos ejemplos que siguen, á pesar de haberse suprimido en el segundo las dos filas de ceros que darian los que hay entre las cifras significativas del multiplicador:

$$\begin{array}{r} 295600 \\ 30 \\ \hline 000000 \\ 886800 \\ \hline 8868000 \end{array} ; \qquad \begin{array}{r} 63000 \\ 10030 \\ \hline 00000 \\ 189000 \\ 63000 \\ \hline 631890000. \end{array}$$

Notoriamente se puede abreviar el cálculo, suprimiendo las multiplicaciones de ceros, y añadiendo al fin del producto completo de las cifras significativas, el conjunto de ceros que hay al fin de ambos factores.

31. Fúndase una proposicion general sobre los dos últimos casos, en que el producto de unidades por decenas asciende á lo menos á decenas; el de unidades por centenas, á lo menos á centenas; decenas por decenas, á lo menos á centenas, por ser el menor producto de esta clase 10 multiplicado por 10, ó bien 100; decenas por centenas á millares, por ser el menor de esta clase 100 multiplicado por 10, ó bien 1000; &c. De modo, que *el producto de dos números que terminan con ceros, es el producto de las cifras significativas, terminado con tantos ceros como hay en ambos factores; y por esto se pueden suprimir las multiplicaciones con los ceros finales de los números, hallando el producto de las cifras significativas, y añadiendo á este á su derecha los ceros que hay al fin del multiplicando y del multiplicador, ó en uno solo de los factores cuando el otro carezca de ellos.*

En esto se funda tambien la siguiente proposicion que vamos á demostrar: y es, que *el producto de la multiplicacion tendrá tantos guarismos ó tantos menos uno, como tienen el multiplicando y el multiplicador juntamente.* Porque, si fuese multiplicando ó multiplicador la unidad cabal del orden mayor inmediato al valor de uno de estos factores, resultaria de producto el otro factor, seguido de tantos ceros como tuviera el primero; es decir, un producto de tantos guarismos como tienen juntos los dos factores propuestos: luego, no puede tener mas que otros tantos el producto de estos. Para demostrar que á lo menos ha de tener tantos menos uno; supóngase por un momento multiplicando ó multiplicador, la unidad cabal del orden menor inmediato; y resultaria de producto el otro factor seguido de tantos ceros menos uno, como guarismos tuviere el primero; es decir, un producto de tantos guarismos menos uno, como tuviesen el multiplicando y multiplicador propuestos: luego, no puede tener menos de otros tantos el producto de estos. No pudiendo tener mas que los dichos en la primera consecuencia, ni menos que los de la segunda, está demostrada la proposicion. Por ejemplo, el producto de 5723 y 986 no puede tener mas de siete guarismos, ni menos de seis; porque, si fuesen 10000 y 986 los factores, ó 5723 y 1000, resultaria de producto 9860000 en el primer caso, y 5723000 en el segundo, y en ambos un total de siete guarismos. Si fuesen 1000 y 986 los factores, ó 5723 y 100, resultaria de producto 986000 ó 572300, ambos de seis cifras. Luego, el producto que se busca no puede tener mas de siete cifras ni menos de seis.

Del principio primero de este artículo se infiere el modo de hacer mayor cualquiera número, diez, ciento, mil, etc., veces, conforme al que se manifestó en el sistema de numeracion. Pues dicha cantidad multiplicada por 10, producirá todas sus cifras y un cero mas á la derecha: si se multiplica por 100, dos ceros mas; si por 1000 tres ceros mas; y asi sucesivamente. El número 83025, por ejemplo, es diez veces menor que 830250; cien veces menor que 8302500; mil veces menor que 83025000, &c. Cada cero de aumento hace diez veces mayores las unidades de cada orden que hay en el número propuesto, pasando en el acto cada cifra al lugar inmediato de su izquierda, en lo cual consiste nuestro sistema de numeracion.

Todavia podemos deducir del principio primero otro, y es, que *el multiplicar un producto por la unidad seguida de ceros, equivale á multiplicar por este número cualquiera de los dos factores, quedando el otro sin alteracion alguna.* Ejemplo de esto es el producto 24 de 3 por 8; pues 30 por 240, lo mismo que 3 por 80.

32. Para ensayo en la inteligencia de problemas de multiplicar cantidades aritméticas propuestos en lenguage vulgar, y en la aplicacion de las reglas á operaciones de números concretos, proponemos los siguientes:

1.° *¿A cuánto asciende la ganancia de un jornalero en 30 dias, habiendo ganado 7 reales diarios?*

2.° *¿Cuánto le quedará de esta ganancia, despues de pagar su gasto durante los mismos dias, á 5 reales diarios?*

En la primera cuestion se pide un número que esprese reales; y no hay duda que es el producto de 7 reales multiplicados por 30. La segunda cuestion envuelve dos; la una es hallar el importe del gasto, multiplicando 5 reales por 30; y la otra es restar el valor del gasto del valor de los jornales. Los tres cálculos vienen a ser:

7	5	210
30 ;	30 ;	150
ganancia 210 rs.	gasto 150 rs.	debe percibir 60 rs.

Obsérvese que en los números concretos el producto es de la especie del multiplicando, y que el multiplicador hace oficio de número abstrato: de modo, que en este cálculo pueden entrar cantidades de dos especies diferentes:

3.° *¿Cuántas pulgadas contienen* 14 *brazas?*

4.° *¿Cuánto valen* 14 *varas de tela á* 3 *reales la pulgada?*

La tabla (86) de medidas manifiesta que una braza tiene 72 pulgadas; y la primera cuestion es tomar 72 pulgadas 14 veces, ó multiplicar 72 por 14. La segunda cuestion envuelve dos; una es la misma primera, y otra es hallar el producto de 3 multiplicado por el número de pulgadas que hay en 14 brazas. El cálculo de ambas conduce á las respectivas soluciones,

pulgadas	72
	14
	288
	72
pulgadas en 14 brazas	1008

	3 rs.
	1008
importe de 14 brazas	3024 rs.

33. En lenguage algébrico, el problema de multiplicar un número por otro se indica con el signo $\times$, puesto entre los dos números formando renglon, como 5×7, 82×23, y en general $d \times c$: y se pronuncia en el primer caso, 5 *multiplicado por* 7; en el segundo, 82 *multiplicado por* 23; y en general d *multiplicado por* c. Otras veces en lugar del signo $\times$ se pone un punto, como $5 . 7$; $82 . 23$; $d . c$.

Cuando fuere necesario espresar el problema de multiplicar números descompuestos en polinomio, como $80+2$ por $20+3$, se cierra dentro de paréntesis cada polinomio, y se ligan por medio del signo $\times$ ó del punto, como $(80+2) \times (20+3)$, ó $(80+2) . (20+3)$; y lo mismo aunque sea monómia una de las cantidades, como $(8+2) \times 7$; ó $(80+2) . 7$; y aun se suprime á veces el punto en tales casos, como (80+2) (20+3), y (80+2) 7; porque no se puede equivocar el concepto de estas frases con el de otra alguna de las que aludan á otras operaciones de cálculo, que iremos dando á conocer.

La oracion algébrica se forma escribiendo en seguida el signo=; y despues el resultado, como $5\times7=35$; $82\times23=1886$, &c.: y en general, espresando d y c los factores del producto N, la ecuacion es

$$d\times c=N.$$

Estos convenios del lenguage algébrico nos van á servir, para espresar con la competente generalidad ciertas consecuencias que vamos á deducir de los principios de cálculo establecidos ya.

1.ª Por la regla de la multiplicacion (28), si uno de los factores es 1, resulta de producto el otro factor. Luego, *toda cantidad* d *multiplicada por* 1 *es la misma cantidad; por lo cual diremos que* 1 *es factor tácito de todo número,* como se espresa en la oracion algébrica.

$$d\times1=d,$$

y se observa en la tabla de multiplicar (27).

2.ª Si uno de los factores de la multiplicacion es el cero, el producto de cada cifra del otro por cero es tambien cero (27); luego, en el producto resultará cero ó una fila de tantos ceros como guarismos tenga el factor significativo. Queda pues demostrado, que *toda cantidad multiplicada por cero es cero tambien,* como se espresa en la oracion

$$d\times0=0.$$

3.ª Cada cifra del sistema de numeracion espresa una suma de unidades; y la frase $d\times c$ compuesta de las cifras d y c, espresa que la suma d se ha de tomar c veces: de suerte, que siendo 1+1+1+1+1+.... el valor de d, la frase $d\times c$ especifica la suma de c polinomios como 1+1+1+1+.... Si los escribimos unos debajo de otros, formando columnas los términos, la suma de la primera columna será $1\times c$, ó bien c, segun la consecuencia 1.ª; la suma de las dos primeras columnas será $c\times2$; la de las tres primeras $c\times3$, etc.; y asi sucesivamente;

hasta que, llegando á los últimos términos, será $c\times d$ la suma, representada tambien por $d\times c$. Por lo cual, podemos establecer la ecuacion

$$d\times c=c\times d,$$

cuya significacion es, que *dados los dos factores para la multiplicacion, se puede tomar por multiplicando cualquiera de ellos, y por multiplicador el otro, sin que por ello padezca el producto variacion alguna.* Segun esto, 5×2 es lo mismo que 2×5, en conformidad con la tabla pitagórica; asi como 371×8 equivale á 8×371, conforme al párrafo final del artículo (28); y por último, 527×3841 lo mismo que 3841×527.

4.ª En el artículo (31) hemos demostrado, que siendo d y c los dos factores que dan el producto N, se verifican las dos equivalencias

$$(d\times10....)\times c=N\times10.....;$$
$$d\times(c\times10....)=N\times10.....;$$

y que por consiguiente multiplicar un factor por la unidad cabal de cualquiera orden, es lo mismo que multiplicar el otro, pues de ambos modos el producto resulta multiplicado tambien por la misma unidad. Ahora vamos á dar estension á este principio, siendo cualquiera el número por quien se multiplique uno de los factores del producto.

Para esto espresemos de un modo general el concepto de la multiplicacion, con la equivalencia que se admitió,

$$d\times c=N.$$

Desde luego se puede sentar como verdad, que el multiplicar por un número n cualquiera, el producto indicado ($d\times c$), es lo mismo que multiplicar por n el producto efectivo N, pues de ambos modos equivale á la suma de tantos términos iguales á N como unidades tenga n, y asi (3. 6.º) admitiremos la equivalencia

$$(d\times c)\times n=N\times n.$$

Veamos ahora lo que significa la espresion $(d\times c)\times n$. Segun está escrita, equivale á n veces el polinomio $(d+d+d+d....$

hasta c veces); ó bien á la suma que resultaria de entrar por sumando n veces este polinomio: y supongamos indicada la operacion formando columnas los términos como en aritmética (3.ª). La suma de la primera columna valdrá $d\times n$; la de las dos primeras $(d\times n)\times 2$; la de las tres primeras $(d\times n)\times 3$; etc.: y como hay c columnas, la suma total equivaldrá á $(d\times n)\times c$; cantidad que fue presentada tambien bajo la forma $(d\times c)\times n$. Por tanto, está demostrado que $(d\times c)\times n$, y por consiguiente $N\times n$, es lo mismo que $(d\times n)\times c$. Análogo raciocinio se puede hacer en cuanto á ser $(c\times d)\times n$ lo mismo que $(c\times n)\times d$. Y como $d\times c$ equivale á $c\times d$ por lo demostrado en la consecuencia 3.ª, y de consiguiente $(d\times c)n$ á $(c\times d)\times n$; se sigue que $(d\times n)\times c$ y $(c\times n)\times d$ son iguales entre sí, y á $N\times n$, como se espresa en

$$(d\times n)\times c=(c\times n)\times d=N\times n.$$

Lo cual nos dice, que *multiplicar por cualquiera número* n *uno de los factores del producto, equivale á multiplicar este por el mismo número* n, *y que asi permanece invariable, el otro factor.*

5.ª Si el multiplicador c representa una suma de dos partes a y b, siendo d el multiplicando, la espresion de este caso será $d\times(a+b)$, y significa la suma

$$(d+d+d+\ldots\ldots \text{ hasta } a+b \text{ veces}).$$

Si la espresion fuera $d\times a+d\times b$, equivaldria á

$$(d+d+\ldots\ldots\ldots \text{ hasta } a \text{ veces})+(d+d+\ldots\ldots \text{ hasta } b \text{ veces}):$$

y como, juntas estas dos sumas, contendrian al término d tantas veces cuantas unidades valga $a+b$, se sigue que es

$$d\times(a+b)=d\times a+d\times b:$$

ó bien, que *el producto de dos cantidades equivale á la suma de productos que resultan de multiplicar la una por cada parte de la otra*: demostracion de la regla de multiplicar cuando sea polidígito uno de los factores (28). Si el otro factor d tambien estuviere descompuesto en dos sumandos h y k, seria $h+k$ equivalente á d; y sustituyendo $h+k$ por d en la igualdad que acabamos de hallar, viene á ser

$$(h+k)\times(a+b)=(h+k)\times a+(h+k)\times b.$$

Los dos productos indicados que hay despues del signo de igualdad serán, por el teorema precedente,

$$h\times a+k\times a \text{ y } h\times b+k\times b;$$

y sustituyendo estos por sus equivalentes en la igualdad anterior, nos resultará

$$(h+k)\times(a+b)=h\times a+k\times a+h\times b+k\times b.$$

En donde se halla cifrado el teorema, de que *el producto de dos factores compuestos de sumandos, es la suma de productos que resultan de multiplicar cada sumando del uno por cada uno del otro*: demostracion de la regla de multiplicar un polidígito por otro (29).

6.ª Segun la definicion de factor del producto (26), en la oracion $5\times7=35$, son 5 y 7 factores de 35: en $82\times23=1886$, son 82 y 23 factores de 1886; pero no se entienda por esto, que aquel producto pueda dejar de tener otros factores que el multiplicando y el multiplicador que le produjeron en una operacion, ó bien, que aquel número no pueda ser producido tambien de otros dos factores. El número 35 ciertamente no puede venir, segun manifiesta la tabla pitagórica, sino de 5×7 ó de 1×35: pero otro número que escojamos, como por ejemplo 24, puede venir de

$$6\times4, \text{ de } 8\times3, \text{ de } 12\times2, \text{ y de } 24\times1.$$

LECCION IV.

Dividir con enteros.

34. El problema de restar una misma cantidad varias ve-

ces de otra mayor, hasta que la diferencia final sea mas diminuta que el restador, hizo que se inventase el cálculo de *dividir* ó *partir* una cantidad en todas las partes iguales de que sea capaz, siendo dado el valor que ha de tener cada parte. Proponiéndose, por ejemplo, el número 28 para dividirle en partes, de modo que sea 4 el valor de cada parte; lo primero que ocurre es restar 4 de 28, en seguida 4 del residuo, y así sucesivamente, como en las restas consecutivas adjuntas,

$$\begin{array}{r}28\\4\\\hline 24\end{array},\quad \begin{array}{r}24\\4\\\hline 20\end{array},\quad \begin{array}{r}20\\4\\\hline 16\end{array},\quad \begin{array}{r}16\\4\\\hline 12\end{array},\quad \begin{array}{r}12\\4\\\hline 8\end{array},\quad \begin{array}{r}8\\4\\\hline 4\end{array},\quad \begin{array}{r}4\\4\\\hline 0\end{array}$$

Por el resultado vemos que 4 está contenido 7 veces en 28: aunque á la verdad hemos necesitado un procedimiento muy prolijo, capaz de cansar la paciencia mas completa cuando sea muy grande el número que se ha de partir y pequeña cada parte.

Pero sabemos (19) que la resta es operacion inversa de la suma, y que la de multiplicar es una sumacion breve de cantidades iguales (26); por la cual, el número 28 equivale á $4+4+4+4+4+4+4$, ó mas brevemente á 4×7: luego, el problema actual será, *dado el número* 28 *y la parte* 4, *hallar el número de veces que* 4 *está contenido en* 28: problema inverso del de la multiplicacion.

A veces la cantidad que se propone para dividir no contiene cabal número de veces á la parte, como por ejemplo 27 á 4, pues las restas nos conducen hasta la impracticable de restar 4 de 3;

$$\begin{array}{r}27\\4\\\hline 23\end{array},\quad \begin{array}{r}23\\4\\\hline 19\end{array},\quad \begin{array}{r}19\\4\\\hline 15\end{array},\quad \begin{array}{r}15\\4\\\hline 11\end{array},\quad \begin{array}{r}11\\4\\\hline 7\end{array},\quad \begin{array}{r}7\\4\\\hline 3\end{array},\quad \begin{array}{r}3\\4\\\hline \end{array};$$

y así, 27 equivale á 4×6, mas el residuo 3.

Pudiéramos esponer innumerables ejemplos de la misma naturaleza que uno ú otro de los dos, que se acaban de presentar, y aun de impracticables desde su principio, y en que fuese mayor ó menor la cantidad que se hubiere de partir, y mayor ó menor tambien la parte; problema que se pronuncia diciendo, *dividir una cantidad por otra*: pero sin que sea necesario detenernos mas, podemos establecer que, *dividir una cantidad por otra es hallar el número que esprese las veces que esta última está contenida en la primera.* El número que se ha de partir se llama *dividendo;* la parte ó bien el número por quien se ha de dividir se llama *divisor;* y el número que espresa las veces que el divisor está contenido en el dividendo se llama *cociente.* Asi, en 28 dividido por 4 es dividendo el 28, divisor el 4, y cociente el 7. En 27 dividido por 4 es dividendo el 27, divisor el 4, cociente entero el 6, y *resto del cociente* el 3.

35. En la definicion misma del cálculo de partir que acabamos de establecer está comprendido el principio, de que *el dividendo equivale al producto que resultaria de multiplicar el divisor por el cociente, salvo el resto final que pueda haber del dividendo, y que nunca puede igualar ni esceder al divisor.* De suerte, que el problema de dividir es inverso del de multiplicar, puesto que se trata de hallar uno de los factores del producto, asi como en la multiplicacion se trata de hallar el producto de dos factores dados. Por tanto, podemos aqui formar oracion con las tres cantidades del cálculo de dividir, en la forma que se adoptó para formarla con las tres de la multiplicacion, como, $28=4\times7$, y en general cuando no hay resto, siendo N el dividendo, d el divisor y c el cociente, bajo la forma

$$N=d\times c:$$

asi como $27=4\times6+3$, y en general habiendo resto r, bajo la forma (3. 2.°)

$$N=d\times c+r.$$

Pero segun estan escritas estas dos oraciones, espresan en lenguage del cálculo el principio que acabamos de pronunciar en lengua vulgar, mas no el actual problema, de dividir un número N dado, por otro d dado tambien, para encontrar el número c desconocido y el resto r, si es que hay.

El *problema de dividir una cantidad por otra se espresa escribiendo el divisor debajo del dividendo, separados con* *una raya*, como $\frac{27}{4}$, y en general $\frac{N}{d}$. Esta forma de la escritura indicará ciertamente una operacion impracticable, si el dividendo es menor que el divisor, como en $\frac{3}{4}$; mas no por eso deja de ser tambien útil para indicar tales operaciones, que nos ofrecerán el basto asunto del cálculo de números fraccionarios. Por ahora basta decir, que despues de haber hallado el cociente c de la division $\frac{N}{d}$, y al mismo tiempo el resto r, si le hay, se escribe la oracion algébrica en la forma $\frac{28}{4}=7$; $\frac{27}{4}=6+\frac{3}{4}$; y en general

$$\frac{N}{d}=c \quad \text{ó} \quad \frac{N}{d}=c+\frac{r}{d}.$$

Los aritméticos han convenido en ordenar de otra manera, el dividendo, el divisor, el cociente y el resto final, para ejecutar este cálculo con guarismos. Escriben el dividendo y en seguida el divisor separado con dos rayas en escuadra, como

$$28\,\underline{|\,2}\ ;$$

debajo de la raya del renglon escriben el cociente, como

$$28\ \begin{array}{|l}4\\ \hline 7\end{array}\ :$$

y si despues de concluida la operacion hay resto final, escriben éste á continuacion del entero del cociente, como

$$27\ \begin{array}{|l}4\\ \hline 6^3/_4\end{array}\ .$$

Bien se puede conocer que el cociente $6\frac{3}{4}$ significa lo mismo que $6+\frac{3}{4}$ usando del signo $+$: y así, la norma para la colocacion del dividendo N, del divisor d, del cociente c, y del resto r, si le hay, será para el cálculo aritmético,

$$\begin{array}{l|l} N & d \\ \hline & c+\frac{r}{d}. \end{array}$$

Con las ideas que se han desenvuelto acerca de la division de números enteros, no será difícil ya el deducir las reglas para ejecutar la operacion en todos los casos que se puedan ofrecer, y de que presentaremos ejemplos en los artículos que siguen, fundando siempre nuestro cálculo en el principio de que el dividendo es producto del divisor por el cociente, tal vez con algun esceso, que nunca debe valer tanto como el divisor.

36. Divisor dígito. Puesto que se trata de hallar el número que multiplicado por el cociente dé un producto igual á el dividendo, sin que en éste sobre un residuo tan grande ó mayor que el divisor, ni falte la mas mínima cantidad para valer tanto como dicho producto: la tabla pitagórica dará el cociente, siempre que deba resultar número dígito.

Proponemos los ejemplos, dividir 72 por 9; dividir 78 por 9: dividir 35 por 7; dividir 6 por 3; dividir 9 por 2; y los cálculos respectivos conducen á los resultados que se piden;

$$\begin{array}{l|l} 72 & 9 \\ \hline & 8 \end{array}\;;\quad \begin{array}{l|l} 78 & 9 \\ \hline & 8\frac{6}{9} \end{array}\;;\quad \begin{array}{l|l} 35 & 7 \\ \hline & 5 \end{array}\;;\quad \begin{array}{l|l} 6 & 3 \\ \hline & 2 \end{array}\;;\quad \begin{array}{l|l} 9 & 2 \\ \hline & 4\frac{1}{2} \end{array}.$$

Porque, en el primer ejemplo, con el factor 9 el 8 es quien da el producto 72: en el segundo, con el factor 9 el mayor contenido en 78 es el 8, y sobran 6 unidades al dividendo: en el tercero, con el factor 7 es el 5 quien da el producto 35: en el cuarto, el factor 3 con el 2 da el producto 6; y en el quinto, el factor 4 es el mayor que con el 2 cabe en 9, quedando el resto 1. Despues de hacer, mediánte la tabla pitagórica, el tanteo del guarismo que conviene para cociente, se escribe el producto debajo del dividendo para hacer la sustraccion, con objeto de hallar el resto, si lo hay, y siempre con el de cerciorarse *de que el producto no es mayor que el dividendo, ni tan pequeño que el resto iguale ó esceda á el divisor*, estremos que sirven de guia en esta clase de operaciones; como se ve practicado en los ejemplos que aqui se presentan;

$$\begin{array}{r|l} 72 & 9 \\ \cline{2-2} 72 & 8 \\ \hline 00 & \end{array}; \quad \begin{array}{r|l} 78 & 9 \\ \cline{2-2} 72 & 8 \\ \hline 6 & \end{array}; \quad \begin{array}{r|l} 35 & 7 \\ \cline{2-2} 35 & 5 \\ \hline 00 & \end{array}; \quad \begin{array}{r|l} 6 & 3 \\ \cline{2-2} 6 & 2 \\ \hline 0 & \end{array}; \quad \begin{array}{r|l} 9 & 2 \\ \cline{2-2} 8 & 4 \\ \hline 1 & \end{array}.$$

Si el dividendo es tan grande respecto del divisor dígito, que el cociente deba ser número polidígito; la tabla pitagórica nos dará tambien las cifras del cociente de una en una. En efecto, sea 68 el dividendo y 2 el divisor; y desde luego se nota que el cociente debe tener mas de una cifra, porque el mayor dígito, que es 9, da con el factor 2 el producto 18; lo cual nos indica que 2 está contenido en 68 cierto número de decenas de veces, ademas de unidades de veces. Para encontrar estos números recordemos (35 y 28), que el dividendo es una suma de productos parciales, que resultan de multiplicar el divisor por las unidades y por las decenas del cociente (35) y (28): luego, la division de 68 por 2 se deberá tambien hacer, dividiendo primero el 6 por el 2 y despues el 8 por el 2, teniendo cuidado de colocar las cifras de los cocientes parciales en sus respectivos lugares del total cociente. Y puesto que son generales las demostraciones de los artículos (35 y 28), se sigue *que el método de este ejemplo debe ser general tambien.* Procediendo á la ejecucion del cálculo indicado

$$\begin{array}{r|l} 68 & 2 \\ \cline{2-2} \end{array},$$

diremos; el cociente de 6 por 2 es 3. Escríbase el 3 debajo de la raya, y multiplicando despues el divisor 2 por el cociente 3 decenas, escríbase el producto 6 decenas debajo del dividendo para la resta parcial; y lo hecho hasta el presente será

dividendo	68	2	divisor
2×3 producto	6	3	
resto primero	0.		

Bájese ahora el 8 unidades para dividir 8 por 2; escríbase el cociente 4 unidades en seguida del cociente de decenas, como se ve por el tipo; y últimamente, multiplicando el divisor por las unidades, réstese su producto de la cantidad 8 unidades, que ahora es dividendo, para cerciorarse del cociente 4:

68 |2
6 34 ;
08

dividendo...............	68	2	divisor
3×2 producto primero	6	34	cociente
dividendo parcial.......	08		
4×2 producto segundo	8		
resto segundo...........	0.		

La operacion está concluida, y el resultado nos dice que 2 está contenido 34 veces en 68 cabalmente, porque el resto final es cero. Claro está que si el dividendo hubiera sido 69 ó 67, habria resultado el resto 1, y el cociente 34 ó 33.

Muchas veces acontece haber tambien resto en alguna de las divisiones parciales que no sea la final, asi como en las multiplicaciones al producto parcial se agregaron las unidades de aquel orden provenidas de la operacion análoga precedente. En el ejemplo de dividir 78 por 2, el primer paso del calculo nos da el resto 1 de decenas. Pajando el guarismo 8 á el lado del 1 resultan 18 unidades para dividendo, y el cálculo completo da cociente cabal.

78 |2
6 3 ;
1

78 |2
6 39 ;
18
18
00

El procedimiento de unir el resto parcial á las unidades del orden menor inmediato del dividendo, para hallar el guarismo consecutivo del cociente, es legítimo y se ha de seguir siempre: porque, la division tiene por objeto el deshacer los productos parciales; y el agregar aqui los residuos de unidades mayores á las menores inmediatas, es restituirlos al origen de donde fueron segregados por la multiplicacion (28). Pues que, si se tratase de multiplicar 39 por 2, el producto parcial 9 por 2 daria 8 unidades y 1 decena, la cual se deberia agregar á el producto de 3 decenas por 2 unidades.

Si el dividendo es tan grande respecto del divisor dígito, que deban resultar para el coeiente unidades mayores que decenas, aquel contendrá indudablemente una suma de productos parciales (35 y 28) provenidos de multiplicar el divisor digito por cada una de las cifras del cociente: y la cuestion es hallar cada una de estas cifras. No cabe duda en que debemos *empezar por las de orden mayor, siguiendo las reglas establecidas para el caso de tener dos cifras el cociente*, pues aquellos raciocinios, fundados en la generalidad de los artículos (35 y 28), alcanzan tambien al caso actual.

Sirvan de ejemplo los dos problemas que siguen: dividir 4571 por 3; y dividir 94805 por 7. Escritos los problemas como se sabe,

4571 | 3 ,   94805 | 7 ;

empezaremos las operaciones dividiendo la cifra de mayor órden por la del divisor, como si estuvieran solas; y despues bajaremos consecutivamente una á una las demas cifras al lado de los restos parciales, para ir hallando las demas cifras del cociente.

Dividendo........	4571	3	divisor
producto primero.	3	1523,	cociente
dividendo parcial..	15		
producto segundo.	15		
dividendo parcial..	007		
producto tercero..	6		
dividendo parcial..	11		
producto cuarto...	9		
resto cuarto......	2		

dividendo........	94805	7	divisor
producto primero.	7	13543	cociente
dividendo parcial..	24		
producto segundo.	21		
dividendo parcial..	38		
producto tercero..	35		
dividendo parcial..	30		
producto cuarto...	28		
dividendo parcial..	25		
producto quinto...	21		
resto quinto......	4		

En el primer ejemplo ha resultado el resto final 2, y en el segundo el 4; lo cual manifiesta que al dividendo de aquel sobran 2 unidades, despues de contener cabal número de veces al divisor 3; y que al dividendo del ejemplo segundo sobran 4 unidades, despues de contener cabal número de veces al divisor 7.

En los ejemplos anteriores nos hemos librado de una dificultad que se presenta muy comunmente en la division, y es el ser alguno de los dividendos parciales menor que el divisor, como por ejemplo, en 382 | 5, pues no cabe 5 en 3 vez alguna. En cuyo caso se debe tomar como dividendo primero el conjunto 38 de las dos primeras cifras, que dará el cociente 7, como testifica la diferencia 3 de la resta en el cálculo que presentamos hecho hasta aquí. Bájese ahora el 2 á el lado del 3, y concluida la operacion en la forma ordinaria, será 76 el cociente completo, aunque no cabal por el sobrante 2 que se ve.

$$\begin{array}{l|l} 382 & 5 \\ \hline 35 & 7 \\ \hline 3 & \end{array} \;; \qquad \begin{array}{l|l} 382 & 5 \\ \hline 35 & 76 \\ \hline 032 & \\ \ \ 30 & \\ \hline \ \ 02 & \end{array};$$

Otras veces ocurre tambien esta dificultad en algun otro dividendo, como en este caso de division que proponemos por ejemplo: pues habiendo bajado el 3 á el lado del resto cero, no contiene el dividendo 3 al divi-

$$\begin{array}{l|l} 2431 & 4 \\ \hline 24 & 6 \\ \hline 003 & \end{array}$$

sor 4, vez alguna. En vista de tal suceso, póngase un cero á continuacion del 6 en el cociente; bájese el 1 del dividendo á el lado del 3; y será 31 el dividendo que ha de dar la tercera cifra de cociente. Desde aquí se procede por los pasos ordinarios hasta concluir la operacion.

2431	4
24	607
031	
27	
3	

Finalmente, haremos observar que en los casos de esta clase jamas puede haber necesidad de tomar para la primera division parcial mas que dos guarismos del dividendo; pues aunque estos fuesen los menores posibles, que son 10, y el guarismo divisor fuese 9 que es el mayor posible, cabe éste una vez en aquel.

Con las luces que nos han dado las prácticas de los ejemplos propuestos, nos hallamos en estado de comprender la regla general fundada en los artículos (35 y 28), de que *para dividir cualquiera número de varios guarismos, por otro de un solo guarismo, se deben hallar los guarismos del cociente uno á uno empezando por los del orden mayor, para lo cual se hacen divisiones parciales: se toma para la primera por dividendo el guarismo ó los dos guarismos de mayor orden del total propuesto, y se toma por dividendo sucesivo el resto anterior agregado á la cifra siguiente del dividendo total.* Al hacer el tanteo de cada cociente parcial hay que atender á los dos estremos que se señalaron, y que ahora volvemos á definir para recuerdo.

1.º *Debe ser tal el cociente, que multiplicado por el divisor, no haga que el producto esceda al dividendo parcial.*

2.º *Dicho producto debe ser el mayor posible, y para ello tambien el cociente*, pues de otro modo el resto parcial contendria al divisor alguna vez; y por tanto, *el resto ha de ser menor que el divisor.*

37. Divisor polidígito. Pasemos á ejercitarnos con divisor compuesto de varias cifras, teniendo igual ó mayor número de ellas el dividendo, como se requiere por condicion precisa. *Lo demostrado en los artículos* (35 *y* 29) *es el fundamento de esta operacion*, sirviendo tambien de guia la regla del (36).

Con este objeto se propone dividir 517 por 24, operacion que se anota en la forma ordinaria 517 | 24. Para la ejeeucion se toma por dividendo primero el conjunto 51 que tiene tantas cifras como el divisor 24; y al tanteo se advertirá que 2 cabe en 5 dos veces y sobra 1; y este 1 con 1 siguiente hace 11, que tambien admite á la 4 dos veces. En vista del tanteo, diremos, que 2 es la primera cifra del cociente, y la escribiremos en su lugar

$$\begin{array}{r|l} 517 & 24 \\ \cline{2-2} & 2. \end{array}$$

Multiplíquese todo el divisor por el cociente parcial 2 que se acaba de hallar, y restando el producto 48 del dividendo parcial 51, será 3 el residuo primero. Bájese á la fila de la diferencia 3 la siguiente cifra 7

$$\begin{array}{r|l} 517 & 24 \\ \cline{2-2} 48 & 2 \\ \hline 3 & \end{array}$$

del dividendo, con lo cual será 37, el nuevo dividendo, cuya cifra primera contiene una vez á la primera del divisor y sobra 1; y la agregacion de este uno al 7 siguiente hace 17, y tambien admite una vez y aun mas á la cifra 4 segunda del divisor. De suerte, que por el tanteo sabemos que 1 es la segunda cifra del cociente. Escrita, pues, la cifra 1 en el cociente, y multiplicándola por todo el divisor, hallaremos la diferencia final 13; la cual, por ser menor que todo el divisor 24, asi como lo fue tambien la diferencia anterior 3, nos da certeza de estar bien deducidas las cifras del corriente 21.

$$\begin{array}{r|l} 517 & 24 \\ \cline{2-2} 48 & 21 \\ \hline 037 & \\ 24 & \\ \hline 13 & \end{array}$$

En el cálculo que se acaba de hacer para hallar la cifra primera del cociente, se han tomado tantas cifras primeras del dividendo, cuantas hay en el divisor, porque la 5, primera del dividendo, admite al menos 2 veces á la 2, primera del divisor. Pero si dicha primera cifra del dividendo no fuese igual ó mayor que la primera del divisor, como sucede en

$\begin{array}{r|l} 365102 & 71 \\ \cline{2-2} \end{array}$, será necesario tomar las tres primeras 365 juntas por primer dividendo, y tantear el cociente parcial, observando que 36 contiene al 7 cinco veces y sobra 1; que 15 admite tambien 5 veces al 1, (y aun mas veces, pero no se altera por esto el cociente parcial á causa de que ha de ser tal que quepa en las dos partidas). Visto que es 5 el cociente parcial primero, escríbase en su lugar; multiplíquese por el 5 todo el divisor, y hállese la diferencia, como hacemos aqui.

```
365102 |71
355    |----
----
010
```

Bajando la cifra siguiente 1 del dividendo á la fila del resto, resulta 101 el dividendo nuevo, en que 10 contiene al 7 una vez y sobran 3, como tambien 31 al 1 una vez y sobran 30: será pues 1 el cociente parcial, y comparando con 101 el producto de 71 por 1, se halla la diferencia 30.

```
365102 |71
355    |----
----    51
0101
  71
----
  30
```

En la operacion subsecuente, bajando á la fila de residuo 30, la cifra cero que sigue en el dividendo total, resulta el nuevo parcial 300, cuya parte 30 contiene al 7 cuatro veces y sobran 2, asi como 20 contiene tambien al 1 las mismas veces á lo menos. Será pues 4 la tercera cifra del cociente, y abanzará el calculo hasta donde se vé aqui.

```
365102 |71
355    |----
----    514
0101
  71
-----
 0300
  284
-----
  016
```

Falta bajar la última cifra 2 del dividendo total á la fila del residuo 16, y hecho el tanteo de 162 dividido por 71, resulta 2 para última cifra del cociente; de modo, que procediendo como hasta aqui. se finalizará la operacion en la forma que se ve, resultando el cociente completo 5142, y el residuo 20 que sobra para ser cabal.

```
365102 |71
355    |----
----    5142
0101
  71
-----
 0300
  284
-----
  0162
   142
  ----
   020
```

De un modo análogo se hace la particion cuando el divisor tiene mas de dos cifras, pues hay que tomar tantas primeras del dividendo como tenga el divisor, si la primera de este cabe una ó mas veces en la primera de aquel; y si no, se tomará una cifra mas del dividendo para dicha primera division parcial.

Sea por ejemplo la cuestion 83705 |3621 : vemos que, por ser 8 mayor que 3, hay que tomar las cuatro primeras cifras 8370, para el primer cociente, que será 2 por caber este número de veces el 3 en 8, el 6 en 23, etc. El residuo primero será 1128, el cual es, como debe, menor que el divisor. Bajando

```
83705 |3621
7242   23
11285
10863
00422
```

á la fila del residuo la cifra 5 final del dividendo propuesto, se tiene el nuevo 11285, con la parte 11 para compararla con la cifra primera 3 del divisor, como se ve en la operacion completa.

En los siguientes casos, hay que tomar para primer dividendo una cifra mas que las que tiene el divisor:

```
190286 |2004         2659790 |8749
18036   94  ;        26247    304
009926               003509
  8016                 0000
  1910                 35090
                       34996
                       00094
```

El segundo de estos ejemplos ofrece un accidente que suele ser muy comun, y consiste en que algun dividendo compuesto de la cifra que se baja y el residuo, sea menor que el divisor, y de resultas el ser cero la cifra del cociente, como sucede aquí, y sucedió en el ejemplo último del artículo precedente; lo cual consiste en haber quedado poca diferencia en la resta.

Por último, presentamos los dos ejemplos que siguen para despues definir la regla general,

```
3059 |24                1487613 |492
24    127 + 11/24       1476     3023 + 297/492
 65                      116
 48                      000
 179          ;          1161
 168                      984
  11                     1773
                         1476
                          297
```

Bastan los ejemplos de este artículo, y el fundamento establecido al principio de él, en virtud de los (35) y (29), para estender y adoptar la regla, de que *en la division de un número polidígito por otro tal, menor precisamente, se toma por dividendo parcial primero el conjunto de tantos guarismos de mayor orden del total, cuantos basten para que sea igual ó mayor que todo el divisor; y cada dividendo parcial sucesivo es el que resulte de agregar al resto anterior el guarismo siguiente del dividendo total.*

38. El método general que se ha seguido de escribir todas las partidas de la division, admite algunas simplificaciones.

1.ª Cuando se adquiere destreza en la práctica segun el método ordinario, suele omitirse el escribir los productos; y entonces, al tiempo de formar estos, hay que hacer de memoria las restas parciales de cifra á cifra, anotando las diferencias en sus lugares respectivos. De este modo, los dos últimos ejemplos que se han propuesto, aparecen segun la forma que ahora los damos:

$$\begin{array}{r|l} 3059 & 24 \\ \hline 65 & 127+\frac{11}{24}; \\ 179 & \\ 11 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1487613 & 492 \\ \hline 1161 & 3023+\frac{297}{492} \\ 1773 & \\ 297 & \end{array}$$

2.ª Cuando terminan con ceros el dividendo y el divisor, se puede suprimir igual número de ellos en ambos, y no por esto varía el cociente; pues, por lo demostrado (33. 4.ª), la igualdad $N=d\times c$ es como $N\times100....=(d\times100....)\times c$, con igual número de ceros en ambas partes. La primera igualdad en forma de division es $\frac{N}{d}=c$;

y la segunda, $\frac{N\times100}{d\times100}=c$:

de suerte, *que el cociente* c *permanece lo mismo, suprimiendo igual número de ceros en dividendo y divisor, cuando los tienen al fin de fila.* Por ejemplo, sea dividendo 47102000, y divisor 235700; escríbanse uno y otro segun la forma de indicar en álgebra la division; el número

$$\frac{47102000}{2359700}, \text{ ó su igual (31) } \frac{471020\times100}{23597\times100},$$

suprimiendo el factor comun se reduce á $\frac{471020}{23597}$

y éste dará, por lo demostrado, el mismo cociente que la division propuesta, pero con menos trabajo. Si se practica el cálculo segun el método abreviado que resulta de no escribir los productos, hallaremos

$$\begin{array}{r|l} 471020 & 23597 \\ \hline 235050 & 19+\frac{22677}{23597}. \\ \hline 22677 & \end{array}$$

39. Aunque, observando las reglas de multiplicar y dividir, son infalibles los resultados, puede quedar al calculador sospecha de haberse equivocado en las operaciones; y en tal caso, las relaciones

$$N=d\times c; \text{ y } \frac{N}{d}=c,$$

entre producto, multiplicando y multiplicador, ó bien entre dividendo, divisor y cociente, enseñan que uno de estos cálculos puede ser empleado para comprobar la exacta ó inexacta ejecucion del otro. *Cuando el cálculo hecho fuere de dividir, multiplíquese el divisor por el cociente; y si el producto que resulte es igual al dividendo, menos el resto, en caso correspondiente, la operacion fue bien hecha.* Inversamente, *cuando despues de haber ejecutado una multiplicacion, se quiere comprobar la verdad, divídase el producto por el multiplicador; y si resulta cociente el otro factor de la multiplicacion, habrá certeza de no haberse equivocado.* Para el ensayo pueden servir los ejemplos de esta leccion y de la precedente, ú otros cualesquiera.

40. La division de números concretos debe hacerse conforme á las reglas que se han dado para los abstractos, puesto que aquella es meramente aplicacion; y la única dificultad que puede haber, estará en la inteligencia de la cuestion por haber sido propuesta en lengua vulgar, como en las que siguen.

1.ª *Vendidos 120 quintales de fierro alzadamente por 9600 reales ¿á cuánto vale el quintal?*

2.ª *Debiendo comprar carbon á 12 reales el quintal ¿cuántos quintales pueden comprarse con el importe del fierro vendido?*

La primera cuestion es hallar el número de veces que 120 quintales estan contenidos en 9600: la segunda, cuántas veces 12 reales están contenidos en 9600; y se propone dividir por distintos divisores un mismo dividendo, como se ve á continuacion:

$$\text{reales } \begin{array}{r|l} 9600 & 120 \text{ quintales} \\ \hline 0000 & 80 \text{ reales} \end{array}\ ;\quad \text{reales } \begin{array}{r|l} 9600 & 12 \text{ reales} \\ \hline 00 & 800 \text{ quintales} \end{array}.$$

En el primer cálculo son de una misma especie el dividendo y el cociente: en el segundo cálculo son de una misma especie el dividendo y el divisor. Las cuestiones de esta leccion se presentan, ya de un modo, ó ya de otro: y ambos estan conformes con lo dicho en la multiplicacion de concretos (32); pues, el dividendo es producto del divisor por el cociente (35), y pudiendo ser multiplicando cualquiera de estos, si fueran abstractos (33, 3.ª), se cumple siempre el ser de una misma especie el multiplicando y el producto.

41. En lenguage algébrico, el problema de dividir una cantidad N por otra d, se espresa en la forma $\frac{N}{d}$ como se dijo al principio de la leccion; y entonces admitimos tambien, que espresando c cociente exacto, la oracion algébrica entre las tres cantidades, N, d, c puede ser escrita bajo cualquiera de las dos formas.

$$N=d\times c \;\text{ y }\; \frac{N}{d}=c, \ldots\ldots.. (*)$$

de las cuales ya hemos usado en el artículo (39): y ahora vamos á deducir con su auxilio otras verdades que interesan mucho.

1.ª Si el factor d es 1, sabemos (33, 1.ª) que $c\times1$ equivale á c; y por tanto N será igual á c, segun la equivalencia primera de las (*). Sustituyendo en la segunda de dichas equivalencias la letra N en lugar de la c, y tambien 1 en lugar de la d, viene á ser

$$\frac{N}{1}=N.$$

Demostracion de que *dividiendo por* 1 *cualquiera número* N, *el cociente es el mismo número*: ó bien, que 1 *es divisor tácito de cualquiera cantidad.*

2.ª Si el factor c es cero, sabemos (33, 2.ª) que dará el producto $d\times0=0$; por lo cual, resulta que N tambien es cero segun la ecuacion primera de las (*); y sustituyendo cero por N y por c en la segunda, viene á ser

$$\frac{0}{d}=0:$$

con lo cual está demostrado, que *cero dividido por cualquiera número da cero para cociente.*

3.ª Por ser $d\times c$ lo mismo que $c\times d$, segun lo demostrado (33, 3.ª): si sustituimos d por c, y c por d, en la segunda oracion de las (*), hallaremos

$$\frac{N}{c}=d;$$

y comparando esta espresion con la segunda de las (*) se ve, que si *el dividendo se divide por el cociente que haya resultado, vendrá por cociente el número que fue divisor.*

Valiéndonos de este principio, la ecuacion $\frac{c}{1}=c$ pueda ser cambiada en $\frac{c}{c}=1$; y por ello resulta, que *la division de cualquiera número por el mismo da* 1 *para cociente.*

4.ª Puesto que un producto contiene dos factores, á lo menos (33, 6.ª), y que dividiendo el producto por uno de ellos resulta de cociente el otro factor, segun la consecuencia precedente; *el problema de averiguar si el número* d *arbitrario es factor del número* N *dado, y cuál es tambien el otro fac-*

tor, se resolverá dividiendo N *por* d: *y será* d *factor de* N *siempre que resulte cociente exacto, asi como siendo* d *factor de* N *resultará cociente sin residuo.*

Dado por ejemplo el número 375 para averiguar si el factor 3 le conviene, y en este caso cuál es el otro factor, se dividirá 375 por 3. Hecha la operacion se verá que en efecto es 3 factor, y con él tambien el número 125.

Si despues de practicar la division, queda resto, será prueba de que el divisor dado no es factor de aquel número. Así sucederá con el divisor 3 y el dividendo 374; porque resultará el resto 2. Sin embargo, el número 374 puede tener algunos otros factores; y en efecto lo son el 4 el 2, &c.; porque, dividiendo 374 por 2 sale cociente cabal. En cuanto al 1, sabemos que es divisor tácito de todo número (1.ª), y que dividiendo este por sí mismo (3.ª) resulta el cociente 1: luego, *son factores de cualquiera número el mismo número y el* 1.

5.ª En la multiplicacion (33, 4.ª) quedó establecido por principio la espresion $d\times(c\times n)=N\times n$: y sustituyendo ahora en la segunda oracion de las (*), la cantidad $c\times n$ por c, y la $N\times n$ por N, resulta,

$$\frac{N\times n}{d}=c\times n:$$

con lo cual está demostrado, que *multiplicar el dividendo por cualquiera número* n, *es lo mismo que multiplicar el cociente por* n; *y que así queda el mismo divisor*: ó bien, *que tanto mayor es el cociente cuanto mayor sea el dividendo, con tal que permanezca el mismo divisor.*

Tambien es cierta (33, 4.ª) la espresion

$$(d\times n)\times c=N\times n;$$

que segun la forma de la segunda ecuacion de las (*), viene á ser

$$\frac{N\times n}{d\times n}=c:$$

comparando ésta con $\frac{N\times n}{d}=c\times n$ vemos, que *tanto me-*

nor cociente sale cuanto mayor es el divisor, subsistiendo invariable el dividendo.

Ademas es de observar, que las espresiones $\frac{N}{d}$ y $\frac{N\times n}{d\times n}$ son equivalentes, por iguales á una tercera c, y que la segunda proviene de multiplicar por una misma cantidad n el dividendo y el divisor. Luego, *no se altera el valor del cociente aunque se multipliquen dividendo y divisor simultáneamente por una misma cantidad.*

6.ª Siendo N y N' dos dividendos, y d el divisor de ambos; si $\frac{N}{d}$ da cociente cabal c, y $\frac{N'}{d}$ tambien da cociente c' cabal, tendremos las igualdades

$$\frac{N}{d}=c \text{ y } \frac{N'}{d}=c'.$$

Añadiendo á cantidades iguales otras iguales deben resultar todos iguales (3, 6.º); y por esto será

$$\frac{N}{d}+\frac{N'}{d}=c+c'.$$

Tambien á las igualdades $\frac{N}{d}=c$ y $\frac{N'}{d}=c'$ se puede dar la forma siguiente, conforme á la primera de las (*),

$$N=d\times c \text{ y } N'=d\times c':$$

y por el principio fundamental citado, será

$$N+N'=d\times c+d\times c'.$$

En esta espresion la suma de productos $d\times c+d\times c'$ equivale á $d\times(c+c')$, segun el artículo (33, 5.ª); y por tanto será

$$N+N'=d\times(c+c'):$$

espresion, que por el concepto de ser $N+N'$ dividendo, d divisor, y $c+c'$ cociente, recibe la forma

$$\frac{N+N'}{d}=c+c'.$$

Luego, por iguales á $c+c'$ lo serán entre sí las que á continuacion se ponen,

$$\frac{N}{d}+\frac{N'}{d}=\frac{N+N'}{d}:$$

lo cual manifiesta que *el cociente de una division, en que el dividendo es la suma de dos partes divisibles por un divisor dado, equivale á la suma de cocientes de dichas partes divididas por el mismo divisor que el todo.* El teorema que se acaba de pronunciar es el fundamento de la division que se ha hecho para encontrar los cocientes polidigitos (36) y (37), puesto que la fila de guarismos es un polinómio abreviado (18). Ejemplo de esto es $\frac{45}{3}$, que equivale á $\frac{30+15}{3}$ y á $\frac{30}{3}+\frac{15}{3}$, que da la suma de cocientes $10+5$, igual al cociente 15 de $\frac{45}{3}$.

LECCION V.

Descomponer el número entero en todos sus factores simples y compuestos.

42. Dado un número para dividendo, y otro para divisor, sabemos que éste será factor de aquel siempre que resultare cociente exacto (41, 4.ª). En el mismo lugar que se cita vimos que aun cuando no sea factor de aquel número el divisor propuesto, puede serlo algun otro, sin contar con el 1 y su asociado conocido; y aquí se trata de hallar todos los números que sean factores del que se quiere descomponer. Sin duda quedaria resuelto el problema dividiendo el número sucesivamente por 1, por 2, por 3, &c, hasta que fuese divisor el mismo dividendo; pero ciertas consideraciones que haremos aquí, nos dispensarán de hacer tantas operaciones para lograr el objeto.

Se llama número *primero ó simple* aquel que no tiene mas factores que él mismo con el 1, y se llama *número compuesto* el que ademas de tener estos factores, tiene otro, y de consiguiente su apareado. Los números simples son 1, 2, 3, 5, 7,

::

11, 13, 17, &c.; y todos los de otra clase son compuestos, como 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14.... &c. Los factores de todo número compuesto serán simples ó compuestos; de suerte, que si se descompusieran los compuestos, y lo mismo, en caso necesario los que dieren estos al fin se habia de llegar á solos factores simples.

Este raciocinio, en que se advierte un medio para descomponer el número en factores simples y compuestos, nos indica otro modo seguro para descomponerle de manera que ninguno de ellos quede oculto: pues del raciocinio resulta, que *si hallamos primeramente por medio de la division todos los factores simples que tenga el número, por el orden de menor á mayor, y despues multiplicamos estos de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro, etc., hasta llegar á un producto que no esceda al número propuesto, indudablemente aquellos y estos factores serán todos los que pertenezcan al tal número.*

Empecemos dividiendo por 1; pero sin que sea necesario cansarnos, bien sabido es que el factor 1 pertenece á todo número, y esto cuantas veces se quiera (33, 1.ª). Suprimiendo pues tan inútil trabajo, inténtese dividir N por 2; y si da cociente c exacto, sin duda es 2 factor; y por ello

$$N=2\times c.$$

Antes de proceder á la indagacion del factor 3 simple, que sigue al 2 en el orden de menor ó mayor, téngase presente que el factor 2 puede serlo mas de una vez en N: y esto se sabrá dividiendo el cociente c por el mismo divisor 2, pues que si de aquí saliere cociente cabal c', aquel divisor será dos veces factor del número propuesto. Porque, de la primera operacion resulta que es cierta la espresion

$$N=2\times c;$$

y de la segunda, que tambien es cierta la espresion

$$c=2\times c':$$

luego, sustituyendo por c su igual $2\times c'$ en la primera igualdad, será $N=2\times 2\times c'$.

Si dividiendo el cociente último c' por el mismo divisor 2 sale otro cociente c'' exacto, será

$$c'=2\times c'',$$

y de resultas $N=2\times2\times2\times c''$.

Asi proseguiremos hasta que resulte un cociente de quien no fuere 2 divisor, y supongamos que sea c'' este cociente.

La cuestion está ya reducida á indagar si en N entra por factor una ó mas veces el número simple 3, que sigue al 2; pero veámos si buscando el factor 3 en c'', se abrevia la operacion. Dividiendo c'' por 3; si 3 resulta factor de c'' con el cociente c''', será

$$c''=3\times c''' \text{ y } N=2\times2\times2\times\ldots\times3\times c''';$$

ó bien, que si 3 es factor de c'' lo será tambien de N. Lo inverso es tambien cierto; porque, si 3 es factor de N con el cociente C, será $N=3\times C$; é igualando los dos valores de N, sale

$$2\times2\times2\times\ldots\times3\times c'''=3\times C$$

ó bien, $C=2\times2\times2\times\ldots\times c'''$.

Luego, el cociente que resultaria de dividir N por 3 en caso de ser 3 factor, es producto de los factores hallados ya, y del cociente c''' que resulta de ser 3 factor de c''; ó en otro lenguage, *que si 3 es el factor de* N, *lo ha de ser precisamente de* c'': y como la division $\frac{c''}{3}$ es mas simple que la $\frac{N}{3}$, porque c'' es menor que N, *conviene hallar el factor 3 dividiendo* c''.

Divídase, pues, c'' por 3, y si da cociente c''' exacto, divídase c''' tambien por 3, y asi sucesivamente hasta encontrar un cociente que no sea divisible por 3; cociente que aqui espresamos de un modo general con la nota $c^{(n)}$ indicando (n) cualquiera número de tildes de c, segun el concepto que se las ha dado.

Estamos en el caso de averiguar si 5 es factor de N; mas, la demostracion del párrafo anterior aplicada al caso actual nos hará ver, que conviene dividir $c^{(n)}$ por 5 mas bien que dividir N por 5, á causa de que si 5 es factor de N lo ha de ser precisamente de $c^{(n)}$.

Sin que sea necesario proseguir en esta analisis, recorriendo la escala de todos los números simples que pueden ser factores del número propuesto, el camino trazado hasta aqui basta para dirigirnos en todo el curso de las operaciones: y en consecuencia establecemos la regla de que, *para descomponer* *un número en todos los factores simples que tenga, se intenta primeramente la division del número por 2, y si da cociente exacto se divide éste por 2, y así sucesivamente hasta encontrar un cociente de quien 2 no sea factor.* En seguida *se empiezan operaciones análogas con el factor presunto 3 y el cociente final precedente, que será primer dividendo. Y el mismo órden se ha de seguir con cada número simple consecutivo al de la operacion que preceda.*

43. Los aritméticos han convenido en escribir las cantidades como en el siguiente caso, de hallar los factores simples del número 840. Los divisores van escritos á la derecha de los dividendos, separados con la raya; y se ve que el número propuesto es divisible por 2, como tambien el cociente 420 y el 210; mas, el cociente 105 no: por lo cual se procede á intentar la division por 3, que

$$\begin{array}{r|l} 840 & 2 \\ 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

produce el cociente 35. No siendo éste divisible por 3, se intenta por 5, y resulta el cociente 7, que no es divisible por 5, y sí por 7; concluyéndose aquí las operaciones del problema de hallar los factores simples de 840, y son todos los que se ven escritos en la columna de la derecha de la raya. No cabe duda en que solos ellos tienen la cualidad esencial de ser factores simples del número propuesto, por lo demostrado en el artículo precedente.

Falta encontrar los factores compuestos de cada par de simples ó de dos en dos, como tambien de tres en tres, de cuatro en cuatro, &c. Las séries de factores de cada órden, ó de productos binarios, ternarios, cuaternarios, &c., se escriben á la derecha de la série de factores simples, del modo siguiente:

840	2
420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	

4; 6; 10; 14;	el 2 por los que siguen
15; 21;	3 por los que siguen
35	5 por los que siguen
8; 12; 20; 28;	2×2 por los que siguen
30; 42;	2×3 por los que siguen
70;	2×5 por los que siguen
105	3×5 por los que siguen
24; 40; 56;	2×2×2 por los que siguen
60; 84;	2×2×3 por los que siguen
140;	2×2×5 por los que siguen
210	2×3×5 por los que siguen
120; 168;	2×2×2×3 por los que siguen
280;	2×2×2×5 por los que siguen
420	2×2×3×5 por los que siguen
840	2×2×2×3×5 por los que siguen

En vista de la tabla que resulta, fácil es comprender el método de las operaciones para cualquiera caso que se propusiere.

Puede suceder que alguno ó algunos de los números simples dejen de ser factores, y entonces tampoco se escriben; como en el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{r|l|l|l}
651 & 3 & & \\
217 & 7 & 21 & \\
31 & 31 & 93,\ 217 & 651. \\
1 & & &
\end{array}$$

Si el número propuesto es simple, en vano se intentará el buscar factores; mas, por desgracia hasta el dia carecemos de una espresion general que solo pertenezca á los números simples (42), y por ello es inevitable hacer tentativas á fin de averiguar si el que se propone consta ó no de factores. Sin embargo, se debe cesar en el empeño de indagar mas factores del número propuesto N, cuando se haya llegado á conocer que no es factor aquel número simple que multiplicado por sí mismo diere un producto mayor que N. Porque, espresando con d el dicho simple y con d' el otro mayor, será $N<d\times d'$. En este caso se halla, por ejemplo, el número 85: inútil será el investigar factores desde el 10 en adelante, porque $10\times10=100$ es mayor que 85. Escribiéndole para el cálculo segun la

$$\begin{array}{r|l}
85 & 5 \\
17 & 17
\end{array}$$

forma establecida, resulta que solamente 5 y 17 son factores; ademas de 1 y 85.

44. Daremos fin á la leccion con dos demostraciones generales acerca de los factores.

1.ª Sin que sea necesario prevenir el error del que pensáre que un número N sea producto de todos sus factores compuestos, no debemos omitir la justificacion de que N es producto de todos sus factores simples. Sean estos $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ por el orden de menor á mayor, y cada uno cualquiera número de veces, como tambien $c, c', c'', \ldots$ los cocientes de que se habló en el artículo (42); y de consiguiente podemos admitir como allí las ecuaciones consecutivas

$$N=\alpha\times c,\ c=\alpha\times c',\ldots\ldots,\ c'=\beta\times c'',\ c''=\beta\times c''',\ldots\ldots,$$
$$c'''=\gamma\times c^{iv},\ c^{iv}=\gamma\times c^{v},\ldots,\ c^{x}=\delta\times c^{xi},\ c^{xi}=\delta\times c^{xii},\ldots$$

Sustituyendo en la igualdad primera por c, el valor que ésta letra tiene en la segunda igualdad; despues, por c' el que ésta letra tiene en la igualdad tercera; y segun este orden hasta el cociente indivisible, que será último factor simple, resultará

$$N=\alpha\times\alpha\times....\times\beta\times\beta\times....\times\gamma\times\gamma\times....\times\delta\times\delta\times....$$

2.° El método de formar los factores compuestos quedará justificado con el siguiente raciocinio. Por ser factor el $\alpha\times\alpha\times\alpha\times...$, sin duda lo es α como tambien $\alpha\times\alpha$, y $\alpha\times\alpha\times\alpha$, etc., hasta un producto en que α entre todas las veces. Lo mismo se podrá decir de β, y sus productos, y asi tambien de todos los demas factores simples: y como cada uno de los del número se ha de multiplicar por cada uno de los demas, para los factores binarios; cada uno de aquellos por cada factor binario para encontrar los ternarios, cada simple por cada ternario para los cuaternarios, etc.; se sigue que cada término del polinomio

$$1+\alpha+(\alpha\times\alpha)+(\alpha\times\alpha\times\alpha)+....$$

que consta de los factores simples, binarios, ternarios, etc., de α se ha de multiplicar por cada término del polinomio

$$1+\beta+(\beta\times\beta)+(\beta\times\beta\times\beta)+......$$

que consta de los de β; el producto, por cada término del

$$1+\gamma+(\gamma\times\gamma)+(\gamma\times\gamma\times\gamma)+.....;$$

el nuevo producto, por cada uno de

$$1+\delta+(\delta\times\delta)+(\delta\times\delta\times\delta)+.....;$$

y asi sucesivamente. Luego, el problema de hallar los factores compuestos del número N, cuyos simples fueron $\alpha, \beta, \gamma, \delta....$, está cifrado en las multiplicaciones indicadas

$$(1+\alpha+\alpha\times\alpha+....)\times(1+\beta+\beta\times\beta+....)\times(1+\gamma+\gamma\times\gamma+....)\times.....$$

Refiriéndonos al número 840, cuyos factores simples fueron 2,2,2,3,5,7, el problema es ejecutar las multiplicaciones

$$(1+2+4+8)\times(1+3)\times(1+5)\times(1+7);$$

que se hacen, multiplicando el primer polinomio por el segundo, luego el producto de estos por el tercero, despues el producto de los tres por el cuarto, y asi sucesivamente si hubiera mas polinomios debidos á mas factores simples. De multiplicar los dos polinomios primeros resultan ocho factores; de multiplicar estos por el tercero, resultan diez y seis; y por último, de multiplicar los cuatro resultan los treinta y dos factores que se hallaron del número 840, contando este mismo y el 1.

LECCION VI.

Complemento del sistema de numeracion, con el de partes decimales de la unidad simple.

45. Los adjetivos *décuplo* y *decimal* se aplican á nuestro sistema de numeracion; el primero cuando se considera el sistema segun escala ascendente, ó de derecha á izquierda la fila de guarismos; y el segundo adjetivo cuando se considera el sistema segun escala descendente, ó de izquierda á derecha la fila. Pero esta distincion de nombres no ha sido precisa hasta ahora, cuando ya las cuatro reglas de números enteros, y especialmente la division, nos han manifestado que el sistema de numeracion actual está incompleto mientras no se establezca despues de las unidades simples, un orden de otras menores en escala descendente segun el sistema decimal: pues hemos visto, que habiendo ejecutado la particion en algunos casos, ha quedado un resto considerable que no se podia dividir por no conocer unidades menores que la entera simple. Está en efecto completado ya el sistema de numeracion en esta parte, segun vamos á esplicar inmediatamente.

Se dijo en los convenios, que el valor de las cifras en la escala decimal va de mas á menos de izquierda á derecha; esto es, que la espresion 11 significa una decena mas la unidad simple. Concíbase asimismo la idea de otra unidad diez veces menor, ó décima parte de la unidad simple; y escribiendo otro 1 á la derecha de la espresion anterior, separado con una coma, resulta 11,1, cuyo total es una decena, una unidad simple, y una *décima*. Fórmese tambien idea de otra unidad diez veces mas pequeña que la anterior; y escribiendo 1 á la derecha de esta, la espresion es 11,11 ahora, quedando siempre la coma en su lugar, porque es el regulador de la escala; y se leerá una decena, una unidad simple, una décima, y una *centésima*. De este modo se puede continuar sin fin escribiendo unidades consecutivas hácia la derecha de las simples, que sucesivamente valgan diez veces menos que la de su izquierda: y asi resulta una perfecta continuacion del sistema decimal, pues cada cifra del número representa las unidades cuya magnitud depende del lugar que ocupa, decreciendo de izquierda á derecha. Decimos que es continuacion perfecta del sistema de numeracion, porque la idea presenta claramente la facultad de que la parte de fila que sigue á la coma se componga de cualesquiera cifras de dicho sistema, asi como puede componerse la parte que precede á la coma. La espresion 25,8 escrita caprichosamente, por ejemplo, representa 2 decenas, 5 unidades y 8 décimas. Asimismo 2,58 representa 2 unidades, 5 décimas y 8 centésimas, &c.

El convenio establecido aqui de separar con la coma toda la parte del número que sigue á la derecha de las unidades simples, tiene por objeto el distinguir asi la parte de fila que espresa el conjunto de unidades simples, llamada *característica*, de la parte que espresa el conjunto de unidades menores que la simple y que se llama *parte decimal* ó *mantisa*, empezándose desde la coma la escala ascendente de aquellas, y la descendente de estas. La nomenclatura de las unidades nuevas es muy parecida á la que se instituyó para la escala de las enteras: llámanse *décimas*, *centésimas*, *milésimas*, *diezmilésimas*, *cienmilésimas*, *millonésimas*, &c., por su orden desde la mas inmediata á las unidades simples, ó á la característica, hácia la mas remota; asi como decena, centena, millar, decena de millar, centena de millar, millon &c., desde las unidades simples hácia la izquierda.

Entendido esto, no cabe duda en leer una espresion cualquiera del sistema completo; mas, en la pronunciacion cursiva de ella recibe el lenguage una modificacion análoga á la que se esplicó en el artículo (9). Por ejemplo, el número 83,512 se traduce á lenguage vulgar diciendo, ochenta y tres unidades, quinientas y doce milésimas; terminando siempre la diccion con el nombre de la última cifra de cada periodo. En lenguage de la análisis diriamos que dicho número vale 8 decenas, 3 unidades, 5 décimas, 1 centésima y 2 milésimas. Asimismo, 7524,63928 vale siete mil quinientas veinte y cuatro unidades, sesenta y tres mil novecientas veinte y ocho cienmilésimas.

Si enmedio del número faltase alguna de las nuevas unidades, ocupará su lugar el cero, como en las enteras: la espresion 892,35076 se pronuncia, ochocientas noventa y dos unidades, treinta y cinco mil setenta y seis cienmilésimas. Igualmente, 26,00035 significa veinte y seis unidades, treinta y cinco cienmilésimas: 7,03 significa siete unidades y tres centésimas.

Cuando no hay en la cantidad mas que decimales, se pone cero por característica y en seguida la coma: 0,23 representa veinte y tres centésimas: 0,08 representa ocho centésimas: 0,006 representa seis milésimas: &c.

Si al fin de las decimales hay ceros, hacen igual oficio que en los números enteros en cuanto á la pronunciacion: 8,3200 vale ocho unidades, tres mil doscientas diezmilésimas: pronto veremos lo que influyen en cuanto al valor del número.

Con la misma facilidad se escribe con cifras aritméticas una espresion pronunciada en lengua vulgar. Por ejemplo, ciento veinte y cinco unidades, cuatro mil trescientas viente y ocho diezmilésimas, está escrito en 125,4328. Tambien, veinte y tres unidades, quinientas y nueve milésimas, en 23,509. Igualmente, seis unidades y doscientas diezmilésimas, está escrito en 6,0200.

46. Por el principio de la division (35) sabemos que $\frac{1}{10}$ es operacion impracticable, y que son espresiones legítimas $\frac{1}{10}=r$ y $1=10r$. Esta segunda nos dice que r ó su igual $\frac{1}{10}$ es diez veces menor que 1; ó bien que $\frac{1}{10}$ vale una décima parte de la unidad simple. Lo mismo se demuestra que $\frac{1}{100}$ vale una centésima parte de la unidad simple; $\frac{1}{1000}$ la milésima parte de la unidad simple, y asi en adelante. De modo, que $\frac{1}{10}$ y 0,1 son equivalentes espresiones de una décima: igualmente, $\frac{1}{100}$ y 0,01 espresan bajo dos formas una centésima; como tambien, $\frac{1}{1000}$ y 0,001 una milésima, &c.; y la espresion 1,111...., equivale al polinomio

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+....$$

Por la misma razon, indicando con letras las cifras de la escala decimal, será $\frac{m}{10}$ décima parte de m, ó décima parte de la suma de unidades simples que vale m; igualmente, $\frac{n}{100}$ es centésima parte de cuantas unidades simples vale n; y así en adelante. De suerte, que 0,7 y $\frac{7}{10}$ son equivalentes; como tambien 0,04 y $\frac{4}{100}$; de resultas, tambien 0,74 y $\frac{7}{10}+\frac{4}{100}$ son una misma cantidad bajo dos formas; igualmente que 39,528 y

$$39+\frac{5}{10}+\frac{2}{100}+\frac{8}{1000}.$$

Vemos que hay dos modos de escribir el valor de las partes decimales de la unidad simple; bien como enteros en la forma instituida (45), ó bien como division indicada en que sea divisor la unidad seguida de tantos ceros, como cifras tiene la mantisa del número escrito segun la primera forma.

Pero se deja conocer la preferencia de la escritura en forma de números enteros, tanto porque así goza de simplicidad, como porque completa el sistema décuplo de numeracion, pudiéndose con este complemento estender sin fin la fila de cifras hácia la derecha é izquierda de la coma, es decir, espresarse un conjunto de unidades de la escala décupla que comprenda las mayores y las menores imaginables.

47. Se demostró en la division (41, 5.ª) que se pueden multiplicar dividendo y divisor por una misma cantidad: por lo cual, escribiendo cualquiera cifra decimal, como por ejemplo 2 décimas, en forma de la division, hay las equivalencias

$$\frac{2}{10}=\frac{20}{100}=\frac{200}{1000}\text{ \&c.};$$

y segun la forma de enteros, 0,2=0,20=0,200, &c. Demostracion muy sencilla de que *se pueden añadir cuantos ceros se quieran al fin de una espresion decimal escrita en forma de números enteros, sin que varíe su valor.* En efecto, siempre las 2 décimas del ejemplo propuesto existen, y los ceros que siguen espresan cero centésimas, cero milésimas, &c.: además, bien se comprende que son equivalentes entre sí 2 décimas, 20 centésimas y 200 milésimas, pues cada número de estos vale una quinta parte de la unidad entera á que se refiere.

No por esto creamos hay anomalía en el sistema de numeracion que acabamos de completar, antes bien consecuencia inmediata por el caracter que da la coma á cada cifra, sea de la parte característica ó entera, sea de la decimal, segun el lugar que dicha cifra ocupa. Luego, considerando á la coma cual centro á que se refiere un número compuesto de enteros y decimales, puede concluirse que *no se altera el valor de dicho número, aunque se añadan ó quiten ceros al principio y al fin.* Asi, 23.821 es de igual valor que 023,8210, y que 00023,8210, &c.

48. Por el mismo convenio de regular la coma el valor de cada cifra, tanto de la parte entera del número como de la decimal, *no se puede añadir ó quitar cero alguno entre los estremos de una espresion.* En cuanto á la parte característica está demostrado en el sistema de números enteros, y en cuanto á la decimal tambien se ha establecido que el valor de cada

cifra depende del lugar que ocupa respecto de la coma, y cada cero mas ó menos en medio de la fila, hace que se alejen ó se acerquen un puesto á la coma las cifras que le sigan.

49. Por lo mismo es fácil conocer, que si la coma se adelanta un puesto á la derecha, vale despues cada cifra diez veces mas; y si se adelanta dos puestos, vale cada cifra cien veces mas; y mil si gana tres puestos, &c.; é inversamente si se retrasa la coma. Por ejemplo, en 94,37821 vale cada cifra y por ello todo el número diez veces menos que en 943,7821, y cien veces menos que en 9437,821; porque en la primera mudanza han pasado las unidades á decenas, éstas á centenas y éstas á millares, al mismo tiempo que á unidades simples las décimas, á éstas las centésimas y á éstas las milésimas, &c.; y á cien veces mayores en la segunda mudanza. Conclúyese que, *para multiplicar un número por diez, ciento, mil &c., basta mudar la coma á uno, dos, tres....&c. lugares á su derecha: y para dividir segun la misma escala, basta mudar la coma hácia la izquierda hasta el lugar correspondiente.*

LECCION VII.

Sumacion, resta, multiplicacion y division, con enteros y decimales.

50. SUMAR. Ya que en una espresion de enteros y decimales se sigue el orden décuplo, habrán de escribirse los números sumandos, unos bajo de otros, formando columnas las cifras de cada orden, y se hara la suma como en los enteros, por las mismas razones en que se apoyaba su método. Propónese hacer la suma de los tres números 47,013; 0,8257; 349,2031: se colocan como se ha dicho, y el cálculo es como se ve. Empezada la sumacion por

$$\begin{array}{r} 47,013 \\ 0,8257 \\ 349,2031 \\ \hline 397,0418 \end{array}$$

las menores unidades, que aquí son diezmilésimas, el total 8 está escrito en el lugar correspondiente; la suma de las milésimas asciende á 1 milésima y 1 centésima, que se agrega á las de su orden: el total de las décimas es diez ó una simple unidad entera; por lo cual, agregando ésta á las de su orden, se escribe cero décimas y la coma para empezar la suma de los enteros como ya se sabe. Inútil es el proponer mas ejemplos de operacion tan simple.

51. Restar. Para este cálculo se escriben el minuendo y sustraendo como en el caso de números enteros, é igualmente la diferencia. Pueden ocurrir todos los accidentes que allí se advirtieron, y para ensayo proponemos los ejemplos que siguen:

83,215		4.5301		9254,020		31,9524
4,132	;	0,6112	;	3,214	;	0,6700
79,083		0,9189		9250,806		31,2824 .

Cuando al hacer cada sustraccion parcial ha sido menor la cifra superior que la inferior, se ha tomado para el acto de la resta una unidad del orden mayor inmediato. En el tercer ejemplo hemos añadido un cero al fin del minuendo decimal, como permite el principio demostrado (47), y solamente porque aparezca en dicho minuendo cifra á quien comparar la 4 del sustraendo, aunque en realidad ninguna falta hacia. En el cuarto ejemplo no hemos querido añadir ceros al fin del sustraendo, porque no causára novedad la falta de ellos al comparar las unidades respectivas, con el recuerdo de casos análogos que ocurrieron al restar enteros, aunque entonces la falta de cifras solo pudo verificarse al principio del sustraendo.

Puede haber que restar una cantidad decimal de una entera; mas, teniendo presente la uniformidad que existe en todo el sistema decimal, se infiere que debe tomarse una unidad simple y distribuirla en decimales, á semejanza de lo que se hace cuando termina con ceros un entero minuendo. Hay por ejemplo que restar 0,8713 de 462: el sustraendo equivale á 462,0000, y quitando á las unidades simples una, el cálculo es

462,0000, igual á 461+0,9+0,09+0,009+0,0010
  0,8713, igual á 0+0,8+0,07+0,001+0,0003

461,1287

52. El bello descubrimiento de convertir la resta en suma del minuendo con el complemento del sustraendo, descontando lo que valga la cifra sobretildada (21), es aplicable tambien á la

sustraccion con decimales. Se propone restar 3,15 de 4,28, y por el método ordinario es 1,13 la diferencia. Esto mismo en lenguage algébrico se escribe

$$\begin{array}{r} 4{,}28 \\ 3{,}15 \\ \hline 1{,}13 \end{array}$$

$$4{,}28-3{,}15=1{,}13:$$

y si á la primera parte de la igualdad se añade y quita simultáneamente 1 seguido de tantos ceros como cifras tiene el sustraendo, no padecerá alteracion alguna; por lo cual subsiste la igualdad

$$4{,}28-10{,}00+10{,}00-3{,}15=1{,}13.$$

En esta espresion, $+(10{,}00-3{,}15)$ es el complemento de 3,15, y segun ella, se debe sumar dicho complemento con el minuendo 4,28, separando 1 decena de la suma. Hállese pues el complemento 6,85 del sustraendo 3,15 por la resta adjunta; y agregando al complemento 1 decena sobretildada para señalar que se deberá descontar de la suma en vez de incluirla, se hace la sumacion como se ve al márgen, y da el mismo resultado que la sustraccion propuesta.

$$\begin{array}{r} 10{,}00 \\ 3{,}15 \\ \hline 6{,}85 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4{,}28 \\ \bar{1}6{,}85 \\ \hline 1{,}13 \end{array}$$

Para conocer la diferencia entre 37,421 y 2,3 sumando el complemento de este con aquel, se busca primero por la resta dicho complemento, el cual con la cifra tildada es $\bar{1}7{,}7$, y ejecutando la sumacion, resulta ser 35,121 la diferencia de los números 37,421 y 2,3, que se propusieron.

$$\begin{array}{r} 10{,}0 \\ 2{,}3 \\ \hline 7{,}7 \end{array}; \qquad \begin{array}{r} 37{,}421 \\ \bar{1}7{,}7 \\ \hline 35{,}121 \end{array};$$

La diferencia entre 9254,725 y 3,294, usando del complemento que para el restador da el cálculo adjunto, se halla por la sumacion del restando con el complemento afectado $\bar{1}6{,}706$ del sustraendo, y resulta ser 9251,431.

$$\begin{array}{r} 10{,}000 \\ 3{,}294 \\ \hline 6{,}706 \end{array}; \qquad \begin{array}{r} 9254{,}725 \\ \bar{1}6{,}706 \\ \hline 9251{,}431 \end{array};$$

Se dirá que el método no presenta ventajas, porque en vez de una operacion que exige la resta ordinaria, hay que hacer dos, una de restar para tener el complemento, y otra de sumar para conocer la diferencia que desde luego se pide. Pero debemos contestar que aqui se hace solo conocer el método, cuya ventaja será palpable cuando se ofrezca un cálculo de sumar y restar muchos números que procedan de una misma cuestion; pues con este auxilio se convierte la cuestion á sumar, como se verá mas adelante.

53. Multiplicar. Despues de situar el multiplicando y el multiplicador como se dijo en el cálculo de los enteros formando columna cada dos cifras de un mismo orden; procédase por los principios establecidos entonces, á la multiplicacion de todo un factor por cada cifra del otro, empezando por las de menor orden. Sea por ejemplo multiplicando 2,181, y multiplicador 0,47: la disposicion que se acaba de indicar, propia de los factores, debe regularse por la coma, y es

2,181 multiplicando
0,47 multiplicador.

En seguida, búsquense los dos productos que las dos únicas cifras significativas del multiplicador enuncian, pero inmediatamente se ofrece la dificultad de conocer con la presteza necesaria, á qué orden de unidades pertenece el producto parcial de cada cifra por otra. Con este motivo se prefiere el siguiente modo.

En el artículo (33, 4.ª) se hizo ver, que multiplicando por cualquiera número uno de los factores, el producto resulta multiplicado por dicho número. Luego, si multiplicamos por el número m uno de los factores, y por el número n el otro, el producto resultará multiplicado por m y despues por n, es decir, $m \times n$ veces mayor. De suerte, que siendo a y b dos números con decimales, si se quitan las comas, en el hecho multiplicamos cada uno de ellos por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene: y si reducidos asi á enteros, los multiplicamos entre sí como tales, el producto será $m \times n$ veces mayor; supuesta m la unidad seguida de los ceros que ha lugar en un factor, y n la correspondiente del otro. Habrá pues que hacer el producto hallado, $m \times n$ veces menor, separando con la coma tantas cifras de la derecha cuantas decimales haya en multiplicando y multiplicador, juntamente.

Con esta sencilla reflexion el cálculo de multiplicar decimales entre sí, haya ó no cifras significativas en las características, viene á ser lo mismo que con enteros, *suprimiendo las comas de los factores y haciendo finalmente la separacion de las correspondientes decimales en el producto, que deben ser tantas como tengan los dos factores.*

El cálculo de 2,181 multiplicado por 0,47, ejecutado asi viene á ser

$$\begin{array}{rl} 2181 & \text{multiplicando} \\ 47 & \text{multiplicador.} \\ \hline 15267 & \\ 8724 & \\ \hline 102507. & \end{array}$$

El producto 102507 es 1000×100=100000 veces mayor, por haber adelantado la coma tres puestos en el multiplicando y dos puestos en el multiplicador; es decir, por haberla suprimido: y á fin de restituir á los factores y al producto su verdadero valor, hay que dividir 102507 por 100000; lo cual se consigue separando con la coma cinco cifras últimas en dicho producto, de que resulta 1,02507.

Para ensayo se añaden estos ejemplos:

$$\begin{array}{r} 0{,}92\,8 \\ 0{,}3 \\ \hline 0{,}278\,4 \end{array}\;;\qquad \begin{array}{r} 5{,}4\,7 \\ 2\,1{,}8 \\ \hline 4\;3\;7\;6 \\ 5\;4\;7 \\ 109\;4 \\ \hline 119{,}2\;4\;6 \end{array}\;;\qquad \begin{array}{r} 54{,}752 \\ 2{,}181 \\ \hline 54\;752 \\ 4\;380\;16 \\ 5\;475\;\;\;2 \\ 109\;504 \\ \hline 119{,}414112. \end{array}$$

54. Dividir. Si se divide el número a por otro b, ambos con decimales ó solamente uno de ellos, el cociente es $\frac{a}{b}$. Multiplicando a por m, y b por n, el cociente será $\frac{m\times a}{n\times b}$, distinto del verdadero: si m es la unidad seguida de tantos ceros cuantas decimales hay en el dividendo, y n de igual forma con tantos ceros cuantas decimales en el divisor, uno y otro estan convertidos en números enteros; y si hacemos la division con ellos en tal estado, hay que modificar el cociente $\frac{m\times a}{n\times b}$, haciéndole que sea $\frac{a}{b}$. Fácil es entender que de los números m y n ha de ser uno múltiplo del otro, á causa de ser uno y otro productos de 10 multiplicado por sí mismo cierto número de veces, y segun m es mayor ó menor que n, en el cociente $\frac{m\times a}{n\times b}$ resultará libre de factor el dividendo a ó el divisor b (38.2.ª), de suerte que dicho cociente será

$$\frac{10....\times a}{b} \quad \text{ó} \quad \frac{a}{10....\times b}.$$

En el primer caso, hay que separar con la coma en el cociente de la propuesta division tantas cifras de la derecha, cuantos ceros acompañen á la unidad, por haber hecho al dividendo otro tanto mayor (41.5.ª); y en el segundo caso hay que multiplicar el cociente, esto es, añadirle tantos ceros á su derecha, cuantos tenga el factor 10.... en $\frac{a}{10....\times b}$, por haber empleado un divisor otro tanto mas grande que el propuesto b. En ambos casos el número de ceros del factor 10......, y por consiguiente de cifras que se han de separar con la coma, ó el de ceros que se han de añadir en el cociente, es la diferencia de los que haya en m y n.

Segun esto, *para dividir un número que tiene cifras decimales por otro que tenga menos cifras de esta clase, se hace la division como en los números enteros, suprimiendo las comas, y en el cociente se separan con la coma tantas decimales cuantas habia en el dividendo menos las del divisor.* Debiendo por ejemplo dividir 49,95 por 3,7, se propone la operacion $\frac{49,95}{3,7}$, y la que vamos á ejecutar es

$\frac{4995}{37}=\frac{(49,95)\times 100}{(3,7)\times 10}$; luego el cociente que se halle resultará $\frac{100}{10}=10$ veces mayor que el pedido; y para reducirle al valor de este, habrá que separar una cifra de la derecha con la coma. El cálculo como enteros, hecho del modo abreviado, nos da el cociente 135, diez veces mayor que el pedido: éste será pues 13,5. Desde luego se pudo notar á la vista de los números propuestos, que en el cociente hallado como enteros habia de separarse con la coma una cifra, por haber dos decimales en el dividendo y una en el divisor, es decir, una mas en aquel.

$$\begin{array}{r|l} 4995 & 37 \\ \hline 129 & 135 \\ 185 & \\ 0 & \end{array}$$

Para ensayo del segundo caso, ó de haber mas decimales en el divisor que en el dividendo, sea éste 816,4 y aquel 3,14; se pide el cociente de $\frac{816,4}{3,14}$; y tratando como enteros á los números propuestos, hay que hallar el cociente de

$$\frac{8164}{314}=\frac{816,4\times 10}{3,14\times 100}=\frac{816,4}{3,14\times 10}.$$

En donde se ve, que el quitar las comas al dividendo y al divisor es en realidad lo mismo que dividir por 10 el cociente verdadero; con que, habrá que añadir un cero á la derecha del que diere $\frac{8164}{314}$. Calculando éste por el método ordinario abreviado, es 26 el cociente como números enteros; y si se restituyen las cosas á su primer estado añadiendo un cero á dicho cociente, el pedido es 260. Si hay duda en ello, multiplíquese 260 por 3, 14, y se verá producir 816,40, que es igual á 816,4. En vista de los números que se propusieron para la division, se pudo conocer desde luego que tratándolos como enteros, habia de

$$\begin{array}{r|l} 8164 & 314 \\ \hline 1884 & 26 \\ 0 & \end{array}$$

añadirse un cero á la derecha del cociente para tener el que correponde á los números con sus decimales.

Este método de ejecutar la division de un número, por otro que tenga mas cifras decimales, podria conducir á equivocaciones, en el caso de haber algun resto del cociente; porque al numerador de dicho resto hay que agregar en realidad tantos ceros como al cociente. Por lo cual, *cuando el divisor tiene mas guarismos decimales que el dividendo, es mas sencillo el añadir á éste los ceros necesarios para igualar el número de sus cifras decimales á las del divisor*, cosa que no altera el valor de la fila (47); y *suprimiendo entonces la coma en dividendo y divisor, el cociente que asi saliere es el de la division pedida*. Por ejemplo, el cociente de 66,3 partido por 2,85 es el mismo de 66,30 por 2,85, y el mismo de 6630 por 285.

Para la práctica de la division con decimales presentamos los ejemplos que siguen:

242,5375	97,015
48 5075	2,5 ;
0	

18,372	61,24
0	0,3 ;

2,8876	721,9
0	0,004 ;

15695,4	2,517
593 4	$6235+\frac{1905}{2517}$
90 00	
14 490	
1 905.	

55. Sabemos que cuando hay un número dividido por otro mayor, no puede resultar entero alguno al cociente, por lo cual nos ha sido preciso dejar indicadas tales divisiones en el cálculo de números enteros, y en esta clase están comprendidos los residuos que se ven al fin de los cocientes. Tratándose, por ejemplo, de dividir 2 por 4, es visible que $\frac{2}{4}$ no dará cociente que sea entero; mas, por un momento agréguese al dividendo un cero á la derecha, y resulta $\frac{20}{4}$ practi-

cable ya: pero el cociente será diez veces mayor que el pedido á causa de haber hecho diez veces mayor el dividendo; serán pues, décimas las unidades de la cifra cociente. De la division resultan 5 simples unidades para el cociente; luego, 0,5 es el que se pide, corespondiente á $\frac{2}{4}$.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 4 \\ \hline 0 & 5 \end{array}$$

Sea $\frac{2}{7}$ la division que se quiere hacer; agregando un cero al dividendo, resulta $\frac{20}{7}$, y el cociente que diere será diez veces mayor que el de la cuestion. Agregando otro cero, $\frac{200}{7}$ dará un cociente cien veces mayor; asimismo $\frac{2000}{7}$ un cociente mil veces mayor: luego, al que se halle de este modo habrá que hacerle diez, ciento, mil,..... veces menor, reduciéndole á espresion decimal por medio de la coma.

Se pueden ir agregando los ceros uno á uno ó de una vez los que se quieran, á fin de hallar el cociente, exacto á veces como en el ejemplo anterior, y otras veces aproximado tanto mas cuanto mayor número de ceros se añadan al dividendo. El grado de aproximacion llegará hasta ser la diferencia entre el exacto y el hallado, menor que una décima si se agrega un cero, menor que una centésima si dos ceros, y en general menor que una unidad del orden correspondiente al número de ceros añadidos; es decir, al de cifras decimales separadas por la coma en el cociente: pues cada cifra de éste no debe admitir una unidad mas ni menos (36).

Segun lo dicho, para formar el cociente de $\frac{2}{7}$ aproximado hasta milésimas, el cálculo nos da 285, y por tanto el pedido será 0,285; y por haber aún

$$\begin{array}{r|l} 2000 & 7 \\ \hline 60 & 285 \\ \hline 40 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

residuo, se pudiera llevar mas adelante la aproximacion.

De este modo se logra tambien aproximar en decimales el residuo de una division con enteros. Divídase por ejemplo 64 por 5: hallada la parte entera del cociente por el cálculo que se ve al margen, resultan 12 unidades simples y el residuo $\frac{4}{5}$. Añadiendo un cero al dividendo, la cifra que resulte al cociente será décimas; la division asi continuada es como se ve al margen, y $\frac{64}{5}=12{,}8$ exactamente.

$$\begin{array}{r|l} 64 & 5 \\ \hline 14 & 12 \\ \hline 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 640 & 5 \\ \hline 14 & 128 \\ \hline 40 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

En el siguiente caso, las decimales menores á que llega la aproximacion proyectada son centésimas:

$$\begin{array}{r|l} 375219 & 364078 \\ \hline 1114100 & 1{,}03 \\ \hline 21866 & \end{array}.$$

En los dos ejemplos que siguen la aproximacion del cociente no pasa de centésimas: en el primero resulta cociente exacto; mas en el segundo, aún se pudiera continuar el cálculo

$$\begin{array}{r|l} 68013 & 2475 \\ \hline 18513 & 27{,}48 \\ \hline 11880 & \\ \hline 19800 & \\ \hline 0 & \end{array}; \qquad \begin{array}{r|l} 94261 & 3582 \\ \hline 22621 & 26{,}31 \\ \hline 11290 & \\ \hline 5440 & \\ \hline 1858 & \end{array}.$$

CAPITULO III.

Cálculos de sumar, restar, multiplicar y dividir con cantidades literales enteras.

LECCION II.

Sumar y restar con enteros literales.

56. Segun las ideas que se indicaron en el artículo (2), el álgebra es la ciencia que trata de reducir á reglas generales, todas las cuestiones que se pueden ofrecer acerca de las cantidades en cualquiera sistema de numeracion: y habiendo ya dado las primeras ideas generales de estos cuatro cálculos, con referencia á los números del actual sistema, nos hallamos en el caso de hacerlas estensivas á todos los sistemas, y de completarlas.

57. Sumar. Cuando se trató de la sumacion aritmética (18), digimos que en el álgebra se espresa con el signo + puesto antes de la cantidad literal B, la idea de añadir esta cantidad á otra A, como $A+B$. Si se quiere añadir otra tercera C á ellas, y asi sucesivamente las que se quieran, se ponen á continuacion precedidas del respectivo signo + de adicion ó positivo, y suprimiendo este signo en la cantidad primera, como

$$A+B+C+\ldots\ldots$$

A veces alguna de las cantidades que se dan para sumar viene afectada con el signo —, cuya significacion, segun digimos en el capítulo anterior (24), es que el valor de aquella letra debe ser quitado ó sustraido del conjunto de las que van escritas con signo positivo, como

$$A+B-C+D. \text{ \&c.}$$

En ambos casos, llámase *polinomio* ó conjunto de *mono-*

mios á la espresion que consta de varias cantidades con sus respectivos signos de agregacion ó de sustraccion, y cada parte de estas es un *término* del polinomio; que como ya está dicho (18), será binomio, trinomio, &c., segun conste de dos, de tres, &c. términos.

Aunque cambien de lugares en el polinomio los términos, éste no varía de valor, puesto que queda satisfecho el principio de que la suma es el conjunto de todas sus partes (3. 2.°): pero si hay algun término negativo, no se acostumbra escribirle en el primer lugar, y en caso que se pusiere, debe ir afectado de su signo. Con estas nociones preliminares diremos, que *para sumar cantidades en lenguage algébrico se escriben unas á continuacion de otras con sus respectivos signos, suprimiendo el del primer término cuando es positivo.*

58. Dejando para la ocasion propia el tratar particularmente de las cantidades sustractivas, aqui nos pertenece dar ideas acerca de la *reducion* de los polinomios, en que hay términos *iguales* ó términos *semejantes*. No podemos aun presentar de un modo inteligible la definicion de estos últimos, y asi, por ahora nos limitaremos á decir que cuando en un polinomio hay dos términos de la misma letra y signo, como en $A+B+A+ ....$, se abrevia la espresion suprimiendo uno de los dos términos iguales y anteponiendo el guarismo 2 al otro en fila, como $2A+B$, ó bien, $B+2A$. Si estuviese repetido tres veces en el polinomio el término $+A$, como $A+B+A+A$, se abrevia escribiendo $3A+B$, ó bien, $B+3A$. Si viniera el mismo término cuatro veces, cinco veces, &c., y en general n número de veces, se escribiria $4A$, ó $5A$, &c., y en general nA. El número antepuesto á la letra que viene varias veces por sumando, como aqui el 2, el 3, el 4, el 5, &c., y en general n, se llama *coeficiente* del sumando A; y no porque se hallare un sumando espresado con letra minúscula, y tal vez el coeficiente con mayúscula, dejan de tener la misma significacion respectiva, el coeficiente y el sumando.

El convenio de espresar con el coeficiente la reducion en la suma de términos iguales, ó sea el modo de cifrar con algunas de las espresiones $2A$, $3A$,.... nA la suma de tantos sumandos iguales como unidades tiene el coeficiente, deberá estar en conformidad precisamente con la multiplicacion, cuyo objeto es el mismo (26): y por tanto en álgebra, las espresiones $2A$, $3A$, $4A$,... y en general nA son equivalentes respectivas de $2\times A$,

$3\times A$, $4\times A$, &c., y en general $n\times A$, ó bien, $A\times n$, segun el artículo (33).

Prosiguiendo en tratar del coeficiente para dar mas estension á las ideas; supongamos que el término nA venga por sumando tantas veces como unidades tenga uno de los números 2,3,4, &c., y en general m; y con arreglo al convenio anterior, tambien reduciriamos todos los iguales de esta clase, á solo uno, que seria $2nA$, ó $3nA$, &c., y en general mnA, en el cual seria m el coeficiente de nA, y asimismo mn el coeficiente de A, con la significacion de $m\times n\times A$. Sin que sea necesario continuar el discurso se puede ya entender, que el coeficiente puede constar de cualquiera número de factores. Cuando hay términos que difieren solo en el coeficiente, como por ejemplo $+mA$ y $+nA$, significan que A entra por sumando $m+n$ veces: luego, por el convenio del coeficiente se reducen á $(m+n)A$.

Ademas, pueden ocurrir otros dos casos de reducion de términos del polinomio, y son: 1.° venir términos iguales ó semejantes con el signo negativo: 2.° venir estos con signos contrarios. Dejando este segundo caso para cuando se trate de la resta, ahora corresponde manifestar que la reducion de términos negativos iguales ó semejantes se hace por medio del coeficiente, como la de los términos positivos, en virtud del raciocinio en que vamos á fundarlo. Si los términos fueren $-A$ y $-A$, su significacion en el polinomio es la de restar de los positivos el valor de A dos veces, concepto que tambien espresa $-2A$, segun el oficio (24) del signo $-$ y el del coeficiente 2. Lo mismo se deberá entender de $-A-A-A$, ó $-3A$, y en general de $-nA$, siendo n el número de veces que $-A$ fuere término del polinomio. Otro tanto diremos cuando vengan juntos dos términos semejantes negativos $-nA-mA$, que por el párrafo anterior se pueden reducir á $-(m+n)A$.

Basta lo dicho para entender, *que el coeficiente de una cantidad algébrica, positiva ó negativa, es el número que espresa las veces que aquella cantidad entra por término del polinomio con su mismo signo.* Ademas, es consiguiente á la generalidad con que una letra representa en álgebra cualquiera cantidad, el que las A, B, m, n.... signifiquen suma, resto, producto, cociente, ó cantidades que dependen de otras operaciones de cálculo que mas adelante sabremos; y asi, lo que se ha dicho y se diga ahora es general para la sumacion de toda clase de cantidades algébricas, debiéndose *conceptuar por términos semejantes aquellos que solo difieran entre sí, por el coeficiente, ó por el signo, ó por ambas cosas.* Prescindiendo pues ahora de los dos últimos casos, *quedamos convenidos en la idea de que todos los términos semejantes de un mismo signo, y lo mismo los iguales, se reducen á un solo término, compuesto de la cantidad comun, y la suma de coeficientes de todos con su mismo signo, considerando* 1 *el coeficiente tácito de todo término.*

59. Cuando es necesario sumar varios polinomios algébricos en que hay términos semejantes ó iguales, por conveniencia se suelen escribir para su facil reducion á manera que las cantidades aritméticas (16), de suerte que formen columna los términos semejantes de cada especie, separando con raya la suma: como en los tres polinomios;

$$6AB+4AC+B+D;\ AB+21AC+3B;\ 2AC+D+FQ;$$

cuya disposicion y suma será

$$\begin{array}{r} 6AB+\ 4AC+\ B\ +D\qquad \\ +\ AB+21AC+3B\qquad\qquad \\ +\ 2AC\qquad +D+FQ \\ \hline 7AB+27AC+4B+2D+FQ \end{array}.$$

Por este solo ejemplo se puede conocer la utilidad del coeficiente; pues vemos que con su auxilio se ha reducido á cinco términos un polinomio de cuarenta y un términos, compuesto de 7 veces *AB*, de 27 veces *AC*, de 4 veces *B*, de 2 veces *D*, y de una vez *FQ*.

El método establecido para sumar cantidades aritméticas (16) viene á ser el mismo de reducir las algébricas positivas, entendiéndose por términos semejantes entre aquellos, los números que espresan las unidades de cada orden. Pues, debiendo sumar por ejemplo 3 con 14 y 521; la operacion algébricamente indicada será $3+14+521$, que equivale á $3+10+4+500+20+1$; y para la operacion aritmética se ordenan los sumandos en la forma sabida,

$$\begin{array}{r} 521 \\ 14 \\ 3 \\ \hline 538 \end{array}, \quad \text{que viene á ser} \quad \begin{array}{r} 500+20+1 \\ +10+4 \\ +3 \\ \hline 500+30+8 \end{array}.$$

Tambien los polinomios $AB+ABD-4M+2Q$ y $BD-M+5Q$ se ordenan y suman en la disposicion que á continuacion se ve:

$$\begin{array}{r} AB+ABD-4M+2Q \qquad\quad \\ -\ M+5Q+BD \\ \hline AB+ABD-5M+7Q+BD \end{array}$$

60. Concluiremos presentando un problema de sumar cantidades algébricas, propuesto en lenguage vulgar. *Un comerciante que empezó con el capital* 6a, *agregó á este en el primer año la ganancia* bm, *en el segundo* 3a, *en el tercero* 5m, *y se quiere saber qué caudal tendrá al fin del tercer año.*

Se deja conocer que se pide la suma de todas las cantidades mencionadas, y será,

$$6a+bm+3a+5m, \text{ ó bien, } 9a+(b+5)m.$$

61. Restar. Para la resta de cantidades algébricas recordemos, que el signo — indica deberse restar la cantidad á que afecta, de otra que tenga el signo + tácito ó expreso, como en $A-B$: y por consiguiente, *si el restando y el restador son iguales, resultará el anulamiento de la cantidad á quien pudiera espresar la frase*, como en $A-A$, que será lo mismo que cero: y *con este símbolo se espresa en álgebra, cuando conviene, cualquiera cantidad anulada.*

Si el restador consta de varios términos, como $B+C$, se incluye en un paréntesis precedido del signo —, como $A-(B+C)$; é igualmente cuando sea restador $B-C$, como $A-(B-C)$. Pero falta concluir la operacion, y es necesario que sepamos el modo en estos casos; con cuyo objeto haremos un sencillo raciocinio.

Si en la expresion $A-(B-C)$ se añade al restando y al restador una misma cantidad, la diferencia quedará siempre la misma (3, 6.°). Añadiendo por ejemplo C á uno y otro; la espresion $A-(B-C)$ lo mismo vale que $A+C-(B-C+C)$. Reduzcamos esta espresion en que $+C-C$ se destruye, segun la definicion del párrafo primero de este artículo, y viene á ser

$A+C-B$ la resta que $A-(B-C)$ indica.

La operacion está ya concluida, y el resultado nos dice, *que para ejecutar la resta se cambia el signo que tenga cada término del restador anteriormente.*

62. Para deducir otro teorema importante, haremos uso del siguiente raciocinio. Réstese $E+F$ de $C+D$, operacion indicada en

$$C+D-(E+F),$$

y que ejecutada segun el teorema precedente será

$$C+D-E-F \quad \text{ó} \quad (C-E)+(D-F).$$

Lo cual nos dice *que la diferencia de dos cantidades compuestas de partes, equivale á la suma de las diferencias que haya entre cada parte del restando y su correspondiente del restador*. El teorema que se acaba de hallar justifica de nuevo el método que se adoptó de restar con espresiones aritméticas (19); pues conforme á dicho teorema, supóngase $A=35$, $B=24$, y será

$$A-B=35-24=30-20+5-4,$$

como en realidad se ha practicado en aritmética restando las unidades de cada orden para hallar el residuo.

El teorema conduce ademas á la regla para la reducion de términos semejantes que tengan signos contrarios. Pues en la espresion $mA-nA$ por ejemplo, mA equivale á $A+A+A....$ hasta m veces, y $-nA$ equivale á $-A-....$ hasta n veces; de suerte, que reemplazando $mA-nA$ con los equivalentes polinomios, resultará

$$A-A+A-A+A-A....$$

en que se destruyen de dos en dos tantos pares de términos como unidades tenga el menor coeficiente m ó n, y quedarán tantos términos positivos como espresa el número $(m-n)$, ó sino tantos negativos como espresa $-(n-m)$; es decir, que se reducirá precisamente á $(m-n)A$, ó sino, á $-(n-m)A$. Luego, *los términos semejantes de signos contrarios quedan reducidos á uno solo, que tiene por coeficiente la diferencia de los coeficientes de aquellos, y por signo el del mayor coeficiente.*

63. Segun estas reglas, que se refieren á términos de la frase algébrica sea cualquiera la composicion particular de ellos, el polinomio $ABC-(BCD-ABC)$ es una resta indicada, con el signo $-$ antepuesto al paréntesis que es el sustraendo: y hecho el cambio de signos en los términos que incluye (61), se presenta ejecutada la operacion en la forma

$$ABC-BCD+ABC;$$

que reducida (58), viene á su espresion mas simple

$$2ABC-BCD.$$

Tambien es resta indicada la espresion compuesta

$$2DF-GHK-(DF+GHK-MNP):$$

y resta ejecutada la $\quad 2DF-GHK-DF-GHK+MNP$

ó bien, $\quad DF+DF-DF-GHK-GHK+MNP,$

que, por admitir las dos clases de reducion (58) y (62), viene

á ser $\quad DF-2GHK+MNP.$

Vemos pues, *que en la resta se reduce tambien el número de términos semejantes, ya por agregacion de unos á otros cuando tienen un mismo signo, ya por destruccion cuando tienen signos diferentes; resultando en el primer caso para el término reducido el signo de los que comprende, y en el segundo el signo del mayor coeficiente, considerando reunidos en un término todos los semejantes positivos, y en otro los negativos.* De suerte, que en la resta de cantidades algébricas se halla tambien comprendida la suma y por esto se dice, *que usando de signos, la suma y la resta son un mismo cálculo, que es la reducion, á quien debe su origen el coeficiente de toda espresion algébrica.*

Es evidente que en la resta de cantidades aritméticas, conforme al modo propio de hacerla (19), se verifica una verdadera reducion entre las unidades de cada orden; pero destruyéndose, y no por agregacion como en la suma de cantidades positivas y en la de negativas entre sí; pues, la resta indicada 236—25, por ejemplo, es como 200+30+6—20—5, cuya disposicion y resultado en forma de aritmética es

$$\begin{array}{r} 236 \\ 25 \\ \hline 211 \end{array}, \text{ que viene á ser como } \begin{array}{r} 200+30+6 \\ -20-5 \\ \hline 200+10+1. \end{array}$$

De este modo se suelen ordenar tambien para la resta, los polinomios algébricos cuando hay en el restando términos semejantes á los del restador, por la facilidad de comparar sus coeficientes para la reducion. Sea por ejemplo, restando $6AB-37CDF+A$, y restador $3A-8CDF-PQ$: escribiendo este con signos cambiados bajo el restando, la operacion será

$$\begin{array}{r} 6AB-37CDF+A \\ +\ 8CDF-3A+PQ \\ \hline 6AB-29CDF-2A+PQ \end{array}.$$

64. El concepto que por lo dicho se ha podido formar del signo — es, que solamente indica deberse restar de cierta cantidad aquella á quien afecta dicho signo, como en $A-B$: pero si la operacion es $A-(B+A)$, ejecutándola (61) resulta la diferencia $-B$, cantidad negativa sin haber otra de quien restarla. Mas, observando la operacion propuesta, fácilmente se nota que el restador es mayor que el restando, y que se pide un imposible por esta circunstancia: *tal es el origen del signo negativo, cuando la espresion consta de un solo término, y á éste afecta dicho signo.* En el cálculo de las espresiones aritméticas vemos que no es posible restar 8 de 5, por ejemplo; pero usando de signos, está justificado que

$$5-8 \text{ equivale á } 5-(5+3)=5-5-3=-3.$$

De lo espuesto se puede inferir cuán luminosas hacen los signos + y — á las ideas del cálculo; y que tan significante y necesario es el signo negativo como el positivo en el lenguage algébrico, para espresar el sentido en que se deben tomar las cantidades comparadas y las consecuencias de las operaciones, como se acaba de advertir y se conocerá mejor en adelante.

LECCION II.

Multiplicar con enteros literales.

65. Si hay que sumar varias cantidades algébricas iguales, como $a+a+a+\ldots$ hasta m veces, hemos dicho en la precedente leccion (58) que la suma equivale á ma y significa lo mismo que $m\times a$ ó $m.a$ Los nombres de multiplicando, multiplicador, producto, y factores, fueron admitidos en el artículo (26) para las cantidades aritméticas, representadas ahora en general por a, por m, y por ma, y los mismos convienen á las cantidades de la multiplicacion algébrica

66. El haber demostrado los principios necesarios para la multiplicacion en el sistema décuplo, no nos dispensa de tener que demostrar los correspondientes á la multiplicacion general. Con este motivo y el de averiguar otras verdades fundamentales de este cálculo, nos ocuparemos de los asuntos que se verán á continuacion.

1.° Puesto que a y m son enteros, supóngase descompuesto a en unidades, y será $m\times a$ equivalente á la suma de m polinomios idénticos al

$$(1+1+1+1+\ldots \text{ hasta } a \text{ veces}).$$

Suponiendo escritos los polinomios unos debajo de otros, de manera que formen columnas los términos; la suma de la primera columna será m, la de las dos primeras $2m$: y asi sucesivamente hasta la suma de todas las columnas que no puede menos de ser am. Lo que nos hace ver que en todo sistema de numeracion, se verifica la equivalencia $am=ma$, esto es, que *mientras* a *y* m *sean números abstractos, en la espresion bajo cualquiera de las dos formas puede ser multiplicando* a *ó* m, *y multiplicador el otro, por cuya razon se llaman factores del producto.*

Si empleamos la multiplicacion para sumar abreviadamente el polinomio $ma+ma+....$ con n términos iguales, el resultado es nma conforme á la acepcion del coeficiente (58), y espresa el polinomio de a número de unidades escrito en columna tantas veces como unidades contiene el número nm. La columna de los primeros términos asciende á nm unidades, y la suma de todas las a columnas importa $a\times nm$: luego, anm es equivalente á nma; y como nm equivale á mn, y an a na, segun la conclusion del párrafo anterior, se sigue que son equivalentes las espresiones

$$mna;\ man;\ nma;\ nam,\ amn,\ anm.$$

En donde vemos que tampoco se altera el valor de un producto de tres factores, cambiando estos de lugares respectivos. Multiplicando por otro factor el producto de los tres, y así sucesivamente hasta cualquiera número de ellos, se generaliza mas la demostracion; pero sin que haya necesidad de verificarlo, el método mismo nos autoriza para concluir, que *el valor del producto de cualquiera número de factores no se altera aunque cambien estos de lugares en la fila.* Segun esto, *sean cuantos quisiéremos los factores cuyo producto se haya de hallar, se forma primero el producto de dos, este se multiplica por otro factor, el resultado por el cuarto factor, y así sucesivamente.*

Propónese por ejemplo la multiplicacion de cantidades aritméticas que á continuacion está indicada;

$$6\times8\times25\times3.$$

El producto de los dos factores primeros es 48; el de los tres primeros, 48×25 ó bien 1200; y el de los cuatro, 1200×3 ó 3600: cual resultará de multiplicar dichos factores ordenándolos de cualquiera modo.

2.° Si es cero uno de los factores, el producto resulta nulo, pues $0\times a$ quiere decir ninguna vez a: y si un factor es 1, como $1\times a$, sabemos que el producto equivale al otro factor (58). Luego, *en cualquiera sistema de numeracion se verifican las equivalencias*

$$a\times0=0,\ a\times1=a.$$

3.° Supóngase que el polinomio $a+b+c$ es uno de los números ó factores de la multiplicacion, y el monomio m el otro factor. La operacion se indica encerrando aquel en un paréntesis, como

$$(a+b+c)\times m,$$

espresion equivalente á la que sigue de las tres sumas reunidas en una, indicando con puntos la indeterminacion del número m de términos iguales de cada clase

$$a+a+a+a+....+b+b+b+b+....+c+c+c+c+....$$

En ella hay m términos de cada sumando, y hecha la reducion (58), viene á ser $a\times m+b\times m+c\times m$ la cantidad que se presentó bajo la forma $(a+b+c)\times m$; como dice la oracion

$$(a+b+c)\times m=a.m+b.m+c.m.$$

Esta equivalencia enseña *que cuando es polinomio uno de los factores, hay que multiplicar cada término de éste por el otro factor*: verdad en que se halla comprendida la regla del artículo (28), y lo demostrado despues en el (33. 5.ª).

4.° Si tambien m es polinomio, que suponemos $p+q$; sustituyéndole por m en el resultado precedente, será

$$(a+b+c)\times(p+q)=a\times(p+q)+b\times(p+q)+c\times(p+q):$$

y ejecutando las multiplicaciones indicadas conforme á la regla que antecede, tendremos

$$(a+b+c)\times(p+q)=+ap+aq+bp+bq+cp+cq:$$

Luego, *para multiplicar dos factores polinomios entre sí, ha de multiplicarse cada término del uno por cada término del otro*; es decir, *que el producto de dos cantidades descompuestas en sumandos equivale á la suma de productos de cada término de la una por cada término de la otra.*

En conformidad con este principio se hizo la multiplicacion de números de varios guarismos (29); y en él está comprendido el segundo del artículo (33, 5.ª). Sean por ejemplo 82 y 23 los factores; descomponiendo el primero en $80+2$, y el segundo en $20+3$, el cálculo será

$$(80+2)\times(20+3)=80\times20+2\times20+80\times3+2\times3.$$

5.° Los productos de factores iguales, como $a\times a$, se espresan por convenio con solo uno de los factores poniéndose adjunto el guarismo 2, algun tanto elevado hácia la derecha, como a^2. Tambien $a\times a\times a$ se espresa mas simplemente en la forma a^3; y en general siendo p el número de veces que a es factor, se espresa el concepto en la forma

$$a^p.$$

El número p, cualquiera que sea en la espresion a^p, se llama *esponente*, y se dice a *elevada al esponente* p. El cálculo de las cantidades de la forma a^p, que se llaman *potencias*, es un asunto que tomaremos en consideracion á debido tiempo; y por ahora usaremos de ellas como *espresiones abreviadas del producto de factores iguales*.

6.° El producto $a^p\times a^q$, equivale al de los factores compuestos

$$(a\times a\times a\times\ldots\ldots \text{hasta } p \text{ veces})\times(a\times a\times a\times\ldots\ldots \text{hasta } q \text{ veces});$$

y segun el convenio del esponente, como tambien lo demostrado (66. 1.°), debe ser a^{p+q} dicho producto. Por tanto, podemos cifrar la equivalencia

$$a^p\times a^q=a^{p+q},$$

y nos dice, *que en la multiplicacion de cualquiera número de factores que difieran solo en sus esponentes, el producto es uno de dichos factores, dándole por esponente la suma de esponentes de todos ellos, y considerándose que* 1 *es el tácito esponente de toda cantidad.*

7.° Si un factor es ma^p y el otro a^q, el producto indicado $ma^p\times a^q$ es lo mismo que

$$(a^p+a^p+a^p+\ldots\ldots \text{hasta } m \text{ veces})\times a^q$$

espresion, que por los teoremas 3.° y 6.° de este artículo, es la misma que

$$a^{p+q}+a^{p+q}+a^{p+q}+\ldots\ldots \text{hasta } m \text{ veces},$$

que vale ma^{p+q} segun el artículo (58). Formando con las dos espresiones de una misma cantidad la equivalencia

$$ma^p \times a^q = ma^{p+q},$$

ella manifiesta que *para multiplicar dos factores que tengan en fila una misma letra, acompañada de coeficiente en un factor, se suman los esponentes de dicha letra, y que el coeficiente lo es tambien del resultado*. Por igual razon, el producto de ma por nb es

$$(a+a+a+\ldots. \text{ hasta } m \text{ veces}) \times (b+b+b+\ldots. \text{ hasta } n \text{ veces});$$

y puesto que se ha de multiplicar un factor por cada término del otro (4.°), habrá n productos iguales al que sigue

$$ab+ab+ab+\ldots \text{ hasta } m \text{ veces};$$

y el total, será $n \times mab$: luego,

$$ma \times nb = mnab.$$

Demostracion de que *si en ambos factores hay coeficientes, deben estos entrar en la multiplicacion igualmente que todos los factores que haya*: es decir, *que el producto de un monomio de letras por otro tal, es la reunion de letras de ambos en fila, y si ademas hay cifras aritméticas al principio de dichos monomios, tambien el producto llevará al principio de fila el producto de dichos factores aritméticos*.

8.° Para saber lo que pasa en dos cantidades iguales cuando se multiplican por otra cualquiera, supongamos $a=b$. La igualdad subsistirá segun el principio fundamental (3, 6.°), añadiendo tantas veces al primer miembro la cantidad a, como al segundo la cantidad b, de que resultarán igual número de términos en los miembros de la igualdad,

$$a+a+a+\ldots \text{ hasta } m \text{ veces} = b+b+b+\ldots. \text{ hasta } m \text{ veces},$$

que por el artículo (58) es como $ma = mb$. En donde vemos *que dos cantidades iguales multiplicadas por otra cualquiera dan productos iguales*: ó bien *que se pueden multiplicar dos cantidades iguales por otra cualquiera sin que por esto se altere la igualdad*. En este principio está comprendido el del artículo (33, 4.°).

9.° En la multiplicacion de cantidades algébricas hay que atender á los signos, al formar los productos parciales, con arreglo á los principios (3.°) y (4.°) de este artículo.

Para el producto de un factor polinomio $a-b$ por otro monomio m, ó $(a-b)\times m$, supóngase $a-b=n$. Añadiendo b á cada parte de esta igualdad, y hecha la reducion, quedará $a=n+b$. Multiplíquense por p las dos partes de esta igualdad, que vendrá entonces á recibir las dos formas,

$$ap=(n+b)\times p=np+bp;$$

y restando bp de la primera y última de estas tres cantidades iguales, viene $ap-bp=np$. Finalmente, de restituir $a-b$ por n, sale la ecuacion que se buscaba,

$$(a-b)\times p=ap-bp.$$

Aunque por este resultado vemos ya la regla de los signos cuando la multiplicacion propuesta es entre dos cantidades positivas, y tambien cuando una es positiva y otra negativa aun la vamos á deducir mas completamente. Una letra puede representar cualquiera cantidad; suponiendo pues, en el resultado que acabamos de obtener, que p equivale á $c-d$, venimos á la espresion

$$(a-b)\times(c-d)=a(c-d)-b(c-d).$$

En ella, por lo que se acaba de demostrar nos consta

$$a(c-d)=ac-ad; \quad -b(c-d)=-(bc-bd),$$

y por el principio fundamental (3.6°),

$$a(c-d)-b(c-d)=ac-ad-(bc-bd).$$

En la segunda parte de esta igualdad hay una resta indicada (61), y ejecutándola, dicha segunda parte viene á recibir la forma

$$ac-ad-bc+bd,$$

que debe espresar lo mismo que $(a-b)\times(c-d)$ de quien ha procedido; y por ello está justificada la equivalencia

$$(a-b)\times(c-d)=ac-ad-bc+bd:$$

en donde se hace ver, *que el producto tiene el signo + cuando los factores tienen signos iguales, y — cuando desiguales.* Los cuatro teoremas comprendidos en este general se espresan como á continuacion se ve:

$$+a\times+c=+ac;\quad -b\times-d=+bd$$
$$+a\times-d=-ad;\quad -b\times+c=-bc.$$

67. Enterados de las reglas que se deben observar en cuanto al modo de tratar los signos, factores y esponentes (66), en la multiplicacion de un monomio por otro, como tambien en cuanto á la sucesion de términos cuando es polinomio uno de los factores ó lo son ambos; nos ejercitaremos en algunos ejemplos.

I. *Factores monomios.* Confiando al interesado en estudiar el proponerse muchos ejemplos para adquirir destreza, sirvan de ensayo los que siguen

$abc^h\times acd$ será $a^2bc^{h+1}d$; $-5bq\times cdpt$ será $-5bcdpqt$;

$-3a^2\times(-8mn^3)$ será $24a^2mn^3$; &c.

II. *Factores polinomios.* No es mas dificultosa la multiplicacion de los polinomios, pues, por los principios 3.° y 4.° del artículo (66), la operacion consiste en hallar los productos parciales de cada término del multiplicando por cada término del multiplicador. Para ensayo se proponen los factores polinomios

$$a^3d+a^2b^2-5ab^4c, \text{ y } ab-bc.$$

Colocando, si se quiere, uno sobre otro como en la multiplicacion de cantidades aritméticas para evitar un largo renglon de polinomios, y trazada la raya correspondiente á fin de separar el producto; se procede á multiplicar todo el multiplicando por cada término del multiplicador (66. 4.°), que arbitrariamente (66. 1.°) suponemos el mas corto de los polinomios propuestos, y despues de haber hallado el total producto, se procede á la reducion en caso necesario, escribiendo el resultado con separacion por medio de la raya, segun se ve en el cálculo

$$\begin{array}{l} a^3d+a^2b^2-5ab^2c \\ \quad\quad ab-bc \\ \hline a^4bd+a^3b^3-5a^2b^3c-a^3bcd-a^2b^3c+5ab^3c^2 \quad \text{producto} \\ \hline a^4bd+a^3b^3-6a^2b^3c-a^3bcd+5ab^3c^2 \quad \text{producto reducido.} \end{array}$$

68. Algunos casos de la multiplicacion ofrecen mérito para que nos detuviésemos en observar los productos de ciertos factores; pero aqui solamente fijaremos la atencion en el producto de a^m+b^n multiplicado por a^m-b^n. El resultado de este cálculo, despues de su reducion, viene á ser

$$(a^m+b^n).(a^m-b^n)=a^{2m}-b^{2n};$$

y dice, *que la multiplicacion de la suma de dos cantidades por su diferencia, produce la diferencia de dichas cantidades dotadas con el esponente duplicado.*

En esta espresion generalisima están comprendidos todos los casos mas ó menos generales que se pueden imaginar: como por ejemplo,

$$(a+b)\times(a-b)=a^2-b^2,$$

espresion de que se hace uso con frecuencia en adelante, para descomponer cualquiera cantidad de la forma a^2-b^2 en sus factores $(a+b)$ y $(a-b)$.

LECCION III.

Dividir con enteros literales.

69. La espresion $N-d-d-d-....$ en que se halla repetida c veces la d, es la misma que $N-dc$ (58), ó la cantidad N despojada de tantas unidades cuantas vale $d\times c$. Si despues de hacer el calculo nada sobra en N, será

$$N=dc:$$

pero si N es mayor que dc, con el esceso r, que por supuesto ha de ser menor que d, podemos cifrar la ecuacion (3. 2.°)

$$N=dc+r.$$

La cuestion que nos ocupa es *dados* N *y* d *solamente, hallar* c, *deduciendo al fin* r, *si hay*: y se deja conocer, que el método de restas consecutivas nos conduciria por fin al residuo cero ó r, y que el número de las que se hiciese para llegar al caso, seria c.

70. En vez de operacion tan penosa, hay un modo mas breve para llegar al mismo resultado: consiste en comparar la cantidad d á la cantidad N, y segun pronto veremos, deducir el número c de veces que d está contenida en N; operacion que se llama *dividir* N *por* d, que segun lo ya dicho (35) se indica en la espresion

$$\frac{N}{d},$$

y cuyo resultado equivale al número entero c en caso de ser $N=dc$; de suerte, que serán entonces ecuaciones legítimas

$$N=dc; \text{ y } \frac{N}{d}=c.$$

Mas, en el caso $N=dc+r$; despues de hallar el entero c sobra en N la parte r, menor que d; y el cociente ó número de veces que d está contenido en N será mayor que el entero c como $c+h$, espresando h necesariamente una cantidad menor que 1; y cuya relacion con las demas del cálculo hallaremos luego; y en este concepto son legitimas las ecuaciones

$$N=dc+r,\quad N=d(c+h);\quad \frac{N}{d}=c+h.$$

Los segundos miembros de las dos primeras igualdades forman por el principio fundamental (3. 5.°) la igualdad $dc+r=d(c+h)$, ó bien por el artículo (66), $dc+r=dc+dh$ y esta exige que sea $r=dh$, ó segun lo establecido antes

$$h=\frac{r}{d};$$

que es division impracticable por la circunstancia $d>r$ (69): y sustituyendo por h esta espresion en $\frac{N}{d}=c+h$, viene á ser conforme á la del artículo (35),

$$\frac{N}{d}=c+\frac{r}{d}.$$

En este cálculo general se usan tambien los nombres de N *dividendo*, d *divisor*, c *cociente*, r *residuo de dividendo*, y h ó su igual $\frac{r}{d}$ *residuo del cociente*; y las ecuaciones arriba escritas dicen que *el dividendo equivale al producto del divisor por el total cociente, ó bien al producto del divisor por solo el cociente entero, restituyendo ademas al producto el residuo* r *en caso de haberle.*

La cuestion está siempre reducida á *encontrar el factor entero* c, *que multiplicado por el divisor* d *conocido, nos dé un producto que no esceda de* N, *ni le falte para igualarse con* N *cantidad tan grande ó mas que* d, *comprobando la certeza con restar del dividendo el producto* d c *para deducir la diferencia* r, *que ha de ser menor que* d, *como se ha dicho.* Ejemplos aritméticos de los dos casos practicables de la division y del impracticable, son los siguientes:

$$\frac{28}{4}=7, \text{ á causa de } 28=4\times7;$$

$$\frac{27}{4}=6+\frac{3}{4}, \text{ á causa de } 27=4\times6+3;$$

$$\frac{3}{4} \text{ impracticable, á causa de ser 3 menor que 4.}$$

El primero da cociente exacto, el segundo aproximado, y en él se verifica el hallarse su cociente 6 entre los dos estremos enunciados, de no ser el producto 4×6 mayor que 27, y de faltarle para ser igual una cantidad menor que el divisor 4.

71. Antes de proceder á las divisiones con las cantidades algébricas, necesitamos algunos principios que podemos inferir de los establecidos en la multiplicacion, atribuyendo siempre á las letras del cálculo tal generalidad, que pueda representar cada una de ellas cualquiera cantidad y frase del cálculo, sea monómia ó polinómia.

1.° En $\frac{a}{b}=c$, el dividendo a es producto del divisor b y el cociente c (70): y por ello el signo de este ha de ser cual convenga para que á dicho producto resulte el signo del dividendo (66. 9): es decir, *que á signos iguales en dividendo y divisor corresponde positivo en el cociente, y negativo cuando sean aquellos desiguales*; como en la tabla siguiente se halla escrito:

$$\frac{+a}{+b}=+c;\quad \frac{-a}{-b}=+c;\ \text{por causa de}\ \begin{cases}+b\times+c=+a\\ -b\times+c=-a\end{cases}$$

$$\frac{-a}{+b}=-c;\quad \frac{+a}{-b}=-c;\ \text{por causa de}\ \begin{cases}+b\times-c=-a\\ -b\times-c=+a\end{cases}$$

2.° De la igualdad $a=1\times a$, (66. 2.°) viene, en caso de ser a cociente (70), la demostracion $\frac{a}{1}=a$, luego 1 *es divisor tácito de toda cantidad.*

Tambien puede ser a divisor; (66. 1.°) y (70) y entonces, $\frac{a}{a}=1$ dice que *todo número dividido por otro igual, da* 1 *de cociente.*

3.° Sabemos (70) que son ecuaciones legítimas $\frac{a}{b}=c$ y $a=b\times c$. Por otra parte, si se multiplican por cualquiera cantidad m las dos iguales de la última ecuacion, (66. 8.°), hay entre los productos la igualdad (66. 1.°) $ma=mb\times c$, de la cual procede legitimamente segun el artículo (70)

$$\frac{ma}{mb}=c,\ \text{que ha venido de}\ \frac{a}{b}=c.$$

Luego, *aunque se multipliquen dividendo y divisor por una misma cantidad, no varía su cociente*: que es el teorema de aritmética (41. 5.ª) generalizado, para todos los sistemas de numeracion. Segun esto,

$$\frac{48}{25}=\frac{48\times3}{25\times3};\ \frac{6\,hpq}{7b^2}=\frac{6hpq\times(a^m-b)}{7b^2\times(a^m-b)}.$$

4.° Siendo cierta la igualdad $\frac{a}{b}=c$, tambien lo será por el artículo (70) $a=bc$; como tambien por el (66. 8.°) $ma=mbc$; y por el mismo artículo (70), $\frac{ma}{b}=mc$. Esta espresion, á que se ha venido de la igualdad $\frac{a}{b}=c$, nos dice, *que multiplicar por cualquiera cantidad* m *el dividendo solo, es hacer* m *veces mayor el cociente.* Asi sucede, por ejemplo, en las divisiones aritméticas que siguen

$$\frac{8}{4}=2 \text{ y } \frac{8\times3}{4} \text{ ó } \frac{24}{4}=6;$$

en donde vemos que el cociente 6 es 3 veces mayor que el 2, por haber hecho 3 veces mayor el dividendo solo.

Inversamente, si se multiplica por m solo el divisor de $\frac{a}{b}=c$, ha de resultar otro distinto cociente; supongámosle k, ó bien $\frac{a}{bm}=k$; de donde proceden (70) $a=bmk$ y $\frac{a}{b}=mk$. Las dos cantidades equivalentes á $\frac{a}{b}$ forman la igualdad $c=mk$, la cual dice que c es m veces mayor que k, ó bien, que *multiplicar solo el divisor por cualquiera cantidad* m, *es hacer* m *veces menor al cociente.* Esto sucede á $\frac{24}{6}=4$ respecto de $\frac{24}{12}=2$.

5.° Tratando de indagar si en cuanto á dividir dos cantidades iguales a y b por otra cualquiera m, se verifica la verdad análoga á la de poderlas multiplicar (66, 8.°), discúrrase del modo siguiente. Siendo $a=b$, y supuesto $a=mh$, tambien será $b=mh$; y por el artículo (70), tambien $\frac{a}{m}=h$ y $\frac{b}{m}=h$; de consiguiente, las dos cantidades iguales á la h forman la ecuacion

$$\frac{a}{m}=\frac{b}{m}, \text{ que ha venido de } a=b.$$

Luego, *aunque se dividan dos cantidades iguales por una misma cualquiera, resulta igualdad entre los dos cocientes.*

6.° Puesto que por el principio 3.° tenemos $\frac{ma}{mb}=\frac{a}{b}$ el segundo miembro de esta igualdad resulta despojando del factor m comun al dividendo ma y divisor mb, de la espresion equivalente $\frac{ma}{mb}$. Luego, *se puede quitar de la espresion un factor comun á dividendo y divisor, sin que varíe por esto el cociente.*

Con arreglo á este principio serán legítimas las equivalencias $\frac{ma}{m}=a$; $\frac{mb}{m}=b$: y de consiguiente, el venir de $\frac{ma}{mb}$ á su igual $\frac{a}{b}$ por supresion del factor comun m, es en realidad lo mismo que dividir por él á dividendo y divisor. Por tanto, el teorema precedente espresado en otro lenguage será, que *es lícito dividir por una misma cantidad el dividendo y el divisor simultáneamente.* En este principio general está comprendido el que se demostró en el artículo (28. 2.ª), de suprimir igual número de ceros en dividendo y divisor; pues, $\frac{50}{20}$ ó su igual $\frac{5\times10}{2\times10}$ es equivalente á $\frac{5}{2}$.

7.° De las divisiones $\frac{a}{b}$, $\frac{g}{b}$, $\frac{k}{b}$,....., suponiendo $c+h$, $c'+h'$, $c''+h''$..... los cocientes completos (70), vienen

$$a=b(c+h),\quad g=b(c'+h'),\quad k=b(c''+h'')......,$$

$$\frac{a}{b}=c+h,\quad \frac{g}{b}=c'+h',\quad \frac{k}{b}=c''+h'',.....,$$

La suma de primeros miembros debe ser igual á la de segundos (3. 6.°), de que resultarán

$$a+g+k+....=b(c+h+c'+h'+c''+h''+....),$$

$$\frac{a}{b}+\frac{g}{b}+\frac{k}{b}+....=c+h+c'+h'+c''+h''+....$$

Dividiendo por b la primera de estas ecuaciones y suprimiendo despues el factor b en dividendo y divisor, tendremos

$$\frac{a+g+k}{b}=\frac{b(c+h+c'+h'+c''+h'')}{b}=c+h+c'+h'+c''+h''...$$

Observemos que igual valor tiene $\frac{a}{b}+\frac{g}{b}+\frac{k}{b}$ en la ecuacion precedente; y por tanto estará bien deducida la equivalencia

$$\frac{a+g+k}{b}=\frac{a}{b}+\frac{g}{b}+\frac{k}{b};$$

la cual nos dice, *que el cociente de un polinomio dividido por cualquiera cantidad, es la suma de cocientes que provienen de dividir cada parte ó término del dividendo por todo el divisor*. La demostracion es general, sea el divisor monomio ó polinomio, porque la letra b puede representar á toda cantidad compuesta de cualquiera modo, sin que varíe por ello el curso de dicha demostracion.

8.° Segun este principio, será exacta la igualdad

$$\frac{ab+g+k}{b}=\frac{ab}{b}+\frac{g}{b}+\frac{k}{b}:$$

el primer término de la cantidad descompuesta, cual está representada en el segundo miembro, es reductible á cociente exacto a; el segundo y tercero no se hallan en este caso; mas, por lo demostrado en el caso anterior, es

$$\frac{g}{b}+\frac{k}{b}=\frac{g+k}{b}:$$

de suerte, que tenemos la consecuencia

$$\frac{ab+g+k}{b}=a+\frac{g+k}{b}.$$

Esta igualdad nos dice que, *despues de hacer la division en la parte posible, se deje lo demas en forma de una division indicada*; lo cual está conforme con lo que digimos al principio, en cuanto al residuo de la division (70).

9.° El teorema que acabamos de inferir es general para todos los casos, pero aun se necesita otro para su aplicacion. El objeto de este cálculo es hallar un cociente entero, que multiplicado por el divisor produzca el dividendo, con agregacion del residuo, si lo hubiese (70). Sea el dividendo $(a+l).(c+k)$, y el divisor $a+l$.

En la division $\dfrac{(a+l).(c+k)}{a+l}$,

sin duda es $c+k$ el cociente, pues á esto queda reducida la espresion suprimiendo el factor comun del dividendo y divisor; y digamos que c es primera parte y k segunda del cociente. Esto entendido, trátese de dar otra forma sólo al dividendo por medio de la multiplicacion que en él está indicada (66.4.°); como

$$(a+l).(c+k)=c.(a+l)+k.(a+l):$$

y restando de las dos cantidades iguales la parte $c.(a+l)$, viene

$$(a+l).(c+k)-c(a+l)=k(a+l).$$

Luego, si despues de *hallar una parte* c *del cociente, se resta del dividendo el producto de dicha parte multiplicada por el divisor, el residuo de esta operacion es igual al producto del divisor por lo demas del cociente.*

Dividiendo por $a+l$ los dos miembros de la ecuacion última, queda el segundo reducido á k, segunda parte del cociente. Luego, el *residuo que de dicha resta venga es un dividendo nuevo, en que se debe hallar el segundo término* k *del cociente por igual método que el primero.*

Fácil es conocer que rije tambien este principio acerca del residuo que del nuevo cálculo resulte, para hallar el tercer término del cociente, si le hay, considerando la suma de los dos términos hallados como primera parte: y lo mismo en cuanto á las restas sucesivas: de modo, que *solo debe buscarse cada vez un término del cociente.* Está pues completamente generalizado el procedimiento que se observa de la division en las cantidades aritméticas del actual sistema.

72. Con la guia de los principios en que se acaba de fundar la division en general, ninguna dificultad ofrecerá este cálculo en las operaciones algébricas de las tres clases; que son, dividendo y divisor monomios, dividendo polinomio y divisor monomio, y dividendo y divisor polinomios.

1.ª clase. Si dividendo y divisor son monomios, el cálculo consistirá en *simplificar* la espresion propuesta, suprimiendo los factores comunes á uno y otro, si los hay (71. 6.º), y sino, en dejar indicada la operacion en la forma $\frac{a}{b}$ segun convenio. Por lo cual,

$$\frac{4ab^3p}{bc}, \text{ que es como } \frac{4abb^2p}{bc}$$

despues de reducida por supresion de factores comunes viene á ser $\frac{4ab^2p}{c}$.

Asimismo, $\frac{6b^{2n}p}{2b^nc}$ es como $\frac{2.3b^nb^np}{2b^nc}$; y suprimiendo factores comunes queda $\frac{3b^np}{c}$.

Vemos que todo el artificio viene á ser la reducion de los esponentes que tengan las letras comunes.

Para deducir la regla en cuanto á estos, divídase por $p^n q$ la cantidad p^{m+n}, que admite la forma $p^m \times p^n$ segun lo demostrado (66. 6.°); y será

$$\frac{p^{m+n}}{p^n q} \text{ equivale á } \frac{p^m p^n}{p^n q} \text{ y á } \frac{p^m}{q}.$$

Obsérvese que $\frac{p^m}{q}$ equivale á $\frac{p^{m+n-n}}{q}$: luego, *cuando haya factores comunes en dividendo y divisor, la reducion se hace restando los esponentes de dichos factores.*

Por esto, a^h dividido por a^k, cual está espresado en

$$\frac{a^h}{a^k}, \text{ es como } \frac{a^{h-k}}{1} \text{ ó como } a^{h-k}.$$

Mas puede suceder que el esponente del divisor esceda al que tenga el dividendo, y entonces $h-k$ será cantidad negativa (64): como en $\frac{a^m}{a^{2m}}$, que viene á ser a^{m-2m}, y por último a^{-m}. Este es el origen de los esponentes negativos.

Cuando sean iguales dividendo y divisor, está demostrado que resulta 1 de cociente (71. 2.°), y por esto será

$$\frac{a^m}{a^m}=1.$$

Ademas, por la regla precedente se verifican las equivalencias

$$\frac{a^m}{a^m}=a^{m-m}=a^0;$$

y entre las dos espresiones de una misma cantidad, resulta

$$a^0=1.$$

Luego, *toda cantidad cuyo esponente sea cero equivale á* 1, *y es procedente de dividir una cantidad por sí misma.*

En cuanto al signo del cociente hallamos al principio la regla general, y segun ella estan adjudicados el + ó el — á los cocientes respectivos de la tabla siguiente:

$$\frac{+15a^4bc^3}{+3b^2cd}=+\frac{5a^4c}{bd};\quad \frac{-14b^3}{-7b^5}=+\frac{2}{b^2};$$

$$\frac{+24pq^h}{-6bq^2}=-\frac{4pq^{h-2}}{b};\quad \frac{-5h^2kp}{+7ak^2}=-\frac{5h^2p}{7ak}.$$

II.ª *clase.* La division de un polinomio algébrico por un monomio se debe hacer término por término (71. 7.º), y para ejecutarla bastan las reglas establecidas en la de monomios: por tanto, no debemos dudar en el caso que á continuacion se presenta por ejemplo,

$$\frac{4a^3mn-pm^4+bd^2c^2}{2am}=\frac{4a^3mn}{2am}-\frac{pm^4}{2am}+\frac{bd^2c^2}{2am}$$

que se reduce á $2a^2n-\frac{pm^3}{2a}+\frac{bd^2c^2}{2am}$.

En este método está comprendida tambien la division de un polinomio por otro en fuerza de la generalidad con que se demostró el principio (71. 7.º). Propónese pues, dividir así $2mg+abd+2mh$ por $g+h$; y como este caso nos ofrece la circunstancia de que el dividendo es reductible á la forma $2m(g+h)+abd$, la operacion ejecutada será como sigue:

$$\frac{2m(g+h)+abd}{g+h}=2m+\frac{abd}{g+h}.$$

III.ª *clase.* Pero no en todos los casos podemos hallar con igual facilidad el resultado mas simple de la division á que debe siempre aspirar el calculador; y por esto, la de un polinomio algébrico por otro se hace generalmente á manera que con las espresiones aritméticas guiando los principios (71, 7.º, 8.º y 9.º). Para ello haremos una útil advertencia.

El objeto de la division es hallar un factor que multiplicado por el divisor produzca el dividendo, salvo el residuo si tuviere: y bien se pudo notar (66.6.º) y (67), cuando se trató de la multiplicacion, que si en algunos términos del multiplicando y multiplicador hay letra comun, al formar los productos parciales, el mayor esponente de esta letra viene de los dos términos en que mayor le tenga, y que dicha letra se halla á lo menos en tantos términos del producto cuantos tenga el factor por quien se multiplica. Lo cual sirve de gobierno para ordenar los términos del dividendo y divisor, de suerte que el primer término de cada uno sea el de letra comun de mayor esponente, y en seguida los que tengan la misma letra segun el valor del esponente.

Sea dividendo $4a^3b—3ab^3+2b^4+6a^4—9a^2b^2$ y divisor $2ab—b^2+2a^2$. en este ejemplo se pueden ordenar los términos, ya segun la escala de los esponentes de b, ya segun los de a, por hallarse ambas letras en igual caso. Elíjase pues a; y despues de haber colocado al dividendo y al divisor como en aritmética, compárense sus términos primeros, y resultará

$$\frac{6a^4}{2a^2}=3a^2,$$

primer término del cociente. Ahora se ha de multiplicar este por todo el divisor, para restar su producto de todo el dividendo. Escribirémos ademas todo el cálculo, para en su vista referir la esplicacion restante:

$$\begin{array}{l|l}
\quad 6a^4+4a^3b—9a^2b^2—3ab^3+2b^4 & 2a^2+2ab—b^2 \\ \hline
1.^{\circ}\text{ prod.}—6a^4—6a^3b+3a^2b^2 & 3a^2—ab—2b^2 \\
\text{———————} & \\
1.^{\circ}\text{ resid.}\ldots\ldots\ldots —2a^3b—6a^2b^2—3ab^3+2b^4 & \\
2.^{\circ}\text{ prod.}\ldots\ldots\ldots +2a^3b+2a^2b^2—ab^3 & \\
\text{———————} & \\
2.^{\circ}\text{ resid.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots —4a^2b^2—4ab^3+2b^4 & \\
3.^{\circ}\text{ prod.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +4a^2b^2+4ab^3—2b^4 & \\
\text{———————} & \\
3.^{\circ}\text{ resid.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0. &
\end{array}$$

Quedamos antes en escribir el primer producto bajo el dividendo con signos cambiados, porque es restador (61), y haciendo así la redución entre el dividendo completo y dicho producto, lo que resultare se escribe bajo de una raya, y será resíduo primero y nuevo dividendo; que tambien se debe ordenar por los esponentes de la letra comun. Su primer término $-2a^3b$ dividido por $2a^2$ da el cociente $-ab$: multiplicando este por todo el divisor, da lo que llamamos producto segundo que se escribe con signos cambiados: y de la reducion entre el nuevo total dividendo y dicho producto resulta el segundo residuo para tercer dividendo. El cociente de su término primero dividido por $2a^2$ es $-2b^2$; y multiplicando este por el divisor completo, escríbase el tercer producto debajo del segundo residuo, de los cuales procede cero para residuo tercero. Este resultado no hace solo ver que la operacion está concluida, sino que lo propuesto para dividendo es producto cabal de dos factores, que son el divisor y el cociente $3a^2-ab-2b^2$.

Cuando hay residuo final, esto es, cuando resulte uno en que no exista ya la letra comun, ó sea de menor esponente que en el divisor, y por ello no pueda resultar término entero para el cociente, está concluida la operacion, y en seguida del cociente se escribe dicho residuo con el divisor bajo él, como en el cálculo aritmético. Esto sucede en el siguiente caso:

$$\begin{array}{l|l}
a^2h^3-bkh^2+a^2hq+bmk & h^2+q \\
\cline{2-2}
-a^2h^3 \qquad -a^2hq & a^2h-bk+\dfrac{bmk+bkq}{h^2+q}. \\
\cline{1-1}
\qquad -bkh^2+bmk & \\
\qquad +bkh^2+bkq & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad bmk+bkq &
\end{array}$$

Aun se podrian ordenar el residuo y el divisor por la letra q, pero volveria á reproducirse nuevamente h^2, y el siguiente residuo se hallaria respecto de esta letra en igual caso, resultando cálculo inútil é interminable.

Si en dividendo ó divisor hay varios términos con un mismo esponente de la letra por quien se ordena el polinomio conviene incluirlos en un paréntesis sacando fuera el factor de igual esponente, y se trata á este producto como un término solo.

73. Cuando se quiere reconocer si una cantidad es factor de otra, se averigua dividiendo esta por aquella. Tratándose

por ejemplo de indagar si $a-b$ es factor de a^3-b^3, el cálculo siguiente manifiesta que lo es:

$$\begin{array}{r|l} a^3-b^3 & a-b \\ \cline{2-2} -a^3+a^2b & a^2+ab+b^2 \\ \cline{1-1} +a^2b-\ b^3 & \\ -a^2b+ab^2 & \\ \cline{1-1} +ab^2-b^3 & \\ -ab^2+b^3 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

El resultado nos induce á indagar si $a-b$ es tambien factor de a^m-b^m; y llevando el cálculo hasta cualquiera número de términos del cociente, se observa que vienen estos con arreglo á la siguiente ley en que está comprendido el caso anterior:

$$\frac{a^m-b^m}{a-b}=a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+a^{m-4}b^3+....+b^{m-1}.$$

Nos permite la ley con que los términos del cociente salen formados, el escribir por último b^{m-1}; pues los esponentes de a van decreciendo y creciendo los de b de unidad en unidad, y por consecuencia de analogía se concluye que por fin ha de llegar el término a^0b^{m-1}, que es b^{m-1}. Para esta asercion concurre ademas la circunstancia de que, si se hubiesen ordenado por b dividendo y divisor, multiplicados por -1 la espresion $\frac{b^m-a^m}{b-a}$ que es igual á la propuesta, daria el cociente mismo que ella, pero en forma que los esponentes de b irian decreciendo desde b^{m-1} primer término, y creciendo los de a desde a^0.

Si es $b=1$ en la espresion general, tendremos el siguiente caso,

$$\frac{a^m-1}{a-1}=a^{m-1}+a^{m-2}+a^{m-3}+....+1.$$

Esta diferencia de ir decreciendo ó creciendo los esponentes de la letra comun en el cociente, procede, como es fácil observar en la igualdad

$\frac{a^m-b^m}{a-b}=\frac{b^0a^m-a^0b^m}{b^0a^m-a^0b^m}$, de que se ordenen dividendo y divisor por el mayor esponente de la letra comun ó por el menor: y la causa de ordenarse habitualmente por el mayor, es la conveniencia de obtener un cociente cuyos términos prosigan por el orden de mayor á menor en lo posible, pues las espresiones de esta forma inspiran la idea de un polinomio que camina a su fin. Lo dicho acerca del crecimiento en los esponentes sucesivos cuando se ordenan de menor á mayor en dividendo y divisor, se ve tambien claro en el ejemplo siguiente, cuyo cálculo se suprime desde el tercer término del cociente

$$
\begin{array}{l|l}
a+a^3+a^5+\ldots & a+a^2+a^4+\ldots\ldots \\
\underline{-a-a^2-a^4\qquad\qquad\quad} & \overline{1-a+2a^2-\ldots\ldots} \\
\quad -a^2+a^3-a^4+a^5 & \\
\quad \underline{+a^2+a^3\qquad +a^5} & \\
\qquad +2a^3-a^4+2a^5 & \\
\qquad \underline{-2a^3-2a^4\qquad -2a^6} & \\
\qquad\qquad -3a^4+2a^5-2a^6 &
\end{array}
$$

El siguiente ejemplo servirá de ensayo para el objeto de este artículo, y al mismo tiempo para el método de hacer la division cuando la letra por quien se ordena el polinomio se halla con un mismo esponente en varios términos, como se indicó al fin del artículo precedente. Se trata de dividir

$$3a^2b^2+abc+2a^2bh+ach-a^2h^2 \text{ por } 3ab-ah+c;$$

ó bien, incluyendo en paréntesis los coeficientes de a^2 y de a por quien se ordenan los polinomios, dividir

$$a^2(3b^2+2bh-h^2)+a(bc+ch) \text{ por } a(3b-h)+c;$$

y el cálculo será

$$
\begin{array}{l|l}
a^2(3b^2+2bh-h^2)+a(bc+ch) & a(3b-h)+c \\
\underline{-a^2(3b^2-bh)\qquad -abc} & \overline{ab+ah} \\
a^2(3bh-h^2)+ach & \\
\underline{-a^2(3bh-h^2)-ach} & \\
\qquad 0 &
\end{array}
$$

LECCION IV.

Algunas propiedades de los números.

1.ª *Descomposicion del número en sumandos.*

74. Representando con letras las cifras de aritmética; sean ....*dcba*, por el mismo orden con que están escritas, las de un número á cuyo valor llamamos A; pero sin que se confunda esta significacion que damos aquí á la fila de letras, con la que tiene consignada en álgebra (66. 1.º). En todo sistema de numeracion arreglado á la ley de proceder segun escala uniforme de múltiplas las unidades consecutivas, y que tenga n cifras; cada una de las arriba escritas, y cuantas puedan agregarse á la fila marcada con los puntos, vale n veces mas que si ocupara el siguiente lugar hácia la derecha. Por tanto, la espresion algébrica general de cualquiera número A descompuesto en sumandos, en todos los sistemas de numeracion conforme á escala constante, será cual está escrita en el segundo miembro de la equivalencia

$$A = \ldots\, dn^3 + cn^2 + bn + a \ldots \text{ (*)}.$$

Dos cuestiones hay comprendidas en esta espresion; cuyo segundo miembro tiene *forma analítica* porque representa descompuesto ó *analizado* el número, y el primer miembro tiene *forma sintética* porque representa reunidas todas las partes del número. 1.ª *Dadas las cifras aritméticas* a,b,c,d,.... *y el número* n *de las que hay en el sistema, hallar el valor* A *que espresa su conjunto cuando estan ordenadas en la fila.* 2.ª *Dados los números* A *y* n, *hallar cada cifra segun el orden de las unidades que espresan.* La primera se reduce meramente á traducir la espresion sintética de un número á la analítica equivalente. En cuanto á la segunda cuestion discúrrase que, dividiendo por n toda la igualdad (71. 7.º y 8.º) será

$$\frac{A}{n} = dn^2 + cn + b + \frac{a}{n};$$

luego, el resíduo a de esta division es la cifra de las unidades simples. Divídase por n tambien el entero cociente hallado, dn^2+cn+b, y resultará $dn+c+\frac{b}{n}$, apareciendo la segunda cifra b en el resíduo. La tercera cifra c se hallará dividiendo el segundo cociente por n; y asi sucesivamente.

Para resolver dichas dos cuestiones hay que suponer valor á n: el actual sistema de numeracion, por ejemplo, consta de diez cifras, y por ello debe ser $n=10$: con que, todo número A de esta escala se halla espresado analíticamente por el segundo miembro de la igualdad

$$A=\ldots\ d\times10^3+c\times10^2+b\times10+a\ (**):$$

como por ejemplo,

$$4728=4\times10^3+7\times10^2+2\times10+8,$$

segun sabemos ya desde que se esplicó el mecanismo de dicho sistema. Tratándose de hallar cada cifra, la division manifiesta efectivamente en el resíduo la cifra 8 de las unidades simples; y siguiendo se hallarian las demas:

$$\frac{4728}{10}=4\times10^2+7\times10+2+\frac{8}{10}.$$

Supóngase otro sistema de numeracion con cinco cifras, que sean las primeras del actual, 0,1,2,3,4; y segun aquel dé las cinco, al número 243, por ejemplo, corresponde la espresion

$$243=2\times5^2+4\times5+3.$$

Y como en este sistema parece deberiamos decir que la escala sigue por el orden, unidad, quintena, veinticinquena etc., se sigue que dicha espresion es la suma de 2 veinticinquenas, mas 4 quintenas, mas 3 unidades, ó bien $2\times25+4.5+3$; que segun el sistema décuplo es 73. Obsérvese que tiene una cifra mas la espresion 243 de la de la escala quintupla, que la 73 de la décupla que usamos actualmente, significando las dos una misma cantidad.

Al contrario, para conocer las cifras del número que en el sistema quíntuplo espresen el 73 de nuestro sistema, divídase 73 por 5. El cálculo que se ve al margen manifiesta en el residuo la cifra 3, de las unidades simples que hay en el número pedido segun el sistema quíntuplo. Dividiendo por 5 el cociente 14 entero del cálculo anterior, la operacion de la cifra 4 en el residuo, para las unidades de segundo orden que hay en el número pedido. Divídase el cociente 2 por

$$\begin{array}{r|l} 73 & 5 \\ \hline 23 & 14+\frac{3}{5} \\ 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 14 & 5 \\ \hline 4 & 2+\frac{4}{5} \end{array}$$

5, y en el resultado $0+\frac{2}{5}$ el residuo 2 manifiesta que 2 es la cifra de mayores unidades de dicho número. Escritas en fila por su orden las tres cifras halladas, resulta 243 conforme al sistema quíntuplo, la espresion del número espresado por 73 en el décuplo nuestro.

Basta lo dicho en esta digresion acerca de las dos cuestiones, para conocer que cuantas mas cifras hay en un sistema de numerar segun escala de unidades múltiplas, tantas menos de aquellas entran en la espresion de una cantidad. Y no se crea que cada número admite solamente la espresion analítica de partes aditivas que acabamos de manifestar, pues ya se sabe (18) que puede ser descompuesto en monomios de diferentes modos; aunque para el objeto de ahora hemos establecido el polinomio general (*) arreglado á escala.

II.ª *Descomposicion del número en factores.*

75. Los números tambien se consideran descompuestos en factores, aunque no es tan arbitraria esta descomposicion como en sumandos El número que solo tiene por factores el mismo y la unidad, se llama *primero* ó *simple*, como en el sistema de numeracion actual (42); y todos los de esta clase, escepto el 2 y el 3; se deduce por analogía que están comprendidos en la espresion general $6m\pm1$, indicando con m cualquiera número entero imaginable desde cero en adelante, y con el doble signo $\pm$ la idea de que tanto $6m+1$, como $6m-1$ pueden espresar número simple: y se pronuncia diciendo *todo número sim-*

ple es igual á un múltiplo de 6, *aumentado ó disminuido en* 1. Mas, la proposicion recíproca no es cierta; porque hay números comprendidos en $6n\pm1$ que no son simples.

El número que consta de otro ú otros factores, ademas del mismo y la unidad, se llama *compuesto*, como en el sistema nuestro (42), y su supresion general es $\alpha^p\ \beta^q\ \gamma^t$ ... conforme á la definicion, representando las cifras $\alpha, \beta, \gamma,$... los factores simples, y $p, q, t,$... las veces que cada número simple es factor; espresion que tiene tambien *forma analítica*, porque en ella el número aparece descompuesto con cierto orden.

En el problema general que aquí se propone, de hacer la descomposicion del número de cualquiera sistema en sus factores simples y compuestos, está comprendido el que se resolvió en aritmética (42), (43) y (44) en cuanto á los números del sistema décuplo: y puesto que los razonamientos en que se fundaron aquellas teorías no dependen de condicion alguna de sistema especial, se sigue que son aplicables generalmente. Repítanse pues aquí si se quiere, y se deducirán los siguientes principios generales á todo sistema. 1.° Los factores simples del número se obtienen, sin que se oculte alguno, dividiendo el número desde luego por el simple menor del sistema; despues el cociente por el mismo divisor, y en caso de no ser exacto éste, por el siguiente número simple; y asi sucesivamente hasta llegar á un cociente que sea número simple (42); cesando de indagar factores, cuando se haya obtenido uno cuya segunda potencia esceda al número propuesto (43). 2.° Este será producto de todos sus factores simples (44), ó bien, $\alpha^p\ \beta^q\ \gamma^t$, como antes hemos asegurado tambien por la definicion misma. 3.° Todos los factores compuestos, binarios, ternarios, cuaternarios, &c., se obtendrán de practicar las multiplicaciones indicadas en la espresion

$$(1+\alpha+\alpha^2+...)\times(1+\beta+\beta^2+...)\times(1+\gamma+\gamma^2+...)\times......$$

entre quienes aparecerán tambien todos los simples.

Admitiendo pues como demostrados estos principios, debiéramos proponer para ejemplos de la descomposicion algunos números de sistemas arbitrarios; pero atendiendo á que fueron pocos los presentados en aritmética, sirvan de ensayo los números del sistema décuplo 210, 56, 1800, 3225, cuyos actores simples resultan de los cálculos que siguen:

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1800 & 2 \\ 900 & 2 \\ 450 & 2 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3225 & 3 \\ 1075 & 5 \\ 215 & 5 \\ 43 & 43 \\ 1 & \end{array}$$

Hallados los factores simples, y formados los polinomios que se han de multiplicar, los productos que diere la multiplicacion son todos los factores, simples y compuestos.

Al primer número propuesto corresponde el

cálculo indicado... $(1+2).(1+3).(1+5).(1+7)$;
al segundo.......... $(1+2+4+8).(1+7)$;
al tercero........... $(1+2+4+8).(1+3+9).(1+5+25)$,
al cuarto............ $(1+3).(1+5+25).(1+43)$.

Para indagar si cada número simple es ó no factor del dividendo, hemos tenido que hacer una division, tal vez infructuosa; y á fin de evitar el empeñarnos en ella, será muy útil conocer de antemano en cualquiera número señales de si es factor suyo aquel que se quiera someter á la prueba; conocimiento útil en muchas otras necesidades del cálculo. Con este objeto haremos la siguiente analisis en los números del actual sistema, y por ella se podrá inferir la análoga que corresponderia en los de otro cualquiera.

1.ª Dividiendo por 2 la espresion (**) de A, resulta

$$\frac{A}{2}=\ldots\frac{d10^3}{2}+\frac{c10^2}{2}+\frac{b10}{2}+\frac{a}{2}=\ldots\frac{d\times(2\times5)^3}{2}+\frac{c\times(2\times5)^2}{2}+\frac{b\times(2\times5)}{2}+\frac{a}{2}.$$

Cada término del número descompuesto en que hay paréntesis da cociente exacto (71, 6.°), y de ser a múltiplo de 2 depende el que todo el número A sea divisible por 2. Luego, *todo número entero cuya cifra de unidades sea cero ó múltipla de* 2, *tendrá el factor* 2. Los números de esta clase decimos que son *pares*, y estan comprendidos en la espresion general $2m$, significando m el número de veces que 2 es factor, tales como 3568; 106; 310; &c. Llámanse *impares* los demas, y estan comprendidos en la espresion general $2m\pm1$.

2.ª Dividiendo por 5 la espresion (**), el resultado

$\frac{A}{5}=\ldots\frac{d(2\times5)^3}{5}+\frac{c(2\times5)^2}{5}+\frac{b(2\times5)}{5}+\frac{a}{5}$ hace ver (71. 6.º), que 5 *es factor de todo número cuya cifra de unidades sea cero* ó 5; tales como 635; 860; 1175; &c. *Por la misma razon habrá tambien el factor* 10 *siempre que sea cero la última cifra.*

3.ª Divídase por 4 la espresion (**), descomponiendo al mismo tiempo segun conviene el factor aritmético de los dividendos: y

$\frac{A}{4}=\ldots\frac{d\times(10\times4\times25)}{4}+\frac{c\times(4\times25)}{4}+\frac{b\times10\times a}{4}$ hace ver, que 4 *es factor de todo número cuyas dos últimas cifras juntas representen un múltiplo de* 4 *como* 516; 9432; 10040; *&c.*

En $\frac{A}{8}=\ldots\frac{d\times(125\times8)}{8}+\frac{c\times10^2+b\times10+a}{8}$ aparece, que 8 *es factor del número en que las tres cifras últimas juntas representen un multiplo de* 8; *como* 63120; 5296, &c. Igualmente que 8 ó 2^3 ha de ser factor del conjunto de las tres últimas cifras para ser A divisible por 8; asi tambien 16 *ó* 2^4 *lo ha de ser del periodo que forman las cuatro últimas cifras reunidas para que sea el número* A *divisible por* 16, y asi sucesivamente *para que* 2^p *sea factor del número, ha de ser divisible por* 2^p *el periodo que formen las* p *últimas cifras.*

4.ª Dividiendo por 9 cualquiera de las unidades 10, 100, 1000,...., se halla el residuo 1; luego, la division

$\frac{d10^3}{9}+\frac{c\,10^2}{9}+\frac{b\,10}{9}+\frac{a}{9}$ dará la suma de residuos parciales

$\frac{d}{9}+\frac{c}{9}+\frac{b}{9}+\frac{a}{9}$. Por esta causa, si $\frac{d+c+b+a}{9}$, *ó bien la suma de cifras de un número como si representasen unidades simples, dividida por* 9 *da cociente exacto, el número* A *es múltiplo de* 9; tal como 9783, porque sumadas las cifras de que consta como si fuesen unidades simples ascienden á 27 que contiene tres veces al 9; como se deja ver en $\frac{9+7+8+3}{9}=\frac{27}{9}=3$.

5.ª Dividiendo por 3 cualquiera de las unidades 10, 100, 1000, da siempre el residuo 1; y por la misma razon que antes no puede menos de *ser el 3 factor del número* A, *siempre que de cociente exacto* $\frac{d+c+b+a}{3}$, *que es la suma de cifras como unidades simples dividida por* 3. En este caso se hallan 9783; 34215; &c.

6.ª Para el factor 7 obsérvese, que $\frac{1}{7}$ da 1 de residuo, $\frac{10}{7}$ da el residuo 3; $\frac{10^2}{7}$ da 2; $\frac{10^3}{7}$ da 6; $\frac{10^4}{7}$ da 4; $\frac{10^5}{7}$ da 5. Desde $\frac{10^6}{7}$ empieza otra vez el orden de residuos 1, 3, 2, 6, 4, 5, y llegando al último vuelven á reproducirse con el mismo orden siempre.

Luego, en $\frac{d10^3}{7}+\frac{c10^2}{7}+\frac{b10}{7}+\frac{a}{7}$ hay la suma de residuos de cociente $\frac{d\times6+c\times2+b\times3+a\times1}{7}$. Asimismo, cuando el número conste de seis cifras $fedcba$, la suma de residuos de cociente será

$$\frac{f\times5+e\times4+d\times6+c\times2+b\times3+a\times1}{7};$$

si el número constase de mas ó menos cifras, siempre se deben incluir en la suma los residuos correspondientes. Luego, *7 es factor de todo número en que sea divisible por 7 la suma de los productos que siguen; la última cifra multiplicada por la unidad; la penúltima por 3; la anterior por 2; la que antecede á esta por 6; la inmediata anterior por 4; la anterior á esta por 5; y asi otra vez las que preceden hácia el principio del número.* Tal es, por ejemplo 2751, que da

$$\frac{2\times6+7\times2+5\times3+1\times1}{7}=\frac{42}{7}=6.$$

7.ª Los residuos de $\frac{1}{11}$, $\frac{10}{11}$, $\frac{10^2}{11}$, $\frac{10^3}{11}$ son, 1, 10, 1, 10,......., reproduciéndose siempre los dos primeros. Luego, $\frac{d10^3}{11}+\frac{c10^2}{11}+\frac{b10}{11}+\frac{a}{11}$ dará la suma de residuos de cociente $\frac{d10+c+b10+a}{11}$; *y por ello,* 11 *es factor del número en que sea divisible por* 11 *la suma de cifras de lugar impar, juntamente con la suma de cifras de lugar par multiplicada por* 10, *empezando á contar los puestos desde la derecha.*

8.ª El residuo de la division $\frac{A}{6}$ será necesariamente menor que 6, ó una de las cifras 5, 4, 3, 2, 1, por lo dicho en la division (34). Si es 2 ó 4 dicho residuo, tambien el número será divisible por 2. Si es 3 el residuo, tambien el número divisible por 3. Si es 1 ó 5 el residuo, sobra ó falta 1 al número para ser múltiplo de 6. Luego, á *todo número que no es divisible por* 2 *ni* 3, *sobra ó falta* 1 *para ser divisible por* 6.

Hecha la enumeracion de las cualidades que caracterizan al número del sistema décuplo para ser factor suyo alguno de los que se espresan con una sola cifra, y aun varios de dos, suspendemos aqui esta analisis que continuada manifestaría las señales para otros varios factores consecutivos; y sin repetir aqui los procedimientos de hallar los factores simples; diremos, en cuanto á estos, que las propiedades demostradas en el artículo sirven al calculador para reconocer con poca pérdida de tiempo, si es ó no factor el que por su turno ha de ser sometido á la prueba. Esta economía de tiempo no se logra si el factor es grande, y por ello será mas conveniente hacer entonces el tanteo por la division.

III.ª *Casos de cociente exacto.*

76. Todo número descomponible en dos factores B y H será divisible por otro número P, siempre que éste sea factor de cualquiera de aquellos; porque sabemos (71. 6.º) que la frase $\frac{B\times H}{P}$ se reduce á cociente exacto suprimiendo el factor P comun de dividendo y divisor. Pero ahora proponemos demostrar la proposicion recíproca, ó bien, *que si* B×H *es divisible por* P *siendo* P *número primero, necesariamente será divisible por* P *uno de los factores* B *ó* H *del dividendo*. Si B no es divisible por P, sino que da el cociente c y el residuo r, tenemos la ecuacion (70)

$$B=Pc+r.$$

Por ser P número simple, si se quiere dividir P por r, dará tambien un cociente c' y un residuo r' segun la ecuacion

$$P=rc'+r'.$$

Tampoco entonces r dividido por r' dará cociente exacto; porque si lo diera, tendriamos el absurdo $\frac{P}{r'}$ número entero. Dividiendo pues, r por r', hallaremos un cociente c'', un residuo r'' y la ecuacion

$$r=r'c''+r''.$$

Sin que sea necesario proseguir el discurso, cuyo método consiste en dividir cada divisor por el residuo, nos consta (69) que r es menor que P, r' menor que r, y sucesivamente menor el residuo consecutivo: de suerte, que va éste acercándose á 1; y no puede menos de ser 1 el final, porque hasta entonces no pueden terminar las divisiones á causa de ser P número simple; como se puede cerciorar por la série de absurdos análogos al que antes hemos deducido. Supongamos terminadas en efecto las operaciones consecutivas, con el resto final 1, que vino del dividendo r', divisor r'' y cociente c''', ó bien con la ecuacion

$$r'=r''c''+1.$$

Volviendo ahora á repasar todas las ecuaciones desde la primera, multipliquemos por H y dividamos por P todos los términos de ellas, como es permitido (66, 8.° y 3.°) (71. 5.° y 7.°), y resultarán las siguientes:

$$\frac{BH}{P}=Hc+\frac{Hr}{P};\quad H=\frac{Hrc'}{P}+\frac{Hr'}{P}$$

$$\frac{Hr}{P}=\frac{Hr'c''}{P}+\frac{Hr'''}{P};\quad \frac{Hr'}{P}=\frac{Hr''c'''}{P}+\frac{H}{P}.$$

Segun la primera ecuacion de estas, si BH es divisible por P, debe tambien el último término Hr ser divisible por P. La segunda ecuacion dice, que siendo Hr divisible por P, lo es tambien Hr'. La tercera manifiesta que con dichas condiciones, Hr'' será divisible por P. Y en la ecuacion final vemos, que con las condiciones anteriores debe precisamente H ser divisible por P. La hilacion de nuestro razonamiento ha empezado desde suponer que BH es divisible por P sin serlo B, para venir á que necesariamente ha de ser tambien H divisible por P: luego, *para que un número compuesto de dos factores sea divisible por un número simple, necesariamente ha de ser divisible por éste uno de los dos factores, á lo menos.*

77. Segun el principio (71. 6.°), una division apurada hasta decimales dará cociente exacto con algunas de éstas, cuando sea divisible por el divisor el número 10.. por quien se multiplique el dividendo para la aproximacion. De aqui se deduce que, si en una division $\frac{a}{b}$ impracticable por enteros é irreductible es $b=2^m\times5^n$, que equivale á

(2.2.2... hasta m veces), (5.5.5.... hasta n veces),

se tendrá cociente exacto en decimales con añadir al dividendo *a* tantos ceros como unidades tenga el mayor esponente *m* ó *n*; pues entonces resulta $a\times100\ldots$ ó su igual,

$$a(2.2.2.\ldots \text{ hasta } m \text{ ó } n \text{ veces}).(5.5.5.\ldots\ldots \text{ hasta } m \text{ ó } n \text{ veces})$$

y destruyéndose los factores comunes, desaparecerá el divisor.

Por otra parte, segun lo demostrado en el artículo anterior, no pudiendo dar cociente cabal entero $\frac{a}{b}$, preciso es que en $\frac{a\times10\ldots}{b}$ sea *b* factor de 10... para que salga cabal en decimales. Luego, *no puede menos de ser* $\frac{a}{2^m\times5^n}$ *la forma general de las divisiones que den cociente exacto llevando el cálculo hasta las decimales necesarias, que serán tantas cuantas unidades valga el mayor esponente* m *ó* n. Asi, $\frac{a}{2^3\times5^4}$ dará cociente axacto con tres decimales, y lo mismo $\frac{a}{2\times5^3}$.

Cuando el divisor no es de tal forma, el valor del cociente será aproximado, tanto mas cuanto mayor sea el número de las decimales. Pero como el residuo es menor siempre que el divisor, y todos los residuos que puede haber en una division estan comprendidos entre el divisor y la unidad; al hallar una cifra del cociente suele aparecer en algun caso un residuo que ya lo fue al hallar otra cifra anterior; y por consiguiente vuelven á reproducirse los mismos restos y cocientes que hubo entre las dos restas iguales, y por el mismo órden. Cada porcion de cifras que asi resultan para el cociente se llama *periodo*: en algunos casos el periodo es de una sola cifra, por ser iguales todos los residuos, y entonces lo son todas las del cociente: otras veces el periodo consta de dos cifras que van alternando sin fin en el cociente, porque los restos vienen asi; el periodo suele tambien constar de tres, cuatro, cinco, &c., cifras, por haber tantos residuos diferentes entre dos iguales. Suele empezar el periodo, ya desde la primera cifra decimal, ya despues de algunas que no forman parte. Son ejemplos de tales accidentes los casos que siguen:

$$\frac{2}{3}=0{,}666\ldots;\quad \frac{3}{11}=0{,}272727\ldots;\quad \frac{38}{111}=0{,}342342\ldots\ldots,$$

$$\frac{4}{7}=0{,}571428571\ldots;\quad \frac{7}{12}=0{,}583333\ldots\ldots$$

78. Puede convenirnos el saber cuáles dividendo y divisor engendraron un cociente decimal dado. Para ello, si el cociente fuere exacto escríbase la espresion decimal en forma de una division indicada, como ya se sabe; y suprimiendo sus factores comunes, quedará restituida á la misma espresion que tenia antes de empezar el cálculo de las decimales. La razon del hecho se verá por el siguiente raciocinio. Espresando c el cociente de $\frac{a\times10\ldots}{b}$; á la igualdad $\frac{a\times10\ldots}{b}=c$ podemos (70) dar la forma $a\times10\ldots=c\times b$. Las dos cantidades que forman esta igualdad pueden ser divididas (71. 5.°) por $a\times b$; y entonces $\frac{a\times10\ldots}{a\times b}=\frac{c\times b}{a\times b}$ se reduce (71. 6.°) á la espresion $\frac{10\ldots}{b}=\frac{c}{a}$; la cual nos dice que a está contenida en c tantas veces como b en 10.... Sea pues h este número de veces, ó bien, $c=a\times h$ y $10\ldots=b\times h$. El cociente decimal es $\frac{c}{10\ldots}$, ó bien, $\frac{a\times h}{b\times h}$; y suprimiendo el factor comun h, queda reducido á la espresion generatriz $\frac{a}{b}$.

Divídase por ejemplo 12 por 25; y resultará $\frac{12}{25}=0{,}48$. Pero si, dado el número decimal 0,48 queremos hallar la division á que debe su origen, escríbase en la forma $\frac{48}{100}$, equivalente á $\frac{4\times12}{4\times25}$; y suprimiendo el factor comun 4, resulta $\frac{12}{25}$, de que vino en efecto el número decimal propuesto.

Si la espresion decimal es inexacta, puede corresponder á muchas divisiones, y no es posible averiguar á cuál precisamente, á menos que la decimal sea periódica: y entonces ocurren dos casos.

1.º Si empieza el período desde la coma, obsérvese la ley de los resultados $\frac{1}{9}=0,11111........$; $\frac{1}{99}=0,010101......$; $\frac{1}{999}=0,001001.....$; &c. Por ser el dividendo producto del divisor y cociente, las espresiones halladas son como las siguientes, $1=9\times0,11111.........$; $1=99\times0,010101.......$; $1=999\times0,001001.....$
Por otra parte hay las equivalencias $0,666=6\times0,111.....$; $0,2727..=27\times0,0101..$; $0,342342..=342\times0,001001..$; &c. Como 1 es divisor de toda cantidad (71. 2.º), divídanse las segundas partes de las últimas igualdades por los respectivos equivalentes de 1 en las primeras: y suprimiendo factores comunes resultan

$$0,666.....=\frac{6\times0,111}{9\times0,111}...=\frac{6}{9}=\frac{2}{3};$$

$$0,2727.....=\frac{27\times0,0101}{99\times0,0101}...=\frac{27}{99}=\frac{3}{11};$$

$$0,342342.....=\frac{342\times0,001001}{999\times0,001001}=\frac{342}{999}=\frac{38}{111}.$$

::

Aunque de casos particulares nunca se debe inferir una proposicion general; sin embargo, en el caso presente el método á quien son debidos los resultados induce á concluir que, *dada una espresion decimal periódica desde la coma, se tiene la division generatriz dividiendo el periodo por una fila compuesta de la cifra 9 tantas veces, cuantas decimales tiene dicho periodo.*

2.° Si empieza el periodo despues de algunas decimales que siguen á la coma, se puede considerar compuesta de dos espresiones decimales aditivas; como en $0,58333....=0,25+0,33333.....$, que por lo demostrado en los casos anteriores vale $\frac{25}{100}+\frac{3}{9}$, ó $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$ y despues de multiplicar el dividendo y el divisor de la primera parte por 3, y de la segunda por 4, equivale á $\frac{3}{12}+\frac{4}{12}=\frac{3+4}{12}=\frac{7}{12}$ espresion generatriz de 0,58333....

Tambien es ejemplo de esto el siguiente caso,

$0,21333=0,33333....-0,12=\frac{3}{9}-\frac{12}{100}=\frac{1}{3}-\frac{3}{25}$: multiplicando por 25 el dividendo y el divisor de la primera parte, y por 3 los de la segunda, se hallan las equivalentes

$\frac{25}{75}-\frac{9}{75}=\frac{25-9}{75}=\frac{16}{75}$ generatriz de 0,21333.

IV.ª *Límites de las cantidades.*

79. La division que no esté comprendida en la general $\frac{a}{2^m.5^n}$ jamas dará cociente exacto, por mas cifras decimales que para éste se quieran investigar (77); pues el cálculo será interminable, y solamente se conseguirá el aproximar cuanto se quiera el valor del cociente al exacto de la division propuesta. Aquí hallamos ocasion para indicar una idea, que conviene adquirir desde los primeros pasos en la ciencia de la cantidad.

Dividiendo para ejemplo 4 por 7, y escrito el resultado 0,5714..... en forma analítica, será

$$\frac{4}{7}=\frac{0}{1}+\frac{5}{10}+\frac{7}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{4}{10000}+$$

La operacion siempre queda inconclusa, aunque la suma de partes decimales se acerca tanto mas al valor exacto, cuanto mayor número de términos comprenda; y por ello, el calculador es árbitro de llegar á tal aproximacion que la diferencia sea cuan pequeña quiera imaginarse, sin que pueda ser jamas la suma de cualesquiera número de términos igual á $\frac{4}{7}$, ni mayor que $\frac{4}{7}$. Por otra parte nos consta que la suma de todos los términos equivale á $\frac{4}{7}$; y así decimos, que este valor es *límite* de la dicha suma. Tambien hay límite de cantidades que se van acercando á él decreciendo. Sabemos por ejemplo que es cierta la igualdad $3=7-4$, y tambien $\frac{3}{7}=\frac{7}{7}-\frac{4}{7}=1-\frac{4}{7}$.

Sustituyendo por $-\frac{4}{7}$ su espresion analítica hallada, con el signo negativo correspondiente, resulta

$$\frac{3}{7}=1-\frac{0}{1}-\frac{5}{10}-\frac{7}{100}-\frac{1}{1000}-\frac{4}{10000}-\ldots\ldots$$

Por la misma razon que antes, el $\frac{3}{7}$ será límite del polinomio cuya suma decreciendo se acerca tanto mas á $\frac{3}{7}$ cuanto mayor número de términos se incluyan en ella, sin que jamas pueda llegar el caso de anularse la diferencia, ni pasar á negativa, y sí aminorarse cuanto se quiera.

Asimismo, las cantidades crecentes hácia su límite pueden tener alguna parte agregada como las decrecentes. Por ejemplo, $\frac{7a+4}{7}=a+\frac{4}{7}$ será, despues de sustituir por $\frac{4}{7}$ su espresion, $\frac{7a+4}{7}=a+\frac{0}{7}+\frac{5}{10}+\frac{7}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{4}{10000}+$.

Igualmente, $\frac{14b+4}{7}=2b+\frac{4}{7}$ será, sustituyendo,

$$\frac{14b+4}{7}=2b+\frac{0}{1}+\frac{5}{10}+\frac{7}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{4}{10000}+.$$

Los ejemplos tomados en consideracion y todo polinomio con términos decimales, no son mas que casos particulares de los límites; porque hay otros muchos polinomios de diversa composicion interminables tambien, y cuyo valor total se conoce. En la ciencia del cálculo se llama *límite de una cantidad, otra á quien se puede acercar aquella cuanto se quiera, sin que jamas pueda ser nula ni cambiar de signo la diferencia*; y de aquí se procede á sentar el principio hipotético siguiente: *dos cantidades cuya diferencia pueda llegar á ser cuan pequeña se quiera y jamas á ser nula ni á cambiar de signo, en el límite serian iguales.*

En todos los casos ha de tenerse presente, que la suma de cualquiera número de términos es una parte *constante* de la cantidad que se acerca al límite, y la diferencia hasta el total es la parte *variable*; de suerte, que el polinomio está espresado en $A+\alpha$, siendo A la constante, y α la diferencia que puede llegar á ser cuan pequeña se quiera sin anularse jamas ni cambiar de signo.

86. De aqui se procede á otro principio de grande importancia sobre los límites. Sean por ejemplo $A+\alpha$ y $B+\beta$ dos cantidades que se van acercando á sus respectivos límites siendo constante A, B y variables α, β que pueden llegar á ser cuan pequeñas se quieran, sin jamas anularse ni cambiar de signo cada una de ellas. *Si por algun medio legítimo ha lugar á establecer la igualdad*

$$A+\alpha=B+\beta,$$

de suerte que deba subsistir en todo el curso de la variacion, es necesariamente suma de las

$$A=B,\ \alpha=\beta.$$

Porque, si fuese una de las constantes mayor que la otra, como $A=B\pm h$, supuesta constante h como es debido; substituyendo $B\pm h$ por A en la igualdad legítima, será $B\pm h+\alpha=B+\beta$, y quitando iguales cantidades resulta $\alpha\pm h=\beta$. Consecuencia absurda, pues α y β no serian capaces de decrecer indefinidamente, habiendo siempre entre las dos la diferencia constante h.

CAPITULO IV.

Cálculo de cantidades fraccionarias en aritmética.

LECCION II.

Espresion y trasformaciones de los números fraccionarios.

81. Todo número menor que 1 es fraccionario (1), y para espresarle de un modo conforme á lo que llevamos dicho acerca de la locucion del cálculo, esplicaremos el origen de tales cantidades. En el artículo (35) se dijo, que el problema de dividir una cantidad a por otra b está espresado en la frase

$$\frac{a}{b};$$

y que siendo a menor que b, la operacion de dividir propuesta es imposible, porque el cociente no llega á valer 1. Segun esto, podemos establecer la desigualdad

$$\frac{a}{b}<1,$$

y en tal caso la frase $\frac{a}{b}$ es un *número fraccionario*, porque espresa una cantidad que se llama *fraccion* ó *quebrado*, tales como $\frac{2}{3}$, $\frac{35}{81}$, etc. Los nombres de dividendo y divisor que pusimos entonces á los números a y b, se sustituyen por otros aqui, llamando *numerador* al número a que está escrito encima de la raya, y *denominador* al b que está debajo. No son caprichosos los nuevos nombres que se han puesto á las dos cantidades a y b, las cuales tambien se conocen como *términos* del quebrado; pues la propiedad de aquellos nace de la significacion respectiva que tienen, como se verá por el siguiente raciocinio.

Imagínese que el número entero 1 está descompuesto en b número de partes iguales, cuan pequeñas queramos considerar; y siempre se verificará la igualdad (41. 3.ª)

$$\frac{b}{b}=1.$$

Por lo cual, podemos escribir tambien la desigualdad de antes bajo la forma

$$\frac{a}{b}<\frac{b}{b}$$

en donde vemos, que *dividiendo la unidad entera en* b *número de partes iguales cuan pequeñas queramos imaginar, el denominador del quebrado espresa el número de estas partes en que se supone dividida la unidad entera, y el numerador espresa cuantas de estas partes hay para dividendo segun el problema*. Estas partes en que se divide la unidad entera se llaman *abos* generalmente; y la espresion del quebrado se lee pronunciando primero el numerador como los números enteros, y despues lo mismo el denominador añadiendo al fin la palabra abos. Así, $\frac{8}{11}$ se pronuncia diciendo *ocho onzabos*; $\frac{52}{72}$ se pronuncia diciendo, *cincuenta y nueve setenta y dos abos, etc.* Pero desde el denominador 2 hasta el 10 tienen particulares nombres las partes en que se divide la unidad, llamándose *medios*, *tercios*, *cuartos*, *quintos*, *sestos*, *séptimos*, *octavos*, *novenos*, *décimos*; y asi, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$, se pronuncian diciendo, un medio, un tercio, un cuarto, un quinto, un sesto, un séptimo, un octavo, un noveno, un décimo ó una décima; siendo notable que entre ellos haya solo el octavo con la terminacion de abo.

82. La forma y nomenclatura de las *fracciones propias*, que son las del caso en que el numerador es menor que el denominador, ó bien mas pequeño que 1 el valor del quebrado se suelen tambien aplicar al caso de ser el numerador mas grande que el denominador, ó bien mas grande que 1 el valor del quebrado, pero en este segundo caso se llama *impropio*; tales como por ejemplo, $\frac{8}{5}, \frac{3}{2}, \frac{25}{3}, \frac{223}{7}$ &c., que espresan problemas de dividir capaces de dar entero al cociente, pero con residuo.

Entre los quebrados impropios se presentan algunos que equivalen á números enteros: y esto sucede siempre que el numerador sea exactamente divisible por el denominador, puesto que en una frase de tal forma está indicada una division. Ejemplos de ello son $\frac{9}{3}$ y $\frac{156}{52}$ que equivalen á 3; como tambien $\frac{3}{3}$ y $\frac{52}{52}$, &c., que equivalen á 1.

Lo dicho acerca de las fracciones impropias nos da luces para ejecutar las operaciones que siguen: 1.ª reducir un entero á la forma de quebrado: 2.ª reducir a esta forma tambien un cociente que tenga resto, ó sea un número *misto* de entero y quebrado: 3.ª hallar los enteros que contenga el quebrado impropio.

1.ª Reducir un entero á la forma de quebrado. En este problema necesitamos que sea dado el denominador, ademas del número que se ha de trasformar; y lo que se pide es hallar el numerador que ha de tener la espresion fraccionaria. Dado por ejemplo el número 2 para formar tal espresion, claro está que puede venir de todas las que tengan un numerador que sea duplo del denominador; pero si éste es dado, no admite ya mas que un determinado numerador. Supongamos que se quiere reducir á tercios, ó bien que sea 3 el denominador; y si llamamos N el numerador, la equivalencia entre el dividendo divisor y cociente (41),

$$N=2\times3,$$

dice que se multiplique el número propuesto por el denominador elegido; y el producto será el numerador. Ejecútese pues la operacion, y el producto 6 debe ser el numerador de la fraccion $\frac{6}{3}$ equivalente á 2.

En general, espresando con c el número propuesto, con d el denominador, y con N el numerador, la igualdad (35)

$$N=d\times c, \text{ ó su igual } \frac{N}{d}=c,$$

dice que, *para dar á un entero* c *la forma de quebrado, cuyo denominador sea* d, *se multiplicará* c *por* d, *y el producto* N *será el numerador*. Queriendo, por ejemplo, reducir á dozavos los números 5, 16, 148, &c., se multiplican por 12 estos números, y los productos 60, 192, 1776 serán los numeradores, y la fraccion $\frac{60}{12}$ equivalente á 5, la $\frac{192}{12}$ equivalente á 16, y la $\frac{1776}{12}$ equivalente á 148.

II.ª Reducir á forma fraccionaria un número misto de entero y quebrado. Todo número misto $c+\frac{r}{d}$ se puede considerar como el resultado de una division, cuyo dividendo fue N y el divisor fue el denominador d de la parte fraccionaria, espresada en el resto $\frac{r}{d}$ del cociente, siendo c el cociente entero y r el resto de la division, segun las igualdades (35)

$$\frac{N}{d}=c+\frac{r}{d};\quad N=c\times d+r,$$

y el problema de ahora es hallar N, cuando se nos da el número misto $c+\frac{r}{d}$. Luego, *para reducir á forma fraccionaria un número misto* $c+\frac{r}{d}$ *de entero y quebrado, se multiplica el entero* c *por el denominador* d *del quebrado; á este producto se añade el entero* r, *y la suma será el numerador del que se pide*. Segun esto; debiendo reducir $3\frac{2}{9}$ á novenos, se multiplicará 3 por 9, y agregando al producto 27 el número 2, el 29 que resulta es numerador de la fraccion $\frac{29}{9}$ que se pide. Asi tambien, $5\frac{1}{2}$ reducido á medios es $\frac{11}{2}$: y $23\frac{2}{5}$ equivale á $\frac{117}{5}$; &c.

III.ª Hallar los enteros que contenga un quebrado impropio, es la operacion inversa de la que acabamos de hacer; pues el problema se reduce á, dada la fraccion $\frac{N}{d}$, hallar el cociente c entero que exacta ó próximamente le convenga. Luego, *para encontrar los enteros que contenga una fraccion impropia, se dividirá el numerador por el denominador, y el cociente entero que salga es el número que se busca.* Conforme á esta regla, $\frac{8}{4}$ equivale á 2; $\frac{9}{4}$ á $2\frac{1}{4}$; $\frac{576}{12}$ á 48; porque,

$\frac{8}{4}$ contiene al entero 2 exactamente;

$\frac{9}{4}$ contiene al entero 2 y sobra $\frac{1}{4}$;

$\frac{572}{12}$ equivale á 48 exactamente.

83. Sean propios ó impropios los quebrados, aun ofrecen á nuestro exámen otras clases de problemas, en que debemos estar ejercitados para despues manejar en el cálculo tales frases con inteligencia y facilidad. 1.º Trasformar cualquiera quebrado en otro equivalente de mayores términos. 2.º Inversamente, reducir alguno á términos mas simples. 3.º Trasformar varios quebrados de distintos denominadores, en otros quebrados que tengan un mismo denominador, y sean equivalentes á los respectivos de la primitiva forma; ó bien, reducir á comun denominador dos ó mas quebrados que se propongan. 4.º Conocer cuál de dos quebrados es mayor.

I.º TRASFORMAR CUALQUIERA QUEBRADO EN OTROS EQUIVALENTES DE MAYORES TÉRMINOS. Sabedores de que $\frac{N}{d}$ es la forma general de todo número fraccionario, y de que podemos multiplicar dividendo y divisor por una misma cantidad cualquiera, sin que por ello se altere el valor de la espresion (41. 5.ª); se sigue que *el valor de un quebrado no se altera multiplicando numerador y denominador por cualquiera número* m; como se espresa en

$$\frac{N}{d}=\frac{N\times m}{d\times m}.$$

Luego, *multiplicando numerador y denominador de la fraccion propuesta por cualquiera número entero que nos ocurra, aquella se trasforma en otra equivalente de mayores términos.*

Asi, la fraccion $\frac{2}{3}$ equivale á $\frac{8}{12}$ á $\frac{10}{15}$ á $\frac{132}{348}$ á...., que resultan de multiplicar los dos términos de la primera, por 4, por 5, por 116, por &c.

II.° REDUCIR Á ESPRESION MAS SIMPLE UN QUEBRADO, se funda en que el dividendo y el divisor pueden ser divididos por una misma cantidad cualquiera que sea en ellos factor, sin que por esto varíe algo el valor de la espresion que resulte (41. 5.ª); como está cifrado en la espresion adjunta, que conviene igualmente á los quebrados,

$$\frac{N\times m}{d\times m}=\frac{N}{d}.$$

La segunda forma viene de haber dividido el numerador y el denominador de la primera por el factor comun m: luego, para *reducir á espresion mas simple un quebrado sin que varíe su valor, se dividen el numerador y el denominador por el factor comun que tengan.*

De este modo $\frac{6}{8}$ se reduce á $\frac{3}{4}$ dividendo por el factor comun 2 el numerador y el denominador: asimismo $\frac{120}{300}$ se reduce á $\frac{12}{30}$ dividiendo por 10; &c.

Cuando se trata de simplificar la espresion de un quebrado, las mas veces nos interesa reducirle á su *espresion mas simple*, y claro está que si se dividen sus dos términos por el producto de todos los factores simples comunes á uno y otro, el quebrado que resulte quedará reducido á su mas simple espresion. Para conseguirlo necesitamos conocer este factor ó *divisor máximo comun* de numerador y denominador: y aunque hallando todos los divisores simples y compuestos de cada uno de los términos del quebrado por el método del artículo (43), entre ellos veríamos el maximo comun, los aritméticos han encontrado un modo mas breve, que vamos á esplicar.

Sea $\frac{N}{d}$ la fraccion propuesta ó problema de dividir el número N por d, si saliere un cociente c exacto, será $\frac{N}{d}=c$, y d el máximo comun divisor de N y d. Pero si hay resto r del dividendo, la espresion será (35),

$$\frac{N}{d}=c+\frac{r}{d}, \text{ ó bien, } N=d\times c+r.$$

Convencidos de que d no es divisor máximo comun, veamos si otro número menor que d cumple con la condicion. Uno de los números elegibles es el resto r, que sabemos es menor que d (35); y por lo que sigue conoceremos que debe ser elegido r. Para ser N divisible por r, lo ha de ser su igual $d\times c+r$, es decir, que $\frac{d\times c+r}{r}$ ha de dar cociente exacto. Recordemos ahora que (41. 6.ª),

$$\frac{d\times c+r}{r} \text{ equivale á } \frac{d\times c}{r}+\frac{r}{r}:$$

y por tanto, si r es divisor de d lo será (41. 4.ª) de $d\times c$, y tambien de $d\times c+r$ por ser $\frac{r}{r}=1$, y en consecuencia, de N: y será máximo comun, porque r lo es de r; y aqui está la razon porque se ha elegido r entre todos los números menores que d. Hasta ahora hemos deducido que si el resto r de la division primera es máximo divisor comun de r y d, lo será tambien de d y N: de suerte, que si la division $\frac{d}{r}$ da cociente exacto c', será r máximo comun divisor de d y N. Adviértase que el ser r divisor de d es condicion precisa, pues sin ella, aunque r sea divisor de $d\times c$ y por consiguiente de N, es inútil, porque lo ha de ser de d y N simultáneamente.

En esta inteligencia, si r no divide justamente á d, será (35)

$$\frac{d}{r}=c'+\frac{r'}{r}, \text{ ó bien, } d=r\times c'+r':$$

y como el razonamiento que se ha hecho antes, puede aplicarse ahora tambien, se sigue que si r' divide justamente á r, será r' máximo comun divisor de r' y r, y por ello de r y d, y de resultas de d y N. Si r' no fuere divisor de r, la division de r por r', dará otro resto r'' y así sucesivamente. El resto va cada vez siendo menor, puesto que pertenece á dividendo que es el resto precedente (35): y por tanto, hemos de llegar precisamente á encontrar divisor exacto, que al fin será la unidad si alguno de los restos anteriores no satisface.

Por la analisis que acabamos de hacer se ve que, *para buscar el máximo comun divisor de dos números se divide el mayor por el menor, y si no resulta cociente exacto se divide el menor por el resto. Si tampoco de aqui saliere cociente exacto, se divide por el resto de esta nueva division el resto de la precedente; y se prosigue asi hasta encontrar cociente exacto; en cuyo caso el divisor de aquella division será el máximo comun de los números propuestos.* Los aritméticos colocan en el renglon del dividendo el divisor y el resto; y debajo los cocientes; en la forma que á continuacion presentamos por tipo, siendo los números propuestos 2346 y 805:

2346	805	736	69	46	23
	2	1	10	1	2

El máximo divisor comun es 23, que está contenido en todos los números que le preceden, conforme á la ilacion; $46=2\times23$; $69=46+23$; $736=69\times10+46$; $805=736+69$; $2346=805\times2+736$. De modo, que 23 está contenido dos veces en 46; tres veces en 69; treinta y dos veces en 736, treinta y cinco veces en 805, y ciento y dos veces en 2346.

Si el objeto de la investigacion fue reducir el quebrado $\frac{805}{2346}$; dividiendo sus términos por 23, viene á la espresion

$\frac{35}{102}$ mas simple que puede recibir.

Ocurre muchas veces el que por último residuo aparece 1: entónces los números propuestos no tienen otra comun medida, y se llaman *primeros entre sí*, aunque uno de ellos ó ambos fueren compuestos; como sucede con 56 y 15, cuyo cálculo es

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
56 & 15 & 11 & 4 & 3 & 1 \\
\hline
 & 3 & 1 & 2 & 1 & 3
\end{array};$$

y por esto irreductible la fraccion $\frac{15}{56}$.

A veces hay que hallar el máximo comun divisor de tres ó mas números: y para ello se busca primeramente el de dos; en seguida el del tercero y del divisor hallado para los otros; y se continúa así hasta el último número. Sean por ejemplo 120, 42 y 45 los números dados; indágase primero el factor máximo de 120 y 42, despues el de 6 factor hallado y el restante número 45, como se ve á continuacion:

$$\begin{array}{c|c|c|c|}
120 & 42 & 36 & 6 \\
\hline
 & 2 & 1 & 6
\end{array}; \qquad \begin{array}{c|c|c|}
45 & 6 & 3 \\
\hline
 & 7 & 2
\end{array}.$$

Resulta 3 el máximo comun divisor de los tres números. Si alguno de los propuestos no tuviere mas divisor que el mismo y la unidad, y sí los otros; en tal caso se dice que estos respecto de aquel son primeros.

III.° Reducir á comun denominador varios quebrados, de manera que cada uno de estos equivalga al que resulte de la operacion, poca dificultad ofrece, puesto que nos está permitido el multiplicar numerador y denominador por una misma cantidad (83: I.°). Dadas por ejemplo las fracciones $\frac{N}{d}, \frac{N'}{d'}, \frac{N''}{d''}, \ldots$ podemos multiplicar los dos términos de la primera por el producto $d' \times d'' \times \ldots$ de los denominadores de los otros, y resultará

$$\frac{N \times d' \times d'' \times \ldots}{d \times d' \times d'' \times \ldots} \text{ equivalente á } \frac{N}{d}.$$

Asimismo, multiplicando numerador y denominador de la fraccion $\frac{N'}{d'}$ por el producto $d \times d''$ de los otros denominadores, hallaremos

$$\frac{N'\times d\times d''\times\ldots}{d\times d'\times d''\times\ldots}\text{ equivalente á }\frac{N'}{d'}.$$

Tambien si se multiplican los términos de la fraccion $\frac{N''}{d''}$ por el producto de los otros denominadores, vendremos á

$$\frac{N''\times d\times d'\times\ldots}{d\times d'\times d''\times\ldots}\text{ equivalente á }\frac{N''}{d''}.$$

Obsérvense los denominadores de las fracciones de nueva forma, y se verá que tienen por denominador comun el producto de todos los denominadores, y que han provenido de multiplicar los términos de cada fraccion propuesta por el producto de los denominadores de las otras. Luego, *cuando se dan varias fracciones para reducirlas á comun denominador, se consigue el objeto multiplicando numerador y denominador de cada fraccion por el producto de los denominadores de todas las demas.*

Haciendo así en los quebrados $\frac{1}{2}, \frac{5}{3}, \frac{4}{85}$, vienen á ser

$$\frac{1\times3\times85}{2\times3\times85}, \frac{5\times2\times85}{2\times3\times85}, \frac{4\times2\times3}{2\times3\times85}, \text{ ó } \frac{255}{510}, \frac{850}{510}, \frac{24}{510}.$$

A veces la reducion á comun denominador se puede hacer mas brevemente cuando tienen ciertas cualidades los denominadores: queremos decir, cuando estos presentan la circunstancia particular de que multiplicando por cierto factor los términos de una de las espresiones, por el mismo ú otro factor los términos de otra, &c., se obtienen fracciones equivalentes á las propuestas y con un comun denominador. Así, dadas por ejemplo las fracciones $\frac{2}{3}, \frac{11}{9}, \frac{5}{18}$, claro está que los denominadores 3 y 9 son reductibles á 18 multiplicando por 6 el 3 y por 2 el 9. Y como al mismo tiempo se han de multiplicar tambien los respectivos numeradores, resultarán

$$\frac{2\times6}{3\times6}, \frac{11\times2}{9\times2}, \frac{5}{18} \text{ ó bien } \frac{12}{18}, \frac{22}{18} \text{ y } \frac{5}{18}.$$

IV.° Conocer cuál de dos quebrados que se propongan es mayor. Sean $\frac{N}{d}$ y $\frac{N'}{d'}$, los quebrados propuestos y reduciéndolos á denominador comun, recibirán las formas $\frac{N\times d'}{d\times d'}$ y $\frac{N'\times d}{d\times d'}$ sin haberse variado sus valores respectivos. Por la definicion que dimos de los términos de un quebrado, el numerador de cada uno de los de comun denominador espresa las partes que se toman de la unidad descompuesta en $d\times d'$ partes; luego, el que de ellos tenga mayor numerador valdrá mas. Fundados en esto diremos que *si dos quebrados tienen denominadores iguales, el quebrado que tenga mayor numerador es el mayor: y cuando tienen distintos denominadores, se reducen generalmente á comun denominador, para conocer los valores relativos de los quebrados*. Conforme á lo primero, se ve desde luego que $\frac{4}{5}$ es mayor que $\frac{3}{5}$ y este mayor que $\frac{1}{5}$; asimismo $\frac{60}{137}$ mayor que $\frac{36}{137}$, &c. Siguiendo la segunda parte de la regla; para conocer cuál de los quebrados $\frac{4}{5}$ y $\frac{7}{9}$ vale mas, redúzcanse á comun denominador; y vendrán á ser $\frac{36}{45}$ y $\frac{35}{45}$: con lo cual se conoce que $\frac{4}{5}$ es mayor que $\frac{7}{9}$.

LECCION II.

Sumacion, resta, multiplicacion y division, con fracciones.

84. SUMAR CON LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS, es hallar uno que sea equivalente al conjunto de los que se propongan para sumar. La circunstancia (3. 1.°) de que sean precisamente de una misma magnitud las unidades reunidas, exige que se reduzcan las fracciones propuestas á otras en que la magnitud de la parte que sirve de unidad sea una misma; lo cual se conseguirá reduciéndolas á comun denominador (81) y (83. III.°): y por la misma condicion el número que se busca habrá de tener forma fraccionaria, con el denominador comun.

Dadas por ejemplo las fracciones

$$\frac{N}{d},\ \frac{N'}{d'},\ \frac{N''}{d''},\ \&c.;$$

la condicion de convertirlas á unidades de una misma magnitud se cumple reduciéndolas á comun denominador; como aquí se ve practicado:

$$\frac{N\times d'\times d''}{d\times d'\times d''},\quad \frac{N'\times d\times d''}{d\times d'\times d''},\quad \frac{N''\times d\times d'}{d\times d'\times d''}.$$

Ahora falta ejecutar la suma, y para ello sirve de fundamento el principio del artículo (41. 6.ª). Por él sabemos, que la suma de las dos primeras fracciones reducidas á comun denominador es

$$\frac{N\times d'\times d''+N'\times d\times d''}{d\times d'\times d''}$$

que la suma de esta y la tercera es

$$\frac{N\times d'\times d''+N'\times d\times d''+N''\times d\times d'}{d\times d'\times d''};$$

::

y que si hubiese mas sumandos, se habrian de agregar al numerador los numeradores de ellas. De aqui viene la regla de sumar quebrados; que consiste *en reducir á comun denominador todos los propuestos, y formar despues un quebrado cuyo denominador sea el comun, y el numerador sea la suma de numeradores de las reducidas á comun denominacion.*

Dadas por ejemplo las fracciones $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, resultan las de comun denominador

$$\frac{63}{84}, \frac{56}{84}, \frac{60}{84};$$

y la suma propuesta $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+\frac{5}{7}$ equivale á la indicada $\frac{63+56+60}{4\times3\times7}$ y á la ejecutada $\frac{179}{84}$, que por fin se reduce (82. III.°) á $2+\frac{11}{84}$, y segun los aritméticos á $2\frac{11}{84}$.

Igualmente se hallará la suma en cualquiera otro caso, como

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{12}+\frac{1}{4}=\frac{2+5+3}{12}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}.$$

Cuando el resultado es fraccion impropia, conviene á veces el hallar los enteros que haya en ella, como en el primer ejemplo: y por esto, si entre los sumandos hay algun entero, se puede ó no reducir á fraccion, para evitar supérfluas operaciones. Asi, $\frac{7}{8}+2+\frac{3}{4}$, reduciendo solamente á comun denominador las fracciones, equivale á $2+\frac{13}{8}=3+\frac{5}{8}$; y haciendo la suma despues de reducir 2 á fraccion, será

$\frac{7}{8}+\frac{16}{8}+\frac{6}{8}=\frac{29}{8}=3+\frac{5}{8}$. Ambos métodos son legítimos, porque se fundan en el principio (3. 2.°) de que el todo es el conjunto de sus partes.

85. RESTAR CON LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS, es hallar uno que esprese la diferencia entre dos que se propongan, el uno para sustraendo y el otro para minuendo. Fieles al principio fundamental (3. 1.°) de que no se pueden comparar sino unidades de una magnitud misma, deberemos ante todo reducir á comun denominador los números que se nos den para la resta.

Dadas por ejemplo las fracciones $\frac{N}{d}$ y $\frac{N'}{d'}$, la primera mayor que la segunda, se trasforman en $\frac{N\times d'}{d\times d'}$ y $\frac{N'\times d}{d\times d'}$ sin que varíen de valores respectivos, y por consiguiente sin dejar de ser la primera mayor que la segunda. Se pide el resto entre dos números cuya unidad está caracterizada por el denominador comun; y por ello, el resto deberá tener por denominador el comun $d\times d'$ de las fracciones trasformadas. Ademas, buscamos un número que esprese la diferencia de los números comparados; luego, el numerador del resto es la diferencia de los numeradores $N\times d'-N'\times d$ de las fracciones reducidas á comun denominador. La espresion conforme á estas condiciones, ó bien la diferencia de las fracciones propuestas es

$$\frac{N\times d'-N'\times d}{d\times d'}.$$

En vista de todo, ya podemos establecer la regla, de *que la resta de quebrados consiste en reducir á comun denominador el restando y restador, y formar despues un quebrado que tenga por denominador el comun de aquellos, y por numerador la diferencia de numeradores de los reducidos.*

Por esta regla, queriendo restar de la fraccion $\frac{5}{7}$ la fraccion $\frac{2}{3}$, el cálculo es

$$\frac{5}{7}-\frac{2}{3}=\frac{15}{21}-\frac{14}{21}=\frac{15-14}{21}=\frac{1}{21}.$$

Igualmente, se harán las restas en cualesquiera otros casos; y si es entero el minuendo ó el sustraendo, habrá que reducirle á fraccion (82. 1.ª): como

$$4-\frac{5}{9}=\frac{36}{9}-\frac{5}{9}=\frac{31}{9}=3+\frac{4}{9};$$

$$\frac{23}{8}-2=\frac{23}{8}-\frac{16}{8}=\frac{7}{8}.$$

Si fueren mistos los números minuendo y sustraendo, ó solo uno de ellos, la operacion se hace bien sea reduciendo á fracciones los enteros, bien sea restando entre sí los enteros y lo mismo las fracciones. No cabe duda en que el primer modo es lícito, pues el minuendo se puede reducir á un solo quebrado, y lo mismo el sustraendo, sin que por esto varien de valores: y entonces la operacion está conforme con la regla que se acaba de establecer. Por ejemplo, la resta indicada en $\left(5+\frac{3}{4}\right)-\left(2+\frac{1}{2}\right)$ viene á ser $\frac{23}{4}-\frac{5}{2}$, que reduciendo á comun denominador será $\frac{23}{4}-\frac{10}{4}$; y ejecutando la resta, se reduce á $\frac{13}{4}$, ó bien $3+\frac{1}{4}$, ó $3\frac{1}{4}$ segun los aritméticos.

Con arreglo al segundo método, en el ejemplo de ahora quedaria la diferencia 3 entre los enteros, y la diferencia $\frac{1}{4}$ entre los quebrados, ó bien la diferencia total $3+\frac{1}{4}$, como antes. Para demostrar que este segundo método es lícito en todos los casos, y cómodo con tal que la parte quebrada del restador sea menor que la del restando; basta considerar que la resta es la operacion inversa de la sumacion, y que los dos métodos de restar de que se trata vienen de los correspondientes de sumar (84), fundados en el principio fundamental (3. 2.ª).

86. MULTIPLICAR CON LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS, ofrece varios casos que merecen discusiones particulares.

1.° Cuando se propone multiplicar un quebrado por un entero, como por ejemplo $\frac{2}{3}$ por 5, se pide la suma de tantos sumandos iguales al quebrado, como unidades tiene el multiplicador, la cual en el ejemplo será $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$: ó bien, $\frac{10}{3}$, y segun la regla de sumar (84), en todos los casos de multiplicar un quebrado por un entero, el producto debe ser un quebrado, *que tendrá por denominador el mismo del multiplicando, y por numerador el que resulte de multiplicar por el multiplicador entero el numerador del quebrado multiplicando*. Tambien son ejemplos de esto

$$\frac{21}{34}\times9 \text{ que equivale á } \frac{189}{34};\ \frac{1023}{682}\times2 \text{ que vale } \frac{2046}{682}.$$

En la demostracion que acabamos de dar está incluido tambien el principio, de que *cuando se multiplica por un entero el numerador de un quebrado, se hace á este tantas veces mayor de lo que era cuantas unidades tenga el entero por quien se multiplica su numerador*; pues, el resultado es la suma de otros tantos quebrados iguales: y lo mismo se deduce por el artículo (41. 5.ª). Este principio envuelve tambien, que *un quebrado es tanto mayor cuanto mayor es el numerador, permaneciendo invariable el denominador*. Luego, quedaria convertido el quebrado á su primitivo ser dividiendo su numerador por el número por quien se multiplicó: y en general, *un quebrado se hará tantas veces menor cuantas unidades tuviere un entero por quien se dividiera su numerador*. En virtud de tales principios; el quebrado $\frac{15}{12}$ es 5 veces mayor que $\frac{3}{12}$ y 3 veces mayor que $\frac{5}{12}$, porque resulta de multiplicar el numerador de $\frac{3}{12}$ por 5, ó bien, el de $\frac{5}{12}$ por 3. Inversamente, el quebrado $\frac{7}{19}$ es dos veces menor que $\frac{14}{19}$, y 6 veces menor que $\frac{42}{19}$, porque resulta de dividir el numerador de $\frac{14}{19}$ por 2, ó bien, el de $\frac{42}{19}$ por 6.

Pero como esta division será posible unicamente cuando el numerador contenga exactamente alguna ó algunas veces al número entero, por quien se intentare dividir, busquemos otro medio de conseguir en todos los casos el hacer un quebrado tanto menor cuanto se quiera. Si se multiplica el denominador del quebrado por un entero, resultará segun la definicion (81) la unidad dividida en tantas partes cuantas esprese el nuevo denominador; y cada parte nueva será tanto menor que la antigua, cuanto el denominador primitivo fuese menor que el resultado. El numerador permanente dice que se toma igual número de partes antes que despues; luego, el nuevo quebrado vale menos que el antiguo, tanto cuanto se ha hecho menor cada parte, ó bien por lo dicho, cuanto mayor se ha hecho el denominador. Por este raciocinio vemos, que *multiplicar el denominador de un quebrado por un entero, es hacer al quebrado tantas veces menor de lo que era cuantas unidades tenga el entero por quien se multiplica el denominador*: principio que podemos deducir tambien del artículo (41. 5.°). Ejemplos de esto son los siguientes:

El quebrado $\frac{2}{3}$ pasa á ser $\frac{2}{12}$ multiplicando por 4 el denominador de aquel; antes la unidad estaba dividida en tres partes y ahora en 12; de suerte que la nueva parte es 4 veces menor que la primitiva, y por ello 2 partes nuevas ó bien $\frac{2}{12}$ valen cuatro veces menos que dos primitivas ó $\frac{2}{3}$.

Tambien $\frac{8}{9}$ es diez veces mayor que $\frac{8}{90}$, porque se ha multiplicado por 10 el denominador y se han hecho 10 veces menores las partes de la unidad entera.

2.º Si el multiplicando y el multiplicador son quebrados, como por ejemplo en $\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}$; sabemos que $\frac{5}{4}$ puede recibir la forma $\frac{5}{1\times4}$, y entonces el problema estará espresado en $\frac{2}{3}\times\frac{5}{1\times4}$. Si se multiplicase $\frac{2}{3}$ por solo $\frac{5}{1}$ ó bien por 5, el resultado $\frac{10}{3}$ seria 4 veces mayor que el pedido, porque el multiplicador se ha supuesto 4 veces mayor que el verdadero; y de consiguiente, para convertir el producto al valor que debe tener segun el problema, se ha de multiplicar su denominador por 4: con lo cual sale $\frac{10}{12}$ el valor de la espresion $\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}$ En general, si se multiplica el multiplicando por el numerador del multiplicador, el producto que resulta es tantas veces mayor que el pedido cuantas unidades tenga el denominador del multiplicador; y dicho producto quedará convertido á el que se pide, multiplicando su denominador por el del multiplicador. Luego, para *multiplicar un quebrado por otro, se hace la operacion multiplicando sus numeradores entre sí, é igualmente sus denominadores, formando despues un quebrado cuyo numerador sea el producto primero, y denominador el segundo.* Ejemplos de este cálculo son los adjuntos:

$$\frac{3}{7}\times\frac{8}{5}=\frac{24}{35};\quad \frac{2491}{567}\times\frac{3}{8}=\frac{7473}{4536};\quad \&c.$$

Segun la regla que acabamos de establecer, *el producto de dos quebrados no varía de valor aunque se cambien recíprocamente los oficios del multiplicando y del multiplicador*: pues de ambos modos el numerador y el denominador del producto son productos respectivos de numeradores y denominadores, y estos productos no varían con el cambio de oficios (33. 3.ª). Por tanto, $\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}$ es lo mismo que

$$\frac{5}{4}\times\frac{2}{3};\ \&c.$$

3.º Siguiendo este principio despues de dar á un entero forma de quebrado (82. 1.ª); el producto $\frac{2}{3}\times\frac{5}{1}$, ó bien $\frac{2}{3}\times5$, es lo mismo que $\frac{5}{1}\times\frac{2}{3}$, ó bien $5\times\frac{2}{3}$; y en general, el producto de un quebrado por un entero es lo mismo que el de este por aquel. De suerte, *que la regla del caso 1.º se estiende tambien al de ser multiplicando un entero, y multiplicador un quebrado*: y por consiguiente, *en la multiplicacion de dos factores, uno entero y otro quebrado, el producto no varía aunque cambien de oficios los factores.*

No debemos pasar en silencio un hecho notable que suele suceder en la multiplicacion de quebrados, y es, que el producto puede ser menor que alguno de sus factores, ó que ambos. Lo primero se observa en el ejemplo arbitrario $\frac{2}{3}\times5$; pues $\frac{10}{3}$ no es mas que $3+\frac{1}{3}$, visiblemente menor que el multiplicador ó multiplicando 5. Lo segundo sucede en este otro ejemplo arbitrario tambien, $\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}$, que produce $\frac{10}{21}$, menor que cualquiera de los factores, pues reduciendo estos á comun denominador, el primero será $\frac{14}{21}$ y el segundo $\frac{15}{21}$.

4.° Cuando alguno de los factores consta de entero y quebrado, se puede hacer la operacion reduciendo el entero á la especie del quebrado que le acompaña, y entonces el problema está incluido en el segundo caso. Por ejemplo, $2\frac{1}{3}\times8\frac{1}{2}$ es como $\frac{7}{3}\times\frac{17}{2}$, y dará el producto $\frac{119}{6}$ que equivale á $19\frac{5}{6}$.

De otro modo se puede hacer tambien esta operacion, y consiste *en multiplicar el entero y el quebrado de un factor, primeramente por el entero y despues por el quebrado del otro factor, y sumar estos productos parciales*, á semejanza que se hacen y se suman las multiplicaciones parciales de enteros (29). El ejemplo $\left(2+\frac{1}{3}\right)\times\left(8+\frac{1}{2}\right)$ dará $16+\frac{8}{3}$ de producto parcial primero; y de segundo, $\frac{2}{2}+\frac{1}{6}$ ó bien $1+\frac{1}{6}$. La suma es $17+\frac{8}{3}+\frac{1}{6}$, ó bien $17+\frac{16+1}{6}$ y al fin $19\frac{5}{6}$, como por el otro método. La legitimidad de la regla no viene de que los resultados de este problema particular salgan conformes por los dos métodos, sino de que por ambos se halla un todo igual al conjunto de todas las partes; y solo hay la novedad de que la descomposicion del todo está hecha en partes cuya magnitud en un método es diferente de la magnitud segun el otro método.

87. Dividir con los números fraccionarios. El problema de dividir con quebrados se espresa poniendo el dividendo y á continuacion el divisor separados con dos puntos: como por

ejemplo $\frac{3}{4}:\frac{2}{9}$ cuando el dividendo y el divisor son fraccionarios; ó $\frac{3}{4}:2$ cuando el divisor es entero; ó $3:\frac{2}{9}$ cuando el dividendo es entero ó $\left(3+\frac{2}{5}\right):\left(7+\frac{5}{6}\right)$ cuando se trata de números mistos, ó $3\frac{2}{5}:7\frac{5}{6}$ segun los aritméticos. En las reglas de la multiplicacion (86) estan los principios para deducir las de la division en los cuatro casos.

1.° Si el dividendo es quebrado y el divisor entero, como en $\frac{3}{4}:2$, se pide un número que sea tantas veces menor que el dividendo cuantas unidades tenga el divisor: luego, en virtud del último teorema del artículo (86 1.°), *en este caso el cociente es un quebrado que tiene por numerador el mismo del dividendo, y por denominador el producto que resulte de multiplicar su denominador por el divisor entero.* En el ejemplo propuesto $\frac{3}{4}:2$, será $\frac{3}{8}$ el cociente que se pide.

2.° Cuando son fraccionarios el dividendo y el divisor, como en $\frac{3}{4}:\frac{2}{9}$, si se divide el dividendo por el numerador del divisor, el quebrado que resulte será tantas veces menor que el cociente pedido cuantas aquel divisor entero es mayor que el divisor fraccionario propuesto (86. 1.°): es decir, que el cociente hallado es tantas veces menor que el pedido, cuantas unidades tenga el denominador del quebrado divisor: luego, el cociente hallado se ha de multiplicar por este denominador, lo cual se hace multiplicando el numerador del cociente pequeño (86. 1.°). Haciéndolo así en el ejemplo $\frac{3}{4}:\frac{2}{9}$ será

$\frac{3\times9}{4\times2}$ ó bien $\frac{27}{8}$ el cociente; pues, $\frac{3}{4\times2}$ es 9 veces menor que el pedido, y de consiguiente se ha de multiplicar por 9 para tener el que se requiere. Del razonamiento general que se ha hecho y aclarado con este ejemplo, se concluye *que la division de un quebrado por otro se hace multiplicando en cruz los términos de los dos quebrados, sin trastornar el orden de los términos del dividendo para formar el cociente.* Por esta regla están ejecutadas las divisiones que siguen:

$$\frac{11}{285}:\frac{7}{16}=\frac{176}{1995};\ \frac{7}{16}:\frac{11}{285}=\frac{1995}{176}.$$

En la presente regla está comprendida tambien la del caso 1.°; pues (82. I.ª) el divisor entero puede ser espresado en forma fraccionaria con el denominador 1; y asi $\frac{3}{4}:2$ es como $\frac{3}{4}:\frac{2}{1}$, y al fin $\frac{3}{8}$ de ambos modos.

3.° La division de un entero por un quebrado, como $3:\frac{2}{9}$, puede ser espresada en la forma $\frac{3}{1}:\frac{2}{9}$, y asi está comprendida en la regla del caso precedente, por la cual será $\frac{3}{1}:\frac{2}{9}=\frac{27}{2}$. Luego, *el cociente de un entero por un quebrado es otro quebrado, que tiene por numerador el producto del entero por el denominador del quebrado divisor, y por denominador el numerador de este.*

4.° Con los números mistos se hace generalmente la division reduciendo antes los enteros que haya á la clase de los quebrados que los acompañen, y asi rige la regla del caso 2.°

para la division. De este modo $3\frac{2}{5} : 7\frac{5}{6}$ es como $\frac{17}{5} : \frac{47}{6}$,

que da el cociente $\frac{102}{235}$.

Aqui se puede hacer tambien la observacion del hecho inverso del que notamos en la multiplicacion (86.), y es, el de resultar á veces un cociente mayor que el dividendo.

88. Con frecuencia se suele desconocer un problema de multiplicar ó partir fracciones, por la locucion en que se propone, como sucede cuando se pide *hallar una parte fraccionaria de otra fraccion*, ó segun el lenguage comun, *hallar un quebrado de quebrado.*

Trátese por ejemplo de hallar la tercera parte de $\frac{5}{7}$, como se indica en $\frac{1}{3}$ de $\frac{5}{7}$. Meditando un poco se concibe que se trata de dividir $\frac{5}{7}$ por 3; con que, son equivalentes las espresiones

$$\frac{1}{3} \text{ de } \frac{5}{7} \text{ y } \frac{5}{7} : 3 = \frac{5}{21}.$$

Si se pide hallar $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{7}$, claro es que siendo $\frac{1}{3}$ de $\frac{5}{7}$ el valor $\frac{5}{21}$, lo que se pide es el doble de esta cantidad, y se ha de multiplicar por 2 la fraccion $\frac{5}{21}$; de que resultará $\frac{10}{21}$; obsérvese que el cálculo ha sido $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7}$.

Generalizando el raciocinio del ejemplo anterior vendremos á concluir que, cuando se dice hallar $\frac{h}{k}$ de $\frac{c}{d}$ es lo mismo que dividir $\frac{c}{d}$ por k, y tomar h veces el resultado: ó bien, *que el problema de conocer la parte* $\frac{h}{k}$ de $\frac{c}{d}$ *está cifrado y resuelto en la espresion de multiplicar un quebrado por otro*,

$$\frac{c}{d}\times\frac{h}{k}=\frac{c\times h}{d\times k}.$$

LECCION III.

Números denominados, y tablas de ellos.

89. En toda fraccion que se refiere á medida, peso, tiempo, moneda, etc., su denominador espresa una de estas cantidades dividida en partes, y se debe pronunciar en lengua vulgar el nombre de la unidad: para lo cual suponemos al lector impuesto en la subdivision y nomenclatura de las mas usadas en el Reino, y de algunas otras estrangeras de que se da noticia en las tablas insertas al fin de esta leccion. Por ejemplo, $\frac{2}{3}$ de un doblon significa que dividido un doblon en tres partes, se toman dos de ellas, que serán dos pesos fuertes: é inversamente, cuando se dice 1 real, es como $\frac{1}{20}$ de peso fuerte; y así tambien son equivalentes modos de espresarse, decir 3 pulgadas ó $\frac{3}{12}$ de pie ó $\frac{3}{36}$ de vara, ó $\frac{3}{72}$ de braza. Por esto se sue-

len llamar números *denominados* los fraccionarios concretos.

Cuando se pueda espresar el valor de la fraccion por su equivalente número entero concreto, como $\frac{2}{3}$ de doblon que vale 2 pesos, ó $\frac{3}{4}$ libra que vale 12 onzas, se dice que aquella fraccion es parte *alícuota* de la unidad á que se refiere.

Los números compuestos de entero y quebrado, que se llamaron mistos en el cálculo de cantidades abstractas, suelen llamarse números *complexos* cuando son concretos. Por ejemplo, $\left(2+\frac{5}{25}\right)$ arrobas, ó bien 2 arrobas y 5 libras, es número complexo; y tambien $\left(6+\frac{2}{3}\right)$ reales; etc. y los aritméticos abrevian las espresiones reduciéndolas á las formas $2\frac{5}{25}$ arrobas, y $6\frac{2}{3}$ reales, con la supresion del signo $+$ aditivo del cálculo; como lo hacen tambien aunque la parte fraccionaria sea alicuota, escribiendo 2 ar. 5 lib., en vez de 2 arrobas $+$5 libras.

90. Una de las operaciones que con frecuencia ocurre, suele ser la de cambiar un número denominado en otro equivalente que se refiere á unidad menor. Si por ejemplo nos conviene contar por maravedís mas bien que por reales, diremos 68 maravedis en vez de 2 reales, ó segun el cálculo de abstractos, $\frac{68}{34}$ en vez de $\frac{2}{1}$. Esto se hace mas usual aun cuando necesitamos hallar con la mayor aproximacion posible las unidades enteras que pueda contener un quebrado concreto, como por ejemplo $\frac{2}{6}$ de real. Segun está, no es parte alicuota de

otra moneda esta fraccion. Mas, haciéndola 34 veces mayor, es decir, tomando $\frac{2}{3}$ de 34 maravedis (88), serán equivalentes $\frac{2}{3}$ reales y $\frac{68}{3}$ maravedises; teniendo esta última la ventaja de que una gran parte suya es alicuota; pues, practicando la division que indica vemos que $\frac{68}{3}$ maravedis vale 22 maravedis y $\frac{2}{3}$ maravedis, ó $22\frac{2}{3}$ maravedis, conforme á la escritura de los aritméticos. No queda duda en que $\frac{2}{3}$ de real y $\frac{68}{3}$ de maravedi son equivalentes; puesto que en lenguage del cálculo la primera espresion es $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{1}$ ó bien $\frac{2}{3}$; y la segunda, $\frac{68}{3}$ de $\frac{1}{34}$ ó bien $\frac{68}{102}$, que vale $\frac{2}{3}$ tambien.

De un modo análogo se hacen los cambios de cualesquiera números denominados a otros de menor unidad; y aplicando el método de la demostracion del caso particular que acabamos de ver á todos los que ocurran, podemos admitir la regla de que *si es entero el número que se ha de reducir, el cambio se hace multiplicándole por el número de unidades menores que contiene la del número propuesto. Si es fraccionario este, el cambio se hace multiplicando el numerador por el número de unidades menores á que se quiere referir la fraccion. y si el objeto es hallar aproximadamente los enteros que contiene la cambiada, se practica la division que estará indicada en ella.*

Aunque la division de medidas, pesos y monedas, no sea conforme á la escala decimal, en las ciencias comunmente se reduce á decimales una fraccion denominada. Por ejemplo, el pie de Paris vale $\frac{700000}{600434}$ del pie castellano, es lo mismo que decir 1 pie de París vale 1,165823... pies de Castilla próximamente; ó bien, que la espresion $\frac{700000}{600434}$ es lo mismo que 1,165823... como ya se sabe, haciendo la division por decimales.

91. Las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir con los números denominados, sean enteros, fraccionarios, ó complexos, no presentan dificultad gobernándose por los principios de dichas operaciones con enteros, y con fraccionarios abstractos. En la ejecucion de estos cálculos usaremos ó no de los signos algébricos, segun convenga: y haremos los cambios de cada espresion conforme á lo que se ha dicho en el artículo precedente.

92. Sumacion de números denominados. Se suman de dos modos: 1.° reduciéndolos á comun denominador: 2.° tratándolos como unidades de diferentes órdenes, á manera que en la sumacion de enteros abstractos.

Se propone *sumar del primer modo 2 varas, 1 pie, 8 pulgadas y 3 líneas, con 2 pulgadas y 4 líneas;* ó en otro lenguage, 2 varas, $\frac{1}{3}$ de vara, $\frac{8}{36}$ de vara y $\frac{3}{432}$ de vara, con $\frac{2}{36}$ de vara y $\frac{4}{432}$ de vara. El cálculo es

$$2+\frac{1}{3}+\frac{8+2}{36}+\frac{3+4}{432},$$

$$\text{ó } 2+\frac{144}{432}+\frac{120}{432}+\frac{7}{432}=2+\frac{271}{432}.$$

Como se refiere á vara y esta tiene 432 líneas, la suma es 2 varas + 271 líneas.

Conforme al método segundo, preferible cuando son partes alícuotas de la unidad mayor las cantidades que se propongan, escríbanse como números enteros por el órden de unidades; y empezando la sumacion desde las menores, agréguense á las mayores inmediatas las que resulten de su orden: como en el siguiente problema

Quintales.	*Arrobas.*	*Libras.*	*Onzas.*	*Adarmes.*
1	2	0	3	8
0	0	24	5	2
6	3	9	0	7
8	2	8	9	1.

Hecha la suma de adarmes, vemos que son 17 ó 1 onza y 1 adarme. Se escribe este bajo las unidades de su magnitud; y agregada la onza á la columna de ellas, resultan 9, que no admiten reducion. Pasando á las libras, el total asciende á 8 de estas unidades y 1 arroba, que se agrega á la columna inmediata. Asimismo se hace la suma de arrobas y resulta el total 6, ó 2 arrobas y 1 quintal: se agrega 1 quintal á la columna de quintales, y hecha la suma de estas unidades viene el total 8 de ellas.

93. Resta de números denominados. Esta operacion se hace tambien de uno y otro modo. Segun el primero; *réstese la cantidad 1 dia y $\frac{5}{7}$ horas de 2 dias y 8 horas*, como se escribe con signos en $(2-1)$ dias $+\left(8-\frac{5}{7}\right)$ horas. Por no ser $\frac{1}{7}$ parte alicuota de hora, y habiendo de reducir 8 á fraccion, no conviene á unidades alicuotas, y sí á séptimos. Será pues el cálculo,

$$(2-1) \text{ dias} + \left(8-\frac{5}{7}\right) \text{horas} = 1 \text{ dia} + \frac{51}{7} \text{ hora.}$$

Asimismo, *de 2 dias y 8 horas se restan 1 dia y $\frac{5}{6}$ hora,* aunque reduciendo á minutos las horas si se quiere, por ser $\frac{5}{6}$ hora $=\frac{5\times60}{6}$ minutos $=50$ minutos. El cálculo de un modo es

$$(2-1)\text{ dias}+\left(8-\frac{5}{6}\right)\text{horas}=1\text{ dia}+\frac{43}{6}\text{ horas}=1\text{ dia}$$

$$+\left(7-\frac{1}{6}\right)\text{horas}=1\text{ dia}+7\text{ horas}+10\text{ minutos.}$$

Y reduciendo á minutos las horas desde luego, el cálculo es

$$(2-1)\text{ dias}+\left(8-\frac{5}{6}\right)\text{horas}=1\text{ dia}+\left(\frac{480}{60}-\frac{50}{60}\right)\text{horas}$$

$$\text{ó bien }1\text{ dia}+\frac{430}{60}\text{ horas}=1\text{ dia}+7\text{ horas}+10\text{ minutos.}$$

Conforme al segundo modo que antes indicamos de hacer la suma, es decir, escribiendo el restador debajo del restando, modo que se debe preferir en caso de ser alicuotas las cantidades, *réstese* la cantidad *4 pesos, 8 rs. y 2 maravedís, de 5 pesos, 11 reales y 3 maravedís.* El cálculo es

Pesos.	*Reales.*	*Maravedís.*
5	11	3
4	8	2
1	3	1

y resulta la diferencia 1 peso +3 reales +1 maravedí.

En este ejemplo último todos los minuendos han sido mayores que los respectivos sustraendos; pero cuando así no suceda, hay que tomar una unidad del orden inmediato mayor y agregarla á las de menor, habiéndola reducido antes á la clase de éstas, como en

Ps.	*Rs.*	*Mrs.*		*Ps.*	*Rs.*	*Mrs.*
5	4	3		4	23	37
4	8	5	equivalente á	4	8	5
0	15	32		0	15	32

La diferencia es 15 reales y 32 maravedis, habiendo considerado de 20 reales el peso.

94. Multiplicacion de números denominados. Se hace de varios modos: el general para todos los casos, pero que solo convendrá emplear cuando hay partes no alicuotas en las fracciones, consiste en reducir á fracciones ó menores unidades el multiplicando y el multiplicador, y hacer el cálculo en seguida como en las fracciones ordinarias. Tal como en la cuestion, de *saber el importe de 3 varas y $\frac{1}{7}$ de vara, valiendo 4 reales y $\frac{1}{4}$ real cada vara.* Reduciendo las varas á séptimos y los reales á cuartillos, el cálculo es

$$\frac{17}{4}\times\frac{22}{7}=\frac{374}{28}\text{ reales}=\left(13+\frac{5}{14}\right)\text{ reales, que vale 13}$$

$$\text{reales }+12\text{ maravedis }+\frac{1}{7}\text{maravedis.}$$

El segundo modo consiste en multiplicar cada término de un factor por todo el otro, despues de reducido en caso necesario este á un solo término, distinguiéndose el multiplicando como ya sabemos, en ser de la misma especie que el producto. Ocurren tres casos, cuya distincion se hace segun sean los factores, complexo y entero, ó ambos complexos; y cada caso envuelve dos en cuanto á ser ó no de una misma especie los factores.

1.° *Multiplicador entero,* como en el ejemplo siguiente. *Hallar el importe de 2 varas de tela á 4 reales y 6 maravedis cada vara*: y la ecuacion en que se pide repetir 4 reales 6 maravedis dos veces, será

$$(4\text{ rs.}+6\text{ mrs.})\times2=8\text{ rs.}+12\text{ mrs.}$$

Si los maravedis ascendiesen á valer algunos reales, se agregarán á los de su clase.

Propónese tambien *indagar el rédito de 5 pesos á 8 reales y 4 maravedis cada peso*. Aquí se ha de repetir 8 reales y 4 maravedis 5 veces, como en el cálculo se hace:

$$(8 \text{ rs.} + 4 \text{ mrs.}) \times 5 = 40 \text{ rs.} + 20 \text{ mrs.}$$

2.° *Multiplicador complexo* cual viene ahora. *¿Cuánta estension tendrá el trabajo de 5 dias y 8 horas, siendo 4 varas la de un dia?* Hay que repetir 4 varas las veces que espresa $5+\frac{8}{24}$, y resultará

$$4 \text{ var.} \times \left(5+\frac{8}{24}\right) = \left(20+\frac{32}{24}\right) \text{varas} = \left(21+\frac{1}{3}\right) \text{var.}$$

Hallar el precio del trabajo empleado en 30 dias y 11 horas á 6 reales diarios, ó bien repetir 6 reales las veces que espresa $\left(30+\frac{11}{24}\right)$; y el cálculo es

$$6 \text{ rs.} \times \left(30+\frac{11}{24}\right) = \left(180+\frac{66}{24}\right) \text{rs.} = \left(182+\frac{3}{4}\right) \text{rs.}$$

3.° *Complexos ambos factores*. Reduciendo uno de ellos á unidades de la menor especie, estará incluido el caso en uno de los dos anteriores. Propónese *hallar el importe de 4 varas, 2 pies y 5 pulgadas, valiendo una vara tres pesos y 6 reales*. Despues de reducir el multiplicando á reales, el caso viene á ser como el anterior, segun está cifrado en el correspondiente cálculo,

$$66 \text{ rs.} \times \left(4+\frac{2}{3}+\frac{5}{36}\right) = \left(264+\frac{132}{3}+\frac{330}{36}\right) \text{reales},$$

que vale $\left(317+\frac{1}{6}\right)$ reales.

Si se quiere reducir $\frac{1}{6}$ real á maravedis; tendremos $\frac{34}{6}$ maravedis ó $\frac{1}{6}$ real $=\left(5+\frac{2}{3}\right)$ maravedis; y el total importe, 317 rs. $+\left(5+\frac{2}{3}\right)$ maravedis.

95. División de números denominados. Se pueden usar tambien los dos métodos mismos que en la multiplicacion. El primero, ó el de reducir el dividendo y tambien el divisor á sola una fraccion cada uno, es útil cuando en ambos hay fracciones no alicuotas. Por ejemplo, *trátese de hallar el importe de cada vara de tela, habiendo 4 varas y $\frac{2}{5}$ vara costado 15 reales y $\frac{2}{3}$ reales.*

Despues de deducir las varas á quintos y los reales á tercios, resultan ser $\frac{22}{5}$ varas y $\frac{47}{3}$ rs. Se deja ver que el importe de una vara multiplicado por $\frac{22}{5}$ varas asciende á $\frac{47}{3}$ reales, (y que este número es el dividendo: luego, el cálculo será

$$\frac{47}{3}\text{ rs.} : \frac{22}{5}\text{ varas} = \frac{235}{66}\text{ rs.} = \left(3+\frac{37}{66}\right)\text{ rs.} =$$

$$3\text{ rs.} + \left(19+\frac{2}{33}\right)\text{ mrs.}$$

El segundo método consiste en reducir, cuando sea necesario, á un solo término el divisor, y dividir en seguida por él cada término del dividendo. Ocurren tres casos, segun que uno de ellos es entero ó ambos complexos.

1.° *Divisor entero,* como aquí. *En tres jornadas iguales se anduvieron 28 leguas y 60 varas: ¿cuánto fué lo andado en cada jornada?* El problema es hallar las veces que 3 está incluido en 28 leguas y en 60 varas: y el cálculo viene á ser

$$(28 \text{ leguas} + 60 \text{ varas}) : 3 = \left(9 + \frac{1}{3}\right) \text{leg.} + 20 \text{ varas.}$$

El problema está resuelto; pero si queremos dar otra espresion á la cantidad hallada, redúzcase á varas $\frac{1}{3}$ legua, en el supuesto de tener 4000 cada legua, y tendremos

$$\frac{4000}{3} \text{ varas} = \left(1333 + \frac{1}{3}\right) \text{ varas,}$$

que se deben unir á las 20 de la solucion. Esta será entonces (28 leg. + 60 var.) : 3=9 leg. + 1353 var. + 1 pie.

2.° *Divisor complexo,* como en el caso que tomamos por ejemplo. *En 2 años y 6 meses se han construido 300 cosas, y se quiere saber cuántas en cada año,* suponiendo haberse construido igual número de cada uno. Se deja ver que el número de cosas anual multiplicado por $2 + \frac{6}{12}$ asciende á 300, y que este es dividendo: redúzcase pues el divisor á un solo término $\frac{30}{12}$, y el cálculo será

$$300 : \frac{30}{12} = \frac{3600}{30} \text{ cosas} = 120 \text{ cosas.}$$

3.° *Complexos dividendo y divisor,* de que ofrece un ejemplo el siguiente caso. *En 4 arrobas, 15 libras y 10 onzas se han ganado 5 rs. y 20 maravedis; trátese de saber cuánto en cada arroba.* Discurriendo que lo ganado en cada arroba multiplicado por $4 + \frac{15}{25} + \frac{10}{400}$ debe producir 5 reales + 20 maravedis, se conoce que este es el dividendo. Despues de reducir el divisor á solo un término, será $\frac{1850}{400}$, y el caso queda convertido al anterior, segun se presenta en el cálculo adjunto:

$$(5 \text{ rs.} + 20 \text{ mrs.}) : \frac{1850}{400} = \frac{2000}{1850} \text{rs.} + \frac{8000}{1850} \text{mrs.} =$$

$$\left(1 + \frac{150}{1850}\right) \text{rs.} + \left(4 + \frac{600}{1850}\right) \text{mrs.}$$

Reduciendo á maravedis la fraccion de reales, y agregando el residuo de maravedis que diere al que de esta especie hay en el cálculo, resulta la total ganancia

$$1 \text{ real} + \left(7 + \frac{3}{37}\right) \text{mrs. en cada arroba.}$$

TABLAS

de medidas, pesas y monedas.

MEDIDAS LINEALES.

96. La distancia desde un punto á otro, tal como el largo ó ancho de un cuerpo, es *cantidad lineal*, y la unidad aplicada para valuar esta distancia es *medida lineal*. La idea que tenemos de la distancia está espresada con una raya derecha, situada en la direccion que convenga, ó con el filo de una regla, atendiendo solamente á la largura. Las medidas menores españolas tienen los nombres *braza*, *vara*, *pie*, *pulgada*, *línea*; y el tipo ó patron de estas medidas es la vara conservada en el archivo de la ciudad de Burgos. La descomposicion de unas en otras es como aparece por la tabla siguiente.

Brazas.		*Varas.*		*Pies.*		*Pulgadas.*		*Líneas.*
1	=	2	=	6	=	72	=	864
		1	=	3	=	36	=	432
				1	=	12	=	144
						1	=	12

En Francia se ha usado por mucho tiempo el mismo sistema de medidas menores lineales, llamándose *toesa* la mayor de ellas, descompuesta en pies, pulgadas y líneas, como sigue:

Toesas.		*Pies.*		*Pulgadas.*		*Líneas.*
1	=	6	=	72	=	864
		1	=	12	=	144
				1	=	12.

Estos tipos franceses se usan todavía en España para medir la estatura de los reclutas, y fueron tambien admitidos para los Reales arsenales de tierra y mar, por lo cual se llama en España *pie de Rey* al frances. Pero es necesario advertir, que ni la toesa equivale á nuestra braza, ni el pie frances y sus partes á las medidas castellanas del mismo nombre. Las francesas esceden algo á las nuestras, pues, aproximando el valor en decimales de braza, 1 toesa equivale á 1,165823 brazas, y la misma relacion hay entre los pies, entre las pulgadas y entre las líneas.

Son medidas mayores españolas la *legua* y el *estadal*; aquella para distancias itinerarias, y esta para las agrarias.

1 legua consta de $6666\frac{2}{3}$ var. = 20000 pies castellanos.

1 estadal consta de 4 varas = 12 pies castellanos.

MEDIDAS DE SUPERFICIE.

97. Las medidas de superficie son tambien superficies de la figura que se describe al márgen, y es un cuadro plano

que tiene iguales sus cuatro líneas laterales. Toma el nombre segun la estension que tenga su lado, y consta de tantas partes dicha medida superficial, cuantos pequeños cuadros resultan en ella dividiendo los lados en igual número de partes y encaminando líneas derechas de punto á punto de division correspondientes, como la figura representa.

Se halla el número de partes que hay en el cuadrado superficial, multiplicando por sí mismo el número de partes lineales que tiene su lado. Así, habiendo n partes lineales en el lado, resultan $n \times n$ partes superficiales en el cuadrado.

Las medidas agrarias superficiales de España son unos cuadrados que se llaman, *fanegada, aranzada, estadal cuadrado, y pie cuadrado* castellano.

1 fanegada tiene de lado 24 estadales =288 pies.
1 aranzada tiene de lado 20 estadales =240 pies.
1 estadal cuadrado tiene de lado 12 pies.
1 pie cuadrado tiene de lado 1 pie.

De consiguiente los valores de dichas medidas superficiales vienen á ser como espresan las tablas que siguen:

Fanegadas.		*Estadales cuadrados.*		*Pies cuadrados.*
1	=	576	=	82944
		1	=	144

Aranzadas.		*Estadales cuadrados.*		*Pies cuadrados.*
1	=	400	=	576000

MEDIDAS DE VOLUMEN Ó CAPACIDAD.

98. Para semillas y otros frutos secos, en España se usan *caiz, fanega, celemin y cuartillo.* El tipo es la media fanega conservada en el archivo de la ciudad de Avila; y tienen las relaciones que la tabla espresa:

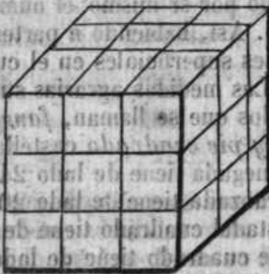
Caices.		*Fanegas.*		*Celemines.*		*Cuartillos.*
1	=	12	=	144	=	576
		1	=	12	=	48
				1	=	4.

::

Para líquidos, escepto el aceite que se valúa por peso, estan admitidas *arroba de capacidad ó cántara, azumbre y cuartillo.* El tipo original de estas medidas es la cántara conservada en el archivo de la ciudad de Toledo; y su composicion como sigue:

Cántaras.		*Azumbres.*		*Cuartillos.*
1	=	8	=	32
		1	=	4.

Se miden grandes bultos de tierra, agua, &c., por el volúmen que encierra la figura terminada por seis cuadros superficiales planos é iguales, como al márgen se dibuja en perspectiva, la cual se llama *cubo*. Toma el nombre segun la estension que tenga el lado lineal de los cuadros, y consta de tantas partes cúbicas cuantos pequeños cubos resultan á el total, dividiendo los lados en igual número de partes iguales, y haciendo cortes planos desde unos á otros como representa la figura. Se halla el número de partes cúbicas multiplicando por sí mismo dos veces el número de partes lineales que tiene su lado. Así, habiendo n partes lineales en el lado, consta de $n \times n \times n$ partes cúbicas el volúmen.



Limitándonos á nuestras medidas legales, 1 braza cúbica tiene de lado lineal 1 braza =2 varas=6 pies.
1 vara cúbica tiene de lado lineal 1 vara =3 pies.
1 pie cúbico tiene de lado lineal 1 pie=12 pulgadas.
Luego, por lo manifestado resulta que
1 braza cúbica consta de 8 varas cúbicas=216 pies cúbicos.
1 vara cúbica=27 pies cúbicos.
1 pie cúbico=1728 pulgadas cúbicas.

MEDIDAS GENERALES DE TIEMPO.

99. Actualmente son unidades de tiempo, *siglo, año, mes, dia, hora, minuto y segundo*; y su composicion es como sigue.

Un año consta de 12 meses ó de 365 dias; escepto el bisiesto que tiene 366 dias, y tal es el que viene cada cuatro años contados desde el nacimiento de nuestro Señor Jesucristo. La adicion de 1 dia en el año bisiesto se hace con el objeto de compensar un pequeño esceso fraccionario de dia que el año solar, ó tiempo en que se verifica el viage anual completo del globo, tiene sobre el año comun, que es de dias cabales.

El mes no consta de igual número de dias: tienen 31 dias, enero, marzo, mayo, julio, agosto, octubre y diciembre. Tienen 30 dias, abril, junio, setiembre y noviembre. El restante que es febrero tiene 28 dias comunmente, y 29 en el año bisiesto. La composicion del dia es como sigue:

Dias.		*Horas.*		*Minutos.*		*Segundos.*
1	=	24	=	1440	=	86400
		1	=	60	=	3600
				1	=	60.

Para retener en la memoria la idea de los dias que tiene cada mes de los doce, puede servir de regla, que tienen 31 dias todos los meses contados alternando desde enero hasta julio, y lo mismo desde agosto en adelante, y 30 dias todos los demas, esceptuando febrero, que tiene 28 ó 29 como se ha dicho.

Unidades de peso, llamadas pesas.

100. Son unidades de peso en España, *quintal, arroba, libra, onza, adarme, tomin* y *grano*: y el tipo es el *marco* ó pesa de media libra conservada en el archivo del consejo de Castilla. La composicion es conforme á la tabla siguiente:

Quint.		*Ars.*		*Lib.*		*Onz.*		*Adarm.*		*Tomin.*		*Gran.*
1	=	4	=	100	=	1600	=	25600	=	76800	=	921600
		1	=	25	=	400	=	6400	=	19200	=	230400
				1	=	16	=	256	=	768	=	9216
						1	=	16	=	48	=	576
								1	=	3	=	36
										1	=	12

En Francia usaban antes un sistema de pesas con los nombres, *quintal, libra, marco ó media libra, onza, dracma, escrúpulo y grano*: su composicion desde quintal hasta onza es la misma de las nuestras, pero no el valor de cada unidad en ambos reinos; las francesas esceden á las nuestras, como se ve por la tabla

Quint.ˢ	*Lib.ˢ*	*Onz.ˢ*	*Valores en pesas de España.*	
1 =	100 =	1600 =	1,063928	Quintales.
	1 =	16 =	1,063928	Libras.
		1 =	1,063928	Onzas.

La composicion desde onza hasta grano es como sigue:

Onzas.		*Dracmas.*		*Escrúpulos.*		*Granos.*
1	=	8	=	24	=	576
		1	=	3	=	72
				1	=	24

MONEDAS ESPAÑOLAS.

101. Se usan en el Reino monedas de oro, de plata y de cobre; unas que se acuñan actualmente y otras puramente ideales adoptadas desde tiempos antiguos. La composicion de ellas es cual vamos á decir.

Doblon de á 8 ú onza de oro, = 2 medias onzas de oro = 4 doblones de oro = 8 escudos de oro = 16 pesos fuertes = 320 reales vellon.

Media onza de oro, = 2 doblones de oro = 4 escudos de oro = 8 pesos fuertes = 160 reales vellon.

Doblon de oro, = 2 escudos de oro = 4 pesos fuertes = 80 reales vellon.

Doblon sencillo, moneda ideal = 3 pesos fuertes = 60 reales vellon.

Escudo de oro, = 2 pesos fuertes.

Medio escudo de oro ó escudito nuevo, = 1 peso fuerte.

Peso fuerte, moneda de plata = 2 escudos de plata = 5 pesetas = 20 reales vellon = 680 maravedís.

Peso sencillo, moneda ideal = 15 reales vellon.

Ducado, moneda ideal = 11 reales vellon.

Escudo de plata ó medio peso fuerte, moneda de plata $=10$ reales vellon $=340$ maravedís.

Peseta, moneda de plata $=4$ reales vellon $=136$ maravedís.

Media peseta, moneda de plata $=2$ reales vellon $=68$ maravedís.

Real de vellon, moneda de plata, que es el de las divisiones precedentes $=34$ maravedís.

Se distingue comunmente al real con el epíteto de vellon por dos razones.

1.ª En las Américas españolas está en uso otro *real* que llaman de *plata*, y es la octava parte del peso fuerte ó $2\frac{1}{2}$ reales de vellon. Hay tambien monedas que valen el duplo, y el cuadruplo del real de plata, que son la *peseta de 5 reales vellon* y la *pieza de 10 reales vellon*.

2.ª En el cambio con algunas plazas estrangeras aun se usan ciertas otras monedas nuestras imaginarias, tituladas de *plata vieja*, de las cuales ya no hacemos casi mencion en el comercio interior, aunque en otro tiempo eran corrientes. Las relaciones del real y el maravedi de plata vieja con el real y el maravedi de vellon vienen á ser las siguientes:

1 real de plata vieja $=34$ maravedís de plata vieja $=64$ maravedís de vellon.

1 maravedi de plata vieja $=1\frac{15}{17}$ maravedís de vellon.

De esta clase son los maravedís de que se habla en muchas leyes, relaciones históricas de precios, y disposiciones testamentarias antiguas: atendiendo pues al significado de ellos y al gran valor de la moneda en Europa antes del descubrimiento de las Américas, no debemos estrañar la diferencia entre aquellas recompensas pecuniarias y las actuales.

El maravedi de vellon es moneda de cobre, y ademas hay de este metal otras tres, que son, *pieza de á dos cuartos, cuarto* y *ochavo*. Su composicion es como sigue.

Pieza de á dos cuartos.		*Cuartos.*		*Ochavos.*		*Maravedis vellon.*
1	=	2	=	4	=	8
		1	=	2	=	4
				1	=	2

Medidas, pesas y monedas nuevamente establecidas en Francia, y sus relaciones con las nuestras.

102. Las unidades cardinales para la numeracion respectiva tienen los nombres que á continuacion espresamos.

Metro, unidad lineal.

Aro, unidad de superficie.

Stéreo, ó *metro cubo*, unidad de volumen para grandes bultos.

Litro, unidad de capacidad para líquidos y granos.

Gramo, unidad de peso.

Franco, unidad de moneda.

Habiéndose propuesto los que instituyeron esta clase de unidades el simplificar los cálculos necesarios en el comercio, establecieron en cada especie de cantidades un sistema de mayores y menores segun la escala decimal, arreglando al mismo tiempo la nomenclatura de suerte que fuese uniforme. Esta consiste en anteponer al nombre de la unidad cardinal el conjunto de algunas sílabas griegas, como *deca*, *hecto*, *kilo*, *miria*, &c. para espresar unidades, diez, ciento, mil, diez mil, &c. veces mayores que aquella; y el conjunto de algunas sílabas latinas, como *deci*, *centi*, *mili*, *decimili*, &c. para espresar las unidades, diez, ciento, mil, diez mil, &c. veces menores. Se podrá formar idea de esta nomenclatura por la tabla siguiente del valor sucesivo de las medidas lineales.

miriámetro	kilómetro	hectómetro	decámetro	metro	decímetro	centímetro	milímetro
...,10000,	1000,	100,	10,	1,	$\frac{1}{10}$,	$\frac{1}{100}$,	$\frac{1}{1000}$,....

En las monedas, aunque los institutores no siguieron tanto el sistema decimal, uniformaron sin embargo el orden de composicion refiriendo al franco todas las de oro y de plata que establecieron. De esta última especie es el *franco*, y tiene 5 gramos de peso total compuesto de $\frac{9}{10}$ de plata y $\frac{1}{10}$ de cobre. El franco se supone dividido en 100 *céntimos*, y en nuestro comercio equivale á 3 reales y 23 maravedis próximamente.

Los tipos para medir distancias superficiales y bultos y para los pesos fueron arreglados por datos de la naturaleza, sirviendo para su institucion las medidas métricas lineales. Véase como los comisionados formaron todo el sistema.

El metro es $\frac{1}{10000000}$ del arco de la meridiana de Paris comprendido entre el polo y el ecuador, que se llama cuadrante de meridiana, y consta de 100 grados geográficos, estando el contorno de la tierra dividido en 400 grados. Los sabios comisionados hallaron que dicho cuarto de meridiana tiene de estension 5130740 toesas, y dividiendo por 10000000, resultó

Metro.		*Toesas.*		*Pies franceses.*
1	=	0,5130740	=	3,0784440.

Cada 1000 metros de los 10000000 que componen el cuadrante es la *milla decimal*, y cada 10000 metros *legua decimal*: de suerte, que el cuadrante consta de 10000 millas ó de 1000 leguas decimales, y por consiguiente cada uno de sus 100 grados consta de 100 millas ó de 10 leguas decimales.

Por el valor hallado para el metro, y la relacion que segun dijimos en las medidas lineales (96) hay entre el pie frances y el español, resultan las equivalencias

metro.		*pies franc.*		*pies españ.*		*pulgadas españ.*
1	=	3,0784440	=	3,5889208	=	43,0670496;

decímetro.		*pulgadas españolas.*		*líneas españolas.*
1	=	4,3067049	=	51,6804595;

centímetro.		*líneas españolas.*		*puntos españoles.*
1	=	5,1680459	=	62,0165634;

milímetro.		*puntos españoles.*
1	=	6,2016563.

Como, en el supuesto de dividir el cuadrante en 100 grados, la estension de cada uno será la centésima parte de 5130740 toesas, ó 51307,40 toesas=307844,40 pies franceses; sustituyendo por cada pie frances su equivalente 1,165823 de medida española, esto es, multiplicando el número de pies franceses por 1,165823, resulta la estension del grado geográfico centesimal en pies españoles.

1 grado centesimal=358892,0819...... pies españoles.

Dividiendo por 20000 que es el número de pies de nuestra legua, se halla que el grado geográfico centesimal consta de 17,9446 leguas españolas.

Si el cuadrante de la meridiana se supone dividido en 90 grados, como se acostumbraba antes de la época de las nuevas medidas, y aun ahora se usa en otros paises, la estension

de cada grado de esta clase será $\frac{5130740}{90}$ toesas=57008,22

toesas=342049,3..... pies franceses.=398768,9410...... pies españoles.

Dividiendo por 20000, resulta que el grado geográfico

$\frac{1}{90}$ del cuadrante contiene 19,9384 leguas españolas.

Habiéndonos ocupado bastante la digresion motivada por el metro, daremos una ligera idea de los demas tipos nuevos nombrados al principio del artículo.

Aro es una superficie cuadrada cuyo lado tiene 10 metros lineales: consta por consiguiente el aro de 100 *metros cuadrados*, y equivale á 8,9446872 estadales cuadrados de á 12 pies españoles de lado.

Stéreo, ó metro cubo, es un bulto de la figura á que se llamó cubo en nuestras medidas de capacidad (98); tiene de lado el metro lineal, y cada una de sus seis caras es un metro cuadrado.

Litro es la cabida de un cubo cuyo lado tiene un decímetro lineal, y de consiguiente cada una de sus 6 caras un decímetro cuadrado. El litro equivale á 0,863562 cuartillos de celemin, y á 1,98289 cuartillos de azumbre nuestros. El *hectólitro* equivale á 21,589 celemines.

Gramo es el peso de agua destilada ó pura que cabe en la figura cúbica que tiene de lado el centímetro, bajo ciertas condiciones en cuanto al grado de calor y peso atmosférico, porque segun ellas varían, se altera la estension de los cuerpos algun tanto. El gramo equivale á 20,030741 granos españoles: el *kilógramo* á 2,1734745 libras españolas: el *miriagramo*, á 21,734745 libras españolas.

Considerando que á muchos interesa el saber la relacion de nuestras pesas medicinales del marco frances con las modernas francesas, damos la noticia que sigue.

Pesas medicinales españolas del marco frances.	equivalen á	*Pesas modernas francesas.*
1 libra medicinal de 12 onz.	3,671292	hectógramos.
1 onza	3,05941	decágramos.
1 dracma	3,82426	gramos.
1 escrúpulo	1,27475	gramos.
1 óbulo..................	6,3738	decigramos.
1 silicua................	2,1246	decigramos.
1 grano..................	5,3115	centígramos.

1 gramo equivale á 18,82715 granos medicinales:
1 decígramo equivale á 1,882715 granos medicinales.

DE ALGUNAS OTRAS MEDIDAS, PESAS Y MONEDAS, CON RELACION Á LAS NUESTRAS.

103. A pesar de las grandes ventajas que ofrece para ciencias, artes y comercio, la generalizacion del sistema decimal de pesas y medidas, no se ha establecido aun en otras naciones; y ademas, la variedad caprichosa de sistemas y nomenclatura es tal, que embaraza escesivamente para las relaciones comerciales, como se puede ver en las tablas que se insertan en la traducion francesa de la Geografía de Gutrie. Aqui solo haremos mencion de algunas equivalencias inferidas de los datos que con mas confianza de su exactitud hemos tomado de varias obras.

MEDIDAS LINEALES MEN.	Pies españoles.
1 *pie inglés*=.....................	1,093899
1 *pie de Viena*=..................	1,134467
1 *pie del Rhin, usado en casi toda la Alemania*......... =	1,090608

Cada *toesa inglesa* consta de 2 *yardas*; la yarda de 3 *pies ingleses*; el pie de 12 *pulgadas*; y asi sucesivamente como en nuestras medidas.

MEDIDAS ITINERARIAS.	Pies españoles.
1 *milla legal* de Inglaterra............	5769,84
1 *milla* de Alemania...................	26496,72
1 *milla comun* de Italia...............	6625,92
1 *milla* de Suecia y de Dinamarca.......	37855,44
1 *milla comun* de Holanda..............	20211,84
1 *berris* de Turquía....................	5964,72
1 *werste* de Rusia......................	3799,16
1 *legua* de Portugal....................	20782,56.

La libra inglesa llamada de *troy* se divide en 12 onzas, la onza en 20 *penny weight*, y cada penny weight en 24 granos; de suerte, que la libra *troy* consta de 5760 granos troy: esta libra y sus fracciones son las que se emplean para pesos pequeños. En los pesos grandes emplean otra libra mayor llamada *avoir du pois*, que se divide en 16 onzas de su clase, y equivale á 7004 granos troy: el quintal inglés, llamado *hundred*, consta de 112 libras de esta clase. La relacion de las pesas inglesas á las nuestras es como sigue:

1 libra avoir du poids=0,985703 libras españolas.
1 libra troy=0,810630 libras españolas.
1 grano troy=1,219068 granos medicinales de España.
1 grano troy=1,297000 granos del marco español.

Los ingleses usan para medir líquidos el *gallon*, que cuando es de vino equivale á 7,50589 cuartillos españoles: la bota de vino consta de 126 gallones. El gallon de cerbeza es algo mayor, y el de aceite equivale á la medida nuestra de 7,53289 libras de aceite.

Para granos usan la cuartera, *cuarter*, que equivale á 5,1368 fanegas nuestras, y el *bushel*, que es la octava parte de la cuartera y equivale á 7,7052 celemines nuestros.

MONEDAS ESTRANGERAS.	*Valor en rs. y mrs.*	
1 *cheling*, moneda inglesa de plata, vale 12 *peniques* ó *dineros*.	4	19
1 *guinea*, moneda inglesa de oro, vale 21 chelines.	98	2
1 *libra esterlina*, moneda de cambio de Inglaterra, ó *Soberano* efectiva de oro, vale 20 chelines.	93	11
1 *rublo*, efectiva de Rusia, vale 100 *copeckes*. .	15	4
1 *risdal*, efectiva de Suecia, de 48 *escalines*. .	21	11
1 *piastra*, imaginaria de Turquía, vale 4 *solotas* ó 80 *aspres*.	18	2
1 *risdal*, efectiva de Dinamarca, que vale 6 *marcos*.	18	12
1 *risdal* de banco, efectiva de Hamburgo, que vale 3 *marcos*.	21	13
1 *risdal* ó *ducado*, efectiva de Holanda, que vale 10 *stuivers*.	20	10
1 *risdal* ó doble florin, efectiva de Austria. . . .	21	13
1 *escudo* ó *risdal* de Prusia, de 24 *gruesos buonos*.	13	26
1 *peso de cambio*, imaginaria de Génova, vale 115 *sueldos*, de los que 20 componen una *lira*.	18	20
1 *ducado de cambio*, efectiva de Nápoles, vale 10 *carlines* ó 100 *granos*.	15	26
1 *libra tornesa*, imaginaria de Francia, equivale á $\frac{80}{81}$ de *franco*, y se divide en 20 *sueldos* ó 240 *dineros*.	3	22
1 *cruzado nuevo*, efectiva de Portugal, vale 480 *reis*.	11	4
1 *escudo*, efectiva de Roma, vale 10 *paolos* ó *julios*, ó 100 *bayocos*.	19	32

En el comercio se emplea tambien *papel moneda*, que á pesar de haber tenido en su creacion valor fijo, igual al que representa como sucede en *vales* y en *billetes* de banco, ó menor del que representa como suele suceder en billetes de los empréstitos, recibe variaciones en el valor corriente segun la escasez ó abundancia local del dinero respecto del papel, y segun el crédito de éste. En tal sentido se dice que en Lóndres, por ejemplo, están los billetes de tal empréstito á tanto: y para conocer cuánto pierden ó ganan hay que saber á cómo se instituyeron en su creacion, suponiendo 100 el valor que representan. Si el valor de creacion fue el mismo del papel, y se dice que está al 80 en el dia, claro es que pierde 20 por 100. Si se creó al 90 y en el dia se halla al 80, fácilmente se deduce que pierde 10 por 90 del valor que tuvo en su creacion, y 20 por 100 del valor que representa el papel; valor que desde un principio fue 10 por 100 mayor que el dinero dado por el papel.

Las monedas españolas *de cambio* con las plazas estrangeras, se refieren al real y al maravedí de plata vieja (101), y son: ducado, que vale 11 rs. y 1 mrs.; peso, que vale 8 rs.; doblon de plata que vale 32 rs.; doblon de oro, que vale 40 rs. Y cuándo se dice que el cambio está á tanto entre una de aquellas plazas y otra española, Madrid por ejemplo, debemos entender; con Lóndres, tantos peniques por 1 peso; con Paris, francos por doblon de plata; con Amsterdan, dineros de grueso por ducado; con Génova, liras por doblon de oro; con Hamburgo, dineros de grueso por ducado; con Lisboa, reis por doblon de plata; con Liorna, pesos de plata por 100 pezzas.

CAPITULO V.

Cálculo de cantidades fraccionarias literales.

LECCION I.ª

Espresion y trasformaciones de los quebrados literales.

104. Está demostrado que en la division de a por b

es $\frac{a}{b}>1$ si $a>b$; $\frac{a}{b}=1$ si $a=b$; $\frac{a}{b}<1$ si $a<b$; como por ejemplo $\frac{8}{7}=1+\frac{1}{8}$, $\frac{8}{8}=1$, y $\frac{8}{9}<1$.

La del tercer caso dá materia para este capítulo, espresa *cantidad fraccionaria propia* ó menor que 1, é indica division impracticable por no dar entero al cociente, como se ha visto al tratar de las fracciones aritméticas de nuestro sistema de numeracion.

Para valuar la *fraccion ó quebrado propio* que indica en general $\frac{a}{b}<1$, sustitúyase $\frac{b}{b}$ en lugar de la unidad (71. 2.º), suponiendo está dividida en b partes iguales á $\frac{1}{b}$; y será $\frac{a}{b}<\frac{b}{b}$. En donde se hace ver que $\frac{a}{b}$ es tanto menor que 1 cuanto b mayor que a, como por ejemplo en $\frac{6}{8}<\frac{8}{8}$. Por esta razon se llama *numerador* el número que está encima de la raya; pues enumera las partes de unidad que vale la fraccion; y el que está debajo se llama *denominador*, porque da nombre á la fraccion, manifestando las partes en que está dividida la unidad. Ambas cantidades se nombran *términos* de la fraccion.

La forma y nomenclatura de las fracciones literales propias tambien es empleada siendo $\frac{a}{b}>1$; mas entonces la fraccion se llama *impropia*, como en las aritméticas $\frac{8}{3}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{24}{5}$, $\frac{123}{7}$; &c., y en la literal $\frac{bcd}{c}$ que equivale á bd, en $\frac{bcd}{ch}$ equivalente á $\frac{bd}{h}$, y en $\frac{bcd+mn}{c}$ que equivale á $bd+\frac{mn}{c}$ segun las reglas de la division (71); divisiones capaces de dar enteros al cociente con residuo ó sin él.

105. Por ser las espresiones fraccionarias divisiones indicadas, *no se altera su valor aunque se multipliquen ó partan sus dos términos por una misma cantidad* (71. 3.° y 6.°). Segun esto, $\frac{a}{b}$ es como $\frac{am}{bm}$; $\frac{5}{6}$ equivale á $\frac{5n}{6n}$; á $\frac{10}{12}$; á $\frac{35}{42}$, &c.: asimismo son equivalentes $\frac{a^2}{ab}$ y $\frac{a}{b}$; $\frac{4}{12}$, $\frac{2}{6}$ y $\frac{1}{3}$.

106. De aqui se deducen los modos con que á una fraccion se puede dar la forma de entero, y á un entero forma fraccionaria.

Para el primer objeto sea la fraccion dada $\frac{a^p}{b^q}$ multiplicando por b numerador y denominador, la fraccion propuesta equivale á $\frac{a^p b}{b^{q+1}}$: y segun la regla establecida en la division para cuando haya letras iguales en dividendo y divisor (72. I.), la fraccion que ha resultado viene á ser $\frac{a^p b^{1-q-1}}{1}=a^p b^{-q}$. La cual nos dice que en una *fraccion el denominador puede pasar al numerador con esponente de signo contrario*, recibiendo asi la fraccion forma de entero compuesto de dos factores, uno que era numerador, y otro que era denominador con signo cambiado en su esponente.

Si hubiéramos multiplicado los términos de la fraccion por a^{-p}, nos diria el resultado *que tambien se puede pasar con esponente de signo contrario el numerador al denominador*, resultando entonces la fraccion $\frac{a^p}{b^q}$ trasformada en $\frac{1}{b^q a^{-p}}$.

Para el segundo objeto que indicamos de espresar un entero en forma fraccionaria, sabemos por el principio citado, que será n el entero ó número de unidades enteras que exactamente dará la division $\frac{dn}{d}$ concepto espresado en $\frac{dn}{d}=n$. Esta equivalencia de espresiones del número n entero dice, que *para dar á la cantidad entera forma fraccionaria, se multiplique y parta por la cantidad que haya de ser denominador en la fraccion.* Segun esto, 4 enteros reducidos á tercios darán la fraccion $\frac{4\times3}{3}=\frac{12}{3}$ equivalente á 4: tambien 2 reducido á séptimos da $\frac{2\times7}{7}=\frac{14}{7}$: &c.; como ya se sabia (82. I.). Asimismo, el entero hk reducido á fraccion del denominador d, será $\frac{dhk}{d}$.

107. Del principio (105) citado, para fundar las dos conclusiones precedentes, se infieren tambien los medios para conseguir los objetos que se van á proponer. 1.° *Reducir las fracciones á un mismo denominador ó numerador.* 2.° *Conocer cuál de dos fracciones propuestas vale mas.*

1.° En cuanto á lo primero, sean $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{g}{h}$ las fracciones: multiplicando los términos de la primera por dh producto de los otros denominadores, igualmente los términos de la segunda por bh, y los de la tercera por bd, resultan $\frac{adh}{bdh}$, $\frac{cbh}{bdh}$, $\frac{gbd}{bdh}$, sin alterarse el valor de cada fraccion. Si se multiplican los términos de la primera fraccion propuesta por cg producto de los otros numeradores; igualmente los términos de la segunda propuesta por ag, y los de la tercera por ac; resultarán las fracciones equivalentes respectivas con numerador comun, $\frac{acg}{bcg}$, $\frac{acg}{adg}$, $\frac{acg}{ach}$. Luego en general, *se* *multiplican los términos de cada fraccion por el producto de los denominadores de las otras para reducirlas á comun denominador; y por el producto de numeradores de las otras para numerador comun; y aun se podrá lograr á veces el mismo resultado, multiplicando ó dividiendo por algun factor, solamente los términos de alguna de ellas.* Por ejemplo, $\frac{4}{7}$ y $\frac{3}{5}$ reducidos á comun denominador son $\frac{4\times5}{7\times5}$ y $\frac{3\times7}{5\times7}$, ó bien $\frac{20}{35}$ y $\frac{21}{35}$: las mismas propuestas reduciéndolas á numerador comun, serán $\frac{4\times3}{7\times3}$ y $\frac{3\times4}{5\times4}$ ó $\frac{12}{21}$ y $\frac{12}{20}$. Si las fracciones dadas fueran $\frac{9}{16}$ y $\frac{3}{4}$, bastaria multiplicar los términos de la segunda por 4 para reducirlas á comun denominador, así como multiplicarlas por 3 para reducirlas á numerador comun.

2.° Para conocer cuál de dos fracciones vale mas haremos los siguientes raciocinios. Sabemos que 1 es mayor que $\frac{1}{b}$: y dando á 1 forma fraccionaria, como $\frac{1\times n}{n}$, y operando de modo que ambas fracciones tengan un mismo denominador, tambien será $\frac{1\times bn}{bn}$ mayor que $\frac{1\times n}{bn}$. Comparando $\frac{1\times bn}{bn}=1$ con $\frac{1\times n}{bn}<1$, vemos que por ser bn mayor que n, *cuando dos fracciones tienen igual denominador vale mas la de mayor numerador;* como por ejemplo $\frac{abc}{c}>\frac{ac}{c}$ con tal que b sea mayor que 1. Son igualmente casos de esta ley general los particulares de aritmética que ya conocemos,

$$\frac{3}{5}>\frac{2}{5};\ \frac{60}{137}>\frac{36}{137};\ \frac{11}{3}>\frac{7}{3}\ \&c.$$

Tambien dando á 1 la forma fraccionaria $\frac{1\times n}{n}$, y reduciendo esta y $\frac{1}{b}$ al mismo numerador; hallaremos que, á causa de ser 1 mayor que $\frac{1}{b}$, resulta $\frac{1\times n}{n}$ mayor que $\frac{1\times n}{bn}$. Luego, *cuando dos fracciones tienen iguales numeradores vale mas la fraccion del mas pequeño denominador*. Por esto,

$$\frac{4}{6}>\frac{4}{7};\ \frac{2}{11}>\frac{2}{20};\ \frac{15}{4}>\frac{15}{6};\ \&c.$$

Asi vemos que el método de reducir á numerador comun puede ser empleado tambien, en vez del de reducir á comun denominador, para conocer cuál de dos fracciones dadas es la mayor, cuando son desiguales los numeradores entre sí como tambien los denominadores; y las reducidas manifestarán cuál es mayor de las propuestas.

La utilidad que resulta de simplificar las espresiones que entran en los cálculos, induce á dividir numerador y denominador por los factores comunes que tengan, como permite el principio del artículo (105), y para mayor brevedad por el factor mas crecido comun á ellos, llamado *máximo comun divisor*. Sin duda se conoceria este hallando primero los factores simples, y despues los compuestos de cada término de la fraccion (75), pues el mayor de ellos, comun á uno y otro término es el que se pide. Pero, siendo este medio bastante prolijo, la siguiente análisis nos enseñará otro mas breve y elegante.

Sean A y B dos cantidades cuyo factor comun se quiere hallar: divídase A, que suponemos mayor, por B: y si hay cociente exacto Q en la division $\frac{A}{B}=Q$, será B máximo comun

::

divisor de A y B. Pero si hay un residuo R, será $\frac{A}{B}=Q+\frac{R}{B}$, ó bien por lo establecido (70), $A=Q\times B+R$. Segun esta espresion manifiesta, el factor que convenga á B y R tambien debe convenir á A para que sea cociente exacto el que dé cada miembro de la ecuacion dividido por dicho factor (71. 7.°). Está pues, reducida la cuestion á dividir B por R, á fin de observar si hay cociente cabal Q'; y si viniere exactamente $\frac{B}{R}=Q'$, será R máximo comun divisor de R y B, por consiguiente de A.

Si aun de esta division resultase el residuo R', seria $B=Q'\times R+R'$: el divisor de R y R' ha de serlo tambien de B por la misma razon que antes; y la cuestion está pendiente de hallar el factor comun de R y R' por la division. Si esta diere cociente exacto Q'', seria $\frac{R}{R'}=Q''$, y R' máximo comun divisor de R', R, B, A. Pero si aun hubiere residuo, se procederá en el cálculo como hasta aqui.

La ilacion de igualdades manifiesta, que los residuos van siendo cada vez menores, pues han de ser mas diminutos que los divisores correspondientes (70); y que por esto al fin se ha de llegar hasta el residuo 1, si antes no se hubiere hallado cero. Por tanto, *será la regla general para obtener el máximo comun divisor de dos cantidades propuestas* A *y* B, *dividir la mayor por la menor, y en caso necesario despues seguir dividiendo sucesivamente cada divisor por el residuo, hasta llegar á un cociente exacto: y el divisor de la operacion que le diere es el máximo comun de las cantidades* A *y* B *propuestas*. En esta regla general está incluida la que fundamos en aritmética (83. II.).

En las fracciones algébricas, cuando son monomios el numerador y el denominador aparecen á la vista los factores comunes, y es fácil reducirlas; como $\frac{ab^3c}{mbc^2}$ que simplificada es $\frac{ab^2}{mc}$, y como $\frac{3bd^2}{12bc}$ que se reduce á $\frac{d^2}{4c}$. Si el numerador es polinomio y el denominador monomio, tambien se hallan facilmente los factores comunes que tengan, comparando el denominador con cada término del numerador (71. 7.°), pues el factor de que se trata lo ha de ser de todos los dichos términos y el denominador.

Mas, cuando son polinomios el numerador y el denominador, hay que hacer uso de la teoría general buscando el máximo divisor comun por divisiones consecutivas; y para ello conviene que hagamos algunas advertencias. Supóngase que $a+b+c+\ldots\ldots$ represente un polinomio, y cada letra de éstas un término de aquel; si hay un factor monomio h de dicho polinomio, se ha de verificar la siguiente igualdad por el principio de la division (71. 7.°),

$$\frac{a+b+c+\ldots}{h}=\frac{a}{h}+\frac{b}{h}+\frac{c}{h}+\ldots;$$

es decir, que el factor de un polinomio debe serlo de cada término. Ademas, existiendo el factor comun h en polinomio $a+b+c+\ldots\ldots$; aunque éste se multiplique ó parta por cualquiera cantidad p, varía sí el valor de la espresion, mas existe siempre el factor h, pues en el primer caso tiene la forma

$$\frac{ap}{h}+\frac{bp}{h}+\frac{cp}{h}+\ldots\text{, y en el segundo }\frac{a}{ph}+\frac{b}{ph}+\frac{c}{ph}+\ldots\ldots$$

Por esto, *cuando la cuestion es hallar el factor comun* h *de dos polinomios, puede multiplicarse ó dividirse cada uno de éstos por una cantidad cualquiera, que no sea factor del otro polinomio.* El objeto de esto se verá por lo que sigue:

Sean dados para investigar el mayor comun divisor los polinomios $a^3c-3ad+a^2bc-3bd$ y $2a^2+ab-b^2$. Conceptuarémos mayor cantidad polinomia, aquella en que tenga mayor esponente la letra que se halle en varios términos de uno y otro polinomio, como a en los propuestos; y despues de ordenarlos por ella, se procede á la division,

$$a^3c+a^2bc-3ad-3bd \quad \underline{|2a^2+ab-b^2}.$$

Al dividir el primer término por su correspondiente, vemos que el 2 impide resultado entero; mas tambien se advierte la posibilidad de multiplicar el dividendo por 2, que no es factor general en el divisor. Con esta multiplicacion se transforma en divisible, y el cálculo para el primer término del cociente será

$$\begin{array}{l|l} 2a^3c+2a^2bc-6ad+6bd & 2a^2+ab-b^2 \\ \hline -2a^3c-a^2bc+ab^2c & ac \\ \hline \end{array}$$

$$1.^{\circ} \text{ residuo.....} +a^2bc-6ad+ab^2c-6bd.$$

Hallándonos en el mismo caso anterior, multiplicaremos por 2 el dividendo, que aquí es el residuo y no el que fue divisor, á causa de haber en aquel mas términos con a y ser a^2 la mayor potencia en ambos; de lo cual resulta para el cálculo del segundo término del cociente lo que ahora presentamos por dividendo,

$$\begin{array}{l|l} 2a^2bc-12ad+2ab^2c-12bd & 2a^2+ab-b^2 \\ \hline -2a^2bc-ab^2c+b^3c & bc \\ \hline \end{array}$$

$$2.^{\circ} \text{ residuo.....} -12ad+ab^2c-12bd+b^3c.$$

Por estar a elevada á la segunda potencia en el divisor y á la primera en el residuo segundo, éste será divisor en la operacion inmediata; y ordenando por las potencias de letra comun, é incluyendo con paréntesis los términos del nuevo divisor que tienen dicha letra con el mismo esponente, la operacion será

$$2a^2+ab-b^2 \quad \underline{|a(b^2c-12d)-12bd+b^3c}.$$

Pero se deja ver en el primer término del divisor el factor b^2c-12d, que impide término entero para el cociente y que no es factor del dividendo: por lo cual, divídase por b^2c-12d este divisor, seguros de que el máximo factor comun de los polinomios propuestos, si le tienen, quedará siempre en el resultado. Haciendo la division de

$$a(b^2c-12d)-12bd+b^3c \quad \text{por} \quad b^2c-12d,$$

viene de cociente $a+b$; con que, tenemos para el cálculo restante

$$\begin{array}{l|l} 2a^2+ab-b^2 & a+b \\ \underline{-2a^2-2ab} & 2a-b \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 3.^{\circ}\ \text{residuo}\ldots & -ab-b^2 \\ & \underline{+ab+b^2} \\ 4.^{\circ}\ \text{residuo}\ldots\ldots & 0. \end{array}$$

El cociente cabal indica ser $a+b$ máximo comun divisor de los polinomios dados. Si el objeto fue simplificar la fraccion

$$\frac{2a^2+ab-b^2}{a^3c+a^2bc-3ad-3bd}:$$

divídanse numerador y denominador por $a+b$, y quedará reducida á la mas simple espresion

$$\frac{2a-b}{a^2c-3d}.$$

Aunque se pudieran dar algunas otras reglas para simplificar el dividendo ó el divisor, en las operaciones que tienen por objeto hallar el máximo factor comun, las que se han dado son suficientes y generales; pero sí debemos advertir lo siguiente. 1.° Cuando aparece un residuo sin alguna letra comun á él y al divisor de la operacion correspondiente, los polinomios propuestos carecen de factor comun. 2.° Si viene un residuo en que no haya la letra por quien se ordenaron los polinomios, es prueba de que el factor comun, si le hay, es independiente de dicha letra, y se ha de buscar en lo que haya quedado.

LECCION II.

Sumacion, resta, multiplicacion y division con fracciones literales.

109. SUMACION CON FRACCIONES. Para reunir varias frac-

ciones en una sola equivalente á la suma de aquellas, con precision han de ser de igual magnitud las unidades reunidas, porque solo asi puede convenir á la suma un solo denominador.

Dadas para reunir en una fraccion sola varias, como $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{m}{n}$, se ve desde luego que las unidades de la primera son de la clase $\frac{1}{b}$ (104), que de la segunda es unidad $\frac{1}{d}$, y de la tercera $\frac{1}{n}$. Pero sabemos reducir á un mismo denominador las fracciones que tengan diferentes denominadores (107. 1.°); pues nos consta que

$$\frac{a}{b}=\frac{adn}{bdn},\quad \frac{c}{d}=\frac{cbn}{dbn},\quad \frac{m}{n}=\frac{mbd}{nbd},$$

son equivalencias legítimas entre las fracciones propuestas y otras cuya unidad comun es de la magnitud $\frac{1}{bdn}$. De resultas, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{m}{n}$ suma pedida, es (71. 7.°) equivalente á

$$\frac{adn}{bdn}+\frac{cbn}{dbn}+\frac{mbd}{nbd}=\frac{adn+cbn+mbd}{bdn},$$

en que son de una magnitud misma las unidades y se hallan reunidas en una sola espresion. Luego, *para sumar quebrados, primeramente se reducen á denominador comun, y este será el denominador de la suma, cuyo numerador debe ser el conjunto de los numeradores que tengan las fracciones reducidas á unidades de igual magnitud.* Sirvan para ensayo las operaciones que vamos á proponer.

Habiendo de sumar las fracciones $\frac{a^2bn}{c^2d}$, $\frac{pq^2}{cd}$, $\frac{ghk}{c^2}$, se preparan, multiplicando por c los términos de la segunda y por d los de la tercera; de que resultará

$$\frac{a^2bn}{c^2d}+\frac{pq^2}{cd}+\frac{ghk}{c^2}=\frac{a^2bn+pq^2c+ghkd}{c^2d}.$$

Cuando el resultado es fraccion impropia, nos conviene á veces el hallar los enteros que haya en ella: y por esto, si entre los sumandos hay algun entero se puede ó no reducir á fraccion para evitar supérfluas operaciones. Sean por ejemplo $\frac{6a^2}{b}$, c, y $\frac{dh}{m}$ las cantidades propuestas para la sumacion; cálculo que se indica en la forma $\frac{6a^2}{b}+c+\frac{dh}{m}$. ¡Haciendo la operacion de la suma despues de reducir á comun denominador todas las cantidades parciales, tendremos el resultado $\frac{6a^2m}{bm}+\frac{cbm}{bm}+\frac{dhb}{bm}$, ó en otra forma, $c+\frac{6a^2m+dhb}{bm}$; lo mismo que se hubiera tenido mas brevemente reduciendo á comun denominador las fracciones, dejando al entero su forma primitiva. Se funda esta indiferencia de métodos en que $a+\frac{b}{c}+d+\frac{e}{f}$, es lo mismo que $a+d+\frac{bf+ec}{cf}$, y que $\frac{acf}{cf}+\frac{dcf}{cf}+\frac{bf}{cf}+\frac{ec}{cf}$ (3. 2º).

110. Restar con fracciones. Para este cálculo tambien es preciso que sean de una magnitud las unidades de minuendo y sustraendo, porque se trata de comparar dos cantidades á fin de hallar la diferencia espresada en una sola fraccion; y se escriben como para sumar, cambiando el signo del sus-

traendo (61). Sea el objeto restar $\frac{c-h}{d}$ de $\frac{a}{b}$, como se indica en $\frac{a}{b}-\frac{c-h}{d}$; reduciendo á comun denominador ambas fracciones, tenemos $\frac{a}{b}-\frac{c-h}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc-bh}{bd}$. Como $\frac{bc-bh}{bd}$ es en otra forma (71. 7.°) $\frac{bc}{bd}-\frac{bh}{bd}$ la resta indicada se trasforma en $\frac{ad}{bd}-\left(\frac{bc}{bd}-\frac{bh}{bd}\right)$; y ejecutándola conforme á la regla general (61) sobre el cambio de signos del sustraendo, resulta $\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}+\frac{bh}{bd}$. Sabemos tambien (71. 1.°) que $-\frac{bc}{bd}$ es como $\frac{-bc}{bd}$; sustituyendo pues en la resta, será por fin $\frac{ad-bc+bh}{bd}$ la indicada en $\frac{a}{b}-\frac{c-h}{d}$.

Luego, *para restar una fraccion de otra, se reducen á comun denominador; este será denominador en el residuo, y será numerador la diferencia de numeradores que resulten para las reducidas.*

Cuando es entero el minuendo ó el sustraendo, hay que reducirle á quebrado de comun denominador para que sea comparable al término fraccionario. Debiendo restar por ejemplo de c la fraccion $\frac{a}{b}$, será $c-\frac{a}{b}$ lo mismo que $\frac{cb}{b}-\frac{a}{b}$, y esto lo mismo que $\frac{cb-a}{b}$. Si el problema es restar de $\frac{a}{b}$ el centro c, como se indica en $\frac{a}{b}-c$; el cálculo dará $\frac{a}{b}-\frac{bc}{b}$, y al fin el resultado $\frac{a-bc}{b}$. Por este orden, conforme al que se siguió en las fracciones numéricas, estan ejecutadas las restas

$$4-\frac{5}{9}=\frac{36}{9}-\frac{5}{9}=\frac{31}{9}=3+\frac{4}{9}$$

$$\frac{2}{5}-1=\frac{2}{5}-\frac{5}{5}=-\frac{3}{5}.$$

El último caso es un ejemplo de que en aritmética, solo valiéndose de signos puede restarse una fraccion de otra menor, como tambien sucede en el cálculo de números enteros (64).

Si hay enteros y fracciones en minuendo y sustraendo; la comparacion puede tener lugar entre los enteros, y entre las fracciones, por lo cual se hace la operacion de dos modos; sea reduciendo á fracciones los enteros, sea restando entre sí los enteros y lo mismo los quebrados. Se funda esta indiferencia de métodos en que la resta indicada

$a+\frac{b}{c}-\left(d+\frac{e}{c}\right)$, ó bien la misma ejecutada

$a-d+\frac{b}{c}-\frac{e}{c}$, es equivalente (3. 3.°) á la reducida á fracciones $\frac{ac}{c}-\frac{dc}{c}+\frac{b}{c}-\frac{e}{c}$.

111. Multiplicar con fracciones. El problema de multiplicar la fraccion $\frac{a}{b}$ por el entero c, se indica en $\frac{a}{b}\times c$, y espresa que se ha de tomar $\frac{a}{b}$ tantas veces cuantas unidades ten-

ga c: de suerte, que se busca el resultado $\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\ldots$ repitiendo c veces la fraccion, y por la regla de sumar fracciones el resultado es $\frac{a+a+a+\ldots \text{ hasta } c \text{ veces}}{b}=\frac{ca}{b}$. Lo que nos dice, que *para multiplicar una fraccion por el entero* c, ú en otro lenguage, *para hacerla* c *veces mayor, se multiplique por* c *el numerador.*

Multiplicar un quebrado por otro, como se indica en $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$, es tomar el uno las veces que espresa el otro; y cuando este es menor que la unidad, se sigue que aquel ha de tomarse menos de una vez, es decir, que el producto será menor en tal caso que el multiplicando. Para encontrar la regla de la operacion discúrrase, que si el multiplicador fuese c, tendriamos el producto $\frac{ac}{b}$; pero como el multiplicador propuesto es d veces menor, necesariamente el producto supuesto $\frac{ac}{b}$ es d veces mayor, y hay que dividirle por d multiplicando el denominador (74. 4.°); de lo cual resultará el exacto $\frac{ac}{bd}$. Luego,

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Si el problema es multiplicar el entero c por la fraccion $\frac{a}{b}$, se puede dar á c la forma fraccionaria $\frac{cn}{n}$ y espresar el problema en la forma $\frac{cn}{n}\times\frac{a}{b}$; que da el resultado $\frac{cna}{nb}$, y se reduce á $\frac{ca}{b}$ lo mismo que en la multiplicacion de un quebrado por un entero.

Reasumiendo todos los casos de la multiplicacion de quebrados, podemos ya establecer la siguiente regla general. *El producto de un entero y un quebrado ó de dos quebrados, es otro que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador el de los denominadores*, suponiendo partido por la unidad el entero.

112. DIVIDIR CON FRACCIONES. El problema de dividir la fraccion $\frac{a}{b}$ por el entero c se indica en $\frac{\frac{a}{b}}{c}$, ó mas generalmente en $\frac{a}{b}:c$ como en el cálculo de fracciones numéricas (87), y se resuelve multiplicando por c el denominador del dividendo (71. 4.°), porque se pide hacer c veces menor á $\frac{a}{b}$. Será pues $\frac{a}{bc}$ el cociente de la division indicada $\frac{a}{b}:c$, y el resultado dicta que para *dividir una fraccion por el entero* c, *ó* en otro lenguage, para *hacerla* c *veces menor, se multiplique por* c *el denominador.*

Mas, cuando haya que dividir el entero c por la fraccion $\frac{a}{b}$, como se indica en $\frac{c}{\frac{a}{b}}$, ó mejor en $c:\frac{a}{b}$, considérese que si viniera por divisor a, el cociente seria $\frac{c}{a}$; pero como el divisor es b veces menor que a, el cociente $\frac{c}{a}$ ha de ser b veces mayor, y hay que multiplicarle por b (71. 4.º), de lo cual resultará $c : \frac{a}{b} = \frac{cb}{a}$. Esta espresion dice, que *para dividir un entero por un quebrado, se multiplica el denominador de este por aquel, y el producto que resulte es el numerador del cociente, cuyo denominador es el numerador del divisor.*

Si se trata de dividir una fraccion por otra, como se indica en $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$, supóngase c el divisor, y habrá el cociente $\frac{a}{bc}$; pero como el divisor c supuesto es d veces menor que el dado, con precision el cociente $\frac{a}{bc}$ es d veces menor que el pedido, y se ha de multiplicar por d, lo cual dará el cociente exacto $\frac{ad}{bc}$ pedido en el problema $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$.

Reasumiendo todos los casos de la division podemos establecer la siguiente regla general.

La division de un quebrado por un entero ó de un entero por un quebrado, ó de un quebrado por otro, da un cociente quebrado cuyo numerador es producto del numerador del dividendo por el denominador del divisor, y el denominador es producto del denominador del dividendo por el numerador del divisor, supuesto el entero partido por la unidad.

113. Las reglas de los dos artículos precedentes gozan de toda generalidad, sean monomias ó polinomias las dos cantidades que concurren á las dos operaciones: y siguiéndolas, vamos á practicar algunas operaciones de multiplicar y dividir fracciones.

En primer lugar es necesario ejercitarse en el cálculo con monomias, de que son ejemplos las siguientes:

$$\frac{3ab}{c}\times\frac{c^3}{6a}=\frac{3abc^3}{6ac}=\frac{bc^2}{2}, \text{ que tambien se escribe}$$

$$=\frac{1}{2}bc^2;\ \frac{1}{2}\times\frac{2}{1000}=\frac{2}{2000}=\frac{1}{1000};$$

$$\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3};\ \frac{7a^3b}{c^2}:\frac{14ab}{c}=\frac{7a^3bc}{14abc^2}=\frac{a^2}{2c};$$

$$\frac{4}{5}:\frac{7}{8}=\frac{32}{35};\ \frac{2}{3}:\frac{6}{8}=\frac{16}{18}=\frac{8}{9}.$$

Cuando se propone multiplicar ó dividir dos fracciones polinomias entre sí, debemos observar los principios generales demostrados al tratar de esta operacion por enteros en cuanto á multiplicar término por término, y la regla establecida para las fracciones.

Debiendo multiplicar $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ por $\frac{h}{k}+\frac{p}{q}$, el cálculo será

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\times\left(\frac{h}{k}+\frac{p}{q}\right)=\frac{ah}{bk}+\frac{ch}{dk}+\frac{ap}{bq}+\frac{cp}{dq}.$$

Si hay término entero en alguno de los factores ó en ambos se hace la operacion, ya reduciendo los enteros á fracciones, ya sin reducirlos. Dados por ejemplo los factores $c+\frac{a}{b}$ y $d+\frac{h}{k}$ redúzcanse los enteros á fracciones, que por mayor simplicidad tengan b y k por denominadores; y el cálculo será

$$\left(\frac{cb}{b}+\frac{a}{b}\right)\times\left(\frac{dk}{k}+\frac{h}{k}\right)=\frac{cbdk}{bk}+\frac{adk}{bk}+\frac{cbh}{bk}+\frac{ah}{bk};$$

que se reduce á $cd+\frac{ad}{b}+\frac{ch}{k}+\frac{ah}{bk}$:

como resulta igualmente sin reducir los enteros á fraccion, por el cálculo que sigue:

$$\left(c+\frac{a}{b}\right)\times\left(d+\frac{h}{k}\right)=cd+\frac{ad}{b}+\frac{ch}{k}+\frac{ah}{bk}.$$

Tambien si se calcula segun el método primero,

$$\left(2+\frac{3}{4}\right)\times\left(4+\frac{5}{11}\right) \text{ es } \left(\frac{8}{4}+\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{44}{11}+\frac{5}{11}\right),$$

ó bien, $$\frac{11}{4}\times\frac{49}{11}=\frac{49}{4}=12+\frac{1}{4}:$$

y conforme al segundo método,

$$\left(2+\frac{3}{4}\right)\times\left(4+\frac{5}{11}\right) \text{ es } 8+\frac{12}{4}+\frac{10}{11}+\frac{15}{44};$$

que haciendo la reducion vale $12+\frac{1}{4}$. Asimismo,

$$\left(a+\frac{1}{2}\right)\times\left(a+\frac{2}{3}\right) \text{ ó } a^2+\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}a+\frac{2}{6},$$

reduciendo á un término los dos del medio es

$$a^2+\frac{7}{6}a+\frac{2}{6}.$$

Para dividir un polinomio de fracciones por otro, se reducen las de cada uno á comun denominador, convirtiendo en fracciones los enteros que haya: y de este modo la operacion está incluida en la regla de dividir una fraccion por otra. Propónese por ejemplo $\left(c+\frac{a}{b}\right):\left(d+\frac{h}{k}\right)$

Que viene á ser

$$\left(\frac{cb+a}{b}\right):\left(\frac{dk+h}{k}\right)=\frac{bck+ak}{bdk+bh}.$$

Igualmente será

$$\left(3+\frac{5}{8}\right):\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{9}\right)=\frac{29}{8}:\frac{7}{9}=\frac{261}{56}=4+\frac{37}{56}.$$

LECCION III.

Fracciones continuas.

114. Cuando viene una fraccion $\frac{m}{n}$, irreductible á enteros, lo mas que se puede conseguir es un cociente entero, si lo tiene, y un residuo fraccionario. Sea dicho entero a, y r el residuo del dividendo, como espresa $\frac{m}{n}=a+\frac{r}{n}$: y dividiendo por r los términos de la fraccion residua, será $\frac{m}{n}=a+\frac{1}{\frac{n}{r}}$. Por consiguiente el denominador $\frac{n}{r}$ de la primera fraccion pada ser $n>r$, dará tambien $\frac{n}{r}$ otro cociente entero b y otra fraccion residua $\frac{r'}{r}$; y escribiendo lo hecho hasta aqui, será

$$\frac{m}{n}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{r'}{r}}.$$

Discurriendo lo mismo acerca de $\frac{r'}{r}$ y cuantos residuos consecutivos vinieren, resulta la espresion de la forma

$$\frac{m}{n}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{r'''}{r''}}}}.$$

El valor de $\frac{m}{n}$ asi desenvuelto se llama *fraccion continua*. Por su misma ilacion se infiere que a por sí solo es un valor aproximado escaso de la fraccion $\frac{m}{n}$; que $a+\frac{1}{b}$ es otro valor aproximado de $\frac{m}{n}$, pero mayor que éste por despreciar el residuo $\frac{r'}{r}$ que hay en el denominador $b+\frac{r'}{r}$: que tomando tres términos, ó bien, suponiendo $\frac{m}{n}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}$,

cercenamos á la propuesta una parte de su valor, pues $\frac{1}{c}$ y de consiguiente el denominador $b+\frac{1}{c}$ de la primera fraccion gana valor. Continuando el raciocinio de este modo se observa que, *segun tomemos número par ó impar de términos de la fraccion continua por valor aproximado, resultará éste mayor ó menor que el exacto de $\frac{m}{n}$, que se hallará entre dos consecutivos; y solo en el caso de tomar todos los términos que produgera el desenvolvimiento conducido hasta el fin, se puede lograr el verdadero.*

115. Las diversas porciones de términos en número par ó impar, de quienes hemos hablado, pueden recibir la forma ordinaria de los quebrados, como se demuestra en la tabla siguiente:

$$\frac{a}{1}\;;\quad a+\frac{1}{b}=\frac{ab+1}{b};\quad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}=\frac{abc+c+a}{bc+1}$$

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}=\frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+b+d};\ \&c.$$

Por este orden se hace la trasformacion de cualquiera número de términos de la continua en fraccion ordinaria, y se halla que existe una ley para formarlas; pues cada aproximacion viene de la precedente, sustituyendo $a+\frac{1}{b}$ por a, $b+\frac{1}{c}$ por b, y así las demas que siguen; de suerte, que hallada una, sabemos organizar la que sigue; pero hay que conocer para ello los cocientes $a, b, c, d,...$, que facilmente se pueden adquirir. Pues, a viene de $\frac{m}{n}$; b de $\frac{n}{r}$; c de $\frac{r}{r'}$; d asimismo de $\frac{r'}{r''}$; etc.; y es fácil observar que este método es el que se estableció para investigar el máximo comun divisor (83. II.) y (108).

Tambien se observa que la segunda fraccion es mas complicada que la primera; la tercera mas que la segunda; etc. y por el método con que se forman se deduce que, *ha de ser menos simple la suma fraccionaria que abrace mas términos de la fraccion continua propuesta.*

Restando la primera fraccion de la segunda, ésta de la tercera, y sucesivamente cada una de la que sigue á ella, vienen las diferencias

$$\frac{+1}{b};\ \frac{-1}{b^2c+b};\ \frac{+1}{b^2c^2d+b^2c+2bcd+b+d};\ \text{etc.}$$

Continuada la investigacion de las diferencias entre las porciones con número par y con impar de términos correspondientes á la continua, se observa que: 1.°, alternativamente vienen $+1$ y -1 por numeradores de las diferencias, el primero si es restando la suma del número par, y el segundo si de número impar: 2.°, los denominadores de las diferencias van creciendo sucesivamente, y por ello, *cuantos mas términos de la fraccion* *continua se comprendan, tanto se acerca mas la suma de ellos al valor exacto de* $\frac{m}{n}$; *aunque siempre la suma de número impar es menor, y la de número par mayor que* $\frac{m}{n}$.

Segun esta analisis, vemos el medio para hallar en términos mas simples, aunque aproximadamente, el valor de una fraccion complicada irreductible á enteros, y que la aproximacion mas simple será la menos exacta, ya por esceso, ya por defecto, segun haya comprendidos en ella número par ó impar de términos de la continua.

116. Para ensayo se propone la fraccion irreductible $\frac{86400}{20929}$ con grandes términos; y trátese de hallar otras de términos menores, y que se acerquen á valer tanto como ella. A fin de ejercitarnos en toda la teoría espuesta, seguiremos la marcha de ella en el caso particular que se propone. Hecha la division indicada, resulta

$$\frac{m}{n}=4+\frac{2684}{20929}.$$

Dividiendo los términos de la fraccion residua por su numerador, es

$$\frac{m}{n}=4+\frac{1}{\frac{20929}{2684}}=4+\frac{1}{7+\frac{2141}{2684}}.$$

Volviendo á dividir ambos términos de la fraccion residua última por su numerador, se halla

$$\frac{m}{n}=4+\frac{1}{7}+\frac{1}{1}+\frac{543}{2141}.$$

De este modo se pudiera continuar el cálculo hasta el último cociente de la fraccion contínua, pero basta lo hecho para enterarse del método; y en atencion á que sabemos hallar los cocientes $a, b, c, d, \ldots$ conforme al cálculo del máximo comun divisor (83. II.), emplearemos éste para indagar los que faltan. Ejecutando asi el cálculo,

86400	20929	2684	2141	543	512	31	16	15	1
	4	7	1	3	1	16	1	1	15

tenemos $a=4$, $b=7$, $c=1$, $d=3$, $e=1$, $f=16$, $g=1$, $h=1$, $k=15$, y la fraccion contínua,

$$\frac{86400}{20929}=4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{16+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{15}}}}}}}}.$$

Con los cocientes hallados fácil sería formar las nueve fracciones, inclusa la propuesta, que deben resultar, tomando cada vez uno, dos, tres,... términos hasta los nueve que tiene la fraccion contínua, ya sustituyendo dichos valores por $a, b, c, \ldots$ en las espresiones generales de las sumas, ya ejecutando estas por la misma fraccion contínua de cifras aritméticas que se acaba de formar. Preferimos este método, y asi resultan las nueve sumas ó las ocho fracciones aproximadas á la propuesta, segun el orden sucesivo con que van escritas:

$$\frac{4}{1};\ \frac{29}{7};\ \frac{33}{8};\ \frac{128}{31};\ \frac{161}{39};\ \frac{2704}{655};\ \frac{2865}{694};\ \frac{5569}{1349};\ \frac{86400}{20929}.$$

Por lo demostrado, la penúltima fraccion es la que mas proximamente espresa el valor de la propuesta; y las demas hasta la primera $\frac{4}{1}$ al paso que van siendo mas simples se acercan menos á dicho valor, observándose en ellas la ley de ser menores que la propuesta las de lugar impar y mayores las de par. Ademas, toda otra fraccion que espresase valor aproximado de la propuesta y que estuviese incluida entre dos consecutivas de dichas nueve, seria por la misma razon mas inexacta que cualquiera otra de términos mas complicados.

117. Vemos en la teoría de fracciones continuas un segundo modo para obtener valores aproximados, de una division impracticable por el cálculo de los enteros, ademas del que conociamos ya por el de las decimales, y han ocurrido suficientes casos en lo que hasta el presente va tratado acerca de la cantidad, para penetrarse de cuanto á veces interesa un valor aproximado.

CAPITULO VI.

Potencias y raices en aritmética.

LECCION I.ª

Ideas generales acerca de las potencias y raices de los números.

118. Sabemos que *potencia* de una cantidad es el producto que resulta de la multiplicacion de la cantidad por sí misma varias veces como factor (66. 5.º); operacion que se indica en general escribiendo el factor, y á su derecha sobre el renglon el número que dice las veces que entra por factor, y que se llama *esponente* de la potencia. Siendo por ejemplo n el número, la espresion n^2 indica que n es dos veces factor, y se llama *segunda potencia de* n, *ó cuadrado de* n por lo que se verá en la geometría y se puede inferir por lo dicho en el artículo (97). En la espresion n^3 el esponente 3 indica que n es tres veces factor, y se llama tercera potencia de n, ó *cubo de n* por lo que tambien se dirá en la geometría y se puede inferir de lo ya dicho en el artículo (98); asi como n^4, n^5, &c., son poten-

cias cuarta, quinta, &c., de n. Las potencias segundas y terceras de los números dígitos desde 1 hasta 9 estan escritas en la tabla siguiente, que conviene aprenderla de memoria para los usos que se ofrecerán en adelante.

n . .	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2. .	4	9	16	25	36	49	64	81
n^3. .	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729.

Las potencias segundas y terceras de los números 10, 100, 1000, etc. se forman de memoria fácilmente, añadiendo para las segundas potencias á continuacion del número otros tantos ceros como ya tenga por sí (31); y para la tercera potencia, añadiendo á continuacion del número dos veces tantos ceros como tenga ya por sí. Las potencias de los números polidígitos se forman por la multiplicacion cuando se ofrece.

119. Las potencias de cualquiera quebrado se hallan multiplicando el quebrado por sí mismo, y sucesivamente el producto por el quebrado propuesto, hasta que entre por factor las veces que el grado de la potencia exija. Se indica la operacion encerrando en un paréntesis el quebrado, y escribiendo fuera sobre el renglon el exponente de la potencia. Asi por ejemplo, $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ indica lo mismo que $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}$; y en general $\left(\frac{n}{m}\right)^2$ indica lo mismo $\frac{n}{m}\times\frac{n}{m}$, que segun las reglas de la multiplicacion es $\frac{n^2}{m^2}$. Tambien $\left(\frac{n}{m}\right)^3$ indica lo mismo que $\frac{n}{m}\times\frac{n}{m}\times\frac{n}{m}$, ó bien $\frac{n^2}{m^2}\times\frac{n}{m}$, ó finalmente $\frac{n^3}{m^3}$. Obsérvese que las potencias segunda y tercera de la fraccion general $\frac{n}{m}$ son $\frac{n^2}{m^2}$ y $\frac{n^3}{m^3}$; y generalizando mas la idea, puesto que la multi-

plicacion de quebrados se hace numerador por numerador, y denominador por denominador, no cabe duda en que la potencia de cualquiera grado p, de la fraccion $\frac{n}{m}$, será un quebrado en cuyo numerador entrará por factor el número n las veces que espresa p, y otras tantas por factor en el denominador el número m: luego, siendo $\left(\frac{n}{m}\right)^p$ la operacion indicada, será $\frac{n^p}{m^p}$ la ejecutada; es decir, *que la potencia del grado* p *de una fraccion, es otra que tiene por numerador la potencia del grado* p *del numerador propuesto, y por denominador la potencia del grado* p *del denominador*. Segun esto, podemos decir que por ejemplo, $\left(\frac{2}{3}\right)^5$ es $\frac{2^5}{5^5}$, que resulta de $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2\times2\times2\times2\times2}{3\times3\times3\times3\times3}$ y equivale á $\frac{32}{243}$.

120. Conviene que hagamos aqui unas observaciones que nos han de ser útiles en lo sucesivo.

1.ª *Si la fraccion* $\frac{n}{m}$ *es irreductible á número entero ó á misto, su potencia* $\frac{n^p}{m^p}$, *tambien será irreductible á entero ó misto*, como se demuestra del modo siguiente. La fraccion $\frac{n}{m}$ es irreductible á entero por no ser m factor de n (41. 4.ª); é irreductible á misto por ser n menor que m (81). No siendo m factor de n, tampoco $m\times m$ puede serlo de $n\times n$ porque $n\times n$ es producto de los factores simples que tenga n, y puesto que m no pertenece á estos, tampoco el compuesto $m\times m$ puede ser de los compuestos que haya en $n\times n$ (44); y de consiguiente $\frac{n^2}{m^2}$ resulta fraccionario. Lo mismo se puede decir de $\frac{n^2\times n}{m^2\times m}$ ó $\frac{n^3}{m^3}$, asi como de $\frac{n^3\times n}{m^3\times m}$ ó $\frac{n^4}{m^4}$, &c., y en general de $\frac{n^p}{m^p}$ por la ley misma en que se funda el razonamiento. Ademas, no siendo $\frac{n}{m}$ reductible á misto, tampoco $\frac{n^p}{m^p}$ ó bien $\frac{n\times n\times\ldots}{m\times m\times\ldots}$ puede serlo; porque el producto $n\times n\times\ldots$ es menor que $m\times m\times\ldots$, á causa de ser mas pequeños sus factores (26).

2.ª Inversamente, *si* $\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{m}}$ *es fraccion reductible á entero ó misto, tambien lo será cualquiera potencia suya* $\frac{\mathrm{n}^{\mathrm{p}}}{\mathrm{m}^{\mathrm{p}}}$.

Porque $\frac{n}{m}$ es reductible á causa de ser m factor de n, ó á lo menos tener estos un factor comun. En el primer caso $\frac{n}{m}$ será reductible á entero y tambien $\frac{n^p}{m^p}$, pues viene del producto de enteros $\frac{n}{m}\times\frac{n}{m}\times\ldots$ hasta ser p veces factor el entero $\frac{n}{m}$. En el segundo caso, si $\frac{n}{m}$ es reductible á número misto, lo será tambien $\frac{n^p}{m^p}$, porque viene del producto de números mistos $\frac{n}{m}\times\frac{n}{m}\times\ldots$ hasta ser $\frac{n}{m}$ factor p veces, y en la multiplicacion de tales números (86.) hemos hecho ver que el producto contiene parte entera.

3.ª *Si* $\frac{n}{m}$ *es fraccion irreductible á espresion mas simple, lo será tambien* $\frac{n^p}{m^p}$. Porque, el ser $\frac{n}{m}$ incapaz de espresion mas simple, viene de no tener factor comun el numerador y el denominador, y si $\frac{n^2}{m^2}$ fuere reductible á espresion mas simple, tendrian $n\times n$ y $m\times m$ un factor comun que deberia serlo de n en $n\times n$, y de m en $m\times m$ (44). Mas, como esta condicion última de factor comun á n y m no tiene lugar, se sigue que $\frac{n^2}{m^2}$ no admite reducion. Lo mismo se podrá decir de $\frac{n^2\times n}{m^2\times m}$ ó $\frac{n^3}{m^3}$, y en general de $\frac{n^p}{m^p}$.

121. Raiz de cierto grado de un número es el factor que con la multiplicacion sucesiva por sí mismo debe producir una potencia igual al número, ó á la mayor potencia del mismo grado contenida en dicho número. Decimos que la raiz es del mismo grado que la potencia, porque tambien se dice *raiz segunda ó cuadrada, raiz tercera ó cúbica, raiz cuarta, raiz quinta, &c.* El signo con que se espresa el problema de *estraer la raiz de un número* es $\sqrt{}$: en seguida del signo se escribe el número cuya raiz se quiere estraer; y entre los brazos del signo se pone el número que indica el grado de la raiz, y que por esto

se llama *indice*, como por ejemplo $\sqrt[3]{N}$, para espresar que se ha de estraer la raiz 3.ª ó cúbica del número N, segun el indice 3 lo indica. Cuando se trata de estraer la raiz 2.ª se suprime el indice 2 por la simplicidad; y asi, $\sqrt{N}$ espresa que se ha de estraer la raiz segunda ó cuadrada del número N. Poniendo por ejemplo un número cualquiera de las potencias de la tabla anterior, tendremos que

$$\sqrt{81} \text{ es } 9, \sqrt{25} \text{ es } 5, \sqrt[3]{216} \text{ es } 6, \sqrt[3]{512} \text{ es } 8.$$

Pero las mas veces el número propuesto no es potencia exacta del grado mismo que el indice de la raiz que se quiere hallar; y entonces, asi como en la division de números no múltiplos del divisor, tenemos que contentarnos con hallar la raiz aproximada, ó factor que produciria la mayor potencia de aquel grado contenida en el número propuesto. Por la tabla de potencias vemos, que todos los números comprendidos entre dos consecutivos de las terceras potencias, como por ejemplo 512 y 729, no pueden tener tercera raiz espresada en número exacto, pues la del primero es 8 y la del segundo 9; y lo mismo sucede á los números comprendidos entre otras dos potencias de un mismo grado de cualesquiera dos números consecutivos del sistema de numeracion.

122. Hemos dicho que los números comprendidos entre las potencias de un grado de dos números consecutivos no pueden tener raiz entera cabal del grado de la potencia: y ahora vamos á demostrar que tampoco tienen raiz exacta fraccionaria ni mista los números enteros que no la tengan entera cabal. Porque, si una cantidad entera N pudiese tener raiz fraccionaria $\frac{a}{b}$ de algun grado m, podriamos escribir la oracion $\sqrt[m]{N} = \frac{a}{b}$; las cantidades iguales multiplicadas por otras iguales tambien dan productos iguales (3. 6.º) y (26) y por tanto, multiplicando por sí misma cada una de las de la igualdad hasta ser m veces factor en el producto, resultará $N = \frac{a^m}{b^m}$; pero este re-

sultado es absurdo por ser $\frac{a^m}{b^m}$ tan fraccionario como $\frac{a}{b}$ (120. 1.ª); luego, la raiz de un entero nunca puede ser fraccionaria. De suerte, *que las cantidades enteras que no tengan raiz entera cabal, tampoco la dan fraccionaria cabal.* Por cuya razon los números intermedios á 1, 4, 9, 16, 25, 36,.... no tendran raiz exacta cuadrada, ni tampoco cúbica las intermedias á 1, 8, 27, 64,... Mas no se entienda por esto que los números fraccionarios no pueden tener exacta raiz fraccionaria, pues el número $3\frac{1}{2}$ por ejemplo tiene la segunda potencia $\frac{49}{4}$, y de consiguiente la raiz cuadrada de $\frac{49}{4}$, es $3\frac{1}{2}$.

Segun esto, hay cantidades cuya raiz jamas puede cifrarse con exactitud en espresion entera ni fraccionaria, sino en la indicada radical $\sqrt[m]{N}$; y cuando sea necesario intentar el conocerla, hay que esperar solo una aproximacion á pesar de cuantos medios puedan aplicarse: tales cantidades se llaman *incomensurables* ó *irracionales*, pues no hay entera ni fraccionaria alguna que sea unidad de medida para valuar la raiz que exige el indice del radical. Por esto se llaman tambien *comensurables* ó *racionales* todas las demas cantidades que contienen cabal número de veces á la unidad entera ó fraccionaria, por pequeña que sea; es decir, que son comensurables todos los números enteros y fraccionarios libres de signo radical, ó que á pesar de hallarse afectados por él, equivalgan á entero ó fraccionario: así, el número 5 y todos los enteros son comensurables por contener á la unidad 1 exactamente cierto número de veces. Igualmente la fraccion $\frac{3}{8}$ y cuantas pueden imaginarse sin estar afectadas de radical ni esponente fraccionario, son racionales: en la fraccion $\frac{3}{8}$ propuesta es $\frac{1}{8}$ la unidad, á quien contiene tres veces.

123. Mas adelante se tratará de estraer las raices cuadra-

da y cúbica de los números enteros que esceden á las potencias segunda y tercera del mayor número de un solo guarismo, que es 9; y tambien del modo de hallar las raices cuadrada y cúbica aproximadas de todos los números que no las tengan exactas. En cuanto á las raices de grados superiores, hallaremos recursos para estraerlas por otros métodos que nos proporcionarán los conocimientos mas elevados de la ciencia.

124. La regla para estraer las raices de los quebrados se infiere por la regla de la elevacion ó potencias (119). Pues, de que la fraccion $\frac{n}{m}$ elevada á la potencia del esponente p é indicada en

$$\left(\frac{n}{m}\right)^p, \text{ es } \frac{n^p}{m^p};$$

se sigue que la raiz del grado p de la potencia $\frac{n^p}{m^p}$ como se indica en

$$\sqrt[p]{\frac{n^p}{m^p}}, \text{ es } \frac{n}{m}.$$

Y como la raiz $\frac{n}{m}$, ha venido de estraer las raices de numerador y denominador; claro está *que cuando se haya de estraer la raiz de una fraccion* $\sqrt{\frac{H}{K}}$, *se estraerá la del numerador y la del denominador, y la fraccion que resulte de las dos raices halladas es la raiz de la propuesta.*

Dado por ejemplo el número $\frac{64}{343}$ para estraer la raiz cúbica; por la tabla de potencias tendremos las individuales 4 y 7 del numerador y del denominador, y diremos que

$$\sqrt[3]{\frac{64}{343}}, \text{ ó segun otra forma}$$

$$\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{343}}, \text{ es } \frac{4}{7}.$$

En las lecciones que siguen propondremos casos de estraer por aproximacion las raices cuadrada y cúbica de los quebrados que no las tengan exactas, y por ahora recordamos que lo dicho en los artículos (121) y (122), acerca de las raices de los números enteros, se deberá entender tambien de las raices de los fraccionarios.

LECCION 11.

Potencia segunda de los números polidígitos, y método para estraer la raiz segunda que tiene mas de un guarismo.

125. En primer lugar nos interesa examinar la composicion de la potencia segunda de un número, formada por la multiplicacion del número descompuesto en dos sumandos, ó lo que es igual, dando al número forma de binomio. Sea pues, $A+B$ la suma de las dos partes de que conste cualquiera número: y ejecutando la multiplicacion indicada por $(A+B)\times(A+B)$ ó bien $(A+B)^2$, resultará por el segundo teorema de la multiplicacion por partes (33. 5.ª),

$$(A+B)\times(A+B)=A\times A+A\times B+A\times B+B\times B,$$

que por las reduciones (118) de $A\times A$ y de $B\times B$ en A^2 y B^2, como tambien (26) de $A\times B+A\times B$ en $2\times A\times B$, viene á ser

$$(A+B)^2=A^2+2.A.B+B^2.$$

El objeto de presentar esta composicion de la segunda potencia del número compuesto en dos partes, significadas en general aqui con las letras *A* y *B*, es el que se vean las tres partes de que consta la segunda potencia: que son, A^2 *cuadrado de la primera parte del binomio*, 2AB *duplo producto de la primera parte del binomio por la segunda*, *y* B^2 *cuadrado de la segunda parte del binomio*.

Todo número puede ser descompuesto en dos partes de varios modos (18); pero aqui se trata de números polidígitos, y el método adecuado para ellos es incluyendo en *B* todas las unidades de menor orden, y en *A* todas de mayor orden, *contando por decenas las de* A *y por unidades las de* B. Para que se comprenda mejor lo que decimos, tómese por ejemplo el número 3749, el cual podemos descomponer en 3000+749 ó sea en 300 decenas y 749 unidades; y por consiguiente su cuadrado segun la fórmula dará las equivalencias

$$(3000+749)^2=3000^2+2.3000\times749+749^2=14055001.$$

en que *A* representa 300 decenas, y *B* representa 749 unidades.

Tambien podemos descomponer el número 3749 en 3700+49; y por tanto, será bajo esta forma

$$(3700+49)^2=3700^2+2.3700.49+49^2=14055001,$$

en que *A* representa 370 decenas, y *B* representa 49 unidades.

Aun admite la descomposicion en 3740+9 el número propuesto, y de este modo será

$$(3740+9)^2=3740^2+2.3740.9+9^2=14055001,$$

en donde *A* representa 374 decenas, y *B* representa 9 unidades.

Obsérvese que segun la última descomposicion, está incluida en *A* la cifra 4, que era la de mayor orden de las de *B* en la descomposicion precedente: en esta contiene *A* las cifras 4 y 7 de las cuales carecia en la primera descomposicion: de suerte, que *en la raiz cuadrada de cualquiera número polidígito puede contener* A *una cifra ó dos cifras ó tres &c. desde la de orden mayor, escepto la de simples unidades que siempre corresponde á* B.

126. Esta analisis, que ha servido para presentar aisladas las tres partes de la segunda potencia de cualquiera número ó raiz, y para que se vea que la primera de estas puede contener una ó mas cifras; indica el camino para la estraccion de la raiz cuadrada de cualquiera número, considerado como potencia segunda. En efecto, la cuestion está siempre reducida á buscar las dos partes A y B de la raiz, considerando A decenas y B unidades, del orden que corresponda; y como

$$\sqrt{A^2} \text{ es } A, \text{ y } \frac{2.A.B}{2.A}, \text{ equivale á } B, (83. \text{ II.}),$$

se sigue que, *si conociéramos el primer término* A *de la raiz binomia, tendriamos el segundo término* B *dividiendo por el duplo* 2A *del primer término hallado, la segunda parte* 2.A.B *de la potencia.*

Por esta verdad, y la observacion que se ha hecho al fin del artículo (125), se presenta bien clara la posibilidad de hallar uno á uno todos los guarismos de la raiz, empezando por los del orden mayor: y vamos á enterarnos ahora del modo.

Para ello tenemos que aclarar dos puntos: 1.° conocer en qué parte del número, dado como potencia, se halla cada parte de las tres principales, y en donde se ha de buscar cada parte de la raiz: 2.° despues de sacar cada guarismo de la raiz, como tambien cada dos, cada tres, &c.; hacer la comparacion conveniente para cerciorarse de si están bien hallados ó no.

1.° En cuanto á conocer en que lugar del número dado como potencia debemos buscar cada parte de la raiz, haremos las reflexiones que siguen.

Las unidades de todos los órdenes del sistema actual de numeracion estan representadas por 10^n, pues todas son potencias de 10 segun lo demostrado en el artículo (31). Si es $n=0$, resulta la potencia $10^n=1$;

$$\text{si } n=1,\ 10^n=10; \text{ si } n=2,\ 10^n=100, \text{ \&c.}$$

Por otra parte, los números entre 1 y 10 tienen una cifra: entre 10 y 100 tienen dos, y asi sucesivamente: de modo, que *consta de* n *cifras todo número entero comprendido entre* 10^{n-1} *y* 10^n *sin que llegue á* 10^n; *y todo número imagina-*

ble de n *cifras, tiene su valor entre* 10^{n-1} *y* 10^n *sin llegar á* 10^n.

Puesto que habrá *n* cifras en un número cuyo valor sea entre 10^{n-1} y 10^n sin llegar á 10^n, y que el cuadrado de dicho número estará (66. 6.°) y (58) entre los cuadrados 10^{2n-2} y 10^{2n} sin llegar á 10^{2n}; claro está que tendrá el cuadrado de tal número por la misma razon $2n$ ó $2n-1$ cifras, es decir, doble ó doble menos una; será $2n-1$ si el cuadrado no llega á 10^{2n-1}, y 2^n sino llega á 10^{2n}. Luego, *si el número propuesto para estraer la raiz tiene* 2n *ó* 2n—1 *cifras, su raiz cuadrada constará de* n *cifras.* Segun esto, los números de una ó dos cifras darán una para su raiz; los de tres ó cuatro darán dos; los de cinco ó seis darán tres; los de once ó doce cifras darán seis, &c.

Ademas, el cuadrado de las unidades se hallará siempre en las dos últimas cifras del número propuesto, porque $1^2=1$ y $9^2=81$; el de las decenas simples estará en las dos cifras precedentes, porque $10^2=100$ y $90^2=8100$: el de las centenas ó decenas equivalentes se hallará en las dos cifras que preceden, porque $100^2=10000$ y $900^2=810000$; el de los millares en las dos precedentes, porque

$$1000^2=1000000 \text{ y } 9000^2=81000000;$$

y por este orden sucesivamente. Por lo cual, *separando las cifras del número propuesto en periodos de á dos cifras empezando por las últimas de la derecha, se deberá buscar la raiz de las unidades en el periodo de la derecha, la raiz de las decenas en el periodo inmediato, la de centenas en el que preceda, y asi sucesivamente las raices de órdenes mas elevados*: bien entendido que el periodo primero de la izquierda puede no constar mas que de una cifra, como sucederá cuando haya número impar de ellas en la espresion propuesta.

Como por otra parte hay $2.A.B$ en la potencia cuya raiz tenga dos términos, puede resultar en cada periodo el aumento de algunas unidades de su orden. Para saber en donde pueda recaer el producto $2.A.B$, supóngase A decenas y B unidades: el menor producto es $2\times10\times1=20$, y el mayor $2\times90\times9=1620$; aquel recae en un periodo y este en dos consecutivos. Luego, *se habrá de buscar en general* 2.A.B *en los dos periodos consecutivos juntos, que contienen á* A^2 *y á* B^2.

II.° Es llegado el caso de aclarar el segundo punto, que consiste en cerciorarnos de si la raiz hallada necesita ó no correccion, porque de los números los mas no son potencias exactas, y aun cuando lo sea el total propuesto puede no ser potencia cabal de *A* el periodo de que se estrae *A*. El modo de cerciorarse de lo que aquí se trata es el siguiente, fundado en lo que llevamos dicho. Elévese á la segunda potencia el binomio ó raiz presunta que se haya encontrado; y restando dicha potencia de toda la cantidad propuesta, si el residuo es cero, la raiz hallada será exacta; si el residuo es negativo, la raiz hallada será mayor que la exacta, y hay que corregir la operacion; si el residuo es positivo, la raiz hallada será la que se busca siempre que no admita otra mayor en unidades de la misma gerarquía la espresion propuesta. Vemos que la resta de que se trata es una operacion indispensable para cerciorarse de si es ó no verdadera la raiz hallada; y como esta se estrae por partes ó términos ó guarismos, es necesario tambien hacer sucesivamente por partes dicha resta del modo siguiente. *Hallado primeramente* A, *se resta* A^2 *de la cantidad propuesta: en este residuo se busca* B, *y de él se resta* $2.A.B+B^2$: lo cual es lo mismo que haber de la propuesta cantidad restado al fin $A^2+2.A.B+B^2$.

127. Habiéndose demostrado los fundamentos para la estraccion de raices cuadradas, vamos á practicarla.

Dado por ejemplo el número 676 como potencia, se ve desde luego que su raiz segunda constará de dos cifras, es decir, decenas simples y unidades. Hecha la division en periodos de derecha á izquierda resultan dos, como 6'76; el cuadrado de las decenas debe hallarse en el periodo 6, el cuadrado de unidades en 76, y al mismo tiempo el duplo de decenas por unidades en el conjunto 676.

Indáguese pues, con el auxilio de la tabla de potencias, la raiz cuadrada mayor contenida en el periodo 6, que es dos decenas; y escribiendo el 2 por separado como aparece en el tipo del cálculo, y el cuadrado 4

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{6'76} & 2 \\ \underline{4} & \\ 2 & \end{array}$$

de 2 bajo el periodo 6, réstese 4 de 6. La diferencia es 2, y agregando á ella el periodo 76, resulta 276; en que debe hallarse el duplo de las dos decenas multiplicadas por las unidades y el cuadrado de las unidades, que aun estan ocultas.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{6'76} & 2 \\ 4 & \\ \hline 276 & 40 \\ & 6 \end{array}$$

Para saber cuántas unidades corresponden, la espresion $\frac{2.A.B}{2A}=B$ dice (126) que se divida 276 por 40, duplo de las decenas halladas, con la precaucion de que ademas en el dividendo quepa el cuadrado de unidades B^2, por estar incluido en 76. Hecho el tanteo resulta adecuado $B=6$; y escrita esta cifra de la raiz en seguida de la anterior tenemos 26; pero es necesario comparar con el dividendo 276 la cantidad $2.A.B+B^2$ ó bien $(2A+B)\times B$ que aquí es 46×6, á fin de hallar la diferencia (126 II.°). En efecto, escrito el producto 276 bajo el dividendo, resulta cero el residuo; lo que indica ser 26 raiz cabal del número propuesto. El tipo completo del cálculo es como sigue:

$$\begin{array}{lr|l} & \sqrt{6'76} & 26 \text{ raiz.} \\ 2^2\ldots\ldots & 4 & \\ \hline \text{dividendo}\ldots & 276 & 40 \text{ divisor } 20\times2. \\ 46\times6\ldots\ldots & 276 & 6 \\ \hline \text{dividendo}\ldots & 0 & \end{array}$$

Propónese ahora para estraer la raiz cuadrada el número 105625; y segun lo manifestado debe dar tres cifras en su raiz, la cual por ello constará de centenas, decenas y unidades. Hecha la separacion de cifras, como 10'56'25, el cuadrado de las unidades estará contenido en 25, el de las decenas simples en 56, y el de las decenas compuestas que en el caso actual son centenas se hallará en el restante periodo 10. Al mismo tiempo hay en el número otros dos productos, que son el duplo de unidades por decenas y el duplo de decenas por centenas; el primero debe hallarse en 5625 y el segundo en 1056, segun lo manifestado en la teoría (126. I.°).

Teniendo en consideracion estas observaciones, indáguese la mayor raiz cuadrada contenida en el periodo primero 10, que es 3: escribiendo esta separadamente, y su cuadrado bajo del 10, al residuo 1 agréguense las dos cifras siguientes de la propuesta. La porcion 156 debe contener $2.A.B+B^2$, siendo $A=3$ decenas compuestas, y B unidades, conforme á la teoría establecida. Indáguese por tanteo un factor B tal que multiplicado por $2A$ que es 6 decenas compuestas y agregando B^2, el producto $60\times B+B^2$ ó bien $(60+B)\times B$ sea igual á 156, ó se acerque á serlo: $B=2$ produce $62\times2=124<156$; $B=3$ produce $186>156$; vemos que debe ser $B=2$. Escrito el 2 en seguida de la raiz anterior 3, resulta 32, que consideradas como decenas componen el primer término A binomio de la raiz trinomia.

En este concepto, para hallar el término B correspondiente, réstese del dividendo 156 el producto 62×2 que es 124, y resulta la diferencia 32; á quien se debe agregar el periodo siguiente 25. De suerte, que en 3225 ha de estar contenido $2\times320\times B+B^2$, ó sea $(640+B)\times B$; y debemos inferir por tanteo el número B que cumpla con la condicion de acercarse dicha cantidad al número 3225. Sin mas objeto que el tanteo se halla que 2×320 cabe 5 veces en 3225; y no pudiendo ser $B>5$, hagamos $B=5$, espuestos á la correccion si fuese demasiado grande (126, II.°). Escrito el 5 en seguida de los guarismos antecedentes de la raiz, componen 325.

Falta restar del dividendo 3225 el producto $(2.A+B)\times B$ que ahora es 645×5; y ejecutando la comparacion se halla que no hay diferencia; con que, 325 es raiz cuadrada cabal del número 105625.

El tipo del cálculo completo es como aquí se presenta

$\sqrt{10'56'25}$ | 325

3^2............	9	
dividendo......	156	60 divisor 30×2
62×2.........	124	2
dividendo......	3225	640 divisor 320×2
645×5.......	3225	5
dividendo......	0	

Nos parecen suficientes los ejemplos presentados para que sepa ya el discípulo manejarse por sí en todos los demas, y solamente haremos dos observaciones para amplificar lo que se dijo en el artículo (126. II.°).

1.ª Debiendo hallarse en cada residuo la cantidad $2.A.B+B^2$, habrá de ser $B<\frac{\text{dividendo}}{2A}$; como sucede en el ejemplo, $2<\frac{156}{60}$ en el primer dividendo, y en el segundo $5<\frac{3225}{640}$. La minoría del cociente debe ser tanta cuanta baste para que no resulte residuo negativo, como está dicho (126. II.°).

2.ª Si á una raiz A monomia ó polinomia se aumenta 1, será

$$(A+1)^2=A^2+2A+1;$$

y hace ver esta espresion, que si á la cifra de la raiz se diere una unidad de menos, el cuadrado A^2 de la parte hallada tendrá de falta $2A+1$, por consiguiente de esceso el residuo. Luego, *cuando cabe en el residuo el duplo de la raiz hallada mas la unidad, hay que aumentar* 1 *á lo menos á la cifra admitida en el tanteo para que sea la verdadera: de suerte, que precisamente debe ser positivo y menor que dicha cantidad el residuo.* Por esto el primero del ejemplo indica acierto, pues resulta $1<2\times3+1$; el segundo residuo igualmente, porque $32<2\times32+1$; y el tercero tambien, porque

$$0<2\times325+1.$$

La primera observacion manifiesta el estremo mayor, y la segunda el menor, de la cifra B del tanteo.

128. Cuando ya se tienen conocidas mas de la mitad de cifras correspondientes á la raiz, se pueden obtener las demas por simples divisiones; lo cual abrevia mucho el cálculo de la estraccion total y el siguiente raciocinio manifestará el método para conseguir el objeto.

Siendo P el número dado, A la parte conocida de la raiz, B la que falta, y h el sobrante de P sobre $(A+B)^2$, hay la igualdad

$$P=A^2+2.A.B+B^2+h.$$

Restando A^2 de una y otra cantidades iguales, y dividiendo despues los restos por $2A$, será

$$\frac{P-A^2}{2A}=\frac{2AB+B^2+h}{2A}.$$

El segundo miembro puede ponerse bajo otra forma (41. 6.ª), y entonces la equivalencia será

$$\frac{P-A^2}{2A}=B+\frac{B^2+h}{2A};$$

en donde vemos que dividiendo por el duplo del número hallado, el esceso del propuesto sobre el cuadrado de aquel, resultará un cociente que en general escederá al B que se busca en tanto como sea la cantidad $\frac{B^2+h}{2A}$.

Pero sabemos que A está seguido de m ceros; y como A sin contar con ellos consta por sí de $m+1$ cifras á lo menos por condicion establecida al principio, se sigue que A tendrá por lo menos $2m+1$ cifras, y con mas ventaja las tendrá $2A$ denominador de la fraccion sobre cuyo valor se discute. Por otra parte sabemos por condicion que B consta á lo mas de m cifras, y que por ello B^2 tendrá $2m$ á lo mas. De estas habrá tantos ceros al fin de B^2 cuantas cifras tenga h; y por tanto B^2+h tendrá á lo mas $2m$ cifras. Luego, el denominador $2A$ es mayor que el numerador, y por consiguiente menor que 1 el valor del quebrado que sigue á B en el cociente de

$$\frac{P-A^2}{2A}.$$

Esta espresion á que hemos llegado por encadenamiento rigoroso de verdades nos dice, *que, habiendo kallado en el número* P *una parte* A *de la raiz cuadrada con mas de la mitad de cifras de la raiz completa, se puede hallar la parte restante dividiendo* P—A² *por el duplo de la parte* *hallada*. En el ejemplo anterior es $P=105625$; $A=320$; $2A=640$; $A^2=102400$,

$$B=\frac{105625-102400}{640}=5+\frac{25}{640}.$$

129. Hasta aqui hemos tratado solamente de hallar la parte entera de una raiz; y el residuo final cero de los ejemplos dados para ensayo hace ver que se propuso un cuadrado exacto: pero segun lo demostrado en la precedente leccion, los mas de los números enteros han de tener algun residuo final (121). Por otra parte, sabemos que toda cantidad entera que no es cuadrado cabal no puede tener raiz segunda exacta (122); y ahora vamos á tratar de si se podrá obtener mas aproximada que la entera en aquellos números que son incomensurables: es decir, que si despues de haber estraido la raiz entera conforme al método establecido y usando si se quiere del auxilio para abreviarle, hay residuo final, que necesariamente ha de ser menor que el duplo de ella mas 1, se trata de aproximaciones.

Una simple reflexion basta para convencernos de que se puede aproximar cuanto se quiera por decimales la raiz cuadrada de cualquiera número irracional. Porque, si agregamos al fin del número entero propuesto cualquiera número par de ceros, habremos decuplicado al número tanto, cuantos ceros hayamos agregado. El número multiplicado asi nos dará en su raiz tantas cifras mas, cuantas haya en la mitad del número de ceros añadidos en aquel. Esta raiz será mayor que la entera conocida del número propuesto sin la añadidura, tantas veces cuantas esprese la unidad seguida de la mitad de ceros añadidos, porque sabemos que cada cero final de una raiz produce dos en la potencia (31). Luego, *en la raiz que diere el número con pares de ceros añadidos, serán cifras decimales tantas cuantos pares de ceros fueron agregados*. Por ejemplo, sea 5 el número propuesto para la estraccion de su raiz cuadrada:

$$\sqrt{5}=2+\ldots.. \text{ es mayor que } 2;$$

y si tratamos de aproximarla hasta décimas, habremos de añadir dos ceros al 5. Estraígase la raiz de 500 por las reglas dadas, separando las dos últimas cifras con la tilde, y tratándole durante la operacion como si A fuese decenas y B unidades; y el tipo del cálculo es:

$$\begin{array}{lrl}
 & \sqrt{5'00} & \underline{|22} \\
2^2 \ldots\ldots\ldots & \underline{4} & \\
 & 100 & \underline{|40} \\
42\times2 \ldots\ldots & \underline{84} & 2 \\
 & 16 &
\end{array}$$

Resulta $\sqrt{5}=2,2$ aproximada hasta décimas.

En el ejemplo siguiente se practican todas las reglas dadas, llevando la aproximacion hasta diezmilésimas:

$$\begin{array}{lrl}
 & \sqrt{6'63'73'21'92} & \underline{|25763} \\
2^2 \ldots\ldots\ldots\ldots & \underline{4} & \\
 & 263 & \underline{|40} \\
45\times5 \ldots\ldots\ldots & \underline{225} & 5 \\
 & 3873 & \underline{|500} \\
507\times7 \ldots\ldots & \underline{3549} & 7 \\
 & 32421 & \underline{|5140} \\
5146\times6 \ldots\ldots & \underline{30876} & 6 \\
 & 154592 & \underline{|51520} \\
51523\times3 \ldots\ldots & \underline{154569} & 3 \\
 & 23' &
\end{array}$$

En vista de que hay resíduo final despues de estraida la raiz entera 25763, y que se trata de aproximarla hasta diezmilésimas; agréganse ocho ceros á la cantidad propuesta, y se prosigue la estraccion bajando dos ceros para cada cifra que se busque de la raiz:

$$\begin{array}{lrl}
 & \sqrt{663732192,00000000} & \underline{|257630} \\
\text{dividendo para décimas} \ldots\ldots & 2300 & \underline{|515260} \\
515260\times0 \ldots & \underline{0000} & 0 \\
\text{dividendo para centésimas} \ldots & 230000 &
\end{array}$$

Siguiendo el método ordinario llegariamos á tener las tres cifras decimales restantes; pero habiéndose propuesto el ejemplo para ensayo de toda la teoría, las hallaremos por la fórmula aproximativa $B=\frac{P-A^2}{2A}$. Siendo en el caso presente

$$P=663732192000000000,\ y\ A=257630,$$

se tendrá el conjunto B de dichas tres cifras restantes por la division

$$\frac{663732192000000000-257630^2}{2\times257630}=005;$$

Resulta pues $\sqrt{663732192}=25763{,}0005$, raiz aproximada que se pedia, llevando la aproximacion hasta ser menor que $\frac{1}{10000}$ la diferencia entre dicha raiz hallada y la exacta.

Si el número que se proponga para la estraccion trae alguna ó algunas cifras decimales, y el número de estas es par, se hace la estraccion suprimiendo la coma, y por la razon espuesta se separan despues con ella en la raiz tantas cifras últimas cuantos fueren los pares de las decimales que tenia el número. Si es impar el número de cifras decimales de aquel, se completan con ceros hasta ser par el número de ellas, y se procede como está dicho. Debiéndose por ejemplo estraer la raiz cuadrada de 26,37, se considera entero, y será decimal una cifra de la raiz. Lo mismo si fuese 26,3 que equivale á 26,30. Al discípulo toca el ejercitarse en las prácticas de esta clase.

130. Ninguna dificultad ofrece la estraccion de la raiz cuadrada en las fracciones, sabiendo las reglas para estraerla en los enteros; porque (124), siendo

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},$$

hay que estraer separadamente las raices del numerador y del denominador, como en los dos casos particulares que presentamos aqui para modelo

$$\sqrt{\frac{169}{576}}=\frac{\sqrt{169}}{\sqrt{576}}=\frac{13}{24};$$

$$\sqrt{\frac{5}{289}}=\frac{\sqrt{5}}{17}=\frac{2,2\ldots}{17};$$

aproximando hasta décimas el numerador del segundo ejemplo: y si á su raiz hallada queremos dar forma de entero, será

$$\sqrt{\frac{5}{289}}=\frac{2,2\ldots}{17}=0,1\ldots\ldots$$

Si numerador y denominador son irracionales, se evita la doble aproximacion multiplicando por el denominador ambos términos (83. I.ª), cuando no hay factor mas simple que haga racional el denominador: como en

$$\sqrt{\frac{3}{14}}=\sqrt{\frac{42}{196}}=\frac{\sqrt{42}}{14}=\frac{6,4}{14},$$

aproximando hasta décimas la raiz del numerador.

LECCION III.

Potencia tercera de los números polidígitos, y método para estraer la raiz tercera que tiene mas de un guarismo.

131. Elevando á la tercera potencia el binomio $A+B$ y haciendo reduciones análogas á las de la potencia segunda (125), resulta

$$(A+B)^3=A^3+3.A^2.B+3.A.B^2+B^3.$$

Esta espresion representa la tercera potencia de cualquiera número polidígito, considerando ser A decenas y B unidades: y por ella vemos *que la potencia 3.ª de cualquiera número descompuesto así en binomio, como* A+B, *consta de cuatro partes; que son* A^3, $3.A^2.B$, $3.A.B^2$ *y* B^3. Si el número que se ha de cubicar consta de unidades mayores que simples decenas, pueden comprenderse en A los guarismos que se quieran desde el de orden mayor, escepto el guarismo de unidades simples; como por ejemplo 478, que de un modo es

$$478^3=(400+78)^3=400^3+3.400^2.78+3.400.78^2+78^3=109215352,$$

haciendo $A=40$ decenas y $B=78$ unidades; y de otro,

$$478^3=(470+8)^3=470^3+3.470^2.8+3.470.8^2+8^3=109215352$$

siendo $A=47$ decenas y $B=8$ unidades.

132. La potencia desenvuelta de $A+B$ enseña el camino para estraer la raiz cúbica; pues

$$\sqrt[3]{A^3} \text{ es } A, \text{ y } \frac{3A^2B}{3A^2} \text{ es } B;$$

y estas espresiones dicen, *que la raiz cúbica de la primera parte de la potencia es primer término del binomio, y que dividiendo la segunda parte por el triple cuadrado del primer término, resulta el segundo de la raiz.* Y como A puede contener la cifra de orden mayor solamente, ó dos ó tres, &c., cifras consecutivas desde aquella, esceptuando la de simples unidades, que siempre corresponde á B; no es difícil conocer que podemos indagar una á una las cifras de la raiz.

Hay en las cantidades propuestas para esta operacion análogas circunstancias á las que manifestamos en la leccion anterior: 1.ª hallarse envueltas en el número las cuatro partes del cubo de la raiz binomia: 2.ª tenerse que recurrir al tanteo para hallar B. Algunas reflexiones aclararán sin embargo el camino para llegar á la raiz cúbica.

1.ª A fin de saber en qué lugar del número se halla cada parte de su raiz, tómese de nuevo en consideracion lo dicho sobre esto anteriormente. Habiendo demostrado (126. 1.ª) que un número de n cifras tiene su valor entre 10^{n-1} y 10^n sin llegar á 10^n, y su cubo (31) entre 10^{3n-3} y 10^{3n} sin llegar á 10^{3n};

constará dicho cubo de $3n$ ó de $3n-1$ ó de $3n-2$ cifras. Como en esta verdad están demostradas las dos recíprocas, se sigue que *cuando un número propuesto para estraer su raiz consta de* 3n *ó de* 3n—1 *ó de* 3n—2 *cifras, su raiz cúbica constará de* n *cifras.* Por lo cual, si en el número propuesto hay una, dos ó tres cifras, la raiz tercera tendrá una cifra; si hay cuatro, cinco ó seis, la raiz tendrá dos; si hay siete, ocho ó nueve, la raiz tendrá tres; y asi sucesivamente. Del principio establecido se deduce tambien que el cubo de las unidades simples estará siempre contenido en las tres últimas cifras del número propuesto; el cubo de las decenas en las seis últimas cifras; el de centenas en las nueve últimas cifras; y asi en adelante. Por esta razon, separadas de tres en tres las cifras, empezando por la de orden menor, el periodo que resulte de las de orden mayor contiene el cubo de la primera cifra de la raiz; el siguiente periodo hácia la derecha contiene el cubo de la segunda cifra de la raiz; &c.

Ademas, para saber en qué lugar del número se hallan los productos $3A^2B$ y $3AB^2$, adviértase que los menores productos posibles, que son

$$3\times10^2\times1=300 \text{ y } 3\times10\times1^2=30,$$

están incluidos en un solo periodo; y los mayores, que son

$$3.90^2.9=218700 \text{ y } 3.90.9^2=21870,$$

están en dos periodos consecutivos.

II.ª Para cerciorarse de si la raiz binomia hallada por el calculador en cada caso es la verdadera, elévese á la tercera potencia, y réstese esta del número dado. Si hecha la operacion asi no hay residuo, exactamente dicha raiz es la de aquel número, y este un cubo completo: si el residuo es negativo, el segundo término de la raiz fue demasiado grande y hay que corregir la operacion: si el residuo sale positivo, la raiz hallada es verdadera, con tal que sea la mayor contenida en el propuesto número. Al fin del artículo siguiente ampliaremos esta observacion, teniendo á la vista un caso particular.

133. En fuerza de lo espuesto, la estraccion de la raiz cúbica se hará del modo siguiente. *Despues de dividir el número en periodos de á tres cifras empezando por la derecha, se*

estraerá la raiz A *del primer periodo de la izquierda; y hallada la diferencia de* A^3, *el residuo unido al periodo siguiente ha de ser dividendo para indagar* B, *y divisor* $3A^2$, *con la prevision de que en el dividendo quepa ademas* $3AB^2+B^3$: *de suerte, que de dicho dividendo se ha de restar la cantidad*

$$3A^2B+3AB^2+B^3, \text{ que viene á ser } (3A^2+B^2+3AB)B.$$

Si despues de estas operaciones aun queda algun periodo en el número propuesto, se junta dicho periodo al residuo que se acabe de hallar; y el resultado es nuevo dividendo y $3A^2$ *nuevo divisor para* B, *en concepto de ser* A *el conjunto de las dos cifras halladas y* B *la que se busca.* Por este orden se llega *hasta la última cifra de la raiz, considerando siempre* A *decenas y* B *unidades.* Bien se deja conocer que restar del dividendo la cantidad

$$3A^2B+3AB^2+B^3;$$

equivale á restar de la propuesta el cubo de la parte hallada hasta entonces, que es $A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$, por haberse restado antes A^3.

Siendo 17576 por ejemplo, el número cuya raiz cúbica se quiere, y empezando por las cifras de orden menor la division en periodos; como 17 576, vemos que hay dos; y que por ello ha de tener dos cifras la raiz. Estráigase la mayor raiz cúbica $A=2$ contenida en 17, y réstese de este periodo el cubo $A^3=8$. Bájese á el lado del resíduo el siguiente periodo, y en su conjunto 9576 búsquese la segunda parte de la raiz, que es el cociente 6 por tanteo de la division $\frac{9576}{3\times20^2}$; sin perder de vista que el dividendo ha de contener 6 veces no solo á 3×20^2, sino tambien á 36 y ademas á $3\times20\times6$. Computada pues la cifra 6 de este modo, y escrita en la raiz á el lado del 2, procédase á restar de dicho dividendo la cantidad

$$(3A^2+B^2+3AB)B, \text{ que es}$$

$$(3\times20^2+36+3\times20\times6)\times6, \text{ ó bien } (1200+36+360)\times6,$$

y que haciendo aparte su cálculo se hallará ser 9576. Resultará cero la diferencia, y terminada la operacion por no haber ya mas periodos que bajar de la cantidad propuesta.

El tipo del cálculo es como á continuacion se ve:

	$\sqrt[3]{17'576}$	26 raiz
2^3..................	8	
dividendo............	9576	$3.20^2=1200$
$(1236+3.20.6)\times6$...	9576	6
dividendo.......	0	

Para el tanteo de los cocientes, ó valores de B, se ha de atender á las circunstancias siguientes.

1.ª El dividendo contiene á $3A^2B+3AB^2+B^3$, y por ello ha de ser $B<\frac{\text{dividendo}}{3A^2}$; como en el ejemplo propuesto, $6<\frac{9576}{1200}$. La minoría de B ha de ser tal, que no resulte residuo negativo, como está dicho (132. II.ª).

2.ª $(A+1)^3=A^3+3A^2+3A+1$ hace ver, que *siendo A la parte de raiz hallada hasta cualquiera término, si en el residuo correspondiente cabe* $3A^2+3A+1$, *la raiz hallada es defectuosa por admitir á lo menos otra unidad mas, y hay que hacer esta correccion: de suerte, que el residuo ha de ser positivo y menor que dicha cantidad, para que la raiz hallada sea verdadera.* El residuo 9 positivo de las decenas en el ejemplo cumple con la minoría

$$9<12+6+1,$$

y por ello 2 es la verdadera cifra de la raiz; igualmente el segundo residuo $0<3\times26^2+3\times26+1$ indica que 6 es la cifra debida: y la circunstancia de resultar cero el residuo final manifiesta que el número propuesto es cubo exacto de 26. Por los estremos indicados al fin del teorema de la segunda observacion se hace el tanteo del cociente B en cada division.

134. Si despues de estraer la raiz entera mayor contenida en el número propuesto queda residuo, como sucederá las mas veces (121), somos árbitros de mayor aproximacion por decimales conducida hasta donde se quiera, sin que jamas pueda esperarse raiz exacta por la irracionalidad del número (122).

El modo con que se ha de proceder viene de un razonamiento análogo al que hicimos para la raiz cuadrada (129); y por él se deduce que *agregando triples ceros al número en la derecha, y tratándole como si los hubiera traido por sí, al fin se deben caracterizar por decimales en la raiz cúbica tantas cifras cuantos triples ceros se hayan agregado al número.*

Dado por ejemplo facil el número 95 para estraer su raiz cúbica, se halla por la tabla (118) que la raiz cúbica mayor entera contenida en 95 es 4; y elevando esta al cubo, de la comparacion resulta el residuo 31. Queriendo aproximar la raiz hasta centésimas, agréguense al número 95 seis ceros divididos en dos periodos; y continuando segun el método establecido como si A fuese decenas y B unidades, se tienen las dos cifras decimales por el siguiente cálculo:

	$\sqrt[3]{95'000'000}$	4,56
4^3......	64	
dividendo............	31000	4800
(4825+3.405)5........	27125	5
dividendo............	3875000	
(607536+3.4506)6....	3693816	607500
dividendo............	181184	6

Resulta $\sqrt[3]{95}=4,56$...... aproximada hasta centésimas.

Cuando el número trae decimales, hay que completar con ceros el número de ellos, si no era triple, y separar con la coma en la raiz una cifra por cada periodo decimal del número.

135. La raiz cúbica de un número fraccionario se halla estrayéndola separadamente del numerador y del denominador, segun la regla cifrada (124) en

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}};$$

despues de reducir, en caso necesario, ó racional el denominador multiplicando los dos términos de la fraccion por el cuadrado de dicho denominador, ó por cualquiera otro factor que haga el mismo efecto (83. I.°) Asi se tendrán las raices en los casos que siguen:

$$\sqrt[3]{\frac{1331}{9261}}=\frac{\sqrt[3]{1331}}{\sqrt[3]{9261}}=\frac{11}{21};\quad \sqrt[3]{\frac{7}{9}}=\frac{\sqrt[3]{21}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2,3..}{3}$$

aproximando hasta décimas la raiz del numerador del segundo ejemplo.

CAPITULO VII.

Potencias y raices literales.

LECCION 1.ª

Principios generales de potencias y raices.

136. El caso especial de la multiplicacion (66. 5.°) cuando el producto consta de factores iguales, como

$a\times a=a^2;\ a\times a\times a=a^2\times a=a^3;....$ y en general

$a\times a\times a\times......=a^n$ entrando n veces el factor a, es la materia de este capítulo; y el principio fundamental para todo lo que sigue es el convenio (66. 5.°) de que el esponente n esprese la suma de los esponentes de la raiz a en la potencia a^n, convenio que tiene lugar siendo la raiz a entera ó fraccionaria, positiva ó negativa, monomia ó polinomia. En el caso $n=2$ se dice a^2 *cuadrado* de a, y siendo $n=3$ tambien a^3 *cubo* de a, como en las potencias de nuestro sistema (118). Pueden ocurrir varios casos de potencias, y haremos el examen de ellos para deducir las reglas correspondientes.

1.° Cuando la raiz es por sí misma una potencia, como a^m; todo producto cual $a^m\times a^m\times a^m\times....$ en que entra n veces el factor a^m, se espresa abreviadamente bajo la forma $(a^m)^n$ por el oficio designado al esponente (66. 5.°). Cada factor a^m es producto de a repetida por factor m veces; y como hay n factores de aquellos, el total se compone del factor a repetido el número de veces mn, y será por el mismo convenio a^{mn} la potencia n^{sima} de a^m. Con las dos espresiones de un mismo concepto podemos establecer la equivalencia

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

la cual dice *que para elevar á potencia una raiz con esponente, se multiplica este por el de la potencia.*

2.° Si la raiz consta de dos factores, como ab; en su potencia $(ab)^n = ab \times ab \times ab \times \ldots$ que consta del factor ab repetido n veces, el segundo miembro es por la regla de productos de muchos factores (66. I.°) lo mismo que

$$(a \times a \times a \times \ldots).(b \times b \times b \times \ldots),$$

y esta espresion bajo otra forma (66. 5.°) es $a^n \times b^n$. Luego, será $(ab)^n = a^n b^n$.

El método con que se ha venido á este resultado por principios de la multiplicacion conduce, cuando hay tres factores, al resultado análogo $(abc)^n = a^n . b^n . c^n$. La misma ley se observa cuando hay mas factores en la raiz, y el método de la demostracion autoriza para establecer la regla general de que, *la potencia* n^{sima} *de un producto de cualquiera número de factores monomios ó polinomios, equivale al producto de las potencias* n^{simas} *de cada uno de ellos,* como se cifra en

$$(abcd \ldots)^n = a^n b^n c^n d^n \ldots$$

Segun esta regla y la precedente, podemos establecer tambien las equivalencias formulares, que siguen:

$$(a^p b^2 c^{3m} d \ldots)^n = a^{pn} . b^{2n} . c^{3mn} . d^n;$$
$$[(a+b).(c+d)]^n = (a+b)^n . (c+d)^n.$$

Si hay factor aritmético por coeficiente de la raiz, ó es raiz un valor aritmético, está comprendido en las reglas generales: y por esto serán tambien

$$(4b^2c)^2 = 4^2b^4c^2 = 16b^4c^2;\quad (2a)^6 = 2.2.2.2.2.2.a^6 = 64a^6$$

$$12^2 = 12\times 12 = 144 = 2^2 6^2 = 3^2\times 4^2,$$

$14^3 = 2^3.7^3 = 8.343 = 2744;$ $30^4 = 3^4.10^4 = 810000$, ó bien $30^4 = 5^4.6^4 = 810000.$

137. La potencia n^{sima} de la fraccion $\frac{a}{b}$ se indica en la forma $\left(\frac{a}{b}\right)^n$: su origen es la multiplicacion

$$\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\ldots,$$

y el producto segun el artículo (111) ha de ser $\frac{a^n}{b^n}$. Tambien la fraccion $\frac{a^h\,bc}{df^k}$ elevada á la potencia n está indicada en $\left(\frac{a^h\,bc}{df^k}\right)^n$; equivale al producto $\frac{a^h\,bc}{df^k}\times\frac{a^h\,bc}{df^k}\times\ldots$, repitiendo n veces el factor $\frac{a^h\,bc}{df^k}$; y segun la citada regla (111), el producto será $\frac{(a^h\,bc)^n}{(df^k)^n}$, y por el artículo precedente, $\frac{(a^h\,bc)^n}{(df^k)^n} = \frac{a^{hn}b^nc^n}{d^nf^{kn}}$. Luego, son legítimas las equivalencias

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};\quad \left(\frac{a^h\,bc}{df^k}\right)^n = \frac{(a^h\,bc)^n}{(df^k)^n} = \frac{a^{hn}b^n\,c^n}{d^nf^{kn}};$$

por las cuales, *la potencia de una fraccion es el cociente de la potencia del numerador partida por la potencia del denominador*. Casos de tal naturaleza son los que siguen:

$$\left(\frac{15}{48}\right)^2=\frac{(15)^2}{(48)^2}=\frac{225}{2304};\ \left(\frac{2bc^m}{3df}\right)^3=\frac{8b^3c^{3m}}{27d^3f^3}.$$

138. El problema de estraer la raiz n^{sima} de una potencia se cifra con el signo $\sqrt[n]{\ }$, poniendo á continuacion la cantidad N cuya raiz se quiera estraer, como $\sqrt[n]{N}$, segun se estableció en aritmética (121), y consiste la solucion en hallar el número que elevado á la potencia n produciria exacta ó próximamente á N. El número n es *índice* de la raiz, y siendo $n=2$ se suprime. Tambien se dice *raiz cuadrada* cuando es el índice $n=2$, y *raiz cúbica* cuando $n=3$.

Veamos lo que dicen las equivalencias que resultan retrocediendo desde la espresion de la potencia á la espresion de la raiz segun el artículo (136) en las cantidades enteras, y usando despues el derecho de multiplicar y dividir el esponente por cualquiera número n, ó sea multiplicarle por 1, como por ejemplo en los dos casos adjuntos:

$$\sqrt[n]{a^n}=a=a^{\frac{n}{n}};\quad \sqrt[n]{(a^k)^n}=\sqrt[n]{a^{kn}}=a^k=a^{\frac{kn}{n}}.$$

Mas, cuando en la espresion $\sqrt[n]{a^m}$ no es m múltiplo de n, veamos cual será el esponente de a en el resultado. Para ello supóngase h dicho esponente, cuya forma y valor se ignora; y asi, cifraremos legítimamente la ecuacion $\sqrt[n]{a^m}=a^h$. Si elevamos á la potencia n ambos miembros, resulta a^m la del primero, y a^{hn} la del segundo (136), y necesariamente habrá igualdad entre ellas, como espresa $a^m=a^{hn}$. Esta igualdad de potencias de una misma cantidad a exije tambien la de sus esponentes, por lo cual podemos cifrar $m=hn$; y dividiendo por n los dos miembros tendremos $h=\frac{m}{n}$, que es lo que se busca. Luego, si en a^h se sustituye por h el valor $\frac{m}{n}$ hallado resulta la espresion de la regla general

::

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}},$$

en que a puede representar cualquiera cantidad monomia ó polinomia, sea simple ó compuesta de factores, y estos con esponentes particulares ó sin ellos.

Segun esto, la raiz $\sqrt[n]{(a^m b^t \ldots)}$ de cualquiera número de factores ha de ser $(a^m b^t \ldots)^{\frac{1}{n}}$. Y como, por consecuencia de lo demostrado en el artículo (136. 2.°), la raiz de un producto $a^m b^t \ldots\ldots$ considerado como potencia es el producto de las raices de sus factores, las cuales por la regla que acabamos de hallar son $a^{\frac{m}{n}}$, $b^{\frac{t}{n}}\ldots\ldots$, se sigue que la raiz pedida es $a^{\frac{m}{n}} \times b^{\frac{t}{n}} \times \ldots\ldots$ Luego, serán equivalentes las tres espresiones de distintas formas

$$\sqrt[n]{(a^m b^t \ldots)}=(a^m b^t \ldots.)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{m}{n}}\, b^{\frac{t}{n}} \ldots.$$

Debe pues concluirse que, *para estraer la raiz de una cantidad, descompuesta ó no en factores, se divide el esponente de cada factor ó bien el de la potencia del producto por el índice del radical*. Cuando hay coeficiente aritmético bajo el radical, se halla su raiz por la tabla de potencias si está incluido en ella; ó por los procedimientos conocidos en caso que sea polidígita; y sino, calcularla por los medios que se espliquen mas adelante. Por este principio serán legítimas las equivalencias adjuntas:

$$\sqrt[n]{(a^m b^2 c^n d)}=a^{\frac{m}{n}} . b^{\frac{2}{n}} . c . d^{\frac{1}{n}},$$

$$\text{ó bien, } \sqrt[n]{(a^m b^2 c^n d)}=(a^m b^2 c^n d)^{\frac{1}{n}};$$

$$\sqrt[n]{[(a+b)^m]}=(a+b)^{\frac{m}{n}}; \text{ \&c.:}$$

de suerte que, si el esponente de la cantidad es 1 ó número no múltiplo del índice de la raiz, queda dicha cantidad con esponente fraccionario; y he aqui el origen de esta clase de esponentes, aunque en general un esponente fraccionario enuncia la operacion de estraer de la cantidad á que afecta, la raiz cuyo índice es el denominador.

139. Para deducir la regla de estraer las raices de cantidades fraccionarias, seguiremos el método mismo que nos condujo al teorema precedente: esto es, venir de la potencia $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ á la raiz $\frac{a}{b}$ segun el artículo (137); multiplicar despues por $\frac{n}{n}$ el esponente de lo que resulte, de lo cual procederá $\frac{a}{b}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n}}=\frac{a^{\frac{n}{n}}}{b^{\frac{n}{n}}}$; y por último dar á esta fraccion la forma $\frac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{b^n}}$, como lo permite la demostracion del artículo antecedente. Procediendo así tendremos

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^n}=\frac{a}{b}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n}}=\frac{a^{\frac{n}{n}}}{b^{\frac{n}{n}}}=\frac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{b^n}}.$$

Siguiendo otro método, se sabe que por la regla de raices, (138) debe ser

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}};$$

y por la de potencias (137) debe ser $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$;

de lo cual resulta $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$

Luego, *la raiz de una fraccion es el cociente de la raiz del numerador partida por la raiz del denominador.* Por esta regla será, $\sqrt[n]{\left(\dfrac{a^2b^{np}}{2^n df}\right)}=\dfrac{\sqrt[n]{(a^2b^{np})}}{\sqrt[n]{(2^n df)}}=\dfrac{a^{\frac{2}{n}}b^p}{2d^{\frac{1}{n}}f^{\frac{1}{n}}};$

y tambien, $\sqrt[3]{\left(\dfrac{64b^2}{5d^3}\right)}=\dfrac{\sqrt[3]{64b^2}}{\sqrt[3]{5d^3}}=\dfrac{4b^{\frac{2}{3}}}{5^{\frac{1}{3}}d}.$

140. De los principios demostrados proceden otros importantes.

1.° Sea $\dfrac{a}{b}$ fraccion irreductible, circunstancia que necesariamente proviene de carecer sus términos de comun divisor d. Pero (76), si d no es medida exacta entera de a, tampoco lo es de a^2: no siendo de a ni de a^2, tampoco de $a^3=a\times a^2$, &c.: por igual razon, si d no mide exactamente á b, tampoco á b^2 ni á b^3, &c. y por la naturaleza misma de la demostracion se deduce, *que siendo irreductible el quebrado* $\dfrac{a}{b}$, *tambien serán irreductibles todas sus potencias*

$$\frac{a^2}{b^2};\ \frac{a^3}{b^3};\ldots\ldots\ \frac{a^m}{b^m}.$$

2.° Si una cantidad entera N pudiese tener alguna raiz fraccionaria, como $\sqrt[m]{N}=\dfrac{a}{b}$; elevando los miembros de esta ecuacion á m, seria $N=\frac{a^m}{b^m}$: pero este resultado es absurdo por ser $\frac{a^m}{b^m}$ irreductible; luego, *la raiz de un entero nunca puede ser fraccionaria.* Segun esto, las cantidades enteras que no tengan raiz entera cabal, tampoco la dan fraccionaria cabal, como se dijo en aritmética (122): y se llama *irracional* ó *incomensurable* ó *sordo* todo número $\sqrt[m]{N}$ que jamas puede ser espresado por equivalente exacto, entero ó fraccionario.

3.º Tratando de la cantidad irracional $\sqrt[m]{N}$, supóngase el número $d>\sqrt[m]{N}$; y otro c tal que sea $\sqrt[m]{N}>c$. Se halla pues el valor de la cantidad irracional entre los números d y c, que supondremos las raices enteras mas próximas por esceso y por defecto. Quítese á d y añádase á c una parte fraccionaria, como $\frac{1}{q}$, las veces que se pueda, como por ejemplo h veces á d y k veces á c, pero quedando siempre

$d-h\times\frac{1}{q}>\sqrt[m]{N}>c+k\times\frac{1}{q}$; y tenemos dos raices

$d-h\times\frac{1}{q}$ y $c+k\times\frac{1}{q}$ mas aproximadas que d y c á la irracional. Continuando asi podemos acercarnos cuanto se quiera á la valuacion de la irracional; mas la naturaleza de esta es tal, que llegarian á ser, mayor que ella la que era menor, y menor la que era mayor, por pequeña que fuese la fraccion $\frac{1}{q}$, con una especie de salto inevitable al pasar por el punto de igualdad.

El meditar sobre que aumento pueda convenir á c y que diminucion á d, para que no se ocultase el valor cabal de $\sqrt[m]{N}$ entre dos operaciones sucesivas, inspira la nueva idea de la pequeñez que se debe suponer á $\frac{1}{q}$, y que sólo se podria conseguir por aumentos ó diminuciones de continuidad, á manera de lo que sucede á las cantidades de agua de dos vasos cuando se va llenando el uno á espensas del otro que se va vaciando. Idea á que debe su origen el considerar toda cantidad formada por incesantes y continuos aumentos ó diminuciones, como se verá mas adelante en el cálculo infinitesimal, y para mejor concebirla dará luces la geometría.

4.° Si los términos de la fraccion $\frac{a}{b}$ afectada de radical como $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, se multiplican (105) por a^{n-1} ó por b^{n-1}, tendremos $\frac{a}{b}=\frac{a^n}{a^{n-1}b}=\frac{ab^{n-1}}{b^n}$; y por ello,

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n]{\frac{a^n}{a^{n-1}b}}=\sqrt[n]{\frac{ab^{n-1}}{b^n}}.$$

Ademas, por el artículo (139) son ciertas las equivalencias

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};\quad \sqrt[n]{\frac{a^n}{a^{n-1}b}}=\frac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{a^{n-1}b}}=\frac{a}{\sqrt[n]{a^{n-1}b}};$$

$$\sqrt[n]{\frac{ab^{n-1}}{b^n}}=\frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^n}}=\frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}.$$

Resulta pues demostrado que, *cuando afecta signo radical á numerador y denominador de una fraccion* $\frac{a}{b}$, *se puede* *librar de dicho signo á uno de ellos multiplicando por éste cuantas veces fuese necesario ambos términos, sin que nada se altere su relacion por el cambio de formas.*

Dada por ejemplo $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, que equivale á $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; si queremos que el denominador tenga forma racional, multiplíquense ambos términos por b^{n-1}, y será $\frac{a}{b}=\frac{ab^{n-1}}{b^n}$: y sustituyendo bajo el radical, viene

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n]{\frac{ab^{n-1}}{b^n}}=\frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}.$$

Por tales procedimientos vienen tambien las transformaciones,

$$\sqrt{\frac{3}{5}}=\sqrt{\frac{15}{25}}=\frac{\sqrt{15}}{5};$$

$$\sqrt{\frac{7}{4}}=\sqrt[3]{\frac{112}{64}}=\frac{\sqrt[3]{112}}{4}:$$

para las cuales ya estábamos facultados (130) y (135).

Hay casos en que, multiplicando numerador y denominador por alguna otra cantidad que se deje ver, se libra de signo radical á uno de ellos, como $\sqrt[n]{\frac{a^pb}{a^nd^{n-2}}}$, que multiplicando numerador y denominador por d^2, se convierte á

$$\sqrt[n]{\frac{a^p b d^2}{c^n d^n}}=\frac{\sqrt[n]{a^p b d^2}}{c\,d}.$$

Lo mismo $\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$, en que multiplicando por 2 numerador y denominador, éste se convierte á racional, segun manifiesta el resultado

$$\sqrt[3]{\frac{5}{4}}=\sqrt[3]{\frac{10}{8}}=\frac{\sqrt[3]{10}}{2}.$$

LECCION II.

Potencias y raices segundas de los polinomios.

141. Practicando las operaciones que indica la espresion

$$(A+B)^2=(A+B).(A+B),$$

segunda potencia de un binomio, se tendrá

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2.$$

Por otra parte, un polinomio $a+b+c+d+....$ compuesto de cualquiera número de términos es reductible á binomio, representando A una porcion de ellos y B los restantes, de modo, que si espresamos con u la suma de todos los no incluidos en A, será

$$(a+b+c+d+....+u)^2=$$
$$(a+b+c+d+....)^2+2(a+b+c+d+....)u+u^2;$$

y aunque el número de términos en la potencia se aumentará segun haya mas en la raiz, siempre aquella constará de las tres partes que hay en la segunda potencia del binomio desenvuelta.

Consta pues de tres partes el cuadrado de un binomio, que son, cuadrado del primer término del binomio, doble producto del primero por el segundo, y cuadrado del segundo; y por ello, *los esponentes del primer término van decreciendo de unidad en unidad desde 2 hasta cero, y los del segundo crecen lo mismo desde cero hasta 2.*

142. Estas leyes de la composicion manifiestan el camino para indagar la raiz cuadrada binomia de una cantidad polinómia; pues,

$$\sqrt{A^2}=A \quad \text{y} \quad \frac{2AB}{2A}=B$$

hacen ver, que *la raiz cuadrada de la primera parte es primer término del binomio; y que dividiendo la segunda parte de la potencia por el duplo de la raiz hallada, el cociente será término segundo del binomio.*

Está demas el advertir que cuando A conste de dos términos, como por ejemplo en $(a+h+b)^2=$

$$(a+h)^2+2(a+h)b+b^2=a^2+2ah+h^2+2(a+h)b+b^2,$$

en que es $A=(a+h)$ y $B=b$, tambien hay en A^2 las tres partes mencionadas, a^2, $2ah$, h^2; y lo dicho en el párrafo precedente sobre el modo de hallar la raiz y de comparar su duplo se refiere solo á A^2, como si la espresion propuesta no tuviese mas términos. Por la misma razon, despues de hallar la raiz binomia $(a+h)$ de A^2, y considerando este binomio como primer término, se procede á la division $\frac{2AB}{2A}$ para tener el término siguiente $B=b$ de la raiz.

Cuando A conste de tres términos, por la misma razon las indagaciones de la raiz y comparacion de su duplo se han de hacer en el cuadrado A^2. El mismo raciocinio es aplicable cuando deba tener cualquiera número de términos la raiz: de suerte, que siempre se ha de seguir el método de *hallar el primer término* A *de la raiz, y para el segundo* B *dividir la segunda parte de la potencia por* 2A, *duplo de la raiz ha-*

llada. Mas, para saberlo ejecutar es preciso que aclaremos el camino, con observaciones análogas á las del artículo (126).

I.ª Cuando se eleva á el cuadrado un polinomio irreductible de cualquiera número n de términos, como

$$(a+b+c+d+\ldots)^2=(a+b+c+d+\ldots)(a+b+c+d+\ldots);$$

habiéndose de multiplicar el primer factor por cada término del segundo, habrá n productos de á n términos cada uno, y por esto el número total de ellos será n^2. Pero en cada producto de los n parciales hay un término con la segunda potencia del multiplicador, y $n-1$ términos con dicho multiplicador reunido á las $n-1$ letras restantes, una á una; luego, en el total de los n productos habrá n términos de segundas potencias, y $n(n-1)=n^2-n$ productos como $ab+ab+ac+ac+bc+bc+\ldots$ cuyo número es reductible á la mitad, por la duplicacion de iguales. Hechas las reduciones quedan $n+\frac{n^2-n}{2}=\frac{n^2+n}{2}$ términos: y síguese de aquí que *teniendo* n *términos una raiz, su potencia segunda constará de* $\frac{n^2+n}{2}$ *desiguales.*

Como las que se propongan para estraer su raiz han podido estar espuestas á otras reduciones, por casos del cálculo á que deban su origen; se concluye *que un polinomio de* $\frac{n^2+n}{2}$ *términos irreductibles, tiene á lo menos* n *términos en su raiz cuadrada*. Dando á n alguno de los valores 1, 2, 3,... veremos que la raiz cuadrada de un monomio es otro tal; la de un trinomio tiene dos términos á lo menos en su raiz cuadrada; la de seis términos dará tres á lo menos en su raiz; &c.

II.ª Para la certeza de que la raiz parcial ó la total es cual corresponde, elévese á la segunda potencia el binomio ó raiz presunta que se encontrare; y restando dicha potencia de toda la cantidad propuesta, si el residuo es cero la raiz hallada será exacta; si el residuo es negativo, la raiz hallada será mayor que la efectiva y hay que corregir la operacion; si el residuo es positivo, la raiz hallada será la que se busca, siempre que no admita otra mayor en unidades de la misma gerarquía la espresion propuesta. Vemos que la resta de que se trata es una operacion indispensable para cerciorarse de si es ó no verdadera la raiz hallada: y como éste se estrae por partes, necesario es tambien hacer sucesivamente por partes dicha resta del modo siguiente. *Hallada primeramente* A, *se resta* A^2 *de la cantidad propuesta: en este residuo se busca* B, *y de él se resta* $2AB+B^2$: lo cual es lo mismo que haber de la propuesta cantidad restado al fin

$$A^2+2AB+B^2.$$

143. Con objeto de presentar un ejemplo de todo lo que se ha dicho en el artículo precedente, propónese hallar la raiz cuadrada de la cantidad

$$9a^4-12a^3b+34a^2b^2-20ab^3+25b^4,$$

la cual debe producir una raiz de dos términos á lo menos. Toda espresion dada para este cálculo conviene sea ordenada, en disposicion que precedan los términos en que tenga mayor esponente aquella letra que interviniere en mas términos, como aqui a, aunque lo mismo sucede á b: y en la eleccion influye la mira de cual acomoda para el primer término de la raiz. Ordenada pues la espresion por las potencias de a, el primer término $9a^4$ da la raiz cuadrada $3a^2=A$: comparando su cuadrado con el polinomio, viene el residuo

$$-12a^3b+34a^2b^2-20ab^3+25b^4,$$

que, dividido por $6a^2$, nos da $-2ab$ para B. Escríbanse estos dos términos en la raiz presunta á el lado del polinomio separadamente, y réstese de dicho dividendo el producto $(2A+B)\times B$, que aqui es $(6a^2-2ab)\times-2ab$, y se hallará el segundo residuo $30a^2b^2-20ab^3+25b^4$. Este nos indica que la raiz ha de tener mas términos; y así, suponiendo de nuevo $3a^2-2ab=A$, tratemos de hallar B.

Dividiendo el segundo residuo por el duplo de la raiz hallada, resulta el cociente $5b^2$: escribamos éste á continuacion de los dos términos hallados antes, y restando $(6a^2-4ab+5b^2)\times5b^2$ del polinomio propuesto, no queda residuo alguno; lo cual indica que el trinomio hallado es raiz exacta de la cantidad propuesta.

El tipo del cálculo es como sigue:

$$\sqrt{(9a^4-12a^3b+34a^2b^2-20ab^3+25b^4)}\ \underline{|3a^2-2ab+5b^2.}$$

$(3a^2)^2 \ldots 9a^4$

$$\begin{array}{lll}
 & \text{dividendo}\ldots -12a^3b+34a^2b^2-20ab^3+25b^4 & |6a^2 \\
(6a^2-2ab)\times-2ab\ldots & 12a^3b-4a^2b^2 & \overline{-2ab} \\
 & \text{dividendo}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 30a^2b^2-20ab^3+25b^4 & |6a^2-4ab \\
(6a^2-4ab+5b^2)\times5b^2\ldots\ldots & -30a^2b^2+20ab^3-25b^4 & \overline{\ 5b^2} \\
 & \qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Por este orden se debe proseguir el cálculo en todos los casos, hasta llegar á un residuo que no dé cociente entero, ó hasta que sea nulo.

144. Las fracciones polinomias que se propongan para la estraccion de su raiz cuadrada conviene que ante todo sean reducidas á su espresion mas simple; y la regla cifrada en $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ hace ver, que se han de estraer las raices de numerador y denominador separadamente. Asi está ejecutada la operacion que sigue:

$$\sqrt{\left(\frac{4a^2-4ab+b^2}{c^4+6c^2d^2+9d^4}\right)}=\frac{\sqrt{(4a^2-4ab+b^2)}}{\sqrt{(c^4+6c^2d^2+9d^4)}}=\frac{2a-b}{c^2+3d^2}.$$

LECCION III.

Potencias y raices terceras de los polinomios.

145. Elevando á la tercera potencia el binomio $A+B$, resulta

$$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3.$$

Todo polinomio, sea cualquiera el número de sus términos, está representado por el binomio como se dijo en la segunda potencia, siendo A suma de unos términos, y B de otros: como por ejemplo espresando con u cierta porcion de ellos ó uno solo,

$$(a+b+c+\dots u)^3=$$

$$(a+b+c+\dots)^3+3(a+b+c+\dots)^2u+3(a+b+c+\dots)u^2+u^3;$$

y su cubo consta de las mismas cuatro partes que el cubo de $(A+B)$, aunque á la verdad el número de términos de la potencia se aumenta con el de términos de la raiz.

146. La potencia desenvuelta de $A+B$ enseña el camino para estraer la raiz cúbica; pues,

$$\sqrt[3]{A^3}=A \text{ y } \frac{3A^2B}{3A^2}=B$$

dicen, que *la raiz cúbica de la primera parte es primer término del binomio; y que dividiendo la segunda parte por tres veces el cuadrado del primer término, resultará el segundo de la raiz.* La ejecucion será fácil con las prevenciones que siguen.

1.ª Siendo el cubo un producto de tres factores iguales, como

$$(a+b+c+\dots)\,(a+b+c+\dots)\,(a+b+c+\dots),$$

el producto de los dos primeros da n^2 términos siendo n los que tenga la raiz; y como hay que multiplicar aquellos por cada término del tercer factor, habrá en el total n^3 términos; de los cuales hay n cubos, y los otros n^3-n son productos como $abc+abc+abc+abd+abd+abd+\dots$, cuyo número es reductible á la tercera parte por la triplicacion de términos iguales. De modo, que reduciendo el producto quedan n cubos y $\frac{n^3-n}{3}$ términos reducidos, esto es, *un total de* $n+\frac{n^3-n}{3}=\frac{n^3+2n}{3}$ *términos, que será el número de los desiguales que tendrá el cubo cuya raiz tenga* n *términos.* Segun esto, el cubo de un monomio es otro monomio: el de un binomio constará de cuatro términos; el de un trinomio constará de once términos, &c.

Por lo mismo y á causa de otras reduciones que hayan padecido en el cálculo á que deben su origen los polinomios cuya raiz cúbica se ha de estraer, diremos que *un polinomio de* $\frac{n^3+2n}{3}$ *términos dará á lo menos* n *términos en su raiz*, esto es, que uno de cuatro términos dará dos á lo menos en su raiz; que uno de once dará tres á lo menos; &c.

II.ª Para cerciorarse de si la raiz binomia sacada por el calculador en cada caso es cual corresponde, elévese á la tercera potencia, y réstese éste del polinomio dado: si hecha la operacion asi no hay residuo, exactamente dicha raiz es la del polinomio, y este un cubo completo; si el residuo es negativo, el segundo término de la raiz fue demasiado grande y hay que corregir la operacion; si el residuo es positivo, la raiz hallada es verdadera con tal que sea la mayor contenida en el polinomio.

147. Dado el polinomio $8a^3-12a^2bc+6ab^2c^2-b^3c^3$, que ya está ordenado segun las potencias de a; su raiz cúbica tiene dos términos á lo menos. El orden de los cálculos para el objeto será, estraer la raiz cúbica de $8a^3$ para tener el primer término A de la raiz; comparar el cubo de éste con el polinomio; y hallada la diferencia, dividir esta por el triple cuadrado del primer término A para tener el segundo B; y al fin comparar con el dividendo la cantidad $(3A^2+B^2+3AB)B$, que es lo mismo que comparar el cubo del binomio hallado con la espresion propuesta, segun aparece en el tipo siguiente:

$$\sqrt[3]{(8a^3-12a^2bc+6ab^2c^2-b^3c^3)}\quad \underline{|2a-bc}$$

$$(2a)^3 \ldots\ldots -8a^3$$

$$\text{dividendo}\ldots\ldots \quad -12a^2bc+6ab^2c^2-b^3c^3 \quad \underline{|12a^2}$$

$$(12a^2+b^2c^2-6abc)(-bc)\ldots +12a^2bc-6ab^2c^2+b^3c^3 \quad -bc$$

$$\text{dividendo}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0$$

El segundo residuo dividendo que aquí es cero, convence de que $2a-bc$ es la raiz verdadera, y que el polinomio propuesto es un cubo exacto.

Si aun hubiese quedado residuo capaz de dar término entero á la raiz, se trataría la hallada como si fuera primer término del binomio, y se dividiria el residuo por el triple cuadrado de ella, para conocer la segunda parte B del binomio que seria tercer término de la raiz; y comparando con el polinomio el cubo de todo lo encontrado, se tendria el tercer residuo dividendo; y asi sucesivamente hasta un residuo incapaz de dar término entero para la raiz.

148. En las fracciones polinomias se estraen las raices de numerador y denominador conforme á estas reglas. Tambien se puede reducir la operacion á solo el numerador, haciendo antes para ello racional el denominador como en aritmética (135). Sigue un ejemplo del primer caso.

$$\sqrt[3]{\left(\frac{m^3+9m^2n+27mn^2+27n^3}{a^3b^3-3a^3b^2c+3a^3bc^2-a^3c^3}\right)}=\frac{m+3n}{ab-ac}.$$

LECCION IV.

Observaciones acerca de las potencias y cantidades radicales.

1.ª *Observacion.*

149. De la regla establecida para estraer la raiz de un producto (138) se deducen otras.

1.ª De la equivalencia $\sqrt[np]{a^m}=a^{\frac{m}{np}}$, suponiendo $\frac{m}{n}=h$,

viene $a^{\frac{m}{np}}=a^{\frac{h}{p}}=\sqrt[p]{a^h}$.

Restituyamos $\frac{m}{n}$ por h, y se tendrán las equivalencias

$\sqrt[p]{a^h}=\sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}}=\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}}$; últimamente, por igualdad de unas espresiones con otras venimos á

$$\sqrt[np]{a^m}=\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}}:$$

lo cual dice que la espresion del doble radical es la misma que la de uno solo que tenga por índice el producto de los índices de aquel. Este resultado nos enseña que, cuando el índice del radical es descomponible en factores, puede facilitarse la estraccion total si se estrae primero la raiz que indica uno de ellos, y de lo que resulte se estrae la que indica otro factor, y asi en adelante.

Hagamos el ensayo de estraer asi las raices de las espresiones aritméticas cuyo radical tenga un índice grande compuesto. Por ejemplo, suponiendo N un número $\sqrt[12]{N}$ equivale á $\sqrt[2]{\sqrt[2]{\sqrt[3]{N}}}$; é indica que, descomponiendo 12 en sus tres factores simples 2.2.3, se estraiga primero la raiz tercera de N; de lo que resulte se estraiga la raiz cuadrada, y de ésta en seguida tambien la raiz cuadrada. Segun la regla, lo mismo se conseguirá siguiendo el orden inverso en las estracciones, como en el ejemplo siguiente,

$$\sqrt[6]{15625}=\sqrt[2]{\sqrt[3]{15625}}=\sqrt[2]{25}=5;\text{ ó bien,}$$

$\sqrt[3]{\sqrt[2]{15625}}=\sqrt[3]{125}=5$. Aunque sea N irracional, se podrá tal vez simplificar el índice con la prevision de ordenar debidamente las operaciones, como en

$$\sqrt[10]{81}=\sqrt[5]{\sqrt[2]{81}}=\sqrt[5]{9}.$$

2.ª Las equivalencias que á continuacion van escritas,

$$\sqrt[n]{(abc)}=(abc)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}c^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\,.\sqrt[n]{b}\,.\sqrt[n]{c}$$

dicen, *que la raiz de un producto es equivalente al producto de las raices de sus factores.* Lo cual nos enseña un medio particular de estraer la raiz de una cantidad descomponible en factores que la tenga exacta, como en $\sqrt{324}=\sqrt{4}\,.\sqrt{81}=2\,.\,9\,.=18$. Aunque no sean racionales todos los factores, por este medio se consigue simplificar la espresion, como

$$\sqrt[3]{108}=\sqrt[3]{4}\,.\sqrt[3]{27}=3\sqrt[3]{4}.$$

Para tantear si asi se puede estraer la raiz $\sqrt[n]{N}$, se deja cocer que descomponiendo N en factores (43) y (75), habrán de elegirse con preferencia los que sean potencias del grado n.

3.ª Por ser $(ab)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{[(ab)^m]}$ y $\frac{m}{n}=\frac{mp}{np}$, tambien será $\sqrt[n]{[(ab)^m]}=\sqrt[np]{[(ab)^{mp}]}$. Lo que hace ver que *se puede multiplicar por una misma cantidad el índice del radical y el esponente de la potencia, sin que se altere el valor de la espresion.* Segun esto, es facil reducir á comun índice dos radicales que le tengan diferente, como $\sqrt[n]{[(ab)^m]}$ y $\sqrt[p]{[(cd)^q]}$; pues, haciendo en cada radical dicha multiplicacion, tenemos

$$\sqrt[n]{[(ab)^m]}=\sqrt[np]{[(ab)^{mp}]}\ \text{ y }\ \sqrt[p]{[(cd)^q]}=\sqrt[np]{[(cd)^{nq}]}.$$

Luego, *quedan reducidos á comun índice dos radicales, multiplicando el índice y el esponente de la potencia en cada uno por el índice del otro; y no por eso se altera el valor de la espresion.*

Siguiendo esta regla, los radicales $\sqrt[2]{6}$ y $\sqrt[3]{7}$ serán respectivamente como $\sqrt[6]{216}$ y $\sqrt[6]{49}$.

::

II.ª *Observacion.*

150. La multiplicacion de una cantidad por sí misma produce los esponentes positivos (66. 5.º); la division de una cantidad con esponente positivo por la misma tambien con esponente positivo mayor que en el dividendo, origina los esponentes negativos (72. I.ª); y la estraccion de la raiz n^{sima} de una cantidad N^m, siendo n mayor que m engendra los esponentes fraccionarios (138), que tambien pueden ser negativos concurriendo el caso anterior. Es preciso, pues, conceptuar tales esponentes como símbolos de las operaciones á que deben su origen, y esta consideracion desvanece toda la obscuridad que pueda inducir á cuestiones metafísicas sobre ellos.

Hasta el presente solo hemos dado reglas para la reducion de potencias iguales ó diferentes de una misma raiz a con esponente positivo, en los cálculos de multiplicar y partir (66. 6.º) y (72. I.ª), como igualmente para elevar dichas cantidades á potencias y estraer sus raices (136. I.º) y (138): y es necesario deducir las reglas que se deben observar en dichos cálculos con cantidades afectas de esponente negativo ó de fraccionario, reglas que proceden de los principios establecidos en la primera leccion de este capítulo, y de los teoremas (106)

$$\frac{a^m}{a^n}=a^m\times a^{-n}=\frac{1}{a^n\times a^{-m}}.$$

En efecto, dando estas varias formas legítimas á cada espresion, las equivalencias que resulten manifestarán las reglas para cada clase de las espresadas operaciones, como se ve al márgen de dichas equivalencias.

Multiplicar cuando es negativo el esponente. Se suman los de los factores de letra comun.

$$a^m\times a^{-n}=a^m\times\frac{1}{a^n}=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

$$a^{-m}\times a^{-n}=\frac{1}{a^m}\times\frac{1}{a^n}=\frac{a}{a^{m+n}}=a^{-m-n}.$$

Dividir cuando uno ú ambos esponentes son negativos. Se restan los esponentes de la letra comun á dividendo y divisor.

$$\frac{a^m}{a^{-n}}=a^m\times a^n=a^{m+n};$$

$$\frac{a^{-m}}{a^n}=a^{-m}\times a^{-n}=a^{-m-n};$$

$$\frac{a^{-m}}{a^{-n}}=a^{-m}\times a^n=a^{n-m}.$$

Potencia de una raiz con esponente negativo. Se multiplican los esponentes.

$$(a^{-n})^p=\left(\frac{1}{a^n}\right)^p=\frac{1}{a^{np}}=a^{-np}.$$

Raiz de una potencia con esponente negativo. Se divide el esponente por el índice.

$$(\sqrt[m]{a^{-n}}=\sqrt[m]{\frac{1}{a^n}}=\frac{1}{a^{\frac{n}{m}}}=a^{-\frac{n}{m}}.$$

Fundándonos en los principios citados, y en el de poderse multiplicar por una misma cantidad los dos términos de una fraccion, tendremos las equivalencias que siguen.

Multiplicar siendo fraccionario el esponente. Se suman los esponentes de letra comun.

$$a^{\frac{n}{m}}\times a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{(a^n\times a^n)}=a^{\frac{2n}{m}};$$

$$a^{\frac{n}{m}}\times a^{\frac{p}{m}}=\sqrt[m]{(a^n\times a^p)}=a^{\frac{n+p}{m}};$$

$$a^{\frac{n}{m}}\times a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{nq}{mq}}\times a^{\frac{mp}{mq}}=\sqrt[mq]{(a^{nq+mp})}=a^{\frac{nq+mp}{mq}}.$$

Dividir cuando el esponente es fraccionario. Se restan los esponentes de la letra comun á dividendo y divisor.

$$\frac{a^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{p}{m}}}=a^{\frac{n}{m}}\times a^{-\frac{p}{m}}=a^{\frac{n-p}{m}};$$

$$\frac{a^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{p}{q}}}=a^{\frac{n}{m}}\times a^{-\frac{p}{q}}=a^{\frac{nq}{mq}}\times a^{-\frac{mp}{mq}}=a^{\frac{nq-mp}{mq}}.$$

En virtud de que para multiplicar entre sí dos cantidades con esponente fraccionario, se han de sumar los esponentes de la letra comun que haya en ellas, se viene á los resultados que siguen.

Elevar á potencia una cantidad que tenga esponente fraccionario. Se multiplican los esponentes.

$$\left\{\begin{array}{l} \left(a^{\frac{n}{m}}\right)^2 = a^{\frac{n}{m}} \times a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{2n}{m}}; \\ \left(a^{\frac{n}{m}}\right)^3 = a^{\frac{n}{m}} \times a^{\frac{n}{m}} \times a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{3n}{m}}; \\ \text{y por analogía } \left(a^{\frac{n}{m}}\right)^p = a^{\frac{pn}{m}}. \end{array}\right.$$

Deshaciendo el cálculo precedente, y multiplicando despues por una misma cantidad el numerador y el denominador del esponente fraccionario, se verificarán las equivalencias que siguen.

Raiz de una cantidad que tiene esponente fracciona rio. Se divide el esponente por el índice.

$$\sqrt[2]{a^{\frac{2n}{m}}} = a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{2n}{2m}};$$

$$\sqrt[3]{a^{\frac{3n}{m}}} = a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{3n}{3m}};$$

$$\sqrt[p]{a^{\frac{pn}{m}}} = a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{pn}{pm}};$$

En general, suponiendo k el esponente que deba resultar, la suposicion $\sqrt[p]{a^{\frac{n}{m}}} = a^k$ conduce á la igualdad de potencias del grado p, $a^{\frac{n}{m}} = a^{kp}$; á la cual es consiguiente $\frac{n}{m} = kp$, y de aquí, por lo demostrado (71. 5.°), (72. 1.ª) y (112), sale $k = \frac{n}{mp}$ Luego, será $\sqrt[p]{a^{\frac{n}{m}}} = a^{\frac{n}{mp}}$.

Reasumiendo todos los resultados que se acaban de hallar acerca de los esponentes negativos y fraccionarios, en las operaciones de multiplicar, dividir, elevar á potencias y estraer las raices, vemos *que con las cantidades afectas de esponente negativo ó fraccionario se deben observar, en cuanto á éstos, las mismas reglas que cuando es entero y positivo el esponente.*

151. Las cantidades radicales, ya de letras comunes, ya de diversas, entran en los cálculos de sumar, restar, multiplicar, dividir, elevar á potencias y estraer sus raices: las dos últimas operaciones estan ya ejecutadas en la observacion precedente habiendo sustituido á la forma radical la de esponente fraccionario; mas, volveremos á tomarlas en consideracion para incluir los casos en que los radicales tienen coeficientes.

1.° La suma

$\sqrt{b}+\sqrt[3]{b}+\sqrt{b}+\sqrt{a}$, ó su igual $b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{2}}$, se reduce por la institucion del coeficiente á

$$2b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{2}};$$

y restituyendo los signos radicales tendremos

$$\sqrt{b}+\sqrt[3]{b}+\sqrt{b}+\sqrt{a}=2\sqrt{b}+\sqrt[3]{b}+\sqrt{a}.$$

Por igual método se hallarán tambien las equivalencias

$$m\sqrt{a}+n\sqrt{a}=(m+n)\sqrt{a};$$

$$\frac{m}{p}\sqrt[3]{(b^2c)}+\frac{n}{q}\sqrt[3]{(b^2c)}=\frac{mq+np}{pq}\sqrt[3]{(b^2c)}.$$

2.° En la resta hay por la misma razon las equivalencias

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}-2\sqrt{b}=a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{2}}-2b^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{a}-\sqrt{b};$$

$$p\sqrt[m]{a}-q\sqrt[m]{a}=pa^{\frac{1}{m}}-qa^{\frac{1}{m}}=(p-q)\sqrt[m]{a}.$$

Del 1.° y 2.° caso resulta, *que la suma y resta con cantidades radicales se deben hacer como con las racionales.*

3.° El encadenamiento de las equivalencias que siguen está fundado en el teorema del artículo (138),

$$\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{b}=a^{\frac{1}{m}}\times b^{\frac{1}{m}}=(ab)^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{(ab)};$$

$$\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{b}=a^{\frac{1}{m}}\times b^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{n}{mn}}\times b^{\frac{m}{mn}}=\sqrt[mn]{(a^n\times b^m)};$$

$$p\sqrt[m]{a}\times q\sqrt[m]{b}=pa^{\frac{1}{m}}\times qb^{\frac{1}{m}}=pq\sqrt[m]{(ab)}.$$

Las cuales hacen ver, que *el producto de dos radicales de comun índice es la raiz del producto de las cantidades afectadas por el signo radical; y el de dos radicales con distinto índice; despues de reducidos á uno mismo es tambien la raiz del producto de las cantidades á que afectan los reducidos*, entendiéndose que en ambos casos la raiz es del índice comun. *Si hay coeficientes de los radicales, viene el producto de aquellos por coeficiente del resultado.* Conforme á estas reglas estan hechas las multiplicaciones aritméticas que insertamos:

$$\sqrt{9}\times\sqrt{7}=\sqrt{63};\quad \sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{25}=\sqrt[3]{125}=5;$$

$$5\sqrt{3}\times2\sqrt[3]{4}=5\sqrt[6]{27}\times2\sqrt[6]{16}=10\sqrt[6]{432}.$$

4.° Las siguientes equivalencias consecutivas estan fundadas en el artículo (139),

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}};$$

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\frac{a^{\frac{n}{nm}}}{b^{\frac{m}{nm}}}=\sqrt[nm]{\frac{a^n}{b^m}};$$

$$\frac{p\sqrt[m]{a}}{q\sqrt[m]{b}}=\frac{p}{q}\sqrt[m]{\frac{a}{b}};$$

y manifiestan *que el cociente de dos radicales de comun índice es la raiz del cociente de las cantidades á que afecta el signo radical; y el de dos radicales con distinto índice, despues de reducidos á uno mismo, es tambien la raiz del cociente de las cantidades á que afectan los reducidos,* entendiéndose que en ambos casos la raiz es del índice comun. *Si hay coeficientes de los radicales, viene su cociente por factor del resultado.* Segun esto, se ejecuta facilmente la division con radicales, como por ejemplo en los casos adjuntos:

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{8}{3}};\quad \frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\frac{128}{2}}=4;$$

$$\frac{10\sqrt{6}}{2\sqrt[3]{4}}=\frac{10}{2}\sqrt[6]{\frac{216}{16}}=5\sqrt[3]{\frac{27}{2}}$$

5.° El encadenamiento de equivalencias que siguen, fundado en el artículo (138),

$$\left(p\sqrt[h]{a^m}\right)^n=\left(pa^{\frac{m}{h}}\right)^n=p^n\times a^{\frac{mn}{h}}=p^n\sqrt[h]{a^{mn}},$$

es *demostracion de que para elevar un radical á una potencia, basta elevar á ella la cantidad á quien afecta el radical; y si este tiene coeficiente, hay que elevarle á la misma potencia, de cuyo modo viene por coeficiente del resultado.* Lo cual se ve practicado en los casos particulares que acompañan:

$$\left(5\sqrt{k}\right)^3=125\sqrt{k^3};\quad \left(7\sqrt[6]{5}\right)^3=343\sqrt[6]{512}$$

6.° La seguida de las equivalencias que siguen, establecida tambien por el artículo (138) y por la demostracion final del (150),

$$\sqrt[m]{\left(q\sqrt[n]{a}\right)}=\sqrt[m]{\left(qa^{\frac{1}{n}}\right)}=q^{\frac{1}{m}}\times a^{\frac{1}{mn}}=\sqrt[m]{q}\times\sqrt[mn]{a}$$

dice que para estraer la raiz de un radical, basta multipli-

car entre sí los índices de ambas raices; y si hay coeficiente en el radical, se estrae su raiz, y ésta será coeficiente del resultado. Lo cual se ve aplicado á continuacion á ciertos casos aritméticos.

$$\sqrt{\left(9\sqrt[3]{40}\right)}=3\sqrt[6]{40};\ \sqrt[3]{\left(64\sqrt[3]{512}\right)}=4\sqrt[9]{512}=4\times2=8.$$

IV. *Observacion.*

152. Habiendose dado á conocer la ley de coeficientes y esponentes cuando en el cálculo entran potencias con esponentes enteros ó fraccionarios positivos ó negativos, resta decir lo que pasa en cuanto á signos de dichas potencias, como tambien de los productos de las espresiones negativas con esponente fraccionario.

1.° De $a\times a\times a\times\ldots$, siendo $+a$ factor n veces, está dicho que resulta $+a^n$ siempre positiva; y que lo mismo sucede con cualquiera potencia fraccionaria $+a^{\frac{n}{m}}$ de la raiz $+a^{\frac{1}{m}}$ positiva.

Pero si la raiz es negativa, de la generacion de la potencia se deduce (66. 1.° y 9.°) que ésta será positiva ó negativa segun el esponente del grado á que se eleva sea de grado par ó impar, como se cifra en las espresiones que siguen: $(-a)^2=a^2$; $(-a)^3=-a^3$); y en general $(-a)^{2m}=a^{2m}$; $(-a)^{2m+1}=-a^{2m+1}$ De suerte, que *será un absurdo el intentar la estraccion de cualquiera raiz con índice par, de una cantidad negativa*, como por ejemplo $\sqrt{-N}$, $\sqrt[4]{-N}$ y en general $\sqrt[2m]{-N}$.

Sin embargo tales espresiones, llamadas *imaginarias*, resultan á veces en el curso de un calculo y hacen gran papel en esta ciencia, como se verá en adelante.

2.° En vista, pues, de ser $(-a)\times(-a)=a^2$ y tambien $(+a)\times(+a)=a^2$, asi como en general $(-a^{2m})=a^{2m}$ y $(+a)^{2m}=a^{2m}$, claro está que $\sqrt{a^2}$ es $+a$ ó $-a$, lo mismo que en general $\sqrt[2m]{a^{2m}}$. *Por esto se escribe* $\sqrt{a^2}=\pm a$ *y en general* $\sqrt[2m]{N}=\pm h$, *con doble signo la raiz* h *que diere la poten-*

cia ó número N *afectado por un radical de índice par.* Pero cuando es conocido el signo de la raiz, no ha lugar al doble; como en $\sqrt[2m]{-a^{2m}}$ que será $-a$, asi como en $\sqrt[2m]{+a^{2m}}$ es $+a$.

3.° Para evitar las dudas en cuanto al signo que debe tener el producto de las espresiones imaginarias, se descompone cada una de estas en dos, una real y otra imaginaria, como $\sqrt{-a}$ en $\sqrt{a}\times\sqrt{-1}$, por ser lícito (149. 2.ª) á causa de $a^{\frac{1}{2}}\times -1^{\frac{1}{2}}=-a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-a}$; y asi hallaremos, por lo dicho en los dos casos precedentes,

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=\sqrt{a}\times\sqrt{a}\times\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=a\times-1=-a;$$

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=-a\times\sqrt{-a}=-a\sqrt{-a};$$

$$(\sqrt[n]{-a})^n=a\times\sqrt[n]{-1^n}=a\times-1=-a;$$

$$(\sqrt[n]{-a})^{n\pm1}=\sqrt[n]{a^{n\pm1}}\times\sqrt[n]{-1^{n\pm1}}.$$

Tambien se llegará por igual método á el producto de radicales con distintas letras, como en los casos que siguen:

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=\sqrt{ab}\times-1=-\sqrt{ab};$$

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}\times\sqrt{-c}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{c}\times\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}\times\sqrt{-1},$$

que equivale á $\sqrt{(abc)}\times-1\times\sqrt{-1}=-\sqrt{(-abc)}$.

Se observa que el producto de dos radicales imaginarios es real, y el de tres imaginario; y segun el método, consiste la variedad en las veces que $\sqrt{-1}$ entra por factor. En efecto,

$$(\sqrt{-1})^1=\sqrt{-1};\ (\sqrt{-1})^2=-1;\ (\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1};$$

$$(\sqrt{-1})^4=+1;\ (\sqrt{-1})^5=\sqrt{-1};\ (\sqrt{-1})^6=-1;$$

$$(\sqrt{-1})^7=-\sqrt{-1};\ (\sqrt{-1})^8=+1;\ \text{etc.};$$

manifiestan *que las potencias de* $\sqrt{-1}$ *desde la primera hasta la cuarta son,*

$$+\sqrt{-1}\ ;\quad -1\ ;\quad -\sqrt{-1}\ ;\quad +1\ ;$$

::

que se repiten por el mismo orden desde la quinta potencia hasta la octava; y continuando hasta cualquiera grado, siempre vuelven á reproducirse periódicamente dichas cuatro primeras potencias, reales las de grado par é imaginarias las de impar. Luego, por consecuencia de analogía debemos establecer, *que cuando hay número par de factores radicales imaginarios, el producto es real; y cuando hay número impar de dichos factores, el producto es imaginario.* El signo del resultado depende de los que tengan los factores, y del correspondiente á la potencia de $\sqrt{-1}$ segun el número de aquellos.

CAPITULO VIII.

Teoría de las ecuaciones de primero y segundo grado.

LECCION I.ª

Ideas generales sobre las ecuaciones y los problemas.

153. El sistema de investigar la verdad, ó la exacta lógica, se reduce á encadenar el raciocinio pasando en todo su curso de lo conocido á lo desconocido (3), y las cuestiones que ofrece la cantidad son propias para ejercitarse en esta parte de la filosofía, porque patentizan las comparaciones, y dan á conocer si la cuestion es determinada ó indeterminada, y posible ó imposible; esto es, si hay ó no suficientes datos para conocer la verdad, como tambien si hay ó no datos contradictorios.

Suponiendo bien organizados los razonamientos, hay dos dificultades en los problemas de la cantidad. 1.ª Trasladar á lenguage algébrico los discursos, ó sea, *cifrar el problema* con caracteres propios. 2.ª Verificado esto, hallar la verdad que se busca, esto es, *resolver el problema.* Para lo primero es necesario saber traducir á lenguage de los cálculos el vulgar; y para lo segundo se ha de manejar con propiedad el artificio de dicho lenguage, y ademas conocer bien los modos de componer y descomponer la cantidad.

Mas, no es posible adquirir completa instruccion en todo el sistema gramatical del cálculo antes de ejercitarse en la lógica; juntamente y paso á paso hay que avanzar en una y otra enseñanza; asi hemos llegado hasta aqui, y continuaremos en adelante por necesidad en toda la ideología matemática.

154. Tratemos en primer lugar de la segunda dificultad enunciada en el artículo precedente; y ante todo se debe recordar, que una oracion algébrica ó verdad sobre cantidades espresada con los caracteres del cálculo, es como se dijo en el artículo (14) la igualdad entre dos números, como $M=N$, ó bien la mayoría de M respecto de N, como $M>N$, ó la minoria como $M<N$, espresando en general cada letra de las que hemos usado un conjunto de cantidades Comunmente interesa mas la relacion de igualdad, porque fija un principio que decididamente existe; mientras la inecuacion da lugar á mas arbitrariedad, porque, si a $M>N$ satisfacen ciertos valores de M y N, tambien sucede lo mismo con valores mayores atribuidos á M ó con menores atribuidos á N.

Ejemplos de esto son $\frac{40}{7}>5$, $\frac{41}{7}>5$, &c. como tambien $\frac{40}{7}>4$, $\frac{40}{7}>3$, &c. mientras $\frac{40}{7}=5+\frac{5}{7}$ es una relacion decidida, que dejará de ser cierta si se aumenta ó disminuye cualquiera de las cantidades constituyentes.

Si no hay en la ecuacion mas cantidad parcial desconocida que una, combinada con las conocidas segun los métodos que hasta aqui sabemos, se llama *ecuacion determinada*; porque, *despejando* la incógnita, es decir, preparando como se dirá mas adelante la ecuacion de modo que dicha incógnita ocupe solo un miembro, y las conocidas el otro, el resultado manifiesta el valor de aquella, como se ha practicado en algunos cálculos de las lecciones anteriores.

Cuando la ecuacion envuelve mas de una incógnita, es *indeterminada;* porque aun cuando se despeje una de dichas incógnitas, esta queda dependiente de la otra, que se hallará en el segundo miembro. Asi sucede en

$$3x+a=2z;$$

pues, en concepto de ser incógnitas x, z, de cualquiera modo que se ordenen y sea cualquiera la que se despeje, siempre una depende de la otra. Dividiendo por 2 ambos miembros, viene la solucion

$$z=\frac{3x+a}{2}:$$

asi como restando a de ambos miembros y dividiendo despues por 3, resulta

$$x=\frac{2z-a}{3}.$$

La ecuacion determinada ó indeterminada se llama de *primero*, *segundo*, *tercero*, etc. *grado*, segun el esponente mayor que tenga la incógnita sea 1, 2, 3, 4,.... despues de haber despojado de radical su espresion, en caso de ocurrir tal circunstancia. En esta parte elemental solo estan comprendidas las ecuaciones de 1.º y 2.º grado; quedando para mas adelante las de grados superiores.

El arte de resolver las ecuaciones se funda en los teoremas que se han establecido ya; segun los cuales, no se altera la verdad de una ecuacion aunque en sus dos miembros se haga simultáneamente la variacion de añadir ó quitar partes iguales, de multiplicar ó dividir por cantidades iguales, de elevar á potencias de un mismo grado ó estraer la raiz de un mismo índice, porque toda operacion de estas no es en realidad sino añadir ó quitar partes iguales á cantidades iguales, y por consiguiente habrá ecuacion entre las resultantes (3. 6.º). En lo sucesivo se tratará de las reglas para resolver las ecuaciones de cada grado.

155. Tomando ahora en consideracion la primera dificultad enunciada en el artículo (153), acerca de espresar en lenguage de cálculo el razonamiento pronunciado en lengua vulgar, no podemos establecer para conseguirlo reglas tan precisas que el calculador tenga poco que meditar en su aplicacion; pero sirven de gobierno las observaciones de prevencion siguientes.

1.ª El razonamiento puede constar de una ó mas oraciones algébricas, y lo que se diga de una se debe entender de cualquiera de ellas. La primera atencion del calculador al proponérsele un problema, debe fijarse en distinguir mentalmente cada oracion, para escribirla segun la forma que la pertenezca (154).

2.ª En la oracion estan ligadas las cantidades conocidas con las desconocidas por medio de espresiones propias de la lengua vulgar; y para cifrarla con caracteres del álgebra, es necesario ejercitarse en traducir las conjunciones vulgares á las algébricas, y en distinguir los modos con que se espresan combinaciones de cantidades en ambos lenguages.

3.ª Adiestrado el calculador en este ejercicio, debe proceder á escribir la oracion de igualdad ó desigualdad (14), prescindiendo de que sean conocidas ó desconocidas las cantidades que vengan combinadas entre sí; pero con la distincion de *que cada desconocida esté significada con una letra de las que para este uso se destinen de antemano, como por ejemplo, las últimas de nuestro alfabeto;* y *las conocidas, con las restantes letras adoptadas.*

Bien se advierte que las tres observaciones hechas indican el método de plantear problemas, pero con tanta generalidad é indecision, que es necesario recomendar la mucha práctica para que adquiera el individuo la maestría necesaria. Por otra parte, suelen ocurrir en los problemas varios casos para los cuales debemos estar prevenidos.

Si el problema consta de una sola ecuacion, será *determinado* ó *indeterminado*, segun el número de incógnitas (154), de suerte, que en este caso tienen un mismo carácter la ecuacion y el problema.

Algunas cuestiones, como se ha dicho antes, no se pueden cifrar en una sola ecuacion, porque envuelven varias verdades aisladas, y cada una de estas exige ser espresada por sí sola en ecuacion. Si entonces hay tantas incógnitas como ecuaciones distintas, el problema es *determinado*, pues tenemos medios de encadenar el razonamiento desde lo conocido hasta hacer que de ello dependa cada incógnita, como se manifestará á debido tiempo.

Otras veces al calculador se presenta una cuestion sin verdades suficientes, ó lo que es lo mismo, con mas incógnitas que ecuaciones; y por ello, es *indeterminado* el problema.

Con frecuencia tambien se cifran raciocinios falsos, aunque arreglados á los datos; en lo cual consiste un problema *absurdo* ó *imposible*: y no se debe confundir este error de la cuestion por sí misma, con un desatino del cálculo, que siempre conduce á resultados inadmisibles, por mal demostrados.

Hay problemas que tienen mas ecuaciones distintas que incógnitas, de modo que sobran las escedentes al número de estas, si únicamente se trata de conocer los valores de las incógnitas. Pero en muchas ocasiones en que lleva otros objetos el calculador, interesan dichas ecuaciones escedentes; pues introduciendo en ellas por las incógnitas los valores hallados, se convierten á unas *relaciones entre cantidades conocidas*, que sirven para conocer si la cuestion es posible ó no cuando son aritméticas dichas cantidades conocidas, y para establecer *condiciones precisas* en la cuestion cuando las cantidades son generales.

LECCION II.

Ecuacion determinada de primer grado.

156. Las ecuaciones de esta clase deben su orígen al siguiente problema general; *hallar el valor de una cantidad que no se conoce, y que está combinada con otras conocidas, por adicion, sustraccion, multiplicacion ó division.* Dada la igualdad, primeramente se dirige el calculador á *simplificarla*, tanto en la forma como estrayendo los factores comunes de sus dos miembros, y en seguida pasa á *despejar* la incógnita dejándola despejada ó aislada y sola en uno de los miembros. Esta última operacion, que consiste en librar á la incógnita de todas las cantidades á quienes está ligada en el miembro, por adicion ó sustraccion ó multiplicacion ó division, se hace por las siguientes reglas.

I.ª En la ecuacion $a+x=b$, réstese a de sus miembros, y queda $x=b-a$. En $x-a=c$, añádase a á los dos miembros, y resulta $x=a+c$. Luego, *para despejar la incógnita cuando viene sumada con algunas conocidas que tienen signo + ó —, se pasan éstas al otro miembro con signo contrario al que tenian.*

II.ª Si trae la forma $ax=b$, divídanse ambos miembros por a y resultará $x=\frac{b}{a}$. Luego, *para despejar la incógnita cuando ocupa un miembro multiplicada por un factor conocido, se pasa éste á divisor del segundo miembro.*

III.ª En $\frac{x}{a}=b$, multiplíquense los dos miembros por a, y se tendra $x=ab$. En donde vemos que *para despejar la incógnita cuando es numerador de un miembro, hay que pasar el denominador al otro miembro como factor de toda la cantidad que hay en éste.*

IV.ª Sea $\frac{a}{x}=b$ la ecuacion; y multiplicando por x los dos miembros, resulta $a=bx$, que por la regla segunda equivale á $x=\frac{a}{b}$. Demostracion de que *cuando la incógnita es denominador de un miembro, debe pasar al otro como factor, despejándola por fin segun la regla* II.ª

V.ª Dada la ecuacion $ax-\frac{x}{b}+cd^2=\frac{mx}{2}+n$, multiplíquense los dos miembros por $2b$, producto de los denominadores que hay, y se transformará en

$$2abx-2x+2bcd^2=bmx+2bn.$$

Restando de ambos miembros el binomio $bmx+2bcd^2$, resulta

$$2abx-2x-bmx=2bn-2bcd^2,$$

que, separando el factor x, viene á ser

$$x(2ab-2-bm)=2b(n-cd^2).$$

De donde, por la regla segunda, procede

$$x=\frac{2b(n-cd^2)}{2ab-2-bm}.$$

Por el método con que se han hecho las operaciones consta, que *cuando la incógnita se halla en varios términos de la ecuacion, primeramente se multiplica toda por el producto de los denominadores, si los hay, á fin de librarla de fracciones; en seguida se pasan á un solo miembro todos los términos afectados por la incógnita, cambiando el signo á los que vengan del otro miembro; y por último, sacando el factor incógnito se despeja éste pasando el factor conocido á divisor del segundo miembro.*

Las reglas que se acaban de inferir para despejar la incógnita son generales, representando las letras a, b, c.... cantidades enteras ó fraccionarias, simples ó afectadas con cualquiera signo del cálculo, conforme á los convenios establecidos en el tratado.

Si en vez de la oracion de igualdad entre cantidades, está cifrada una desigualdad con los signos $>$ ó $<$, la incógnita se despeja de igual modo, fundándose las operaciones en el principio análogo (3. 7.°) de que subsiste desigualdad haciendo en los dos miembros una misma variacion, de añadir, quitar, multiplicar, dividir, elevar á potencia ó estraer la raiz; porque todo viene á ser lo mismo que añadir ó quitar.

157. Para ejercicio en el arte de plantear los problemas, y con el objeto de hacer sobre ellos algunas observaciones de grande importancia, se proponen los siguientes.

1.° *Hallar el número que dividido por 3 y por 4, ha de dar 14 por suma de los cocientes.* Suponiendo x el número desconocido, la traduccion del problema á lenguage del cálculo será

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=14.$$

Multiplíquese por 3.4 esta ecuacion segun la regla V.ª, y recibirá la forma

$$4x+3x=3.4.14, \quad \text{ó bien,} \quad x(3+4)=3.4.14:$$

y por último segun la regla II.ª tendremos la solucion

$$x=\frac{3.4.14}{7}=24.$$

2.° *¿Cuál es el número que dividido por* a *y por* b *da la suma* s *de cocientes?* Facil es distinguir que a, b, s, son conocidas, y desconocido el dividendo, que supondremos x. El problema está cifrado en $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=s$; y multiplicando por $a.b$ segun la regla V.ª, resulta

$$x(a+b)=abs, \text{ de donde } x=\frac{abs}{a+b}.$$

3.° Si el problema fuere, *hallar el número* x *que dividido por* a, *por* b *y por* c *de la suma* s *de cocientes*; con igual método se hallaria

$$x(ab+ac+bc)=abcs, \text{ de donde } x=\frac{abcs}{ab+ac+bc}.$$

Si comparamos los problemas 1.° y 2.°, se observará que en el segundo está comprendido el primero y todos los de su forma, sean cualesquiera los divisores y la respectiva suma de cocientes; pues dando valores á las letras de la cuestion general, como $a=3$, $b=4$, $s=14$, y *sustituyendo* éstos en la solucion de aquella, viene la particular $x=24$ de la cuestion primera. Si queremos atribuir á dichas letras cualesquiera otros valores, como $a=4$, $b=6$, $s=90$, por sustitucion hallaremos $x=\frac{2160}{10}=216$, valor mismo que si hubiéramos planteado este problema de cifras aritméticas. El problema 3.° es un ejemplo que hemos presentado, para llamar la atencion sobre la correspondencia de las espresiones que han resultado de los problemas 2.° y 3.°, en cuanto á la organizacion de ellas; correspondencia de que se suele hacer mérito en muchas ocasiones, para saber organizar por analogía una espresion, mas general ó complicada que otras consecutivas conformes en cierta ley de composicion que se advierta en ellas.

Se llama *fórmula* toda oracion general escrita en caracteres algébricos: asi, la ecuacion en que está escrito el problema segundo es fórmula de todos los aritméticos de su forma, y la ecuacion final en que se halla despejada la incógnita es la fórmula de soluciones ó la *solucion general* de ellos. De suerte, que en una fórmula están comprendidos infinitos casos, á quienes podemos aplicarla sustituyendo por las letras que representan cantidades conocidas, los números correspondientes del caso que se ofrezca.

La utilidad que se puede sacar de las fórmulas generales no consiste solo en esto. Sirven ademas para resolver tantas clases de cuestiones cuantas cifras hay en la ecuacion de modo diferente combinadas; porque, tratando á cada una de estas como nueva incógnita y á las restantes como valores dados, y despejando aquella, resulta una nueva fórmula general para la solucion de todos los problemas aritméticos correspondientes.

4.° Por ejemplo, *se trata de hallar un divisor* b *del número dado* x, *tal que, sumando el cociente* $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{b}}$ *con otro dado* $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}}$ *resulte una suma determinada* s.

Si procedemos á plantear el problema, vuelve á reproducirse la ecuacion $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=s$, pero el resultado final será el mismo que si despejamos b en la solucion $x=\frac{abs}{a+b}$. De este modo, por las reglas (156) hallaremos $b(as-x)=ax)$, de donde $b=\frac{ax}{as-x}$, prescindiendo de la impropiedad que se advierte, en indicar la letra x destinada para incógnitas y la b para las conocidas, lo contrario de su instituto; aunque es fácil notar que lo hemos hecho para hacer mas sensible la fuerza del raciocinio.

5.° Con el objeto que se propuso al principio del artículo y el de recomendar las fórmulas, trátese de *hallar dos números cuya suma valga* s, *y la diferencia* d *una y otra dadas.*

Suponiendo x el menor de los desconocidos y z el mayor, el problema está cifrado en las dos ecuaciones

$$x+z=s,\ z-x=d:$$

pero de este modo no pertenece á esta leccion por concurrir dos incógnitas con dos ecuaciones, cuando tratamos de problemas que solo den una ecuacion con una incógnita.

No obstante, recapacítese un poco y se advertirá que hemos formado sin la detencion debida el juicio, porque el problema es de aquellos que se pueden cifrar y resolver como de una sola incógnita. Pues con suponer x el menor número desconocido, el mayor será $x+d$: y escribiendo las dos ecuaciones

$$x+x+d=s,\quad x+d-x=d,$$

se ve que la segunda no es relacion conducente, sino una ecuacion de aquellas que se llaman *idénticas* por espresar que una cantidad es igual á ella misma: por lo cual no hay mas que la primera, como corresponde á un problema determinado con una incógnita. De la ecuacion

$x+x+d=s$ viene $2x=s-d$, y por último

$$x=\frac{1}{2}(s-d).$$

Añadiendo d á los miembros, resulta para el otro número, despues de las reduciones,

$$x+d=\frac{1}{2}(s+d).$$

Vemos que, *dadas la suma y la diferencia de dos cantidades, la menor es mitad de la suma menos la mitad de la diferencia; y la mayor, mitad de la suma mas la mitad de la diferencia.* La cuestion que nos ha conducido á este teorema ó traducion de las dos fórmulas halladas, ha sido propuesta de intento para deducir dichos resultados de que haremos mucho uso en adelante. Si las cantidades que se nos dieren fuesen múltiplas, como ns y md, hallariamos, bien por nuevo plantéo, bien por sustitucion en las fórmulas, los valores

$$x=\frac{1}{2}(ns-md) \text{ y } x+md=\frac{1}{2}(ns+md).$$

De igual modo, si la suma y la diferencia fuesen $\frac{s}{n}$ y $\frac{d}{m}$,

resultarían $x=\frac{1}{2}\left(\frac{ms-nd}{mn}\right)$; $x+\frac{d}{m}=\frac{1}{2}\left(\frac{ms+nd}{mn}\right)$.

Otras veces el problema parece de una sola ecuacion y produce varias distintas. Muchas veces tambien se presenta como determinado en la apariencia, y no lo es en realidad, como notará el calculador al cifrar la ecuacion. Mas adelante se propondrán ejemplos de estos dos escollos.

158. La solucion general de un problema indica por la combinacion de las letras, el cálculo que se debe hacer con los números en casos particulares; y mientras conserva su generalidad no se halla espuesta á ciertos accidentes, que pueden ocurrir dando valores á las letras, como son los casos de resultar al fin $x=-m$ cantidad negativa cuando se pide positiva, ó bien $x=\frac{a}{0}$, ó $x=\frac{0}{0}$.

En este artículo únicamente nos proponemos decir algo sobre estos símbolos en sí, dejando para el artículo siguiente lo que significan acerca de los problemas de que procedan.

En cuanto al residuo negativo se hizo ver en el artículo (64), que procede siempre de un problema de restar: mas, para observar otra circunstancia de las cantidades negativas, tómese en consideracion la resta $x=a-b$ algébricamente indicada, cuyo residuo será como sabemos positivo, nulo ó negativo, segun a fuere mayor que b ó igual ó menor.

1.° Siendo $a=b+c$, resulta $x=b+c-b=c$, ó sea $x-c=0$.

2.° $a=b$ ocasiona $x=b-b$, que equivale á $x=0$.

3.° $a=b-c$ hace $x=b-b-c=-c$, ó bien $x+c=0$.

Como se puede considerar c cuan grande ó pequeño se quiera, vemos claramente que *toda cantidad* x *positiva es mayor que cero; que toda negativa* —x *es menor que cero; y qu* *cero es el paso de la cantidad al cambiar de signo, para crecer cuando pasa á positiva, y para decrecer cuando á negativa.*

Una fraccion $\frac{h-k}{p-q}$ en cuyo denominador se destruyen los términos, queda reducida á $\frac{h-k}{0}$; y por simplificar el lenguage se ha convenido en *indicar con el símbolo* ∞ *cualquiera fraccion cuyo denominador sea cero;* lo cual nos autoriza para sustituir la cifra ∞ por la frase $\frac{h-k}{0}$. Si se destruyeren además entre sí los términos del numerador, quedará la fraccion reducida á $\frac{0}{0}$: con que, sabemos tambien el orígen de esta espresion.

El símbolo ∞ entra muchas veces en los cálculos, asi como las cantidades negativas y las imaginarias á pesar de su orígen; y para cuando llegue la ocasion es necesario hacer advertencias.

1.ª Considerando que q se acerca á p por sucesivos é interminables crecimientos, ó que p se acerca á q por sucesivas é interminables diminuciones, sin llegar jamas á la igualdad ni pasar de ella, será cero el límite de $p-q$ (79), y en este concepto el símbolo ∞ es límite del valor crecente de una fraccion cuyo denominador se acerca á cero. Mas, cuando los incrementos de q ó diminuciones de p sean tales, que pueda llegar el caso $p=q$ y aun pasar á $q>p$: entonces ∞ no es límite, sino tránsito del valor variable x de la fraccion para cambiar de signo, como sucede al pasar por cero.

2.ª En un cálculo no se pueden comparar dos ó mas símbolos ∞ que deban su orígen á la conversion de distintas letras á cero; y si ocurriere tal caso, la comparacion se debe hacer con las espresiones respectivas sin adoptar dicho símbolo.

3.ª Cuando ∞ es término de un miembro en alguna ecuacion, como $a+\infty$, $b-\infty$, $\infty-c$; si se repone por infinito su igual $\frac{m}{0}$, y se reduce todo el miembro á comun denominador, los tres supuestos vendran á ser

$$a+\infty=\frac{a\times 0+m}{0}=\frac{m}{0}=\infty;$$

$$b-\infty=\frac{b\times 0-m}{0}=-\frac{m}{0}=-\infty;$$

$$\infty-c=\frac{m-c\times 0}{0}=\frac{m}{0}=\infty.$$

Luego, *siempre que el símbolo ∞ sea término de un miembro, todo éste se reduce á ∞, con el signo mismo que tenia antes de la reducion.*

Si en el polinomio entran potencias de ∞, de un mismo origen, como $\infty^h\pm\infty^k$, y es $h>k$, al reducir á comun denominador los términos $\frac{m^h}{0^h}$ y $\frac{m^k}{0^k}$ se destruye el de menor esponente: porque, si es $h=k+i$, tendremos $\frac{m^{k+i}}{0^{k+i}}\pm\frac{m^k}{0^k}$, que reducido á comun denominador viene á ser

$$\frac{m^{k+i}}{0^{k+i}}\pm 0^i\times\frac{m^k}{0^{k+i}}=\frac{m^{k+i}}{0^{k+i}}=\infty^h.$$

Por esto sucederá

$$\infty^2\pm\infty=\infty^2;\ \infty^3+\infty^2+\infty=\infty^3.$$

4.ª Siendo ∞ factor ó divisor, como $a\times\infty$, $\frac{b}{\infty}$; si se sustituye $\frac{m}{0}$ por ∞, resultan

$$a\times\infty=\frac{a\times m}{0}=\infty;\quad \frac{b}{\infty}=b:\frac{m}{0}=\frac{0\times b}{m}=0.$$

Luego, *siempre que ∞ venga por factor, el producto será ∞; y si viene por divisor, el cociente nulo.*

Entendidas las significaciones de los símbolos $-m, \infty, \frac{0}{0}$ en sí, vamos á reconocer las circunstancias del problema cuando la solucion está espresada por uno de estos símbolos.

159. Cualquiera ecuacion determinada de primer grado está comprendida en la general

$$Ax+B=Cx+D \ldots(1)$$

que, pasando á un miembro los términos, viene á ser

$$(A-C)x+B-D=0.$$

Si para simplificar la espresion suponemos $A-C=a$, $B-D=b$, la ecuacion general de primer grado reducida á mas simple forma será

$$ax+b=0\ldots(2).$$

Tomando en consideracion para los fines que ahora nos interesan la igualdad ((1)), réstese $Cx+B$ de ambos miembro y resultará $(A-C)x=D-B$, de donde

$$x=\frac{D-B}{A-C}\ldots(3).$$

Se trata de investigar lo que pasa en la ecuacion general ((1)) cuando la solucion ((3)) viene á ser negativa ó ∞, ó $\frac{0}{0}$.

Pueden ocurrir tres casos en cuanto al signo positivo ó negativo de x.

1.° Si las cantidades conocidas tienen las relaciones $D>B$ y $A>C$, la solucion resultará positiva por ser cociente de dos cantidades positivas.

2.° Si ocurren las dos circunstancias $B>D$ y $C>A$ la solucion será positiva por cociente de dos cantidades negativas, á pesar de dos restas imposibles con números, defecto que se cometió al resolver la ecuacion, pues que se restó $Cx+B$ de ambos miembros, siendo mayor que ellos; pero defecto que se pudo evitar restando en su lugar la cantidad $Ax+D$, de que hubiera provenido

$$x=\frac{B-D}{C-A},$$

solucion positiva como antes y obtenida sin recíproca compensacion de errores.

Nótese sin embargo que, multiplicando por -1 los dos términos de la fraccion $\frac{D-B}{A-C}$, se cambia en $\frac{B-D}{C-A}$, y queda corregido asi el defecto que se cometió en la marcha de las operaciones, sin la necesidad de volver al principio del cálculo.

3.° Si resultan $B>D$ y $A>C$, ó sino, $C>A$ y $D>B$, la solucion es negativa por cociente de cantidades con signos contrarios; y en vano se intentará buscar el defecto en el sistema de resolver, porque se halla en la misma ecuacion dada ((1)). Efectivamente, cuando proceda de ser $B>D$ siendo $A>C$, el primer miembro es mayor que el segundo y por ello falsa dicha ecuacion. En caso de $C>A$ y $D>B$, será el segundo miembro mayor que el primero y por consiguiente falsa la igualdad. En ambos casos, supuesta una fiel traduccion del problema, será este absurdo: luego, *toda solucion negativa procede siempre de un problema imposible.* Cambiando el signo de x al plantearle, ó si se quiere en la solucion ((3)), resulta libre de absurdidez $x=\frac{B-D}{A-C}$ cuando es $B>D$, y $x=\frac{D-B}{C-A}$ cuando es $C>A$. *Dice pues la solucion negativa, que la incógnita se debió tomar en sentido contrario al proponer el problema.*

Esto sucede en el siguiente. *Habiéndose dispersado un ejército de 24000 hombres, se han reunido 9000; ¿cuántos* *mas deberán reunirse para que sumados con los 9000, la suma llegue á ser tercera parte del primitivo ejército?* La espresion del problema en lenguage del cálculo es

$$x+9000=\frac{24000}{3};$$

y la solucion $x=8000-9000=-1000$.

Por el valor negativo de x se infiere ser imposible la cuestion conforme se ha propuesto; mas, quedará corregida tomando x en sentido contrario, es decir, que debió proponerse la cuestion en la forma siguiente. *Dispersado un ejército de 24000 hombres y reunidos ya 9000, ¿cuántos sobran ó cuánto escede este número al tercio del total?* Su traduccion en lenguage del cálculo es

$$9000-x=\frac{24000}{3}; \text{ y la solucion } x=1000.$$

Para reconocer el origen de los otros dos accidentes, que segun enunciamos en el artículo precedente pueden ocurrir al dar valores numéricos á las letras de la fórmula ((3)), fijemos otra vez en ella la consideracion

1.° Cuando sea $A=C$, resultará

$$x=\frac{D-B}{0}=\infty:$$

pero en tal caso no es cierto lo que dice $Ax+B=Cx+D$, siendo diferentes B y D. Luego, *el símbolo* ∞ *en la solucion* $x=\infty$ *manifiesta que el problema es absurdo.*

2.° Si juntamente ocurren $A=C$ y $B=D$, saldrá

$$x=\frac{D-B}{A-C}=\frac{0}{0}.$$

En este caso la ecuacion ((1)) es cierta porque se convierte en $Ax+B=Ax+B$, sea cualquiera el valor de x: pero espresa un problema indeterminado á causa del infinito número de valores que pueden corresponder á x, como por otra parte puede inferirse tambien de la ecuacion $Ax+B=Ax+B$, en que no hay dato alguno para el razonamiento. Luego, *el símbolo* $\frac{0}{0}$ *de una solucion* $x=\frac{0}{0}$ *proviene de faltar datos para ser determinado el problema.*

160. De lo dicho se infiere que el cálculo algébrico manifiesta por señales evidentes, que aparecen siempre en la solucion, si lo que tratamos de averiguar es ó no posible con las condiciones dadas, y en caso de no serlo, descubre la causa de dicho resultado. Esta es la gran ventaja de la espresion en lenguage propio de los cálculos: ojalá pudiera ser aplicada á la investigacion de la verdad en todas las materias como lo es en la de cantidades, para que el sofisma y error envueltos en los raciocinios apareciesen al fin. Pero á pesar de tan buen deseo, el cálculo matemático no es aplicable sino á la cantidad; y cuando se quiera razonar asi en otros asuntos, únicamente se podrá en cuanto al número de sucesos, para deducir la certeza ó la probabilidad de que acontezca ó no otro de la misma clase; certeza si hay suficientes datos, y probabilidad si no es posible adquirir é introducir en el discurso todos los necesarios. El *cálculo de probabilidades*, tratado con magisterio por Lacrox y otros, conduce á soluciones verosímiles en que se suelen fundar muchas especulaciones mercantiles. La exactitud, sencillez, claridad, etc., del método matemático han prendado de tal manera á los sabios, que aun en obras de metafísica célebres, que pudiéramos citar, se ve un estilo semejante al de nuestro cálculo.

LECCION III.

Eliminacion de incógnitas entre las ecuaciones indeterminadas del primer grado.

161. Toda ecuacion del primer grado con dos incógnitas puede reducirse á la forma

$$ax+bv=d,\ldots\ldots (4)$$

siendo a la suma de coeficientes de la incógnita x, asimismo b la de todos los coeficientes de v, y d la suma de términos conocidos. Despejando una de las incógnitas, se ve que depende de la otra, como

$$x=\frac{d-bv}{a} \text{ ó } v=\frac{d-ax}{b};$$

y por ello, es indeterminada la ecuacion y tambien el problema. Pero si hubiese ademas otra ecuacion con una ó ambas incógnitas, como $a'x+b'v=d'$, es ya determinado el problema por tener dos ecuaciones y dos incógnitas, como bien pronto se verá.

La ecuacion general de tres incógnitas despues de hacer la reunion de coeficientes, viene á ser

$$ax+bv+cz=d;\ldots\ldots (5);$$

y para que el problema venga determinado es necesario que nos dé otras dos ecuaciones, y que entre ellas haya las tres ó al menos dos de las incógnitas.

En general, un problema que envuelve n incógnitas ha de constar de n ecuaciones distintas que contengan dichas incógnitas, para ser determinado, como se dijo en el artículo (155). El medio que hay de resolver un problema cifrado en varias ecuaciones con otras tantas incógnitas, consiste en la *eliminacion* de éstas; y se hace de varios modos que inmediatamente vamos á emplear. Siempre se deben combinar dos ecuaciones cada vez, de manera que se venga á otra despojada de una de las incógnitas; y por combinaciones sucesivas llegará por fin el calculador, cuando el problema es determinado, á una ecuacion con una incógnita sola que despejándola queda conocida. Todo lo hecho hasta aquí puede llamarse primer período de la eliminacion; porque falta el segundo, que consiste en retroceder hácia los primeros resultados de aquel á fin de conocer los valores de las otras incógnitas. Se principia el segundo período por sustituir el valor que ya se ha encontrado de una incógnita, en otra ecuacion de las que produjo el cálculo y que tenga ademas otra incógnita. Asi queda tambien sola ésta en dicha ecuacion; y despejándola, se sustituye su valor en una de las ecuaciones precedentes del cálculo. Seguidamente se sustituyen los valores de estas dos incógnitas en la ecuacion que haya precedente con tres incógnitas; y así se llega hasta la primera que hubiere quedado indeterminada.

Si el problema es indeterminado, quedarán en la ecuacion final del periodo primero dos ó mas incógnitas; y de consiguiente, sustituyendo la espresion de una en las ecuaciones precedentes, solo podemos esperar valores indeterminados para todas las incógnitas. Vamos á practicar la eliminacion de los diversos métodos, segun se han ofrecido.

162. Por *sustitucion* se elimina cuando, despues de haber despejado una de las incógnitas en una de las ecuaciones, se sustituye su espresion en las otras; de que resulta una ecuacion menos, habiendo al mismo tiempo desaparecido en las restantes dicha incógnita. Aplicando á éstas el método, se reduce otra vez el número de ecuaciones y de incógnitas, y continuando se llega á una sola ecuacion. Sean dadas para ensayo las tres ecuaciones generales de primer grado con tres incógnitas,

$$ax+bv+cz=d,\quad a'x+b'v+c'z=d',\quad a''x+b''v+c''z=d''.$$

Despejada la x en la primera, sustitúyase despues en las otras la espresion

$$x=\frac{d-bv-cz}{a},\ \ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

y resultarán las siguientes con v y z,

$$ab'v-a'bv+ac'z-a'cz=ad'-a'd,$$
$$ab''v-a''bv+ac''z-a''cz=ad''-a''d.$$

Despejemos v en la primera de estas, y sustituyendo en la segunda por v su espresion

$$v=\frac{ad'-a'd+a'cz-ac'z}{ab'-a'b},\ \ldots\ldots\ldots\ldots(\beta)$$

viene la ecuacion determinada

$$(ab''-a''b)\,(a'cz-ac'z)+(ab'-a'b)\,(a''cz-ac''z)$$
$$=(a''b-ab'')\,(ad'-a'd)+(ab'-a'b)\,(ad''-a''d).$$

Finalmente, despéjese la incógnita restante z y la operacion presentará determinado el valor que ignorábamos de esta cantidad, y que llamaremos p con objeto de simplificar su espresion.

Ahora debemos retroceder por el mismo camino que se ha trazado en el cálculo anterior; y proceder haciendo sustituciones de incógnitas ya determinadas, en las espresiones de las otras que quedaron dependientes de aquellas. La inmediata precedente á z fue v: sustitúyase pues el valor p de z en la ecuacion ((β)), y esta nos dará el valor de v que supondremos q,

$$v=\frac{ad'-a'd+a'cp-ac'p}{ab'-a'b}=q.$$

Sustituyendo tambien q por v, y p por z en la ecuacion ((α)), será $x=\dfrac{d-bq-cp}{a}$.

Este método es ventajoso cuando en cada ecuacion del problema no se hallan todas las incógnitas; como en el siguiente caso, que presentamos por ejemplo,

$$8x+3v-5z=38,\ 2x+v=15,\ 2v+z=17.$$

La tercera ecuacion da $v=\dfrac{17-z}{2}$; y sustituyendo el valor de v en las dos primeras resultan

$$16x-3z-10z=25,\ 4x-z=13.$$

La segunda de las de este par da $x=\dfrac{13+z}{4}$, y de sustituir en la primera viene la determinada

$9z=27$, de donde $z=\dfrac{27}{9}=3$. Retrocediendo, se hallan $x=4$, $v=7$.

163. Por *igualacion* se elimina, cuando despues de haber despejado una misma incógnita en todas las ecuaciones, se igualan de dos en dos las espresiones de ella; operacion que conduce á otro sistema de ecuaciones en que hay una menos,

habiendo tambien desaparecido una incógnita. El método conduce hasta llegar por fin á una ecuacion sola determinada, si tal es el problema. Apliquemos este método á las ecuaciones numéricas del artículo precedente, y se hallarán empezando por despejar v,

$$v=\frac{38-8x+5z}{3},\quad v=15-2x,\quad v=\frac{17-z}{2}.$$

Igualando la segunda á la primera y á la tercera, resultan las siguientes,

$$5z-2x=7,\quad 4x-z=13,$$

que dan $z=\frac{7+2x}{5}$, $z=4x-13$.

De su igualacion procede la final $18x=72$, y de esta el valor $x=4$. Retrocediendo se encuentran $z=3$, $v=7$.

164. Por *sustraccion* se elimina preparando las ecuaciones de modo, que una misma incógnita tenga un mismo coeficiente en todas las ecuaciones. Se resta en seguida una de otra, y resulta de dos ecuaciones una sola con una incógnita menos: y continuando por este orden, se llega á la final. Cuando las propuestas no vienen desde luego con iguales coeficientes de una misma incógnita, podemos prepararlas multiplicando cada ecuacion por el producto de los coeficientes que la incógnita elegida tenga en las restantes, ó por algun factor adecuado. Si la incógnita se halla con signos contrarios, se deben sumar las preparadas. En las ecuaciones numéricas de los ensayos anteriores no viene incógnita alguna con un mismo coeficiente; pero fijemos la atencion en una de éstas, en v por ejemplo, y haciendo la preparacion como se ha dicho, tendremos

$$16x+6v-10z=76,\quad 12x+6v=90,\quad 6v+3z=51.$$

Si restamos la tercera de estas ecuaciones, de la primera y segunda, vienen sin v las dos resultantes

$$16x-13z=25,\quad 12x-3z=39.$$

Por último, preparando á x en este par de ecuaciones, quedarán convertidas á

$$48x-39z=75,\quad 48x-12z=156;$$

y la resta dará la ecuacion determinada final del primer periodo del cálculo $27z=81$, de donde $z=3$.

No habiendo hallado por este método espresiones de las otras incógnitas, hay que sustituir el valor de z en una de las ecuaciones anteriores que ademas tenga otra incógnita, y por último los valores de ambas, generalmente, en otra de las ecuaciones anteriores, para obtener el de la tercera incógnita. En el problema actual basta introducir el valor de una sola, y se tienen para las otras los $x=4$, $v=7$.

165. Por *solucion general* se conocen tambien los valores de las incógnitas. Para ello es necesario deducir fórmulas de las soluciones generales de los problemas determinados con muchas incógnitas y ecuaciones, á manera que se obtuvo en los de una ecuacion la fórmula ((3)), para resolver el problema particular que se ofrezca sustituyendo en la fórmula los datos. Primeramente, dadas las ecuaciones generales con dos incógnitas,

$$ax+bv=d,\ a'x+b'v=d',$$

háganse iguales en ambas los coeficientes de v por el método del artículo (164), y réstese despues una de otra para obtener la expresion de x. Hallándose de un modo análogo la espresion de v por igualacion de los coeficientes de x, resultan las fórmulas

$$x=\frac{b'd-bd'}{ab'-a'b},\ v=\frac{ad'-a'd}{ab'-a'b}\ldots\ldots\ldots(6).$$

Sea cualquiera el problema dado con dos ecuaciones y dos incógnitas, se conocerán los valores de estas por sustitucion de coeficientes en las fórmulas ((6)); bien entendido que si á las propuestas faltáre algun término, se puede suponer que existe con el coeficiente cero: regla general para el uso de cualquiera fórmula.

En segundo lugar nos proponemos la solucion general de los problemas cifrados en tres ecuaciones con tres incógnitas, como

$$ax+bv+cz=d,\ a'x+b'v+c'z=d',\ a''x+b''v+c''z=d''.$$

Hay un modo elegante y general para deducir las espresiones generales de x, v, z, modo aplicable á cualquiera número de ecuaciones: pero siendo nuestro objeto solamente descubrir la ley de los resultados, y aun por ahora no mas que dar á conocer el método, hallaremos la solucion general como en el caso de dos incógnitas y dos ecuaciones, usando el método de sustraccion (164).

Para eliminar x en primer lugar, multiplíquese la primera ecuacion por $a'a''$, la segunda por aa'' y la tercera por aa'; de que resultará x eliminada, y el quedar dos ecuaciones con v y z. Preparando éstas de modo que una de las incógnitas tenga igual coeficiente, quedará eliminada, y al mismo tiempo resultará una sola ecuacion con la otra incógnita, cuyo valor se tiene por el despejo. Desde aqui se retrocede sustituyendo para los valores de las otras dos incógnitas; y por todo lo practicado se hallarán las fórmulas generales que siguen:

$$\left.\begin{aligned}
x&=\frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}\\
v&=\frac{ad'c''-ac'd''+ca'd''-da'c''+dc'a''-cd'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}\\
z&=\frac{ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}
\end{aligned}\right\}(7).$$

Obsérvese que en las fórmulas ((6)) hay denominador comun, y tambien en las ((7)): propiedad estensiva á cualquiera número de ecuaciones. Este denominador, en que solo entran los coeficientes de las incógnitas, está organizado con arreglo á una ley, que consiste en la alternativa de signos + y — y en que cada término es producto de tantos factores cuantas incógnitas hay, formado con el siguiente artificio. En el caso de dos incógnitas tómese $ab—ba$, póngase un acento á las segundas letras, y será $ab'—ba'$ denominador comun. En el caso de tres incógnitas tómese $ab—ba$, hagase que c ocupe todos los lugares empezando por la derecha en cada término de estos, guardando la ley de la alternativa de signos en los que resulten de tres letras; y finalmente pónganse un acento á las segundas letras y dos á las terceras de cada término. Cuando sean cuatro incógnitas, se observará tambien que el denominador comun se forma del modo siguiente arreglado á la misma ley.

Se toma el denominador comun ((7)) sin acentos en las letras; se hace que el coeficiente de la cuarta incógnita ocupe todos los lugares de cada término, guardando en los que resulten la alternativa de signos, y marcando las segundas letras con un acento, las terceras con dos, y las cuartas con tres, se tendrá el denominador comun de las cuatro incógnitas. Por inducion se infiere el modo de componer el denominador en el caso de cualquiera número de ecuaciones.

Atendiendo ahora al respectivo numerador de cada fórmula se verá, que tiene el mismo número de términos que el denominador, y se compone reemplazando en este por el coeficiente de la incógnita respectiva el término conocido, acentuándole como la letra á quien sustituye. Por inducion se infiere que esta ley es general tambien para cualquiera número de ecuaciones.

166. Habiéndose dado noticia de los modos que hay para eliminar incógnitas y hallar sus valores, la eleccion del mas breve segun las circunstancias se debe á la perspicacia del calculador, y á su destreza el suprimir trabajo superfluo en el curso del cálculo, simplificando las espresiones por despojo de factores comunes, si hay, ó de fracciones, y dejando indicadas ciertas operaciones cuando así convenga. Los problemas siguientes que corresponden á esta leccion, servirán de ensayo para los modos de cifrarlos en lenguage algébrico y de resolverlos.

1.° *Hallar dos números cuya suma sea* 8, *y el uno* 5 *veces mayor que el otro.* Se distinguen claramente dos ecuaciones, que, nombrando las incógnitas x y z, serán $x+z=8$, $x=5z$: y por cualquiera de los métodos pueden ser hallados facilmente los valores

$$x=\frac{20}{3}=6+\frac{2}{3}, \quad z=\frac{4}{3}=1+\frac{1}{3}.$$

2.° *Se han pagado* 199 *jornales de tres clases, tales que el duplo de los primeros menos el triplo de los segundos mas los terceros son* 63, *y el cuadruplo de los segundos mas el quintuplo de los terceros menos la mitad de los primeros suman* 317. *¿Cuántos hay de cada clase?* Sean x, v, z las incógnitas de la primera, segunda y tercera clase; hay tres oraciones que escribir, las cuales serán

::

$$x+v+z=199, \qquad 2x-3v+z=63,$$

$4v+5z-\frac{x}{2}=317$; y los valores de las incógnitas,

$$x=\frac{2576}{23}=112, \quad v=\frac{1426}{23}=62, \quad z=\frac{575}{23}=25.$$

3.° *En suposicion de mezclarse varias sustancias cuyas cantidades* m, m′, m″,.... *son sumables de cualquiera modo que se haga la mezcla; si el precio de la unidad de la primera sustancia es* p, *la unidad de la segunda vale* p′, *la unidad de la tercera vale* p″, *y asi sucesivamente, ¿cuál será el precio* z *que corresponde á la unidad de sustancia mezclada?* El precio de la primera sustancia es pm; el de la segunda $p'm'$; el de la tercera $p''m''$,.... y el precio total x será

$$x=pm+p'm'+p''m''+\ldots\ldots$$

Por otra parte, será tambien el precio z de la unidad de mezcla multiplicado por la suma de sustancias igual á el precio total, ó

$$x=(m+m'+m''+\ldots\ldots)z.$$

Eliminando x entre las dos ecuaciones, resulta

$$pm+p'm'+p''m''+\ldots\ldots=(m+m'+m''+\ldots\ldots)z,$$

de donde $$z=\frac{pm+p'm'+p''m''+\ldots\ldots}{m+m'+m''+\ldots\ldots}.$$

Por ejemplo, *hecha la mezcla de dos líquidos tomando del primero* 8 *arrobas á* 15 *reales arroba, y del segundo* 20 *arrobas á* 9 *reales, trátase de saber el precio de la arroba de mezcla.* Sustituyendo por las letras p, p', m, m', los números respectivos de la cuestion, será

$$z=\frac{15\times8+9\times20}{8+20}=\left(10+\frac{5}{7}\right)\text{ reales.}$$

Los problemas comprendidos en el 3.° general y en el 4.° y 5.° son los que llaman de *aligacion* los aritméticos; debiendo suponer siempre, y en cada caso verificarse, la circunstancia de que el volumen de la mezcla sea igual á la suma de volúmenes de las sustancias componentes; y lo mismo en cuanto á los pesos: prevencion que hacemos por ciertos fenómenos que la naturaleza presenta de otro modo.

4.° *Antes de hacerse la aligacion se quiere saber cuánta parte se ha de tomar de cada sustancia, dado el precio que ha de tener la unidad de mezcla y el que tiene cada sustancia.* Entonces son incógnitas las cantidades m, m', m'', ..., y es indeterminado el problema mientras no haya tantas ecuaciones como incógnitas. *Debiendo* por ejemplo, *aligarse dos sustancias una de* 15 *reales arroba y otra de* 9 *reales, con la precision de valer* 10 *reales la unidad de mezcla; ¿cuántas partes* m *de la primera y* m' *de la segunda se habrán de tomar?* En este caso hay dos incógnitas m y m' en la fórmula, y la cuestion es indeterminada no concurriendo otra condicion ademas. Sea por ejemplo esta, $m+m'=60$ arrobas. Sustituyendo $60-m'$ por m en la fórmula, y 10 por z, será

$$600=15(60-m')+9m';\text{ de donde } m'=\frac{300}{6}=50 \text{ arrobas y}$$

$m=60-m'=10$ arrobas.

5.° Como en muchas aligaciones hay mermas y gastos de elaboracion, se *propone el mismo problema* 3.° *con la circunstancia de haber en la masa total el déficit ó merma* d, *y en la elaboracion al gasto* q *que se debe añadir al precio total.* Los razonamientos serán del modo siguiente. El gasto total, hecha la mezcla, es

$$x=pm+p'm'+p''m''+\ldots\ldots+q$$

por una parte; y por otra, $x=(m+m'+m''+\ldots\ldots-d)z$. Eliminando, será

$$pm+p'm'+p''m''+\ldots.+q=(m+m'+m''+\ldots.-d)z,$$

de donde viene el precio de la unidad de mezcla

$$z=\frac{pm+p'm'+p''m''+\ldots..+q}{m+m'+m''+\ldots\ldots\ldots\ldots-d}.$$

167. Concluiremos esta leccion dando una breve noticia de lo que pasa cuando el problema da mas ecuaciones que incóg-

nitas. Como el esceso procede necesariamente de haber mas datos que los precisos (155), entre todas las ecuaciones se eligen tantas como incógnitas haya, y por eliminacion se indagan los valores de estas; valores que han de satisfacer á las escedentes condiciones, para que sea posible el problema.

Trátese, por ensayo, *de hallar dos números* x, z *cuya suma sea* s, *la diferencia* d, *y el producto* p. Escritas las tres ecuaciones,

$$x+z=s,\ x-z=d,\ xz=p;$$

las dos primeras, que solas hubieran constituido un problema determinado, resuelto ya (157. 5.°), dan

$$x=\frac{1}{2}(s+d)\ ,\ z=\frac{1}{2}(s-d):$$

pero habiendo aun otra ecuacion, es preciso sustituir estos valores en ella, de lo cual resulta una relacion entre las cantidades conocidas

$$p=\frac{s^2-d^2}{4}.$$

En que se espresa la condicion esencial que ha de concurrir en los datos, para que el problema no sea absurdo: y dice que dados s y d, no es ya p arbitraria, sino que ha de valer tanto como

$$\frac{s^2-d^2}{4}.$$

Si aun hubiese otra ecuacion mas, habrian de satisfacer á ella las incógnitas. Por ejemplo: si la cuestion comprende que *el cociente de las incógnitas sea* q; escrita la ecuacion $\frac{x}{z}=q$ y sustituyendo los valores de las incógnitas, se hallará que el dato q no es arbitrario, pues tiene la dependencia

$$q=\frac{s+d}{s-d}.$$

LECCION IV.

Ecuacion indeterminada de primer grado.

168. Al principio de la leccion precedente se manifestó la fórma de la ecuacion de primer grado con dos y con tres incógnitas, análoga á la que tendrá con cualquiera número de ellas. Tambien se indicó allí, que el valor de una incógnita despejada depende de la infinidad de valores que se pueden atribuir á las otras de la misma ecuacion. Así, la general con dos incógnitas

$$ax+bz=c,$$

que suponemos reducida hasta ser a y b números primeros entre sí, ofrece la cuestion de hallar todos los valores de las incógnitas que satisfacen á ella, limitándose algunas veces á que sean valores enteros, y otras á que positivos; circunstancias que reducen á menor número las soluciones.

169. Trátese de hallar los valores enteros de x y z en la ecuacion general $ax+bz=c$. Si uno de los coeficientes b ó a es la unidad, despejando la incógnita correspondiente seria

$$x=c-bz, \text{ ó } z=c-ax.$$

En el primer caso, si atribuyéramos á z todos los valores enteros imaginables, resultarian para x tambien enteros; quedando asi resuelto el problema. Lo mismo resultarian para z atribuyendo á x valores enteros en $z=c-ax$.

Cuando sean a y b mayores que la unidad, y primeros entre sí como queda dicho; despejando la incógnita de menor coeficiente, que suponemos x, resulta

$$x=\frac{c-bz}{a}.$$

Esta division no puede dar cociente cabal entero; mas, en su posicion de ser k y h los enteros de $\frac{c}{a}$ y $\frac{b}{a}$, como tambien c' y b' los coeficientes del residuo, tendremos

$$x=k-hz+\frac{c'-b'z}{a};$$

y haciendo $\frac{c'-b'z}{a}=z'$, será $z=\frac{c'-az'}{b'}$. Por nueva division, y espresando con las mismas letras acentuadas en debida forma los resultados análogos del cálculo, será

$$z=k'-h'z'+\frac{c''-a'z'}{b'};$$

$$\text{y } \frac{c''-a'z'}{b'}=z'' \text{ dará } z'=\frac{c''-b'z''}{a'}.$$

Por este orden van disminuyéndose los coeficientes sucesivos, que son como los residuos que se obtienen al estraer comun divisor de b y a (108); de suerte, que se ha de llegar al cabo á una ecuacion en que alguno de los coeficientes sea la unidad; y entonces quedará finalizado el periodo primero del cálculo, como en la eliminacion (161).

El segundo periodo consiste en una serie de sustituciones análoga á la del citado artículo. Supóngase $a'=1$ en la última espresion escrita; y atribuyendo á z'' en la ecuacion $z'=c''-b'z''$ todos los números enteros $n....2,1,0,-1,-2,....-n$, lo serán tambien los de z'; y sustituyendo los de z' y z'' en la ecuacion anterior, tambien serán los de z, y por último los de x.

Como en esta investigacion hay el único empeño de lograr valores enteros para las incógnitas, y llegar á una ecuacion final en que sea unidad alguno de los coeficientes, se pueden usar todos los recursos legítimos de la análisis; como es, el descomponer la fraccion residua en factores siendo alguno de ellos entero, ó el transformar la fraccion de un modo conveniente para el objeto.

Sirva de ensayo *el hallar los valores enteros de* x *y* z *que satisfagan á la ecuacion*

$$25x+72z=460.$$

Por ser menor el coeficiente de x, hay primeramente

$$x=\frac{460-72z}{25}.$$

Haciendo la division parcial posible, resulta

$$x=18-2z+\frac{10-22z}{25};$$

y despues, $\frac{10-22z}{25}=z'$ da $z=\frac{10-25z'}{22}=5\left(\frac{2-5z'}{22}\right)$;

á que siguen $\frac{2-5z'}{22}=z''$; $z'=\frac{2-22z''}{5}=-4z''+\frac{2-2z''}{5}$;

$$\frac{2-2z''}{5}=z'''; \quad z''=\frac{2-5z'''}{2}=1-2z'''-\frac{z'''}{2};$$

$$\frac{z'''}{2}=z^{\prime v}; \quad z'''=2z^{\prime v}.$$

Estamos en ocasion de principiar el segundo periodo del cálculo, y segun la condicion del problema se han de sustituir por $z^{\prime v}$ todos los números enteros positivos y negativos. Empezando las sustituciones desde cero, viene el sistema de valores $z^{\prime v}=0$, $z'''=0$, $z''=1$, $z'=-4$, $z=5$, $x=4$. Todos los demas sistemas de valores enteros que pertenecen á x y z se hallan del mismo modo, sustituyendo por $z^{\prime v}$ el correspondiente número entero, positivo ó negativo. Operacion prolija que ha motivado el descubrimiento de un medio mas breve para hallar todos los valores enteros de x y z, despues de haber adquirido los de un sistema: ved en qué consiste.

Sean p y q los números enteros que han resultado para

x y z de una sustitucion sola. Como ha quedado satisfecha con ellos la ecuacion $ax+bz=c$ en aquel caso particular será $ap+bq=c$: y restando esta ecuacion de la general viene

$$x=p-\frac{b}{a}(z-q).$$

Para ser x entero, tambien lo ha de ser $\frac{b}{a}(z-q)$; y por ser b y a primeros entre sí, necesariamente debe ser $z-q$ divisible por a (76), es decir que, indicando m el cociente, habrá de ser $z-q=am$. De modo que

$$z=q+am \text{ y } x=p-bm \quad \ldots\ldots(8)$$

son espresiones generales para hallar todos los valores enteros de x y z, conocien lo los p y q, sin mas que sustituir por m consecutivamente todos los números enteros positivos y negativos de la serie enunciada: conocimiento que nos dispensa de aquella larga operacion para cada sistema.

En el ejemplo aritmético propuesto antes conocemos el sistema de valores $p=4$, $q=5$; y las fórmulas ((8)), aplicadas á él, dan

$$x=4-72m;\ z=5+25m.$$

Sustituyendo por m los números naturales progresivamente se hallarán los correspondientes á las incógnitas. Los positivos 0, 1, 2, 3, 4,...... de m corresponden

á los de x; 4, -68, -140, -212, -284,.......,

á los de z; 5, 30, 55, 80, 105,.......

170. Limitándonos todavia á las soluciones enteras de la ecuacion general de primer grado con dos incógnitas, haremos una breve detencion aqui con objeto de completar mas la teoría. Cuando se quieran solamente positivas, téngase presente que las cantidades positivas valen tanto mas que cero cuanto mayor sea el número: y las negativas tanto menos cuanto ma-

yor sea el número: concepto que como está dicho se espresa en la cuestion actual del modo siguiente:

$$p-bm>0,\ q+am>0.$$

Despejando m, resultan $m<\frac{p}{b}$, y $m>-\frac{q}{a}$ y pueden ocurrir tres casos.

1.° Si los valores que admite m estan calificados por dos mayorías ó dos minorías, como por ejemplo $m>7$ y $m>2$, se podrán sustituir por m todos los enteros mayores que 7; entonces admiten x y z infinitos valores que serán crecentes en ambas incógnitas; y a y b son de signos contrarios precisamente; porque se deben suponer positivos p y q.

2.° Si una desigualdad limita por una parte y la segunda por otra los valores de m, por ejemplo, $m<8$ y $m>1$, solo admitirá m los intermedios; y entonces x y z tendrán número de soluciones limitado, procediendo esto de afectar un mismo signo á los coeficientes a y b.

3.° Si resultase un imposible, como por ejemplo $m>10$ y $m<3$, será prueba de cuestion absurda.

Con referencia al ejemplo numérico resuelto anteriormente, las condiciones para valores positivos serán

$$4-72m>0 \text{ y } 5+25m>0, \text{ de donde } m<\frac{1}{18} \text{ y } m>-\frac{1}{5}.$$

Como no hay mas entero comprendido entre los dos estremos que $m=0$, solo éste da los valores enteros positivos $x=4$, $z=5$ de un mismo sistema.

171. Apliquemos la teoría de los artículos precedentes á algun problema, para que sea mas luminoso y se vea su enlace con la de los problemas determinados de dos incógnitas. Siempre que el problema diere tantas ecuaciones menos una, cuantas incógnitas traiga, por la eliminacion se llegará á una de la forma $ax+bz=c$: y resolviendo ésta por las reglas dadas en la teoría, se hallarán los valores de las otras incógnitas sustituyendo en las ecuaciones por x y z consecutivamente, cada vez un sistema de los que dieren $p-bm$ y $q+am$; como en el siguiente problema.

Si retiran tres columnas del combate; la primera perdió

50 *hombres, la segunda 225, y la tercera 210; con esta pérdida quedó á la primera columna doble número que á la segunda, y quintuplo que á la tercera:* y *se trata de saber cuánta gente llevó cada una al combate.* Nombrándose x, v, z los números de tropa que llevaron las respectivas columnas al combate, se escribirán las ecuaciones

$$x-50=2(v-225),\quad x-50=5(z-210).$$

De las dos resulta $\quad 2(v-225)=5(z-210)$,

de donde, $\quad v=\dfrac{5z-600}{2}=2z-300+\dfrac{z}{2}$;

y haciendo $\quad \dfrac{z}{2}=z'$, se llega á $z=2z'$.

Para evitar soluciones negativas debe suponerse, que la gente z de la tercera columna fue á lo ménos tanta como perdió, y para ello es necesario que sea $z'=105$: de cuya sustitucion procede el sistema de valores $z=210$, $v=225$. Estos son los de p y q en la fórmula ((8)), la cual es ahora

$$v=225+5m,\quad z=210+2m.$$

Sustituyendo por z su espresion hallada, en la segunda de las ecuaciones propuestas, resulta para los valores de x la fórmula

$$x=50+10m.$$

Resta conocer los diversos sistemas de números enteros correspondientes á x, v, z, sustituyendo por m los que permitan las condiciones

$$225+5m>0,\quad 210+2m>0,\quad 50+10m>0;$$

segun las cuales todos los valores de m son mayores que -5; estremo que resulta de la tercera inecuacion. Desde cero arriba solamente, vienen por el orden

$$m=0\ ,\quad x=50\ ,\quad v=225\ ,\quad z=210\ ;$$
$$m=1\ ,\quad x=60\ ,\quad v=230\ ,\quad z=212\ ;$$
$$m=2\ ,\quad x=70\ ,\quad v=235\ ,\quad z=214.$$

Aunque parece que el supuesto $m=0$ no corresponde á la condicion de ser el número restante de la primera columna duplo de la segunda y quíntuplo de la tercera, pues resulta cero para las tres; facil es discurrir que son equivalentes

$$5\times0=0\ ,\quad 2\times0=0.$$

No proponemos mas ejemplos de la ecuacion indeterminada del primer grado con dos incógnitas; cuyas principales utilidades pertenecen á la geometría, como se verá cuando apliquemos á esta ciencia la análisis general.

172. En la ecuacion indeterminada con tres incógnitas, como

$$ax+bv+cz=d,$$

se tiene la solucion procediendo segun vamos á decir.

Hágase $d-bv=u$, y sustituyendo en la ecuacion propuesta, se trasforma en

$$ax+cz=u.$$

Resuélvase ésta como si u fuera un número cualquiera; y se hallarán los valores analogos á los que en la ecuacion de dos incógnitas hemos llamado p y q, bien entendido que éstas contendrán á u. Las fórmulas (8) serán aqui

$$x=p-cm,\quad z=q+am;$$

y reemplazando en éstas por u su igual $d-bv$, dependerán los valores de x y z de los que arbitrariamente se quieran asignar á v y m.

En las aplicaciones del álgebra á la geometría se verán los colmados frutos que las ecuaciones indeterminadas de esta clase producen.

LECCION V.

Ecuacion determinada de segundo grado.

173. De multiplicar entre sí dos ecuaciones generales de primer grado, como $bx+c=0$ y $b'x+c'=0$, resulta una de segundo,

$$(bb')x^2+(b'c+bc')x+cc'=0.$$

Si espresámos con A todo el coeficiente de x^2, con B el de x, y con C el término conocido, esta ecuacion recibirá la modificacion de forma

$$Ax^2+Bx+C=0, \ldots\ldots(\gamma)$$

cuyo primer miembro es el producto de los dos factores del primer grado

$$(bx+c), \ (b'x+c').$$

Si estos fueren iguales, resultará para el primer miembro de la ecuacion una segunda potencia cabal.

Aun podemos hacer otra simplificacion de forma en la ecuacion ((γ)), librando de coeficiente al primer término; para lo cual se dividen todos los términos por el coeficiente que se quiere desaparezca. Practicando esto, la ecuacion ((γ)) se convierte á

$$x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}=0,$$

y finalmente, espresando con k el coeficiente $\frac{B}{A}$, y con q el término $\frac{C}{A}$, queda reformada en

$$x^2+kx+q=0; \ldots\ldots(\delta)$$

cuyo primer miembro es el mismo que, si habiendo librado de coeficiente á x en las ecuaciones del primer grado generatrices, hubiésemos ejecutado la multiplicacion de los dos factores $\left(x+\frac{c}{b}\right) \cdot \left(x+\frac{c'}{b'}\right)$. Y claro está que á ser iguales dichos factores, el producto resultára segunda potencia de uno de ellos, como se ha dicho tambien respecto de la ecuacion ((γ)).

Todo producto que tiene por factor el cero, se anula (66. 2.°), y solo asi puede anularse; lo cual sucede á las ecuaciones ((γ)) y ((δ)) por cualquiera de sus dos factores binomios respectivos; y estos no pueden ser nulos de otro modo que sustituyendo por x el valor que corresponda á esta incógnita con el signo respectivo, segun la ecuacion de primer grado generatriz, esto es, $-\frac{c}{b}$ por x en el factor $bx+c$ ó en $x+\frac{c}{b}$; y $-\frac{c'}{b'}$ por x en $b'x+c'$ ó en $x+\frac{c'}{b'}$. Llámanse *raices de la ecuacion de segundo grado los valores de la incógnita que sustituidos por ella satisfacen á la ecuacion*; nombre igualmente estensivo al primer grado y á todos los superiores: y puesto que segun el raciocinio que acabamos de hacer, la ecuacion de segundo grado bajo cualquiera de sus dos formas ((γ)), ((δ)), solamente puede quedar satisfecha sustituyendo por x cualquiera de sus dos valores $-\frac{c}{b}$, $-\frac{c'}{b'}$; se sigue *que son precisamente raices de la ecuacion de segundo grado aquellas cantidades que sustituidas por* x, *la reducen á cero si todos sus términos están en un miembro, ó cumplen con la igualdad si están distribuidos en ambos miembros los términos.*

La ecuacion ((γ)) es *completa* de segundo grado; porque tiene los tres términos afectados de las respectivas potencias de la incógnita, que son x^2, x^1 y x^0; y toda ecuacion determinada de este grado que se pueda imaginar está comprendida en aquella, espresando con A la suma de coeficientes de los términos afectados de x^2, con B la suma de coeficientes de x, y con C la de términos conocidos; ó suponiendo cero el coeficiente del término segundo ó tercero en caso de que falte á la propuesta. La misma generalidad tiene la ecuacion ((δ)) en cuanto á las de dicho grado, cuyo primer término tenga la unidad por coeficiente; y por ello podemos considerar como formulares á una y otra.

174. En esta inteligencia, hagamos análisis de la ecuacion formular de segundo grado, que será en su primitivo estado,

$$Ax^2+Bx+C=0\ , \quad .....(10)$$

y reformada, $\quad x^2+kx+q=0\ , \quad .....(11)$

despues de hacer $\frac{B}{A}=k$, $\frac{C}{A}=q$.

1.ª Si es a un número que sustituido por x satisface á la ecuacion ((11)), resultará

$$a^2+ka+q=0\text{ ; de donde , }q=-a^2-ka.$$

De modo que la propuesta es como $x^2-a^2+kx-ka$; y por ser $x^2-a^2=(x+a).(x-a)$ segun el artículo (68), será bajo otra forma dicha ecuacion general,

$$(x+a)(x-a)+k(x-a)=0,$$

ó bien $$(x-a)(x+a+k)=0.$$

Esta quedará satisfecha, y de consiguiente lo mismo la propuesta, ya cuando segun el supuesto sea

$$x-a=0,\text{ ya cuando }x+a+k=0,$$

á que se reduce entonces: por lo cual segun la definicion de las raices (173), *toda ecuacion* ((11)) *de segundo grado que tenga una raiz* a, *tiene tambien otra* —(a+k).

2.ª La suma de las dos raices viene á ser $a-a-k=-k$, y el producto es $a(-a-k)=-a^2-ak=q$. Luego, el *coeficiente* k *del segundo término en la ecuacion* ((11)) *es con signo contrario la suma de raices; y el tercer término* q *es el producto de ellas.*

3.ª Si tuviere las dos raices iguales la ecuacion, cada una será $\frac{1}{2}$k; el tercer término, $q=\frac{1}{4}k^2$; y la ecuacion,

$$\left(x+\frac{1}{2}k\right)^2=x^2+kx+\frac{1}{4}k^2=0.$$

En donde se ve, que es *un cuadrado cabal toda espresion de segundo grado, bajo la forma* (11), *cuando carece el primer término de coeficiente, y el último sea cuadrado del semicoeficiente del segundo.* Asi, para convertir en exacta potencia segunda el primer miembro de una ecuacion $x^2+kx+q=0$ de raices desiguales, *se pasa* q *al segundo miembro, y se añade á los dos* $\frac{1}{4}k^2$, que es el cuadrado del semicoeficiente del segundo término. De este modo, sin que las raices dejen de ser las mismas, la ecuacion se transforma en

$$x^2+kx+\frac{1}{4}k^2=\frac{1}{4}k^2-q;$$

y se resuelve estrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros, que será

$$x+\frac{1}{2}k=\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}k^2-q\right)};$$

de la cual viene la forma general de las dos raices que hay en la ecuacion del segundo grado,

$$x=-\frac{1}{2}k\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}k^2-q\right)}\ \ldots(12).$$

La observacion que acabamos de hacer nos enseña el modo de resolver cualquiera ecuacion determinada de segundo grado, sea *reduciendo á cuadrado exacto su primer miembro y estrayendo la raiz cuadrada, sea sustituyendo en la fórmula* ((12)) *por* k *y* q *los coeficientes que la propuesta tenga despues de librar de él al primer término.* Pronto haremos aplicaciones de esta doctrina, y para cuando llegue el caso debemos tener entendido, que los dos valores de la incógnita espresados en la solucion se distinguen tomando para el uno el radical con el signo positivo, y con el negativo para el otro.

4.ª La cantidad que se halla bajo el signo radical de la fórmula ((12)) manifiesta las tres clases de soluciones que admite la ecuacion del segundo grado.

Si $\frac{1}{4}k^2-q$ *es cantidad negativa*, lo *que exige que sea* q *positiva en la ecuacion y mayor que* $\frac{1}{4}k^2$, *son imaginarias las dos raices*. Sin embargo satisfacen á ella, como se puede ver sustituyéndolas por x; é indican problema absurdo, porque exige hallar dos cantidades que no puede haber (152).

Si resultare $\frac{1}{4}k^2-q=0$, *en cuyo caso es* q *necesa-*

riamente positiva en la ecuacion, ésta será cuadrado cabal de $x+\frac{1}{2}$ k, *es decir, que tendrá sus dos raices reales é iguales.*

Si $\frac{1}{4}$ k^2—q *sale positiva, entonces* q *habrá de ser negativa, ó sino,* q$<\frac{1}{4}$ k^2, *y la propuesta tiene dos raices reales desiguales*

$$-\frac{1}{2}k+\sqrt{\left(\frac{1}{4}k^2-q\right)},\quad -\frac{1}{2}k-\sqrt{\left(\frac{1}{4}k^2-q\right)},$$

positivas ó negativas ambas, ó una positiva y otra negativa, segun los valores y signos de k *y* q. *Las raices reales tendrán un signo mismo, si és.*

$$\frac{1}{2}k>\sqrt{\left(\frac{1}{4}k^2-q\right)},\ \text{esto es,}\ \frac{1}{4}k^2>\frac{1}{4}k^2-q,\ \text{ó}\ q>0,$$

que quiere decir q *positiva en la propuesta, con la circunstancia dicha de ser* q$<\frac{1}{4}$ k^2. *Por consiguiente, siendo* q *negativa tendrán signos diferentes las dos raices reales.* En cuanto al signo negativo de las raices, y los demas símbolos de que se habló en las de primer grado, téngase presente lo dicho en aquella ocasion sobre ellos.

Para practicar estas observaciones en una ecuacion, tenga ó no todos los términos y sean cualesquiera los coeficientes, considérese que la unidad es coeficiente de todo término que no tenga otro, y que si falta algun término se puede suponer con el coeficiente cero. Como interesa conocer á primera vista á cual de los tres casos pertenece una ecuacion, aunque tenga coeficiente su primer término, restitúyanse *A*, *B*, *C*, por sus equivalentes en los resultados de la análisis que se acaba de hacer, y hallaremos que corresponden las condiciones apropiadas á las tres clases de raices,

$$\left.\begin{array}{ll}\text{á reales desiguales.........} & B^2-4AC>0\\ \text{á reales iguales.........} & B^2-4AC=0\\ \text{á imaginarias...........} & B^2-4AC<0\end{array}\right\}\ldots\ldots(13).$$

175. Para ensayo en plantear y resolver las cuestiones de 2.° grado, se proponen las siguientes:

1.ª *Hallar un número tal, que restando de su potencia segunda otro número triple de aquel, resulte el residuo* 10. La ecuacion es

$$x^2-3x=10.$$

Si no se quiere usar de la fórmula ((12)), prepárese la ecuacion del problema, haciendo cuadrado exacto el primer miembro, y el cálculo seguirá por el orden que observamos aquí:

$$x^2-3x+\frac{9}{4}=10+\frac{9}{4}\ ;\quad x-\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\left(10+\frac{9}{4}\right)};$$

$$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}}\ ;\quad x=5\ ;\quad x=-2.$$

Ambos valores de x convienen á la cuestion, sin embargo de que el segundo, por ser negativo, indica que se tome algun dato en sentido contrario, como sucederá enunciándola del modo siguiente. *Hallar un número tal, que sumando con su cuadrado otro número triple de aquel, salga la suma igual á* 10. Ahora cambian de signos las raices, de modo que resulta negativa la raiz 5 que antes era positiva. Lo que manifiesta que las ecuaciones de segundo grado envuelven dos problemas diferentes.

2.ª *¿Cuál es el número cuyo cuadrado menos el quíntuplo mas* 13 *forman la suma* 9? Por igual método seguiremos en la serie de las operaciones correspondientes hasta la solucion:

$$x^2-5x+13=9\ ;\quad x^2-5x+\frac{25}{4}=\frac{25}{4}-4;$$

$$x=\frac{5}{2}\pm\frac{3}{2}\quad;\quad x=4\quad;\quad x=1.$$

3.ª *Se pide un número cuyo cuadrado mas la cantidad* $\frac{4}{100}$ *formen una suma, igual á* $\frac{2}{5}$ *del mismo número.* De la ecuacion

$$x^2+\frac{4}{100}=\frac{2}{5}x,$$

viene la preparada $x^2-\frac{2}{5}x+\frac{1}{25}=\frac{1}{25}-\frac{4}{100},$

y sus dos raices $x=\frac{1}{5}+0\quad,\quad x=\frac{1}{5}-0.$

Las dos raices son iguales, como se debió advertir desde que se cifró el problema en ecuacion, que por ser cuadrado exacto se pudo haber resuelto sin prepararla.

4.ª *¿Cuál es el número cuyo cuadrado mas 5 suman el triplo del mismo número?* Haciendo el cálculo

$$x^2+5=3x\quad,\quad x^2-3x+\frac{9}{4}=\frac{9}{4}-5,$$

$$x=\frac{3}{2}+\sqrt{-\frac{11}{4}}\quad,\quad x=\frac{3}{2}-\sqrt{-\frac{11}{4}},$$

resultan imaginarias las raices, y por ello es absurdo el problema.

5.ª *Dividir 7 en dos partes tales que, restando del producto de ellas la mitad de la primera, venga de residuo la segunda aumentada con 4.* Llamándose x el primer número, el segundo será $7-x$, y la ecuacion,

$$x(7-x)-\frac{1}{2}x=7-x+4;$$

de donde, $x^2-\frac{15}{2}x+\frac{225}{16}=\frac{225}{16}-11$, $x=\frac{15}{4}\pm\frac{7}{4}$.

Para el primer número salen $x=\frac{11}{2}$, $x=2$;

y para el segundo $7-x=\frac{3}{2}$, $7-x=5$.

6.ª *Conocer el número que cumpla con la condicion de que si de su segunda potencia multiplicada por 2, se resta 7 veces dicho número, quede el resto 5.* El cálculo es

$$2x^2-7x=5 \quad , \quad x^2-\frac{7}{2}x+\frac{49}{16}=\frac{5}{2}+\frac{49}{16},$$

$$x=\frac{7}{4}\pm\sqrt{\frac{89}{16}}=\frac{7}{4}\pm\frac{9,\ldots}{4}.$$

Bastan estos ejemplos para dar una idea de las aplicaciones de la teoría; cual ha sido el objeto, considerando que en la enseñanza enriquecerá cada profesor esta parte con variados y oportunos casos prácticos.

Concluiremos aclarando una obscuridad que parece haber, en cuanto á la diversidad de valores representados por la letra con que está significada la incógnita. En el principio del tratado se hizo el convenio de que cada letra en un cálculo no tuviese mas que un significado, y parece una contradicion el tener x dos valores en estas ecuaciones. A fin de tomar dicho convenio en su verdadero sentido, se debe meditar que x representa la cantidad que en general satisface á las condiciones del problema; y esta es la significacion que unicamente corresponde á dicha incógnita en las ecuaciones de todos los grados.

LECCION VI.

Eliminacion en las ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas.

176. El producto de dos ecuaciones generales de primer grado es una de segundo; y espresando por una letra las respectivas sumas de coeficientes, la ecuacion general del segundo grado con dos incógnitas x y z será

$$az^2+bzx+cx^2+dz+ex+f=0 \quad ....(14).$$

Despejando z como si fuera única desconocida, y reduciendo á solo el numerador del segundo miembro la irracionalidad, se halla

$$z=\frac{1}{2a}\left\{-bx-d\pm\sqrt{[(b^2-4ac)x^2+(2bd-4ae)x+d^2-4af]}\right\}....(15).$$

Si el problema es determinado, habrá otra ecuacion, que suponemos semejante con las mismas letras, pero acentuadas las que representan cantidades conocidas, como

$$a'z^2+b'zx+c'x^2+d'z+e'x+f'=0;$$

que tambien dará

$$z=\frac{1}{2a'}\left\{-b'x-d'\pm\sqrt{[(b'^2-4a'c')x^2+(2b'd'-4a'e')x+d'^2-4a'f']}\right\}.$$

Formando igualdad con las dos espresiones de z, quedará eliminada esta incógnita, y el resultado será una ecuacion determinada pero afecta de radicales, que en general seria difícil resolver, segun el alcance de los conocimientos actuales.

Cuando se trate de la segunda parte de esta ciencia, que la titulamos *álgebra sublime*, se darán médios de eliminar sin este defecto. Aquí solamente indicaremos los casos en que por el método de sustitucion (162) se pueden eliminar incógnitas en el segundo grado, sin que afecten radicales á los términos.

I.° Dadas las ecuaciones

$$az^2+bxz+cx^2+dz+ex+f=0,$$

$$d'z+e'x+f'=0,$$

una general de segundo grado y otra del primero; si en la segunda se despeja una de las incógnitas, como

$$z=-\frac{e'x+f'}{d'},$$

y se sustituye por z su espresion en la primera, ésta queda reducida á una de segundo grado determinada con la incógnita x. Es inútil advertir que despues de resolver la determinada, se ha de sustituir el valor que diere para x en la espresion de z.

Si la primera es cualquiera de segundo grado con dos incógnitas, y la segunda carece de z^2 ó x^2, como

$$b'xz+c'x^2+d'z+e'x+f'=0,$$

despejando z en esta última, resultará

$$z=-\left(\frac{c'x^2+e'x+f'}{b'x+d'}\right).$$

Sustitúyanse por z y z^2 sus espresiones en la primera, y resultará determinada esta; mas el grado se eleva sobre el segundo, y no corresponde á los elementos la solucion. Lo mismo sucederá aunque la segunda carezca de x^2 y z^2, si *queda* zx. Ademas, si x es irracional, viene para z una espresion complicada de radicales, que no sabemos resolver siempre.

II.° Cuando ambas ecuaciones carecen de xz, de x y de z, como

$$az^2+cx^2+f=0, \quad a'z^2+c'x^2+f'=0;$$

despejando z^2 en la segunda, sale

$$z^2=-\left(\frac{c'x^2+f'}{a'}\right);$$

y sustituyendo en la primera queda convertida esta en determinada de segundo grado. Lo mismo sucede á la segunda con la sustitucion de x^2; y por consiguiente una y otra serán resolubles por la estraccion ordinaria de la raiz cuadrada.

III.° Si en las ecuaciones faltan los términos de xz, y ademas los de z ó los de x, como en

$$az^2+cx^2+ex+f=0,\quad a'z^2+c'x^2+e'x+f'=0;$$

despejando z^2 en la segunda, resulta

$$z^2=-\left(\frac{c'x^2+e'x+f'}{a'}\right).$$

Sustituyendo la espresion de z^2 en la primera, se convierte en determinada de segundo grado. Si ésta da para x valores racionales, se sustituirán en la espresion de z^2 y se hallará z por la estraccion ordinaria. Pero si x no es racional, incurre z^2 en el defecto de radical complicado con otros radicales, que no sabemos aun resolver en general.

177. Para ensayo de estas observaciones proponemos los siguientes ejemplos.

1.° *Se piden dos números* x, z *cuyo producto sea* 4 *y cuya diferencia* $\sqrt{2}$. Las ecuaciones

$$xz=4,\quad x-z=\sqrt{2},$$

manifiestan que el problema es del caso primero, y fácil de resolver por su simplicidad. De la segunda viene $z=x-\sqrt{2}$; y sustituyendo en la primera, resulta $x^2-x\sqrt{2}=4$ cuyas raices son $x=\frac{\sqrt{2}\pm3\sqrt{2}}{2}$; esto es $x=2\sqrt{2}$, $x=-\sqrt{2}$.

Sustituyendo en la espresion de z los dos valores de x se tienen $z=\sqrt{2}$, $z=-2\sqrt{2}$.

2.° *Hallar las raices ó valores de* x *y* z *en el problema de las ecuaciones que siguen,*

$$2z^2+5x^2=143,\quad \frac{1}{7}z^2+4x^2-x=40.$$

Desde luego se ve que pertenece al caso tercero. Preparada la segunda para el despejo de z^2, es

$$z^2+28x^2-7x=280;$$

de donde, $$z^2=280+7x-28x^2.$$

Sustituyendo en la primera, viene

$$x^2-\frac{14}{51}x=\frac{417}{51};$$

que completada y resuelta segun la fórmula ((12)), dará

$$x=\frac{7}{51}\pm\frac{1}{51}\sqrt{21316}=\frac{7\pm146}{51}.$$

La raiz positiva es $x=3$; y sustituyendo en la espresion de z^2, viene $$z=\pm\sqrt{49}=\pm7.$$

LECCION VII.

Ecuacion sola de segundo grado con dos incógnitas.

178. Cuando el problema del segundo grado está escrito en una sola ecuacion con dos incógnitas, será indeterminado, é induce á descubrir la dependencia que hay entre los valores de una incógnita y sus correspondientes de la otra, como en el primer grado (Lecc. iv.), aunque aquí pueden ser enteros ó fraccionarios, positivos ó negativos, racionales ó irracionales.

Por ser agena de los elementos la cuestion de todos modos, nos limitaremos á sola una breve teoría sobre las raices racionales de la ecuacion de segundo grado con dos incógnitas ((14)), de la cual sale para z la espresion ((15))

$$z=\frac{1}{2a}\left\{-bx-d\pm\sqrt{[(b^2-4ac)x^2+(2bd-4ae)x+d^2-4af]}\right\}.$$

Con el objeto de reducir esta larga ecuacion á otra mas abreviada, hagamos los convenios

$$b^2-4ac=m \quad , \quad 2bd-4ae=n \quad , \quad d^2-4af=p,$$

y se convertirá en

$$2az+bx+d=\pm\sqrt{(mx^2+nx+p)}.$$

Si hay valores de x que hagan cuadrado exacto á lo contenido bajo el radical, quedará reducida la dificultad á las soluciones del primer grado (Lecc. iv.).

Sea t la raiz cuadrada de mx^2+nx+p: y de tal suposicion provienen las ecuaciones

$$2az+bx+d=\pm t \quad , \quad mx^2+nx+p=t^2.$$

Resuélvase la segunda, tratando á x como única incógnita (174), y hallaremos

$$x=-\frac{n}{2m}\pm\frac{\sqrt{(4mt^2+n^2-4pm)}}{2m},$$

ó en otra forma, $2mx+n=\pm\sqrt{(4mt^2+n^2-4pm)}$.

Haciendo $4m=A$, $n^2-4pm=B$, $2mx+n=u$, serán

$$u=\pm\sqrt{(At^2+B)}\ ;\quad x=\frac{u-n}{2m}\ ;\quad z=\frac{t-d-bx}{2a}\ \ldots.(16)$$

Queda pues reducida la cuestion á determinar los valores de t que hagan cuadrado exacto á At^2+B, porque de él depende u, de éste x, y por último z de x y t.

179. Las dificultades que se presentan en hacer la análisis de todos los casos que pueden ocurrir sobre la racionalidad de x y z, nos obliga á ceñirnos solamente á tres en que se verifica.

1.° Supóngase A cuadrado exacto y h su raiz, como tambien g la segunda parte de la raiz $\sqrt{(At^2+B)}$, siendo ht la primera (142); y la espresion de u será

$$u=ht+g=\sqrt{(h^2t^2+B)}:$$

que por la elevacion á segunda potencia, y por la reducion, conduce á

$$2ght+g^2=B, \text{ de donde, } t=\frac{B-g^2}{2gh}.$$

Es visible que siendo g racional, igualmente lo serán t y u, y por consiguiente x y z.

2.° Cuando B es racional y cuadrado de la raiz h; si llamamos gt la segunda parte de la raiz, habrá las ecuaciones $B=h^2$, $u=\sqrt{(At^2+B)}=h+gt$. Por la elevacion de la última á segunda potencia, y reduciendo, se viene á

$$At=g^2t+2gh, \text{ de donde, } t=\frac{2gh}{A-g^2}.$$

Como de g depende el ser t y u racionales, sucede lo mismo á x y z.

3.° Si At^2+B se compone de dos factores racionales, $(ht+j)$ y $(h't+j')$; sea $\sqrt{(At^2+B)}=g(ht+j)$, significando con g una indeterminada por quien se haga efectiva esta ecuacion. De los supuestos viene la

$$u=g(ht+j)=\sqrt{[(ht+j)(h't+j')]};$$

que elevando al cuadrado, engendra la reducida

$$g^2(ht+j)=h't+j', \text{ de donde, } t=\frac{j'-jg^2}{hg^2-h'}.$$

Sea cualquiera la arbitraria g, hará racionales t, u, x, z.

180. Hasta ahora solo hay un valor racional de t, debiendo admitir precisamente otros muchos que por su indeterminacion den los correspondientes valores á las incógnitas. Con el objeto de inferir unos de otros, vamos en busca de fórmulas propias, como en el primer grado.

Sea q un valor de t hallado segun la análisis precedente, y k el que dió á u. Sustitúyanse en la ecuacion

$$u^2=At^2+B, \text{ para deducir } k^2=Aq^2+B:$$

y restando una de otra, se tendrá

$$u^2=A(t^2-q^2)+k^2; \text{ y de aqui } u=\sqrt{[A(t^2-q^2)+k^2]}.$$

Como u es racional, supóngase

$$\sqrt{[A(t^2-q^2)+k^2]}=g(t-q)+k;$$

sustitúyase el cuadrado de esta ecuacion en u^2; y simplificando, se reduce á

$$g^2(t-q)+2kg=A(t+q);$$

de donde, $$t=\frac{2kg-Aq-qg^2}{A-g^2}\ldots(17).$$

Sustituyendo la espresion de t en las de u, x, z, resultarian para éstas las fórmulas que en la ecuacion del segundo grado hacen el mismo oficio que las ((8)) en la del primero, aunque basta la de t para el fin que se desea.

181. Por ensayo se propone, *hallar los valores racionales de* x *y* z *en la ecuacion*

$$z^2+6xz+5x^2-9z+2x-30=0.$$

Ella nos presenta los valores particulares de las letras de la teoria

$$m=16,\ n=-116,\ p=201,\ A=64,\ B=592:$$

y despues de hacer las sustituciones en la fórmula general

$$u=\sqrt{(At^2+B)},$$

esta viene á ser $\quad u=\sqrt{(64t^2+592)}$.

El valor $A=8^2$ indica que nuestro ejemplo pertenece al caso primero de la análisis precedente; y asi, por las fórmulas halladas entonces resultan

$$z=\frac{t+9-6x}{2},\ x=\frac{u+116}{32},\ u=8t+g,\ t=\frac{592-g^2}{16g}.$$

Dando á g todos los valores racionales consecutivamente, se hallarán los de u, y por último los correspondientes á las incógnitas x, z.

Se omiten las aplicaciones de la fórmula ((17)), porque lo dicho basta para formar una idea de las soluciones racionales. En las aplicaciones del álgebra á la geometría hacen gran papel las ecuaciones indeterminadas de todos los grados, con dos y con tres incógnitas.

CAPITULO IX.

Razones, proporciones, progresiones y logaritmos.

LECCION I.ª

Razon, proporcion y progresion por diferencia.

182. Cuando se comparan dos cantidades a y b con el objeto de hallar la diferencia k, se escriben el restando y el restador como se sabe (61); y la espresion

$$a-b=k \text{ ó } b-a=-k \quad \ldots\ldots(18)$$

se llama *razon de diferencia*, y tambien impropiamente *razon aritmética*. En la primera de las espresiones ((18)) es a el *antecedente*, b el *consecuente* y k la diferencia ó *razon*: en la segunda es b antecedente, a consecuente y $-k$ la razon. Segun el antecedente sea mayor ó menor que el consecuente, será la diferencia positiva ó negativa, como por ejemplo en

$$8-3=5 \text{ y } 3-8=-5.$$

El problema de hallar la razon de diferencia entre dos cantidades viene á ser una resta. Dados por ejemplo 30 y 20 para hallar la razon positiva por diferencia, se tiene por la resta segun la fórmula (18), el resultado,

$$30-20=10.$$

183. Si hay dos razones con una misma diferencia, como

$$a-b=k \text{ y } c-d=k,$$

será.......................... $a-b=c-d$,
que tambien se escribe segun la forma.................. $a\,.\,b : c\,.\,d$. ..... (19).

Una espresion bajo cualquiera de las dos formas se llama *equidiferencia* ó *proporcion por diferencia*, y tambien *proporcion aritmética*; se pronuncia diciendo a es á b como c á d por diferencia; la primera y última cantidades son *estremos* y las otras dos *medios* de la equidiferencia. Ejemplos de ellos son

$$7-4=3,\ 12-9=3,$$

de consiguiente $$7-4=12-9;$$

ó en otra forma $$7\,.\,4:12\,.\,9.$$

Cuando sean los medios iguales; se abrevia la espresion ((19)) escribiéndola bajo la forma

$$\div a\,.\,b\,.\,d\,. \quad \text{.........}(20),$$

y se llama *proporcion continua*, en que b es el medio único, ó la *media proporcional por diferencia* entre los números a y d; como en el caso

$$15-9=6\quad ,\quad 9-3=6,$$

á que corresponden

$$15-9=9-3\quad ,\quad 15\,.\,9:9\,.\,3\quad ,\quad \div 15\,.\,9\,.\,3.$$

181. De la proporcion $a-b=c-d$, ó $a\,.\,b:c\,.\,d$, transponiendo los términos segun convenga (156), resultan:

1.° $a-c=b-d$, ó $a\,.\,c:b\,.\,d$. *Existe pues la equidiferencia aunque se reemplacen los medios uno á otro*: como por ejemplo en el caso particular $7\,.\,4:12\,.\,9$ y $7\,.\,12:4\,.\,9$.

2.° $d-b=c-a$, ó $d\,.\,b:c\,.\,a$. *Tampoco se altera la equidiferencia reemplazándose los estremos uno á otro*: como sucede en

$$7\,.\,4:12\,.\,9 \quad \text{y} \quad 9\,.\,4:12\,.\,7.$$

3.° $b-a=d-c$, ó $b\,.\,a:d\,.\,c$. *No se altera la equidiferencia cambiando los estremos en medios y estos en estremos*; como en

$$7\,.\,4:12\,.\,9 \quad \text{y} \quad 4\,.\,7:9\,.\,12.$$

4.° $a+d=b+c$. *La suma de estremos es igual á la suma de medios en la equidiferencia*; como es facil notar que se verifica en todas las variaciones de $7\,.\,4:12\,.\,9$; pues constantemente resulta en ellas

$$7+9=4+12=16.$$

5.° Si es $b=c$, la ecuacion procedente de las sumas en la proporcion continua $a \,.\, b : b \,.\, d$, será

$$a+d=2b;\ \text{de donde,}\ b=\frac{a+d}{2}\ \ldots\ldots(21).$$

Luego, *un medio proporcional aritmético entre dos números dados* a *y* d *es la semisuma de estos;* como por ejemplo entre 15 y 3, cuyo medio es $9=\frac{15+3}{2}$; y de consiguiente la proporcion será

$$\div 15 \,.\, 9 \,.\, 3.$$

El problema de hallar un término medio aritmético entre dos números, es de uso muy frecuente; y véase un ejemplo de esta clase.

Hecha la medicion de una longitud en dos ocasiones, resultó que en la primera tenia 8 *varas, y en la segunda* $8\frac{2}{3}$ *varas: hay duda en la exactitud, y por ello se quiere tomar una media proporcional entre dichas medidas.* Este problema exige hallar b segun la fórmula ((21)); y por tal procedimiento será

$$b=\frac{8+8+\frac{2}{3}}{2},\ \text{de donde}\ b=\frac{50}{6}=8{,}333\ldots$$

En las operaciones mecánicas de medir ó pesar las cosas hay que tener siempre desconfianza de que sea exacto al resultado de una sola vez; y por ello se suele hacer la operacion varias veces y anotar cada resultado, para deducir despues un valor medio. Supongamos, por ejemplo, que habiendo repetido m veces la operacion, hubo los m valores $a, b, c, d, e, \ldots$ Dividiendo por m la suma de ellos, tendremos

$$\frac{a+b+c+d+e+\ldots}{m};$$

y este valor será mas exacto probablemente á causa de la compensacion de errores, que cualquiera de los a, b, c, &c. así como $\frac{a+b}{2}$ lo será tambien, aunque menos que la m^{sima} parte de los m valores.

185. Cuando hay varias razones iguales, como

$$a-b=\pm k \quad , \quad g-h=\pm k \quad , \quad p-q=\pm k \quad , \text{ etc.}$$

viene la seguida de razones iguales

$$\left.\begin{array}{l} a-b=g-h=p-q=\text{etc.} \\ \text{que tambien se escribe } a.b:g.h:p.q:\text{etc.} \end{array}\right\}\text{.........(22).}$$

Si el consecuente de cada razon es antecedente de la que sigue en toda esta ilacion, como

$$a-b=b-c=c-d=d-f=\text{ etc.},$$

ó bien $a.b:b.c:c.d:d.f:\text{etc.}$,

se abrevia su espresion de un modo análogo á la equidiferencia de medios iguales, en esta forma,

$$\div a.b.c.d.f \text{ ....(23)}$$

á que se llama *progresion por diferencia ó aritmética*.

Esta ofrece varios puntos de exámen, que vamos á tomar en consideracion.

1.° De $a-b=\pm k$, $b-c=\pm k$, $c-d=\pm k$, $d-f=\pm k$, cuyo número será $n-1$ cuando tenga n términos la progresion, vienen las ecuaciones

$$b=a\mp k \text{ , } c=b\mp k \text{ , } d=c\mp k \text{ , } f=d\mp k \text{ , etc. .....(24),}$$

las cuales hacen ver que *un término cualquiera de la progresion aritmética es la suma del precedente y la razon, tomando esta con el signo que la pertenezca*. Será *crecente* ó *ascendente* la progresion cuando entre k positiva en la suma, y *decrecente* ó *descendente* cuando k negativa.

Es fácil por esta ley formar la progresion, dado el primer término a y la diferencia k. Asi, $a=2$, $k=3$ determinan la progresion

$$\div 2 . 5 . 8 . 11 . 14......$$

Tambien $a=20$, $k=-4$ dan

$$\div 20 . 16 . 12 . 8 . 4 . 0 . -4 . -8......$$

Los términos de la primera van creciendo, y decreciendo los de la segunda, como se ha indicado antes.

2.° Hemos visto por el teorema precedente que todos los términos de la progresion estan formados bajo una ley misma, ley que espresaremos en general por la ecuacion $t=r\mp k$, significando t un término cualquiera que por esto se llama *general*, n el número de los que tenga la progresion, y r el que antecede á t. Si sumamos ordenadamente las $n-1$ ecuaciones ((24)) inclusa la general que acabamos de escribir, suprimiendo el doble signo de k por la simplicidad, pero considerando sujeta k á ser afectada por el que corresponda, hallaremos la igualdad de sumas

$$b+c+d+f+...+r+t=a+b+c+d+,..+r+k(n-1);$$

en donde los claros que ocupan los puntos tienen la significacion de reticencia, para manifestar que se suprimen términos, segun antes de ahora hemos hecho varias veces. Como en esta ecuacion se destruyen mútuamente los términos de un miembro con los del otro, escepto el que se llama general y los a y $k(n-1)$, queda reducida á la simple espresion de dicho término general

$$t=a+k(n-1) \quad ....(25):$$

fórmula para conocer una de las cuatro cantidades t, a, k, n, dadas las otras tres, teniendo presente lo dicho sobre el signo de k y su influencia en el crecimiento de la progresion. Por ejemplo, el término duodécimo en la decrecente arriba escrita será

$$t=20-4\times 11=-24.$$

Otro de los problemas de esta clase que ocurre con frecuencia es, *introducir cierto número de términos en progresion aritmética entre dos números dados para estremos de* *ella*. Como por ejemplo dados los estremos 1 y 2, introducir 8 términos intermedios. Es necesario hallar la diferencia k por la fórmula ((25)), y será

$$k=\frac{2-1}{7}=\frac{1}{7}.$$

Con ella se forma la progresion

$$\div 1 \,.\, 1+k \,.\, 1+2k \,.\, 1+3k\ldots\ldots$$

que ahora es

$$\div 1 \,.\, 1+\frac{1}{7} \,.\, 1+\frac{2}{7} \,.\, 1+\frac{3}{7} \,.\, 1+\frac{4}{7} \,.\, 1+\frac{5}{7} \,.\, 1+\frac{6}{7} \,.\, 2.$$

3.° Siendo a y t los estremos, como tambien b el segundo término, r el penúltimo y k la razon; existen las ecuaciones ((24))

$$t=r+k \text{ y } b=a+k \text{ ó bien } a=b-k;$$

súmense ordenadamente la primera y tercera de estas ecuaciones, y reduciendo, sale

$$a+t=b+r.$$

Asimismo, siendo b el término precedente á c, y q el precedente á r, existen las ecuaciones

$$c=b+k \text{ ó bien } b=c-k \text{ y } r=q+k$$

y si sustituimos por b y r estos equivalentes en la ecuacion de $a+t$, se hallará

$$a+t=c-k+q+k=c+q.$$

Igualmente hallariamos sustituyendo aqui por c y q sus espresiones, y asi sucesivamente, que *la suma de los estremos de la progresion aritmética vale tanto como la suma de otros dos términos equidistantes de ellos, y como el duplo del término medio cuando* n *es número impar*.

4.° Como hay n términos en la progresion, solo se podrán formar $\frac{n}{2}$ sumas de dos en dos, en cuyo número entra la de los estremos; de suerte, que juntando todos los términos de la progresion por diferencia, la suma total S de ellos ascenderá á

$$S=\frac{n}{2}\times(a+t)\ \ldots.(26).$$

Aplicando esta fórmula á la progresion decrecente numérica de antes, resulta la suma de siete términos

$$S=\frac{7}{2}(20-4)=56.$$

Por medio de las fórmulas ((25)) y ((26)), que se componen de cinco cantidades literales, podemos conocer dos cuando las tres restantes sean dadas (161), como en el siguiente caso.

Hay en una pila de barriles 20 filas una sobre otra, formando progresion por diferencia de modo que la fila superior tiene solo 2 barriles, siendo la diferencia 1: y se quiere hallar el número t *de barriles que tiene la fila inferior y la suma* S *de todas.* Las fórmulas ((25)) y ((26)) dan

$$t=2+1\times19=21\ ;\ S=10(2+21)=230.$$

LECCION II.

Razon, proporcion y progresion por cociente.

186. Cuando se comparan dos cantidades a y b con el fin de saber el número q de veces que la primera contiene á la segunda, el concepto espresado segun la forma establecida en la division es

$$\frac{a}{b}=q\ \ldots(27);$$

y se llama *razon por cociente* ó impropiamente *razon geométrica*, en que a es el *antecedente*, b el *consecuente* y q la *razon*, entera ó fraccionaria segun a es ó no múltipla de b. Si el objeto fuese hallar las veces que a está contenido en b, la comparacion $\frac{b}{a}=q'$ consta del antecedente b, del consecuente a, y de la razon q'. De uno y otro modo se llama razon por cociente, y siendo esta q en el primer caso y q' en el segundo, hay entre las dos la relacion

$$\frac{1}{q}=q' \ldots (28).$$

Una de las razones, $\frac{a}{b}=q$, $\frac{b}{a}=q'$, se dice que es *inversa* de la otra, como en

$$\frac{16}{2}=8 \text{ y } \frac{2}{16}=\frac{1}{8}.$$

Por lo cual, siempre que dos números a y b de la division $\frac{a}{b}$ den un cociente q, y otros dos c y d de la division $\frac{c}{d}$ den un cociente $\frac{1}{q}$, decimos *que* a *y* b *estan en razon inversa de* c *y* d. Asi sucede en las razones $\frac{16}{2}$ y $\frac{3}{24}$, que dan los cocientes 8 y $\frac{1}{8}$: y por ello 16 está con 2 en razon inversa de la de 3 con 24. Cuando una razon es igual á otra, se dice *que un antecedente está con su consecuente en razon directa de la del otro antecedente con su consecuente*: como por ejemplo $\frac{16}{2}$ y $\frac{24}{3}$ ó $\frac{2}{16}$ y $\frac{3}{24}$ y en general $\frac{a}{b}=q$ y $\frac{d}{c}=q$. Esta segunda razon se ha cambiado en directa respecto de la primera, habiendo cambiado de lugares c y d; y por tanto, *una razon se convierte* *de inversa á directa, ó al reves, cambiándose uno por otro el antecedente y el consecuente.*

Si el antecedente y el consecuente son productos de á dos factores, como $\frac{ae}{bf}$, este producto equivale (111) al de las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{e}{f}$, que se llama *razon compuesta.*

En el ejemplo $\frac{2\times3}{5\times7}$ la razon $\frac{6}{35}$ es compuesta de las razones $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{7}$ ó de $\frac{2}{7}$ y $\frac{3}{5}$.

187. Dos razones iguales, como $\frac{a}{b}=q$ y $\frac{c}{d}=q$, forman la igualdad.......... $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ que tambien se escribe........ $a : b : : c : d$ ....(29)

Se llama este concepto *proporcion de cociente* ó proporcion *geométrica*, y se pronuncia a es á b como c á d por cociente. El primero y último números de la proporcion son *estremos*, y los otros dos *medios*.

Ejemplos de ello son $\frac{8}{2}=4$, $\frac{12}{3}=4$, de donde procede $\frac{8}{2}=\frac{12}{3}$ ó en otra forma $8 : 2 : : 12 : 3$.

Cuando los medios son iguales, la proporcion

$\frac{a}{b}=\frac{b}{d}$ tambien se escribe $\div a : b : d$ .....(30)

y se dice *proporcion continua* por cociente, en que b es *medio proporcional* entre a y d. Tal sucede en

$$\frac{9}{3}=\frac{3}{1}, \text{ ó en otra forma, } \div 9:3:1.$$

188. Puesto que la ecuacion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ dice lo mismo que la proporcion $a:b::c:d$, deduzcamos las modificaciones que admite bajo esta forma por las que admite la ecuacion, ya transponiendo de un miembro á otro las cantidades, ya por hacerse iguales operaciones en ambos miembros; y para ello presentamos la proporcion general segun su primitivo estado, que fue

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ ó bien } a:b::c:d,$$

y el caso particular $\frac{8}{2}=\frac{12}{3}$ ó bien $8:2::12:3$.

1.ª *Alternando* los medios, la proporcion primitiva se transforma en

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d} \text{ ó bien } a:c::b:d.$$

La proporcion existe aunque cambien de lugares los medios entre sí; como en $8:2::12:3$ y $8:12::2:3$.

2.ª *Alternando* los estremos, la primitiva recibe la nueva forma

$$\frac{d}{b}=\frac{c}{a} \text{ ó bien } d:b::c:a.$$

No se altera la proporcion aunque cambien de lugares entre sí los estremos: y por ello, la primitiva $8:2::12:3$ se cambia en $3:2::12:8$.

3.ª *Invertiendo* las dos razones, resulta

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c} \text{ ó bien } b:a::d:c.$$

No se altera la proporcion aunque se cambien los medios en estremos y estos en medios; como por ejemplo en

$$8:2::12:3 \quad \text{y} \quad 2:8::3:12;$$

y por lo anterior, $2:3::8:12.$

4.ª *Invertiendo* las dos razones y *trasponiendo* ademas la primera por la segunda y ésta por aquella, se verifica

$$\frac{d}{c}=\frac{b}{a} \text{ ó bien } d:c::b:a.$$

Tambien existe la proporcion aunque se cambien los estremos uno por otro, cambiando al mismo tiempo los medios entre sí. Así sucede en $8:2::12:3$ y $3:12::2:8.$

5.ª *Librando de forma fraccionaria* á la ecuacion ((29)), viene la igualdad de productos de los estremos y de los medios

$$ad=bc\,; \quad ....(31)$$

la cual dice que *el producto de los estremos equivale al de los medios.* Esto sucede en todas las variaciones que ha recibido la proporcion $8:2::12:3$; pues resulta siempre $8\times3=2\times12$. Por esta propiedad notable; *dadas tres cantidades, podemos hallar otra que establezca proporcion entre las cuatro* siendo incógnita una de las que hay en $ad=bc$: y los aritméticos llaman *regla de tres* al cálculo de tales problemas. Imagínense por ejemplo tres cantidades, de cualesquiera valores y de cualquiera modo ordenadas para formar proporcion, como 3, $5\frac{1}{2}$ y 9, que caprichosamente las colocamos en el orden

$$5\frac{1}{2}:3::9:$$

Falta el número que ha de cerrar la proporcion; y llamándole x, tenemos la igualdad ((31)) $5\frac{1}{2}\times x=3\times9$; y despejando x, resulta $x=27:5\frac{1}{2}=4\frac{10}{11}$; luego, la proporcion es

$$5\frac{1}{2}:3::9:4\frac{10}{11}.$$

6.ª *Librando de forma fraccionaria* á la proporcion de medios iguales, la fórmula ((31)) viene á ser

$$ad=b^2, \text{ de donde } b=\sqrt{(ad)}. \quad \ldots\ldots(32).$$

Vemos que *el producto de estremos equivale al cuadrado del término medio en la proporcion geométrica continua: y que para hallar un medio proporcional por cociente entre dos números dados, hay que estraer la raiz cuadrada de su producto*. Ejemplo de esto es

$$\div 9 : 3 : 1,$$

en donde el medio geométrico 3 se tendrá por el cálculo $\sqrt{(9\times1)}$ ó sea $\sqrt{9}=3$. Asi tambien si quisiéramos un medio geométrico entre dos cualesquiera números cuyo producto sea potencia segunda exacta, como por ejemplo $\frac{2}{5}$ y $\frac{8}{5}$; se multiplica uno por otro, y el del producto $\frac{16}{25}$ se estrae la raiz cuadrada $\frac{4}{5}$, que será el medio geométrico entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{8}{5}$.

7.ª *Componiendo* los antecedentes. Si se añade ó quita á los dos miembros de la ecuacion ((29)) cualquiera cantidad *m*, hay la ecuacion

$$\frac{a}{b}\pm m=\frac{c}{d}\pm m;$$

que, despues de reducir á comun denominador cada miembro, es

$$\frac{a\pm bm}{b}=\frac{c\pm dm}{d} \quad ó \quad a\pm bm : b :: c\pm dm : d.$$

Luego, *no se altera una proporcion aunque se añada ó quite á cada antecedente,* m *veces el consecuente respectivo.*

Si es $m=1$, hay $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$ ó $a\pm b : b :: c\pm d : d$;

y por la 1.ª verdad, $a \pm b : c \pm d :: b : d$. Asi se observa usando de la proporcion $8 : 2 :: 12 : 3$; pues resulta $8 \pm 2 : 2 :: 12 \pm 3 : 3$, y por la 1.ª verdad,

$$8 \pm 2 : 12 \pm 3 :: 2 : 3.$$

8.ª *Componiendo* los consecuentes. Si á los dos miembros de la igualdad $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, que vino de la facultad 3.ª, se añade ó quita una misma cantidad m, resultará $\frac{b}{a} \pm m = \frac{d}{c} \pm m$, que reduciendo á comun denominador viene á ser $\frac{b \pm ma}{a} = \frac{d \pm mc}{c}$: y por la facultad 3.ª, $\frac{a}{b \pm ma} = \frac{c}{d \pm mc}$, ó con otras notas,

$$a : b \pm ma :: c : d \pm mc.$$

No se altera la proporcion añadiendo ó quitando á cada consecuente el mismo número de veces el antecedente respectivo.

9.ª *Proporcion de productos.* Multiplicando la ecuacion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ por otra semejante $\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$, será $\frac{ae}{bf} = \frac{cg}{dh}$ tambien proporcion (66. 8.°) y (111); y escritas las tres en forma proporcional, serán $a : b :: c : d$, $e : f :: g : h$, $ae : bf :: cg : dh$; y la última visiblemente resulta de multiplicar entre sí los términos respectivos de las precedentes. Sea cualquiera el número de razones que se multipliquen, siempre la ecuacion de productos y de consiguiente la proporcion, que se llama *compuesta*, resulta conforme á esta ley: luego, podemos concluir por analogía, que *multiplicando ordenadamente los términos de cualquiera número de proporciones, resulta otra proporcion*. Siendo por ejemplo $7 : 2 :: 28 : 8$ y $3 : 9 :: 2 : 6$ las simples, resulta la compuesta

$$7 \times 3 : 2 \times 9 :: 28 \times 2 : 8 \times 6, \text{ ó } 21 : 18 :: 56 : 48.$$

10.ª *Proporcion de potencias.* Por ser $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ lo mismo que (66. 8.º) y (111)

$$\frac{a^n}{b^n}=\frac{c^n}{d^n} \text{ y que } \sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\sqrt[m]{\frac{c}{d}}, \text{ ó } \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}}$$

segun el artículo (139); si escribimos en otra forma estos quebrados, resultan las proporciones

$$a^n : b^n :: c^n : d^n \text{ y } \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}.$$

Luego, *si cuatro cantidades son proporcionales, tambien guardan la misma relacion sus potencias de un mismo grado entre sí, y las raices de un mismo índice.* Tal sucede en la proporcion 1 : 4 :: 25 : 100, de que procede la de potencias 1 : 16 :: 625 : 10000, y la de raices

$$1 : 2 :: 5 : 10.$$

189. Habiendo muchas razones iguales, como

$$\frac{a}{b}=q \;,\; \frac{c}{d}=q \;,\; \frac{e}{f}=q \;,\; \frac{g}{h}=q,\ldots\ldots$$

resulta la seguida de razones iguales........ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\ldots\ldots\ldots\ldots$ (33),

que se escribe tambien $a : b :: c : d :: e : f :: g : h : \ldots$

y se lee a es á b, como c á d, como e á f, como g á h; &c.

Sumadas ordenadamente las ecuaciones

$$a=bq \;,\; c=dq \;,\; e=fq \;,\; g=hq,\ldots\ldots$$

resulta $a+c+e+g+\ldots\ldots=q(b+d+f+h+\ldots\ldots)$

de donde $\frac{a+c+e+g+\ldots\ldots}{b+d+f+h+\ldots\ldots}=q=\frac{a}{b},$

y en otra forma, $a+c+e+g\ldots\ldots:b+d+f+h+\ldots\ldots :: a : b.$

Luego, *en toda seguida de razones por cociente iguales,* *entre la suma de antecedentes y la de consecuentes hay la misma razon que entre el antecedente y consecuente de cualquiera parcial.*

Cuando el consecuente de cada razon es igual á el antecedente de la inmediata, como en

$$\left.\begin{array}{ll} & \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{f}=\ldots=q \\ \text{ó} & \frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=\frac{f}{d}=\ldots=q' \\ \text{se escribe} & \div a : b : c : d : f : \ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots (34)$$

y se llama *progresion por cociente ó geométrica*. Visiblemente consta de n términos la progresion cuando es $n-1$ el número de razones.

La progresion geométrica ofrece á nuestro exámen varios puntos.

1.° Siendo t un término cualquiera que se llama *general*, y r el precedente, las ecuaciones de la segunda seguida ((34)) puestas bajo las formas

$$b=aq',\quad c=bq',\quad d=cq',\quad f=dq',\ldots\ldots\ t=rq' \quad \ldots\ldots (35)$$

manifiestan, que *un término cualquiera de la progresion geométrica es producto del precedente y la razon.* Asi, $a=3$ y $q'=2$ dan la progresion

$\div 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : \ldots\ldots\ldots$; y $a=3$ con $q'=\frac{1}{2}$ dan

$$\div 3 : \frac{3}{2} : \frac{3}{4} : \frac{3}{8} : \frac{3}{16} : \ldots\ldots$$

La primera es *ascendente* por ser $a<b<c<d<\ldots\ldots$, á causa de $q'>1$. La segunda *descendente* por ser $a>b>c>d>\ldots\ldots$, á causa de $q'<1$.

Siendo $q'=a$, viene la progresion

$$\div a : a^2 : a^3 : a^4 : \ldots\ldots : a^n.$$

::

Si el primer término es a^m y la razon $q'=a^p$, hay la progresion con n términos

$$\div a^m : a^{m+p} : a^{m+2p} : a^{m+3p} : a^{m+4p} :......: a^{m+(n-1)p}.$$

Luego, *forman progresion por cociente las potencias de la cantidad, cuyos esponentes forman progresion por diferencia.*

2.° Multiplicando entre sí todas las $n-1$ razones

$$\frac{b}{a}=q' \ , \ \frac{c}{b}=q' \ , \ \frac{d}{c}=q' \ ,..... \ \frac{t}{r}=q',$$

que dan la progresion de n términos, como está indicado, se tiene el producto $\quad \dfrac{b\times c\times d\times f\times...\times t}{a\times b\times c\times d\times...\times r}=q'^{n-1}$.

Todos los factores del primer miembro se destruyen escepto a y t, quedando la espresion reducida á la siguiente en que se suprime el acento de q por no ser necesario; $\frac{t}{a}=q^{n-1}$, de donde viene la espresion del término t general

$$t=aq^{n-1} \quad ...... \ (36).$$

Por ella se sabe el valor de cualquiera término, cuando es dado el número n del lugar que ocupa, el primer término a, y la razon q de las veces que cada término contiene á su precedente. El séptimo de la progresion descendente que tiene $a=3$ y $q=\frac{1}{2}$, será

$$t=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{3}{64}.$$

Despejando q, viene para hallar la razon, cuando son dados los términos primero y último, y el número n de los que tiene la progresion,

$$q=\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}.$$

Hay que usar de ella para *intercalar* $n-2$ términos intermedios que formen progresion con los estremos a y t. Asi, queriendo hallar dos términos entre $a=3$ y $t=24$, es

$$q=\sqrt[3]{\frac{24}{3}}=2, \quad \text{y} \quad \div 3:6:12:24$$

la progresion, que por tener solo cuatro términos es una mera proporcion.

3.º La suma de todos los términos

$$S=a+b+c+d+\ldots\ldots+r+t$$

da $\quad S-a=b+c+d+\ldots\ldots+r+t$

y $\quad S-t=a+b+c+d+\ldots\ldots+r.$

Ademas, por las ecuaciones ((35)) viene la de sumas

$$b+c+d+\ldots\ldots+r+t=(a+b+c+d+\ldots\ldots+r)\times q;$$

y como el primer miembro equivale á $S-a$, y el segundo á $(S-t)q$, dicha ecuacion de sumas puede recibir la forma

$$S-a=(S-t)q, \text{ de donde } S=\frac{tq-a}{q-1} \quad \ldots\ldots(37).$$

En la progresion $\div 3:6:12:24:48:\ldots\ldots$ formada anteriormente, es $a=3$, $q=2$, y la suma de cinco términos, por

ejemplo, $\quad S=\dfrac{48\times2-3}{2-1}=93.$

Con las dos fórmulas ((36)) y ((37)), que comprenden cinco cantidades, pueden conocerse dos, siempre que las tres restantes fueren dadas (161); aunque es verdad que siendo q la incógnita necesitamos resolver la ecuacion $aq^n-Sq+S=a$ del grado n, de que se tratará mas adelante: y si la incógnita es n, precisa á resolver una ecuacion de clase particular que corresponde á la IV.ª LECCION.

190. Prescindiendo de estos dos casos y de la investigacion de q cuando $\sqrt[n-1]{}$ pasa del tercer grado, hay un gran número de problemas que se resuelven por las teorías de proporciones y progresiones: pues en general, todo problema que diere una ecuacion en que sea descomponible cada miembro en dos factores envuelve proporcion (188. 5.ª), considerando estremos los dos de un miembro y medios los del otro. Sin embargo, se cifran y se resuelven sin que se necesite dicha doctrina muchos en que desde luego no aparecen condiciones espresas que la requieran, es decir, porque estan propuestos en otro lenguaje; como se verá en la siguiente leccion, cuyo asunto será la solucion de problemas de estas clases.

Por ahora nos resta decir lo conveniente sobre la disposicion en que se han de colocar las cuatro cantidades de la proporcion por cociente. No ofrece dificultad esto ínterin sean abstractas las tres cantidades conocidas arbitrarias, como 3, 7, 50, y la desconocida x; basta ordenarlas de modo que el producto de dos sea el mismo que el de las otras dos; y recordando aqui lo que digimos en el artículo (188. 5.ª), se ve que el objeto es asequible de cualquiera modo que se combinen, pues

$$x\times3=7\times50 \text{ da } x=\frac{7\times50}{3}=\frac{350}{3} \text{ y } 3:7::50:\frac{350}{3};$$

$$x\times7=3\times50 \text{ da } x=\frac{3\times50}{7}=\frac{150}{7} \text{ y } 7:3::50:\frac{150}{7};$$

$$x\times50=3\times7 \text{ da } x=\frac{3\times7}{50}=\frac{21}{50} \text{ y } 50:3::7:\frac{21}{50}.$$

Mas, cuando son concretos los números, hay que atender á las especies, y no es ya tan libre la combinacion. El principio del artículo (40) exige el que sean de una especie dos de las tres cantidades, dividendo, divisor y cociente, y el tercero abstracto: por lo cual, en $\frac{a}{b}=q$, $\frac{c}{d}=q$, precisamente de las tres cantidades a, b, q han de ser dos de una especie, y tambien de la misma ó de otra dos de las cantidades c, d, q. Ademas, para formar la igualdad $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, es necesario que sea q abstracto ó de una misma especie en ambas razones; luego, si *las cuatro cantidades* a, b, c, d *de una proporcion son concretas, necesariamente dos pertenecen á una misma especie y dos á otra.* Verdad es que establecida la proporcion, se pueden tratar como números abstractos, pues, $\frac{a \text{ hombres}}{b \text{ hombres}}$ es la misma razon que $\frac{a \text{ unidades abstractas}}{b \text{ unidades abstractas}}$.

Con tal precision, dadas las cantidades h, k, m conocidas y x desconocida, siendo h y k de una especie como tambien m y x de otra, la proporcion es de dos modos: $\frac{h}{k}=\frac{m}{x}$, de donde $hx=km$; ó $\frac{h}{k}=\frac{x}{m}$, de donde $hm=kx$. De suerte, que *en la proporcion geométrica de cantidades concretas, la mayor de cada especie ha de venir multiplicada por la menor de la otra*, y esta es la regla que sirve de guia para formar la proporcion en las cuestiones, que los aritméticos llaman de la *regla de tres*, porque en ellas buscan siempre un término de la proporcion sabiendo cuales son las cantidades para los otros tres. Por ejemplo, dados 3 hombres, 6 hombres, 20 dias y x dias, necesitamos atender á las condiciones del problema, para saber si x dias ha de ser mas ó menos que 20.

Si el problema dice, *ganando 3 hombres 20 jornales ¿cuántos ganarán 6 hombres?* claro está que la incógnita x representa el número de jornales que ganan los 6 hombres, y que ha de ser mayor que 20 por ser 6 mayor que 3. La proporcion viene asi entonces,

$$\frac{3}{6}=\frac{20}{x} \text{ ó } 3:6::20:x,$$

de donde $$x=\frac{6\times 20}{3}=40.$$

Si el problema dice, *haciendo 3 hombres una obra en 20 dias, ¿cuántos dias de trabajo se necesitan para que hagan la misma obra 6 hombres?* es visible que x representa el número de dias de trabajo que gastaran 6 hombres, y que x ha de ser menor que 20, pues hay mas hombres de trabajo. La proporcion es $\frac{3}{6}=\frac{x}{20}$, ó $6:3::20:x$, de donde

$$x=\frac{3\times 20}{6}=10.$$

En el primer ejemplo la proporcion se llama *directa*, y en el segundo *inversa*; en aquel están los hombres en *razon directa* de los dias de trabajo, porque á mayor número de hombres corresponde mayor número de dias; mas en el segundo están en *razon inversa* los números de hombres con los de dias, porque á mas hombres corresponden menos dias.

LECCION III.

Problemas pertenecientes á las proporciones y progresiones geométricas.

191. Los aritméticos han estendido mucho esta parte del cálculo de números, tratándola con separacion del álgebra. Distinguen los casos de regla de tres ó proporcion directa, de inversa, de simple y de compuesta; y para la traducion de los problemas desde la lengua vulgar á la del cálculo, se ven precisados á descifrar si es directa ó inversa la proporcion; escollo considerable cuando el problema envuelve mas de una, y que nosotros evitaremos planteando esta clase de ecuaciones por los métodos generales que ya quedan espuestos: y vamos á esplicar el arte.

Sea cualquiera el problema de razones por cociente iguales entre cantidades concretas; á fin de prescindir de las dificultades que ofrece la atencion de si el problema presenta la relacion directa ó inversa, *seguiremos el método de escribir cada razon separadamente, y de aqui pasar á la igualdad de razones*: mas, para que se forme tambien idea del método de la solucion por la regla de tres, la presentaremos en algun caso por manifestarse claramente el modo de plantear asi el problema.

192. LA REGLA DE TRES SIMPLE consiste en que la proporcion no sea compuesta de dos ó mas proporciones (188 9.ª); como en los ejemplos que siguen.

1.° *Si 2 hombres hacen 10 cosas, ¿cuántas harán 6 hombres?* Espresando q lo hecho por cada hombre, será $2q$ lo hecho por dos: y como son diez las cosas hechas, tenemos la ecuacion $2q=10$. Igualmente, si espresamos con x lo que hagan 6 hombres, será $6q=x$. Despéjese q en ambas ecuaciones, y por eliminacion resultará

$$\frac{10}{2}=\frac{x}{6}, \text{ de donde } x=\frac{60}{2}=30.$$

Tan espresa estaba la proporcion $2:10::6:x$, que desde luego se pudo haber escrito, y de ella venir á

$2x=10\times6$ para tener $x=\dfrac{10\times6}{2}=30$. Pero es fácil engañarse en algunos casos de proporcion invertida, como en el siguiente.

2.° *Habiendo ejecutado 8 hombres en cinco dias una obra de N unidades de trabajo, ¿cuántos hombres necesitamos para hacer la misma en dos dias?* Significando q la cantidad de trabajo de un hombre en un dia, y x el número de hombres que se quiere hallar, será la primera razon $q\times8\times5=N$, y la segunda $q\times x\times2=N$; de las cuales vienen

$$8\times5=x\times2 \quad , \quad x=\frac{40}{2}=20.$$

Si hubiésemos querido escribir desde luego la proporcion, se notará que venia invertida, pues los hombres de la obra hecha y por hacer no están en la misma razon que los dias entre sí de las mismas obras, á causa de que en menos dias se necesitan mas hombres; y así, habria sido necesario ordenar las cantidades en la disposicion $2:5::8:x$ para venir á $2x=5\times8$. Pero escribiendo cada razon separadamente se ha evitado el escollo, con menos atencion y peligro de equivocarse que por el método de los aritméticos. Basta suponer q la unidad de la especie, y en lo demas proceder como en toda clase de cuestiones conforme á las reglas que se han establecido en el capítulo precedente para eliminar á q.

3.° *Si 8 pesos reditúan 4 reales, ¿para un rédito de 9 reales cuántos pesos ha de haber?* En suposicion de espresar q el rédito de cada peso, hay las ecuaciones

$$8q=4 \text{ y } qx=9; \text{ de donde, } x=\frac{9\times8}{4}=18.$$

4.° *¿A cuántas varas equivalen* 100 *metros, en concepto de que* b *varas valen* m *metros exactamente?* Si es q el valor de una vara, se tendrá $qx=100$, $bq=m$; de donde, $x=\frac{100b}{m}$. Bien clara estaba tambien aquí la proporcion directa $\frac{x}{100}=\frac{b}{m}$.

193. Regla de tres compuesta se dice, cuando se cifra el problema en una proporcion compuesta de otras simples (188, 9.ª).

1.° *Si 2 hacen 10 cosas en 3 dias, ¿cuántas harán 5 en 8 dias?* Siendo q lo hecho por 1 en 1 dia, y x lo hecho por 5 en 8 dias, tenemos

$$2q\times3=10, \quad 5q\times8=x; \quad \text{de donde} \quad \frac{10}{6}=\frac{x}{40},$$

$$x=\frac{400}{6}=66+\frac{2}{3}.$$

Visiblemente la proporcion es producto de dos simples, como

$$\frac{1}{2}\times\frac{10}{3}=\frac{1}{5}\times\frac{x}{8}.$$

2.° *Haciendo 3 obreros 9 manufacturas en 4 dias, ¿para hacer 8 en dos dias cuántos obreros se necesitan?* Sea q lo hecho por 1 obrero en 1 dia, x los necesarios para hacer 8 en 2 dias, y el sencillo cálculo siguiente dará el valor de x:

$$3q\times4=9 \quad , \quad qx\times2=8,$$

de donde $\dfrac{3}{4}=\dfrac{4}{x}$, $x=\dfrac{16}{3}=5+\dfrac{1}{3}$.

3.° *¿Cuánto reditúan en 7 meses 1000 pesos á 4 por 100 al año?* En este problema se espresa de un modo abreviado el siguiente que consta de 6 cantidades. *Si 100 dan 4 en 12 meses, ¿1000 cuánto en 7?* Supuesto q el rédito de 1 peso en 1 mes, y x el de 1000 en 7, el cálculo es

$100q\times12=4$, $1000q\times7=x$; de donde $\dfrac{x}{7000}=\dfrac{4}{1200}$,

$x=23+\dfrac{1}{3}$.

Este problema es de los que se llaman de INTERES SIMPLE, y á la misma clase corresponden tambien los problemas de aligacion resueltos en el artículo (166).

194. REGLA DE INTERES COMPUESTO es cuando las ganancias quedan unidas al capital sucesivamente.

1.° *Se tiene á rédito la cantidad* p *á* r *por* c *en tiempo determinado, con la condicion de que el rédito de dicho tiempo se reuna al capital para el siguiente rédito; del mismo modo el segundo rédito para el tercero, y asi sucesivamente; y se quiere saber el rédito de cualquiera de estos tiempos iguales.*

Suponiendo x el rédito del primer tiempo, el conocimiento

::

de su valor viene del problema de proporcion directa simple espuesto en estos términos. Si c da r, ¿cuánto dará p? Y la espresion es

$$x=\frac{rp}{c}.$$

En suposicion de ser x' el rédito del 2.º tiempo, ó bien el del capital $p+x$; el problema será, *si* c *da* r *¿cuánto* p+x? y está resuelto en

$$x'=\frac{r(p+x)}{c}=\frac{rp}{c}\left(1+\frac{r}{c}\right).$$

De un modo análogo se sabrá el rédito x'' del tercer tiempo, que es del capital $p+x+x'$, y resulta

$$x''=\frac{r(p+x+x')}{c}=\frac{rp}{c}\left(1+\frac{r}{c}\right)^2.$$

Por este orden se hallarian los réditos sucesivos: todos vienen segun la ley de los términos de la progresion por cociente cuya razon es $\left(1+\frac{r}{c}\right)$, y por analogía se deduce la general siguiente, representando por n el número de tiempos iguales pasados:

$$\div\frac{rp}{c}:\frac{rp}{c}\left(1+\frac{r}{c}\right):\frac{rp}{c}\left(1+\frac{r}{c}\right)^2:\frac{rp}{c}\left(1+\frac{r}{c}\right)^3:\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots:\frac{rp}{c}\left(1+\frac{r}{c}\right)^{n-1}.$$

El término general de esta progresion espresa el rédito x del tiempo n^{simo} ((36)): y para ensayo en las aplicaciones de la fórmula se propone la siguiente cuestion particular. *¿Teniendo impuestos* 1000 *pesos á rédito de* 4 *por* 100 *al año, con la condicion de que el rédito anual se agregue al capital para el siguiente, ¿cuál será el rédito* x *del quinto año?* Las cantidades dadas y la incógnita son

$p=1000,\ r=4,\ c=100,\ n=5,\ x=\frac{4\times1000}{100}\left(1+\frac{4}{100}\right)^4.$

2.° Cuando el problema general es, *hallar el capital que hay en uno de dichos tiempos determinados*; será p el del principio del primero, del segundo $p+x$, del tercero $p+x+x'$, etc.; y sustituyendo las espresiones de x, x', x'',....., viene la progresion

$$\div p : p\left(1+\frac{r}{c}\right) : p\left(1+\frac{r}{c}\right)^2 : p\left(1+\frac{r}{c}\right)^3 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots : p\left(1+\frac{r}{c}\right)^{n-1}.$$

El capital z que habrá en el principio del n^{simo} tiempo está espresado en el término general de esta progresion. Refiriéndonos por ejemplo al caso especial de antes, el capital z del principio del quinto año será

$$z=1000\left(1+\frac{4}{100}\right)^4.$$

195. Regla de falsa posicion. Pudiendo valuar el error de un resultado, está conocido el exacto; y en esto se funda la regla de que tratamos.

Sea $ax=b$ la ecuacion en que se espresa un problema dado y que por el método ordinario se pudiera resolver. Pero habiendo de hallar la solucion por la regla enunciada, considérese que si á la incógnita x damos valor arbitrario, será casual que satisfaga á la cuestion. Supongamos $x=s$, y en el hecho tendremos la ecuacion $as=c$; entre los factores a, s y su producto c. Si se divide ordenadamente esta ecuacion por la propuesta, resulta la fórmula

$$\frac{s}{x}=\frac{c}{b}\ \text{ó bien}\ s:x::c:b.$$

En donde se ve, *que entre la incógnita y su valor supuesto hay la misma razon que entre el término conocido* *de la ecuacion dada y el correspondiente de la supuesta.* Para ensayo se proponen los ejemplos que siguen.

1.° *Hallar un número x tal que la suma de su cuarta y quinta partes valga 9.* Segun el método ordinario (156)

la ecuacion es $\frac{x}{4}+\frac{x}{5}=9$, de donde $x=20$.

Mas por falsa posicion, supóngase $x=16$, de lo cual resulta para el primer miembro de la ecuacion del problema

el valor incierto $\frac{16}{4}+\frac{16}{5}=\frac{36}{5}$; y como es $\frac{36}{5}<9$, el valor supuesto resulta pequeño. Pero aplicando la fórmula precedente, será

$$16 : x :: \frac{36}{5} : 9 \text{; de donde } x=\frac{9\times16\times5}{36}=20.$$

2.° *¿En cuántos dias consumirán 3 fraguas la cantidad A de carbon, trabajando todas á un tiempo; en inteligencia de que la primera sola consumiria dicha cantidad en 6 dias, la segunda en 9 y la tercera en 18; siendo 12 horas la tarea diaria?* Los consumos de cada fragua son proporcionales á los tiempos de trabajo; y por esto el consumo de la

primera es $\frac{Ax}{6}$, el de la segunda $\frac{Ax}{9}$ el de la tercera

$\frac{Ax}{18}$: y puesto que todos componen la suma A, la ecuacion del problema es

$$\frac{Ax}{6}+\frac{Ax}{9}+\frac{Ax}{18}=A \text{ ó } \frac{x}{6}+\frac{x}{9}+\frac{x}{18}=1;$$

fácil de resolver por el método ordinario (156). Pero como se trata de ello por falsa posicion, supóngase que deban consumir dicha cantidad A en 10 dias. Haciendo $x=10$, resulta para el primer miembro de la ecuacion del problema el valor incierto

$$\frac{10}{6}+\frac{10}{9}+\frac{10}{18}=\frac{10}{3};$$

en donde vemos que á causa de $\frac{10}{3}>1$ es erróneo por esceso el valor supuesto 10; porque ha de ser 1 el de todo el miembro. Aplicando la fórmula, será $\frac{10}{x}=\frac{10}{3}$; de donde $x=3$ dias. La condicion de las horas de tarea se ha dado para reducir á ellas si resultaba fraccion de un dia, aunque superfluamente para la cuestion actual.

196. Regla conjunta: viene á ser; *dadas varias razones iguales á 1 entre ciertas cantidades, hallar la razon entre una cantidad de la especie de uno de los antecedentes y otra de la especie de uno de los consecuentes.*

1.° Por ejemplo, *¿qué relacion hay entre* R' *rublos y* P *pesos? en concepto de que* P' *pesos valen* L *luises,* L' *luises valen* E *libras esterlinas, y* E' *libras valen* R *rublos.* Las equivalencias que acabamos de admitir por datos estan espresadas brevemente en

$$\overset{\text{rublos}}{R'} = \overset{\text{pesos}}{P} \quad ; \quad \overset{\text{pesos}}{P'} = \overset{\text{luises}}{L} \quad ; \quad \overset{\text{luises}}{L'} = \overset{\text{libras}}{E} \quad ; \quad \overset{\text{libras}}{E'} = \overset{\text{rublos}}{R}.$$

Para que estas equivalencias de monedas pasen á ser ecuaciones entre números, es preciso suponer que el número de monedas de cada clase esté multiplicado por un factor que establezca la igualdad, y que llamaremos *valor específico ó relativo* de cada clase de moneda. Siendo por ejemplo r el del rublo, p el del peso, l el del luis, y e el de la libra, tendremos para el cálculo las relaciones

$$R'r=Pp \quad , \quad P'p=Ll \quad , \quad L'l=Ee \quad , \quad E'e=Rr:$$

y el producto de todas estas ecuaciones da la siguiente, en que se suprimen los factores comunes,

$$R'\times P'\times L'\times E'=P\times L\times E\times R;$$

de donde $$\frac{R'}{P}=\frac{L\times E\times R}{P'\times L'\times E'}.$$

2.° Si se hubiera preguntado *¿qué relacion hay entre un rublo y un peso?* el segundo miembro sería el mismo, y $\frac{1}{1}$ el primero; de lo cual resultaría 1 rublo $=\frac{L\times E\times R}{P'\times L'\times E'}$ pesos. Si la cuestion fuese *¿cuántos pesos valen* R' *rublos?* llamando x el número de pesos, sería $R'r=xp$ la primera ecuacion, y $\frac{R'}{x}$ el primer miembro de la fórmula. Despejando x, se hallaría

$$x=\frac{R'\times P'\times L'\times E'}{L\times E\times R}.$$

3.° *Se libran en Madrid* 30000 *reales vellon sobre Londres al cambio de* 38 *peniques por cada peso sencillo, esto es, á recibir en Londres* 38 *peniques por cada peso entregado en Madrid; y se quiere saber ¿cuántas libras esterlinas se recibirán en Londres por los* 30000 *reales?* La ilacion de las equivalencias es, (101) y (103),

x libras esterlinas = 2000 pesos
1 peso = 38 peniques
240 peniques = 1 libra esterlina;

y la final ó conjunta será la igualdad de productos

$$x\times 1\times 240=2000\times 38\times 1;$$

de donde $x=\frac{2000\times 38}{240}=\left(316+\frac{2}{3}\right)$ libras esterlinas.

4.° *Estando en Londres el cambio sobre Madrid á* 36 *peniques por cada peso sencillo; y en Paris el cambio sobre Londres á* 24 *francos por libra esterlina: ¿á cuánto saldrá cada peso, remitiendo á Londres papel tomado en Paris?* Escritas las equivalencias por su orden, como

$$\begin{aligned} x \text{ reales} &= 1 \text{ peso,} \\ 1 \text{ peso} &= 36 \text{ peniques,} \\ 240 \text{ peniques} &= 1 \text{ libra esterlina,} \\ 1 \text{ libra esterlina} &= 24 \text{ francos,} \\ 5 \text{ francos} &= 19 \text{ reales;} \end{aligned}$$

la compuesta será $x\times1200=16416$, y de ella sale

$$x=\left(13+\frac{17}{25}\right) \text{ reales.}$$

197. Regla de distribucion, en que está comprendida la de compañía, consiste en distribuir cierta cantidad en partes proporcionales á otras cantidades dadas, como son, capitales puestos en compañía de comercio, haberes de sugetos, &c.

1.° *Hay que distribuir* M *reales entre* a *sargentos,* b *cabos y* c *soldados, en proporcion de los sueldos que tienen, siendo* m *el de los primeros,* n *el de los segundos, y* p *el de los terceros: y se quiere saber las cantidades* x, v, z, *que corresponden á cada individuo de las tres clases.* Los tres razonamientos y el resultado serán

$$ax+bv+cz=M\ ,\ \frac{x}{v}=\frac{m}{n}\ ,\ \frac{x}{z}=\frac{m}{p};$$

$$x=\frac{Mm}{am+bn+cp}\ ,\ v=\frac{Mn}{am+bn+cp}\ ,\ z=\frac{Mp}{am+bn+cp}.$$

En los casos particulares se sustituyen las cantidades aritméticas en lugar de las letras, y se sabe lo que toca á cada individuo.

2.° *Un cuerpo de caballería embiste á otro de infantería, que se halla fijo á la distancia de* P *pasos: aquel rompe á trote desde luego, en seguida á galope á la distancia* P′ *del enemigo, y por último á escape á la distancia* P″. *¿Cuánto tardará en llegar al choque? suponiendo que en* m *segundos anda* p *pasos á trote, en* m′ *segundos* p′ *pasos á galope, y en* m″ *segundos* p″ *pasos á escape.*

Facilmente se infiere que $P-P'$ es el espacio andado á trote, $P'-P''$, el andado á galope, y P'' el andado á escape. Sea T el tiempo que tardará en llegar al choque, y t, t', t'' los tiempos respectivos que gastará en cada aire; y el problema da las ecuaciones

$$T=t+t'+t'',\ \frac{t}{P-P'}=\frac{m}{p}$$

$$\frac{t'}{P'-P''}=\frac{m'}{p'},\ \frac{t''}{P''}=\frac{m''}{p''}.$$

De las tres últimas vienen

$$t=\frac{m}{p}(P-P'),\ t'=\frac{m'}{p'}(P'-P''),\ t''=\frac{m''}{p''}P'';$$

y sustituyendo en la primera por t, t', t'' sus espresiones, tendremos

$$T=\frac{m}{p}(P-P')+\frac{m'}{p'}(P'-P'')+\frac{m''}{p''}P''.$$

198. Haremos por último las siguientes *aplicaciones de las fracciones continuas*, que, como se sabe (114), proceden de las razones de cociente irreductibles.

1.ª La tierra concluye su órbita ó viage anual en 365 dias, 5 horas, 48 minutos, 49 segundos; y este espacio de tiempo es el *año solar*, aunque al año *comun* reputamos de 365 dias cabales. *En suposicion pues de que el año solar ó trópico escede al comun en 5 horas, 48 minutos, 49 segundos, y siendo* n *el número de años comunes necesarios para que la suma de las diferencias sea* m *veces 24 horas ó* m *dias comunes, se propone hallar la razon entre* n *y* m. El problema estará cifrado en la ecuacion

$$n\,(5\text{ hor.}+48\text{ minut.}+49\text{ segund.})=m\times24\text{ hor.}$$

La razon $\frac{n}{m}$ abstracta es la misma que hay entre n años y m dias (190): y asi, reduciendo el numerador y el denominador de $\frac{24\text{ horas}}{5\text{ hor.}+48\text{ minut.}+49\text{ seg.}}$ á unidades de la menor especie, ó segundos, para calcular será

$$\frac{n}{m}=\frac{24\text{ horas}}{5\text{ hor.}+48\text{ minut.}+49\text{ seg.}}=\frac{86400}{20929}.$$

El resultado manifiesta que en el espacio de 86400 años comunes escederán los solares á los comunes en 20929 dias, y que se deben intercalar estos dias en dichos años comunes para que se cuenten pasados tantos años comunes como solares.

La intercalacion de los dias que se acaba de manifestar es la exacta; pero siendo tiempo tan dilatado el necesario, y á fin de hacer durante él otras intercalaciones para repartir las diferencias, de modo que nunca pueda haber una grande

redúzcase $\frac{86400}{20929}$ á fraccion continua (116), y hallaremos

otras aproximadas mas simples. Segun el método esplicado para la reducion á continua, el cálculo será

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} \underline{86400} & \frac{20929}{4} & \frac{2684}{7} & \frac{2141}{1} & \frac{543}{3} & \frac{512}{1} & \frac{31}{16} & \frac{16}{1} & \frac{15}{1} & \frac{1}{15}. \end{array}$$

Con los cocientes hallados fórmese la fraccion continua, y las convergentes aproximadas de la propuesta vendrán por el orden que sigue:

$$\frac{4}{1},\ \frac{29}{7},\ \frac{33}{8},\ \frac{128}{31},\ \frac{161}{39},\ \frac{2704}{655},\ \frac{2865}{694},\ \frac{5569}{1349},\ \frac{86400}{20929}.$$

Cada fraccion de estas espresa la razon de n años á m dias aproximadamente; es decir, que en este concepto cada cuatro años debe intercalarse un dia de mas en un año comun; 7 dias en 29 años; 8 dias en 33 años; etc. Las fracciones de lugar impar son inexactas por defecto y las de lugar par por esceso (116), contando los lugares desde la mas simple.

Julio Cesar adoptó la primera de las fracciones ó $\frac{n}{m}=\frac{4}{1}$,

que aunque la mas simple, por lo mismo es la mas defectuosa (116); y puesto que nace con valor escaso por esceso de su denominador, la correccion adoptada tiene el inconveniente de que el principio del año solar se adelante al comun, habiéndose querido evitar el defecto contrario. Continúa sin embargo el aumento de un dia cada cuatro años, y se llama *bisiesto* el año múltiplo de 4, á quien se aumenta dicho dia, como se dijo en el artículo (99).

Para corregir el pequeño esceso que resulta de este aumento, posteriormente la reforma gregoriana suprime tres años bisestiles cada 400 años, es decir, intercala en vez de 100 dias solo 97 en 400 años; de que resulta haber admitido la fraccion

$\frac{400}{97}$ que no se halla entre las de nuestro cálculo; y por cuya

razon se pudo haber adoptado otra mas exacta (116). Aun con esta correccion hay alguna diferencia, que es necesario reparar.

En efecto, si se reduce la fraccion $\frac{400}{97}$ á otra equivalente y

que tenga el mismo numerador que $\frac{86400}{20929}$, será $\frac{400}{97}=\frac{86400}{20952}$;

de modo, que aun al cabo de 86400 años se intercalan de mas 23 dias, y será necesario suprimir en este tiempo 23 años bisestiles por esceso de la correccion gregoriana.

Esta correccion del Calendario juliano y su arreglo segun la era cristiana, fue mandada por el Papa Gregorio XIII; y el Calendario gregoriano que nos rige desde entonces tuvo principio en el año 1582 en los paises católicos.

2.ª El mes lunar es de 29,530588 dias, y por esto el año lunar consta de 354,367056 dias: comparando con el año solar que es de 365,242222, hay la diferencia de 10,875166 dias. *Escediendo pues el año solar al lunar en* 10,875166 *dias, y siendo* n *el número de meses lunares necesarios para que las diferencias de dichos años compongan* m *meses lunares, hallar la razon de* n *á* m. La diferencia de cada mes será $\frac{10,875166}{12}$;

y asi, el problema está cifrado en la ecuacion

$$n \times \frac{10,875166}{12} = m$$

de donde $\frac{n}{m} = \frac{12 \text{ meses}}{10,875166 \text{ dias}} = \frac{365,242222}{10,875166}$, despues de reducir á dias los 12 meses trópicos, para que teniendo la misma unidad ambos números pueda ser considerada la razon como de abstractos.

Esta razon de meses lunares hace ver, que en 365242222 lunaciones se han de intercalar 10875166 para que el principio de los años lunares caiga en un mismo dia y momento del año solar; pero siendo de mucha duracion este período aunque exacto el cómputo, redúzcase á contínua la fraccion hallada, como en el problema anterior, y resultará la seguida de fracciones aproximadas mas simples,

$$\frac{33}{1}, \frac{34}{1}, \frac{67}{2}, \frac{168}{5}, \frac{235}{7}, \ldots\ldots$$

Es decir, que se debe intercalar una lunacion en 33 ó en 34; 2 lunaciones en 67; 5 en 168; 7 en 235, etc. Segun esta última, caen los principios de los años lunares en un mismo dia aunque no en un mismo momento al cabo de 19 años; pues, 235 lunaciones hacen 19 años lunares mas 7 meses lunares, ó 6939,68..... dias; y 19 años solares hacen 6939,60..... dias. La diferencia es de 1 dia en 300 años, poco mas ó menos.

Los atenienses fueron los primeros en admitir del matemático Méton el período de 19 años, al cabo de los cuales coinciden las épocas lunares con las solares; queremos decir, que la luna y el sol vuelven á las posiciones relativas que poco mas ó menos tenian 19 años antes. Llamaron *ciclo de oro* ó ciclo lunar á este período, que lo escribieron con oro; y por esto se llama *número aureo* el correspondiente de dichos diez y nueve, con el cual se distingue cada año del ciclo. En el calendario romano, se llama *epacta* el arreglo de las épocas lunares con las solares, partiendo de la idea de que la pascua de resurreccion caiga en el domingo siguiente al plenilunio que ocurra en el dia del equinoccio de la primavera ó al primer plenilunio despues de dicho dia.

LECCION IV.

Logaritmos.

199. Antes de principiar la teoría general de los logaritmos, daremos una idea de lo que significa su nombre, observando lo que resulta de la ecuacion

$$10^x = z.$$

Si se atribuyen á x valores con cierto orden, sabemos que

$$x=0 \text{ hace } z=1$$
$$x=1 \ldots\ldots\ldots z=10$$
$$x=2 \ldots\ldots\ldots z=100$$
$$x=3 \ldots\ldots\ldots z=1000$$
$$\text{etc.} \ldots\ldots\ldots \text{etc.}:$$

y las dos colecciones de equivalencias nos presentan el hecho notable (189. 1.°), de que si al esponente x damos valores en progresion aritmética desde cero hasta el número positivo y entero que se quiera, siendo 1 la diferencia: los valores de z, ó su igual 10^x, forman progresion por cociente, desde el primer número que es la unidad simple, hasta cualquiera término que será unidad de orden mayor, siendo 10 la razon de cociente de la progresion.

Si en vez de dar á x valores crecentes cuya diferencia es 1, diésemos á este esponente valores en progresion crecente cuya diferencia fuese cuan pequeña se quisiere, observariamos tambien que á cada valor de x en progresion aritmética corresponde siempre otro de z, ó bien 10^x, en progresion geométrica. La misma ley se notaria dando á x valores negativos en progresion aritmética, de que resultarian para z ó bien para $\frac{1}{10^x}$ fracciones en progresion geométrica decrecente.

Esta preciosa observacion está convidando á formar tablas de valores de x y de los correspondientes de z, dando á z todos los valores enteros y fraccionarios que se quisieren, para resolver con ellas en la mano cualquiera de los dos problemas que siguen.

1.° Dado x, hallar z sin cálculo alguno:

2.° Dado z, hallar x tambien sin cálculo, porque ya estaria hecho por el que formó las tablas. En la nomenclatura de los problemas que se han indicado y otros que dependen de estos, la cantidad z ó bien el término de la progresion geométrica se llama *número*, porque ya se ha supuesto que las tablas constan de todos los valores de 10^x enteros y fraccionarios que se pueden apetecer: el esponente x ó sea el término de la progresion aritmética que corresponde á el número ó término de la geométrica, se llama *logaritmo* de tal número; y el constante 10 se llama *base* del sistema de logaritmos que hemos considerado.

Pero como este sistema no es mas que un caso particular, de los inumerables sistemas que deben resultar si en vez de 10 ponemos una letra que represente cualquiera base; vamos á emprender un vuelo mas elevado para observar lo que hay en este asunto.

200. Dada la ecuacion general de la mencionada clase,

$$a^{\pm x}=z, \quad ....(38)$$

hágase crecer y decrecer x por grados insensibles y continuos para notar las variaciones que z padece, ya se considere $a>1$ ya $a<1$, siendo en ambos casos x positiva ó negativa.

1.° $a>1$. Si hacemos $x=0$ en $a^x=z$, resulta $z=1$: si se hace $x=1$ viene $z=a$; y sucesivamente cuanto mayor se haga x, tambien es mayor z. De modo que *en la ecuacion* $a^x=z$, *pasando* x *por todos los valores desde cero hasta el mayor imaginable, z crece al mismo tiempo con mas rapidez desde 1 hasta el máximo de su orden.*

Si x es negativa, la ecuacion $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}=z$ da los sistemas de valores correspondientes, $x=0$, $z=1$; $x=1$, $z=\dfrac{1}{a}<1$; &c. y sucesivamente z decrece á medida que x es mayor, hasta el máximo valor imaginable de x y el mínimo de z. Lo que nos hace ver *que en la ecuacion* $a^{-x}=z$, *pasando* x *por todos los valores desde cero hasta el final de los negativos, resultan para* z *todos los imaginables decrecentes desde* 1 *hasta cero.*

2.° $a<1$. Sea pues $a=\frac{1}{b}$: las ecuaciones $a^x=\frac{1}{b^x}=z$ en caso de x positiva, y $b^x=z$ en caso de x negativa, vuelven á ser las mismas del caso anterior, con la diferencia de que aqui creciendo x positiva desde cero al máximo, z decrece desde 1 hasta cero; y creciendo x negativamente desde cero hasta el fin, crece z tambien desde 1 hasta el máximo correspondiente.

3.° $a=1$. No ofrece materia, pues cualquiera valor de x hará $z=1$.

De todo lo cual se concluye que *en la ecuacion* $a^{\pm x}=z$, *siendo* a *cualquiera número, escepto la unidad, hay siempre un valor para* x *que haga* $a^{\pm x}$ *igual á una cantidad dada* z *positiva; é inversamente, que á todo valor positivo de* z *corresponde otro de* x *positivo ó negativo.* Es de notar al mismo tiempo, que no hay valor alguno de x positivo ó negativo que dé valor negativo para z.

201. La correspondencia observada entre x y z dió origen á un invento feliz, debido á Neper. Consiste en calcular los valores de x correspondientes á todos los que se quieran atribuir á z, sin que a varíe de valor en todo el cálculo. Formando así tablas, el inventor sustituyó á las operaciones aritméticas que se pueden hacer con los valores de z, otras que se hacen con los de x, como luego se dirá. Llámase *x logaritmo del número z*, y la cantidad invariable a se llama *base de logaritmos.*

Es evidente que variando de valor x y de resultas z en la ecuacion $a^x=z$, con uno mismo de a, resultará un sistema de logaritmos; pero tomando por base otro valor de a, el sistema de logaritmos será distinto que en el primer caso. Como la base a puede ser cualquiera, mayor ó menor que la unidad, *puede haber infinitos sistemas de logaritmos.* Suponiéndose dado el valor de la base a, la ecuacion

$$a^x = z \text{ equivale á } x = \text{logaritmo de } z$$

en el nuevo lenguage: é indicando el concepto con las iniciales de la palabra logaritmo, convencionalmente en cada sistema, se refieren á distintos las ecuaciones

$$x = \log.z \ ; \ x = \text{Log}.z \ ; \ x = \text{L}.z \ ; \ x = \text{l}.z \ ; \text{ etc.}$$

De lo observado en la ecuacion ((38)) se deducen varias consecuencias:

1.ª *En cualquiera sistema el logaritmo de la base es la unidad, y el logaritmo de la unidad es cero.*

2.ª *Si es la base* $a>1$, *los logaritmos de* $z>1$ *son positivos, y los de* $z<1$ *hasta* $z=0$ *negativos. Lo contrario sucede cuando es* $a<1$

3.ª *En cada sistema no puede tener un número mas que un logaritmo, ni un logaritmo puede corresponder mas que á un número.*

4.ª Segun las relaciones entre los números y sus logaritmos, *los números negativos no tienen logaritmos.*

202. Volviendo á la ecuacion $a^x = z$, supóngase que toma x los valores consecutivos de la progresion por diferencia $0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha, 5\alpha, \ldots n\alpha$ desde cero al infinito positivo, y que resulta $a^\alpha = m$. En tal supuesto dicha ecuacion será progresivamente $a^0 = 1$, $a^\alpha = m$, $a^{2\alpha} = m^2$, $a^{3\alpha} = m^3$, etc.: de suerte, que *á logaritmos en progresion por diferencia corresponden números en progresion por cociente*, segun manifiestan los términos respectivos de la tabla general

logaritmos, $0 , \alpha , 2\alpha , 3\alpha , 4\alpha , 5\alpha , 6\alpha , \ldots.n\alpha;$
números,... $1 , m , m^2 , m^3 , m^4 , m^5 , m^6 ,\ldots m^n.$

Lo mismo sucede tomando términos correspondientes salteados en ambas progresiones, con tal que los que se elijan en la primera tengan esta cualidad, como por ejemplo en la tabla siguiente, que se deduce de la anterior:

logaritmos....$0 , 2\alpha , 4\alpha , 6\alpha , \ldots.;$
números..... $1 , m^2 , m^4 , m^6 , \ldots.;$

lo mismo que eligiendo los términos de la primera por el orden,

logaritmos....$\alpha , 3\alpha , 5\alpha , 7\alpha , \ldots.;$
números.....$m , m^3 , m^5 , m^7 , \ldots.;$

y tambien aunque las progresiones empezasen desde cualesquiera términos respectivos.

Verdad es que serán fraccionarios los mas de los valores que resulten para z; pues no pudiendo formarse progresion geométrica de números enteros que crezca mas lentamente que la $1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32 ....$, aun los naturales intermedios de estos son en mayor número. Por lo cual, para lograr la seguida de los logaritmos de todos los números enteros hay la precision de tomar α cuan pequeña es necesario, para que la progresion de logaritmos dé en la de números, términos tan aproximados á cada uno de dichos números naturales, que la diferencia sea despreciable.

Entre todos los sistemas ha merecido el de la base $a=10$, el ser elegido para el uso ordinario del cálculo por logaritmos, llamándole *vulgar* ú *ordinario* ó *tabular*, y tambien sistema de *Brigs* por el apellido de quien le adoptó. En el sistema de tablas vulgares no aparecen escritos mas logaritmos que los correspondientes á los números naturales, desde cero hasta el que ha parecido bastante grande al constructor de las tablas, y ellos solos bastan para calcular en las necesidades los logaritmos de los números fraccionarios propios desde 1 hasta cero, y los impropios intermedios á dos cualesquiera enteros consecutivos, como se verá mas adelante.

203. Para manifestar los motivos que asistieron al inventor de los logaritmos en la empresa del nuevo cálculo, y las grandes utilidades que produjo la idea, vamos á deducir los fundamentales.

En un mismo sistema, es decir, en el sistema de logaritmos que tengan una base determinada cualquiera, sean

$$x=\log.z, \quad x'=\log.z', \quad \text{ó de otro modo,} \quad a^x=z, \quad a^{x'}=z',$$

dos relaciones, cada una entre el número y su logaritmo. Si se hace la multiplicacion de una por otra, y lo mismo la division, resultarán las ecuaciones

$$a^{x+x'}=zz' \quad , \quad a^{x-x'}=\frac{z}{z'},$$

que segun la nueva forma equivalen á

$$x+x'=\log.zz' \quad , \quad x-x'=\log.\frac{z}{z'}.$$

Sustituyendo por x y x' sus nombres log.z y log.z', resultan

$$\left.\begin{array}{l}\log z+\log.z'=\log.zz'\\ \log.z-\log.z'=\log.\dfrac{z}{z'}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(39):$$

espresiones de dos teoremas. 1.º *El logaritmo de un producto es la suma de logaritmos de sus factores.* 2.º *El logaritmo de un cociente es el logaritmo del dividendo menos el del divisor.* Segun el primer teorema, facilmente hallaremos el logaritmo de un número compuesto de dos factores, conociendo los logaritmos de éstos; y por el segundo teorema, el logaritmo de un número fraccionario, conociendo los logaritmos del numerador y del denominador: como en los casos que siguen, por ejemplo;

$$\log.8=\log.4+\log.2\quad;\quad\log.35=\log.7+\log.5;$$

$$\log.\frac{3}{5}=\log.3-\log.5\quad;\quad\log.\frac{83}{2}=\log.83-\log.2.$$

La ecuacion $z=a^x$ elevada á la potencia m es $z^m=a^{mx}$, y su raiz m^{sima}, $\sqrt[m]{z}=a^{\frac{x}{m}}$; ó, segun el nuevo lenguaje, $\log.z^m=mx$, $\log.\sqrt[m]{z}=\dfrac{x}{m}$; las cuales, sustituyendo por x su igual log.z, equivalen á

$$\log.z^m=m\log.z\quad,\quad\log.\sqrt[m]{z}=\frac{\log.z}{m}\quad\ldots\ldots\ldots(40),$$

espresiones de otros dos teoremas. 3.º *El logaritmo de una potencia es producto del esponente por el logaritmo de la raiz.* 4.º *El logaritmo de una cantidad radical es el cociente del logaritmo de la cantidad que hay bajo del radical, partido por el índice de la raiz.* En virtud de estos dos teoremas, no hay duda en cuanto á la exactitud de las equivalencias que siguen:

$$\log.4^3=\log.64=3.\log.4 \quad ; \quad \log.5^2=\log.25=2.\log.5;$$

$$\log.\sqrt{32}=\frac{\log.32}{2} \quad ; \quad \log.\sqrt[3]{126}=\frac{\log.126}{3} \quad ; \quad \text{etc.}$$

Segun los cuatro principios escritos en las fórmulas ((39)) y ((40)), de tener formadas las tablas logarítmicas de un sistema depende ya el que, á los cálculos de multiplicar y dividir dos cantidades entre sí, puedan sustituir los de sumar y restar sus logaritmos; y asimismo á los de elevar á potencias y estraer las raices, los de multiplicar y dividir.

Ademas, el teorema primero de la fórmula ((40)) conduce al descubrimiento de poder despejar la incógnita cuando en una ecuacion viene por esponente: problema que hasta aquí no habiamos propuesto. En efecto, sea $b^x=c$ una ecuacion en que se desconoce x: por el principio demostrado (201 3.ª) tendrán un mismo logaritmo los dos miembros de la ecuacion supuesta, que por esto viene á ser $\log.b^x=\log.c$; y segun el teorema 3.°, tambien es legítima la

$$x\log.b=\log.c; \quad \text{de donde,} \quad x=\frac{\log.c}{\log.b}.$$

Despejando asi el esponente $n-1$ del término general de la progresion por cociente ((36)), $t=aq^{n-1}$, despues de preparada segun la forma $\frac{t}{a}=q^{n-1}$ viene

$$\log.\frac{t}{a}=(n-1)\log.q; \quad \text{de donde} \quad n=\frac{\log.t-\log.a}{\log.q}+1.$$

Desde el citado teorema primero de la fórmula ((40)) se da otro grande paso en el cálculo, pues despejando $\log.q$ en la ecuacion de n que acabamos de sacar, tendremos la siguiente, que se conforma con el segundo teorema de la misma fórmula,

$$\log.q=\frac{\log.t-\log.a}{n-1}:$$

y queda resuelta la cuestion de hallar cualquiera número de términos medios por cociente, entre dos números a y t dados; dificultad considerable sin el auxilio de los logaritmos, y que hasta ahora solo podiamos resolver cuando se tratase de intercalar dos términos (189. 3.°).

204. Los principios demostrados facilitan el medio para hallar el logaritmo de un número z segun cualquiera sistema, conociendo el de dicho número en uno de los sistemas, es decir, para hallar la relacion que hay entre los logaritmos del número z que se refieran á dos bases diferentes. Sea en el uno $a^x=z$, y en el otro $a'^{x'}=z$: ecuaciones que segun la nueva forma se escriben $x=\log.z$, $x'=\log.z$. El número z es uno mismo en ambas ecuaciones, pero son distintas x y x' como tambien a y a'. Si en la ecuacion $a'^{x'}=z$ usamos de logaritmos del otro sistema, será (203. 3.°)

$$x'\log.a'=\log.z,\quad \text{de donde}\quad x'=\frac{\log.z}{\log.a'}=\log.z\,\frac{1}{\log.a'}.$$

Y de sustituir Log.z por x', resulta

$$\text{Log}.z=\log.z\,\frac{1}{\log.a'}\quad \ldots.(41).$$

Considerando á log.z como del sistema conocido, y á Log.z con la base a' como del nuevo, se concluye que *el logaritmo de un número en el sistema nuevo, es el cociente que salga de dividir su logaritmo del sistema conocido por el logaritmo que en este corresponde á la base nueva.* De modo que, dadas las tablas logarítmicas de un sistema, se pueden formar las de otro cualquiera. En suposicion de ser a la base de aquellas y a' la de éstas, la operacion se reduce á multiplicar los logaritmos conocidos por el factor $\frac{1}{\log.a'}$, constante en cada sistema y que se llama *módulo*.

LECCION V.

Formacion de tablas logarítmicas vulgares y modo de usarlas.

205. Segun la correspondencia entre números y logaritmos de la ecuacion $10^x = z$, á quienes hemos llamado vulgares; nos consta ((199)) que si se atribuyen á x los valores consecutivos enteros, vienen para z los términos salteados de la progresion geométrica por el orden siguiente:

logaritmos......0, 1, 2, 3, 4 ,......
números.......1, 10, 100, 1000, 10000,.......

Los números ó valores de z entre 1 y 10 tendrán sus logaritmos correspondientes mayores que cero y menores que 1: los que hay entre 10 y 100 tendrán logaritmos mayores que 1 y menores que 2, etc. En general, las potencias de 10 tienen logaritmos enteros exactos, que son los mismos esponentes, pero los números enteros comprendidos entre dichas potencias tienen logaritmos fraccionarios; y los mas de estos números no pueden ser términos de la progresion geométrica por lo demostrado (202). ¿Cómo se hallarán pues los logaritmos de dichos números intermedios? Por aproximacion, es decir, hallando los de los números fraccionarios tan aproximados á los enteros, que la diferencia sea despreciable.

206. Antes que la análisis algébrica presentase medios fáciles para ello, se discurrió el formar la progresion geométrica que tenga el primer término 1 y el último 10 con un gran número de medios, y otra aritmética que tenga el primer término cero y el último 1 con igual número de medios, cerrando entre si una y otra hasta resultar en aquella términos bien aproximados á los enteros 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. De igual modo otra progresion geométrica entre 10 y 100, y la correspondiente aritmética entre 1 y 2, hasta encontrar en aquella términos muy aproximados á cada uno de los enteros desde 11 hasta 99 inclusive; y asi sucesivamente para los comprendidos entre las potencias consecutivas de 10.

207. La dificultad que ofrecia este método, obligó á emprender el siguiente: hallar cada vez un solo medio geométrico entre dos números, uno mayor y otro menor que el de la cuestion, y al mismo tiempo un medio por diferencia entre los logaritmos de dichos números mayor y menor. Acercándose de este modo poco á poco hasta hallar el medio geométrico bien aproximado al número entero que se quiere, podemos considerar logaritmo de éste el medio aritmético correspondiente. El caso se considera llegado cuando las siete primeras cifras decimales son ceros, pues generalmente no constan de mas los logaritmos que se emplean en los cálculos por el método de las fórmulas ((39)) y ((40)).

A fin de adquirir por este método el logaritmo tabular de 2, hállese el medio por cociente entre 1 y 10 que es 3,16227766 aproximado hasta ocho cifras decimales, y el medio por diferencia entre 0 y 1 que es 0,5; otro medio por cociente entre 1 y 3,16227766 que es 1,77827941, y el medio por diferencia entre 0, y 0,5 que es 0,25; el medio por cociente entre 1,77827941 y 3,16227766 que es 2,37137370, y el medio por diferencia entre 0,5 y 0,25 que es 0,375; el medio por cociente entre 1,77827941 y 2,37137370, y el medio por diferencia entre 0,25 y 0,375; etc.

Continuando por este orden de hallar medios por cociente entre los dos mas próximos al 2, uno mayor y otro menor, y sus correspondientes por diferencia, se llegará al de esta clase 0,3010300, y al de cociente 2,0000000 respectivo. En atencion á que las siete cifras decimales de éste son ceros, podemos admitirle por el número 2, y el medio aritmético 0,3010300 por logaritmo tabular de 2.

Para buscar el logaritmo de 3, se empieza y sigue el mismo cálculo hasta llegar á los números 3,16227766 y 2,37137370, cuyo medio geométrico se debe hallar por ser los mas cercanos al 3; y tambien el otro cálculo hasta llegar á los correspondientes logaritmos 0,5 y 0,375. Desde aqui se continúa la investigacion por el orden esplicado, y se hallará 0,4771212, logaritmo de 3.

Actualmente hay modos mas fáciles y elegantes de formar tablas logarítmicas de los números simples, como se verá mas adelante; pero entre tanto hemos dado á conocer éste, para manifestar que solo con las ideas adquiridas hasta ahora podemos lograr el objeto. De todos modos, teniendo los logaritmos de los números simples, se deducen por sumacion ó multiplicacion los de todos los compuestos, usando de las fórmulas ((39)) y ((40)), como por ejemplo

$$\log.4=\log.(2\times2)=\log.2+\log.2=2\log.2$$
$$\log.6=\log.(2\times3)=\log.2+\log.3,$$
$$\log.8=\log.(2\times4)=\log.2+\log.4=3\log.2,$$
$$\log.9=\log.3^2=2\log.3\ldots\ldots \text{etc.}$$

No nos hemos propuesto hallar los logaritmos de los números fraccionarios, porque bastan para el cálculo los de los números enteros, á causa de que segun el teorema 2.° del artículo (173), el logaritmo de una fraccion es igual á el logaritmo del numerador menos el del denominador. En atencion á esto, nos hemos tambien ocupado desde el principio de la leccion solamente del caso $10^x=z$, correspondiente á los números z que hay desde 1 arriba, y no del caso $10^{-x}=z$ correspondiente á los números fraccionarios (200).

En el dia ya estamos dispensados del penoso trabajo de formar tablas logarítmicas, porque se hallan construidas por varios autores, aunque mas ó menos completas y corregidas. Las de Don Tadeo Lope, que alcanzan hasta el número 107500, son en nuestro concepto las mas completas publicadas en España. De las estrangeras lo son aun mas las de Callet que alcanzan hasta el número 108000, y las que ultimamente se han publicado en Francia bajo la direccion del célebre Prony, las cuales alcanzan hasta el número 200000. Para el uso de los que asisten al estudio son suficientes otras menos estensas, como las reducidas de Laland, impresas á la esterotipa por Didot. Cada editor hace al principio de las suyas las advertencias que se necesitan para el manejo de ellas, pues como se ha dicho antes, suprimen todos la característica, y emplean ademas otros varios artificios para hacer menos voluminoso el libro. En ellas consta de varias columnas cada plana, alternando una columna de números y otra de sus correspondientes logaritmos; aquella encabezada con la letra *N* inicial de número, y ésta con la letra *L* inicial de logaritmo.

Aqui pertenece solamente hacer algunas advertencias que faciliten la inteligencia de las tablas, y otras que conduzcan á emplear oportunamente el cálculo de logaritmos. Este será el objeto de los artículos que siguen.

208. El logaritmo de todo número consta de una parte característica en que se escriben enteros, si los hay, y otra decimal: aquella, segun lo demostrado (205), necesariamente consta de tantas unidades como cifras de enteros menos una tiene el número á que corresponde. Los logaritmos de los números que hay desde 1 hasta 9 tienen la característica cero: desde 10 hasta 99 la característica 1; desde 100 hasta 999 la característica 2; desde 1000 hasta 9999 la característica 3; etc.; y por este conocimiento en las tablas está suprimida la característica, pues cualquiera puede inferirla del número que está escrito en la línea de su logaritmo.

209. Dado un número z y su logaritmo, los números $10z$, $100z$, $1000z$, ... $10^n z$ tienen por logaritmos, segun el teorema 1.° del artículo (203), las sumas $1+\log.z$, $2+\log.z$, $3+\log.z$... $n+\log.z$: en donde vemos que la parte decimal del logaritmo de un número es la misma en todos los que son 10, 100, 1000.... 10^n veces mayores, y que la característica se aumenta con 1, 2, 3 ....n unidades. Así, por ejemplo,

$$\log.14=1,1461280 \text{ , } \log.140=2,1461280,$$

$$\log.140000=5,1461280.$$

De suerte que: 1.° dado un logaritmo que esté en las tablas fácilmente se sabe el de todo número 10, 100 .... etc. veces mayor: 2.° dado un logaritmo que no esté en las tablas por su característica c elevada, es decir por no alcanzar las tablas hasta su número, se halla primero el número suponiendo cero la característica; y multiplicándole por 10^c, el producto será número del logaritmo dado.

210. Siempre que se deba emplear el cálculo ((39)) ó ((40)) de logaritmos en hallar el valor de una espresion, es necesario reducir ésta á la forma de producto, cociente, potencia ó raiz, y simplificarla tambien cuanto se pueda para que resulten menos grandes los números y libre de superfluidad la espresion.

211. El logaritmo de una fraccion se deduce facilmente por la fórmula ((39))

$$\log.\frac{z}{z'}=\log.z-\log.z';$$

mas, cuando fuere $z'>z$, será negativo el resto, y en las cuestiones aritméticas se hace la operacion restando el logaritmo menor del mayor y anteponiendo el signo — á la diferencia. Por ejemplo, segun las tablas vulgares tenemos

$$\log.\tfrac{3}{5}=\log.3-\log.5=0{,}4771212-0{,}6989700=$$

$$-0{,}2218488 \quad ; \quad \log.\tfrac{7}{100}=\log.7-\log.100=$$

$$0{,}8450980-2=-1{,}1549020;\ \&c.$$

Inversamente, si queremos el número á que corresponde el logaritmo negativo —0,2218488, de nada servirá el que se registren las tablas; pues como se ha dicho antes, no contienen mas logaritmos que los positivos, es decir, correspondientes á números enteros, y el que se nos presenta aqui debe ser necesariamente de una fraccion propia. Sin embargo, estableciendo la equivalencia

$$\log.10-0{,}2218488=1-0{,}2218488=0{,}7781512,$$

las tablas dan $0{,}7781512=\log.6.$

Mas, como se ha aumentado el logaritmo de 10 al negativo propuesto, síguese que el número hallado es 10 veces mayor que el de la cuestion: haciéndole pues 10 veces menor, será

$$-0{,}2218488=\log.0{,}6.$$

Asimismo, queriendo saber el número del logaritmo —1,3979400, es claro que se ha de restar de 2 para que el residuo venga positivo: verificada la resta, se halla $2-1{,}3979400=0{,}6020600$, y registradas las tablas veremos que 0,6020600 es algo mayor que el logaritmo de 4 y mucho menor que el de 5; de modo que el número entero á que próximamente corresponde es 4, y en este concepto diremos $0{,}6020600=\log.4$ proximamente. Como el propuesto fue aumentado en 2 que es el logaritmo de 100, será $-1{,}3979400=\log.0{,}04$ proximamente.

En general para hallar el número correspondiente á un logaritmo negativo por las tablas ordinarias, es necesario restarle del logaritmo de 10, 100, &c. segun convenga para que la diferencia sea positiva; buscar despues en las tablas el número de este logaritmo residuo; y partiendo el tal número por el del logaritmo añadido, el cociente será el número que corresponde á el logaritmo negativo propuesto.

212. Bien se puede notar que la operacion precedente consiste en hallar el complemento del logaritmo negativo que se propone, y dividir el número del *complemento logarítmico* por la potencia de 10 á que se refiere.

En efecto, sabemos (21) y (64) que son equivalentes los logaritmos $-0,2218488$ y $\bar{1},7781512$, pues el primero es residuo de resta efectuada, y el segundo la misma resta indicada, como $0,7782512-1$.

Generalmente, á fin de evitar los logaritmos negativos en el cálculo de fracciones, se dispone desde luego por el método de complementos: y asi, en vez de

$$\log.\tfrac{3}{5}=\log.3-\log.5=-0,2218488, \text{ se escribe}$$

$$\log.\tfrac{3}{5}=\log.3+\text{complemento }\log.5,$$

cuyo cálculo es

$$\log.3=0,4771212$$

$$\text{comp. }\log.5=\bar{1},3010300$$

$$\text{suma, ó}\quad \log.\tfrac{3}{5}=\bar{1},7781512.$$

Los logaritmos de las fracciones decimales se encuentran con facilidad haciendo solamente la resta de características, como por ejemplo,

$$\log.\frac{3241}{100}=\log.3241-2=1,5106790=\log,32,41;$$

$$\log.\frac{7}{100}=\log.7-2=\bar{2},8450980=\log.0,07;$$

$$\log.\frac{7}{1000000}=\bar{6},8450980=\log.0,000007;$$

sin el circunloquio que resultaria por el método de los complementos, como en

::

$$\log.\frac{7}{1000000}=\log.7+\text{comp}.6=\overline{14},8450980=$$

$$\log.0,000007.$$

Cuando se presenta un logaritmo con la cifra c acentuada en la característica, para hallar en las tablas el número correspondiente se busca el de lo restante del logaritmo; y dividiendo el número que dieren las tablas por 10^c, con la prevision de atribuir á c el carácter correspondiente de unidades, decenas, etc. saldrá por cociente el número que se pide. Ejemplos de ello son los siguientes casos:

$$\overline{2},6020599=\log.0,04 \quad ; \quad \overline{1},7781512=\log.0,6;$$
$$\overline{2},8450980=\log.0,07 \quad ; \quad \overline{6},8450980=\log.0,000007;$$
$$\overline{14},8450980=\log.0,000007.$$

213. Cuando hay que sumar y restar en un cálculo varios logaritmos, se puede convertir en sumacion todo, por el método de los dos artículos precedentes.

1.° Si son dados los logaritmos, se escriben en columna todos, con la precaucion de sustituir á los negativos los complementos de ellos, anotando con el acento la característica como está esplicado.

Sean 0,5203108 , —3,7605912 , 5,2631102, —0,3176382 los logaritmos que se habrian de reunir en uno, sumando los positivos y restando los negativos; operacion equivalente á multiplicar los números que corresponden á los primeros, y dividir este producto por el de los números correspondientes á los segundos. El cálculo de restar la suma de los logaritmos negativos propuestos, de la suma de los positivos, daria el residuo 1,7051916; y acudiendo á las tablas se hallaria que este logaritmo corresponde al número 51 próximamente. Mas aqui se trata de hacer todo el cálculo por sumacion, y para esto se halla que el complemento de 3,7605912, ó su diferencia á 10, es 6,2394088; el de 0,3176382 ó su diferencia á 1, es 0,6823618. Añadiendo á las características respectivas los enteros $\overline{10}$ y $\overline{1}$, acentuados para marcar que el calculador se reserva el restar estas unidades de la suma que sin ellas dieren todos los logaritmos, el cálulo será

$$\begin{array}{r} 0,5203108 \\ \overline{16},2394088 \\ 5,2631102 \\ \overline{1},6823618 \\ \hline \end{array}$$

Suma 1,7051916=log.51 próximamente.

2.° Si son dados los números, y entre ellos hay fraccionarios de que procedan logaritmos negativos; desde luego se dispone el cálculo por el método de complementos, como en el ejemplo log.$\frac{3}{5}$ del artículo (212); y despues de hacer la sumacion se registran las tablas, como allí se dijo, para tener el número correspondiente á la suma.

214. Las tablas mas completas no es posible que lleguen hasta el mayor número que se pueda ofrecer: las de Callet, por ejemplo, célebres por su correccion y abundancia de logaritmos, alcanzan solo hasta el número 108000; y suele haber necesidad con frecuencia de un logaritmo á cuyo número no lleguen las tablas que se tengan á la mano. En tales casos podemos hallar dicho logaritmo por el siguiente medio, que es general, pero solo conveniente para números primeros. Sea por ejemplo 9000 el mayor número de las tablas que se tengan, y trátese de hallar el logaritmo de 15452: con este objeto divídase el número propuesto por 10 separando con la coma una cifra de la derecha, y será

$$\log.15452=\log.1545,2+\log.10;$$

mas para el cálculo hay que saber el logaritmo de 1545,2, y no es posible hallarle por el método ordinario (212) de los números con decimales: porque segun él, volveríamos á necesitar el logaritmo de 15452. Precisados pues á seguir otro método, y á fin de que por el ejemplo actual quede bien esplicado, espresemos con d la diferencia entre los números 1545,2 y 1545; con Δ la diferencia entre sus logaritmos; con d' la diferencia entre los números 1546 y 1545; y finalmente con Δ' la diferencia entre los logaritmos de éstos. Búsquense en las tablas los logaritmos de 1545 y 1546, que son 3,1889285 y 3,1892095: fórmese entre las diferencias de números y las de logaritmos,

$$d=1545,2-1545=0,2\ ,\ d'=1546-1545=1,$$

$$\Delta=\log.1545,2-\log.1545,$$

$$\Delta'=3,1892095-3,1889285=0,0002810,$$

la proporcion $\frac{\Delta}{\Delta'}=\frac{d}{d'}$, y ella nos dará el valor

$$\Delta=\frac{d\times\Delta'}{d'}=\frac{0,2\times0,0002810}{1}=0,0000562.$$

Añádase la diferencia Δ á el logaritmo de 1545, y resultará

$$\log.1545,2=3,1889847;$$

y por último, segun lo dicho (203. 1.º),

$$\log.15452=1+3,1889847=4,1889847.$$

La regla de tres planteada para indagar la diferencia Δ, se funda en suponer que los números estan en razon de sus logaritmos, y es falsa en realidad; pero hemos usado de ella por ser el error de poca consideracion, como se deduce por el raciocinio siguiente.

La diferencia entre los logaritmos de 10 y 1 es $1-0=1$; de modo que esta diferencia se reparte entre los logaritmos de los números que hay desde 1 hasta 10, y cuanto menor es la diferencia de los números, tambien resulta menor la de sus logaritmos. La diferencia de logaritmos de 100 y de 10 es $2-1=1$: tambien $3-2=1$ la de logaritmos de 1000 y de 100; y siempre 1 la diferencia de logaritmos correspondientes á 10^n y 10^{n-1}, diferencia que se reparte entre los números comprendidos. Como, segun es mayor n, hay mas números comprendidos, se sigue que cuanto mayor es el número por quien se emplee la proporcion supuesta, tanto menos error se comete y con mas ventaja se puede hacer uso de ella.

Si el número es compuesto, se debe preferir el medio de hallar su logaritmo por sumacion de los logaritmos de sus factores, teniendo la advertencia de no descomponerle en mas factores que los precisos, es decir, aquellos que esten en las tablas que se tengan á la mano. Por ejemplo, el mismo número 15452 equivale á 3863×4; y por ello será

$$\log.15452=\log.3863+\log.4=$$

$$3,5869247+0,6020599=4,1889846.$$

El artículo (209) enseña el medio de hallar el número de un logaritmo dado á que no alcancen las tablas. Tambien se llegará al mismo resultado descomponiendo el logaritmo en dos partes, hallando los números de cada parte, y multiplicando estos entre sí ((39)). Pero es necesario para emplear cualquiera de los dos medios, calcular exactamente por el artículo que sigue, en caso necesario, dichos números parciales.

215. Muchas veces ocurre, al buscar en las tablas el número de un logaritmo dado, que á ninguno corresponde cabalmente, como nos aconteció con el logaritmo 1,7051916 á quien vimos pertenecer aproximadamente el número entero 51: pero el exacto es necesariamente algo menor, por ser

$$\log.51=1,7075701>1,7051916.$$

Cuando se quiera hallarle cabal, nos valdremos de la proporcion supuesta en el artículo anterior, tratando como incógnita la diferencia d de números. Sean

$$\Delta=1,7075701-1,7051916=0,0023785;$$

$$\Delta'=\log.51-\log.50=1,7075701-1,6989700=0,0086001;$$

$$d=51-\text{ número del logaritmo } 1,7051716;$$

$$d'=51-50=1.$$

La proporcion es $\frac{\Delta}{\Delta'}=\frac{d}{d'}$; y ella nos da, sustituyendo los valores conocidos de las letras, el valor de la diferencia de los números $d=\frac{0,0023785}{0,0086001}=0,27888\ldots\ldots\ldots$

Restando d de 51, es $51-0,27888\ldots\ldots=50,72112\ldots.$ el número del logaritmo 1,7051916.

216. Con estas advertencias no puede haber dificultad en el cálculo por logaritmos, ni en el manejo de cualesquiera tablas logarítmicas. Por tanto, concluiremos proponiendo para ensayo de calcular por logaritmos las espresiones que siguen:

$$z=25\times\frac{7}{9}\ ;\ z'=\frac{0,6\times72}{8,302}\ ;\ z''=\left(\frac{36}{43}\right)^5;$$

$$z'''=\frac{4}{7}\times\sqrt[5]{\frac{342,01}{63}}.$$

Los tipos de los cálculos respectivos convirtiendo las restas en sumaciones por el método de complementos, vienen á ser como á continuacion se ve:

Para $z=25\times\frac{7}{9}$ ó $\log.z=\log.25+\log.7-\log.9$,

log.25	1,3979400
log.7	0,8450980
compl. log.9	$\bar{1}$,0457575
suma ó log.z	1,2887955

$z=19,548$

Para $z'=\frac{0,6\times72}{8,302}$ ó $\log.z'=\log.0,6+\log.72-\log.8,302$

log.0,6	$\bar{1}$,7781512
log.72	1,8573325
compl. log.8,302	$\bar{1}$,0808173
suma ó log.z'	0,7163010

$z'=5,21.....$

Para $z''=\left(\frac{36}{43}\right)^5$ ó $\log.z''=5(\log.36-\log.43)$

log.36	1,5563025
compl. log.43	$\bar{1}$8,3665316
suma	$\bar{1}$9,9228341
quintuplo de la suma ó log.z''	$\bar{5}$9,6141705

$z''=0,4.....$

$$\text{Para } z'''=\frac{4}{7}\times\sqrt[5]{\frac{342{,}01}{63}}$$

$$\text{ó } \log.z'''=\frac{\log.342{,}01-\log.63}{5}+\log.4-\log.7$$

log.342,01	2,5340388
compl. log.63	$\bar{1}$8,2006595
suma	0,7346983
5.ª parte de la suma	0,1469396
log.4	0,6020599
compl. log.7	$\bar{1}$,1549020
suma total ó log.z'''	$\bar{1}$,9039015

$z'''=0{,}8\ldots\ldots$

Los cálculos respectivos de las mismas cuatro espresiones empleando los logaritmos negativos, serán como á continuacion se ve.

Para $\log.z=\log.25+\log.7-\log.9$

log.25	1,3979400
log.7	0,8450980
suma	2,2430380
—log.9	—0,9542425
diferencia	1,2887955 $=\log.z$

$z=19{,}548$

Para $\log.z'=\log.0,6+\log.72-\log.8,302$

log.0,6	$\bar{1}.7781512$
log.72	1,8573325
suma	1,6354837
—log.8,302	—0,9191827
diferencia	0,7163010=log.z'

$z'=5,21$

Para $\log.z''=5(\log.36-\log.43)$

log.36	1,5563025
—log.43	—1,6334684
diferencia	—0,0771659
el quintuplo ó log.z''	—0,3858295=0,6141705—1

$$z''=\frac{4....}{10}=0,4....$$

$$\text{Para } \log.z'''=\frac{\log.342,01-\log.63}{5}+\log.4-\log.7$$

log.342,01	2,5340388
—log.63	—1,7993405
diferencia	0,7346983
5.ª parte	0,1469396
log.4	0,6020599
suma	0,7489995
—log.7	—0,8450980
diferencia ó log.z'''	—0,0960985=0,9039015—1

$$z'''=\frac{8}{10}=0,8.$$

FIN DEL TOMO PRIMERO.

INDICE DEL TOMO I.

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA ELEMENTAL.

CAPÍTULO PRIMERO.

Principios y convenios fundamentales.

CAPÍTULO II.

Cálculos de sumar, restar, multiplicar y dividir, con las unidades enteras y partes decimales en aritmética.

CAPÍTULO III.

Cálculos de sumar, restar, multiplicar y dividir, con cantidades literales enteras.

CAPÍTULO IV.

Cálculo de cantidades fraccionarias en aritmética.

CAPÍTULO V.

Cálculo de cantidades fraccionarias literales.

CAPÍTULO VI.

Potencias y raices en aritmética.

CAPÍTULO VII.

Potencias y raices literales.

Capítulo VIII.

Teoría de las ecuaciones de primero y segundo grado.

Capítulo IX.

Razones, proporciones, progresiones y logaritmos.

ODRIOZOLA

MATEMATICA

1