ESCOLIO II.

448 Los prismas semejantes *BEFH*; *MPQS* están en razon triplicada de sus lados homólogos *BC*, *MN*. *Fig.* 11.

Tírense desde los ángulos iguales *A* y *L* á los opuestos las rectas *AC*, *AD*, y *LN*, *LO*; y quedarán (319) divididas las bases de los referidos prismas en triángulos respectivamente semejantes, esto es, *ABC* á *LMN*, *ACD* á *LNO*, y *ADE* á *LOP*: asimismo tírense las rectas *GI*, *GK*, y *RT*, *RV*. Siendo las rectas *CI* y *AG* iguales y paralelas á *BH*, será *CI* igual y paralela (385) á *AG*, y la figura *ACIG* será (106) un paralelógramo. Del mismo modo se demostrará que la figura *LNTR* es un paralelógramo. Ahora por ser semejantes (sup.) los paralelógramos *BAGH*, *MLRS*, será *GA* : *AB* = *RL* : *LM*; pero *AB* : *AC* = *ML* : *LN*, por la semejanza de los triángulos *BAC*, *MLN*: luego por igualdad ordenada será *GA*: *AC* = *RL* : *LN*; además por ser los ángulos *GAB* = *RLM*, *BAE* = *MLP*, *GAE* = *RLP*, y *BAC* = *MLN*, es el ángulo *GAC* = *RLN*: luego los paralelógramos *GACI*, *RLNT* serán semejantes, y siéndolo tambien respectivamente los demas planos de los prismas *BACHGI*, *MLNSRT*, serán estos semejantes: por consiguiente (417) estarán en razon triplicada de los lados homólogos *BC*, *MN*. Del mismo modo se demostrará que los prismas *GIKACD*, *RTVLNO* están en razon triplicada de *CD* á *NO*, y que los prismas *GKFADE*, *RVQLOP* están en la triplicada de *DE* á *OP*; pero por ser iguales las razones *BC* á *MN*, *CD* á *NO*, *DE* á *OP*, son tambien iguales (313) sus triplicadas: luego será el prisma *GHIABC*: *RSTLMN* $=$ *GIKACD*: *RTVLNO* $=$ *GKFADE*: *RVQLOP*; por consiguiente (262) el prisma *BEFH*: *MPQS* $=$ *GHIABC*: *RSTLMN* ó bien como la triplicada de *BC* á *MN*.

PROPOSICION IX.

449 Las pirámides iguales *DABC*, *HEFG* de bases triangulares *ABC*, *EFG*, tienen sus bases recíprocamente proporcionales á sus alturas; y las pirámides triangulares, que tienen las bases recíprocamente proporcionales á sus alturas, son iguales entre sí. *Fig.* 10.

I. Complétense los paralelepípedos *AK*, *EO*; y siendo (sup.) las pirámides *DABC*, *HEFG* iguales, serán tambien (445) iguales los paralelepípedos *AK*, *EO*: luego será (418) la base *AJ* á la base *EN* como la altura del paralelepípedo *EO* á la del paralelepípedo *AK*; pero (267) *AJ*: *EN* $=$

ABC: *EFG*, y las alturas de dichos paralelepípedos son las mismas que las de las referidas pirámides: luego será la base *ABC* á la base *EFG* como la altura de la pirámide *HEFG* á la de la pirámide *DACB*.

II. Si la base *ABC* es á la base *EFG* como la altura de la pirámide *HEFG* á la de la pirámide *DABC*; dichas pirámides serán iguales. Siendo los paralelógramos *AJ*, *EN* duplos de los triángulos *ABC*, *EFG*, será tambien el paralelógramo *AJ* al paralelógramo *EN* como la altura de la pirámide *HEFG*, ó bien del sólido *EO*, á la altura de la pirámide *DABC*, ó bien del sólido *AK*: luego será (418) el sólido *AK* = *EO*; por consiguiente (445) la pirámide *DABC* = *HEFG*. Que es &c.

PROPOSICION X.

450 El cono es la tercera parte del cilindro, que tiene la misma base *FGH* é igual altura. *Fig.* 12.

Inscríbase en el círculo *FGH* el quadrado *EFGH*, y córtense por medio los arcos *EF*, *FG*, *GH*, *HE* en los puntos *L*, *M*, *N*, *O*; tírense las rectas *EL*, *LF*, *FM*, &c. y por *L* la tangente *QLP*; finalmente prolónguense las rectas *GF*, *HE* hasta los puntos *Q*, *P*. Siendo (209) el quadrado

EFGH mitad del quadrado circunscrito al círculo, será (444) el prisma elevado sobre dicho quadrado inscrito con la altura del cilindro, mitad del prisma elevado sobre el circunscrito con igual altura; por consiguiente aquel prisma será mayor que la mitad del referido cilindro. Del mismo modo se demostrará que el prisma elevado sobre el triángulo *ELF* con la altura del cilindro es mayor que la mitad del segmento del cilindro, cuya base es *ELF*; y por la misma razon los prismas elevados sobre los demas triángulos *FMG*, *GNH*, *HOE* serán mayores que las mitades de los segmentos cilíndricos, cuyas bases son los segmentos *FMG*, *GNH*, *HOE*. Dividiendo así por medio los arcos *EL*, *LF*, *FM*, &c. juntando las secciones, y sobre cada uno de los triángulos elevando prismas de iguales alturas á la del cilindro; y prosiguiendo siempre la misma operacion, vendrán á quedar al fin (428) ciertas porciones del cilindro menores que qualquiera cantidad dada *J*; por consiguiente el prisma se acerca continua y constantemente al cilindro, de suerte que su diferencia llega á ser menor que qualquiera cantidad dada: luego últimamente el prisma es igual (430) al cilindro, es á saber, quando el número de los lados del polígono base del prisma se considera aumentado al infinito. Igualmente se demostra-

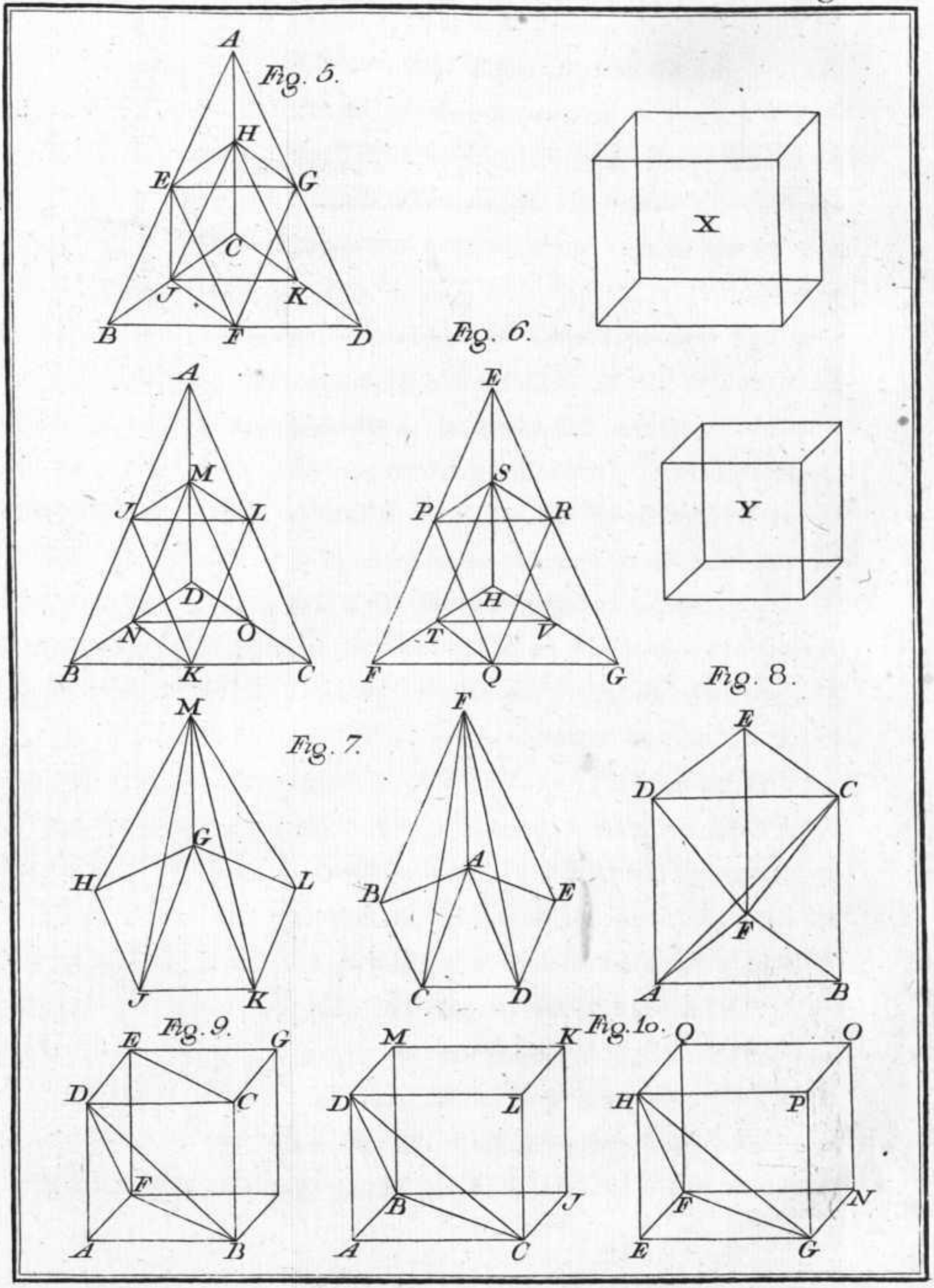
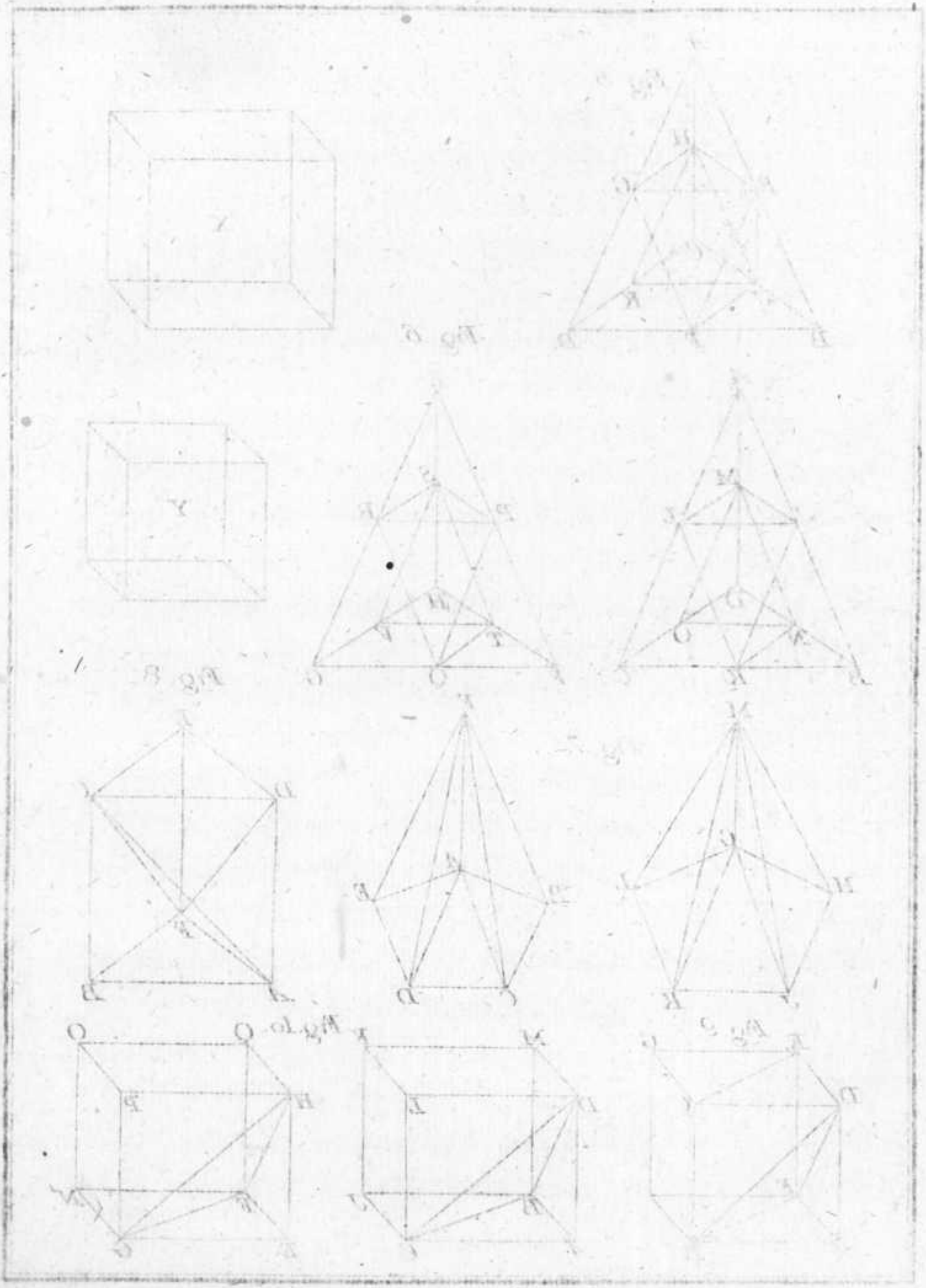


Fig. 5.
A
H
E
G
C
J
K
B
F
D
X
Fig. 6.
A
M
J
L
D
N
O
B
K
C
E
S
P
R
H
T
V
F
Q
G
Y
Fig. 7.
M
G
H
L
J
K
F
A
B
E
C
D
Fig. 8.
E
D
C
F
A
B
Fig. 9.
E
G
D
C
F
A
B
M
K
D
L
B
J
A
C
Fig. 10.
Q
O
H
P
F
N
E
G



rá que el cono es igual á la pirámide de igual altura, cuya base es dicho polígono; pero (443) la pirámide es la tercera parte del prisma de igual base y altura: luego tambien el cono será la tercera parte del cilindro de igual base y altura. Que es &c.

DE OTRO MODO.

Si el cono no fuese igual á la tercera parte del cilindro, sería menor ó mayor.

I. Sea menor; será por consiguiente el cilindro igual al triplo del cono mas la diferencia *J*: y hágase la construccion de la figura como antes. Se ha demostrado que ciertos segmentos del cilindro, como los que tienen por bases los segmentos *EL*, *LF*, *FM*, *MG*, *GN*, *NH*, *HO*, *OE* quedarán al fin menores que *J*: luego el prisma formado sobre la base *ELFMGNHO* de igual altura del cilindro será mayor que el triplo del cono; pero (443) el prisma es triplo de la pirámide de igual base y altura: luego la pirámide formada sobre la base *ELFMGNHO* de igual altura del cono será mayor que él, esto es, la parte mayor que el todo, lo que es imposible: luego el cono no puede ser menor que la tercera parte del cilindro.

II. Sea el cono mayor que la tercera parte del cilindro; y sea la diferencia *J*; será por consiguiente el cono igual á dicha tercera parte mas $\mathcal{J}$: y hecha la misma construccion de la figura, se demostrará de un modo semejante que al fin quedarán ciertos segmentos del cono menores que $\mathcal{J}$, por exemplo, los que insisten sobre los segmentos *EL*, *LF*, *FM*, *MG*, &c. luego la pirámide, cuya base es el polígono *ELFMGNHO*, y vértice el mismo que el del cono, será mayor que la tercera parte del cilindro; pero dicha pirámide es (443) la tercera parte del prisma de igual base, y altura: luego este prisma será mayor que el cilindro, lo que es imposible: luego el cono debe ser precisamente igual á la tercera parte del cilindro de igual base y altura, respecto á que no puede ser menor, ni mayor. Que es &c.

COROLARIO I.

451 El cono es igual á la pirámide de igual altura, cuya base es el polígono inscrito en la del cono, con tal que sea infinito el número de los lados del polígono.

COROLARIO II.

452 Los conos son (267) como los cilindros de igual altura y base, por ser los cilindros triplos de los conos.

PROPOSICION XI.

453 Los cilindros, y los conos *KABCD*, *MEFGH* de igual altura son entre sí como sus bases *ABCD*, *EFGH*. *Fig.* 13.

Las pirámides *KATBVCXDY*, *MEPFQGRHS* de igual altura son (440) como los polígonos semejantes *ATBVCXDY*, *EPFQGRHS*, sobre que insisten; pero aumentado el número de los lados de estos polígonos al infinito, las pirámides son (451) últimamente iguales á los conos de igual altura, cuyas bases son los círculos *ABCD*, *EFGH*, y los polígonos son iguales á dichos círculos: luego los conos *KABCD*, *MEFGH* serán entre sí como los círculos *ABCD*, *EFGH*, que son sus bases; pero (452) los conos son como los cilindros de igual altura y base: luego tambien los cilindros de igual altura serán entre sí como sus bases *ABCD*, *EFGH*. Que es &c.

DE OTRO MODO.

Supóngase el círculo *ABCD* al círculo *EFGH* como el cono *KABCD* al sólido *N*; y si la proposicion fuese falsa, sería *N* menor ó mayor que el cono *MEFGH*.

I. Sea menor, y la diferencia *O*; será por consiguiente $N + O = MEFGH$: y hecha la construccion de las figuras como antes (450), se demostrará del mismo modo que ciertos segmentos del cono, como los que tienen por bases *EP*, *PF*, *FQ*, *QG*, *GR*, *RH*, *HS*, *SE*, quedarán al fin menores que qualquiera cantidad dada *O*: luego la pirámide, cuya base es el polígono *EPFQGRHS*, y su altura la del cono, será mayor que *N*. Descríbase ahora en el círculo *ABCD* el polígono *ATBVCXDY* semejante al polígono *EPFQGRHS*; y elévese sobre él una pirámide de igual altura: y siendo (440) la pirámide *KATBVCXDY* á la pirámide *MEPFQGRHS* como el polígono *ATBVCXDY* al polígono *EPFQGRHS*, serán tambien (434) las dos referidas pirámides como el círculo *ABCD* al círculo *EFGH*; pero (sup.) el círculo *ABCD* al círculo *EFGH* como el cono *KABCD* á *N*: luego será el cono *KABCD* á *N* como la pirámide *KATBVCXDY* á la pirámide *MEPFQGRHS*; pero el cono *KABCD* es mayor que la pirámide *KATBVCXDY*: luego será (265) *N* mayor que la pirámide *MEPFQGRHS* que está en el cono *MEFGH*, lo que es imposible: luego no puede ser *N* menor que el cono *MEFGH*.

II. Sea el sólido *N* mayor que el cono *MEFGH*: y siendo el círculo *ABCD* al círculo *EFGH* como el cono *KABCD* al sólido *N*, será invirtiendo (254) el círculo *EFGH* al círculo *ABCD* como el sólido

N al cono *KABCD*. Supóngase ahora *N* al cono *KABCD* como el cono *MEFGH* al sólido *O*; y por ser $N > MEFGH$ (sup.), será tambien (265) $KABCD > O$: luego será el círculo *EFGH* al círculo *ABCD* como el cono *MEFGH* al sólido *O*, lo que es imposible por lo demostrado en la suposicion precedente: luego no puede ser *N* mayor que *MEFGH*, ni menor como se demostró anteriormente; y por lo tanto será $N = MEFGH$: luego será el círculo *ABCD* al círculo *EFGH* como el cono *KABCD* al cono *MEFGH*; pero el cono es al cono como el cilindro al cilindro (452): luego los cilindros de igual altura serán como los círculos que son sus bases. Que es &c.

COROLARIO I.

454 Los cilindros, y conos, que tienen iguales bases y alturas, son entre sí iguales; y si son iguales, y tienen iguales alturas, tendrán iguales las bases.

COROLARIO II.

455 Los cilindros, y conos, que tienen iguales bases y diferentes alturas, son desiguales, y será mayor el que tenga mayor altura.

PROPOSICION XII.

456 Los cilindros, y los conos *KABCD*, *MEFGH* semejantes están entre sí en razon triplicada de los diámetros *BD*, *FH* de sus bases *ABCD*, *EFGH*. *Fig.* 13.

Hágase la construccion de las figuras, como en la antecedente; tírense las rectas *VK*, *CK*, *VJ*, *CJ*, como tambien *QM*, *GM*, *QL*, *GL*: y siendo (sup.) los conos *KABCD*, *MEFGH* semejantes, será (369) $KJ : ML = BD : FH = VJ : QL$, y alternando (270) $KJ : VJ = ML : QL$; pero los ángulos *VJK*, *QLM* son iguales por rectos: luego (298) los triángulos *VJK*, *QLM* serán equiángulos, y por consiguiente (295) $KV : VJ = MQ : QL$; pero $VJ : VC = QL : QG$ por la semejanza de los triángulos *VJC*, *QLG*: luego por igualdad ordenada será $KV : VC = MQ : QG$. Del mismo modo se demostrará ser $KC : CV = MG : GQ$; ademas es $KV : KC = MQ : MG$ por ser los antecedentes iguales á sus conseqüentes: luego los triángulos *VKC*, *QMG* serán (297) equiángulos, y semejantes entre sí. Del mismo modo se demostrarán semejantes los demas triángulos de la pirámide *KATBVCXDY* á los de la pirámide *MEPFQGRHS*, y siendo en igual número, las referidas pirámides serán semejantes; por consiguiente (447) estarán entre sí en razon triplicada de *VC* á *QG*, ó bien de *VJ* á *QL*, ó bien de *BD* á *FH*; pero aumentado el número de los lados de las bases de las pirámides al infinito, las pirámides son (451) últimamente iguales á los conos de igual altura, cuyas bases son los círculos en quienes están inscritos los polígonos que son bases de las pirámides: luego estos conos, que son *KABCD*, *MEFGH*, estarán tambien entre sí en razon triplicada de *BD* á *FH*; pero (452) los cilindros son como los conos: luego tambien los cilindros semejantes tendrán entre sí la misma razon, esto es, la triplicada de los diámetros de sus bases. Que es &c.

DE OTRO MODO.

Esté el cono *KABCD* con el sólido *N* en razon triplicada de los diámetros *BD*, *FH*; y á no ser cierta la proposicion, sería *N* mayor ó menor que el cono *MEFGH*.

I. Sea $N < MEFGH$, y O su diferencia; será por consiguiente $N + O = MEFGH$; y hecha la construccion de las figuras como en la antecedente proposicion, se demostrará del mismo modo ser la pirámide $MEPFQGRHS > N$. Consta por lo arriba demostrado que la pirámide *KATBVCXDY* está con la pirámide *MEPFQGRHS* en razon triplicada de BD á FH; pero (sup.) el cono $KABCD$ está con N en razon triplicada de BD á FH: luego será el cono $KABCD$ á N como la pirámide $KATBVCXDY$ á la pirámide $MEPFQGRHS$; pero el cono $KABCD > KATBVCXDY$: luego será N mayor que la pirámide $MEPFQGRHS$ contenida en el cono $MEFGH$, lo qual es contra lo demostrado: luego no puede ser $N < MEFGH$.

II. Sea $N > MEFGH$. El cono $KABCD$ está con N en razon triplicada de BD á FH, é invirtiendo estará N con el cono $KABCD$ en razon triplicada de FH á BD. Supóngase N al cono $KABCD$ como el cono $MEFGH$ al sólido O; y por ser $N > MEFGH$ (sup.), será (265) $KABCD > O$: luego estará el cono $MEFGH$ con el sólido O en razon triplicada de FH á BD, lo que es imposible, como se demostró antecedentemente: luego no puede ser N mayor, ni menor que $MEFGH$; por consiguiente $N = MEFGH$, y el cono $KABCD$ estará con el cono $MEFGH$ en razon triplicada de BD á FH; y tambien (452) tendrán los cilindros entre sí la misma razon. Que es &c.

PROPOSICION XIII.

457 Si un cilindro $ABCD$ se corta por un plano EF paralelo á los planos opuestos AD, BC;

estarán sus segmentos en razon de los segmentos del exe, esto es $AEFD : EBCF = GJ : JH$. *Fig.* 14.

Prolónguese por ambas partes arbitrariamente el rectángulo AH, con que se ha descrito el cilindro $ABCD$; y tómense quantas partes se quieran GK, KR, RS iguales á GJ, y otras HL, LX iguales á HJ. Por los puntos J, K, R, S, L, X tírense las rectas JE, KM, RQ, ST, LV, XP paralelas á GA, á quien serán (107) tambien iguales; y por la revolucion del rectángulo PS cerca del exe SX, dichas rectas describirán los círculos EF, MN, QY, TZ, &c. iguales, y paralelos á los AD, BC; por consiguiente los sólidos PO, OB, BF, FA, AN, &c. serán cilindros. Y porque los cilindros ED, DM, MY, YT, tienen iguales bases y alturas, serán (454) iguales entre sí: por la misma razon serán iguales los cilindros FB, BO, OP. Por tanto quan multíplice sea el exe JS del exe JG, tan multíplice será el cilindro TF del cilindro AF: asimismo quan multíplice sea el exe JX del exe JH, tan multíplice será el cilindro FP del cilindro FB; pero (455) si el exe JS es menor, igual, ó mayor que el exe JX, tambien respectivamente el cilindro TF es menor, igual, ó mayor que el cilindro FP: luego se-

$$\boxed{\begin{array}{l} JG : JH = AF : FB \\ JS \quad JX \quad TF \quad FP \end{array}}$$

rá (230) *JG*: *JH* $=$ *AF* : *FB*. Que es &c.

PROPOSICION XIV.

458 Los conos *EAB*, *FCD*, y los cilindros *AH*, *CK*, que tienen bases iguales, están entre sí en razon de sus alturas *EM*, *FN*. *Fig.* 15.

Prolónguese el exe *EM*, de suerte que sea *ML* $=$ *FN*; y concíba e el cilindro *AP* descrito cerca del exe *ML*. Los cilindros *AP*, *CK* son (454) iguales, por tener iguales bases y alturas; pero (457) el cilindro *AH* al cilindro *AP* como *EM* á *ML* $=$ *FN*: luego será el cilindro *AH* : *CK* $=$ *EM* : *FN*; por consiguiente (452) será tambien el cono *EAB*: *FCD* $=$ *EM* : *FN*. Que es &c.

PROPOSICION XV.

459 Las bases y alturas de los conos *ABC*, *DEF*, y de los cilindros *BH*, *EK* iguales, son recíprocamente proporcionales; es á saber, *BC* : *EF* $=$ *MD* : *LA*: y al contrario, los conos, y cilindros, cuyas bases y alturas son recíprocamente proporcionales, son iguales entre sí. *Fig.* 16.

I. Se suponen los conos, y los cilindros iguales: y si en este caso son las alturas *AL* y *DM* iguales, serán las bases *BC* y *EF* tambien iguales (454): luego será *BC* : *EF* $=$ *MD* : *LA*. Si las alturas AL, DM son desiguales, córtese de la mayor DM la parte $MO = AL$; por el punto O hágase (393) pasar el plano PQ paralelo á los planos opuestos JK, EF, y se tendrán los dos cilindros EK, EQ, que tendrán (458) la razon de DM á MO; pero $OM = AL$ (const.), y el cilindro $EK = BH$ (sup.): luego será $DM : AL = BH : EQ$; pero (453) $BH : EQ = BC : EF$: luego $DM : AL = BC : EF$. Del mismo modo se demostrará que siendo los conos ABC, DEF iguales, será $DM : AL = BC : EF$.

II. Se suponen proporcionales las magnitudes, esto es, $BC : EF = MD : AL$: y en este caso si las alturas DM y AL son iguales, será $BC = EF$, y (454) los cilindros BH, EK, como tambien los conos ABC, DEF serán iguales. Si dichas alturas son desiguales, hágase la referida preparacion en la figura: y siendo los cilindros BH, EQ de igual altura, será (453) $BC : EF = BH : EQ$; pero (sup.) $BC : EF = MD : AL$ ó bien OM: luego será $BH : EQ = MD : OM$; pero (458) $MD : OM = EK : EQ$: luego será $BH : EQ = EK : EQ$; por consiguiente los cilindros BH y EK son iguales. Con el mismo método se demostrará ser el cono $ABC = DEF$. Que es &c.

PROPOSICION XVI.

460 Dados dos círculos *BAC*, *MDF*, que tengan un centro comun *M*, inscribir en el mayor un polígono de un número par de lados, que no toquen al círculo menor. *Fig.* 17.

Tírese el diámetro *AC*, y sobre él en el punto *F* levántese la perpendicular *GH*; divídase el arco *ABC* en dos partes iguales, y repítase la misma operacion con su mitad, y así succesivamente, hasta que se tenga (429) un arco *JC* menor que *HC*. Desde el punto *J* báxese la perpendicular *JL* al diámetro *AC*, y prolónguese hasta *K*: tiradas las rectas *CJ*, *CK*, serán estas lados del polígono que se pide inscribir en el círculo *BAC*. Consta (const.) que el arco *CJ* mide á toda la circunferencia del círculo, y que el número de los arcos *CJ* es par; por consiguiente será par el número de los lados del polígono. Y porque la recta *HG* toca al círculo en *F*, y la recta *JK* le es paralela (95), *JK* no encontrará á dicho círculo, como tambien *CJ*, *CK*, y por consiguiente los demas lados del polígono, que por ser iguales á *CJ* distan igualmente (167) del centro *M*. Que es &c.

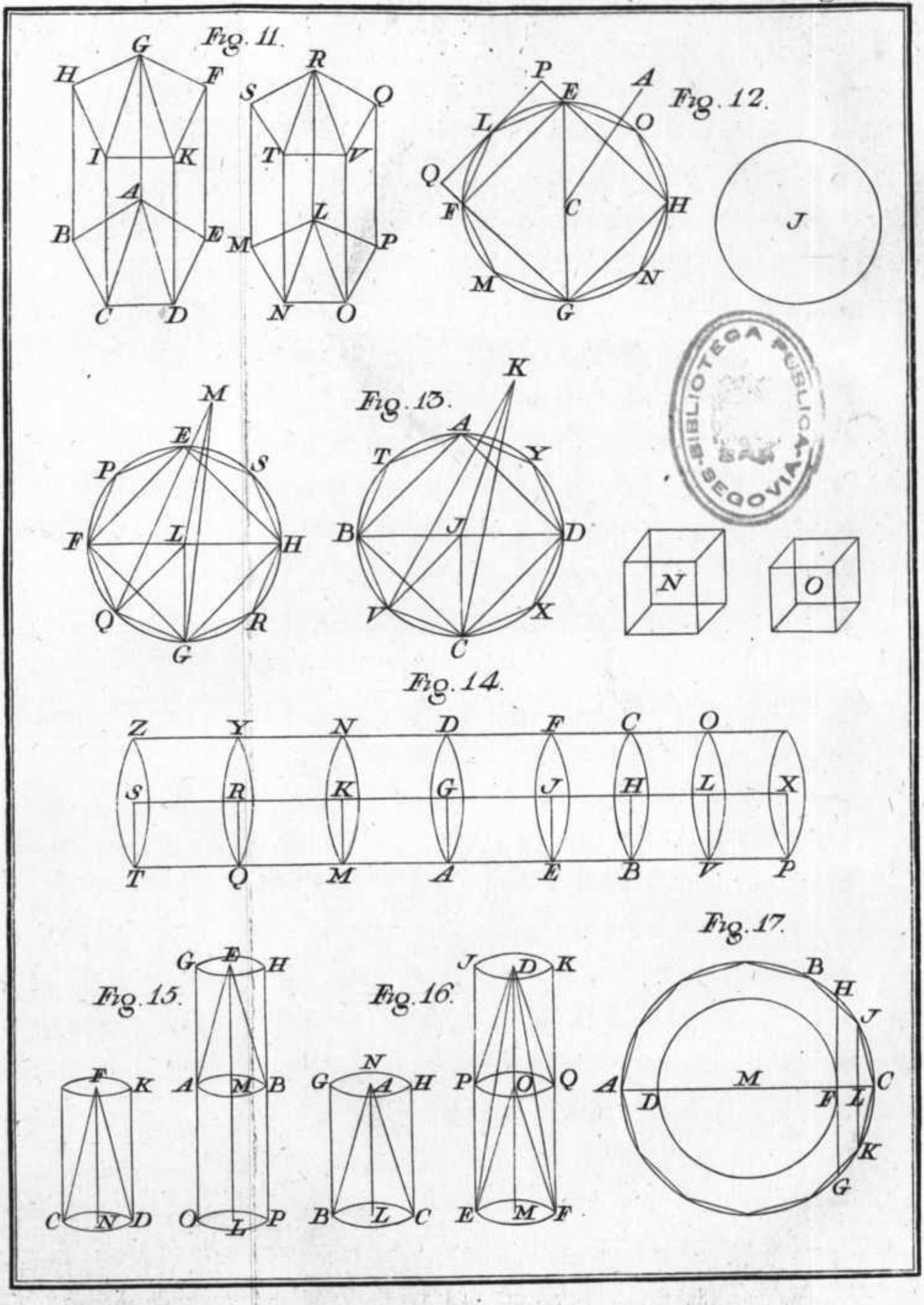


Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.

PROPOSICION XVII.

461 Dadas dos esferas concéntricas, y sus radios *AX*, *AH*, inscribir en la mayor un sólido poliedro, cuya superficie no toque á la menor. *Fig.* 18.

Córtense dichas esferas por un plano, que pase por el centro *A*; y las comunes secciones serán los dos círculos concéntricos *DCBE*, *HGF*. Inscríbase (460) en el mayor de ellos *CBED* un polígono *BKL &c.* que no toque al menor *HGF*; y levantado el radio *AX* perpendicular al plano *CBED*, tírense en la esfera los planos *XK*, *XB*, que serán quadrantes perpendiculares (396) á dicho plano. En estos quadrantes acomódense (202) las cuerdas *BO*, *OP*, *PR*, *RX*, y *KS*, *ST*, *TI*, *IX* iguales á *BK*; y tírense las rectas *OS*, *PT*, *RI*; y continuando esta operacion en todos los quadrantes que pasan por el radio *AX* ó por su prolongacion *AY*, y por todos los puntos *L*, *M*, *&c.* se tendrá inscrito en la esfera el poliedro que se pide.

Tírense las rectas *OV*, *SQ* perpendiculares á las comunes secciones de los quadrantes *XAB*, *XAK* con el círculo *CBED*, las que serán paralelas (95) al radio *AX*, y perpendiculares á dicho círculo; por consiguiente (385) serán paralelas entre sí. Teniendo los triángulos OVB, SQK el lado $OB = SK$ (const.), los ángulos en V, Q iguales por rectos, y los OBV, SKQ iguales (180), por insistir sobre arcos iguales, será $OV = SQ$, $BV = KQ$; y tirada VQ, será (106) paralela é igual á SO; pero QV es (290) paralela á BK, por ser AV: $VB = AQ : QK$: luego las tres rectas SO, QV, BK serán (385) paralelas entre sí, y por consiguiente (382) OB, SK estarán en el plano $BOSK$. Del mismo modo se demostrará que $TSOP$ es un plano, y así de todos los demas; por consiguiente se tendrá inscrito un poliedro en la esfera mayor.

Báxese desde el centro A la perpendicular AZ al plano $BOSK$, y tiradas las rectas SZ, ZO, ZB, ZK serán iguales, porque el quadrado de cada una de estas junto con el quadrado de dicha perpendicular es igual (124) al quadrado del radio de la esfera. Por tanto el círculo descrito con el radio ZK, pasará tambien por los puntos B, O, S; y por ser $BK > VQ$ ó bien OS, y $BK = KS = BO$, será el ángulo BZK obtuso; por consiguiente el quadrado de BK será (140) mayor que el duplo quadrado de BZ. Tírese BQ que será perpendicular á AK, porque siendo en los triángulos BKQ, SKQ, el lado $BK = SK$, QK comun, y el ángulo $BKQ = SKQ$, será $BQ = SQ$, y el ángulo BQK

igual al recto SQK; pero $BQ>QK$, por ser NQ: $QB=QB:QK$ y la primera mayor que la tercera: luego el duplo quadrado de QB será mayor que el quadrado de BK: luego será $\overline{BQ}^2>\overline{BZ}^2$; y siendo $\overline{BQ}^2+\overline{AQ}^2=\overline{AB}^2=\overline{BZ}^2+\overline{AZ}^2$, será $\overline{AQ}^2<\overline{AZ}^2$, y $AQ<AZ$; por consiguiente distará menos el punto Q que el punto Z de la superficie de la esfera menor; y no encontrando la perpendicular BQ al arco GU, por ser paralela á la tangente del arco GU en el punto U, el plano $SKBO$ tampoco encontrará á la superficie de la esfera menor.

Báxese la perpendicular AJ al plano $PTSO$; y tirada JO, se demostrará del mismo modo que las rectas PT, OS serán paralelas, $OS>PT$, y que el círculo descrito con el radio JO pasará tambien por los puntos S, P, T; y por tener los quadriláteros $PTSO$, $OSKB$, paralelos los lados PT, SO, BK, y el lado $TS=PO=OB=SK$, será el radio $JO<OZ$; por consiguiente $\overline{JO}^2<\overline{OZ}^2$; pero $\overline{AJ}^2+\overline{JO}^2=\overline{AO}^2=\overline{AZ}^2+\overline{ZO}^2$: luego será $\overline{AJ}^2>\overline{AZ}^2$; por consiguiente $AJ>AZ$: luego el plano $PTSO$ caerá fuera de la superficie de la esfera menor, y así de todos los demas planos: luego la superficie del poliedro inscrito en la mayor esfera no toca á la de la esfera menor. Que es &c.

COROLARIO.

462 Si en la esfera *AHGF* se inscribe un sólido poliedro semejante al inscrito en la mayor *AXBΥ*, lo que se tendrá si se tiran radios á los ángulos de la base del poliedro inscrito, y por cada dos puntos, donde la superficie de la esfera menor está cortada por dichos radios, se tiran rectas en el mismo orden en que están tiradas en la superficie del poliedro inscrito en la esfera mayor; estará el poliedro inscrito en la una esfera con el inscrito en la otra en razon triplicada de la que tienen los diámetros de las esferas. Estando, pues, divididos los dos poliedros en igual número de pirámides semejantes, cuyos lados homólogos son radios de la esfera, cada una de las pirámides, que están en la esfera mayor, tendrá (447) á cada una de las correspondientes pirámides que están en la esfera menor, la razon triplicada de los radios de las mismas esferas: luego (262) el poliedro inscrito en la esfera mayor será al inscrito en la menor, como la triplicada de dichos radios, ó bien (313) de los diámetros de dichas esferas, por ser igual (267) la razon de los radios á la de los diámetros.

ESCOLIO.

463 Se ha supuesto en la demostracion de la proposicion antecedente, que si dos trapecios *ADEB*, *FMNG* están inscritos en los círculos *CAD*, *LFM*, y tienen paralelos los lados *AB* á *DE*, *FG* á *MN*, y ademas es $AB > FG$, $DE > MN$, y $AD = BE = FM = GN$; será el radio *CA* mayor que el radio *LF*. *Fig.* 19.

Si se niega, será el radio *CA* igual, ó menor que el radio *LF*.

I. Sea el radio $CA = LF$. Tírense los radios *CB*, *CD*, *CE*, *LG*, *LM*, *LN*. Por ser los lados *CA*, *CB* iguales á los *LF*, *LG*, y el lado $AB > FG$, será (92) el ángulo $ACB > FLG$: por la misma razon será el ángulo $DCE > MLN$; pero los ángulos *DCA*, *ECB* son iguales (69) á los *MLF*, *NLG*: luego los quatro ángulos al rededor del punto *C* serán mayores que los quatro cerca del punto *L*, lo que es imposible (77): luego no puede ser el radio $CA = LF$.

II. Sea el radio $CA < LF$. Tómense las rectas *LH*, *LK*, *LP*, *LO* iguales á *CA*; y tírense las *HK*, *KP*, *PO*, *OH*. Por ser $LH : HF = LK : KG$, será (290) *HK* paralela á *FG*, y del mismo modo se demostrará que son paralelas *PK* á *NG*, *OP* á *MN*, y *OH* á *FM*; por consiguiente las rectas *FG*, *MN*, *FM*, *NG* serán respectivamente mayores que las *HK*, *OP*, *HO*, *KP*; y siendo las rectas *AB*, *DE* respectivamente mayores (sup.) que las *FG*, *MN*, y las rectas *AD*, *BE*, *FM*, *GN* iguales, serán las rectas *AB*, *DE*, *AD*, *BE* respectivamente mayores que las *HK*, *OP*, *HO*, *KP*: luego los quatro ángulos *ACB*, *DCE*, *ACD*, *BCE* serán mayores (92) que los quatro *HLK*, *OLP*, *OLH*, *KLP*, lo que es imposible; por consiguiente no puede ser tampoco $CA < LF$. Luego &c.

PROPOSICION XVIII.

464 Las esferas *BAC*, *EDF* están en la razon triplicada de sus diámetros *BC*, *EF*. *Fig.* 19.

Si se niega, estará la esfera *BAC* con otra esfera *G* en razon triplicada de *BC* á *EF*, y la esfera *G* será menor, ó mayor que la esfera *EDF*.

I. Sea la esfera *G* menor que *EDF*. Concíbase la esfera *G* concéntrica á la *EDF*, é inscríbase (461) en la mayor *EDF* un poliedro, cuya superficie no toque á la menor, y en la esfera *BAC* un poliedro semejante al inscrito en la *EDF*: luego estarán (462) estos poliedros en razon triplicada de *BC* á *EF*; pero (sup.) la esfera *BAC* está con la esfera *G* en la triplicada de *BC* á *EF*: luego será el poliedro inscrito en la esfera *BAC* al inscrito en la esfera *EDF* como la esfera *BAC* á la esfera *G*; por consiguiente (265) el poliedro inscrito en la esfera *EDF* será menor que la esfera *G*, esto es, el todo menor que la parte, lo que es imposible: luego no puede ser la esfera *G* menor que la *EDF*.

II. Sea la esfera *G* mayor que la *EDF*. Supóngase que la esfera *G* es á la *BAC* como la esfera *EDF* á otra esfera *H*; y por ser $G > EDF$ (sup.), será tambien (265) $BAC > H$; pero (sup.) la esfera *BAC* está con *G* en razon triplicada de *BC* á *EF*, é invirtiendo es *G* á *BAC* como la triplicada de *EF* á *BC*: luego será la esfera *EDF* á *H* como la triplicada de *EF* á *BC*, lo que es imposible por lo demostrado en la suposicion antecedente: luego no puede ser $G > EDF$; y habiéndose demostrado antes, que no puede ser menor, será $G = EDF$. Que es &c.

crito en la esfera BAC al inscrito en la esfera EDF como la esfera BAC á la esfera G; por consiguiente (205) el poliedro inscrito en la esfera EDF será menor que la esfera G, esto es, el todo menor que la parte, lo que es imposible: luego no puede ser la esfera G menor que la EDF.

II. Sea la esfera G mayor que la EDF. Supóngase que la esfera G es á la BAC como la esfera EDF á otra esfera H; y por ser $G > EDF$ (sup.), será tambien (205) $BAC > H$; pero (sup.) la esfera BAC está con G en razon triplicada de BC á EF, é invirtiendo es G á BAC como la triplicada de EF á BC: luego será la esfera EDF á H como la triplicada de EF á BC, lo que es imposible por lo demostrado en la suposicion antecedente: luego no puede ser $G > EDF$; y habiéndose demostrado antes, que no puede ser menor, será $G = EDF$. Que es &c.

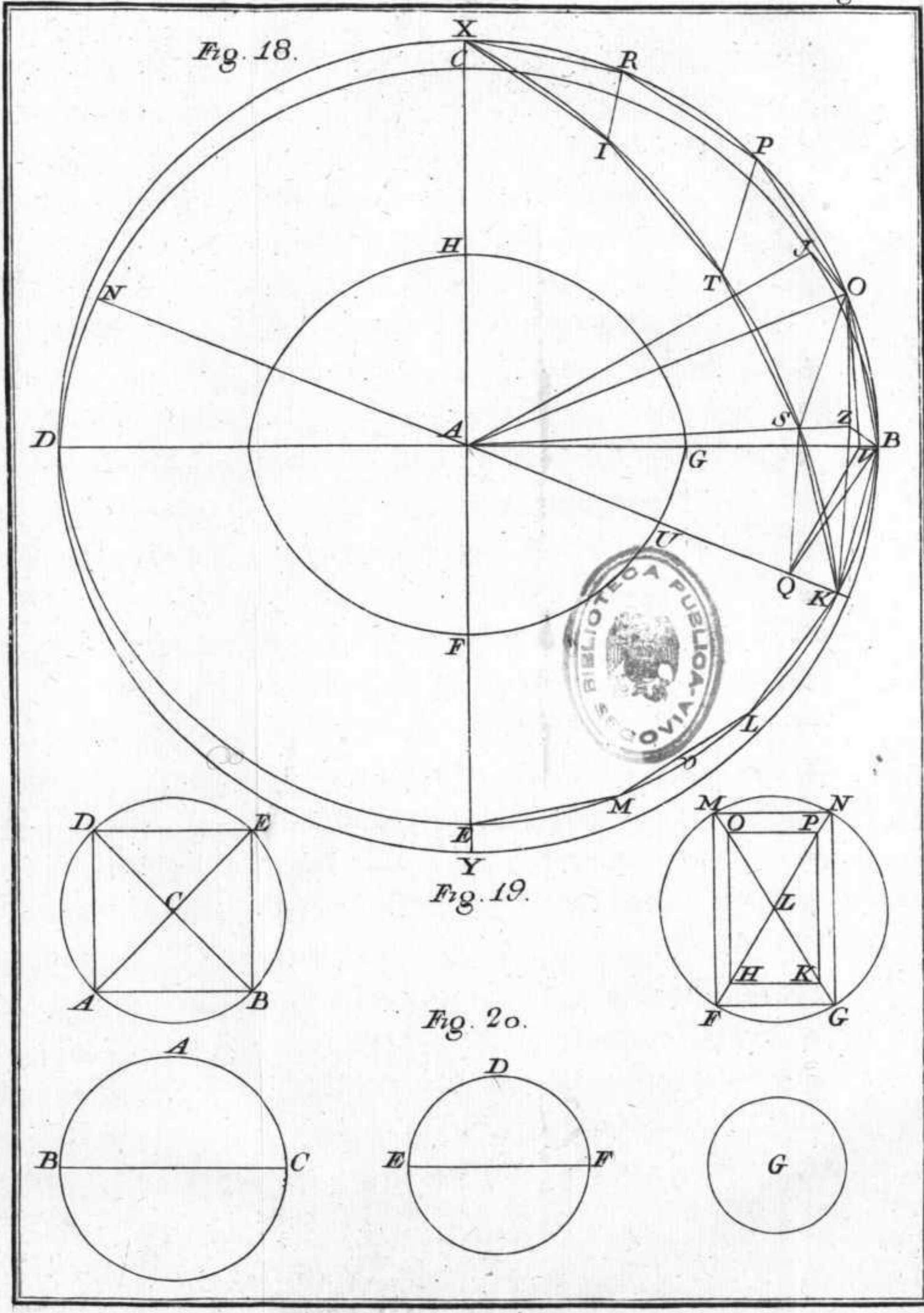


Fig. 18.

Fig. 19.

Fig. 20.

De las propiedades de los senos, cosenos, tangentes, secantes, cotangentes, y cosecantes: y de la relacion de estas cantidades con los lados de los triángulos rectilineos.

DEFINICIONES.

465 Si los diámetros *AY*, *FE* (*Fig.* 1) del círculo *AFYE* se cortan en ángulos rectos; y en los extremos *A*, *E* de dichos diámetros se levantan las perpendiculares *MH*, *PQ*; y tomado qualquier arco *AD* se tira *DB* perpendicular al diámetro *AY*; y el radio *CD* se prolonga, hasta cortar dichas perpendiculares *MH*, *QP* en los puntos *G*, *N*: La perpendicular *DB* tirada desde el extremo *D* del arco *AD* al diámetro *AY* que pasa por el otro extremo, se llama seno recto del arco *AD* ó del ángulo *ACD*. El radio *CE* ó qualquiera otro del círculo se suele llamar seno total.

COROLARIO I.

466 Los senos de un quadrante *AE* y de tres quadrantes *AEYF* son los radios *CE* y *CF*.

COROLARIO II.

467 Los senos de dos quadrantes *AEϒ* y de quatro quadrantes *AEϒFA* son cero.

ESCOLIO.

468 Nótese que los senos de los arcos *AD*, *AED*, *&c.* hasta la semicircunferencia *AEϒ*, están todos á una parte del diámetro *Aϒ*; y los senos de los arcos *AEϒD*, *AEϒFD*, *&c.* mayores que la semicircunferencia, están á la parte opuesta.

469 La parte *CB* del diámetro *Aϒ* comprehendída entre el centro *C* y el seno recto *BD*; se llama coseno del arco *AD* ó del ángulo *ACD*.

COROLARIO I.

470 Los cosenos de un quadrante *AE* y de tres quadrantes *AEϒF* son cero.

COROLARIO II.

471 Los cosenos de dos quadrantes *AEϒ* y de quatro quadrantes *AEϒFA* son los radios *Cϒ* y *CA*.

ESCOLIO.

472 Nótese que los cosenos, así de qualquier arco *AD* menor que un quadrante, como de qualquier otro arco *AEϒFD* mayor que tres quadrantes,

están en el radio *AC*; pero los cosenos de los arcos *AED*, *AEYD* mayores que un quadrante hasta los tres *AEYF*, están en el radio *CY*, esto es en partes contrarias á los dichos antecedentemente.

473 Seno verso de un arco, ó de su ángulo en el centro, se llama la diferencia entre el radio y el coseno de dicho arco. Tambien coseno verso de un arco, ó de su ángulo en el centro, se llama la diferencia entre el radio y el seno del mismo arco.

474 La parte *AG* de la perpendicular *AH*, cortada por el radio *CD* prolongado, se llama tangente del arco *AD* ó del ángulo *ACD*; y dicho radio *CD* prolongado hasta la perpendicular *AH*, se llama secante del arco *AD* ó del ángulo *ACD*.

COROLARIO I.

475 Las tangentes, y secantes de un quadrante *AE* y de tres quadrantes *AEYF*, son infinitas.

COROLARIO II.

476 Las tangentes de dos quadrantes y de quatro quadrantes son cero; pero las secantes de estos arcos son el radio *AC*.

ESCOLIO.

477 Nótese que las tangentes así de qualquier

arco *AD* menor que un quadrante, como de otro qualquier arco *AEYD* mayor que dos quadrantes hasta los tres, están en *AH*; pero las tangentes de qualquier arco *AED* mayor que un quadrante hasta dos, y de otro qualquier arco *AEYFD* mayor que tres quadrantes hasta quatro, están en *AM*, esto es, en partes contrarias á las antecedentes.

478 La parte *EN* de la perpendicular *EP* cortada por el referido radio *CD* prolongado, se llama cotangente del arco *AD* ó del ángulo *ACD*: y dicho radio *CD* prolongado hasta la cotangente, esto es *CN*, se llama cosecante del arco *AD* ó del ángulo *ACD*.

COROLARIO I.

479 Un quadrante *AE* y tres quadrantes *AEYF*, tienen las cotangentes iguales á cero, y las cosecantes al radio *CE*.

COROLARIO II.

480 Las cotangentes y las cosecantes de dos quadrantes *AEY* y de quatro quadrantes *AEYFA*, son infinitas.

ESCOLIO.

481 Las cotangentes de qualquier arco *AD* hasta un quadrante, y de otro qualquier arco *AEYD*

mayor que dos quadrantes hasta tres, están en EP; pero las cotangentes de qualquier arco AED mayor que un quadrante hasta dos, y de otro qualquier arco $AE\Upsilon FD$ mayor que tres quadrantes hasta quatro, están en EQ, esto es en partes contrarias á las precedentes.

482 Las rectas expresadas en las definiciones se llaman generalmente senos, cosenos, tangentes, &c. circulares á distincion de los hiperbólicos, de que se tratará en su lugar.

Quando en las proposiciones siguientes se trate en general de los senos, cosenos, &c. se entenderá que pertenecen á arcos menores que un quadrante, á menos de advertir lo contrario. Pero dichas proposiciones serán igualmente ciertas, aunque los arcos sean mayores, con tal que en este caso se varíen los signos á las cantidades que están en partes contrarias á las del quadrante, poniendo el signo $+$ á la que tenga $-$, y al contrario: solo se omitirá esta regla, quando ocurra que dos de estas cantidades formen un rectángulo, á quien se le debe dexar su propio signo: por lo demas se demostrarán con el mismo ó semejante método.

Para abreviar, se representarán las rectas definidas con la siguiente notacion:

Sc. significa seno circular.

Cc. coseno circular.

Tc. tangente circular.

Sec. secante circular.

Ctc. cotangente circular.

Csc. cosecante circular.

R radio ó seno total.

Aunque estos senos, cosenos, &c. se notan de esta suerte para distinguirlos de los hiperbólicos; sin embargo quando se dice seno, coseno, &c. sin otra adicion, se entienden los circulares.

ESCOLIO.

483 Adviértase que mientras mayor sea el arco *AD* hasta ser un quadrante, lo serán igualmente su seno, tangente y secante; y al contrario, serán menores su coseno, cotangente y cosecante: entiéndase lo mismo respecto á un arco mayor que dos quadrantes hasta tres. Y todo al contrario sucederá en los arcos *AED*, *AEYFD*, que son mayores que el quadrante hasta dos, ó que tres quadrantes hasta quatro.

PROPOSICION I.

484 Qualquier arco mayor que el quadrante, y su diferencia ó á la semicircunferencia ó á la circunferencia, tienen iguales senos, cosenos, tangentes, secantes, cotangentes y cosecantes. *Fig.* 1.

I. El seno, coseno, tangente, secante, cotangente y cosecante del arco *AED* mayor que el quadrante *AE* y menor que la semicircunferencia *AEY*, son iguales respectivamente al seno, coseno, &c. del arco *DVY*. Báxese la perpendicular *DSB* al diámetro *AY*, y sobre él levántese la perpendicular *YK*; tírese el radio *CXD*, y prolónguese por ambas partes hasta cortar en *G* la linea *MH* de las tangentes, en *N* la linea *PQ* de las cotangentes, y en *K* la perpendicular *YK*. Los triángulos *ACZG*, *YCK* tienen el lado *AC* = *CY*, el ángulo *ACG* = *YCK*, y los ángulos en *A*, *Y* iguales por rectos: luego tendrán el lado *AMG* = *YK*, y *CZG* = *CK*; pero las rectas *AMG*, *YK* son las tangentes respectivas de los arcos *AED*, *YVD*, y tambien las rectas *CZG*, *CK* son las secantes respectivas de los mismos: luego los arcos *AED*, *YVD* tienen iguales tangentes y secantes. Y ademas, por las definiciones, *DSB* es el seno, *CLB* el coseno, *EQN* la cotangente, *CXN* la cosecante, tanto del arco *AED*, como del arco *YVD*.

II. Con semejante preparacion se demostrará que el arco *AEYD* mayor que la semicircunferencia *AEY*, y el arco *YOD* que es la diferencia á la misma, tienen iguales senos, cosenos, &c. Tambien se demostrará del mismo modo que qualquier arco *AEYFD* mayor que tres quadrantes, y el arco *AD* que es la diferencia á la circunferencia, tienen iguales senos, cosenos &c. Que es &c.

PROPOSICION II.

485 Qualquier arco *AD* menor que el quadrante *AE*, tiene su seno, coseno, tangente, secante, cotangente y cosecante, igual respectivamente al coseno, seno, cotangente, cosecante, tangente y secante del arco *DE* que es la diferencia al quadrante *AE*. *Fig.* 2.

Báxense las perpendiculares *DF* y *DB* á los radios *CE* y *CA*; en los extremos *E*, *A* de dichos radios levántense las perpendiculares *EH*, *AG*, y alárguense hasta encontrar el radio *CD* prolongado en los puntos *H*, *G*. En el rectángulo *BF* es $BD = CF$; pero *BD* es el seno del arco *AD*, y *CF* es el coseno del arco *DE*: luego el seno del arco *AD* es igual al coseno del arco *DE*. Tambien en el rectángulo *BF* es $CB = DF$; pero *BC* es el coseno del arco *AD*, y *DF* es el seno del arco *DE*: luego el coseno del arco *AD* es igual al seno del arco *ED*. Por las definiciones, es *AG* tangente del arco *AD* y cotangente del arco *ED*; *EH* cotangente del arco *AD* y tangente del arco *ED*; y finalmente *CH* cosecante del arco *AD* y secante del arco *ED*. Que es &c.

PROPOSICION III.

486 El coseno de qualquier arco *AD* es al seno como el radio á la tangente: el coseno al radio como el radio á la secante: y el seno al radio como la tangente á la secante: esto es, Cc. *AD*: Sc. *AD* $=$ *R*: Tc. *AD*; Cc. *AD*: *R* $=$ *R*: Sec. *AD*; Sc. *AD*: *R* $=$ Tc. *AD*: Sec. *AD*. *Fig.* 3.

Desde el punto *D* báxese la perpendicular *DB* al radio *AC*; sobre este, en el punto *A*, levántese la perpendicular *AF*, y alárguese hasta encontrar en *F* al radio *CD* prolongado. Los triángulos *CBD*, *CAF* tienen los ángulos en *B*, *A* iguales por rectos, y el ángulo *BCD* comun; por consiguiente serán equiángulos y tendrán (295) proporcionales los lados homólogos, esto es *BC*: *BD* $=$ *AC*: *AF*; pero las rectas *BC*, *BD*, *AC* y *AF* son respectivamente el coseno, seno, radio y tangente del arco *AD* ó del ángulo *ACD*: luego será Cc. *AD*: Sc. *AD* $=$ *R*: Tc. *AD*. Tambien en dichos triángulos será *CB*: *CD* $=$ *CA*: *CF*, y *BD*: *CD* $=$ *AF*: *CF*; esto es, Cc. *AD*: *R* $=$ *R*: Sec. *AD*, y Sc. *AD*: *R* $=$ Tc. *AD*: Sec. *AD*. Que es &c.

PROPOSICION IV.

487 La tangente de qualquier arco *AD* es al

radio como el radio á la cotangente: la tangente á la secante como el radio á la cosecante: y el radio es á la secante como la cotangente á la cosecante: esto es, Tc. *AD*: *R* = *R*: Ctc. *AD*; Tc. *AD*: Sec. *AD* = *R*: Csc. *AD*; *R*: Sec. *AD* = Ctc. *AD*: Csc. *AD*. *Fig.* 4.

Tírese el radio *CE* perpendicular al radio *CA*; en los extremos *A*, *E* de dichos radios levántense las perpendiculares *AF*, *EB*, y alárguense hasta encontrar en *F*, *B* al radio *CD* prolongado. Por ser las rectas *AF*, *CE* perpendiculares á *AC*, serán paralelas; por consiguiente (96) los ángulos alternos *AFC*, *FCE* serán iguales; pero los ángulos *A*, *E* son iguales por rectos: luego los triángulos *CAF*, *BEC* serán equiángulos y tendrán (295) proporcionales los lados homólogos, esto es *AF* : *AC* = *CE* : *EB*; pero las rectas *AF* y *EB* son respectivamente la tangente y la cotangente del arco *AD*, y es *AC* = *CE* = *R*: luego será Tc. *AD* : *R* = *R* : Ctc. *AD*. Tambien en los mismos triángulos será *AF* : *CF* = *CE* : *CB*, y *CA* : *CF* = *EB* : *CB*; esto es, Tc. *AD* : Sec. *AD* = *R* : Csc. *AD*, y *R* : Sec. *AD* = Ctc. *AD* : Csc. *AD*. Que es &c.

PROPOSICION V.

488 El seno de qualquier arco *AD* es al ra-

dio como el radio á la cosecante: el coseno al radio como la cotangente á la cosecante: y el seno al coseno como el radio á la cotangente: esto es, Sc. $AD : R = R :$ Csc. AD; Cc. $AD : R =$ Ctc. AD: Csc. AD; y Sc. AD : Cc. $AD = R$: Ctc. AD. *Fig.* 5.

Tírense las rectas DB y CE perpendiculares al radio AC; en el extremo E del radio CE levántese la perpendicular EF, y alárguese hasta encontrar en F al radio CD prolongado. Por ser las rectas DB y CE perpendiculares al radio AC, serán paralelas, y por consiguiente (96) los ángulos alternos BDC, DCE iguales; pero los ángulos B, E son iguales por rectos: luego los triángulos CBD, FEC serán equiángulos y tendrán (295) proporcionales los lados homólogos, esto es $DB : DC = CE : CF$; pero DB y CF son respectivamente el seno y la cosecante del arco AD ó del ángulo ACD, y es $CD = CE = R$: luego será Sc. $AD : R = R$: Csc. AD. Tambien en los mismos triángulos será $CB : CD = EF : CF$, y $DB : BC = CE : EF$; esto es, Cc. AD: $R =$ Ctc. AD : Csc. AD, y Sc. AD : Cc. $AD = R$: Ctc. AD. Que es &c.

PROPOSICION VI.

489. En los círculos desiguales, los senos, co-

senos, tangentes, secantes, cotangentes y cosecantes de ángulos iguales *ACD*, *IHK* son proporcionales con los radios. *Fig.* 6. 7.

Desde los puntos *D* y *K* tírense las perpendiculares *DB* y *KO* á los radios *AC* y *IH*. Los triángulos *DCB*, *KHO* tienen el ángulo $DCB = KHO$, el ángulo $B = O$ por rectos: luego serán equiángulos y tendrán (295) porporcionales los lados homólogos, esto es $DB : KO = CD : HK$; pero las rectas *DB* y *OK* son los senos de los ángulos iguales *ACD* y *IHK*: luego será Sc. *ACD* : Sc. *IHK* $= CD : HK$. Tambien en dichos triángulos será $CB : HO = CD : HK$, esto es Cc. *ACD* : Cc. *IHK* $= CD : HK$. Tiradas las rectas *AG* y *IL* perpendiculares á los radios *AC* y *IH*, se demostrará del mismo modo que en los triángulos *CAG*, *HIL* es $AG : IL = CA : HI$, y $CG : HL = CA : HI$: esto es, Tc. *ACD* : Tc. *IHK* $= CA : HI$, y Sec. *ACD*: Sec. *IHK* $= CA : HI$. En fin tiradas las rectas *CE* y *HN* perpendiculares á los radios *CA* y *HI*, como tambien las rectas *EF* y *NM* perpendiculares á los radios *CE* y *HN*, se demostrará con semejante método que en los triángulos *ECF*, *NHM* es $EF : NM = CE : HN$, y $CF : HM = CE : HN$; esto es, Ctc. *ACD* : Ctc. *IHK* $= CE : HN$, y Csc. *ACD* : Csc. *IHK* $= CE : HN$. Que es &c.

PROPOSICION VII.

490 Los quadrados del seno y del coseno de un arco AD son juntos iguales al quadrado del radio: los quadrados del radio y de la tangente son juntos iguales al quadrado de la secante: y los quadrados del radio y de la cotangente, iguales juntos al quadrado de la cosecante; es decir $\overline{\text{Sc.}AD}^2 + \overline{\text{Cc.}AD}^2 = R^2$; $R^2 + \overline{\text{Tc.}AD}^2 = \overline{\text{Sec.}AD}^2$; y $R^2 + \overline{\text{Ctc.}AD}^2 = \overline{\text{Csc.}AD}^2$. *Fig.* 6.

Hágase la misma construccion que antes. En el triángulo rectángulo CBD es $\overline{BD}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{CD}^2$; pero DB y CB son respectivamente el seno y coseno del arco AD ó del ángulo ACD, y es $CD = R$: luego será $\overline{\text{Sc.}AD}^2 + \overline{\text{Cc.}AD}^2 = R^2$. Del mismo modo se demostrará por los triángulos rectángulos CAG y CEF, ser $R^2 + \overline{\text{Tc.}AD}^2 = \overline{\text{Sec.}AD}^2$, y $R^2 + \overline{\text{Ctc.}AD}^2 = \overline{\text{Csc.}AD}^2$. Que es &c.

COROLARIO I.

491 Se infiere que $\overline{\text{Sc.}AD}^2 = R^2 - \overline{\text{Cc.}AD}^2$, y $\overline{\text{Cc.}AD}^2 = R^2 - \overline{\text{Sc.}AD}^2$.

COROLARIO II.

492 Tambien será $R^2 = \overline{\text{Sec.}AD}^2 - \overline{\text{Tc.}AD}^2$, y $\overline{\text{Tc.}AD}^2 = \overline{\text{Sec.}AD}^2 - R^2$.

COROLARIO III.

493 Finalmente será $R^2 = \overline{\text{Csc.}AD}^2 - \overline{\text{Ctc.}AD}^2$, y $\overline{\text{Ctc.}AD}^2 = \overline{\text{Csc.}AD}^2 - R^2$.

PROPOSICION VIII.

494 El radio y el coseno de un arco AD son al seno como el radio á la tangente de la mitad de dicho arco: y el seno verso al seno como la tangente de la mitad del mismo arco al radio; esto es, $R + \text{Cc.}\,AD : \text{Sc.}\,AD = R : \text{Tc.}\,\frac{AD}{2}$; $R - \text{Cc.}\,AD : \text{Sc.}\,AD = \text{Tc.}\,\frac{AD}{2} : R$. *Fig.* 8.

Tírense las rectas DB, AG perpendiculares al diámetro EA, la cuerda ED, y por el centro C la recta CG paralela á ella.

I. El ángulo DCA en el centro es (173) duplo del ángulo DEA en la circunferencia; pero (96) los ángulos alternos DEA, GCA son iguales: luego será el ángulo $DCA = 2GCA$, y por consiguiente (179) AG será la tangente de la mitad del arco AD ó del ángulo DCA. Por ser el ángulo $DEA = GCA$, y los ángulos B, CAG iguales por rectos, los triángulos DBE, GAC serán equiángulos y tendrán (295) proporcionales los lados homólogos, esto es $EB : BD = CA : AG$; pero $CE = CA = R$, y EB, BD y AG son respectivamente el $R +$

Cc. AD, el Sc. AD y la Tc. $\frac{AD}{2}$; luego será $R +$ Cc. AD : Sc. $AD = R$: Tc. $\frac{AD}{2}$.

II. Tirada AD, será (308) $BA : BD = BD : BE$; pero $BD : BE = AG : AC$: luego será $BA : BD = AG : AC$, esto es $R -$ Cc. AD : Sc. $AD =$ Tc. $\frac{AD}{2}$: R. Que es &c.

PROPOSICION IX.

495 Si el seno DB de un arco AD se prolonga hasta encontrar la circunferencia en E; serán el seno DB y el arco DA mitades de la cuerda DE y del arco DAE. *Fig.* 9.

Tírense los radios CD, CE. Por ser el diámetro AF perpendicular á la cuerda DE, será (156) $DB = DE$, y por consiguiente el seno DB mitad de la cuerda DE. Los triángulos CBD, CBE tienen el lado CB comun, los ángulos en B iguales por rectos, y $DB = BE$: luego tendrán el ángulo $DCA = ECA$; por consiguiente (179) el arco $AD = AE$, y por lo tanto el arco AD será la mitad del arco DAE. Que es &c.

COROLARIO.

496 Luego el seno de un arco es la mitad de la cuerda del arco duplo.

PROPOSICION X.

497 El seno *DB* del arco *AD* sexta parte de la semicircunferencia *ADF*, es igual á la mitad del radio *AC*. *Fig.* 9.

Prolónguese el seno *DB* hasta encontrar la circunferencia en *E*. Por ser (495) el arco *DAE* duplo del arco *DA*, será (267) *ADF* : *AD* = *ADFEA* : *DAE*; pero *AD* es la sexta parte de *ADF*: luego *DAE* será tambien (269) la sexta parte de la circunferencia *ADFEA*; por consiguiente la cuerda *DE* será lado del exâgono, y por lo tanto (221) *DE* = *AC*; pero (495) el seno *DB* es la mitad de la cuerda *DE* : luego será *DB* igual á la mitad de *AC*. Que es &c.

PROPOSICION XI.

498 La tangente *AD* de un ángulo *ACE* que es mitad del recto *ACB*, y tambien la cotangente *BD* de dicho ángulo, son iguales al radio. *Fig.* 10.

Por ser en el triángulo *CAD* el ángulo *A* recto, y el ángulo *ACD* mitad de un recto, será tambien el ángulo *ADC* la mitad de un recto : luego *AD* = *AC*. Del mismo modo se demostrará ser *BD* = *CB*. Que es &c.

Fig. 1.

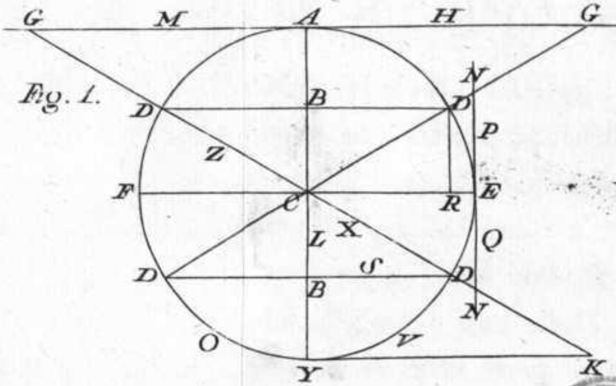


Fig. 2.

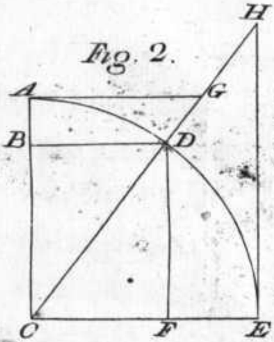


Fig. 3.

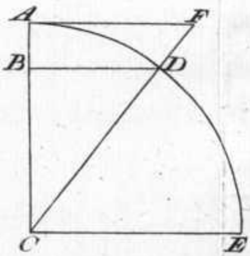


Fig. 4.

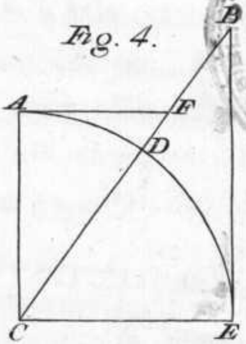


Fig. 5.

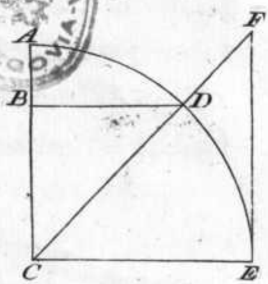


Fig. 6.

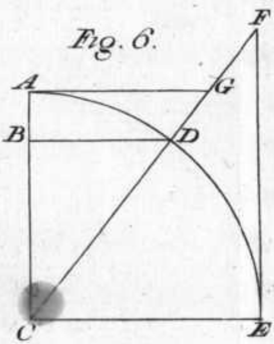


Fig. 7.

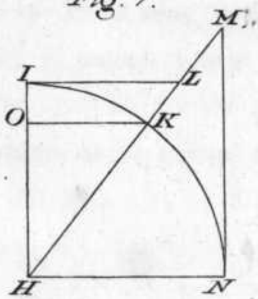
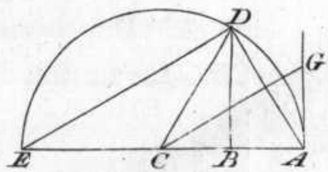
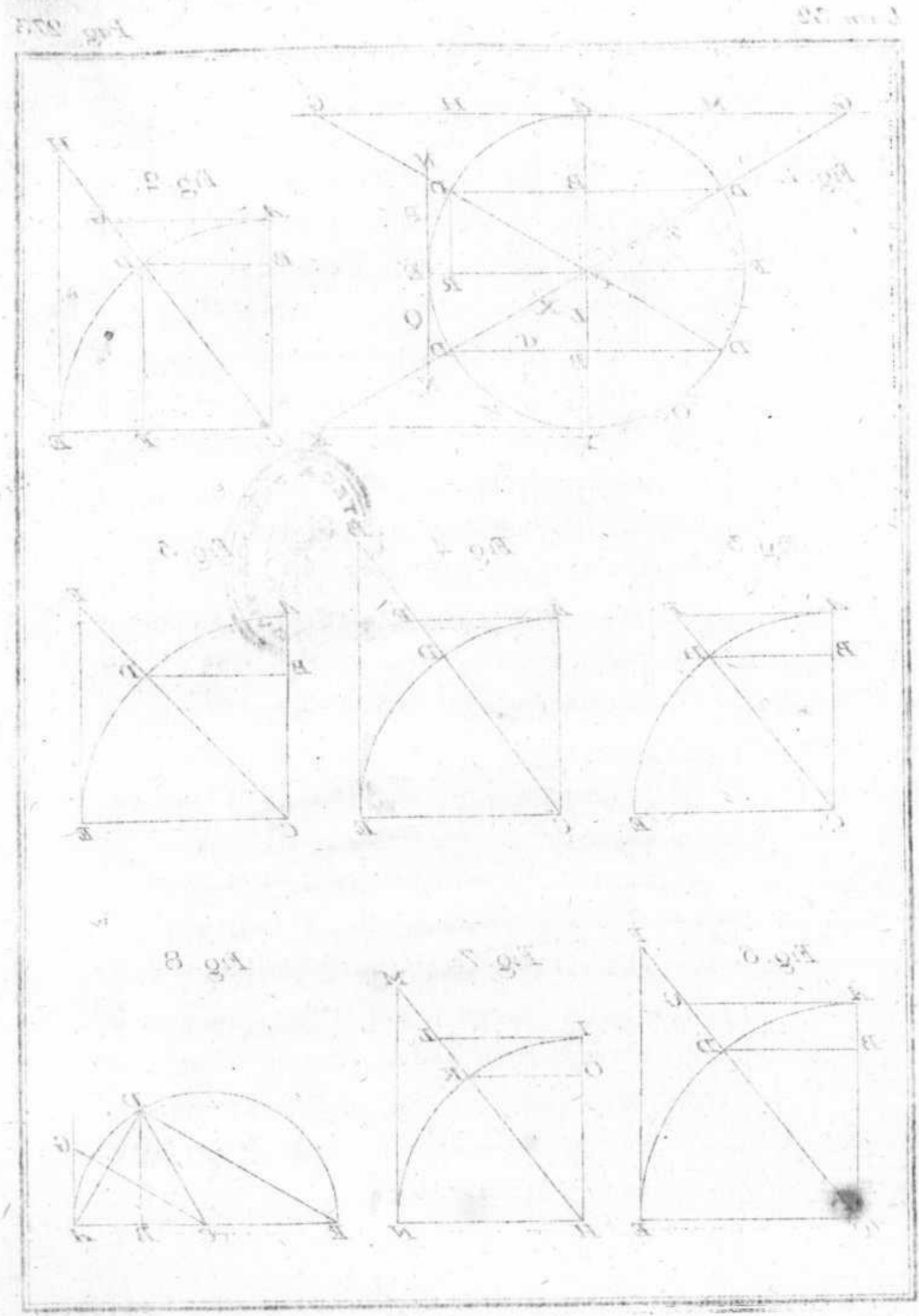


Fig. 8.





PROPOSICION XII.

499 Si á un arco AD se le añade otro DF; el rectángulo del radio por el seno de dichos arcos juntos será igual á la suma de los rectángulos del coseno del un arco por el seno del otro, y del seno del primero por el coseno del segundo; esto es, $R \times \text{Sc.}\,\overline{AD+DF} = \text{Cc.}\,DA \times \text{Sc.}\,DF + \text{Sc.}\,DA \times \text{Cc.}\,DF$. *Fig.* 11.

Tírense, la recta FH perpendicular al radio CD, las rectas FK, HL y DB perpendiculares al radio AC, y HG perpendicular á FK. Por ser el ángulo $FIH = CIK$, y el ángulo $IHF = CKI$ por rectos, será el ángulo $IFH = ICK$; pero los ángulos en G, B son iguales por rectos: luego los triángulos HFG, DCB serán equiángulos y tendrán (295) proporcionales los lados homólogos, esto es $CD : CB = FH : FG$, y por consiguiente (311) $CD \times FG = CB \times FH$. Tambien por ser los triángulos DCB, HCL equiángulos, es $CD : DB = CH : HL$ ó GK, y por consiguiente $CD \times GK = DB \times CH$. Por tanto será $CD \times FG + CD \times GK = CB \times FH + DB \times CH$; pero $CD \times FG + CD \times GK = CD \times FK$: luego será $CD \times FK = CB \times FH + DB \times CH$, esto es $R \times \text{Sc.}\,\overline{AD+DF} = \text{Cc.}\,AD \times \text{Sc.}\,DF + \text{Sc.}\,AD \times \text{Cc.}\,DF$. Que es &c.

COROLARIO.

500 Si los arcos AD, DF son iguales, tambien serán iguales sus senos y cosenos; por consiguiente será $R \times \text{Sc. } 2AD = 2\text{Cc. } AD \times \text{Sc. } AD$.

PROPOSICION XIII.

501 En la hipótesis de la proposicion antecedente, el rectángulo del radio por el coseno de dichos arcos juntos será igual á la diferencia del rectángulo de los senos de dichos arcos al rectángulo de sus cosenos; esto es $R \times \text{Cc. } \overline{AD+DF} = \text{Cc. } AD \times \text{Cc. } DF - \text{Sc. } AD \times \text{Sc. } DF$. *Fig.* 11.

Hágase la misma construccion en la figura, y se demostrará del mismo modo que los triángulos DBC, HGF son equiángulos; de lo que resulta la proporcion $CD : DB = FH : HG$ ó LK, y por consiguiente (311) $CD \times LK = DB \times FH$. Tambien en los triángulos equiángulos DCB, HCL será $CD : CB = CH : CL$, y por consiguiente $CD \times CL = CB \times CH$. Por tanto será $CD \times CL - CD \times LK = CB \times CH - DB \times FH$; pero $CD \times CL - CD \times LK = CD \times CK$: luego será $CD \times CK = CB \times CH - DB \times FH$, esto es $R \times \text{Cc. } \overline{AD+DF} = \text{Cc. } AD \times \text{Cc. } DF - \text{Sc. } AD \times \text{Sc. } DF$. Que es &c.

COROLARIO.

502 Si los arcos AD, DF son iguales, tambien serán iguales sus senos y cosenos; por consiguiente será $R \times \text{Cc.}\ 2AD = \overline{\text{Cc.}AD}^2 - \overline{\text{Sc.}AD}^2$; y añadiendo R^2 á ambas partes, será $R^2 + R \times \text{Cc.}\ 2AD = R^2 + \overline{\text{Cc.}AD}^2 - \overline{\text{Sc.}AD}^2$; pero (491) $R^2 - \overline{\text{Sc.}AD}^2 = \overline{\text{Cc.}AD}^2$: luego será $R^2 + R \times \text{Cc.}\ 2AD = 2 . \overline{\text{Cc.}AD}^2$.

PROPOSICION XIV.

503 Si de un arco AD se quita otro menor DF, el rectángulo del radio por el seno del arco residuo AF será igual á la diferencia del rectángulo del coseno del arco AD por el seno del arco DF al rectángulo del seno del arco AD por el coseno del arco DF; esto es $R \times \text{Sc.}\ \overline{AD - DF} = \text{Sc.}\ AD \times \text{Cc.}\ DF - \text{Cc.}\ AD \times \text{Sc.}\ DF$. *Fig.* 12.

Báxense las perpendiculares FH al radio CD; HL, DB y FK al radio AC; y FG á HL. Los triángulos HID, EIF tienen los ángulos en H, E rectos, y los ángulos en I iguales por verticalmente opuestos: luego será el ángulo $CDB = HFG$; pero los ángulos en B, G son iguales por rectos: luego los triángulos DBC, FGH serán equiángulos, y tendrán (295) proporcionales los lados homólogos, esto es $CD : CB = FH : HG$, y por consiguiente (311) $CD \times HG = CB \times FH$. Ademas por ser los triángulos HCL, DCB equiángulos, es $CD : DB = CH : HL$, y por consiguiente $CD \times HL = DB \times CH$. Por tanto será $CD \times HL - CD \times HG = DB \times CH - CB \times FH$; pero $CD \times HL - CD \times HG = CD \times GL$ ó bien $CD \times FK$: luego será $CD \times FK = DB \times CH - CB \times FH$, esto es $R \times \text{Sc.}\ \overline{DA - DF} = \text{Sc.}\ DA \times \text{Cc.}\ DF - \text{Cc.}\ DA \times \text{Sc.}\ DF$. Que es &c.

PROPOSICION XV.

504 En la hipótesis de la proposicion antecedente, el rectángulo del radio por el coseno del arco residuo AF será igual á la suma de los rectángulos del coseno del arco AD por el coseno del arco DF, y del seno del arco AD por el seno del arco DF; esto es, $R \times \text{Cc.}\ \overline{AD - DF} = \text{Cc.}\ DA \times \text{Cc.}\ DF + \text{Sc.}\ DA \times \text{Sc.}\ DF$. *Fig.* 12.

Hágase la misma construccion en la figura que la de la proposicion antecedente; y se demostrará del mismo modo que los triángulos CBD, HGF son equiángulos, de donde resulta la proporcion $CD : DB = FH : GF$ ó LK, y por consiguiente (311) $CD \times LK = DB \times HF$. Tambien por ser equiángulos los triángulos CDB, CHL, es $CD : CH = CB :$

CL, y por consiguiente $CD \times CL = CH \times CB$. Por tanto será $CD \times CL + CD \times LK = CH \times CB + DB \times HF$; pero $CD \times CL + CD \times LK = CD \times CK$: luego será $CD \times CK = CH \times CB + DB \times HF$, esto es $R \times \text{Cc.}\,\overline{AD-DF} = \text{Cc.}\,DF \times \text{Cc.}\,AD + \text{Sc.}\,AD \times \text{Sc.}\,DF$. Que es &c.

PROPOSICION XVI.

505 El duplo rectángulo del seno de un arco *AD* por el coseno de otro arco menor *DF*, es igual á la suma de los rectángulos del radio por el seno de la suma de dichos arcos, y por el seno de la diferencia; y el duplo rectángulo del seno del arco menor *DF* por el coseno del arco mayor *AD*, es igual á la diferencia de los mismos rectángulos: esto es, $2\text{Sc.}\,AD \times \text{Cc.}\,DF = R \times \text{Sc.}\,\overline{DA+DF} + R \times \text{Sc.}\,\overline{DA-DF}$, y $2\text{Sc.}\,DF \times \text{Cc.}\,AD = R \times \text{Sc.}\,\overline{DA+DF} - R \times \text{Sc.}\,\overline{DA-DF}$. *Fig.* 12.

I. Por lo demostrado (503) es $\text{Sc.}\,DA \times \text{Cc.}\,DF - \text{Cc.}\,DA \times \text{Sc.}\,DF = R \times \text{Sc.}\,\overline{DA-DF}$; pero (499) $\text{Sc.}\,DA \times \text{Cc.}\,DF + \text{Cc.}\,DA \times \text{Sc.}\,DF = R \times \text{Sc.}\,\overline{DA+DF}$: luego será $2\text{Sc.}\,DA \times \text{Cc.}\,DF = R \times \text{Sc.}\,\overline{DA+DF} + R \times \text{Sc.}\,\overline{DA-DF}$.

II. Siendo $2\text{Sc.}\,DA \times \text{Cc.}\,DF + 2\text{Cc.}\,DA \times \text{Sc.}\,DF = 2R \times \text{Sc.}\,\overline{DA+DF}$ (499), será tambien $2\text{Sc.}\,DA \times \text{Cc.}\,DF + 2\text{Cc.}\,A \times \text{Sc.}\,DF =$

$2R \times \text{Sc.}\,\overline{DA+DF} + R \times \text{Sc.}\,\overline{DA-DF} - R \times \text{Sc.}\,\overline{DA-DF}$; pero se ha demostrado antes que es $2\text{Sc.}\,DA \times \text{Cc.}\,DF = R \times \text{Sc.}\,\overline{DA+DF} + R \times \text{Sc.}\,\overline{DA-DF}$: luego será $2\text{Cc.}\,DA \times \text{Sc.}\,DF = R \times \text{Sc.}\,\overline{DA+DF} - R \times \text{Sc.}\,\overline{DA-DF}$. Que es &c.

PROPOSICION XVII.

506 El duplo rectángulo de los cosenos de dos arcos DA, DF desigùales, es igual á la suma de los rectángulos del radio por el coseno de dichos arcos, y por el coseno de la diferencia; y el duplo rectángulo de los senos es igual á la diferencia de los mismos rectángulos: esto es, $2\text{Cc.}\,DA \times \text{Cc.}\,DF = R \times \text{Cc.}\,\overline{DA+DF} + R \times \text{Cc.}\,\overline{DA-DF}$, y $2\text{Sc.}\,DA \times \text{Sc.}\,DF = R \times \text{Cc.}\,\overline{DA-DF} - R \times \text{Cc.}\,\overline{DA+DF}$. *Fig.* 12.

I. Por lo demostrado (501) es $R \times \text{Cc.}\,\overline{DA+DF} = \text{Cc.}\,DA \times \text{Cc.}\,DF - \text{Sc.}\,DA \times \text{Sc.}\,DF$; pero (504) $R \times \text{Cc.}\,\overline{DA-DF} = \text{Cc.}\,DA \times \text{Cc.}\,DF + \text{Sc.}\,DA \times \text{Sc.}\,DF$: luego será $R \times \text{Cc.}\,\overline{DA+DF} + R \times \text{Cc.}\,\overline{DA-DF} = 2\text{Cc.}\,DA \times \text{Cc.}\,DF$.

II. Consta que es (504) $2\text{Cc.}\,DA \times \text{Cc.}\,DF + 2\text{Sc.}\,DA \times \text{Sc.}\,DF = 2R \times \text{Cc.}\,\overline{DA-DF}$ ó bien igual á $2R \times \text{Cc.}\,\overline{DA-DF} + R \times \text{Cc.}\,\overline{DA+DF} - R \times \text{Cc.}\,\overline{DA+DF}$; pero se ha demostrado ser $2\text{Cc.}\,AD \times \text{Cc.}\,DF = R \times \text{Cc.}\,\overline{AD+DF} + R \times$

Cc. $\overline{AD-DF}$: luego tambien será 2 Sc. $AD \times$ Sc. $DF = R \times$ Cc. $\overline{AD-DF} - R \times$ Cc. $\overline{AD+DF}$. Que es &c.

PROPOSICION XVIII.

507 La suma de los senos de dos arcos AD, AF desiguales es á la diferencia de los mismos senos como la tangente de la semisuma de los arcos á la tangente de la semidiferencia; esto es, Sc. AD $+$ Sc. AF : Sc. AD $-$ Sc. AF $=$ Tc. $\frac{AD+AF}{2}$: Tc. $\frac{AD-AF}{2}$. *Fig.* 13.

Tírese la cuerda DF, y báxese desde el centro C á ella la perpendicular CM prolongada hasta la circunferencia en H; por este punto tírese la tangente HI que encontrará á los radios CA, CF prolongados en los puntos L, I. Tambien tírense las rectas FB, DN perpendiculares al radio AC; y las rectas FN, ME paralelas á dicho radio. Finalmente tómese $ER = EO$, y $HP = AH$.

Siendo, pues, FM seno del arco FH, será este (495) la semisuma de los arcos AD, AF; por consiguiente AP será la diferencia de los mismos arcos, y el arco AH su semidiferencia. Tambien por ser CH perpendicular á DF, será $DM = FM$; pero por ser paralelas FN, ME, es (290) $DM : MF = DE : EN$: luego (266) $NE = ED$, y por consiguiente ED será la semisuma de los senos

DO y *FB* que es igual á *NO*: luego la recta *EO* será su semidiferencia. Porque los triángulos *CMF*, *CMG* son respectivamente equiángulos á los *CHI*, *CHL*, será (295) $FM : MC = IH : HC$, y $MC : MG = CH : HL$; de donde por igualdad ordenada será (277) $FM : MG = IH : HL$; pero por ser las rectas *EM*, *OG* paralelas, es (290) $DE : EO = DM$ ó bien $MF : MG$: luego será $IH : HL = DE : EO = 2DE : 2EO$, esto es Tc. $\frac{DA+AF}{2}$: Tc. $\frac{AD-AF}{2}$ = Sc. AD + Sc. AF : Sc. AD − Sc. AF. Que es &c.

PROPOSICION XIX.

508 El coseno de un arco *AD* es á la suma del radio y del seno como el radio á la tangente de la semisuma del quadrante *AE* y del arco *AD*; y el coseno verso es al coseno como el radio á la tangente de dicha semisuma: esto es, Cc. $AD : R$ + Sc. $AD = R$: Tc. $\frac{AE+AD}{2}$, y R — Sc. AD : Cc. $AD = R$: Tc. $\frac{AE+AD}{2}$. *Fig.* 14.

I. Tírese el radio *CB* perpendicular á la cuerda *DE*; en el extremo *B* de dicho radio levántese la perpendicular *BL* terminada por el radio *CD* prolongado en *L*; en fin báxense las perpendiculares *DM*, *DF* á los radios *CG*, *AC*. Por ser las rectas *DH*, *BL* paralelas, será el ángulo $CDH = L$; pero en el triángulo isósceles *ECD* es $CDE = CED$:

luego será $CED = L$; pero los ángulos en M, B son iguales por rectos: luego los triángulos DME, CBL serán equiángulos y tendrán (295) proporcionales los lados homólogos, esto es $DM : ME = CB : BL$; pero $DM = CF =$ Cc. AD, $ME = CE + CM = R +$ Sc. AD, y $BL =$ Tc. $\frac{AE+AD}{2}$, por ser BD mitad de DBE (495): luego Cc. AD : $R +$ Sc. $AD = R$: Tc. $\frac{AE+AD}{2}$.

II. Por ser (308) $GM : MD = DM : ME$, y $MD : ME = CB : BL$ por lo demostrado; será tambien $GM : MD = CB : BL$: luego $R -$ Sc. AD : Cc. $AD = R$: Tc. $\frac{AE+AD}{2}$. Que es &c.

PROPOSICION XX.

509 Los ángulos rectilineos BAC, EAF tienen entre sí la razon compuesta de la directa de los arcos BC, EF, y de la recíproca de los radios AC, AE. *Fig.* 15.

Prolónguese el radio menor AF hasta encontrar la circunferencia del círculo ABG en D. Por ser iguales los ángulos EAF, CAD, será (341) $EF : CD = EHE : CGC$; pero $EHE : CGC = AE : AC$: luego será $EF : CD = AE : AC$; y estando el arco BC con el arco CD en razon compuesta de las razones de BC á EF y de EF á CD, estará tambien en razon compuesta de BC á EF y de AE

á AC; pero (338) el arco BC es al arco CD como el ángulo BAC al ángulo CAD: luego estará el ángulo BAC con el ángulo CAD ó EAF en razon compuesta de las razones de BC á EF y de AE á AC. Que es &c.

ESCOLIO.

510 Se ha supuesto en la demostracion de la proposicion antecedente, que las circunferencias de dos círculos son como los radios, esto es $EHE : CGC = AE : AC$; lo que se demuestra del modo siguiente. Los círculos AHE, ACG son iguales (435) á los triángulos rectángulos, cuyas bases son las circunferencias de los mismos círculos, y alturas sus radios; por consiguiente dichos círculos serán mitades de los respectivos rectángulos que tengan iguales bases y alturas: luego será $AHE : ACG = EHE \times AE : CGC \times AC$; pero (433) $AHE : ACG = \overline{AE}^2 : \overline{AC}^2$: luego será $EHE \times AE : CGC \times AC = \overline{AE}^2 : \overline{AC}^2$, y alternando $EHE \times AE : \overline{AE}^2 = CGC \times AC : \overline{AC}^2$; por consiguiente (289) $EHE : AE = CGC : AC$, y alternando $EHE : CGC = AE : AC$.

PROPOSICION XXI.

511 En qualquier triángulo ACB los lados

son proporcionales con los senos de sus ángulos opuestos. *Fig.* 16. 17.

Si los ángulos son A y C; será Sc. A : Sc. $C = BC$: AB (*Fig.* 16). Determinado un radio constante $AD = CF = R$, báxense desde los puntos D, F, B las perpendiculares DE, FG, BH á la recta AC prolongada, si es necesario; y las rectas DE, FG serán los senos de los ángulos A y C referidos á dicho radio. Por ser los triángulos DAE, BAH equiángulos, serán (295) proporcionales sus lados homólogos, esto es $DE : AD = BH : AB$: tambien por ser los triángulos FCG, BCH equiángulos, será FC, ó $AD : FG = BC : BH$: luego por igualdad perturbada (278) $DE : FG = BC : AB$, esto es los senos de los ángulos A y C serán proporcionales con los lados opuestos á los mismos ángulos. Del mismo modo se demostrará ser Sc. B : Sc. $A = AC : CB$, y Sc. B : Sc. $C = AC : AB$.

Si uno de dichos ángulos fuese recto, su seno seria el radio R; y así supuesto el ángulo C recto (*Fig.* 17), será Sc. $A : R = BC : AB$, por ser $ED : DA = CB : BA$. Que es &c.

COROLARIO I.

512 Luego dados en un triángulo ABC los senos de dos ángulos A y C referidos al radio dado

AD = *R*, y ademas un lado *AB* opuesto á uno de dichos ángulos, se determinará el lado opuesto al otro ángulo, hallando una quarta proporcional á Sc. *C*, Sc. *A*, y *AB*.

COROLARIO II.

513 Tambien dados en un triángulo *ABC* dos lados *AB*, *BC* y el seno del ángulo *A* opuesto á uno de ellos *BC*; se determinará el seno del ángulo *C* opuesto al otro lado *BC*, hallando una quarta proporcional á *AB*, *BC* y Sc. *C*. Adviértase que si *BC* no es menor que *BA*, será el ángulo *C* agudo; y si el seno del ángulo *C* es igual al radio, será el ángulo *C* recto: en otro caso puede corresponder el referido seno tanto á un ángulo agudo, como al obtuso que sea su diferencia á dos rectos.

PROPOSICION XXII.

514 Dividir ó aumentar un ángulo *BAC*, de suerte que los senos de los dos ángulos, que resulten, estén en la razon dada de *M* á *N*. *Fig.* 18. 19.

I. Prolónguese la recta *BA* indefinidamente (*Fig.* 18), y tomado qualquiera punto *F* en *AC*, hállese (306) una quarta proporcional *AE* á las tres *M*, *N*, *AF*; tírese la recta *EF*, y á esta por el vértice *A* la paralela *AD*, que dividirá al ángu-

Fig. 9.

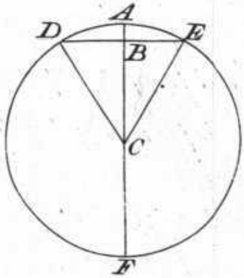


Fig. 10.

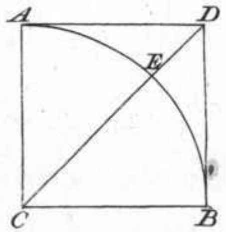


Fig. 11.

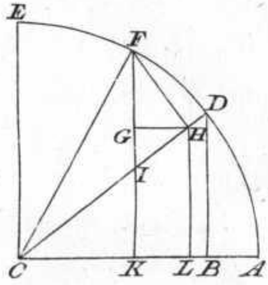


Fig. 12.

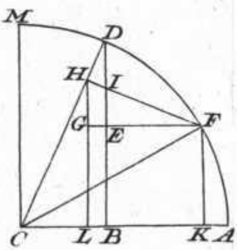


Fig. 13.

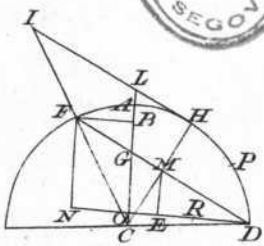


Fig. 14.

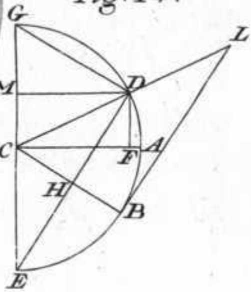


Fig. 15.

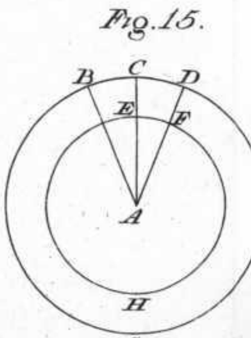
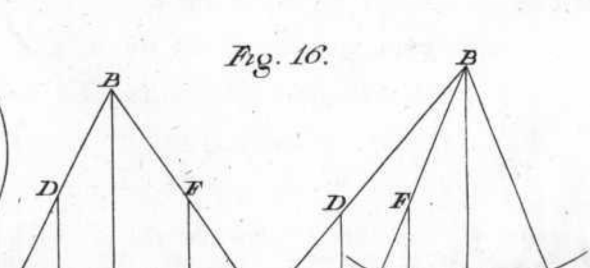


Fig. 16.



lo BAC como se pide. En el triángulo EAF es (511) el seno del ángulo E al seno del ángulo F como AF á AE; pero (96) los ángulos E, F son respectivamente iguales á los BAD, DAC: luego será el seno del ángulo BAD al seno del ángulo DAC como AF á AE ó bien como M á N. Hecha la construccion antecedente en la *Fig.* 19, se demostrará de un modo semejante que se aumenta el ángulo BAC de tal suerte que es el seno del ángulo DAE al seno del ángulo DAC como M á N; pero en este caso deberá ser $M < N$.

II. Si se ha de aumentar el ángulo BAC, de suerte que sea el seno del ángulo BAD al seno del ángulo BAC como M á N (*Fig.* 19) en cuyo caso no podrá tener M á N mayor razon que el seno total al seno del ángulo BAC; hágase entonces $M : N = AF : FE$, y tírese AD paralela á FE. En el triángulo EAF es el seno del ángulo AEF al del ángulo EAF como AF á FE; pero el ángulo $AEF = DAE$ (96): luego será el seno del ángulo DAB al del ángulo BAC como AF á FE ó bien como M á N. Que es &c.

PROPOSICION XXIII.

515 Si en qualquier triángulo BAC se divide la base BC por medio en D, y se tira la recta AD;

será el seno del ángulo BAD al seno del ángulo DAC como el seno del ángulo B al seno del ángulo C. *Fig.* 20.

En el triángulo BAD es (511) Sc.BAD: Sc.B $= BD : DA$; y tambien en el triángulo DAC es Sc.DAC : Sc.$C = DC : DA$; pero $BD : DA = DC : DA$, por ser $BD = DC$ (sup.): luego será Sc.BAD : Sc.B = Sc.DAC : Sc.C, y alternando (270) Sc.BAD : Sc.DAC = Sc.B : Sc.C. Que es &c.

COROLARIO.

516 Por ser Sc.B : Sc.$C = AC : AB$ (511), será tambien Sc.BAD : Sc.$DAC = AC : AB$.

PROPOSICION XXIV.

517 Si á la semisuma de dos magnitudes AB, BC se añade su semidiferencia, se tendrá la mayor BC: y si de la semisuma se resta la semidiferencia, resultará la menor AB. *Fig.* 21.

Córtese de la mayor BC una parte $CD = AB$, y divídase BD por medio en E. Esto supuesto, será BD la diferencia de las magnitudes CB y AB; BE la semidiferencia; y CE ó bien AE la semisuma: luego añadiendo la semisuma CE de las dos magnitudes AB y BC á la semidiferencia BE de las mismas, resulta la mayor BC, y restando de la semisuma AE la semidiferencia BE, se tiene la menor AB. Que es &c.

COROLARIO.

518 Luego se determinarán dos magnitudes, de las quales se conoce la semisuma y la semidiferencia, ó bien la suma y la diferencia.

PROPOSICION XXV.

519 En qualquier triángulo ABC la suma de dos lados desiguales AB, AC es á la diferencia de los mismos como la tangente de la semisuma de los ángulos B y C opuestos á dichos lados á la tangente de la semidiferencia de los mismos ángulos; esto es, $AB + AC : AB - AC = \text{Tc.} \frac{C+B}{2} : \text{Tc.} \frac{C-B}{2}$. *Fig.* 20.

En el triángulo BAC es (511) $AB : AC = \text{Sc.}\, C : \text{Sc.}\, B$: luego componiendo será (272) $AB + AC : AC = \text{Sc.}\, C + \text{Sc.}\, B : \text{Sc.}\, B$, y dividiendo (271) $AB - AC : AC = \text{Sc.}\, C - \text{Sc.}\, B : \text{Sc.}\, B$, é invirtiendo esta proporcion será (254) $AC : AB - AC = \text{Sc.}\, B : \text{Sc.}\, C - \text{Sc.}\, B$: luego por igualdad ordenada será (277) $AB + AC : AB - AC = \text{Sc.}\, C + \text{Sc.}\, B : \text{Sc.}\, C - \text{Sc.}\, B$; pero (507) $\text{Sc.}\, C + \text{Sc.}\, B : \text{Sc.}\, C - \text{Sc.}\, B = \text{Tc.} \frac{C+B}{2} : \text{Tc.} \frac{C-B}{2}$: luego será $AB + AC : AB - AC = \text{Tc.} \frac{C+B}{2} : \text{Tc.} \frac{C-B}{2}$. Que es &c.

COROLARIO.

520 Luego dados en el triángulo BAC los dos lados AB, AC y la tangente de la semisuma de los ángulos B y C opuestos á dichos lados, se determinará la tangente de la semidiferencia de los mismos ángulos; y suponiendo ahora conocidos los ángulos, que corresponden á dichas tangentes, se hallarán (518) los dos ángulos B y C. Si el ángulo A es recto, los dos ángulos B y C serán juntos iguales á un recto; por consiguiente (498) Tc. $\frac{B+C}{2} = R$: pero en este caso se determinará (489) la tangente del ángulo C respecto á un radio dado R, hallando una quarta proporcional á AC, R y AB; asimismo se determinará la tangente del ángulo B, hallando una quarta proporcional á AB, R y AC.

PROPOSICION XXVI.

521 Si en un triángulo ABC, que tienen los lados AB y BC desiguales, se baxa desde el ángulo comprehendido B la perpendicular BE al tercer lado AC; será este lado á la suma de los otros dos como la diferencia de estos mismos á la diferencia ó suma de los segmentos AE, EC, que forma la perpendicular, segun esta caiga dentro ó fuera del triángulo. *Fig.* 22. 23.

Haciendo centro en B, con el intervalo del lado menor BC descríbase el círculo DCG; prolónguese el otro lado AB hasta cortar la circunferencia en D, y en la *Fig.* 23. prolónguese tambien AC hasta cortar la circunferencia en F; será por consiguiente $AD = AB + BC$, $AG = AB - BC$, y (156) $FE = EC$, por ser BE perpendicular á la cuerda CF; de donde resulta que en la *Fig.* 22. es $AF = AE - EC$ diferencia de los segmentos formados por la perpendicular, y en la *Fig.* 23. $AF = AE + EC$ suma de los mismos segmentos. Se ha demostrado (192) que es $AC \times AF = AD \times AG$, y por consiguiente (311) $AC : AD = AG : AF$: luego en la *Fig.* 22. será $AC : AB + BC = AB - BC : AE - EC$, y en la *Fig.* 23. será $AC : AB + BC = AB - BC : AE + EC$. Que es &c.

PROPOSICION XXVII.

522 Dados en un triángulo escaleno ABC los tres lados AB, BC y AC, hallar los senos de sus tres ángulos referidos al radio ó seno total R. *Fig.* 22.

Tómese el lado mayor AC por base, y sobre él, desde el ángulo opuesto B, báxese la perpendicular BE. Hállese (306) una quarta proporcional á las rectas AC, $AB + BC$, y $AB - BC$, y se tendrá (521) la diferencia de los segmentos AE, *EC*; añadida ahora la mitad de dicha diferencia á la mitad del lado *AC*, y restada aquella de esta, se tendrán (517) los segmentos *AE* y *EC*. Por tanto en el triángulo rectángulo *AEB* serán conocidos los lados *AB*, *AE* y el ángulo *E* opuesto al lado *AB*; asimismo en el triángulo *BEC* serán conocidos los lados *BC*, *CE* y el ángulo *E* opuesto al lado *BC*: luego se determinarán (513) los senos de los ángulos *A* y *C* referidos al radio *R*. Por lo demostrado (513) el seno del ángulo *ABC* será quarta proporcional á *BC*, *AC* y al seno del ángulo *A*. Que es &c.

PROPOSICION XXVIII.

523 Si quatro senos *EK*, *DI*, *CH* y *BG* son proporcionales, y el primero es mayor que el segundo, y que el tercero; tirados los radios *FE*, *FD*, *FC* y *FB*, será el ángulo *EFD* mayor que el ángulo *CFB*. *Fig.* 24.

Prolónguense los senos *EK*, *CH*, hasta encontrar la circunferencia del círculo *FBM* en los puntos *O*, *R*; tírense las cuerdas *DN*, *BM* paralelas al radio *AF*, y tambien las cuerdas *DE*, *BC*. Siendo (sup.) $EK : DI = CH : BG$, será convirtiendo (273) $EK : EP = CH : CL$; pero (sup.) $EK > CH$: luego será (265) $EP > CL$; y por ser $PO > LR$, será tambien $EP \times PO$

$> CL \times LR$; por consiguiente (190) $DP \times PN >$ $BL \times LM$; pero $PN < LM$: luego será $DP > BL$: y habiéndose demostrado antes que es $EP > CL$, será tambien $\overline{DP}^2 + \overline{EP}^2 > \overline{BL}^2 + \overline{CL}^2$, ó bien (124) $\overline{DE}^2 > \overline{BC}^2$, y por consiguiente $DE > BC$: luego será (92) el ángulo $EFD > CFB$. Que es &c.

Fig. 17.

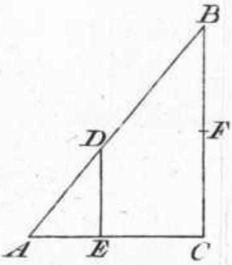


Fig. 18.

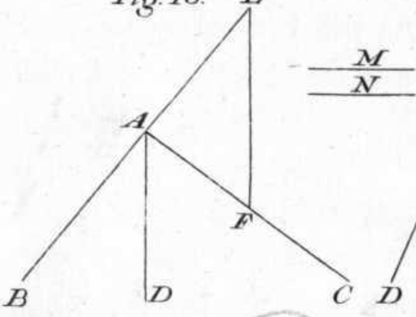


Fig. 19.

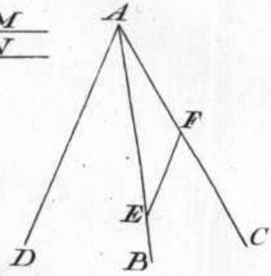


Fig. 21.

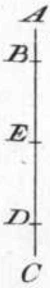


Fig. 22.

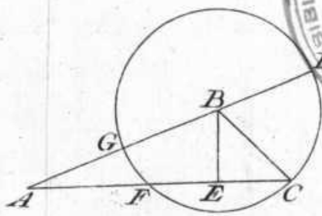


Fig. 23.

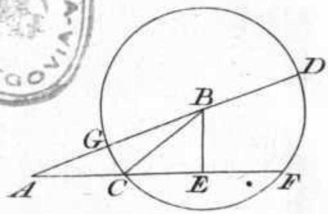


Fig. 24.

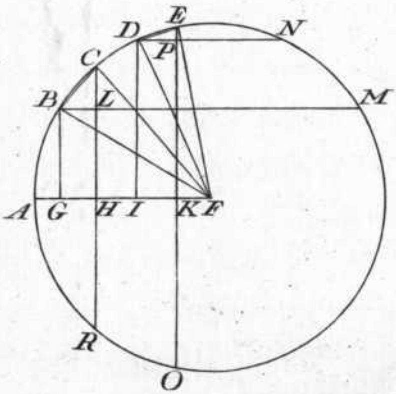
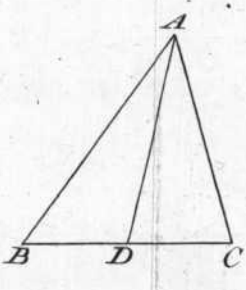
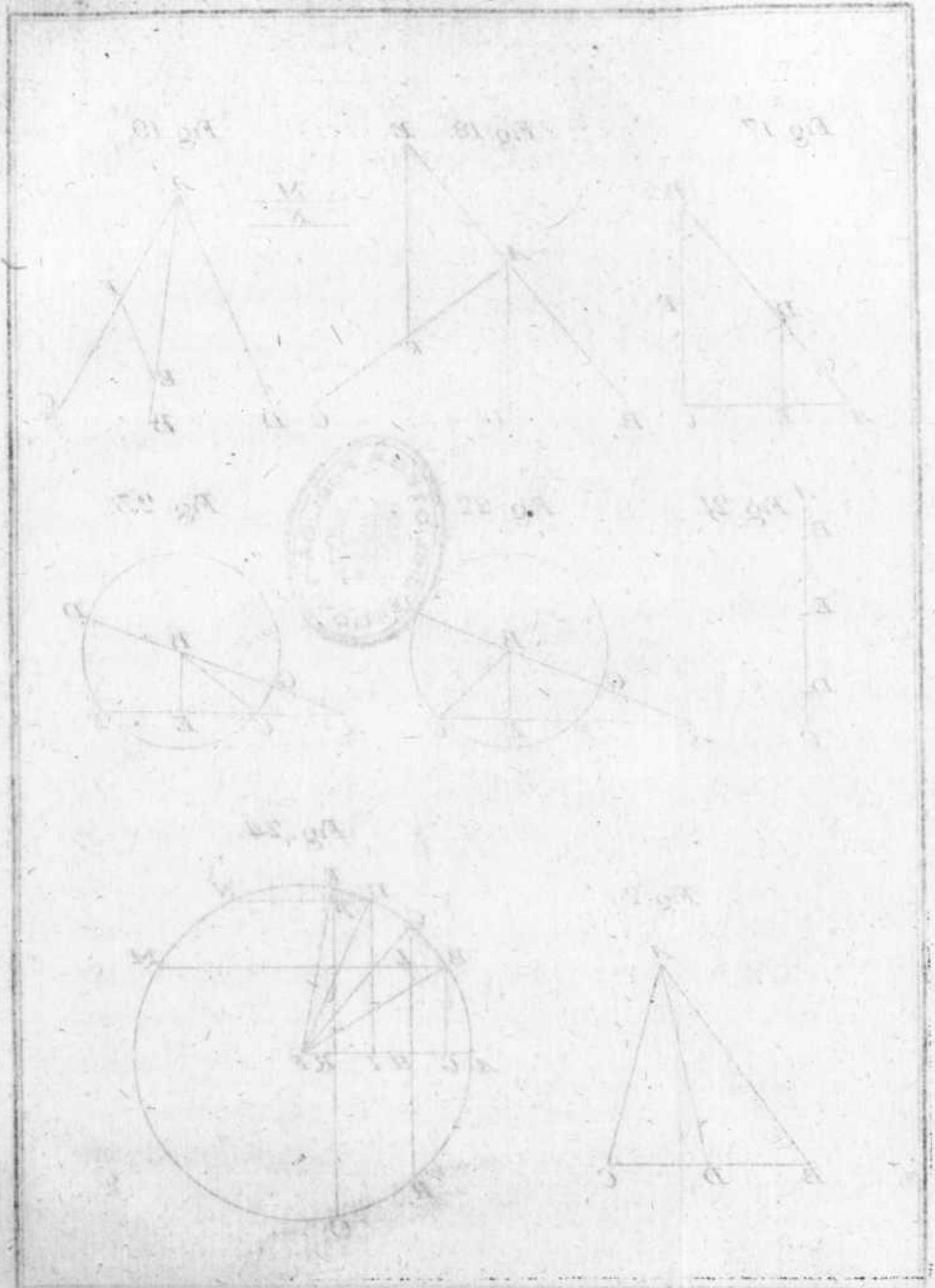


Fig. 20.





De las principales propiedades de las tres secciones cónicas Parábola, Elipse é Hipérbola.

LIBRO PRIMERO.

DE LA PARÁBOLA.

DEFINICIONES.

524 Parábola es una curva *LAH* que tiene dentro de ella un punto fixo *F*, desde el qual todas las rectas *FG* tiradas á la periferia son iguales á las perpendiculares *GN* baxadas desde los puntos *G* á una recta *CD* dada de posicion fuera de la curva; la que se describe del modo siguiente. *Fig.* 1.

Si sobre la recta fixa *CD* se acomoda el lado *NP* de la esquadra *MNP*, y en el extremo *M* del otro lado se fixa el cavo de un hilo igual á *NM*, y el otro cavo se asegura en un punto qualquiera *F* dado fuera de la recta, pero que esté en el plano que forma la esquadra, y con una punta *G* se oprime el hilo contra la esquadra de modo que quede igualmente tenso; y finalmente se mueve el lado *NP* de la esquadra por la recta *CD*, permaneciendo siempre tirante el hilo por medio de la punta que correrá por el lado *MN* de la esquadra; descríbirá esta punta una parte de la parábola que se termina en la perpendicular baxada desde *F* á *CD*; y continuará por la otra parte, invirtiendo la posicion de la regla, y repitiendo la misma operacion: porque siendo $FG + GM = MN$, será tambien $FG = GN$. Es evidente que esta curva puede extenderse á una distancia del punto *F* mayor que qualquiera dada, si se toma *MN* mayor que dicha distancia.

525 La recta *CD* dada de posicion se llama Directrix de la parábola *LAH*: y el punto fixo *F*, Focus.

526 Qualquiera recta *MN* perpendicular á la directrix *CD* se llama Diámetro: y el punto donde encuentra á la parábola, Vértice del diámetro. El diámetro *BK* que pasa por el focus *F*, se llama Exe de la parábola, y su vértice *A* es el vértice primario. *Fig.* 2.

527 Parámetro del exe ó de qualquiera diámetro se llama el quádruplo de la distancia del vértice del exe ó del diámetro al focus: y así una recta igual á $4FG$ será el parámetro del diámetro *GM*. *Fig.* 2.

528 Tangente de una parábola se llama la recta que encuentra á la curva en un solo punto, y que prolongada cae toda fuera del espacio compre-

hendido por esta curva; y tal es la recta *GS*. *Fig.* 3.

529 Ordenada al exe *AK* se llama la perpendicular *EG* baxada á él desde qualquier punto *G* de la curva (*Fig.* 3). Ordenada á un diámetro *GM* se llama la recta *HI* tirada al diámetro desde qualquier punto *H* de la curva, y paralela á la recta *GS* tangente de la curva en el punto *G* vértice del mismo diámetro. *Fig.* 4.

530 Abscisa de qualquiera ordenada se llama la parte del exe ó del diámetro comprehendida entre el vértice del exe ó del diámetro, y la misma ordenada: y así las rectas *AE*, *GI* son las abscisas correspondientes á las ordenadas *EG*, *IH*. *Fig.* 3. 4.

531 La parte del exe ó del diámetro comprehendida entre una ordenada á él y la tangente al mismo punto de la curva de donde sale la ordenada, se llama subtangente: y así suponiendo las rectas *GS*, *HO* tangentes de la curva en los respectivos puntos *G*, *H*, las rectas *ES*, *IO* serán subtangentes (*Fig.* 3. 4). Tirada la perpendicular á la tangente en el punto del contacto, la parte del exe ó del diámetro comprehendida entre esta perpendicular y la ordenada tirada desde dicho punto al exe ó al diámetro, se llama subnormal: y así suponiendo *GP* perpendicular (*Fig.* 3) á la tangente *GS* en

el punto del contacto G, y la recta EG ordenada al exe, la recta EP será la subnormal.

PROPOSICION I.

532 La perpendicular IP baxada á la directrix CD desde qualquier punto I tomado fuera del espacio comprehendido por la parábola LAH, es menor que la distancia IF del mismo punto al focus F: y la perpendicular EO baxada á la directrix CD desde qualquier punto E tomado dentro de dicho espacio es mayor que la distancia EF del mismo punto al focus. *Fig.* 2.

I. Desde el punto G en que la recta IF corta la parábola, báxese la perpendicular GN á la directrix CD, y tírese IN. En el triángulo rectángulo IPN es $IP < IN$; pero en el triángulo IGN es $IN < IG + GN$: luego será $IP < IG + GN$; y por ser (524) $GN = GF$, será $IG + GN = IF$: luego $IP < IF$.

II. Del focus F tírese la recta FQ al punto Q en que la recta EO corta la parábola; y será (524) $QO = QF$; y añadiendo EQ, será tambien $EO = EQ + QF$; pero $EQ + QF > EF$: luego será $EO > EF$. Que es &c.

COROLARIO.

533 Infiérese que si la distancia de un punto

al focus F es igual á la distancia del mismo punto á la directrix CD, estará dicho punto en la parábola; y si es menor ó mayor, estará el punto dentro ó fuera del espacio comprehendido por la parábola.

PROPOSICION II.

534 El quadrado de qualquiera ordenada MP al exe AI de la parábola SAT es igual al rectángulo hecho del parámetro $4AF$ y de la abscisa AP; esto es, $\overline{MP}^2 = 4AF \times AP$. *Fig.* 5.

Desde el focus F tírese la recta FM, y del punto M báxese la perpendicular MN á la directrix CD. Siendo las rectas FM, BP iguales á MN, será $FM = BP$, y por consiguiente $\overline{FM}^2 = \overline{BP}^2$; pero (124) $\overline{FM}^2 = \overline{FP}^2 + \overline{PM}^2$, y (136) $\overline{BP}^2 = \overline{FP}^2 + 4AF \times AP$ por ser $AB = AF$: luego será $\overline{FP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{FP}^2 + 4AF \times AP$; y quitado el quadrado comun de FP, será $\overline{PM}^2 = 4AF \times AP$. Que es &c.

COROLARIO I.

535 Del mismo modo se demostrará que el quadrado de la ordenada PH es igual al rectángulo de la abscisa AP por el parámetro $4AF$: luego será $\overline{PH}^2 = \overline{PM}^2$, y por consiguiente $PH = PM$. Por tanto en la parábola qualesquiera dos ordenadas á un mismo punto del exe son iguales.

COROLARIO II.

536 Por ser el quadrado de la ordenada *PM* igual al rectángulo del parámetro $4AF$ por la abscisa *AP*, será (312) $4AF : PM = PM : AP$; esto es qualquiera ordenada al exe será media proporcional entre el parámetro y la correspondiente abscisa.

COROLARIO III.

537 Tambien de ser el quadrado de la ordenada al exe igual al rectángulo del parámetro $4AF$ por la abscisa, resulta que si recta *QL* es perpendicular al exe *AI* y es $\overline{QL}^2 = 4AF \times AQ$, estará el punto *L* en la parábola *SAT*.

COROLARIO IV.

538 Tirada desde el focus *F* la ordenada *FK* al exe, será $\overline{KF}^2 = \overline{BF}^2$ ó bien $4\overline{AF}^2$, y por consiguiente $KF = 2AF$: luego la ordenada *KF* será igual á la mitad del parámetro $4AF$.

PROPOSICION III.

539 Los quadrados de las ordenadas *QL* y *PM* al exe *AI* tienen la razon de las abscisas *AQ* y *AP*; esto es, $\overline{QL}^2 : \overline{PM}^2 = AQ : AP$. *Fig.* 5.

Sea el punto *F* focus de la parábola *SAT*. Consta (534) que es $\overline{QL}^2 = 4AF \times AQ$, y $\overline{PM}^2 = 4AF \times AP$: luego será $\overline{QL}^2 : \overline{PM}^2 = 4AF \times AQ : 4AF \times AP$; pero (289) $4AF \times AQ : 4AF \times AP = AQ : AP$: luego será $\overline{QL}^2 : \overline{PM}^2 = AQ : AP$. Que es &c.

COROLARIO.

540 Si las rectas MP, LQ son perpendiculares al exe AI, y es $\overline{LQ}^2 : \overline{MP}^2 = AQ : AP$, y ademas está el punto L en la parábola SAT; estará tambien el otro punto M en la misma parábola. Por ser $\overline{LQ}^2 : \overline{MP}^2 = AQ : AP$, será tambien $\overline{LQ}^2 : \overline{MP}^2 = 4AF \times AQ : 4AF \times AP$; pero (534) $\overline{LQ}^2 = 4AF \times AQ$, por estar el punto L en la parábola (sup.): luego será $\overline{MP}^2 = 4AF \times AP$; por consiguiente (537) el punto M estará en la misma curva.

PROPOSICION IV.

541 Describir la parábola SAT, cuyo exe sea la recta AI dada de posicion, su vértice primario el punto A, y su parámetro igual á la recta R. *Fig.* 5.

Tómense las rectas AF, AB, iguales á la quarta parte del parámetro R; y levantada la perpendicular CD sobre la recta BI, descríbase (524) la parábola SAT que tenga su focus en F, y por directrix CD; y será la que se pide: porque la recta BFI es perpendicular á la directrix CD y pasa por el focus F, será el exe de la parábola SAT; y por ser $FA = AB$, el punto A estará (533) en la curva: luego será el vértice primario; pero $4AF = R$: luego el parámetro del exe AI de la parábola SAT será igual á R. Que es &c.

PROPOSICION V.

542 Describir la parábola SAT cuyo exe sea la recta AI dada de posicion, su vértice primario el punto A, y que pase por el punto L inferior al punto A. *Fig.* 5.

Desde el punto L tírese la recta LQ perpendicular al exe AI; hállese (305) una tercera proporcional R á las rectas AQ, QL; y descríbase (541) la parábola SAT, que tenga AI por exe, el punto A por vértice primario, y el parámetro del exe igual á la recta R: y será la que se pide.

Siendo $AQ : QL = QL : R$ será (312) $R \times AQ = \overline{QL}^2$; por consiguiente (537) el punto L estará en la parábola SAT. Que es &c.

PROPOSICION VI.

543 Entre las dos rectas dadas A y B hallar dos medias proporcionales. *Fig.* 6.

Tírense las rectas CD, CG en ángulo recto; y descríbase (541) la parábola CEH, cuyo exe sea CD y su parámetro A: asimismo descríbase la parábola CEI que tenga CG por exe, y por parámetro B; desde el punto E donde se cortan las curvas, báxese la perpendicular ED al exe CD: y serán continuas proporcionales las rectas A, ED, CD, B. Tírese EG perpendicular á CG. Siendo ED ordenada al exe CD de la parábola CEH, será (536) $A : ED = ED : DC$; y por ser EG ordenada al exe CG de la parábola CEI, será (536) $CG : EG = EG : B = CD : B$; pero $ED : DC = CG : GE$: luego será $A : ED = ED : DC = DC : B$. Que es &c.

PROPOSICION VII.

544 Tirar una tangente á la parábola PAQ en un punto dado. *Fig.* 7.

I. Si el punto dado es el vértice A del exe BL, levántese la perpendicular AM sobre dicho exe, la qual será tangente de la curva en A. Del focus F tírese FM, y del punto M báxese la perpendicular MN á la directrix BE. En el triángulo rectángulo FAM es $FM > FA$; pero (524) $FA = AB = MN$: luego será $FM > MN$; por consiguiente (533) el punto M estará fuera de la parábola: lo mismo se demostrará de qualquier otro punto tomado en la recta AM prolongada por ambas partes: luego la perpendicular *AM* será tangente de la curva en el punto *A*.

II. Si el punto dado es qualquiera otro *D* de la curva, báxese *DC* perpendicular á la directrix *BE*; tírese *CF*; y dividida esta por medio en *O*, tírese la recta *ODG* que será tangente en el punto *D*. Desde qualquier punto *G* de la recta *ODG*, báxese *GE* perpendicular á la directrix *BE*, y tírense las rectas *FG*, *GC*. Los triángulos *DOF*, *DOC* tienen los lados $OF = OC$, *OD* comun, y $FD = DC$, por estar el punto *D* en la curva: luego tendrán los ángulos *DOF*, *DOC* iguales, esto es rectos; y siendo ademas $FO = OC$, y *OG* comun á los triángulos *FOG*, *COG*, será $FG = CG$; pero $GC > GE$: luego será $FG > GE$, y por consiguiente (533) el punto *G* estará fuera de la parábola. Luego &c.

COROLARIO I.

545 Prolongada *CD* por el punto *D*, será el ángulo *HDG*, formado por el diámetro *DH* y la tangente *DG*, igual al ángulo *FDO* formado por la recta *FD* y la misma tangente *OD*: porque siendo los triángulos *DOC*, *DOF* totalmente iguales, será el ángulo $CDO = FDO$; pero los ángulos *CDO*, *HDG* son iguales por verticalmente opuestos: luego el ángulo $HDG = FDO$.

Fig. 1.

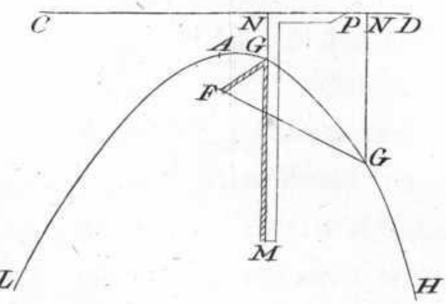


Fig. 2.

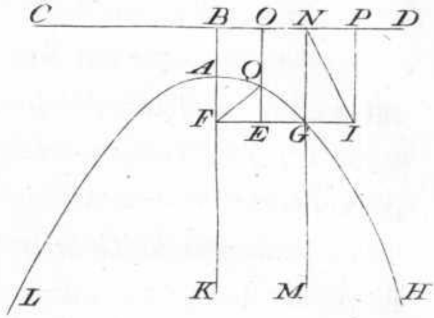


Fig. 3.

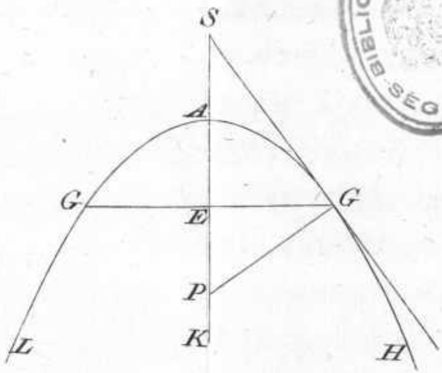


Fig. 4.

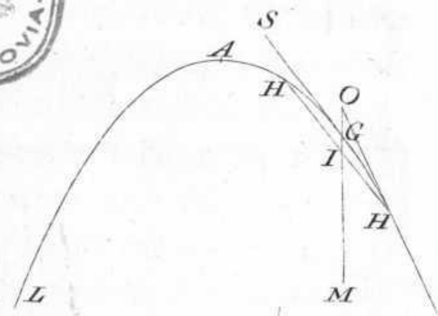


Fig. 5.

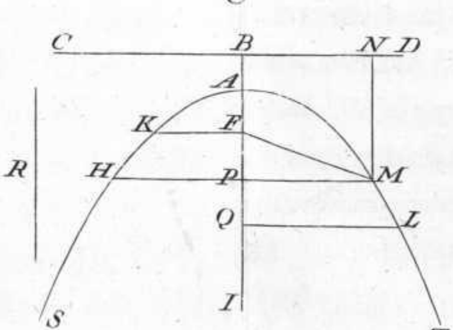
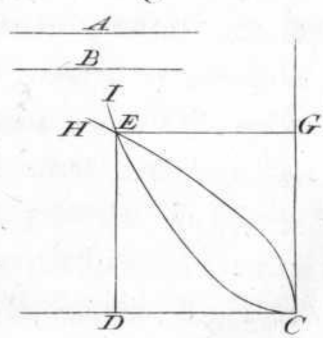


Fig. 6.



COROLARIO II.

546 Prolongada la tangente DO hasta que corte el exe en S, será $FD = FS$; pues, por ser las rectas SL y DH paralelas, será el ángulo externo $FSD = HDG$; pero (545) el ángulo $FDS = HDG$: luego el ángulo $FSD = FDS$, y por consiguiente $FD = FS$.

PROPOSICION VIII.

547 Si las rectas LIE, MDE son tangentes de la parábola en los puntos I, D, y desde ellos se tiran las rectas IF, DF al focus F; el ángulo DFI formado en él por estas rectas será duplo del ángulo DEI formado en el punto E, donde se cortan dichas tangentes. *Fig.* 8.

Cortando la tangente DE prolongada al exe HS en el punto S, será (546) el ángulo $FSD = FDS$, y por consiguiente el ángulo externo HFD será duplo del interno opuesto FSD. Del mismo modo se demostrará ser el ángulo IFH duplo del ángulo IKF ó bien de su igual SKE. Por tanto será el ángulo DFI duplo de los ángulos juntos KSE, SKE; pero el ángulo externo $DEK = KSE + SKE$: luego será el ángulo $DFI = 2DEK$. Es evidente que esta demostracion comprehende el caso, en que las dos tangentes se cortan en un mismo punto del exe. Que es &c.

PROPOSICION IX.

548 Si la recta SD es tangente de la parábola en el punto D, y la recta DG es ordenada al exe AH; será la subtangente GS dupla de la abscisa AG. *Fig.* 8.

Sea BC la directrix de la parábola, y su focus F: tírense FD y DN perpendicular á BC. Siendo las rectas FD, BG iguales á DN, será $FD = BG$; pero (546) $FD = FS$: luego $BG = FS$; pero (524) $AB = AF$: luego $AG = AS$, y por consiguiente $GS = 2AG$. Que es &c.

PROPOSICION X.

549 Si la recta DH es perpendicular á la tangente DE en el punto del contacto D, y la recta DG es ordenada al exe AH; el parámetro $4AF$ del exe será duplo de la subnormal GH. *Fig.* 8.

Por ser el ángulo SDH recto, y la ordenada DG perpendicular al exe SH, será (302) $GS : GD = GD : GH$; por consiguiente (312) $GH \times GS = \overline{GD}^2$; pero (534) $\overline{GD}^2 = 4AF \times AG$: luego será $GH \times GS = 4AF \times AG$; y por lo tanto (311) $4AF : GH = GS : AG$; pero (548) la subtangente GS es dupla de la abscisa AG: luego será el parámetro $4AF$ duplo de GH. Que es &c.

PROPOSICION XI.

550 El quadrado de la tangente DS, comprehendida entre el punto del contacto D y el exe, es igual al quadruplo rectángulo hecho de la distancia de dicho punto D al focus F, y de la abscisa AG; esto es, $\overline{DS}^2 = 4DF \times AG$. *Fig.* 8.

Se supone CB la directrix de la parábola, y DN perpendicular á ella. Siendo el triángulo DGS rectángulo en G, será $\overline{DS}^2 = \overline{DG}^2 + \overline{GS}^2$; pero $\overline{DG}^2 = 4AB \times AG$ (534), y $\overline{SG}^2 = 4\overline{AG}^2$, por ser $SG = 2AG$ (548): luego será $\overline{DS}^2 = 4AB \times AG + 4\overline{AG}^2 = 4BG \times AG$; pero $BG = DN = DF$: luego $\overline{DS}^2 = 4DF \times AG$. Que es &c.

PROPOSICION XII.

551 Si á qualquiera ordenada HR al exe AT son perpendiculares las rectas KI, GL, tiradas de qualesquiera dos puntos K, G de la parábola HAO; será $KI : GL = HI \times IR : HL \times LR$: y prolongada dicha ordenada HR, estarán tambien las perpendiculares OP, NM en la razon de los rectángulos $HP \times PR$, $HM \times MR$. *Fig.* 9.

Sea F el focus de la parábola HAO: tírese la ordenada GE al exe AT. Por ser (535) $TH = TR$, será (133) el quadrado de TR igual al rectángulo de HL por LR y al quadrado de TL ó QG; pero (534) $\overline{TR}^2 = 4AF \times AT$, y $\overline{QG}^2 = 4AF \times AQ$: luego será $4AF \times AT = HL \times LR + 4AF \times AQ$; y quitando el rectángulo comun $4AF \times AQ$, será tambien $4AF \times QT$ ó bien $4AF \times LG = HL \times LR$. Del mismo modo se demostrará ser $4AF \times IK = HI \times IR$. Por tanto será $HI \times IR : HL \times LR = 4AF \times IK : 4AF \times LG = IK : LG$ (289). De un modo semejante se demostrará la proporcion $OP : NM = HP \times PR : HM \times MR$. Que es &c.

PROPOSICION XIII.

552 Tirada qualquiera ordenada NM á un diámetro EG de la parábola YAN que tiene su focus en F, será el quadrado de esta ordenada igual al rectángulo de la abscisa EM por el parámetro del mismo diámetro; esto es, $\overline{MN}^2 = 4EF \times EM$. *Fig.* 10.

Tírense las rectas NH, ED y AL perpendiculares al exe AH; y (544) la tangente ES al punto E de la parábola, la que será paralela á la ordenada MN; en fin prolónguese la recta AL hasta encontrar el diámetro GEC en C. Por ser las rectas HN, ED ordenadas al exe AH, será (539) $\overline{HN}^2 : \overline{DE}^2 = AH : AD = AHGC : ADEC$ (289);

pero por ser los triángulos *HKN*, *DSE* equiángulos, es (295. 323) $\overline{HN}^2 : \overline{DE}^2 = KHN : SDE$: luego será $AHGC : ADEC = KHN : SDE$; y por ser $SD = 2AD$ (548), es el paralelógramo $ADEC = SDE$: luego será $AHGC = KHN$; y quitando el trapecio comun *KMGH*, quedará $AKMC = MGN$; pero $AKMC = SKME$, por ser los triángulos *SAL*, *ECL* iguales: luego el paralelógramo $SKME = MGN$: y siendo por la semejanza de los triángulos *MGN* y *SDE*, $\overline{MN}^2 : \overline{ES}^2 = MGN : SDE$, será tambien $\overline{MN}^2 : \overline{ES}^2 = SKME : ADEC = SK : AD$ (289), por estar entre unas mismas paralelas los paralelógramos *SKME* y *ADEC*; pero $SK : AD = SK \times 4EF : AD \times 4EF$: luego será $\overline{MN}^2 : \overline{ES}^2 = SK \times 4EF : AD \times 4EF$; y habiéndose demostrado ser (550) $\overline{ES}^2 = AD \times 4EF$, será tambien $\overline{MN}^2 = SK \times 4EF = EM \times 4EF$. Que es &c.

COROLARIO I.

553 Con el mismo método se demostrará ser $\overline{Mn}^2 = EM \times 4EF$: luego será $\overline{MN}^2 = \overline{Mn}^2$, y por consiguiente $MN = Mn$. Por tanto las dos ordenadas correspondientes á un mismo punto de qualquiera diámetro son iguales.

COROLARIO II.

554 Por ser el quadrado de la ordenada MN igual al rectángulo del parámetro $4EF$ por la abscisa EM, será (312) $4EF : MN = MN : EM$; esto es, qualquiera ordenada á un diámetro será media proporcional entre el parámetro del mismo diámetro y la abscisa correspondiente.

COROLARIO III.

555 Tambien de ser el quadrado de la ordenada á un diámetro igual al rectángulo del parámetro del mismo diámetro por la correspondiente abscisa, resulta que si la recta OP es paralela á las ordenadas al diámetro EG, y es $\overline{OP}^2 = 4EF \times EO$, estará el punto P en la parábola YAN.

PROPOSICION XIV.

556 Los quadrados de las ordenadas MN y OP al diámetro EG tienen la razon de las abscisas EM y EO. *Fig.* 10.

Siendo MN ordenada al diámetro EG, será (552) $\overline{MN}^2 = 4EF \times EM$; y por la misma razon será $\overline{OP}^2 = 4EF \times EO$: luego $\overline{MN}^2 : \overline{OP}^2 = 4EF \times EM : 4EF \times EO$; pero (289) $4EF \times EM : 4EF \times EO = EM : EO$: luego será $\overline{MN}^2 : \overline{OP}^2 = EM : EO$. Que es &c.

COROLARIO.

557 Si las rectas OP, MN son paralelas á las ordenadas al diámetro EG de la curva, y es $\overline{OP}^2 : \overline{MN}^2 = EO : EM$, y el punto P está en la parábola YAN; estará tambien el otro punto N en la misma parábola. Por ser $\overline{OP}^2 : \overline{MN}^2 = EO : EM$, será tambien $\overline{OP}^2 : \overline{MN}^2 = 4EF \times EO : 4EF \times EM$; pero (552) $\overline{OP}^2 = 4EF \times EO$ por estar el punto P en la parábola: luego será $\overline{MN}_2 = 4EF \times EM$; por consiguiente (555) el punto N estará en la misma parábola.

PROPOSICION XV.

558 Dadas la recta BQ y la posicion de las rectas GE, ES que se cortan en E; describir una parábola que tenga EG por diámetro y que el parámetro de este sea igual á la recta dada BQ, y ademas que la recta ES sea tangente á la curva en E. *Fig.* 10.

En la recta GE prolongada por el punto E, tómese EI igual á la quarta parte de BQ; tírese la recta IR perpendicular á IG; hágase el ángulo $FES = GET$, y la recta $EF = EI$; en fin descríbase (524) la parábola YEN que tenga el focus en F y por la directrix RI; y será la que se pide. Siendo

$EI = EF$, la parábola descrita pasará (533) por el punto E, y será la recta IG uno de sus diámetros (por ser IG perpendicular á la directrix RI) cuyo parámetro $= 4EF = 4EI = BQ$. Ademas por ser el ángulo $GET = FES$, la recta SET será (545) tangente á la curva en el punto E. Que es &c.

PROPOSICION XVI.

559 Dadas la posicion del diámetro EG cuyo vértice sea E, y la posicion y la magnitud de la recta OP que encuentra á dicho diámetro en O baxo del vértice; describir una parábola que pase por el punto P, y que la recta OP sea ordenada al diámetro EG. *Fig.* 10.

Por el vértice E tírese la recta ES paralela á OP; hállese (305) una tercera proporcional BQ á las rectas EO, OP; en fin descríbase (558) la parábola YAN que tenga EG por diámetro cuyo parámetro sea $= BQ$, y que la recta ES sea tangente á la curva en E: y será la que se pide. Siendo, pues, la recta OP paralela á la tangente ES, será ordenada al diámetro EG; y por ser proporcionales el parámetro BQ, la ordenada OP y la abscisa EO, será (312) el quadrado de la ordenada OP igual al rectángulo del parámetro BQ, perteneciente al diámetro EG, por la abscisa EO:

luego estará (5 5 5) el punto *P* en la parábola *YAN*. Que es &c.

PROPOSICION XVII.

5 6 0 Si un cono *ALBDC* está cortado por un plano *GK* paralelo á la base *DL*; el plano *KHGY* terminado por la superficie cónica será un círculo, cuyo centro será el punto *F* comun al exe *AE* del cono. *Fig.* 1 1.

El triángulo *BEA*, que describe el cono moviéndose al rededor de *AE*, considérese en qualquiera otra situacion *DEA*; y tírense las rectas *HF*, *GF*. Porque el plano *BAE* corta los planos paralelos *DL* y *GK*, serán (3 9 4) las comunes secciones *BE* y *HF* paralelas: y por la misma razon lo serán *DE* y *GF*. Por tanto los triángulos *BAE* y *HAF* serán equiángulos, como tambien los *DAE* y *GAF*; por consiguiente será $BE : HF = EA : FA$, y $DE : GF = EA : FA$; de donde resulta ser $BE : HF = DE : GF$; pero las rectas *BE* y *DE* son iguales por radios del círculo *DL*: luego será $HF = GF$. Del mismo modo se demostrará que todas las rectas tiradas desde el punto *F* al perímetro de la seccion *KHGY* son iguales: luego dicha seccion será un círculo cuyo centro es *F*. Que es &c.

PROPOSICION XVIII.

561 Si el cono *CAHB* está cortado por el plano triangular *CAB*, que pasa por el exe del mismo cono, y ademas por otro plano *FOH* que pasa por las rectas, *HF* perpendicular á la base *AB* de dicho triángulo, y *GO* paralela á uno de sus lados *AC*; la linea *FOH*, que es la comun seccion del plano *FOH* y de la superficie del cono, será una parábola, y la recta *OG* será uno de sus diámetros. *Fig.* 12.

Por qualquier punto *K* de la seccion comun *OG* tírense las rectas *YL* y *DE* respectivamente paralelas á las *FH* y *AB*; y el plano *DYEL*, que pasa por aquellas, será (392) paralelo á la base *AFBH* que pasa por estas; por consiguiente (560) el plano *DYEL* terminado por la superficie cónica será un círculo, cuyo diámetro es *DE*. Tambien por ser las rectas *KL* y *KD* paralelas á las *GH* y *GA*, será (386) el ángulo $DKL = AGH$: pero *AGH* es recto: luego tambien lo será *DKL*; por consiguiente (156) la recta *YL* estará cortada por medio en el punto *K*. Por tanto siendo las rectas *GH* y *LK* perpendiculares á los diámetros *AB* y *DE*, será (308. 312) $\overline{GH}^2 = AG \times GB$ y $\overline{KL}^2 = DK \times KE$; de donde resulta $\overline{GH}^2 : \overline{KL}^2 =$

$AG \times GB : DK \times KE$; pero $AG = DK$ por lados opuestos del paralelógramo $ADKG$: luego será $\overline{GH}^2 : \overline{KL}^2 = BG : EK = GO : OK$, por ser los triángulos GOB, KOE equiángulos: luego descrita (559) una parábola, cuyo diámetro sea OG y su vértice O, y que pase por el punto H, estará tambien (557) el punto L en la misma curva: y lo mismo se demostrará de todos los puntos de la seccion FOH. Que es &c.

$ZC \times CE : OX \times XA$ [illegible] $= ZL$ [illegible]
opuestos [illegible] análogo [illegible], luego [illegible] TX
[illegible] $ZX \times XC$ [illegible]
OO, XOX [illegible] luego [illegible]
una parábola, cuyo diámetro sea OU y se verá
[illegible] que pase por el punto H estará también [illegible]
y [illegible]
común [illegible] todos los puntos [illegible]
Que es [illegible]

Fig. 7.

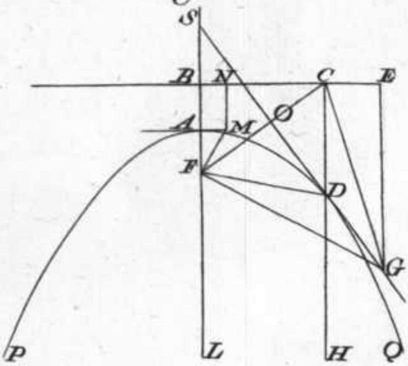


Fig. 8.

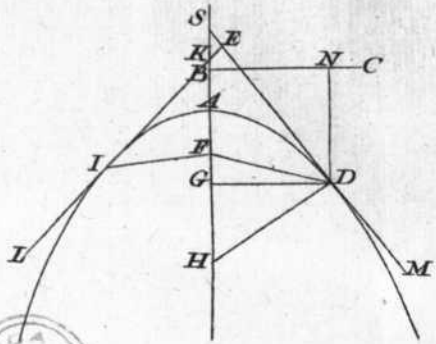


Fig. 9.

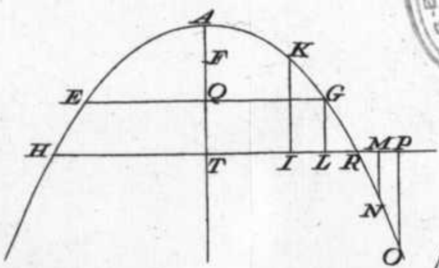


Fig. 10.

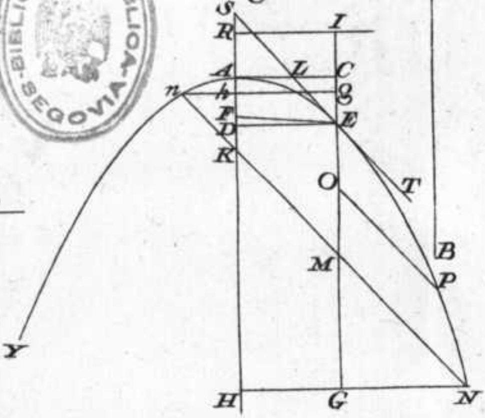


Fig. 11.

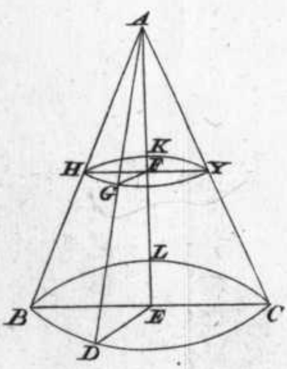
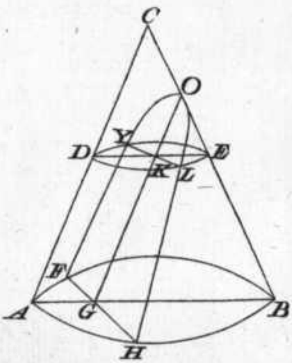
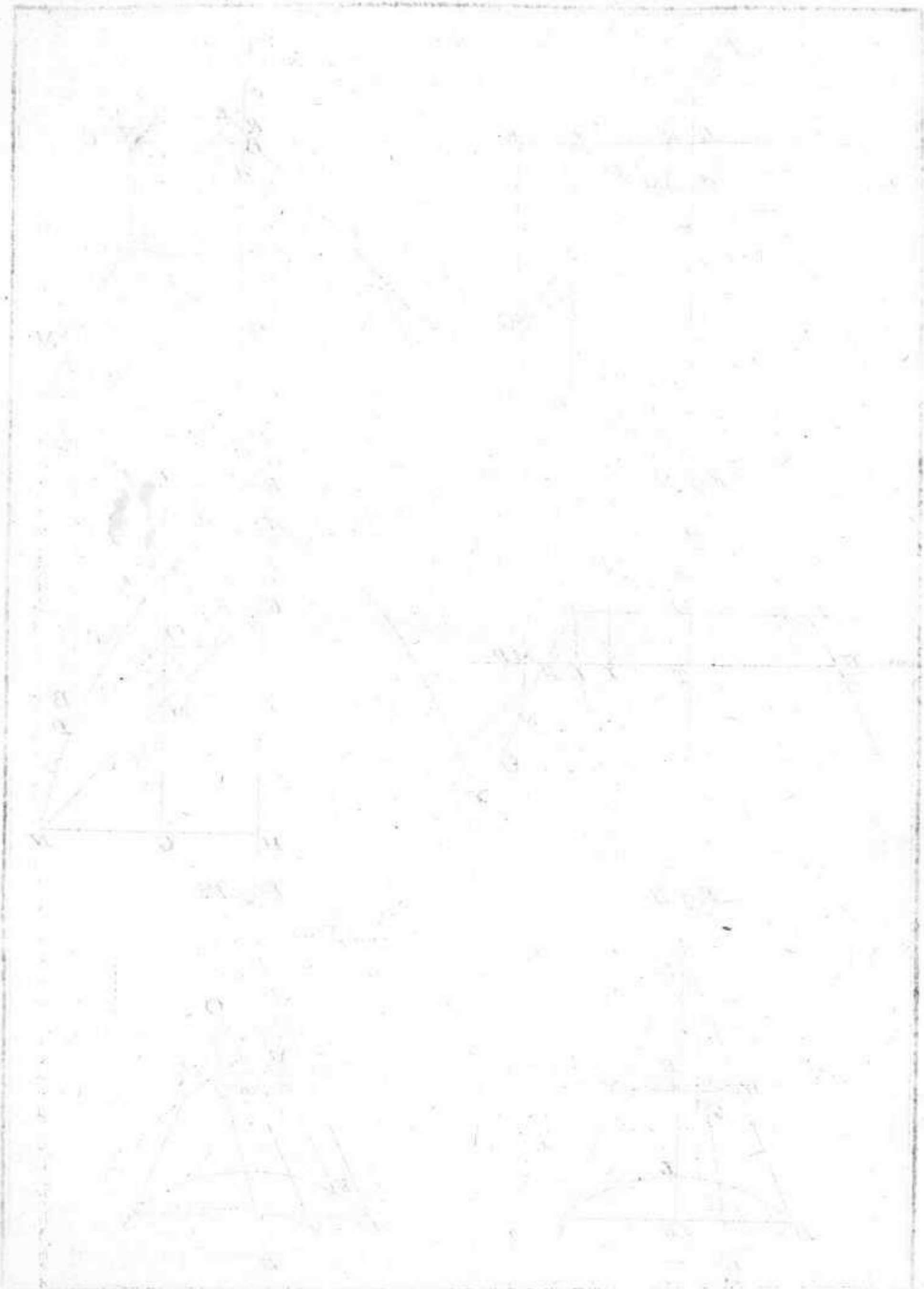


Fig. 12.





LIBRO II.

DE LA ELIPSE.

DEFINICIONES.

562 Elipse es una curva *AMBM* que tiene dentro de ella dos puntos *F* y *f*, desde los quales la suma de las rectas *FM* y *fM* tiradas á qualquier punto de la periferia, es constantemente la misma. *Fig.* 1.

Si en qualquiera plano se toman dos puntos *F* y *f*, y se afianzan en ellos los extremos de un hilo *FMf* cuya longitud sea mayor que la distancia *Ff* entre dichos puntos, y por medio de una punta se tiene tirante el hilo, y en esta disposicion se hace girar dicha punta á una y otra parte del hilo; la linea *AMBHA* que se describe por la punta, será una elipse.

563 Los puntos *F* y *f* se llaman focus de la elipse: y el punto *C* que divide por medio la recta *Ff* que junta los focus, se llama centro de la elipse.

564 Qualquiera recta *GH* que pasa por el centro *C* y se termina de una y otra parte en la curva, se llama diámetro de la elipse: y los puntos *G* y *H* donde encuentra á la elipse, vértices de él.

565 El diámetro AB que pasa por los focus F y f, se llama exe mayor de la elipse: y el diámetro ED perpendicular al exe mayor, se llama exe menor de la elipse. *Fig.* 2.

566 Dos diámetros se llaman conjugados, quando las paralelas á el uno terminadas en la curva se dividen por el otro en partes iguales.

567 La tercera proporcional á dos diámetros conjugados se llama parámetro del diámetro que sea primer término de la proporcion.

En esta curva se dá el mismo sentido á los términos de tangente, ordenada á un exe, ó á un diámetro, abscisa, subtangente y subnormal, que en la parábola.

PROPOSICION I.

568 La suma de las dos rectas FH y fH tiradas desde qualquier punto H de la elipse á los focus F y f, es igual al exe mayor AB: y la suma de las dos rectas FM y fM tiradas desde qualquier punto M, tomado en el espacio comprehendido por la elipse, á los focus F y f, es menor que el exe mayor AB: en fin la suma de las dos rectas FN y fN tiradas desde qualquier punto N, tomado fuera de dicho espacio, á los focus F y f, es mayor que el exe mayor AB. *Fig.* 3.

I. Consta (562) ser $FA + Af = FB + fB$;

y quitada la parte comun Ff, será $2FA = 2fB$; por consiguiente $FA = fB$, y $FA + Af = AB$; pero (562) $FA + Af = FH + fH$: luego será $FH + fH = AB$.

II. Tírese por el centro C y el punto M la recta CM, y alárguese hasta encontrar la elipse en H; y será $FM + fM < FH + fH$; pero $FH + fH = AB$: luego será $FM + fM < AB$. Del mismo modo se demostrará ser $FN + fN > AB$. Que es &c.

COROLARIO I.

569 Infiérese que si es $FH + fH = AB$, estará el punto H en la elipse: y si es $FM + fM < AB$, estará el punto M dentro del espacio comprehendido por la elipse: en fin si es $FN + fN > AB$, estará el punto N fuera de dicho espacio.

COROLARIO II.

570 El centro C de la elipse divide por medio el exe mayor AB: porque siendo (563) $CF = Cf$, y por lo demostrado (568) $FA = fB$, será $CA = CB$.

COROLARIO III.

571 La recta FE tirada desde el focus F al vértice E del exe menor ED, es igual al semiexe mayor AC. *Fig.* 2. Desde el otro focus f tírese al

mismo vértice E la recta fE; y por ser los lados FC y CE iguales á los fC y CE, y los ángulos en C rectos, será $FE = Ef$; pero $FE + fE = AB = 2AC$: luego será $FE = AC$.

COROLARIO IV.

572 El exe menor ED está dividido por medio en el centro C. Tírense las rectas FE y FD; y por ser estas iguales (571) al semiexe mayor AC, serán iguales entre sí: luego $\overline{FC}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{FC}^2 + \overline{CD}^2$; y quitado el quadrado comun de FC, será $\overline{CE}^2 = \overline{CD}^2$; por consiguiente $CE = CD$.

PROPOSICION II.

573 El quadrado del semiexe menor CE es igual al rectángulo formado por los segmentos del exe mayor AB comprehendidos entre el focus F, y sus vértices A y B; esto es $\overline{CE}^2 = AF \times FB$. *Fig.* 2.

Siendo (571) $FE = AC$, será $\overline{FE}^2 = \overline{AC}^2$; pero $\overline{FE}^2 = \overline{FC}^2 + \overline{CE}^2$, y (133) $\overline{AC}^2 = \overline{FC}^2 + AF \times FB$ por estar el exe mayor AB dividido por medio en el centro C: luego será $\overline{FC}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{FC}^2 + AF \times FB$, y por consiguiente $\overline{CE}^2 = AF \times FB$. Que es &c.

COROLARIO.

574 Siendo la recta AG parámetro del exe mayor AB, será (567) $AB : ED = ED : AG$, y por consiguiente (312) $AB \times AG = \overline{ED}^2$; pero $\overline{ED}^2 = 4\overline{EC}^2 = 4AF \times FB$: luego será $AB \times AG = 4AF \times FB$.

PROPOSICION III.

575 Si se tira qualquiera ordenada HG al exe mayor AB de la elipse, y la recta HF al focus próxîmo F; será el semiexe mayor á la distancia del centro al focus como la distancia del centro á la ordenada á la diferencia del semiexe mayor á dicha recta; esto es, $AC : CF = CG : AC - FH$. *Fig.* 4.

Tírese la recta Hf al otro focus f; tómese $AK = FH$; y haciendo centro en H, con el intervalo HF descríbase el semicírculo NFM que cortará al exe mayor AB en el punto O, y á la recta fH prolongada en los puntos M y N. Siendo, pues, $Ff = 2CF$ y $FO = 2FG$, será $Of = 2CG$: y siendo tambien (568) $FH + Hf = AB$; ó bien $Nf = 2AC$ (570), y $NM = 2HF = 2AK$, será $Mf = 2CK$. Porque las rectas Nf y Ff son secantes del círculo $NFOM$, será (192) $Nf \times fM = Ff \times fO$; por consiguiente (311) $Nf : Ff = fO : fM$: luego tambien las mitades de estas rectas serán proporcionales, esto es $AC : CF = CG : CK$ ó $AC — FH$. Que es &c.

COROLARIO.

576 Por ser $AC : CF = CG : CK$, será (311) $AC \times CK = CF \times CG$.

PROPOSICION IV.

577 Supuesta la construccion de la proposicion antecedente, el quadrado de la ordenada HG será igual á la diferencia de los rectángulos $AG \times GB$ y $FK \times Kf$; esto es $\overline{HG}^2 = AG \times GB — FK \times Kf$. *Fig.* 4.

Por estar la recta AC dividida en K, será (135) $\overline{CA}^2 + \overline{CK}^2 = 2\,AC \times CK + \overline{AK}^2$; pero (576) $AC \times CK = CF \times CG$, y $\overline{AK}^2$ ó bien $\overline{FH}^2 = \overline{FG}^2 + \overline{HG}^2$; luego será $\overline{CA}^2 + \overline{CK}^2 = 2\,CF \times CG + \overline{FG}^2 + \overline{HG}^2$; pero (135) $2\,CF \times CG + \overline{FG}^2 = \overline{FC}^2 + \overline{CG}^2$: luego $\overline{CA}^2 + \overline{CK}^2 = \overline{FC}^2 + \overline{CG}^2 + \overline{HG}^2$, ó bien $AG \times GB + \overline{GC}^2 + \overline{CK}^2 = FK \times Kf + \overline{CK}^2 + \overline{CG}^2 + \overline{HG}^2$; y quitando de ambas partes los quadrados de las rectas CK y CG, quedará $AG \times GB = FK \times Kf + \overline{HG}^2$, y por consiguiente el quadrado de la recta HG será la diferencia entre los rectángulos $AG \times GB$ y $FK \times Kf$. Que es &c.

PROPOSICION V.

578 Si se tira una ordenada á uno de los exes de la elipse; será el quadrado de este exe al quadrado del otro como el rectángulo formado por los segmentos del exe cortado al quadrado de la ordenada. *Fig.* 5.

I. Si la recta HG es ordenada al exe mayor AB de la elipse $AEBD$, y la recta ED es el exe menor; será $\overline{AB}^2 : \overline{ED}^2 = AG \times GB : \overline{HG}^2$.

Súponganse F y f los focus de la elipse; tírese FH; córtese $AK = FH$, y será (575) $AC : CF = CG : CK$: luego (323) $\overline{AC}^2 : \overline{CF}^2 = \overline{CG}^2 : \overline{CK}^2$. Por tanto siendo el todo al todo como la parte á la parte, será tambien (274) $\overline{AC}^2$ á $\overline{CF}^2$ como el residuo $AG \times GB$ al residuo $FK \times Kf$; y convirtiendo (273) $\overline{AC}^2 : AF \times FB = AG \times GB : \overline{GH}^2$, por ser este quadrado (577) la diferencia entre los rectángulos $AG \times GB$ y $FK \times Kf$; pero (573) $AF \times FB = \overline{CE}^2$: luego será $\overline{AC}^2$ á $\overline{CE}^2$ ó bien $\overline{AB}^2 : \overline{ED}^2 = AG \times GB : \overline{GH}^2$.

II. Siendo la recta HL ordenada al exe menor ED; será $\overline{ED}^2 : \overline{AB}^2 = EL \times LD : \overline{HL}^2$.

Consta por lo arriba demostrado que es $\overline{AB}^2 : \overline{ED}^2 = AG \times GB : \overline{GH}^2$ ó $\overline{CL}^2$, por ser $GH = CL$: luego tambien será (274) $\overline{AB}^2 : \overline{ED}^2 = \overline{GC}^2 : DL$

$\times LE$; é invirtiendo $\overline{ED}^2 : \overline{AB}^2 = DL \times LE : \overline{CG}^2$ ó $\overline{HL}^2$. Que es &c.

COROLARIO I.

579 Tirada otra ordenada GY al mismo punto G del exe mayor AB, se demostrará del mismo modo ser $\overline{AB}^2 : \overline{ED}^2 = AG \times GB : \overline{GY}^2$: luego será $\overline{GH}^2 = \overline{GY}^2$, y por consiguiente $GH = GY$. Por tanto á qualquiera abscisa tomada en el exe mayor AB corresponden dos ordenadas iguales, una á cada lado de dicho exe. Lo mismo se demostrará respecto á las ordenadas al exe menor ED. Luego los exes AB y ED son dos diámetros conjugados.

COROLARIO II.

580 Si la recta QP es perpendicular al exe mayor AB, y ademas es $\overline{AB}^2 : \overline{ED}^2 = AP \times PB : \overline{PQ}^2$; estará el punto Q en la elipse $AEBD$.

COROLARIO III.

581 Siendo el parámetro AX del exe AB tercer término proporcional á los exes AB y ED, será (321) $\overline{AB}^2 : \overline{ED}^2 = AB : X$; pero $\overline{AB}^2 : \overline{ED}^2 = AG \times GB : \overline{GH}^2$: luego será $AB : AX = AG \times GB : \overline{GH}^2$.

COROLARIO IV.

582 Descrito con el semiexe mayor CA el semicírculo $CAZB$, y prolongada la ordenada GH hasta encontrar la circunferencia de él en Z, será (308. 312) $AG \times GB = \overline{GZ}^2$: luego $\overline{GZ}^2 : \overline{GH}^2 = \overline{AB}^2 : \overline{ED}^2$; por consiguiente (323) $GZ : GH = AB : ED$: de donde resulta que la perpendicular baxada desde qualquier punto de la circunferencia de dicho círculo al exe mayor de la elipse, está con el segmento comprehendido por dicho exe y la elipse en la razon constante del exe mayor al menor.

PROPOSICION VI.

583 Los quadrados de las ordenadas á qualquiera de los exes de la elipse, tienen entre sí la misma razon que los rectángulos de los segmentos del exe. *Fig.* 5.

Si las rectas HG y QP son ordenadas al exe mayor AB; será $\overline{HG}^2 : \overline{QP}^2 = AG \times GB : AP \times PB$.

Siendo (578) $\overline{AB}^2 : \overline{ED}^2 = AG \times GB : \overline{HG}^2$, y $\overline{AB}^2 : \overline{ED}^2 = AP \times PB : \overline{PQ}^2$, será tambien $AG \times GB : \overline{HG}^2 = AP \times PB : \overline{PQ}^2$; y alternando, $AG \times GB : AP \times PB = \overline{HG}^2 : \overline{PQ}^2$. Del mismo modo se demostrará que si las rectas LT y NM son ordenadas al exe menor ED; será $\overline{LT}^2 : \overline{MN}^2 = EL \times LD : EN \times ND$. Que es &c.

COROLARIO I.

584 Si las rectas HG y QP son perpendiculares al exe AB, y es $\overline{HG}^2 : \overline{PQ}^2 = AG \times GB : AP \times PB$, y el punto H está en la elipse $AEBD$; lo estará tambien el otro punto Q.

COROLARIO II.

585 Siendo $\overline{GH}^2 : \overline{PQ}^2 = AG \times GB : AP \times PB$; será tambien $\overline{GH}^2 : \overline{PQ}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CG}^2 : \overline{AC}^2 - \overline{CP}^2$, por ser $AG \times GB = \overline{AC}^2 - \overline{CG}^2$, y $AP \times PB = \overline{AC}^2 - \overline{CP}^2$. Del mismo modo se demostrará ser $\overline{LT}^2 : \overline{NM}^2 = \overline{CE}^2 - \overline{CL}^2 : \overline{CE}^2 - \overline{CN}^2$.

PROPOSICION VII.

586 Si la recta HF es ordenada al exe mayor AB en el focus F; será mitad del parámetro AG del mismo exe. *Fig.* 2.

Siendo (581) $AF \times FB : \overline{FH}^2 = AB : AG$, será tambien $AF \times FB : \overline{FH}^2 = AB \times AG : \overline{AG}^2$; pero (574) $4AF \times FB = AB \times AG$: luego será $4\overline{FH}^2 = \overline{AG}^2$, y por consiguiente $2FH = AG$. Que es &c.

PROPOSICION VIII.

587 Dada una recta AB y en ella los puntos F y f equidistantes de los extremos A y B de la misma recta; describir una elipse que tenga la recta AB por exe mayor, y los puntos F y f por focus. *Fig.* 1.

Tómese un hilo $FMf = AB$, afiáncense sus extremos en los puntos F y f; y descríbase (562) la elipse $AMBM$ que será la que se pide, por tener los focus F y f, y la recta AB por exe; pues (568) $FM + Mf = AB$. Que es &c.

PROPOSICION IX.

588 Dadas las dos rectas desiguales AB y ED, que se corten por medio en C y en ángulos rectos; describir una elipse cuyos exes sean dichas rectas. *Fig.* 2.

Haciendo centro en E extremo de la recta menor, con el intervalo $EF = AC$ descríbase el círculo EFf, cuya circunferencia cortará la recta AB en los puntos F y f; y con el exe mayor AB y los focus F y f descríbase (587) la elipse $AEBD$, que será la que se pide. Pues, siendo $FE + Ef = AB$, la elipse descrita pasará (569) por el punto E, y tambien por el punto D por ser $FD + fD =$

$FE + Ef = AB$; pero la recta ED es perpendicular al exe mayor AB en el centro C: luego ED será el exe menor de la elipse. Que es &c.

PROPOSICION X.

589 Dadas las rectas AB y HG perpendicular á ella, describir una elipse que tenga la recta dada AB por exe, y que pase por el extremo H de dicha perpendicular. *Fig.* 5.

Divídase AB por medio en C; y haciendo centro en este punto, con el intervalo CA descríbase el semicírculo $CAZB$; prolónguese, si es necesario, la recta GH hasta encontrar la circunferencia de dicho círculo en Z; en fin hallada (306) una quarta proporcional DE á las rectas GZ, GH y AB, descríbase (588) la elipse $AEBD$ que tenga las rectas AB y DE por exes, y se tendrá la que se pide. Por ser $GZ : GH = AB : ED$, será (323) $\overline{GZ}^2 : \overline{GH}^2 = \overline{AB}^2 : \overline{ED}^2$; pero (308. 312) $\overline{GZ}^2 = AG \times GB$: luego será $AG \times GB : \overline{GH}^2 = \overline{AB}^2 : \overline{ED}^2$; por consiguiente (580) el punto H estará en la elipse $AEBD$. Que es &c.

PROPOSICION XI.

590 Dado un punto en la elipse, tirar á ella una tangente. *Fig.* 6.

I. Si el punto dado es uno de los vértices B del exe mayor AB, levántese la perpendicular BN sobre el mismo exe; y será esta la tangente que se pide. Tírense desde los focus F y f las rectas FN y fN á qualquier punto N de la recta BN; y por ser el ángulo B recto, será $FN + fN > FB + fB$: luego el punto N estará (569) fuera del espacio comprehendido por la elipse: lo mismo se demostrará de qualquiera otro punto tomado en la recta BN prolongada por ambas partes: luego la recta BN es tangente á la elipse en el punto B.

II. Si el punto dado es qualquiera otro D de la elipse, tírense de él á los focus F y f las rectas DF y Df; y prolongada FD, divídase el ángulo fDK por medio con la recta ODL que será tangente á la elipse en el punto D. Córtese $DK = Df$, y tírese Kf; y tomado qualquiera punto O en la recta OL, tírense de él las rectas OF, Of y OK. Los triángulos fDL, KDL tienen $fD = DK$, el lado DL comun, y el ángulo $fDL = KDL$: luego tendrán los lados fL, LK iguales, como tambien los ángulos fLD, KLD, esto es rectos; y siendo ademas OL comun á los triángulos OLf, OLK, será $Of = OK$, y por consiguiente $OF + Of = OF + OK$; pero $OF + OK > FK$ ó $FD + Df$: luego será $OF + Of > FD + Df$ ó AB (568); por consiguiente (569) el punto O estará fuera del espacio comprehendido por la elipse. Luego &c.

COROLARIO I.

591 Se infiere que son iguales los ángulos FDO, fDL, que forma la tangente OL con las rectas FD y fD que salen desde los focus F y f á el punto del contacto D: porque siendo el ángulo $FDO = KDL$ por verticalmente opuestos, y el ángulo $KDL = fDL$ (const.), será el ángulo $FDO = fDL$.

COROLARIO II.

592 La tangente al punto D vértice del exe menor DH de la elipse, es perpendicular al mismo exe: porque siendo el ángulo $FDO = fDL$, por lo demostrado, y el ángulo $FDC = fDC$, por ser totalmente iguales los triángulos FDC y fDC, será el ángulo $HDO = LDH$.

PROPOSICION XII.

593 Supuesta la construccion de la proposicion antecedente, si la tangente DL encuentra en E al exe mayor AB prolongado, y se tira á él la ordenada DP desde el punto del contacto; será el semiexe CB medio proporcional entre las distancias del centro C á la ordenada, y al punto en que di-

Fig. 1.

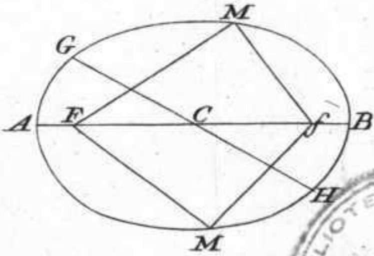


Fig. 2.

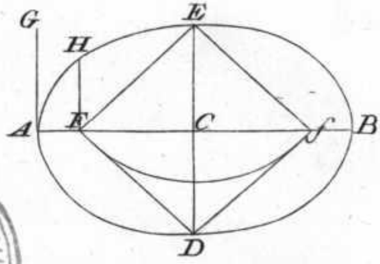


Fig. 3.

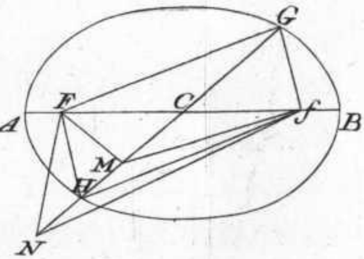


Fig. 4.

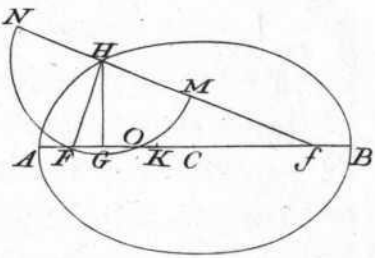


Fig. 5.

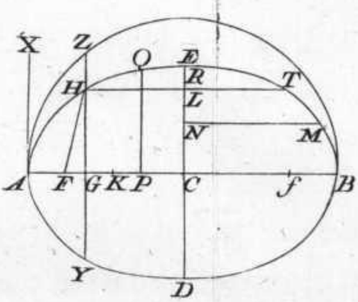
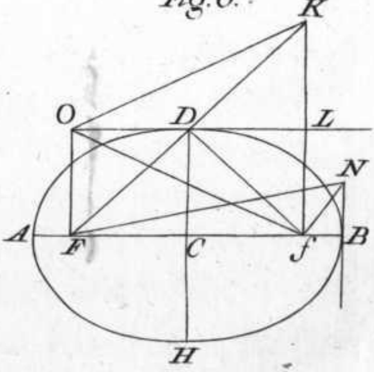


Fig. 6.



cho semiexe prolongado corta la tangente; esto es, $CP : CB = CB : CE$. *Fig.* 7,

Dividiendo la tangente DE por medio el ángulo fDK, será (294) $FE : fE = FD : fD$; y componiendo $FE + fE : fE = FD + fD : fD = AB : fD$ (568); y tomando las mitades de los antecedentes, será $CE : fE = CB : fD$, y convirtiendo $CE : Cf = CB : CB - fD$; pero (575) $CB : Cf = CP : CB - Df$, é invirtiendo $Cf : CB = CB - Df : CP$: luego por igualdad ordenada será $CB : CP = CE : CB$, é invirtiendo $CP : CB = CB : CE$. Que es &c.

COROLARIO I.

594 Por ser $CA = CB$, será tambien $CE : CA = CA : CP$: luego (262) $AE : AP = AC : CP$; y convirtiendo $AE : EP = CB : BP$; y dividiendo $AP : PE = CP : BP$; por consiguiente la subtangente PE será el quarto término proporcional á CP, BP y AP; ademas será $EP \times CP = AP \times PB$.

COROLARIO II.

595 Siendo por lo demostrado $CP : CB = CB : CE$, será (312) $CE \times CP = \overline{CB}^2$.

COROLARIO III.

596 Y si es $CP : CB = CB : CE$, se de-

mostrará con método inverso que la recta DE divide por medio al ángulo fDK, y por consiguiente (590) es tangente á la elipse en el punto D. Ademas entre la tangente DE y la elipse, no se puede tirar del punto del contacto D otra recta DI, sin que corte á la elipse. Haciendo centro en C, con el intervalo CA descríbase el semicírculo AOB, y prolónguese la ordenada PD hasta encontrar la circunferencia de él en O; tírense las rectas OE, OI y CO. Siendo $CP : CB = CB : CE$, será tambien $CP : CO = CO : CE$: luego será (298) el ángulo $COE = CPO$; y por lo tanto el ángulo COE será recto: luego la recta OE tocará el círculo en O, y la recta OI lo cortará. Desde qualquier punto Q de la circunferencia cortada por la recta OI, báxese la perpendicular QV al diámetro AB: y por ser $OP : PI = RV : VI$, y $PI : PD = VI : VS$, será por igualdad ordenada $OP : PD = RV : VS$; pero (582) $OP : PD = QV : VT$: luego $QV : VT = RV : VS$; y por ser $QV > RV$, será tambien $VT > VS$, y por consiguiente la recta DI corta á la elipse.

PROPOSICION XIII.

597 Si la tangente LD encuentra al exe menor NM prolongado en G, y del punto del contacto D se tira á él la ordenada DH; será el se-

miexe menor medio proporcional entre las distancias del centro C á la ordenada y al punto en que dicho semiexe corta la tangente; esto es, $CH : CM = CM : CG$. *Fig.* 7.

Tírese del punto del contacto D la ordenada DP al exe mayor AB. Por lo demostrado (593) es $CE : CB = CB : CP$ ó DH; por consiguiente (321) será $CE : DH = \overline{BC}^2 : \overline{DH}^2$; pero (578) $\overline{CM}^2 : \overline{BC}^2 = NH \times HM : \overline{DH}^2$, y alternando $\overline{CM}^2 : NH \times HM = \overline{BC}^2 : \overline{DH}^2$: luego será $CE : DH = \overline{CM}^2 : NH \times HM$; y por ser los triángulos GCE y GHD equiángulos, es $CE : DH = CG : GH$; por consiguiente será tambien $CG : GH = \overline{CM}^2 : NH \times HM$, y convirtiendo $CG : CH = \overline{CM}^2 : \overline{CH}^2$; pero (289) $CG \times CH : \overline{CH}^2 = CG : CH$: luego será $CG \times CH : \overline{CH}^2 = \overline{CM}^2 : \overline{CH}^2$; de donde resulta ser $CG \times CH = \overline{CM}^2$, y por consiguiente (312) $CH : CM = CM : CG$. Que es &c.

PROPOSICION XIV.

598 Qualquiera diámetro EO de la elipse $ADBL$ está dividido por medio en el centro C: y las tangentes EG, OI tiradas á los puntos E, O, vértices de dichos diámetros, son paralelas. *Fig.* 8.

Tírense las ordenadas EF, OK al exe menor DL; y alárguese este, hasta encontrar dichas tangentes prolongadas en los puntos G, I.

I. Por ser los triángulos EFC, OKC equiángulos, será $EF : OK = FC : CK$; por consiguiente (323) $\overline{EF}^2 : \overline{OK}^2 = \overline{FC}^2 : \overline{CK}^2$; pero (583) $\overline{EF}^2 : \overline{OK}^2 = DF \times FL : DK \times KL$: luego será $\overline{FC}^2 : \overline{CK}^2 = DF \times FL : DK \times KL$; y la suma de los antecedentes á la de los conseqüentes como un antecedente á su conseqüente, esto es $\overline{CD}^2 : \overline{CL}^2 = \overline{FC}^2 : \overline{CK}^2$; y por ser $\overline{CD}^2 = \overline{CL}^2$, será $\overline{CF}^2 = \overline{CK}^2$, y por consiguiente $CF = CK$; pero los ángulos $FCE = KCO$, y $F = K$: luego será el lado $EC = CO$.

II. Consta (597) que es $CG : CD = CD : CF$, y tambien $CI : CL = CL : CK$; pero es $CD = CL$, y $CF = CK$: luego será $CG : CD = CI : CD$, y por consiguiente $CG = CI$; pero es $CE = CO$ por lo arriba demostrado, y el ángulo $ECG = OCI$: luego será el ángulo $CEG = COI$, y por consiguiente las rectas EG, OI serán paralelas. Que es &c.

PROPOSICION XV.

599 Tirada qualquiera ordenada OP al diámetro GF, será el rectángulo de las partes GP y PF en que se divide el diámetro, al quadrado de dicha ordenada como el quadrado del mismo diámetro al quadrado del diámetro HJ paralelo á dicha ordenada. *Fig.* 9.

Tírese la tangente GT en el punto G de la curva; alárguese la ordenada OP hasta encontrar el exe AB prolongado en Z; y por los puntos O, G, J y B tírense las rectas OL, GQ, JV y BX perpendiculares al exe AB. Por lo demostrado (593) es $CT : CB = CB : CQ$; pero por ser los triángulos CBX y CQG equiángulos, es $CB : CQ = BX : QG$: luego será $CT : CB = BX : QG$; por consiguiente (311) $CT \times QG = CB \times BX$, y el triángulo $CGT = CBX$; y quitando el triángulo comun CQG, será $GQT = GQBX$. Siendo las rectas OM y GQ ordenadas al exe AB, será (585) $\overline{OM}^2 : \overline{GQ}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CM}^2 : \overline{CB}^2 - \overline{CQ}^2$: luego tambien $OMZ : GQT = CBX - CMN : CBX - CQG = MBXN : QGXB$; pero se ha demostrado $GQT = QGXB$: luego será $OMZ = MBXN = MNGT$; y quitado el trapecio comun $MNPZ$, quedará el triángulo $OPN = PGTZ$. Asimismo por ser las rectas JR y GQ ordenadas al exe AB, será $\overline{RJ}^2 : \overline{GQ}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CR}^2 : \overline{CB}^2 - \overline{CQ}^2$: luego tambien $JRC : GQT = CBX - CRV : CBX - CQG = BRVX : GQBX$; y siendo por lo demostrado $GQT = GQBX$, será tambien $JRC = BRVX$, y por consiguiente $JCV = CBX = CGT$. Y siendo además los triángulos CGT y CPZ equiángulos, será $\overline{CG}^2 : \overline{CP}^2 = CGT : CPZ$, y convirtiendo $\overline{CG}^2 : GP \times PF =$

$CGT : GPZT = JCV : OPN = \overline{CJ}^2 : \overline{OP}^2$, por ser semejantes los triángulos JCV y OPN: luego alternando será $\overline{CG}^2$ á $\overline{CJ}^2$ ó bien $\overline{FG}^2 : \overline{HJ}^2 = GP \times PF : \overline{OP}^2$. Que es &c.

COROLARIO I.

600 Con el mismo método se demostrará ser $\overline{FG}^2 : \overline{HJ}^2 = GP \times PF : \overline{Po}^2$: luego será $GP \times PF : \overline{PO}^2 = GP \times PF : \overline{Po}^2$; por consiguiente $\overline{PO}^2 = \overline{Po}^2$, y $PO = Po$: de donde resulta que á qualquiera punto del diámetro GF corresponden dos ordenadas iguales, una á cada lado del diámetro.

COROLARIO II.

601 Si se tira OK paralela al diámetro GF, será $\overline{HJ}^2 : \overline{FG}^2 = HK \times KJ : \overline{OK}^2$: pues, por ser $\overline{CG}^2 : \overline{CH}^2 = GP \times PF : \overline{OP}^2$ ó $\overline{CK}^2$, será tambien (274) $\overline{CG}^2 : \overline{CH}^2 = \overline{CP}^2 : HK \times KJ$; pero $\overline{CG}^2 : \overline{CH}^2 = \overline{GF}^2 : \overline{HJ}^2$, y $\overline{CP}^2 = \overline{OK}^2$: luego será $\overline{GF}^2 : \overline{HJ}^2 = \overline{OK}^2 : HK \times KJ$, é invirtiendo $\overline{HJ}^2 : \overline{GF}^2 = HK \times KJ : \overline{OK}^2$.

COROLARIO III.

602 Con el mismo método expresado antes (600) se demostrará que qualquiera recta OI terminada por ambas partes en la curva, y paralela al

diámetro GF, está dividida igualmente por el diámetro HJ: luego los diámetros GF y HJ serán conjugados, y la tangente al punto H, vértice del diámetro HJ, será paralela al diámetro GF.

COROLARIO IV.

603 Si la recta DE es paralela á las ordenadas al diámetro GF, y es $\overline{FG}^2 : \overline{HJ}^2 = FE \times EG : \overline{ED}^2$; el punto D estará en la curva.

PROPOSICION XVI.

604 Si el diámetro MCP es paralelo á la recta HEG tangente á la elipse en E; será el quadrado del semidiámetro conjugado CM igual al rectángulo hecho de los segmentos HE, EG de la tangente HG terminada por los exes BA, LD prolongados; esto es, $\overline{CM}^2 = HE \times EG$. *Fig.* 8.

Tírense las ordenadas EJ, MN al exe mayor AB, la ordenada EF al exe menor DL, el diámetro EO, la recta AR ordenada á él, y la recta AQ paralela á EO. Consta (593) que es $HC : CA = CA : CJ$; pero por ser HE y AR paralelas, es (291) $HC : CA = EC : CR$: luego será $EC : CR = CA : CJ$; y siendo ademas el ángulo C comun á los triángulos ACR, ECJ, serán (310) estos iguales. Del mismo modo se demostrará ser el triángulo $AQC =$

MNC; pero el triángulo $AQC = ACR$, por ser la figura *ARCQ* un paralelógramo : luego serán los triángulos rectángulos *EJC*, *MNC* iguales, y por consiguiente $EJ \times EF = MN \times NC$. Ahora por ser los triángulos *HEJ*, *CMN*, *EGF* equiángulos, será $HE : EJ = CM : MN$, y $GE : EF = CM : CN$: y por lo tanto (326) $GE \times EH : EJ \times EF = \overline{CM}^2 : CN \times NM$; pero se ha demostrado ser $EJ \times EF = CN \times NM$: luego será $GE \times EH = \overline{CM}^2$. Que es &c.

COROLARIO.

605 Consta por lo arriba demostrado, que es $EJ \times JC = MN \times NC$; por consiguiente será $CJ : CN = MN : EJ$, y tambien $\overline{CJ}^2 : CJ \times CN = \overline{MN}^2 : MN \times JE$: luego alternando será $\overline{CJ}^2 : \overline{MN}^2 = CJ \times CN : NM \times JE$.

PROPOSICION XVII.

606 Si las rectas *DE* y *OP* son ordenadas al diámetro *GF*; los quadrados de ellas tendrán la razon de los rectángulos de las partes, en que queda dividido el diámetro ; esto es, $\overline{DE}^2 : \overline{OP}^2 = FE \times EG : FP \times PG$. *Fig.* 9.

Siendo las rectas *DE* y *OP* ordenadas al diámetro *GF*, será (599) $\overline{GF}^2 : \overline{HJ}^2 = FE \times EG$:

$\overline{DE}^2$, y $\overline{GF}^2 : \overline{JH}^2 = FP \times PG : \overline{OP}^2$: luego será $FE \times EG : \overline{DE}^2 = FP \times PG : \overline{OP}^2$, y alternando $FE \times EG : FP \times PG = \overline{DE}^2 : \overline{OP}^2$. Que es &c.

COROLARIO.

607 Si la recta OP es ordenada al diámetro GF, y la recta ED es paralela á ella, y es $\overline{ED}^2 : \overline{OP}^2 = FE \times EG : FP \times PG$; el punto D estará en la elipse $HGJF$.

PROPOSICION XVIII.

608 El paralelógramo $ADBL$, cuyas diagonales son los exes AB y DL de la elipse, es igual al paralelógramo $MEPO$ cuyas diagonales son los diámetros conjugados EO y MP. *Fig.* 10.

Tírense por los puntos M, E las ordenadas MN, EJ al exe mayor AB, y la ordenada EF al exe menor DL; por el punto E tírese la tangente HEG, y del centro C báxese á esta la perpendicular CY. Siendo NM perpendicular al exe AB, será (578) $AN \times NB : \overline{NM}^2 = \overline{AC}^2 : \overline{CD}^2$; pero (595) $\overline{AC}^2 = HC \times CJ$, y (597.312) $\overline{CD}^2 = GC \times CF$: luego $AN \times NB : \overline{NM}^2 = HC \times CJ : GC \times CF$; y por ser $HC : CG = CN : NM$, y $CJ : CF = CJ : JE$, será (326) $HC \times CJ : CG \times CF = CN \times CJ : NM \times JE$. Por tanto será $AN \times NB : \overline{NM}^2 = CN \times CJ : NM \times JE = \overline{CJ}^2 : \overline{NM}^2$ (605),

Y

de donde $AN \times NB = \overline{CJ}^2$: luego $\overline{CJ}^2 : \overline{NM}^2 = \overline{AC}^2 : \overline{CD}^2$; por consiguiente (323) $CJ : NM = AC : CD$, y alternando CJ á AC ó bien (593) $AC : CH = NM : CD$; pero por ser equiángulos los triángulos CYH, CNM, es $HC : CY = CM : MN$: luego será por igualdad perturbada $AC : CY = CM : CD$; por consiguiente el triángulo $ACD = MEC$: luego los paralelógramos $ADBL$ y $MEPO$, que son quádruplos de dichos triángulos, serán iguales. Que es &c.

COROLARIO I.

609 Consta por la demostracion antecedente que es $\overline{CJ}^2$ ó bien $\overline{EF}^2 : \overline{NM}^2 = \overline{AC}^2 : \overline{CD}^2$; pero (578) $\overline{CD}^2 : \overline{AC}^2 = LF \times FD : \overline{EF}^2$, é invirtiendo $\overline{AC}^2 : \overline{CD}^2 = \overline{EF}^2 : LF \times FD$: luego será $\overline{EF}^2 : \overline{NM}^2 = \overline{EF}^2 : LF \times FD$; por consiguiente $\overline{NM}^2 = LF \times FD$.

COROLARIO II.

610 Asimismo consta ser $\overline{CJ}^2 = AN \times NB$, y con el mismo método se demostrará $\overline{CN}^2 = AJ \times JB$; pero (594) $AJ \times JB = HJ \times JC$: luego será $\overline{CN}^2 = HJ \times JC$.

PROPOSICION XIX.

611 La suma de los quadrados de los exes *AB* y *DL*, es igual á la suma de los quadrados de dos qualesquiera diámetros conjugados *EO* y *MP*; esto es, $\overline{AB}^2 + \overline{DL}^2 = \overline{EO}^2 + \overline{MP}^2$. *Fig.* 10.

Tírense las ordenadas *EJ*, *MN* al exe mayor *AB*, y la ordenada *EF* al exe menor *DL*. Por ser los triángulos *CNM* y *CFE* rectángulos, será $\overline{CM}^2 = \overline{CN}^2 + \overline{NM}^2$, y $\overline{CE}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{EF}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{CJ}^2$; por consiguiente $\overline{CM}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{CN}^2 + \overline{NM}^2 + \overline{CF}^2 + \overline{CJ}^2$; pero (609) $\overline{MN}^2 = LF \times FD$, y (610) $\overline{CN}^2 = AJ \times JB$: luego será $\overline{CM}^2 + \overline{CE}^2 = AJ \times JB + LF \times FD + \overline{CF}^2 + \overline{CJ}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$, por estar las rectas *AB* y *DL* divididas por medio en *C*; y tomados los quádruplos de dichos quadrados, será tambien $\overline{EO}^2 + \overline{MP}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{DL}^2$. Que es &c.

PROPOSICION XX.

612 Describir una elipse que tenga por diámetros conjugados las rectas *EO* y *PM* dadas de magnitud y de posicion. *Fig.* 11.

Tírese por el punto *E* vértice del diámetro *EO* la recta *HEG* paralela al conjugado *MP*; en la prolongacion del diámetro *EO* córtese *EN* igual á la tercera proporcional de las rectas CE y CM; divídase la recta CN por medio en Q, y levántese sobre ella la perpendicular QR prolongada hasta encontrar la recta HG en R; haciendo centro en R, con el intervalo RN descríbase el círculo $RNHCG$, que pasará por el punto C, por ser los triángulos RQN y RQC totalmente iguales; tírense las rectas HCB y GCL, y báxese á HC la perpendicular EJ; tómese CA igual á la media proporcional entre CH y CJ; córtese la recta $CB = CA$; y finalmente con el exe AB descríbase (589) la elipse $ADBL$ que pase por el punto E, y será la que se pide. Siendo, pues, $CH : CA = CA : CJ$, la recta HEG será (596) tangente á la elipse en E; y por ser MP paralela á la tangente HEG, el diámetro conjugado al diámetro EO, estará en la direccion MP: tambien por ser GC perpendicular al exe AB, el exe conjugado á AB estará en la direccion GCL; pero por ser continuas proporcionales CE, CM y EN, es $\overline{CM}^2 = CE \times EN = HE \times EG$ (190): luego el punto M estará (604) en la elipse descrita; y por ser $CO = CE$, y $CP = CM$, lo estarán igualmente los puntos O y P. Que es &c.

PROPOSICION XXI.

613 Si el cono $AFER$ está cortado por el

plano triangular *FAR*, que pasa por el exe del mismo cono, y ademas por otro plano *QMNG* que pasa por las rectas, *HL* perpendicular al diámetro *PV* del círculo *PHV* paralelo á la base del cono, y *NQ* que corta de qualquier modo los lados del triángulo *FAR* baxo del vértice *A*, con tal que no forme con ellos el triángulo *AQN* equiángulo al triángulo *FAR*; la linea *QGNM*, que es la seccion comun del plano *QGNM* y de la superficie del cono, será una elipse que tendrá por diámetros conjugados las rectas *QN* y *GM* que es paralela á *LH* y divide por medio *QN* en el punto *K*. *Fig.* 12.

Tírese por el punto *K* la recta *BKD* paralela al diámetro *PV*; y por ser ademas *MG* paralela á *HL*, será (392) el plano *BMDG* paralelo al círculo *PHVL* ó bien á la base *FER*; de donde resulta que el plano *BMDG* terminado por la superficie cónica será (560) un círculo cuyo diámetro *BD*. Tambien por ser las rectas *BK* y *KM* respectivamente paralelas á las *PC* y *CH*, será (386) el ángulo $BKM = PCH$; pero el ángulo *PCH* es recto: luego tambien lo será *BKM*. Por tanto las rectas *GM* y *LH* estarán cortadas igualmente por los diámetros *BD* y *PV* en los puntos *K* y *C*; y ademas será (308. 312) $\overline{KM}^2 = BK \times KD$, $\overline{CH}^2 = PC \times CV$; de donde $\overline{KM}^2 : \overline{CH}^2 = BK$

$\times$ $KD : PC \times CV$; pero (326) $BK \times KD : PC \times CV = QK \times KN : QC \times CN$, por ser $BK : PC = QK : QC$, y $KD : CV = KN : CN$: luego será $QK \times KN : QC \times CN = \overline{KM}^2 : \overline{CH}^2$; y alternando $QK \times KN$ á $\overline{KM}^2$ ó bien $\overline{QN}^2 : \overline{GM}^2 = QC \times CN : \overline{CH}^2$: luego descrita (612) una elipse que tenga los diámetros conjugados QN y GM, estará (603) el punto H en la misma curva : y lo mismo se demostrará de todos los puntos de la seccion $QMNG$. Que es &c.

Fig. 7.

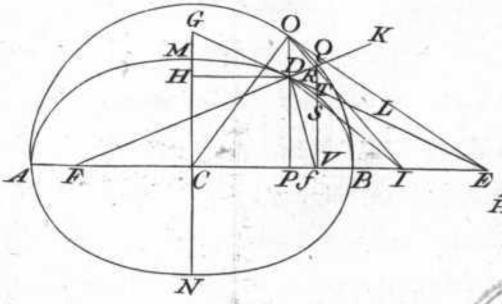


Fig. 8.

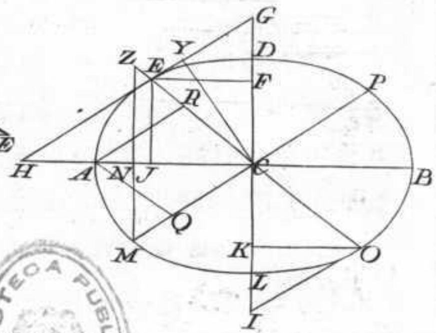


Fig. 9.

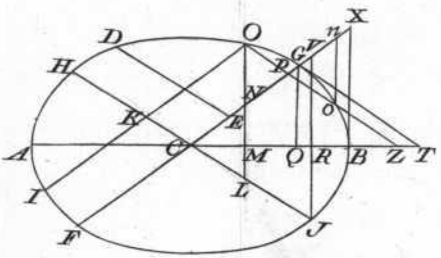


Fig. 10.

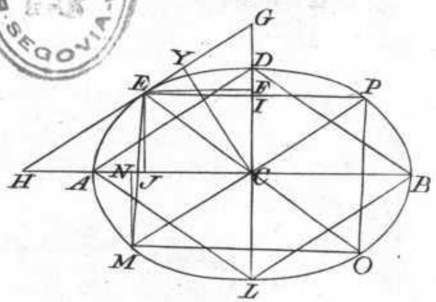


Fig. 11.

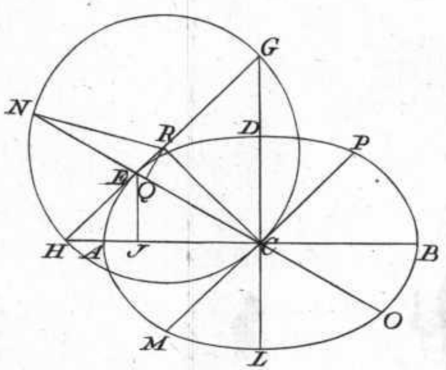
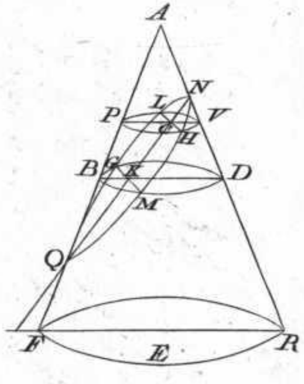


Fig. 12.



LIBRO III.

DE LA HIPÉRBOLA.

DEFINICIONES.

614 La Hipérbola es una curva *HAH*, en quien es constante la diferencia entre las rectas *FH*, *fH* tiradas desde qualquiera de sus puntos *H* á dos puntos fixos *F*, *f*, uno de los quales *F* está en la superficie plana *HAH* comprehendida por dicha curva, y el otro punto *f* está fuera de la curva y en el mismo plano. *Fig.* 1.

615 Las hipérbolas *HAH* y *bBb* se llaman opuestas, quando la diferencia entre las rectas *FH* y *fH* tiradas desde los puntos fixos *F* y *f* á qualquiera punto *H* de la hipérbola *HAH*, es igual á la diferencia entre las rectas *fb* y *Fb* tiradas desde dichos puntos á qualquiera punto *b* de la hipérbola *bBb*.

Si en un punto *f* se fixa el extremo de una regla *fY*, de modo que esta pueda moverse libremente al rededor de dicho punto, y en el extremo *Y* de la misma regla y en otro punto *F* se afianzan los extremos de un hilo cuya longitud sea menor que la recta; y si en esta disposicion por medio de una punta *H* se tiene sujeto el hilo contra la regla y tirante al mismo tiempo, mientras la regla se mueve en un plano inmobil, la punta describirá la hipérbola *HAH*. Ahora si la extremidad de la regla se fixa en el punto *F* y el extremo del hilo en *f*, haciendo lo mismo que antes, se describirá la hipérbola opuesta *bBb*. Es evidente que dichas curvas podrán extenderse á una distancia de los puntos *F* y *f* mayor que qualquiera dada, tomando un hilo, cuya longitud sea mayor que la dicha distancia.

616 Los puntos *F* y *f* se llaman focus: y el punto *C* que divide por medio la recta *Ff*, que une los focus, se llama centro de la hipérbola ó de las hipérbolas opuestas. *Fig.* 1.

617 Qualquiera recta *NQ*, que pasa por el centro *C* y se termina de una y otra parte en las hipérbolas opuestas, se llama diámetro transverso de ellas: y los puntos *N* y *Q* donde encuentra á dichas hipérbolas, vértices de él.

618 El diámetro *AB* que pasa por los focus *F* y *f*, se llama exe transverso de las hipérbolas: y si haciendo centro en uno de los extremos *A* de dicho exe, con el intervalo *AE* igual á la recta *CF* distancia del centro al focus, se describe el círculo *AELD*, y se tira la recta *DE* perpendicular al exe transverso *AB* en el centro *C* de la hipérbo-

la, y se prolonga hasta encontrar la circunferencia de dicho círculo en los puntos *D* y *E*, la cuerda *DE* se llama exe segundo de las hipérbolas opuestas.

619 Si la recta *RAG* es perpendicular al exe transverso *AB* en uno de sus extremos *A*, é igual al exe segundo *ED*, de modo que el exe transverso la corte por medio, las rectas *CP* y *CS* tiradas por el centro *C* de las hipérbolas y por los extremos *R* y *G* de dicha perpendicular, se llaman asíntotas de la hipérbola *HAH. Fig.* 1.

COROLARIO.

620 Las asíntotas forman con el semiexe transverso ángulos iguales, esto es, $PCA = ACS$, por tener los triángulos *ACR* y *ACG* los lados $RA = AG$, *AC* comun, y los ángulos *RAC* y *GAC* iguales por rectos.

621 Si por un extremo *A* del exe transverso *AB* se tira la recta *AM* paralela á una de las asíntotas *CS*, y se prolonga hasta encontrar la otra en *M*, el quadrado de la recta *AM* se llama potencia de la hipérbola.

COROLARIO.

622 Siendo las rectas *AM* y *CS* paralelas, será el ángulo $MAC = ACG$; pero (620) $ACG = ACM$: luego será el ángulo $MAC = MCA$; por

consiguiente $MA = MC$, y $AM \times CM = \overline{AM}^2$.

623 Tangente de una hipérbola se llama la recta que encuentra á la curva en un solo punto, y que prolongada por ambas partes cae toda fuera de los espacios comprehendidos por las hipérbolas opuestas.

624 Si la recta TCV que pasa por el centro C de la hipérbola HAH, es paralela é igual á la recta KNO tangente á la hipérbola en el punto N vértice del diámetro transverso NQ y terminada en las asíntotas CP y CS, y ademas está dividida por medio en el centro C, dicha recta TCV se llama diámetro segundo del transverso QN: y los dos diámetros se llaman conjugados. *Fig.* 1.

625 La tercera proporcional de dos diámetros conjugados ó de los exes de las hipérbolas opuestas, se llama parámetro del diámetro ó del exe que es primer término de la proporcion: como si AX es tercera proporcional del exe transverso AB y del exe segundo DE, será AX parámetro del exe transverso.

En esta curva se dá el mismo sentido á los términos de ordenada á un diámetro ó á un exe, abscisa, subtangente y subnormal, que en la parábola.

PROPOSICION I.

626 En las hipérbolas opuestas HAZ, PBQ, la diferencia de las dos rectas Hf y HF tiradas de qualquiera punto H de ellas á los focus F y f es igual al exe transverso AB: y la diferencia de las dos rectas fR y FR tiradas de qualquiera punto R, puesto fuera del espacio comprehendido por dichas hipérbolas, á los focus F y f, es menor que el exe transverso AB: en fin la diferencia de las dos rectas fS y SF tiradas de qualquiera punto S, tomado en el espacio comprehendido por una de dichas hipérbolas, á los focus F y f, es mayor que el exe transverso AB. *Fig.* 2.

I. Córtense las rectas $AT = AF$, y $BV = Bf$. Estando los vértices A y B del exe transverso AB en las hipérbolas opuestas, será (615) $Af - AF = BF - Bf$: luego $fT = FV$; y quitada la parte comun VT, será $fV = FT$, y tambien las mitades de estas serán iguales, esto es, $fB = AF$; por consiguiente $fA - AF = fA - fB = AB$; pero (614) $fA - AF = fH - FH$: luego será $fH - FH = AB$.

II. En el triángulo fHR es $fR < fH + HR$: luego tambien será $fR - HR < fH$; y quitada de ambas partes la recta FH, será $fR - RF < fH - FH$; pero $fH - HF = AB$: luego será fR

— $FR < AB$. Con el mismo método se demostrará ser $fS - SF > AB$. Que es &c.

COROLARIO I.

627 Infiérese que si es $fH - HF = AB$, estará el punto H en la hipérbola HAZ; y si es $fR - RF < AB$, estará el punto R fuera del espacio comprehendido por dicha hipérbola; en fin si es $fS - FS > AB$, estará el punto S dentro de dicho espacio.

COROLARIO II.

628 El exe transverso AB queda dividido por medio en el centro C: porque siendo $Cf = CF$, y $Bf = AF$, será $CB = CA$.

COROLARIO III.

629 Si se prolongan por el centro C (*Fig.* 1) las asíntotas CP y CS de la hipérbola HAH, las rectas prolongadas Cs y Cp serán tambien las asíntotas de la hipérbola opuesta bBb: pues tiradas las rectas RAG y rBg perpendiculares al exe transverso AB, y prolongadas hasta encontrar las rectas pS y Ps, será $RA = Bg$, por tener los triángulos CAR y CBg los lados CA, CB iguales, como tambien los ángulos formados sobre estos lados: é igualmente será $AG = Br$; pero las rectas AR y AG son igua-

les al semiexe segundo CD: luego tambien las rectas Br y Bg serán iguales á dicho semiexe; y ademas siendo perpendiculares al exe transverso AB, serán Cp y Cs asíntotas de la hipérbola bBb.

PROPOSICION II.

630 El quadrado del semiexe segundo CE de las hipérbolas opuestas HAZ, PBQ, es igual al rectángulo formado por las rectas comprehendidas entre uno de los focus F y los vértices del exe transverso AB; esto es, $\overline{CE}^2 = BF \times FA$. *Fig.* 2.

Tírese la recta AE. Por ser $AE = CF$, será tambien $\overline{AE}^2 = \overline{CF}^2$; pero $\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CE}^2$, y (134) $\overline{CF}^2 = BF \times FA + \overline{CA}^2$: luego será $\overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 = BF \times FA + \overline{AC}^2$; y quitando el quadrado de AC comun á ambas partes, se tendrá $\overline{CE}^2 = BF \times FA$. Que es &c.

COROLARIO.

631 Si la recta AX es el parámetro del exe transverso AB, será $AB \times AX = 4BF \times FA$: porque siendo $\overline{CE}^2 = BF \times FA$ por lo arriba demostrado, será tambien $4\overline{CE}^2$ ó bien $\overline{DE}^2 = 4BF \times FA$; y siendo ademas las rectas AB, DE y AX continuas proporcionales, será $\overline{DE}^2 = AB \times AX$: luego $BA \times AX = 4BF \times FA$.

PROPOSICION III.

632 Si se tira qualquiera ordenada HG al exe transverso AB prolongado, y la recta HF al focus próximo F; será el semiexe transverso CA, á la distancia del focus al centro C, como el segmento CG de dicho exe comprehendido entre el centro y la ordenada, á la suma del semiexe transverso CA y de dicha recta HF; esto es, $CA : CF = CG : CA + FH$. *Fig.* 2.

Tírese la recta Hf al otro focus f, córtese $AK = FH$; y haciendo centro en H, con el intervalo HF descríbase el semicírculo MFN, cuya circunferencia cortará al exe transverso BA prolongado en otro punto O, y á la recta Hf prolongada en los puntos M y N. Siendo, pues, $fF = 2CF$, y $OF = 2FG$, será tambien $fO = 2CG$. Asimismo siendo $fM = Hf - HF$, ó bien $fM = 2AC$, y $MN = 2HF = 2AK$, será $fN = 2CK$. Porque las rectas fN y FO son secantes del círculo MFN, será (192) $fM \times fN = fF \times fO$; por consiguiente $fM : fF = fO : fN$: luego tambien sus mitades serán proporcionales, esto es, $AC : CF = CG : CK$ ó $CA + FH$. Que es &c.

COROLARIO.

633 Siendo las rectas AC, CF, CG y CK

proporcionales, será (311) $AC \times CK = CF \times CG$.

PROPOSICION IV.

634 Supuesta la construccion de la proposicion antecedente, el quadrado de la ordenada HG será igual á la diferencia de los rectángulos $Kf \times KF$ y $BG \times GA$; esto es, $\overline{HG}^2 = Kf \times KF - BG \times GA$. *Fig. 2.*

Por estar la recta CK dividida en A, será (135) $\overline{CK}^2 + \overline{CA}^2 = 2CK \times CA + \overline{AK}^2$; pero (633) $CK \times CA = CF \times CG$, y $\overline{AK}^2$ ó $\overline{HF}^2 = \overline{HG}^2 + \overline{GF}^2$: luego será $\overline{CK}^2 + \overline{CA}^2 = 2CF \times CG + \overline{HG}^2 + \overline{GF}^2$; pero (135) $2CF \times CG + \overline{GF}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{CG}^2$: luego será $\overline{CK}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{CG}^2 + \overline{HG}^2$, ó bien (134) $Kf \times KF + \overline{CF}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{CF}^2 + BG \times GA + \overline{CA}^2 + \overline{HG}^2$; y quitando de ambas partes los quadrados de CF y CA, quedará $Kf \times FK = BG \times GA + \overline{HG}^2$, y por consiguiente el quadrado de la ordenada HG será la diferencia entre los rectángulos $Kf \times KF$, $BG \times GA$. Que es &c.

PROPOSICION V.

635 Si por qualquiera punto H de las hipérbolas opuestas se tira una ordenada HG al exe transverso AB prolongado; será el quadrado de este exe al del exe segundo DE como el rectángulo forma-

do por los segmentos BG, AG comprehendidos entre los vértices A y B del exe transverso, y el punto G en que dicha ordenada lo encuentra, al quadrado de esta; esto es, $\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2 = BG \times GA : \overline{GH}^2$. *Fig.* 2.

Supónganse F y f los focus de las hipérbolas opuestas; tírese FH, y córtese $AK = FH$; por lo que será (632) $CG : CK = AC : CF$; é invirtiendo $CK : CG = CF : CA$: luego (323) $\overline{CK}^2 : \overline{CG}^2 = \overline{CF}^2 : \overline{CA}^2$. Por tanto siendo el todo al todo como la parte á la parte, será tambien (274) $\overline{CK}^2$ á $\overline{CG}^2$ ó bien $\overline{CF}^2$ á $\overline{CA}^2$ como el residuo $fK \times FK$ al residuo $BG \times GA$; y dividiendo $BF \times FA : \overline{AC}^2 = fK \times FK - BG \times GA : BG \times GA$; pero (634) $fK \times KF - BG \times GA = \overline{GH}^2$, y (630) $BF \times FA = \overline{CD}^2$: luego será $\overline{CD}^2 : \overline{CA}^2 = \overline{GH}^2 : BG \times GA$; é invirtiendo $\overline{CA}^2$ á $\overline{CD}^2$ ó bien $\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2 = BG \times GA : \overline{GH}^2$. Que es &c.

COROLARIO I.

636 Tirada otra ordenada GL al mismo punto G del exe transverso AB prolongado, se demostrará del mismo modo ser $\overline{AB}^2 : \overline{ED}^2 = BG \times GA : \overline{GL}^2$: luego será $\overline{GH}^2 = \overline{GL}^2$, y por consiguiente $GH = GL$. Por tanto qualquiera recta HL paralela al exe segundo DE y terminada de una y otra

parte en la hipérbola, la divide por medio el exe transverso prolongado.

COROLARIO II.

637 Si la recta IZ es perpendicular al exe transverso AB prolongado, y ademas es $\overline{AB}^2 : \overline{ED}^2 = BI \times IA : \overline{IZ}^2$; estará el punto Z en la hipérbola HAL.

COROLARIO III.

638 Siendo el parámetro AX del exe transverso AB tercer término proporcional de AB y DE, será (321) $\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2 = AB : AX$; pero $\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2 = BG \times GA : \overline{GH}^2$: luego será $AB : AX = BG \times GA : \overline{GH}^2$.

COROLARIO IV.

639 Descrito con el semiexe transverso CA el semicírculo AJB (*Fig.* 3), y tirada á él la tangente GJ desde qualquier punto G tomado en el exe transverso AB prolongado, la razon de esta tangente á la ordenada GH correspondiente á dicho punto será igual á la del exe transverso AB al segundo DE: porque siendo $BG \times GA : \overline{GH}^2 = \overline{AB}^2 : \overline{DE}^2$, y (191) $BG \times GA = \overline{GJ}^2$, será tambien $\overline{GJ}^2 : \overline{GH}^2 = \overline{AB}^2 : \overline{DE}^2$; por consiguiente (323) $GJ : GH = AB : DE$.

PROPOSICION VI.

640 Si la recta *HL* es ordenada al exe segundo *ED* de las hipérbolas opuestas *QAY*, *NBO*; será el quadrado de este exe al quadrado del exe transverso *AB* como el quadrado de la ordenada á la suma de los quadrados del semiexe segundo *CD* y del segmento de este comprehendido entre el centro y dicha ordenada; esto es, $\overline{DE}^2 : \overline{AB}^2 = \overline{HL}^2 : \overline{CD}^2 + \overline{CL}^2$. *Fig.* 3.

Tirada la ordenada *HG* al exe transverso *BA* prolongado, será (635) $\overline{AC}^2 : \overline{CD}^2 = BG \times GA : \overline{GH}^2$; é invirtiendo $\overline{CD}^2 : \overline{AC}^2 = \overline{GH}^2 : BG \times GA$; y en la misma razon estará la suma de los antecedentes con la de sus conseqüentes, esto es $\overline{CD}^2 + \overline{GH}^2 : \overline{CA}^2 + BG \times GA = \overline{CD}^2 : \overline{AC}^2$; pero (134) $\overline{AC}^2 + BG \times GA = \overline{CG}^2 = \overline{HL}^2$, y $\overline{GH}^2 = \overline{CL}^2$: luego será $\overline{CD}^2 + \overline{CL}^2 : \overline{HL}^2 = \overline{CD}^2 : \overline{CA}^2$ ó bien como $\overline{DE}^2$ á $\overline{AB}^2$. Que es &c.

COROLARIO.

641 Tirada otra ordenada *LN* al mismo punto *L* del exe segundo, se demostrará del mismo modo ser $\overline{DC}^2 + \overline{CL}^2 : \overline{LN}^2 = \overline{DE}^2 : \overline{AB}^2$: luego $\overline{HL}^2 = \overline{LN}^2$, y por consiguiente $HL = LN$. Por tanto qualquiera recta *HN* paralela al exe transver-

so AB, y terminada de una y otra parte por las hipérbolas opuestas, queda dividida igualmente por el exe segundo ó su prolongacion; pero se ha demostrado (636) que qualquiera recta HY paralela al exe segundo DE, y terminada de una y otra parte en la hipérbola, queda dividida igualmente por el exe transverso BA prolongado: luego cada uno de los exes AB y ED divide igualmente las paralelas á el otro terminadas en la hipérbola ó en las hipérbolas opuestas.

PROPOSICION VII.

642 Si las rectas QK y HL son ordenadas al exe segundo ED de las hipérbolas opuestas QAY, NBO; los quadrados de estas ordenadas tendrán entre sí la razon de las sumas de los quadrados del semiexe segundo y del segmento de él comprehendido entre el centro y la ordenada; esto es, $\overline{QK}^2 : \overline{HL}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{CK}^2 : \overline{CD}^2 + \overline{CL}^2$: y si las rectas QP y HG son ordenadas al exe transverso AB; los quadrados de dichas ordenadas tendrán entre sí la razon de los rectángulos de las abscisas; esto es, $\overline{QP}^2 : \overline{HG}^2 = BP \times PA : BG \times GA$. *Fig.* 3.

I. Siendo las rectas QK y HL ordenadas al exe segundo ED, será (640) $\overline{DE}^2 : \overline{AB}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{CK}^2 : \overline{KQ}^2$, y $\overline{DE}^2 : \overline{AB}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{CL}^2 : \overline{HL}^2$:

luego $\overline{CD}^2 + \overline{CK}^2 : \overline{KQ}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{CL}^2 : \overline{HL}^2$; y alternando $\overline{CD}^2 + \overline{CK}^2 : \overline{CD}^2 + \overline{CL}^2 = \overline{KQ}^2 : \overline{HL}^2$.

II. Por ser las rectas QP y HG ordenadas al exe transverso AB prolongado, será (635) $\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2 = BP \times PA : \overline{PQ}^2$, y $\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2 = BG \times GA : \overline{GH}^2$: luego $BP \times PA : \overline{PQ}^2 = BG \times GA : \overline{GH}^2$; y alternando será $BP \times PA : BG \times GA = \overline{PQ}^2 : \overline{GH}^2$. Que es &c.

PROPOSICION VIII.

643 Si la recta MF es ordenada al exe transverso BA prolongado en el focus F de la hipérbola QAY; dicha ordenada será la mitad del parámetro AX del mismo exe. *Fig.* 3.

Siendo (638) $AB : AX = BF \times FA : \overline{FM}^2$, será tambien $AB \times AX : \overline{AX}^2 = BF \times FA : \overline{FM}^2$; pero (631) $AB \times AX = 4BF \times FA$: luego el quadrado de AX será quádruplo del de FM, y por consiguiente el parámetro AX duplo de FM. Que es &c.

PROPOSICION IX.

644 Dada una recta AB y en su prolongacion los puntos F y f equidistantes de los extremos A y B de la misma recta; describir las hipérbolas opuestas, que tengan la recta AB por exe transverso, y los puntos F y f por focus. *Fig.* 1.

Tómense una regla fHY y un hilo FHY, de suerte que la diferencia entre la regla y el hilo sea igual á AB; fixense los extremos de dicho hilo en el punto dado F y en el extremo Y de la regla fY, que se colocará de modo que pueda moverse libremente cerca del otro punto dado f: y en esta disposicion descríbase (615) la hipérbola HAH que pasará (627) por el punto A, por ser $fA - AF = AB$. Igualmente descrita la hipérbola bBb, se demostrará que pasa por el punto B. Por tanto la recta AB será el exe transverso de las hipérbolas descritas, y los puntos F y f serán los focus de ellas. Que es &c.

PROPOSICION X.

645 Dadas las dos rectas AB y DE, que se cortan por medio en C, y en ángulos rectos; describir dos hipérbolas opuestas cuyos exes sean dichas rectas. *Fig.* 1.

Tírese la recta AE, á quien se cortarán iguales las rectas CF y Cf en la AB prolongada por ambas partes; y con el exe transverso AB y los focus F y f descríbanse (644) las hipérbolas opuestas HAH y bBb que serán las que se piden. Los triángulos ACE y ACD tienen el lado AC comun, $CE = DC$, y los ángulos en C iguales por rectos: luego tendrán el lado $AE = AD$; pero AE

$= CF = Cf$: luego las rectas AE, AD, CF y Cf serán iguales entre sí, y por consiguiente los puntos D y E serán los términos del exe segundo de las hipérbolas descritas. Luego &c.

PROPOSICION XI.

646 Dadas la recta AB y la perpendicular HG á dicha recta AB prolongada; describir dos hipérbolas opuestas, que tengan por exe la recta AB, y que una de ellas pase por el punto H. *Fig.* 3.

Divídase la recta AB por medio en C; y haciendo centro en este punto, con el intervalo CA descríbase el semicírculo AIB; tírese á él desde el punto G la tangente GJ; hállese una quarta proporcional DE á las rectas GJ, GH y AB; y finalmente descríbanse (645) dos hipérbolas opuestas QAY y NBO que tengan las rectas AB y DE por exes, y se tendrán las que se piden. Por ser $GJ : GH = AB : DE$, será (323) $\overline{GJ}^2 : \overline{GH}^2 = \overline{AB}^2 : \overline{DE}^2$; pero (191) $\overline{GJ}^2 = BG \times GA$: luego será $BG \times GA : \overline{GH}^2 = \overline{AB}^2 : \overline{DE}^2$; por consiguiente (637) el punto H estará en la hipérbola QAY. Que es &c.

PROPOSICION XII.

647 Tirar una tangente á la hipérbola HAI en un punto dado. *Fig.* 4.

I. Si el punto dado es el vértice A del exe transverso BA, levántese la perpendicular AM sobre el mismo exe, la qual será tangente de la curva en A. Tírense desde los focus F y f las rectas FM y fM á qualquiera punto M de dicha perpendicular; córtese $AT = AF$, y tírese TM. En el triángulo fTM es $fM < fT + TM$, y por consiguiente $fM - TM < fT$; pero por ser los triángulos TAM y FAM totalmente iguales, es $TM = FM$: luego será $fM - FM < fT$ ó bien menor que $fA - AF$: luego el punto M estará (627) fuera de los espacios comprehendidos por las hipérbolas: lo mismo se demostrará de qualquiera otro punto tomado en la recta AM prolongada por ambas partes: luego la recta AM es tangente de la hipérbola en el punto A.

II. Si el punto dado es qualquiera otro H de la hipérbola, tírense de él á los focus F y f las rectas HF y Hf, y divídase el ángulo FHf por medio con la recta KHR que será tangente de la hipérbola en H. Córtese $HN = HF$, y tírense las rectas FN, KN y KF. Los triángulos FHL y NHL tienen $FH = HN$, el lado HL comun, y el ángulo $FHL = NHL$: luego tendrán los lados FL, LN iguales, como tambien los ángulos FLH, NLH; y siendo ademas KL comun á los triángulos KLF,

KLN, será $KF = KN$; pero en el triángulo KNf es $Kf < KN + Nf$, ó bien $Kf - KN < Nf$: luego será $Kf - KF < fH - HF$; por consiguiente (627) el punto K estará fuera de los espacios comprehendidos por las hipérbolas. Luego &c.

PROPOSICION XIII.

648 Supuesta la construccion de la proposicion antecedente, si la tangente HL encuentra en R al exe transverso AB, y se tira á él la ordenada HG; será el semiexe transverso AC medio proporcional entre las distancias del centro á la ordenada, y del mismo centro al punto donde la tangente encuentra al exe transverso; esto es, $CG : CA = CA : CR$. *Fig.* 4.

Por estar el ángulo fHF dividido igualmente por la tangente HR, será (293) $fH : HF = fR : FR$: luego dividiendo será $fH - HF : HF = fR - FR : FR$; pero (626) $fH - HF = AB = 2AC$, y $fR - FR = 2CR$, por estar la recta Ff dividida por medio en C: luego $2AC : HF = 2CR : FR$, y tambien $AC : HF = CR : FR$; é invirtiendo $HF : AC = FR : CR$: luego componiendo será $HF + CA : CA = CF : CR$; pero (632) $CG : HF + AC = AC : CF$: luego por igualdad ordenada $CG : CA = CA : CR$. Que es &c.

COROLARIO.

649 Siendo $CG : CA = CA : CR$, y $CA = CB$, será tambien $CG : CB = CB : CR$, y en la misma razon estará la suma de los antecedentes con la de sus conseqüentes, esto es, $CG : CB = BG : BR$: luego convirtiendo $CG : AG = BG : GR$. Por tanto la subtangente es quarta proporcional de las distancias del centro á la ordenada baxada desde el punto del contacto al exe transverso BA prolongado, y de los vértices de este exe á dicha ordenada.

PROPOSICION XIV.

650 Las asíntotas CT y CS no concurren en ninguna distancia finita con las hipérbolas opuestas PAK, pBk. *Fig.* 5.

Si se niega, concurra, por exemplo, la asíntota CT con la hipérbola AP en el punto Z. Tírese por este punto la ordenada ZX al exe transverso BA prolongado; y levántese la perpendicular AR sobre el mismo exe en el vértice A, la que prolongada hasta encontrar la asíntota en R será igual al semiexe segundo CD. Siendo los triángulos CXZ, CAR equiángulos, será $CX : XZ = AC : AR$; por consiguiente (323) $\overline{CX}^2 : \overline{XZ}^2 = \overline{AC}^2 : \overline{AR}^2$ ó $\overline{CD}^2$; pero (635) $BX \times XA : \overline{ZX}^2 = \overline{AC}^2 : \overline{CD}^2$: luego será $\overline{CX}^2 : \overline{XZ}^2 =$

$BX \times AX : \overline{ZX}^2$, y por consiguieute $\overline{CX}^2 = BX \times XA$, lo que es imposible. Luego &c.

PROPOSICION XV.

651 Si por qualquiera punto J del exe transverso BA prolongado se tira una paralela LN al exe segundo DE terminada por una y otra parte en las asíntotas CT y CS de la hipérbola PAK; las partes HL, MN de dicha paralela comprehendidas por las asíntotas y la curva serán iguales entre sí: y tambien el rectángulo formado por los segmentos HL, HN, en que la curva divide á la misma paralela LN, será igual al quadrado del semiexe segundo CD. *Fig.* 5.

I. Levántese la perpendicular RAG sobre el exe transverso AB en el vértice A, y prolónguese hasta cortar las asíntotas en los puntos R y G. Siendo los triángulos LJC y RAC equiángulos, será $LJ : AR = JC : AC$: del mismo modo se demostrará ser $JN : AG = CJ : AC$: luego $LJ : AR = JN : AG$; y por ser $AR = AG$, será tambien $LJ = JN$; pero (636) $HJ = JM$: luego $LH = MN$.

II. Por ser los triángulos CJL y CAR equiángulos, será $CJ : JL = AC : AR$; por consiguiente (323) $\overline{CJ}^2 : \overline{JL}^2 = \overline{AC}^2 : \overline{AR}^2$ ó $\overline{CD}^2$; pero (635) $BJ \times JA : \overline{HJ}^2 = \overline{AC}^2 : \overline{CD}^2$: luego $\overline{CJ}^2$:

Fig. 1.

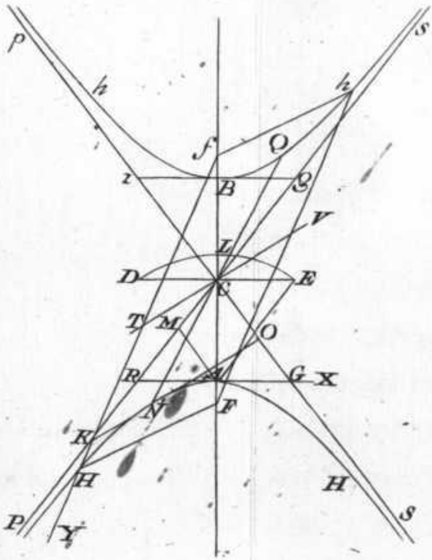


Fig. 2.

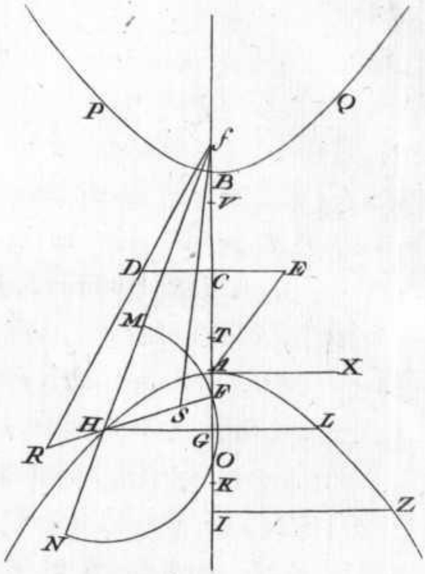


Fig. 3.

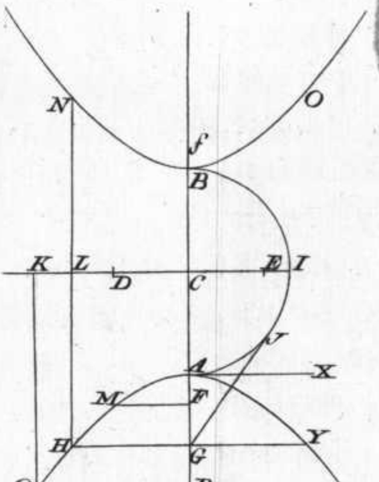
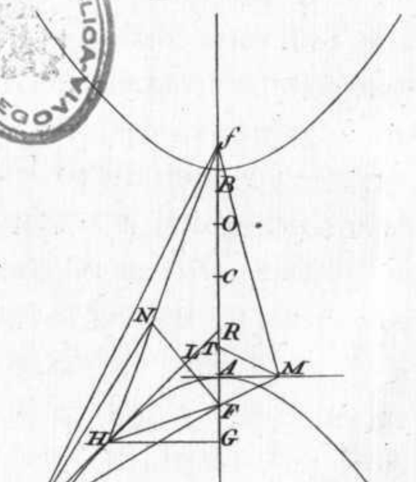


Fig. 4.



$\overline{JL}^2 = BJ \times JA : \overline{HJ}^2$; y por ser (134) $\overline{CJ}^2 = BJ \times JA + \overline{AC}^2$, y (133) $\overline{JL}^2 = LH \times HN + \overline{HJ}^2$, será tambien (274) $\overline{CJ}^2$ á $\overline{JL}^2$ ó bien $\overline{AC}^2 : \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 : LH \times HN$, y por lo tanto $\overline{CD}^2 = LH \times HN$. Que es &c.

COROLARIO.

652 Si las rectas *OS* y *LN* son paralelas al exe segundo *DE*, y están terminadas por las asíntotas, será $OP \times PS = LH \times HN = LM \times MN$, por ser estos rectángulos iguales al quadrado del semiexe segundo *CD*.

PROPOSICION XVI.

653 Si se tira qualquiera recta *TPV* obliqua al exe transverso *AB* prolongado, y terminada por las asíntotas *CT* y *CS* de la hipérbola *PAK*; los segmentos de esta recta comprehendidos entre las asíntotas y la curva serán iguales entre sí, como tambien los rectángulos formados por los segmentos en que la curva divide á dicha recta: esto es, $TP = MV$, y $TP \times PV = TM \times MV$. *Fig.* 5.

Desde los puntos *M* y *P* tírense las ordenadas *MJ* y *PQ* al exe *BA* prolongado, y alárguense hasta encontrar las asíntotas. Siendo las rectas *LM* y *OP* paralelas, serán los triángulos *LTM* y *OTP* equiángulos; por consiguiente será $LM : OP = TM : TP$: del mismo modo se demostrará ser $PS : MN = PV : VM$; pero por ser (652) $LM \times MN = OP \times PS$, es (311) $LM : OP = PS : MN$: luego será $TM : TP = PV : VM$; y dividiendo $PM : PT = PM : MV$; por consiguiente será $PT = MV$. Y siendo por lo demostrado $TM : TP = PV : VM$, será (311) $TM \times MV = TP \times PV$. Que es &c.

PROPOSICION XVII.

654 Si por dos qualesquiera puntos H y K de la hipérbola HAK referida á las asíntotas CQ y CP se tiran las dos rectas HY y KZ paralelas á la asíntota CQ, y otras dos HX y KO paralelas á la otra asíntota CP ; los paralelógramos $CXHY$ y $COKZ$, que resultan, serán iguales entre sí. *Fig.* 6.

Tírese por los referidos puntos H y K la recta HK, y alárguese por ambas partes hasta encontrar las asíntotas en los puntos T y V. Siendo las rectas HY y KZ paralelas, serán los triángulos HVY y KVZ equiángulos ; y por lo tanto $HV : KV = HY : KZ$: del mismo modo se demostrará ser $KT : TH = KO : HX$; pero por ser (653) $HV \times TH = KV \times KT$, es (311) $HV : KV = KT : TH$: luego será $HY : KZ = KO : HX$; pero el ángulo

$XHY = OKZ$, por ser iguales (107) ambos al ángulo XCZ: luego será (309) el paralelógramo $CH = CK$. Que es &c.

COROLARIO I.

655 Siendo por lo arriba demostrado $HY : KZ = KO : HX$, será tambien $HY : KZ = CZ : CY$: de donde resulta que si de dos qualesquiera puntos de la hipérbola se tiran dos rectas paralelas á una de las asíntotas y se prolongan hasta encontrar la otra, estas rectas tendrán la razon inversa de los segmentos cortados por ellas en la asíntota desde el centro C.

COROLARIO II.

656 Si por el vértice A del exe transverso se tira la recta AN paralela á la asíntota CQ, y es KZ paralela á la misma asíntota; será $CZ \times ZK$ igual á la potencia de la hipérbola, por ser $KZ : AN = CN : CZ$, y ademas (622) $CN = AN$.

PROPOSICION XVIII.

657 Si qualquiera recta SHG terminada en las asíntotas CR y CN encuentra á la hipérbola en un punto H, y queda cortada por medio en este punto; dicha recta SHG será tangente de la curva

en el mismo punto H: y al contrario, si es tangente, quedará dividida por medio en el punto del contacto. *Fig.* 7.

I. Tírese la recta HX paralela á la asíntota CN, y por qualquier punto P tomado en la asíntota CS, hágase pasar la recta PQ paralela á la asíntota CN, y alárguese hasta encontrar la curva en Q y la recta ST en O. Por ser las rectas OP y HX paralelas, los triángulos PSO y XSH serán equiángulos; por consiguiente tendrán proporcionales sus lados homólogos, esto es $OP : HX = PS : SX$; pero (655) $HX : PQ = CP : CX$; luego será (326) $OP \times HX$ á $PQ \times HX$ ó bien $OP : PQ = PS \times CP : CX \times SX$; y por ser $SH = HG$, será tambien $SX = CX$, y $PS \times CP < CX \times SX$: luego $OP < PQ$. Del mismo modo se demostrará que qualquiera otro punto de la recta ST está fuera de la curva: luego dicha recta será tangente de la curva en el punto H.

II. Hecha la misma preparacion en la figura que antes, se demostrará ser $PO : PQ = PS \times CP : CX \times XS$; pero $PO < PQ$, por ser la recta SG tangente de la curva en H: luego será $PS \times CP < CX \times XS$; y verificándose esto de qualquiera punto P tomado en la recta CS respecto al punto X, será $CX = XS$; pero por ser las rectas HX y CG

paralelas, es $SX : CX = HS : HG$: luego será $HS = HG$. Que es &c.

COROLARIO I.

658 Si la recta SHG es tangente de la hipérbola en el punto H, y encuentra á la asíntota CR en S; la recta HX, que pasa por el punto H del contacto y es paralela á la otra asíntota CN, dividirá por medio el segmento CS de aquella asíntota comprehendido entre el centro y el punto en que dicha tangente la encuentra.

COROLARIO II.

659 Entre la tangente SHG y la hipérbola no se puede tirar del punto del contacto H otra recta IHM sin que corte á la hipérbola: pues dividida CI por medio en P, y tirada PL paralela á la asíntota CN, se demostrará con el mismo método de la proposicion antecedente ser $PL > PQ$, y por consiguiente el punto L estará dentro de la hipérbola.

PROPOSICION XIX.

660 Las asíntotas CO, CN y la hipérbola KAM prolongadas al infinito se van acercando continua y constantemente, de suerte que su distancia llega últimamente á ser menor que qualquiera dada. *Fig.* 8.

Tírese la recta *GAR* perpendicular al exe transverso *AB* en el vértice *A*; y por el punto *R*, donde dicha perpendicular corta la asíntota, hágase pasar la recta *RH* paralela á la otra asíntota *CN*, y alárguese hasta encontrar la curva en *H*; por este punto tírese la recta *THP* paralela á *AR*, de modo que sea *HT* igual á la recta *HP* intercepta entre la curva y la asíntota *CN*. Asimismo por el punto *T* tírese la recta *TK* paralela á la asíntota *CN*, y por el punto *K* donde encuentra á la curva, hágase pasar la recta *VKN* paralela á *AR*, de modo que sea $VK = KN$: y del mismo continúese dicha construccion al infinito. Siendo, pues, (651) $HL \times HP = \overline{AR}^2$, será (312) $HP : AR = AR : LH$; pero $HP = RG = 2AR$: luego será $AR = 2LH$. Tambien por ser (652) $KN \times KO = HP \times HL$, será (311) $KN : HP = HL : OK$; pero $KN = TP = 2HP$: luego $LH = 2OK$: luego si de la distancia *AR* se quita la mitad, la parte residua será igual á la distancia *LH*; y si de dicha parte residua se quita la mitad, quedará la distancia *KO*; pero si de *AR* se quita la mitad, y de la residua parte se quita la mitad, continuando esta operacion al infinito, se llega (429) á una parte menor que qualquiera dada: luego últimamente la distancia entre la asíntota *CZ* y la curva *AK* llegará á ser menor que qualquiera dada. Lo mismo se demostrará respecto á la asíntota *CQ* y la curva *AM*, como tambien respecto á las asíntotas *Cn* y *Co* de la hipérbola opuesta *kBm*. Que es &c.

COROLARIO.

661 Infiérese que si la recta *CH*, tirada desde el centro *C* á qualquiera punto *H* de la hipérbola *KAM*, se prolonga por el centro *C*, encontrará á la hipérbola opuesta *kBm* en un punto *I*.

PROPOSICION XX.

662 Qualquiera diámetro transverso *HS* está dividido por medio en el centro *C*: y las tangentes *GHJ*, *gSj* tiradas á la curva en los vértices *H*, *S* del mismo diámetro, y que están terminadas por las asíntotas *Rj*, *Tg*, son paralelas é iguales. *Fig.* 9.

I. Tírense las ordenadas *Hh* y *Ss* al exe transverso *AB* prolongado por ambas partes. Siendo (635) las razones de $Bh \times hA$ á $\overline{Hh}^2$, y de $As \times sB$ á $\overline{Ss}^2$ iguales á la de $\overline{AB}^2$ á $\overline{DE}^2$, será $Bh \times hA : \overline{Hh}^2 = As \times sB : \overline{Ss}^2$; pero por ser los triángulos *ChH* y *CsS* equiángulos, es $Hh : Ch = Ss : Cs$, y $\overline{Hh}^2 : \overline{Ch}^2 = \overline{Ss}^2 : \overline{Cs}^2$: luego será por igualdad ordenada $Bh \times hA : \overline{Ch}^2 = As \times sB : \overline{Cs}^2$; é invirtiendo $\overline{Ch}^2 : Bh \times hA = \overline{Cs}^2 : As \times sB$; y por ser (134) $\overline{Ch}^2 =$

$Bb \times bA + \overline{AC}^2$, y $\overline{Cs}^2 = As \times sB + \overline{AC}^2$, será convirtiendo $\overline{Cb}^2 : \overline{AC}^2 = \overline{Cs}^2 : \overline{AC}^2$; por consiguiente $\overline{Cb}^2 = \overline{Cs}^2$, y $Cb = Cs$: y como en los triángulos HbC y SsC sean tambien los ángulos $b = s$, y $HCb = SCs$, será $CH = CS$.

II. Por ser las rectas Hz y Sx tangentes de las hipérbolas opuestas en los puntos H y S, será (648) $Cb : CA = CA : Cz$, y $Cs : CB = CB : Cx$; pero $Cb = Cs$, por lo arriba demostrado, y $CA = CB$: luego $AC : Cz = BC : Cx$; por consiguiente $Cz = Cx$: y como los triángulos HCz, SCx tengan el lado $CH = CS$, y el ángulo $HCz = SCx$, tendrán los ángulos CHz, CSx iguales, y por consiguiente las rectas GHJ, jSg serán paralelas. Los triángulos HCJ y CSj tienen el lado $CH = CS$, y los ángulos $CHJ = CSj$, $HCJ = SCj$: luego tendrán el lado $HJ = Sj$: del mismo modo se demostrará $HG = Sg$: luego tambien será $GJ = gj$. Que es &c.

PROPOSICION XXI.

663 Si la recta HG es tangente de la hiperbola en el punto H vértice de qualquier diámetro transverso, y por qualquier punto P de la misma curva se tira á dicha tangente la paralela TN prolongada hasta encontrar las asíntotas CT y CR en los puntos T y N; el rectángulo de las partes PT y PN de di-

Fig 5

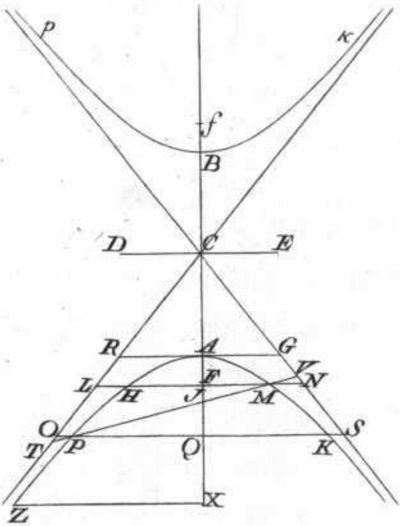


Fig 6

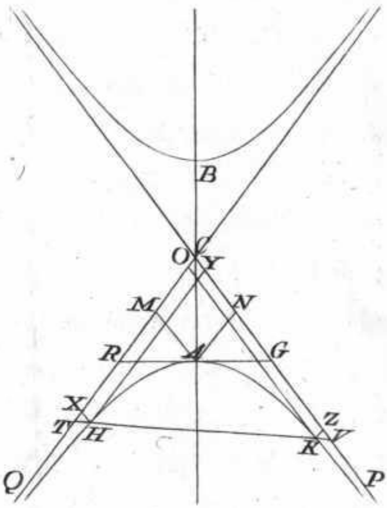


Fig 7

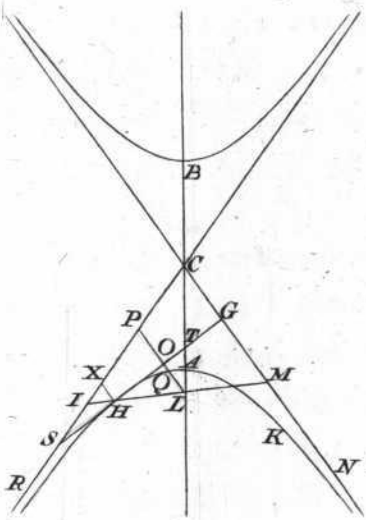
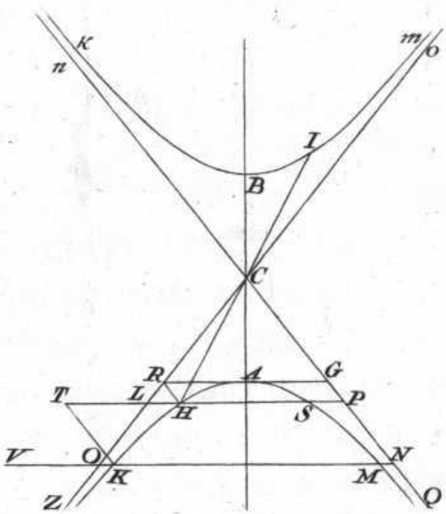


Fig 8



cha paralela será igual al quadrado de la tangente HG comprehendida entre el punto H del contacto y la asíntota CT; esto es, $TP \times PN = \overline{GH}^2$. *Fig.* 9.

Por los puntos P y H tírense las rectas OPR y VHQ paralelas al exe segundo ED; y alárguense dichas rectas, como tambien la tangente GH, hasta encontrar á las asíntotas en los puntos O, R, V, Q, y J. Siendo las rectas TP, PO respectivamente paralelas á las GH, HV, serán los ángulos $PTO = HGV$, y $TOP = GVH$; por consiguiente los triángulos TOP, GVH serán equiángulos: del mismo modo se demostrará ser los triángulos PRN, HQJ equiángulos. Por tanto será $TP : PO = GH : HV$, y $PN : PR = HJ : HQ$: luego (326) $TP \times PN : PR \times PO = HJ \times GH : HQ \times HV$; pero (652) $PR \times PO = HQ \times HV$: luego será $TP \times PN = HJ \times GH = \overline{HG}^2$, por ser $GH = HJ$ (657). Que es &c.

PROPOSICION XXII.

664 Tirada qualquiera ordenada PL al diámetro transverso SH prolongado, será el rectángulo de las abscisas SL y HL al quadrado de dicha ordenada como el quadrado del mismo diámetro á el de su diámetro conjugado UZ; esto es, $SL \times HL : \overline{PL}^2 = \overline{SH}^2 : \overline{UZ}^2$. *Fig.* 9.

Sea GHJ tangente de la hipérbola en el punto H vértice del diámetro transverso SH; y prolónguense la tangente y la ordenada PL paralela á ella, hasta encontrar las asíntotas CT y CR. Siendo la recta TL paralela á GH, serán los triángulos TCL y GCH equiángulos, y tendrán proporcionales sus lados homólogos, esto es $TL : GH = CL : CH$: del mismo modo se demostrará ser $LN : HJ = CL : CH$: luego será $TL : GH = LN : HJ$; y por ser $GH = HJ$ (657), será tambien $TL = LN$. Ademas por ser $CL : CH = TL : GH$, será $\overline{CL}^2 : \overline{CH}^2 = \overline{TL}^2 : \overline{GH}^2$ ó $TP \times PN$ (663); y dividiendo $SL \times LH : \overline{CH}^2 = \overline{PL}^2 : \overline{GH}^2$: luego alternando será $SL \times LH : \overline{PL}^2 = \overline{CH}^2 : \overline{GH}^2$ ó $\overline{CU}^2$: y como las rectas SH y UZ sean duplas de las CH y CU, será tambien $SL \times LH : \overline{PL}^2 = \overline{SH}^2 : \overline{UZ}^2$. Que es &c.

COROLARIO I.

665 Qualquiera recta PM terminada por ambas partes en la curva en los puntos P y M, y paralela al diámetro conjugado UZ, la dividirá por medio el exe transverso SH prolongado: pues por ser $TL = LN$ como se ha demostrado, y $TP = MN$ (653), será $PL = LM$.

COROLARIO II.

666 Si la recta pl es paralela á las ordenadas

al diámetro transverso SH, y es $Sl \times lH : \overline{pl}^2 = \overline{SH}^2 : \overline{UZ}^2$; el punto p estará en la hipérbola pAW.

COROLARIO III.

667 Descrito con el semidiámetro transverso CH un semicírculo, y tirada á él una tangente desde qualquier punto L tomado en el exe transverso SH prolongado; la razon de esta tangente á la ordenada LP correspondiente á dicho punto será igual á la del diámetro transverso SH al conjugado UZ: lo qual se demuestra con el método dado antes (639).

PROPOSICION XXIII.

668 Si la recta PI es ordenada al diámetro ZU conjugado al diámetro transverso SH; será el quadrado de este al quadrado de su conjugado como el quadrado de la ordenada á la suma de los quadrados del semidiámetro conjugado CU y del segmento de este diámetro comprehendido entre el centro y la ordenada; esto es, $\overline{SH}^2 : \overline{UZ}^2 = \overline{PI}^2 : \overline{CU}^2 + \overline{CI}^2$. *Fig.* 9.

Tirada la ordenada PL al diámetro transverso SH prolongado, será (664) $\overline{CH}^2 : \overline{CU}^2 = SL \times LH : \overline{PL}^2$ ó $\overline{CI}^2$: luego la suma de los antecedentes estará con la de los conseqüentes en la misma razon que un antecedente con su conseqüente, esto es $\overline{CH}^2 + SL \times LH : \overline{CU}^2 + \overline{CI}^2 = \overline{CH}^2 : \overline{CU}^2$; pero $\overline{CH}^2 + SL \times LH = \overline{CL}^2 = \overline{PI}^2$: luego será $\overline{PI}^2 : \overline{CU}^2 + \overline{CI}^2 = \overline{CH}^2 : \overline{CU}^2$ ó bien como $\overline{SH}^2$ á $\overline{UZ}^2$. Que es &c.

PROPOSICION XXIV.

669 Si las rectas pl y PL son ordenadas al diámetro transverso SH prolongado; los quadrados de dichas ordenadas tendrán entre sí la razon de los rectángulos de las abscisas; esto es $\overline{pl}^2 : \overline{PL}^2 = Sl \times lH : SL \times LH$: y si las rectas pK y PI son ordenadas al diámetro conjugado ZU prolongado si es necesario; los quadrados de estas ordenadas tendrán entre sí la razon de las sumas de los quadrados del segmento del mismo diámetro comprehendido entre el centro y la ordenada, y del semidiámetro conjugado; esto es $\overline{pK}^2 : \overline{PI}^2 = \overline{CK}^2 + \overline{CU}^2 : \overline{CI}^2 + \overline{CU}^2$. *Fig.* 9.

I. Siendo las rectas pl y PL ordenadas al diámetro transverso SH, será (664) $\overline{SH}^2 : \overline{UZ}^2 = Sl \times lH : \overline{pl}^2$, y $\overline{SH}^2 : \overline{UZ}^2 = SL \times LH : \overline{PL}^2$: luego $Sl \times lH : \overline{pl}^2 = SL \times LH : \overline{LP}^2$; y alternando será $Sl \times lH : SL \times LH = \overline{pl}^2 : \overline{PL}^2$.

II. Por ser las rectas pK y PI ordenadas al diámetro conjugado UZ, será (668) $\overline{Kp}^2 : \overline{CK}^2 +$

$\overline{CU}^2 = \overline{CH}^2 : \overline{CU}^2$, y $\overline{PI}^2 : \overline{CI}^2 + \overline{CU}^2 = \overline{CH}^2 : \overline{CU}^2$: luego $\overline{Kp}^2 : \overline{CK}^2 + \overline{CU}^2 = \overline{PI}^2 : \overline{CI}^2 + \overline{CU}^2$; y alternando será $\overline{Kp}^2 : \overline{PI}^2 = \overline{CK}^2 + \overline{CU}^2 : \overline{CI}^2 + \overline{CU}^2$. Que es &c.

COROLARIO.

670 Si la recta *PL* es ordenada al diámetro *SH*, y la recta *pl* paralela á ella, y ademas es $\overline{pl}^2 : \overline{PL}^2 = Sl \times lH : SL \times LH$; el punto *p* estará en la hipérbola *pAW*.

PROPOSICION XXV.

671 El paralelógramo *ADBE*, cuyas diagonales son los exes *AB* y *DE* de la hipérbola, es igual al paralelógramo *HQFP* cuyas diagonales son qualesquiera dos diámetros conjugados *HF* y *QP*. *Fig.* 10.

Tírese la recta *OAT* perpendicular al exe transverso *AB* en el vértice *A*; tómense las partes *AO* y *AT* iguales al semiexe segundo *CD*; tírense las asíntotas *COR* y *CTN*, como tambien la recta *GHJ* tangente á la curva en el vértice *H* del diámetro transverso *HF*, la que se ha de prolongar hasta encontrar las asíntotas en los puntos *G* y *J*. Siendo, pues, el diámetro conjugado igual y paralelo á la tangente *GJ*, será tambien el semidiámetro *CP* igual y paralelo á *GH*, por ser $GH = HJ$ (657), de donde resulta ser la recta *HP* igual y paralela á *CG* : del mismo modo se demostrará *HQ* igual y paralela á *CJ*; y por ser $CP = CQ$, será tambien $PL = LH$: luego la figura *HMCL* será un paralelógramo y este igual al triángulo *PCH*. Asimismo se demostrará ser el paralelógramo $AVCK = ACE$; pero (654) el paralelógramo $HMCL = AVCK$: luego será el triángulo $PCH = ACE$; y siendo los paralelógramos *HQFP* y *ADBE* quádruplos de dichos triángulos , serán tambien estos paralelógramos iguales. Que es &c.

COROLARIO.

672 Siendo el triángulo $ACE = PCH$, será tambien el triángulo $ACE = GCH$; pero el triángulo *GCJ* es duplo de *GCH*, por ser $GH = HJ$ (657); y el triángulo *DAE* ó bien *OCT* es duplo de *ACE*: luego será el triángulo $GCJ = OCT$.

PROPOSICION XXVI.

673 En la hipérbola la diferencia de los quadrados de los exes *AB* y *DE* es igual á la diferencia de los quadrados de dos qualesquiera diámetros conjugados *HF* y *QP*; esto es, $\overline{AB}^2 - \overline{DE}^2 = \overline{HF}^2 - \overline{QP}^2$. *Fig.* 11.

Hágase la misma preparacion en la figura que antes; y ademas báxense desde los puntos H, A, T y J las perpendiculares HL, AM, TK y JR á la asíntota CI. Siendo, pues, los triángulos (672) GCJ y OCT iguales, y el ángulo OCT comun á ellos, será (310) $GC : CO = CT : CJ$; pero por ser paralelas KT y RJ, es $CT : CJ = CK : CR$: luego será $GC : CO = CK : CR$; por consiguiente (311) $GC \times CR = CO \times CK$. Y siendo las rectas HL y RJ paralelas, será $GH : HJ = GL : LR$; pero (657) $GH = HJ$: luego $GL = LR$; por consiguiente (134) $GC \times CR = \overline{CL}^2 - \overline{LG}^2 = \overline{CH}^2 - \overline{GH}^2$: del mismo modo se demostrará ser $CO \times CK = \overline{AC}^2 - \overline{AO}^2$; pero $GC \times CR = CO \times CK$: luego $\overline{CH}^2 - \overline{HG}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AO}^2$; y tomando los quádruplos de dichos quadrados, será $\overline{FH}^2 - \overline{GJ}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{OT}^2$, ó bien $\overline{FH}^2 - \overline{PQ}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{DE}^2$. Que es &c.

PROPOSICION XXVII.

674 Describir una hipérbola que tenga por diámetros conjugados las rectas SH, UZ dadas de posicion y de magnitud, y que se cortan mutuamente por medio en C. *Fig.* 9.

Por el punto H extremo de la recta SH, tírese la recta GHJ paralela é igual á la UZ, de suerte que sea $HG = HJ$; tírense tambien las rectas CGT, CJR, que pasen por el punto C y por los extremos de la recta GJ; hágase pasar por el punto H la recta HX paralela á CR; hállese una media proporcional CY entre las rectas CX, XH, y tírese la recta YA paralela á CR é igual á CY; únanse los puntos C, A por la recta CA, y sobre ella levántese la perpendicular Ff prolongada hasta encontrar las rectas CG, CR en los puntos f, F; finalmente con los exes $AB = 2AC$, $DE = Ff$, descríbase (645) la hipérbola PAW que será la que se pide. Siendo, pues, $CY = YA$, será el ángulo $CAY = ACY$; pero los ángulos CAY, ACF son iguales por alternos: luego será el ángulo $ACY = ACF$; y como los triángulos ACf, ACF tengan ademas el lado AC comun, y los ángulos en A iguales por rectos, tendrán los lados Af, AF iguales entre sí y al semiexe segundo DC: luego las rectas CG, CR serán asíntotas de la hipérbola PAW, que pasará por el punto H (656), por ser $CX \times XH$ igual á la potencia de esta curva respecto á que son continuas proporcionales las rectas CX, AY, HX. Tambien siendo $HG = HJ$, la recta GJ será (657) tangente de la hipérbola en el punto H; y por ser $UZ = GJ$, será la recta UZ el diámetro conjugado al transverso HS. Por tanto la hipérbola descrita PAW tiene por diámetros conjugados las rectas HS y UZ dadas de posicion y de magnitud, y que se cortan mutuamente por medio en *C*. Que es &c.

COROLARIO I.

675 Infiérese el modo de describir una hipérbola *PAW*, que tenga por asíntotas las rectas *CG* y *CR* dadas de posicion, y que pase por el punto *H* dado dentro del espacio comprehendido por dichas rectas.

COROLARIO II.

676 Tambien dadas de posicion y de magnitud las rectas *SH* y *PL* que corta á la *SH* en su prolongacion, se describirá una hipérbola *PAW*, que tenga por diámetro transverso la recta *HS*, y por ordenada á él la recta *PL*; si descrito sobre *SH*, como diámetro, un semicírculo, y tirada á él desde el punto *L* una tangente, se halla á esta, á *PL* y á *SH* una quarta proporcional *UZ*, que se ha de tirar paralela á *PL*, y con los diámetros *SH* y *UZ* se describe la hipérbola *PAW*: porque siendo dichas quatro rectas proporcionales, tambien sus quadrados serán proporcionales, esto es, el quadrado de la referida tangente ó bien $SL \times LH : \overline{PL}^2 = \overline{SH}^2 : \overline{UZ}^2$: luego la hipérbola *PAW* será la que se pide.

PROPOSICION XXVIII.

677 Si el cono *AFLH* está cortado por el

plano triangular *FAR* que pasa por el exe del mismo cono, y ademas por otro plano *LVH* que pasa por las rectas, *HL* perpendicular al diámetro *FR* de la base del cono, y *VY* que corta por baxo del vértice *A* al lado *AF* de dicho triángulo, y por cima de dicho vértice al otro lado *AR* prolongado; la linea *LVH*, que es la comun seccion del plano *LVH* y de la superficie cónica, será una hipérbola, cuyo diámetro transverso es la recta *Vu* terminada por los lados *FA*, *AR* del triángulo *FAR*. *Fig.* 12.

Por qualquier punto *K* de la comun seccion *VY* de los planos *LVH*, *FAR*, tírense las rectas *BD* y *MG* respectivamente paralelas á las *FR* y *LH*; y hágase pasar por ellas el plano *BMDG* terminado en la superficie del cono. Siendo las rectas *BD* y *MG* respectivamente paralelas á las *FR* y *LH*, será (392) el plano *BMDG* paralelo al círculo *FLRH*: luego dicho plano terminado por la superficie cónica será (560) un círculo cuyo diámetro *BD*. Asimismo por ser las rectas *BK*, *KM* respectivamente paralelas á las *FY*, *YL*, será (386) el ángulo *BKM* = *FYL*; pero el ángulo *FYL* es recto: luego tambien lo será *BKM*. Por tanto las rectas *GM* y *LH* estarán cortadas por medio en los puntos *K*, *Y*; y ademas será (308. 312) $\overline{KM}^2$

Fig. 9.

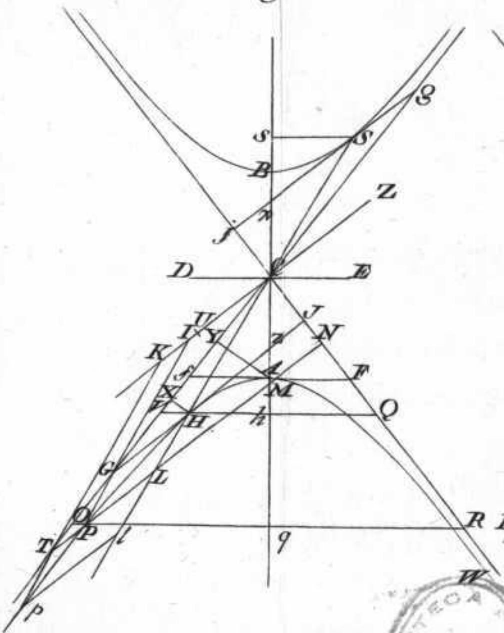


Fig. 10.

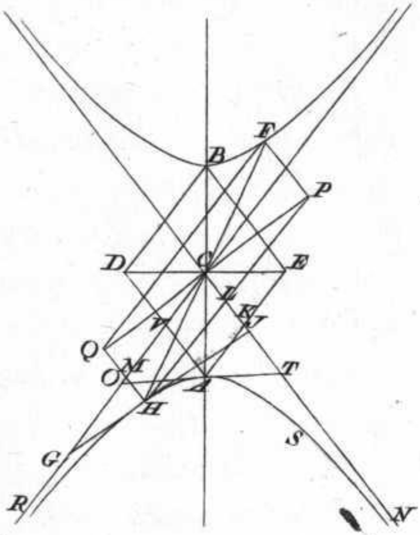


Fig. 11.

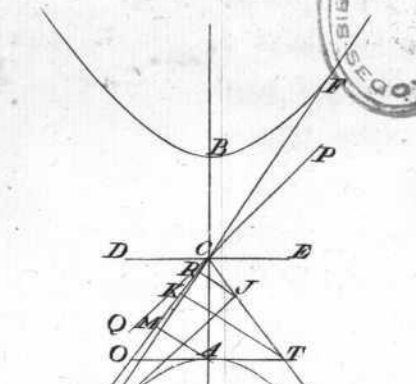
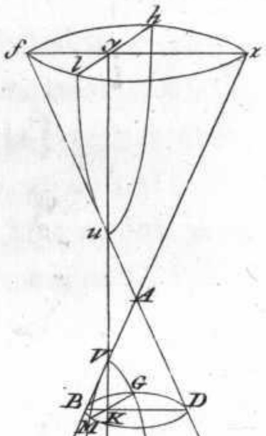


Fig. 12.



$= BK \times KD$, $\overline{L\Upsilon}^2 = F\Upsilon \times \Upsilon R$; de donde $\overline{KM}^2 : \overline{L\Upsilon}^2 = BK \times KD : F\Upsilon \times \Upsilon R$; pero (326) $BK \times KD : F\Upsilon \times \Upsilon R = uK \times KV : u\Upsilon \times \Upsilon V$, por ser $BK : F\Upsilon = VK : V\Upsilon$, y $KD : \Upsilon R = uK : u\Upsilon$: luego será $uK \times KV : u\Upsilon \times \Upsilon V = \overline{KM}^2 : \overline{\Upsilon L}^2$. Por tanto descrita (676) una hipérbola que tenga por diámetro transverso la recta uV, y por ordenada á él la recta ΥL, estará (670) en ella el punto M: y lo mismo se demostrará de todos los puntos de la linea LVH. Que es &c.

FIN.