GEOMETRÍA

ELEMENTAL

POR

DON ZOEL G. DE GALDEANO

CATEDRÁTICO DE MATEMÁTICAS

por oposicion

DEL INSTITUTO DE CIUDAD-REAL

MADRID

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE GREGORIO JUSTE

calle de Pizarro, núm. 15, bajo

1882

SECCION EXPOSITIVA

GEOMETRÍA PLANA

LIBRO PRIMERO

DEFINICIONES, DIVISIONES Y NOCIONES PRIMITIVAS.

§ 1.º—Nociones generales sobre las cantidades geométricas.

1. *Extension*, es la propiedad que tienen los cuerpos de ocupar un lugar en el espacio.

2. *Cuerpo geométrico* es una porcion limitada del espacio indefinido.

3. Se llaman *dimensiones* de un cuerpo, sus tres modos de ser extensos, á saber, su *longitud*, *latitud* y *profundidad*, denominados tambien su *ancho*, su *largo* y su *grueso*.

4. Un cuerpo se halla separado del resto del espacio por su *superficie*, que se define como el *límite de un cuerpo*.

5. Las superficies pueden concebirse, por abstraccion, como separadas de los cuerpos á que pertenecen, y entónces se dice que son: la *extension en dos dimensiones, longitud* y *latitud*.

6. Una porcion de la superficie de un cuerpo se halla limitada del resto por una ó varias líneas, definiéndose, por consiguiente, la línea como el *límite de una superficie*.

7. Las líneas pueden concebirse, por abstraccion, como separadas de las superficies á que pertenecen, y entónces se dice que son: la *extension en una sola dimension, longitud*.

8. En fin. Las porciones de líneas se hallan separadas entre sí por puntos, definiéndose, por consiguiente, el punto como el *límite de una recta*. El punto no tiene dimensiones.

9. En una línea pueden considerarse infinidad de puntos, en una superficie infinidad de líneas, y en un espacio infinidad de superficies.

10. Una línea, una superficie ó un cuerpo se pueden concebir como engendrados, respectivamente, por el movimiento de un punto, de una línea ó de una superficie.

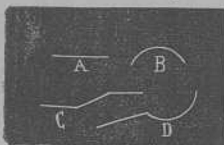

Figura 1.ª

11. La línea puede ser *recta*, *curva*, *quebrada* ó *mixta* (representada por A, B, C y D en la fig. 1.ª).

12. Línea recta es aquella cuya representacion más exacta puede hacerse por el borde de una regla bien construida. Su propiedad esencial consiste en *no poder existir dos distintas entre dos puntos.*

13. *Tampoco pueden ser distintas dos rectas fuera de la parte comprendida entre los dos puntos comunes.*

En efecto.—Supongamos que ABD y ABD′ sean dos rectas confundidas en el intervalo AB (fig. 2.ª), y que se separan, á partir desde cierto punto C de su direccion comun. Es evidente, que si hacemos girar la ABCD′ alrededor de A, hasta que el punto D′ se haya confundido con otro punto de la ABCD, resultará que, entre estos dos puntos confundidos y el A, habrá dos rectas que no se confunden, puesto que todos los puntos de la ABCD′, comprendidos entre A y D′, habrán pasado por el movimiento de giro hácia la parte superíor de la ABCD.

14. De esto resulta el **principio** de la determinacion de la recta, á saber: que *dos puntos determinan la posicion de una recta.*

15. Una porcion limitada de una recta se llama segmento rectilíneo ó simplemente segmento.

16. Nos formamos idea de la longitud de una recta, averiguando la relacion de su longitud con la de otra, tomada por unidad, es decir, midiéndola por medio de ésta.

17. Para medir una recta por medio de otra, tomada como unidad, se ve si ésta se halla exactamente contenida en aquélla, y si así sucede, el número de veces que resulte expresará su medida; en el caso contrario, se buscará una comun medida de la menor y el resto que se hubiere obtenido, practicándose con las rectas la série de operaciones á que dió lugar en Aritmética la obtencion del *m. c. d.* de dos números, hasta obtener una recta que sensiblemente se halle contenida en la menor.

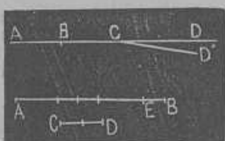

Figura 2.ª

Ejemplo.—Sean las rectas AB y CD (fig. 2.ª). Llevando CD sobre AB todas las veces que se pueda, se obtiene

$$AB = AE + EB = 3CD + EB.$$

Llevando EB sobre CD, se ve que

$$CD = 2EB;$$

luego $$AB = 3 \times 2EB + EB = 7EB;$$

pero $$EB = \frac{CD}{2},$$

luego $AB = 7 \times \frac{CD}{2} = \frac{7}{2}\, CD.$

La medida de la recta AB por medio de la CD está expresada por la fraccion $\frac{7}{2}$.

18. *Línea curva* es la que no es recta en ninguna de sus partes. Una porcion limitada de una curva se llama *arco*, y al segmento rectilíneo comprendido entre sus extremos se llama *cuerda*.

19. Línea quebrada es la formada por una combinacion de rectas distintas.

20. Línea mixta es la formada por una combinacion de rectas y curvas.

21. Una superficie puede ser *plana*, *curva*, *quebrada* y *mixta*.

22. La superficie plana, ó simplemente *plano*, es aquella cuya propiedad esencial consiste en contener completamente todas las rectas trazadas entre dos cualesquiera de sus pun-

tos. Su representacion más exacta está dada por la superficie de una mesa ó un espejo bien construidos.

23. *Superficie curva* es la que no contiene ninguna parte plana.

24. *Superficie quebrada* es la formada por un conjunto de planos distintos.

25. *Superficie mixta* es la formada por superficies planas y curvas.

26. Las líneas, objeto de la Geometría elemental, son la recta y la circunferencia.

27. Las superficies, objeto de la Geometría elemental, son las de revolucion, ó las engendradas por una línea plana (recta ó semicircunferencia) que gira alrededor de una recta fija, situada en su plano.

28. *Figura* es un conjunto de puntos, líneas ó superficies.

29. Las figuras se llaman *lineales*, *superficiales* ó *sólidas*, segun que sus puntos se hallen situados en una línea, en una superficie ó en el espacio, en general.

30. En las figuras hay que considerar su modo de ser, de estar y su magnitud, denominados *forma*, *posicion* y *extension*.

31. En Geometría elemental, bajo el concepto de su modo de ser, unido al de magnitud, se dividen las figuras en *iguales*, *semejantes* y *equivalentes*.

32. Dos figuras son *iguales*, cuando tienen la misma forma y extension, de modo que pueden superponerse y confundirse: son *semejantes*, cuando tienen la misma forma y distinta extension; y son *equivalentes*, cuando tienen distinta forma y la misma extension.

33. *Geometría* es la ciencia que trata de las figuras. La Geometría elemental tiene por objeto establecer las propiedades fundamentales de las figuras, ya mediante sus recursos propios, ya mediante el auxilio de la Aritmética. Así es, que puede dividirse en *constitutiva* y *métrica*. Tambien se divide en plana y del espacio, segun trate, de las figuras contenidas en un plano ó en el espacio.

§ 2.°—De los ángulos y rectas paralelas.

34. Dos rectas que se encuentran, comprenden un espacio que se llama *ángulo*. Cada una de las dos rectas que forman un ángulo se llama *lado*, y *vértice* el punto de interseccion.

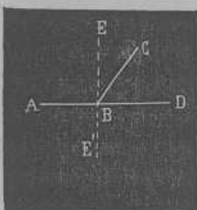

Figura 3.ª

ABC (fig. 3.ª) es un ángulo cuyos lados son AB, BC, y cuyo vértice es B.

35. Un ángulo se nombra por tres letras, expresando siempre en el medio la del vértice. Cuando hay un ángulo sólo, basta nombrar la letra del vértice, y cuando hay vários con un vértice comun, es indispensable nombrar cada uno con las tres letras.

36. Corolario: *Un ángulo no altera, aunque varíe la longitud de sus lados.*

37. Para comparar la magnitud de dos ángulos, se colocan de manera que coincidan sus vértices y dos de sus lados, respecto á los cuales resulten igualmente colocados los ángulos. Cuando los otros lados coinciden, los ángulos son iguales; cuando esto no sucede, el segundo lado del menor ángulo queda comprendido entre los lados del mayor.

38. Para *medir un ángulo* por medio de otro, tomado como unidad, se sigue la misma regla que para la recta.

39. Para *sumar varios ángulos*, se colocan unos á continuacion de otros, de manera que, coincidiendo sus vértices, el primer lado de cada uno coincida con el segundo del anteriormente colocado. La *suma* será el ángulo formado por el *primer lado del primero y el segundo del último* (1).

$$\angle \text{ ABC} = \angle \text{ ABE} + \angle \text{ EBC (fig. 3.ª)}.$$

40. Para *restar un ángulo* de otro mayor, se colocará el sustraendo de modo que, coincidiendo el vértice y un lado

(1) Los signos [.], $|^{a}$, $|^{o}$, $\|^{a}$, $\perp$, $\angle$, $\llcorner$, $\triangle$, léanse respectivamente: punto, recta, lado, paralela, perpendicular, ángulo, ángulo recto, triángulo, y los signos $\neq$, $\equiv$ léanse: no es igual á, equivalente á, ó es equivalente á.

con los respectivos del minuendo, cubra parcialmente á éste; *la parte comprendida entre los lados no comunes es la diferencia*

$$\angle ABE = \angle ABC - \angle EBC \text{ (fig. 3.}^{a}\text{)}.$$

41. La *multiplicacion* de un ángulo por un número entero es el caso particular de la adicion angular, en que los sumandos son iguales al ángulo dado.

42. Para el caso de un multiplicador fraccionario, sería preciso saber dividir un ángulo en un número dado de partes iguales.

43. Se llama *bisectriz* de un ángulo á la recta que lo divide en dos partes iguales.

44. Un ángulo puede considerarse como una suma angular, y tambien como una diferencia.—Así

$$\angle ABC = \angle ABE + \angle EBC \text{ (fig. 3.}^{a}\text{)}$$

$$\angle ABE = \angle ABC - \angle EBC.$$

45. Una recta puede considerarse como una suma angular cuyo vértice sea uno de sus puntos. Así

$$\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD \text{ (fig. 3.}^{a}\text{)}$$

46. Por consiguiente, un ángulo se llama *llano* cuando sus lados tienen direcciones opuestas y caen, por lo tanto, sobre una misma recta.

47. Un ángulo se llama *convexo* ó *cóncavo*, segun que es *mayor* ó *menor* que uno llano (1).

48. **Axioma**.—*La suma angular á un lado de una recta es constante.*

49. Se llaman *ángulos adyacentes*, los que tienen el vértice y un lado comun y los otros dos en línea recta, y cuando esto último no sucede, son *consecutivos*.

Los $\angle^{s}$ ABC, CBD (fig. 3.ª) son adyacentes.

Los $\angle^{s}$ ABE y EBC (fig. 3.ª) son consecutivos.

50. Llámase *ángulo recto*, cada uno de los ángulos adya-

---

(1) Denominacion dada por Baltzer.

centes iguales que una recta forma con otra; y recta *perpendicular* á otra, la que forma con ésta dos ángulos rectos.

51. Corolarios: 1.° *Por un punto de una recta sólo puede trazársele una perpendicular*, pues no puede haber más que un caso en que los ángulos adyacentes sean iguales.

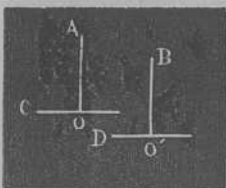

Figura 4.ª

2.° *Todos los ángulos rectos son iguales*, pues siendo siempre posible la superposicion de dos rectas OC y OD, tiene que verificarse necesariamente las de sus $\perp^s$ OA y OB (figura 4.ª).

3.° *Los ángulos adyacentes sumados valen dos rectos*, y recíprocamente, *si dos ángulos consecutivos sumados valen dos rectos, serán adyacentes.*

α. El $\angle$ ABC excede al $\angle$ ABE (fig. 3.ª), lo que el DBC es excedido por el $\angle$ DBE; luego la suma es igual á dos ángulos rectos.

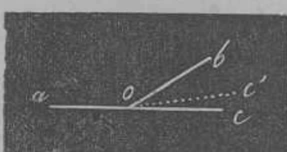

Figura 5.ª

6. Siendo $\angle$ *aob* + $\angle$ *boc* $= 2\llcorner^s$ (fig. 5.ª), si *oc* no fuese prolongacion de *ao*, lo sería, por ejemplo, *oc'*, y entónces segun el directo (α),

$$\angle\, aob + \angle\, boc' = 2\,\llcorner^s;$$

luego $\angle$ *boc* sería igual á $\angle$ *boc'*, lo que es absurdo; luego tambien será absurdo suponer que *oc* no es prolongacion de *oa*.

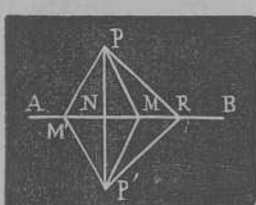

Figura 6.ª

Consecuencia.—De este recíproco y de (14) se deduce que: *por un [.] exterior á una recta no se le puede trazar más que una perpendicular*; pues si por un [.] P (fig. 6.ª) se pudieran trazar á una $|^{a}$ AB dos $\perp^s$ PN y PM; doblando la figura PMN, sirviendo de eje la $|^{a}$ AB, se obtendrá la figura P'MN, que representará la primera en su nueva posicion, y resultarán las relaciones siguientes:

$$\angle \text{PNM} + \angle \text{MNP}' = 2 \llcorner^{s}$$
$$\angle \text{PMN} + \angle \text{NMP}' = 2 \llcorner^{s},$$

(pues por hipótesis los $\angle^{s}$ PNM y PMN, y tambien sus iguales MNP′ y NMP′ son $\llcorner^{s}$); luego (segun el recíproco anterior) PNP′ y PMP′ son dos líneas rectas, lo cual es imposible (12).

4.° *Todos los ángulos consecutivos que pueden formarse á un lado de una recta, valen sumados dos rectos*, pues todos, ménos uno de los ángulos extremos, forman el adyacente á éste.

5.° *Todos los ángulos consecutivos formados alrededor de un punto, valen sumados cuatro ángulos rectos*, pues trazándose por este punto una recta cualquiera, la suma angular á cada lado de ésta valdrá dos ángulos rectos.

6.° Los ángulos que no son rectos se llaman *oblícuos*, y se dirá que *ángulo agudo* es el oblícuo menor que un recto, y *obtuso* el que es mayor.

El $\angle$ ABC es obtuso; el $\angle$ CBD es agudo (fig. 3.ª).

52. Dos ángulos son *complementarios* cuando sumados valen un ángulo recto, y *suplementarios* cuando sumados valen dos rectos.

Figura 7.ª

53. Angulos *opuestos por el vértice* son aquellos de los que el uno está formado por la prolongacion de los lados del otro.

Ejemplo.—El $\angle$ AOB y el $\angle$ COD (figura 7.ª).

54. Corolario 6.°—Los ángulos opuestos por el vértice son iguales, pues

$$\angle \text{AOB} + \angle \text{AOC} = 2 \llcorner^{s} \text{ (fig. 7.ª)}$$
$$\angle \text{DOC} + \angle \text{AOC} = 2 \llcorner^{s};$$

luego $$\angle \text{AOB} = \angle \text{DOC}.$$

55. Se llaman *rectas paralelas* las que no se encuentran por más que se prolonguen.

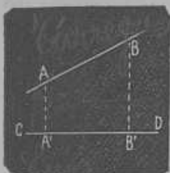

Figura 8.ª

56. Se llama *proyeccion de un punto* A sobre una recta CD, el pié de la perpendicular trazada desde aquél á ésta (fig. 8.ª), y se llama *proyeccion de una recta* AB sobre otra CD, la parte de ésta comprendida entre los piés de las perpendiculares trazadas desde los extremos de la primera á la segunda (fig. 8.ª).

§ 3.º—Combinaciones de más de dos rectas.

57. Se llama *secante* ó *transversal* la recta que corta á otras.

58. Cuando una recta EF (fig. 9.ª) encuentra á otras AB y CD, forma con éstas ocho ángulos; cuatro internos, 3,4,5,6, y cuatro externos, 1,2,7,8.

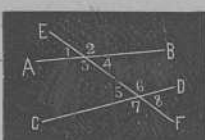

Figura 9.ª

Los ángulos 3 y 6, 4 y 5 internos no adyacentes, situados á distinto lado de la secante, se llaman *alternos-internos*.

Los ángulos 1 y 5, 3 y 7, 2 y 6, 4 y 8, situados al mismo lado de la secante, uno interno y otro externo se llaman *correspondientes*.

Los externos 1 y 8, 2 y 7, situados á distintos lados de la secante, se llaman *alternos-externos*.

58. *Polígono* es una porcion de plano limitada por rectas. Estas se llaman *lados*, y los vértices y ángulos que forman, *vértices* y *ángulos* del polígono.

59. *Contorno* de un polígono es el conjunto de sus lados, y *perímetro* la medida del contorno.

60. *Diagonal* es la recta que une dos vértices no contíguos á un lado.

En la figura 10, ABCDE es un polígono; AB, BC...., son sus lados; ABC, BCD.... sus ángulos, y AC, AD sus diagonales.

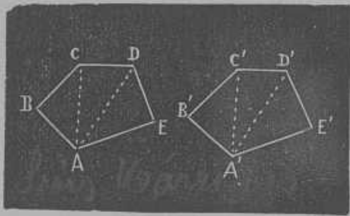

Figura 10

Angulos externos de un polígono son los formados por cada lado y la prolongacion de su consecutivo.

61. Dos polígonos son *iguales* cuando superpuestos coinciden; para que esto suceda basta evidentemente que tengan sus lados y ángulos respectivamente iguales é igualmente dispuestos.

En efecto, sean

AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D'..... (fig. 10),

∠ ABC = ∠ A'B'C', ∠ BCD = ∠ B'C'D'.

Trasportándose el polígono ABCDE sobre el A'B'C'D'E' de manera que AB, por ejemplo, se confunda con A'B'; BC se confundirá con B'C', por ser ∠ ABC = ∠ A'B'C';

El [.] C se confundirá con el [.] C', por ser BC = B'C'

CD se confundirá C'D', y así se seguirá hasta haber llegado á los puntos E y E' que tambien coincidirán.

62. *Polígono equilátero* es el que tiene sus lados iguales; polígono *equiángulo* es el que tiene iguales sus ángulos, y *regular* el que tiene iguales unos y otros.

63. *Línea quebrada regular* es toda línea quebrada convexa siempre en un mismo sentido, cuyos lados y ángulos son iguales.

64. *Triángulo* es un polígono de tres lados; base es uno cualquiera de éstos, y entónces se llama *vértice* al opuesto, y será su *altura* la perpendicular, bajada desde el vértice á la base.

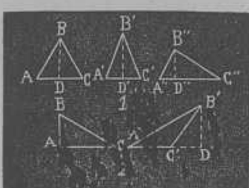

Figura 11.

En la figura 11, siendo AC la base, será B vértice y BD la altura.

65. Por razon de sus lados se dividen los triángulos en *equiláteros*, *isósceles* y *escalenos*, segun sean los tres lados iguales, dos solamente ó ninguno.

El △ ABC es equilátero,

El △ A'B'C' es isósceles,

El △ A''B''C'' es escaleno (fig. 11,1).

66. Por razon de sus ángulos, se dividen los triángulos en *rectángulos*, *obtusángulos* y *acutángulos*, segun tengan un ángulo recto, uno obtuso ó los tres agudos.

El △ ABC es rectángulo; el △ A'B'C' es obtusángulo (fig. 11,2).

67. *Cuadrilátero* es el polígono de cuatro lados. Se divide en *trapezoíde*, *trapecio* y *paralelógramo*, segun no tenga ningun lado paralelo á otro, tenga dos y otros dos no, ó los tenga paralelos dos á dos.

68. El *paralelógramo* se divide en *rombóide*, *rombo*, *rectángulo* y *cuadrado*.

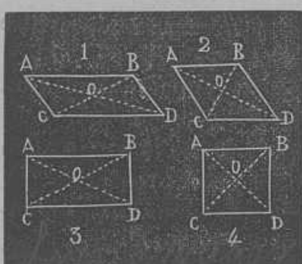

Figura 12.

Rombóide es el paralelógramo que tiene *desiguales* los lados contiguos á un ángulo y los ángulos contíguos á un lado (fig. 12,1).

Rombo es el paralelógramo que tiene *iguales* los lados contíguos á un ángulo, y *desiguales* los ángulos contíguos á un lado (fig. 12,2).

Rectángulo es el paralelógramo que tiene *desiguales* los lados contíguos á un ángulo, é *iguales* los ángulos contíguos á un lado (fig. 12,3).

Cuadrado es el paralelógramo que tiene *iguales* los lados contíguos á un ángulo, é *iguales* los ángulos contíguos á un lado (fig. 12,4).

§ 4.º—Circunferencia.

69. *Circunferencia* es una curva plana cerrada, cuyos puntos equidistan de uno interior llamado *centro*.

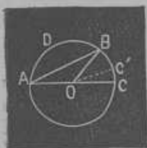

Figura 13.

70. *Arco* es una parte cualquiera de la circunferencia.

71. *Rádio* es la recta limitada que une el centro con la circunferencia; AO, y OB son rádios (fig. 13).

72. *Cuerda* es la recta limitada que une dos puntos de la circunferencia; AB es una cuerda (fig. 13).

73. *Diámetro* es toda cuerda AC que pasa por el centro.

74. *Círculo* es la porcion de plano comprendida ó limitada por la circunferencia.

75. *Sector* es la parte de círculo comprendida entre dos rádios y un arco.

OABDO es un sector circular (fig. 13).

76. *Segmento* es la parte de círculo comprendida entre una cuerda y un arco.

77. *Circunferencias concéntricas* son las que tienen un mismo centro, y *excéntricas* las que lo tienen distinto.

78. *Corona* ó *anillo* es la parte del círculo comprendida entre dos circunferencias concéntricas.

79. Corolarios: 1.° *El diámetro divide á la circunferencia en dos partes iguales, llamadas semicircunferencias,* pues doblando la mitad inferior AEC (fig. 13), por ejemplo, por el diámetro, tendrá que superponerse con la superior ADC, sin lo cual habria puntos desigualmente distantes del centro, lo que es contra la definicion.

Recíproco.—*Si* ADBC *y* AEC *son semicircunferencias,* AO *y* OC *están en línea recta, ó forman un diámetro,* pues si OC no fuese prolongacion de AO, lo sería, por ejemplo, OC′, y entónces, segun el directo ADBC′, sería una semicircunferencia, y por consiguiente, seria igual á ADBC, lo cual es un absurdo, miéntras OC no se confunda con la prolongacion de AO.

Corolario 1.°—*Si una recta no es diámetro, no divide á la circunferencia en partes iguales;* pues *si la dividiera en dos partes iguales,* sería diámetro, segun el directo, lo que es *contra la hipótesis.*

2.° *Si una recta no divide á una circunferencia en dos partes iguales, no es diámetro*, pues *si fuera diámetro*, la dividiría en dos partes iguales, lo cual es *contra la hipótesis*.

Corolario 2.°—*Dos circunferencias ó dos círculos de rádios iguales, son iguales*, pues superpuestas aquéllas, de manera que coincidan sus centros, tienen que coincidir todos los puntos de la una con los de la otra, sin lo cual, habría puntos que distarían desigualmente del centro, *en contradiccion con la hipótesis*.

Corolario 3.°—*Todo punto que se halle en una circunferencia, ó sea exterior á ella, ó interior, distará del centro una longitud que es igual, mayor ó menor que el rádio*, respectivamente, pues si el punto es interior, tendrá que prolongarse su distancia hasta encontrar á la circunferencia, y si es exterior, la recta que lo una al centro tendrá que encontrar á la circunferencia, y por consiguiente, excederá al rádio en el segmento exterior.

Observacion.—El **recíproco** se demuestra *ad absurdum*.

80. Una recta es *tangente* á una circunferencia, ó ésta á aquélla, cuando sólo tienen un punto comun. Cuando tienen más de un punto comun (1), son *secantes*. AB es tangente á la circunferencia O en el [.] P de contacto (fig. 14).

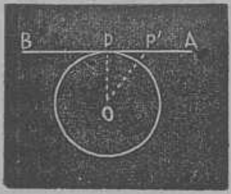

Figura 14.

81. Se llama *normal*, la perpendicular á la tangente en el punto de contacto.

82. La posicion relativa de un ángulo y una circunferencia da lugar á los casos siguientes:

Cuando el vértice es exterior á la circunferencia: 1.° Si los lados son tangentes, el ángulo se llamará *circunscrito*

(1) Más adelante se demostrará que una recta y una circunferencia, así como dos circunferencias, no pueden tener más de dos puntos comunes.

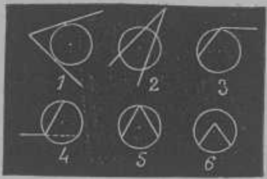

Figura 15.

(fig. 15,1), ó la circunferencia estará *inscrita* en el ángulo. 2.° Si los lados son secantes, el ángulo se llamará *exterior secante* (fig. 15,2).

Cuando el vértice se halla en la circunferencia: 1.° Si los lados son una tangente y una cuerda el ángulo, se llama *semi-inscrito* (figura 15,3). 2.° Si son una cuerda y la prolongacion de otra, *ex-inscrito* (fig. 15,4). 3.° Si son dos cuerdas, *inscrito* (fig. 15,5).

Cuando el vértice es interior á la circunferencia: 1.° Si el ángulo no tiene su vértice en el centro, se llama *interior excéntrico* (fig. 15,6). 2.° Si tiene su vértice en el centro, se llamará *central*, y entónces se llama *arco correspondiente* á dicho ángulo, al arco de la circunferencia comprendido por sus lados.

83. Un polígono está *inscrito* en una circunferencia, ó ésta *circunscrita* á aquél, cuando los vértices del polígono se hallan en la circunferencia y sus lados son cuerdas. El cuadrado ABCD está inscrito en la circunferencia *o* (fig. 16).

Figura 16.

84. Un polígono está *circunscrito* á una circunferencia, ó una circunferencia *inscrita* á un polígono, cuando los lados son tangentes de la misma. El △ ABC está circunscrito á la circunferencia O (fig. 17).

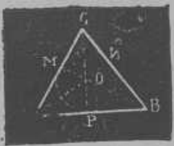

Figura 17.

85. Un polígono se llamará *inscrito* respecto de otro, cuando sus vértices se hallen situados en los lados de éste,

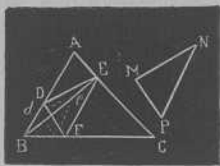

Figura 18.

que se dirá *circunscrito* á aquél. El △ DEF está inscrito en el △ ABC (figura 18).

86. Dos circunferencias en un plano pueden ser *exteriores*, *tangentes exteriormente*, *secantes*, *tangentes interiormente* ó *interior* la una á la otra (fig. 19).

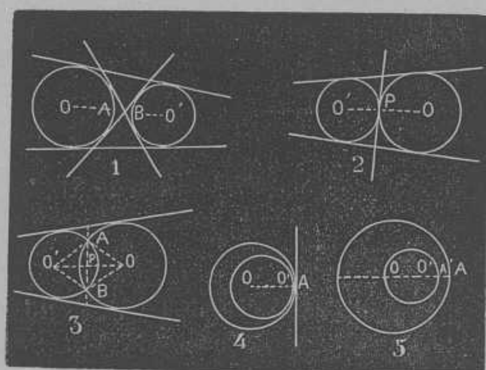

Figura 19.

LIBRO II

PRINCIPIOS DE LA EXISTENCIA, DETERMINACION

y sustituciones geométricas.

I.—EXISTENCIA Y DETERMINACION DE LAS FIGURAS RECTILÍNEAS.

§ 1.º—Determinacion de los triángulos.

TEOREMA. 1º

87. *Dos $\triangle^s$ que tienen respectivamente iguales un $\angle$ y los $|^{os}$ que lo forman*, SON IGUALES.

Hipótesis.— En los $\triangle^s$ ABC y A'B'C' (fig. 20), se tiene:

$$|^{o}\,AB = |^{o}\,A'B',\quad |^{o}\,AC = |^{o}\,A'C',\quad \angle A = \angle A'.$$

Tésis.—Serán iguales el *lado* y los *ángulos* restantes.

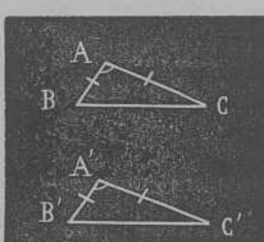

Figura 20.

Demostracion.—Si se coloca el $\triangle$ A'B'C' sobre el $\triangle$ ABC, de modo que el $|^{o}$ A'C' coincida con el $|^{o}$ AC, los $|^{os}$ AB y A'B' coincidirán tambien, por ser el

$$\angle A = \angle A',$$

y las extremidades B y B' de dichos $|^{os}$ coincidirán, por ser

$$|^{o}\,AB = |^{o}\,A'B'.$$

En fin, como los $[.]^s$ B y C coinciden respectivamente con los B' y C', las $|^{as}$ que los unen tambien se confundirán, y por consiguiente, los $\triangle^s$ propuestos.

COROLARIO.

88. *En un* $\triangle$, *á* |*os iguales*, SE OPONEN $\angle^s$ IGUALES.

Hipótesis.— |° AB = |° AC (figura 21).

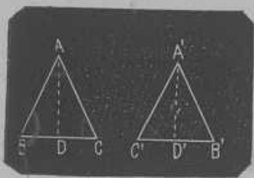

Figura 21.

Tésis.— $\angle$ B = $\angle$ C.

Demostracion.—Considerando el $\triangle$ A'B'C' que resulta de invertir el $\triangle$ ABC, de modo que el |° AB esté representado por el |° A'B' y el |° AC esté representado por el |° A'C', se tendrá:

$\angle$ A = $\angle$ A' (por pertecer á la misma figura invertida).

Además:

$$\left.\begin{array}{l} |^\circ AB = |^\circ AC \ \text{(hipótesis)} \\ |^\circ AB = |^\circ A'B' \ \text{(construccion)} \end{array}\right\} \text{luego } |^\circ AC = |^\circ A'B'$$

$$\left.\begin{array}{l} |^\circ AC = |^\circ AB \ \text{(hipótesis)} \\ |^\circ AC = |^\circ A'C' \ \text{(construccion)} \end{array}\right\} \text{luego } |^\circ AB = |^\circ A'C'$$

luego los $\triangle^s$ ABC y A'B'C' serán iguales (teorema).

$$\text{luego} \left\{\begin{array}{l} \angle B' = \angle C \ \text{(por ser iguales los } \triangle^s) \\ \angle B' = \angle B \ \text{(por construccion);} \end{array}\right.$$

luego $\angle$ B = $\angle$ C.

TEOREMA. 9°

89. *Dos* $\triangle^s$ *que tienen respectivamente iguales un* |° *y los* $\angle^s$ *adyacentes*, SON IGUALES.

Hipótesis. — |° BC = |° B'C', $\angle$ B = $\angle$ B', $\angle$ C = $\angle$ C' (1).

Demostracion. — Despues de colocarse el $\triangle$ A'B'C' (figura 20) de modo que B'C' se confunda con BC, y hácia la parte superior de la figura, lo que puede hacerse por ser BC = B'C', se tendrá que:

$$\left.\begin{array}{l} |^\circ B'A' \text{ coincide con } |^\circ BA \\ |^\circ C'A' \text{ coincide con } |^\circ CA \end{array}\right. \text{(por ser } \angle B = B' \text{ y } \angle C = \angle C'$$

luego tambien coincidirán sus intersecciones comunes A y A'.

(1) Puede tomarse como hipótesis la igualdad de cualquier otro de los lados y de sus ángulos adyacentes.

COROLARIO.

90. *En un* $\triangle$, Á $\angle^{s}$ IGUALES SE OPONEN $|^{os}$ IGUALES.

Hipótesis.—$\angle B = \angle C$.

Demostracion. — Considerando, como en el corolorio anterior, el $\triangle A'B'C'$ (fig. 21) resultante de invertir el $\triangle ABC$, se tendrá:

$|^{\circ} BC = |^{\circ} B'C'$ (por pertenecer á la misma figura invertida)

$$\left.\begin{array}{l} \angle B = \angle C \text{ (hipótesis)} \\ \angle B = \angle B' \text{ (construccion)} \end{array}\right\} \text{luego } \angle C = \angle B';$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle C = \angle B \text{ (hipótesis)} \\ \angle C = \angle C' \text{ (construccion)} \end{array}\right\} \text{luego } \angle B = \angle C';$$

luego los $\triangle^{s}$ ABC y A'B'C' serán iguales (teor.);

$$\text{luego} \left\{\begin{array}{l} |^{\circ} A'B' = |^{\circ} AC \text{ (por ser iguales los } \triangle^{s}) \\ |^{\circ} A'B' = |^{\circ} AB \text{ (por construccion);} \end{array}\right.$$

luego $|^{\circ} AC = |^{\circ} AB$.

PROPIEDADES DEL $\triangle$ ISÓSCELES.

91. 1.° La *recta* que une el vértice con el *punto medio* de la base { es *perpendicular* á ésta y *bisectriz* del $\angle A$ (fig. 21).

2.° La *perpendicular* á la base { pasa por el *punto medio* de ésta y es *bisectriz* del $\angle A$.

3.° La *bisectriz* del $\angle A$ { es *perpendicular* á la base, y pasa por el *punto medio* de ésta.

Demostracion. — Considerando, como anteriormente, el $\triangle A'B'C'$ que resulta de colocar invertido el $\triangle ABC$ (figura 21), se verá inmediatamente que los *puntos medios* de las bases, ó las *perpendiculares* á éstas, (51, *consec*) ó las *bisectrices* del $\angle$ del vértice, se confunden en las dos figuras. Y cualquiera de estos resultados, dará orígen á alguno de los siguientes razonamientos:

$$\left.\begin{array}{l} 1.^{\circ}\ \angle C'D'A' \text{ ó } \angle CDA \\ \quad = \angle BDA \ldots\ldots \\ 2.^{\circ}\ \angle C'A'D' \text{ ó } \angle CAD \\ \quad = \angle BAD \ldots\ldots \\ 3.^{\circ}\ |^{a} C'D' \text{ ó } |^{a} CD \\ \quad = |^{a} BD \ldots\ldots \end{array}\right\} \text{luego} \left\{\begin{array}{l} 1.^{\circ} \text{ Los } \angle^{s} BDA \text{ y } CDA \\ \quad \text{son } \textit{rectos}. \\ 2.^{\circ} \text{ AD es } \textit{bisectriz} \text{ del} \\ \quad \angle A. \\ 3.^{\circ} \text{ D es el } \textit{punto medio} \\ \quad \text{de BC.} \end{array}\right.$$

TEOREMA. 3°

92. *Si dos △ˢ tienen sus tres* | ᵒˢ *respectivamente iguales*, SERÁN IGUALES.

Hipótesis. — $|^{\circ} AB = |^{\circ} A'B'$, $|^{\circ} AC = |^{\circ} A'C'$, $|^{\circ} BC = |^{\circ} B'C'$.

Construcciones auxiliares.—Colóquese el △ A′B′C′ (figura 22) de modo que el $|^{\circ} A'C'$ se confunda con el $|^{\circ} AC$, lo cual puede hacerse por ser iguales, segun la hipótesis, y además que el vértice B″ caiga á distinto lado que el B, respecto á la base AC. Únanse, en fin, B y B″ por la $|^{a} BPB''$.

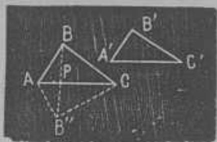

Figura 22.

Demostracion.

$$\left.\begin{array}{l} |^{\circ}AB = |^{\circ}A'B' = |^{\circ}AB'' \\ |^{\circ}CB = |^{\circ}C'B' = |^{\circ}CB'' \end{array}\right\}\text{por hipótesis y construccion.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle ABB'' = \angle AB''B \\ \angle B''BC = \angle BB''C \end{array}\right\}(88);$$

luego $\angle ABB'' + \angle B''BC = \angle AB''B + \angle BB''C$,

ó $\angle ABC = \angle AB''C = \angle A'B'C'$.

Los △ˢ ABC y A′B′C′ tienen, pues, un ∠ igual comprendido entre | ᵒˢ iguales, y por consiguiente, son iguales (87).

§ 2.°—Extension de la determinacion de los triángulos á la determinacion de los polígonos.

TEOREMA.

93. *Si dos polígonos se componen de igual número de △ˢ iguales é igualmente dispuestos*, SON IGUALES, y **recíprocamente** *si dos polígonos son iguales*, PUEDEN DESCOMPONERSE EN IGUAL NÚMERO DE △ˢ IGUALES É IGUALMENTE DISPUESTOS.

1.° **Hipótesis.**—△ ABC ≅ △ A′B′C′, △ ACD ≅ △ A′C′D′, △ ADE ≅ △ A′D′E′ (fig. 10).

Demostracion.

$|^{\circ}\, AB = |^{\circ}\, A'B'$, $|^{\circ}\, BC = |^{\circ}\, B'C'$
$|^{\circ}\, CD = |^{\circ}\, C'D'$, $|^{\circ}\, DE = |^{\circ}\, D'E'$.....,

por ser

$\triangle\, ABC \cong \triangle\, A'B'C'$, $\triangle\, ACD \cong \triangle\, A'C'D'$.....;
$\angle\, ABC = \angle\, A'B'C'$ (por ser $\triangle\, ABC \cong \triangle\, A'B'C'$),

$$\left.\begin{array}{l} \angle\, BCA = \angle\, B'C'A' \text{ (por ser } \triangle\, ABC \cong \triangle\, A'B'C') \\ \angle\, ACD = \angle\, A'C'D' \text{ (por ser } \triangle\, ACD \cong \triangle\, A'C'D') \end{array}\right\};$$

pero $\angle\, BCD = \angle\, BCA + \angle\, ACD$
$\angle\, B'C'D' = \angle\, B'C'A' + \angle\, A'C'D'$;

luego $\angle\, BCD = \angle\, B'C'D'$,
y así se continuará para los demás $\angle^{s}$.

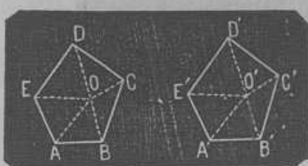

Figura 23.

2.° **Construccion.** —Despues de tomar arbitrariamente un [.] O y unirlo con A, B,.... trácese sobre A′B′ como base, un $\triangle\, A'O'B' \cong \triangle\, AOB$, y únase el punto, así determinado, con los vértices A′,B′,C′...

Demostracion.

$BC = B'C'$ (por hipótesis)
$OB = O'B'$ (por ser $\triangle\, AOB \cong A'O'B'$)

$$\angle\, OBC = \angle\, O'B'C' \text{ (por ser } \left\{\begin{array}{l} \angle\, ABC = \angle\, A'B'C' \text{ (hipótesis)} \\ \angle\, ABO = \angle\, A'B'O' \text{ (por deduccion)}; \end{array}\right.$$

luego $\triangle\, OBC \cong \triangle\, O'B'C'$ (87).

De igual manera se deducirá la igualdad de los demás $\triangle^{s}$.

§ 3.°—Sistemas de las rectas no concurrentes ó paralelas.

94. **Principio de la existencia.**—*Por un* [.] SE PUEDE TRAZAR Á UNA $|^{a}$ UNA PARALELA.

Para demostrarlo, basta probar que: *dos rectas perpendiculares á otra*, SON PARALELAS, lo cual se concluye *ad absurdum*, pues si se encontrasen, habría trazadas por el [.] de encuentro dos $\|^{as}$ á una $|^{a}$, lo que es absurdo, y, por consiguiente, que se encuentren dichas $|^{as}$; luego no pueden encontrarse, es decir, son $\|^{as}$.

95. **Principio de determinacion.** — *Por un* [.], SÓLO PUEDE TRAZARSE UNA $\|^{a}$ *á una* $|^{a}$.

Este es el *postulado* de la Geometría euclidiana.

COROLARIOS.

96. *Toda secante cualquiera, secante* $\perp$ *ó* $\|^{a}$ *á una* $|^{a}$, LO SERÁ IGUALMENTE Á SUS $\|^{as}$.

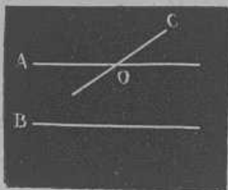

Figura 24.

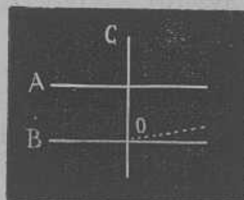

Figura 25.

Demostracion.—1.° Si la secante C (fig. 24) á una de las $\|^{as}$ A, no lo fuese á la otra B, le sería $\|^{a}$, y por el [.] O habría dos $\|^{as}$ á una $|^{a}$.

2.° Si la $\perp$ C á la A (fig. 25) no lo fuese á la B, le sería oblícua (paralela no puede ser, 1.°), y ésta lo sería á aquélla; y trazándose por *o* una $\perp$ á la C, sería $\|^{a}$ á la A (94), y habría por *o* dos $\|^{as}$ á la $|^{a}$ A, pues dicha perpendicular y la oblicua B no podrían confundirse.

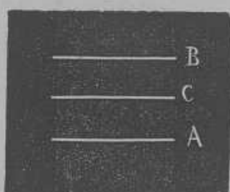

Figura 26.

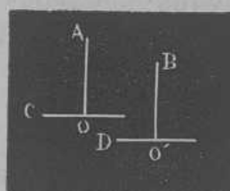

Figura 27.

3.° Si C es $\|^{a}$ á A, lo será á su $\|^{a}$ B (fig. 26), pues si no lo fuese, la encontraría, y por el [.] de encuentro habría dos $\|^{as}$ á una $|^{a}$.

4.° *Dos paralelógramos que tienen iguales un* ∠ *y los* | ^os^ *que lo forman*, SON IGUALES.

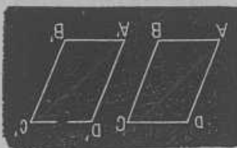

Figura 28.

Hipótesis.— | ° AB = | ° A'B', ∠ A = ∠ A', | ° AD = | ° A'D' (figura 28).

Demostracion. — Superponiendo el □ A'B'C'D' al ABCD de manera, que el | ° A'B' se confunda con el | ° AB; el | ° A'D' se confundirá con | ° AD, por ser ∠ A' = ∠ A (hipótesis) y el [.] D' con el [.] D, por ser | ° AD = | ° A'D' (hipótesis), y como *por un* [.] *sólo puede trazarse una* ∥ ^a^ *á una* | ^a^, los | ^os^ D'C' y B'C' se confundirán con los DC y BC.

Extension del corolario 2.°—*Si dos* | ^as^ *son* ∥ ^as^, SUS ⊥^s^ RESPECTIVAS TAMBIEN LO SERÁN.

Demostracion.—Siendo OB ⊥ á OD (fig. 27), lo será á OC (96, 2.°); luego A y B serán ∥ ^as^ (94).

Contrario.—*Si dos* | ^as^ *no son* ∥ ^as^, SUS ⊥^s^ RESPECTIVAS TAMPOCO LO SERÁN, pues si éstas fuesen ∥ ^as^, sus ⊥^s^ lo serían, lo cual es contra la hipótesis.

II.—TRANSFORMACIONES Ó SUSTITUCIONES DE UNAS ESPECIES DE RELACIONES EN OTRAS.

§ 1.°—Transformacion ó sustitucion de las relaciones angulares por relaciones de paralelismo.

TEOREMA.

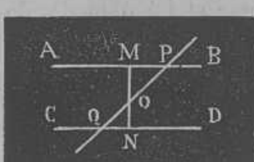

Figura 29.

97. *Si dos* | ^as^ *cortadas por otra, forman cada una con ésta* ∠^s^ *iguales ó suplementarios*, SERÁN ∥ ^as^ y **recíprocamente**.

1.° **Hipótesis**.

∠ APQ = ∠ PQD. (fig. 29).

Construcciones auxiliares.

Tomar el [.] medio de PQ que . . .	$\equiv$	introducir dos $|^{as}$ iguales (OP = QO)
Trazar por el [.] *o* la $|^{a}$ MN $\perp$ á una de las propuestas (AB por ejemplo) que...	$\equiv$	introducir dos $\angle$s opuestos por el vértice (MOP = NOQ) y un $\llcorner$ en uno de los $\triangle$s OMP y ONQ,

y así la demostracion se reduce á probar que: dicho $\llcorner$ es igual á su correspondiente del otro $\triangle$, y por consiguiente, que las dos $|^{as}$ AB y CD son $\perp^{s}$ á la MN.

Demostracion.—De las construcciones combinadas con la hipótesis de ser iguales los $\angle^{s}$ APQ y PQD, resulta

$$\triangle \text{MOP} \cong \triangle \text{NOQ (89)} \quad (1);$$

luego $\angle$ OMP = $\angle$ ONQ;
pero el $\angle$ OMP es $\llcorner$ (construccion);
luego el $\angle$ ONQ tambien es $\llcorner$;
luego las $|^{as}$ AB y CD $\perp^{s}$ á MN, son $\|^{as}$ (94).

Escolio.—Las hipótesis $\angle$ 2 = $\angle$ 6; $\angle$ 1 = $\angle$ 8, etcétera (fig. 9.ª), se reducen inmediatamente á la anterior de ser iguales los $\angle^{s}$ alternos internos agudos, pues si se tratase de $\angle^{s}$ obtusos iguales, conducirían á la igualdad de sus suplementos agudos, y la igualdad de los $\angle^{s}$ 3 y 6 ó 4 y 5, por ejemplo, conduce inmediatamente á la de sus opuestos por el vértice 2 y 7 ó 1 y 8. Las mismas indicaciones se aplican al caso de sustituciones de $\angle^{s}$ suplementarios.

2.° **Recíprocamente.**—*Dos rectas* $\|^{as}$ *cortadas por otra,* FORMAN CON ÉSTA $\angle^{s}$ IGUALES Ó SUPLEMENTARIOS.

Hipótesis.—AB $\|^{a}$ á CD (fig. 29).

Construcciones auxiliares.—Tomar el [.] *o* medio de PQ, que $\equiv$ á introducir dos $|^{as}$ iguales.

Trazar, por el [.] o, la $|^{a}$ MN $\perp$ á AB, que será tambien $\perp$ á CD.

Demostracion.—De las construcciones, combinadas con

---

(1) El $\angle$ QON = $\angle$ POM y OP = OQ por construccion, y el $\angle$ OQN = $\angle$ OPM por hipótesis.

la hipótesis de ser AB $\|^{a}$ á CD que $\equiv$ á la igualdad de los $\angle^{s}$ PMO y QNO como rectos (51, 2°), resulta

$$\triangle\, MOP \cong \triangle\, NOQ,$$

cuya superposicion se establece inmediatamente (1);

luego $\triangle\, APQ = \triangle\, PQD.$

luego $\angle\, APQ = \angle\, PQD.$

Escolio.—La igualdad de dos ángulos distintos de APQ y PQD, ó el ser suplementarios, se reduce al caso demostrado, ya porque sean opuestos por el vértice, ya porque tengan suplementos iguales.

Observacion.—Se suelen enunciar estos teoremas diciendo que: *si dos rectas paralelas se hallan cortadas por una secante*, LOS ÁNGULOS CORRESPONDIENTES, LOS ALTERNOS-INTERNOS Y LOS ALTERNOS-EXTERNOS SON IGUALES, Y LOS INTERNOS DE UN MISMO LADO DE LA SECANTE SON SUPLEMENTARIOS, y **recíprocamente**.

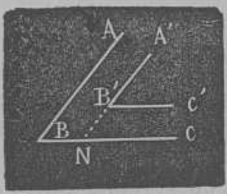

Figura 30.

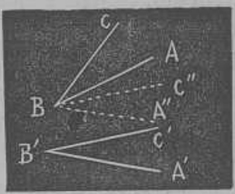

Figura 31.

COROLARIOS.

98. 1.° *Los* $\angle^{s}$ *que tienen sus lados respectivamente* $\|^{os}$, SON IGUALES Ó SUPLEMENTARIOS.

Demostracion.—Prolongando el lado A′B′ (fig. 30), se tiene

$$\angle\, A'B'C' = \angle\, A'NC\ (97{,}2.°) = \angle\, ABC\ (97{,}2.°).$$

Si uno de los lados se tomára segun su prolongacion, se obtendrían ángulos suplementarios en vez de iguales.

(1) Haciendo girar el $\triangle$ MOP alrededor de O, hasta que OP se confunda con OQ; la $|^{a}$ OM se confundirá con ON, y la direccion de PA con la de QD, porque por un [.] solo puede trazarse una $\perp$ á una $|^{a}$.

2.° *Si dos* $|^{as}$ *forman* $\angle^{s}$ *iguales ó suplementarios con respecto á cada una de otras dos*, FORMARÁN TAMBIEN ÁNGULOS IGUALES Ó SUPLEMENTARIOS ENTRE SÍ.

Hipótesis.—$\angle$ BA, B′A′ = ó suplementario con $\angle$ BC, B′C′ (fig. 31).

Construccion.—Trácense por B las $|^{as}$ BC″ y BA″ $\|^{as}$ á B′C′, y B′A′, respectivamente.

Demostracion.

$$\left.\begin{array}{l}\angle ABC = \angle A''BC - \angle A''BA \\ \angle A''BC'' = \angle A''BC - \angle C''BC\end{array}\right\} \text{luego}$$

$$\angle ABC = \angle A''BC''$$

$$\text{porque}\left\{\begin{array}{l}\angle A''BA = \angle BA, B'A' \\ \angle C''BC = \angle BC, B'C'\end{array}\right\} (87,\ 2^{o})$$

y $\angle$ BA, B′A′ = $\angle$ BC, B′C′ (por hipótesis).

Observacion.—La 2.ª parte del teorema queda demostrada, considerando en vez de uno de los lados de un $\angle$, su prolongacion.

Corolario 3.° *Si dos* $\angle^{s}$ *tienen sus* $|^{os}$ *respectivamente* $\perp^{es}$, SON IGUALES Ó SUPLEMENTARIOS. (figura 32.)

Demostracion.—Este es un caso del corolario anterior, pues los lados de cada $\angle$ forman $\angle^{s}$ iguales con respecto á cada lado del otro.

La demostracion puede hacerse, pues, repitiendo el razonamiento anterior.

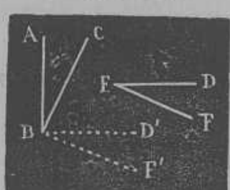

Figura 32.

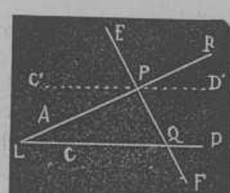

Figura 33.

TEOREMAS CONTRARIOS.

99. *Si las* $|^{as}$ AB y CD *cortadas por la* EF (fig. 33) *no forman con ésta* $\angle^{s}$ *iguales ó suplementarios, no serán* $\|^{as}$, y **recíprocamente**.

1.º Hipótesis.—$\angle^s$ APQ y PQD, por ejemplo, no son iguales.

Construccion.—Trácese la |ª C′PD′ que forme con EF′

$\angle$ C′PQ=$\angle$PQD

Demostracion. Si AB fuese ||ª á CA, se tendría que

$\angle$ APQ = $\angle$ PQD

y además por la construccion,

$\angle$ C′PQ = $\angle$ PQD;

luego $\angle$ APQ = $\angle$ C′PQ,

lo que es absurdo; luego AB y CD no son ||as.

2.º **Hipótesis.**— |as AB y CD no son ||as.

Construccion.—Trácese la |ª C′PD′ ||ª á CD.

Demostracion.—Si la secante formase con AB y CD los $\angle^s$ BPQ, PQC iguales, se tendría

BA ||ª á CD

y además, por la construccion,

D′C′ ||ª á DC

luego por el [.] habría dos ||as á una |a, lo cual es absurdo (95); luégo los $\angle^s$ BPQ y PQC son desiguales.

COROLARIOS.

100. 1.º *Las |es AB y CD se encuentran hácia el lado donde la suma de los $\angle^s$ internos de un mismo lado de la secante es inferior á 2 ∟s.*

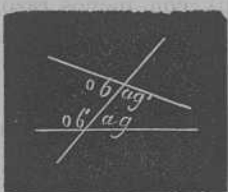

Figura 34.

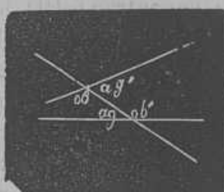

Figura 35.

Tratándose del caso en que la suma de los $\angle^s$ internos de un mismo lado de la secante sea diferente de 2 ∟s; como entre éstos y los del otro lado valen 4 ∟s, es evidente que, si los de un lado exceden á 2 ∟s, los del otro, en compensacion, serán excedidos de dicha suma.

Sólo dos casos ocurren, segun que los ∠s situados al lado de la menor suma, sean los dos agudos ó uno agudo y otro obtuso.

En el primer caso, se tienen las relaciones siguientes, entre los ∠s alternos-internos (fig. 34),

$$ag' < ob' \qquad ag < ob.$$

En el segundo caso, se observa, desde luégo, que los ∠s alternos-internos han de ser de igual especie, sin lo cual, en una de las rectas se juntarían dos ∠s adyacentes obtusos y en la otra dos agudos, lo cual es imposible. (51,3.°) Además, se tendrá (fig. 35),

$$ob < ob' \qquad ag < ag',$$

pues si ob', por ejemplo, fuese $<$ ob, en compensacion tendría que ser su adyacente ag $>$ ag', de lo que resultaría

$$ob + ag > ob' + ag',$$

lo cual es contra la hipótesis.

En virtud de este razonamiento, si por el [.] P (fig. 33), y hácia el lado de la mayor suma de los ∠s internos á un lado de la secante, se traza la ‖ª PD' á CD, se tendrá

$$\angle\ BPQ > \angle\ PQC \text{ y } \angle\ D'PQ = \angle\ PQC \text{ (97, 2.°)}$$

y, por consiguiente,

$$\angle\ BPQ\ \angle > D'PQ,$$

luego PD' se halla en el interior del ∠ BPQ; y como PD' no puede encontrar á PD (construccion), con ménos razon la encontrará á PB; pero AB y CD se encuentran por hipótesis; luego se encontrarán hácia el otro lado, es decir, el de menor suma de ∠s internos.

2.° En el lado del encuentro se formará un △. Al otro lado, cada ∠, no sólo excede á cualquiera de los del △, no adyacentes á él, sino que es igual á su suma. Así, por ejemplo, (figura 33):

$$\angle\ BPQ = \angle\ BPD' + \angle\ D'PQ = \angle\ BLD + \angle\ PQC \text{ (97, 2.°)},$$

pero ∠ BPQ + ∠ QPL = 2 ∟s (51,3.°);

luego: *La suma de los ∠s de un △ es igual á 2 ∟s.*

3.° Tambien resulta, que: *Desde un punto* Q (fig. 33) *no se puede trazar á una recta* AB *más que una recta que* *forme un* $\angle$ *dado* (1) *con ella*, pues formarán respectivamente con ésta un $\angle$ interno y un externo de un $\triangle$.

4.° Esta propiedad se extiende á cualquier polígono, de manera que, *la suma de los* $\angle^s$ *de un polígono vale tantas veces* 2 $\llcorner^s$, *como lados tiene el polígono, ménos dos.*

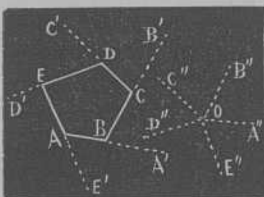

Figura 35.

Construccion.—Trácense por un punto o (fig. 36), las $\|^{as}$ OA'', OB'' .... á las prolongaciones BA', CB'....... de los $|^{os}$ del polígono, y en la misma direccion de cada una.

Demostracion.—La suma de los $\angle^s$ alrededor del punto o, es decir, de los $\angle^s$ exteriores del polígono es igual á 4 $\llcorner^s$.

Además, en cada vértice,

$$\angle \text{ ext.}^\circ + \angle \text{ int.}^\circ = 2 \llcorner^s;$$

luego $S_i + S_e = 2 \llcorner\, n$ (2) (expresando n el número de lados del polígono); y como $S_e = 4 \llcorner^s$, resultará

$$S_i = 2 \llcorner\, n - 4 \llcorner = 2 \llcorner\, (n-2).$$

§ 2.°—Transformacion de las relaciones angulares y de posicion en relaciones de magnitud lineal, mediante la consideracion del triángulo.

TEOREMA.

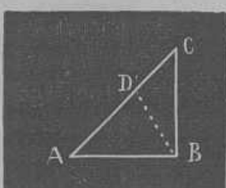

Figura 37.

101. *En un* $\triangle$, *á mayor* $|^\circ$ SE OPONE MAYOR $\angle$, y **recíprocamente.**

1.° **Hipótesis.**— $|^\circ$AC > $|^\circ$AB (fig. 37.)

Construccion.--Tómese AD=AB y trácese DB.

---

(1) Los $\angle^s$ se consideran formados hácia un mismo lado de la $|^a$BA

(2) S_i y S_e expresan las sumas de los $\angle^s$ interiores y exteriores.

Demostracion.—$\angle ADB > \angle C$ (100, 2°);
$\angle ADB = \angle ABD$ (88);
pero $\angle ABC > \angle ABD$;
luego $\angle ABC > \angle C$.

2.° **Hipótesis.** — $\angle ABC > \angle C$.

Tésis.— $|^{\circ} AC > |^{\circ} AB$.

Demostracion *(ad absurdum).*

Si no fuese $|^{\circ} AC > |^{\circ} AB$,
se tendría: $|^{\circ} AC = |^{\circ} AB$, ó $|^{\circ} AC < |^{\circ} AB$;
luego $\angle C = \angle ABC$ (88) ó $\angle C < \angle ABC$ (1°),
resultando cualquiera de estas conclusiones contra la hipótesis.

Observacion.—Estos dos teoremas pueden demostrarse *ad absurdum* porque se demostraron ya, el directo y recíproco (88,90).

TEOREMA.

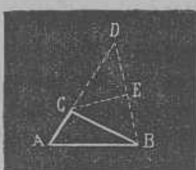

Figura 38.

102. *En todo* $\triangle$, UN LADO ES MENOR QUE LA SUMA DE LOS OTROS DOS (fig. 38).

Construccion.–Prolónguese el $|^{\circ} CA$ del $\triangle$ propuesto ABC en una longitud $CD = CB$ y trácese DB.

Demostracion.—Se tendrá en el $\triangle$ isósceles DCB,
$\angle CDB = \angle CBD$;
luego $\angle ABD$ que es $> \angle CBD$ dá $\angle ABD > \angle CDB$;
luego $|^{\circ} AD > |^{\circ} AB$, ó $|^{\circ} AC + |^{\circ} CB > |^{\circ} AB$,
pues $|^{\circ} CD = |^{\circ} CB$ (90)

Observacion.—Tambien: *En un* $\triangle$, UN $|^{\circ}$ ES MAYOR QUE LA DIFERENCIA DE LOS OTROS DOS, pues de la desigualdad última se deduce, por ejemplo, $|^{\circ} AC > |^{\circ} AB - |^{\circ} CB$, ó $|^{\circ} CB > |^{\circ} AB - |^{\circ} AB$.

COROLARIO.

103. 1.° *En un polígono*, UN $|^{\circ}$ ES MENOR QUE LA SUMA DE LOS DEMÁS.

Construccion.—Trácense por un vértice A (fig. 10) las diagonales del polígono.

Demostracion.

$$AB < AC + CB \ (102)$$
$$AC < AD + DC \ (\text{id.})$$
$$AD < AE + ED \ (\text{id.});$$

luego $AB + AC + AD < AC + CB + AD + DC + AE + ED$, y, suprimiendo los segmentos AC y AD, comunes á los dos miembros de la desigualdad, resulta,

$$AB < CB + DC + AE + ED.$$

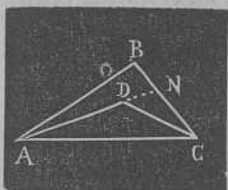

Figura 39.

2.° *Si desde los extremos* A y C de un |° de un △ ABC (fig. 39), se trazan dos |as AD, CD *que se encuentran en su interior,* LA SUMA AD + DC SERÁ MENOR QUE AB + BC.

Construccion.—Prolónguese AD hasta que encuentre al |° BC.

Demostracion.—Siendo $AN < AB + BN$ (1°), se tendrá, añadiendo NC á los dos miembros,

$$AN + NC < AB + BN + NC = AB + BC;$$

pero siendo $CD < CN + ND$ (1°),
se tendrá, añadiendo DA á los dos miembros,

$$CD + DA < CN + ND + DA = CN + NA;$$

luego, con mayor razon, $CD + DA < AB + BC$.

Figura 40.

3.° *La quebrada* ACDB *convexa, comprendida por la* AEFCB, *con la cual tiene el lado comun* AB, ES MENOR QUE ÉSTA. (fig. 40).

Construccion. — Prolónguense las |as AC y CD hasta encontrar á los |os de la quebrada AEFCB.

Demostracion.

$$AC + CM < AE + EM \ (1°)$$
$$CD + DN < CM + MF + FN \ (\text{id.})$$
$$DB < DN + NC + CB \ (\text{id.})$$

Si se suman estas desigualdades, miembro á miembro, y suprimiendo los segmentos CM y DN que entran á uno y otro lado del signo $<$, resultará

$$AC + CD + DB < AE + EM + MF + FN + NC + CB,$$
$$\text{ó } AC + CD + DB < AE + EF + FC + CB.$$

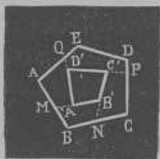

Figura 41.

4.° *Un polígono convexo* A'B'C'D' *envuelto por otro cualquiera* ABCDE (figura 41), TIENE UN PERÍMETRO MENOR QUE EL DE ÉSTE.

Construccion.—Prolónguense los lados del polígono A'B'C'D', en el mismo sentido, hasta encontrar al ABCDE.

Demostracion.

$$A'B' + A'M < B'N + NB + BM$$
$$C'B' + B'N < C'P + PC + CN$$
$$C'D' + C'P < PD + DE + EQ + QD'$$
$$A'D' + D'Q < A'M + MA + AQ + QD'$$

Sumando ordenadamente estas desigualdades, y suprimiendo los segmentos A'M, B'N, C'P, D'Q, comunes á los dos miembros de la suma, resulta:

$$B'A' + C'B' + C'D' + D'A' < NB + BM + PC + CN + QE + ED + DP + MA + AQ$$

y, reuniendo los segmentos de una misma recta,

$$B'A' + C'B' + C'D' + D'A' < AB + BC + CD + DE + EA.$$

TEOREMA (1).

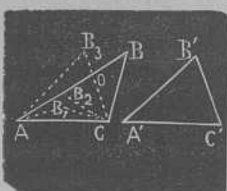

Figura 42.

104. *Si dos* $\triangle^s$ *tienen desiguales un* $\angle$ *comprendido entre dos* $|^{os}$ *respectivamente iguales*, EL 3^{er} $|^{o}$ SERÁ MAYOR EN EL QUE TIENE MAYOR $\angle$.

α. **Hipótesis.**—En los $\triangle^s$ ABC A'B'C' (fig. 42), se tiene,

$$\angle ACB > A'C'B', \; |^{o}AC = |^{o}A'C', \; |^{o}BC = |^{o}B'C'.$$

(1) Este es el contrario del 87.

Demostracion.—Colocando el $\triangle$ A′B′C′ sobre el $\triangle$ ABC de modo que el |° A′C′ coincida con el |° AC; el |° B′C′ ocupará una de las posiciones B_1C, B_2C ó B_3C, deduciéndose respectivamente, que:

1.° $AB_1 + B_1C < AB + BC$,

y suprimiendo B_1C y BC que son iguales (construccion), resultará A_1B ó $A'B' < AB$.

2.° Evidentemente AB_2 ó su igual $A'B' < AB$.

3.° Los $\triangle^s$ AOB_3, COB originan las relaciones

$$AB_3 < AO + OB_3, \qquad CB < CO + OB,$$

y sumando, miembro á miembro, resulta que

$$AB_3 + CB < AO + OB_3 + CO + OB = AB + CB_3,$$

y suprimiendo CB y CB_3 que son iguales (construccion),

$$AB_3 \text{ ó } A'B' < AB.$$

6. **Recíprocamente.**—*Si dos $\triangle^s$ tienen dos |os respectivamente iguales y el 3er |° es mayor en el uno que en el otro,* AL MAYOR |° SE OPONDRÁ MAYOR $\angle$.

TEOREMA.

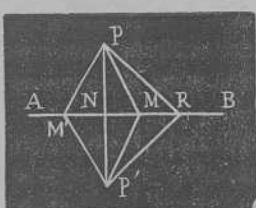

Figura 43.

105. *Si desde un [.] situado fuera de una |ª, se trazan á ésta una $\perp$ y diversas oblícuas:* 1.° LA $\perp$ ES MENOR QUE CUALQUIERA OBLÍCUA; 2.° LAS OBLÍCUAS *que distan igualmente del pié de la $\perp$* SON IGUALES; 3.° DE DOS OBLÍCUAS *desigualmente distantes del pié de la $\perp$* ES MAYOR LA QUE MÁS DISTA.

Demostracion.—1.° En el $\triangle$ rectángulo MNP (fig. 43), se tiene

$$PN < PM \ (101, 2.°).$$

2.° Los $\triangle^s$ rectángulos M′NP, MNP son iguales (87), porque PN es comun y MN = M′N (hipótesis);

luego $PM' = PM$.

3.° Prolongando la |ª PN una longitud P′N = PN y, uniendo P′ con M y R, resultarán la |ª PNP′ y las quebradas PMP′, PRP′ que originan las relaciones siguientes:

$$PM + MP' < PR + RP' \text{ ó } 2PM < 2PR \ (105,\ 2.^{\circ}),$$

luego $$PM < PR.$$

Tambien puede decirse: En el △ rectángulo PMN el ∠ PMN es agudo; luego el ∠ PMR es obtuso; luego $PR > PM$ (101, 2.°)

Recíprocamente.—*La* |ª *más corta comprendida entre un* [.] *y una recta* ES LA ⊥ Á ÉSTA: 2.° *Dos oblícuas iguales* DISTAN IGUALMENTE DEL PIÉ DE LA ⊥ . 3.° *De dos oblícuas desiguales* LA MENOR DISTA MÉNOS DEL PIÉ DE LA ⊥ .

Demostracion.—Como en el directo se ha hecho la variedad de hipótesis que cabe en esta cuestion, y cada una ha dado *conclusion distinta*, los *recíprocos son ciertos* y se demuestran *ad absurdum*, negando la tésis de cada caso, como se hizo ya (101, 2.°)

Escolio.—Por un [.] *no se pueden trazar á una* |ª *más que dos* |ªˢ *iguales, una á cada lado de la* ⊥.

Observacion.—Análogamente á (100, 3.°) *por un* [.] P, *y á un lado de la* ⊥, SÓLO *puede trazarse á una* |ª AB OTRA DE LONGITUD DADA.

COROLARIOS.

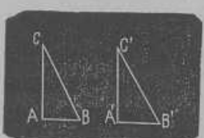

Figura 44.

106. 1.° *Si dos* △ˢ *rectángulos* ABC, A′B′C′ (fig. 44) *tienen iguales la hipotenusa y un cateto*, SERÁN IGUALES.

Hipótesis.--Sean $AC = A'C'$, $BC = B'C'$

Demostracion.—Superponiendo los △ˢ, de manera que AC se confunda con A′C′, AB tomará la direccion de A′B′, por ser los ∠ˢ A y A′ rectos, y las hipotenusas coincidirán por *ser oblícuas iguales* (105, observ.)

2.° *Si dos* △ˢ *rectángulos* ABC, A′B′C′ (fig. 44) *tienen iguales la hipotenusa y un* ∠ *agudo*, SERÁN IGUALES.

Hipótesis.—$CB = C'B'$, ∠ B = ∠ B′.

Demostracion.—Superponiendo los $\triangle^s$, de modo que CB se confunda con C'B'; AB y A'B' se confundirán en direccion, por ser $\angle$ B $= \angle$ B', y tambien se confundirán en direccion AC y A'C', porque forman $\angle^s$ iguales con la misma direccion de AB y A'B' (100, 3.°).

3.° *Todo* [.] P *situado en la* $\perp$ PN (fig. 43) *trazada á la* $|^a$ MM' *en su* [.] *medio*, EQUIDISTA DE SUS EXTREMOS M y M', pues siendo las distancias PM y PM' oblícuas igualmente distantes del pié de la $\perp$, *serán iguales.*

Recíprocamente.—*Todo* [.] P, *igualmente distante de los extremos de una* $|^a$ MM', SE HALLA EN LA $\perp$ PM TRAZADA POR SU [.] MEDIO N, pues siendo PM y PM' oblícuas iguales, PN es la $\perp$ á MM' en su [.] medio (105 recíp.° y 91, 1.°).

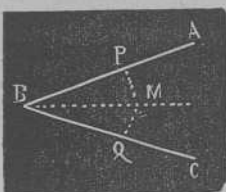

Figura 45.

4.° *Todo* [.] *situado en la bisectriz de un* $\angle$, EQUIDISTA DE SUS LADOS, y **recíprocamente**: *Todo* [.] *que equidista de los* $|^{os}$ *de un* $\angle$, ESTÁ EN SU BISECTRIZ.

α. **Hipótesis.**—Sea el [.] M, situado en la bisectriz BM del $\angle$ ABC (fig. 45).

Construccion.—Trácense las $\perp^s$ MQ y MP á los $|^{os}$ del $\angle$ ABC.

Demostracion.—Los $\triangle^s$ rectángulos MPB, MQB son iguales (106, 2.°);

luego $\quad$ MP $=$ MQ.

6. **Hipótesis.**—Sea MP $=$ MQ.

Demostracion.—Los $\triangle^s$ rectángulos MPB, MQB son iguales (106, 1.°);

luego $\quad$ $\angle$ MBQ $= \angle$ MBP.

Observaciones.—1.ª Los contrarios de los corolarios 3.° y 4.° se demostrarán *ad absurdum*, fundándose, ya en el uno (directo), ya en el otro (recíproco).

2.ª La *perpendicular* trazada á una $|^a$ en su punto medio y la *bisectriz* de un $\angle$ son rectas que tienen la propiedad de *equidistar* de los extremos de la 1.ª ó de los lados del 2.°

Se dice, pues, que una y otra son los *lugares geométricos* (1) de los $[.]^{s}$ que tienen dichas propiedades, y *dos puntos que equidistan de los extremos de una* $|^{a}$ *ó de los* $|^{os}$ *de un* $\angle$, *determinan á aquéllas* respectivamente.

§ 3.º—Transformacion de las relaciones de posicion y de magnitud lineal, mediante un doble sistema de paralelas.

TEOREMA.

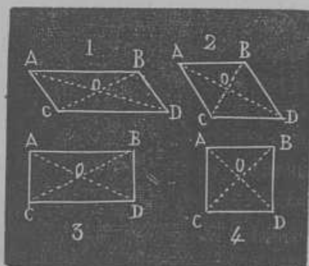

Figura 46.

107. *En todo* ▱, LOS $|^{os}$ Y LOS $\angle^{s}$ OPUESTOS SON RESPECTIVAMENTE IGUALES, Y LAS DIAGONALES QUEDAN DIVIDIDAS EN DOS PARTES IGUALES.

Construccion.—Trácese la diagonal BC (fig. 46).

Demostracion.—1.º Los $\triangle^{s}$ DBC y ABC son iguales (97, 2.º y 89); luego DC = BA, BD = AC.

2.º $\angle$ BDC = $\angle$ BAC, $\angle$ DBA = $\angle$ DCA (98, 1.º)

3.º Siendo DC = BA, $\angle$ BCD = $\angle$ ABC, $\angle$ ADC = $\angle$ DAB (97, 2.º) los $\triangle^{s}$ ABO y CDO serán iguales (89); luego BO = CO, DO = AO.

Corolario.—*Las partes de* $\|^{as}$ *comprendidas entre* $\|^{as}$ SON IGUALES.

Recíproco.—UN CUADRILÁTERO ABCD SERÁ ▱,

1.º Si $|^{o}$ DC = $|^{o}$ BA y $|^{o}$ DB = $|^{o}$ AC.

2.º Si $|^{o}$ DC = $|^{o}$ BA y $|^{o}$ DC $\|^{o}$ á $|^{o}$ BA.

3.º Si $\angle$ DCA = $\angle$ DBA y $\angle$ BCD = $\angle$ BAC.

4.º Si DO = AO, BO = CO.

Demostracion.—1.º y 2.º De las hipótesis de los dos primeros casos se deduce: $\triangle$ DAC $\cong$ $\triangle$ BAD (92, 87);

---

(1) Se llama *lugar geométrico* la línea ó superficie que contiene todos los puntos que tienen una misma propiedad.

luego $\angle$ BDA = $\angle$ DAC y $\angle$ CDA = $\angle$ DAB
luego $|^{\circ}$ BD $\|^{\circ}$ á $|^{\circ}$ AC, $|^{\circ}$ DC $\|^{\circ}$ á $|^{\circ}$ AB (97, 1.°).

3.° En virtud de la hipótesis,

$$2 \angle B + 2 \angle D = 4 \llcorner^{s}, \text{ó } \angle B + \angle D = 2 \llcorner^{s},$$
$$2 \angle B + 2 \angle A = 4 \llcorner^{s}, \text{ó } \angle B + \angle A = 2 \llcorner^{s},$$

luego BA $\|^{\circ}$ á DC y BD $\|^{\circ}$ á AC.

4.° De las hipótesis, juntamente con las relaciones:

$$\angle \text{BOA} = \angle \text{COD}, \angle \text{BOD} = \angle \text{AOC} \ (54),$$

se deduce (87):

1.° $\triangle$ BOA $\cong$ DOC, 2.° $\triangle$ BOD $\cong$ $\triangle$ AOC;
luego: 1.° $\angle$ OBA = $\angle$ OCD, 2.° $\angle$ OBD = $\angle$ OCA;
luego: 1.° AB $\|^{\circ}$ á CD, 2.° AC $\|^{\circ}$ á BD (97, 1.°).

III.—APLICACIONES DE LA IGUALDAD Y DESIGUALDAD TRIANGULAR AL DOBLE PARALELISMO.

108 Para cada una de las especies del $\square$, á saber, el *romboide*, el *rombo*, el *rectángulo* y el *cuadrado*, resultan las propiedades siguientes:

1.° El *romboide* tiene las *diagonales oblícuas* y $\mp^{s}$
2.° El *rombo* » » » $\perp^{s}$ y $\mp^{s}$
3.° El *rectángulo* » » » *oblícuas* y $=^{s}$
4.° El *cuadrado* » » » $\perp^{s}$ y $=^{s}$

Demostracion.—Se efectúa en cada caso aplicando los teoremas correspondientes de igualdad y desigualdad de triángulos.

Así, por ejemplo, en el 1.er caso, teniendo los $\triangle^{s}$ AOB y AOC (fig. 46) OA comun, OB = OC (107, 3.°) y BA > CA, (definicion), se tendrá

$$\angle \text{BOA} > \angle \text{AOC} \ (104, \text{recíp.°});$$

luego AD es oblícua á BC.

Teniendo además, los $\triangle^{s}$ CDA y CDB:
$|^{\circ}$ CD comun; $|^{\circ}$ AC = $|^{\circ}$ BD (107, 1.°) $\angle$ BDC $\mp$ $\angle$ DCA (definicion), resultará:

$$|^{a}\ \text{BC} \mp |^{a}\ \text{AD}.$$

Los demás casos se tratan aplicando las análogas propiedades de los $\triangle^{s}$ AOB, AOC, para la direccion y de los $\triangle^{s}$ DCA, DCB, para la magnitud, en cada caso de la figura.

Observacion.—Cada recíproco se demuestra, empleando el teorema de igualdad ó desigualdad de $\triangle^s$, recíproco del que sirvió para su respectivo directo.

IV.—EXISTENCIA Y DETERMINACION DE LAS FIGURAS CIRCULARES.

§ 1.°—Determinacion de la circunferencia.

TEOREMA.

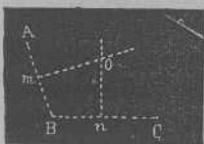

Figura 47.

109. *Tres* $[.]^s$, *no situados en línea recta*, DETERMINAN UNA CIRCUNFERENCIA.

Construccion.—Unanse los $[.]^s$ dados A, B, C (fig. 47), por medio de las $|^{as}$ AB, BC, y trácense á éstas, las $\perp^s$ en sus $[.]^s$ medios.

Demostracion.—Estas $\perp^s$ se encontrarán (96, ext. cor. 2.° contrario.)

El [.] *o* de encuentro, por hallarse en *on*, equidista de A y B, por hallarse en *on*, equidista de B y C; luego equidista de A, B y C; pero sólo los $[.]^s$ de éstas $|^{as}$ tienen, en el plano de la figura, la propiedad de equidistar de A y B, de B y C; y sólo tienen dichas $|^{as}$ un [.] de interseccion, luego éste es único; luego sólo puede trazarse una circunferencia que pase por A, B y C.

§ 2.°—La recta en círculo y en la circunferencia.

TEOREMA.

110. *Una circunferencia* NO PUEDE SER CORTADA POR UNA $|^a$ en MÁS DE DOS $[.]^s$, porque si tuvieran tres $[.]^s$ comunes la recta y la circunferencia, por un [.] (centro) se podrían trazar á una $|^a$ más de dos $|^{as}$ iguales. (105, recíp.° *escol.*)

TEOREMA.

111. *En una circunferencia ó en circunferencias igua-*

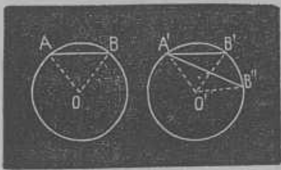

Figura 48.

les, á arcos iguales CORRESPONDEN CUERDAS IGUALES, y *á mayor arco* CORRESPONDE MAYOR CUERDA.

Demostracion.—1.° Superponiendo la circunferencia *o'* con la *o*, (fig. 48) de manera que coincidan los centros, y el [.] A' con el A, los arcos AB y A'B' se confundirán, por hipótesis, y el [.] B' caerá sobre el B; luego las $|^{as}$ ó cuerdas AB, y A'B' son iguales.

2.° Sea el arco A'B'B'' $>$ arc. AB (fig. 48).

Colocando la circunferencia *o'* sobre la *o* de manera que sus centros coincidan, y el [.] A' caiga sobre el [.] A; el [.] B tomará cierta posicion B' entre A y B''.

Si se unen B' y B'' con el centro *o'*, por ser, en los $\triangle^s$ AOA y A'O'B',

$$\text{rad.° AO} = \text{rad.° A'O'},\ \text{rad.° O B} = \text{rad.° O'B'},$$
$$\angle \text{A'O'B'} < \angle \text{A'O'B''},$$

resultará:

$$\text{A'B'} < \text{A'B''} \ (104) \text{ ó AB} < \text{A'B''}.$$

Recíprocamente.—*En dos circunferencias iguales ó en una circunferencia, á cuerdas iguales* CORRESPONDEN ARCOS IGUALES, y *á mayor cuerda* CORRESPONDE MAYOR ARCO.

Demostracion.—*(Ad absurdum).*

TEOREMA.

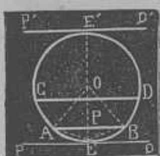

Figura 49.

112. *En una circunferencia, todo diámetro* $\perp$ *á una cuerda* LA DIVIDE EN DOS PARTES IGUALES, ASÍ COMO Á LOS DOS ARCOS QUE SUBTIENDE ÉSTA.

Demostracion.—Los rádios OA y OB (fig. 49) son oblícuas iguales; luego EE' es la $\perp$ trazada á la cuerda AB en su [.] medio (105, recíp.°, 2.°); luego los [.]^s E y E' equidistan de A y B (106, 3.°);

luego cuer. EB = cuer. EA; cuer. E'B = cuer. E'A;

luego arc. EB = arc. EA; arc. E'B = arc. E'A (111, recíp.°)

Observacion.—La | ^{a} EE′ satisface á cinco condiciones: 1.^{a} *pasar por el centro*; 2.^{a} *ser* $\perp$ *á la cuerda* AB; 3.^{a} *dividirla en dos partes iguales*; 4.^{a} y 5.^{a} *dividir á los dos arcos en partes iguales.*

Basta que satisfaga á dos para que satisfaga á las demás.

TEOREMA.

Figura 50.

113. *En una circunferencia, ó circunferencias iguales:* 1.° *cuerdas iguales* EQUIDISTAN DEL CENTRO; 2.° *de dos cuerdas desiguales*, LA MENOR DISTA MÁS DEL CENTRO.

1.° **Hipótesis.**—Cuerda AB = cuerda A′B′ (fig. 50).

Construccion.—Trácense las $\perp^s$ OP, OP′ á las cuerdas AB, A′B′ y los rádios OA, OA′.

Demostracion.—Los $\triangle^s$ AOP, A′OP′ son iguales (106, 1.°); pues | ° AP = | ° A′P′, como mitades de cuerdas iguales; OA = OA′, por ser rádios de una circunferencia,

luego OP = OP′.

Figura 51.

2.° **Hipótesis.**—Cuerda AB > cuerda CD (fig. 51).

Construccion. — Trácense la cuerda AB = á la CD y las $\perp^s$ OP, OQ, OR á cada una de las cuerdas.

Demostracion.—Siendo el arco AE < AB, el centro *o* de la circunferencia y el [.] medio R de la cuerda AE estarán á distinto lado de la cuerda AB; luego ésta encuentra á la $\perp$ OR en un cierto [.] S, situado entre O y R;

luego OS < OR;

pero la $\perp$ OP < la oblícua OS;

luego OP < OR.

Recíprocamente.—*En una circunferencia ó en circunferencias iguales:* 1.° *las cuerdas que distan igualmente del centro* SON IGUALES; 2.° *de dos cuerdas que distan desigualmente*, LA QUE DISTA MÁS ES LA MENOR.

Demostracion.—*(Ad absurdum).*

TEOREMA.

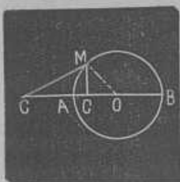

Figura 52.

114. *Toda oblícua* CM (fig. 52) *que parte de un* [.] C, *no situado en la circunferencia* o, TIENE SU LONGITUD COMPRENDIDA ENTRE LAS DOS NORMALES CA, CB QUE PARTEN DE DICHO [.]

Demostracion.

CA = CO — AO = CO — MO ([.] exterior);

ó CA = AO — CO = MO — CO ([.] interior);

pero en los $\triangle^s$ CMO, se tiene

CM > CO — MO ó CM > MO — CO (102, observ.);

luego CM > CA.

Además, CB = CO + OB = CO + OM;

pero en los $\triangle^s$ CMO, se tiene,

CM < CO + OM;

luego CM < CB.

TEOREMA.

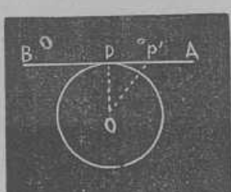

Figura 53.

115. *Toda* $\perp$ AB (fig. 53) *al rádio en su extremo*, ES TANGENTE Á LA CIRCUNFÉRENCIA.

Hipótesis.— |ª AB es $\perp$ al rádio.

Demostracion. —Cualquiera |ª que se trace desde *o* á la |ª AB es oblícua, pues por o, sólo puede trazarse una $\perp$ á AB (51, 3.° *consec.*); luego OP es la menor de las |as trazadas desde *o* á AB (105, 1.°); luego todos los [.]s de AB, ménos el [.] P, se hallan fuera de la circunferencia (79, *cor.* 3.° *observ.*); es decir, AB es tangente á la circunferencia.

Recíprocamente.—*Toda tangente á una circunferencia* es ⊥ al rádio que pasa por [.] de contacto.

Hipótesis.— | ª AB tangente á la circunferencia *o*.

Demostracion.—Todos los [.]s de AB, excepto el P, se hallan fuera de la circunferencia, por hipótesis; luego OP es la más corta de las | as que pueden trazarse desde el [.] o á la | ª AB (79 cor. 3.°);
luego OP es ⊥ á AB (105, recíp.° 1.°)

Contrarios.—*Toda oblicua á un rádio en su extremo* ES SECANTE Á LA CIRCUNFERENCIA, y *toda secante* ES OBLÍCUA Á LOS RÁDIOS QUE PASAN POR LOS [.]s COMUNES.

Demostracion.—*(Ad absurdum).*

Corolarios: 1.° *Por un* [.] P *de una circunferencia* se puede trazar una | ª que le sea tangente; pero SÓLO UNA.

2.° *Toda tangente es* ‖ ª Á LAS CUERDAS QUE EL DIÁMETRO TRAZADO POR EL [.] DE CONTACTO DIVIDE EN DOS PARTES IGUALES (94).

TEOREMA.

116. *Dos* | as ‖ as INTERCEPTAN SOBRE UNA CIRCUNFERENCIA ARCOS IGUALES.

Ocurren tres casos, segun sean las | as *dos cuerdas, una cuerda* y *una tangente*, ó *dos tangentes.*

1.er CASO. **Hipótesis.**—Sean las dos cuerdas ‖ as AB y CD (fig. 49).

Construccion.—Trácese el diámetro EE′ ⊥ á una de las cuerdas, que lo será tambien á la otra (94).

Demostracion.

arc. ED = arc. EC (112),
arc. EB = arc. EA (112);
luego (restando) arc. (ED — EB) = arc. (EC — EA)
ó arc. BD = arc. AC.

2.° CASO. **Hipótesis.**—Sea la cuerda AB ‖ ª á la tangente PQ (fig. 49).

Construccion.—Trácese por el [.] de contacto E, el diámetro EE′ que, por ser ⊥ á PQ (115, *recíp.°*) lo será á AB (96, 2.°)

Demostracion.—De la construccion resulta que, EE′ divide á la cuerda AB y al arco AB en dos partes iguales (112); luego arc. EB = arc. EA.

3.er caso. **Hipótesis.**—Sean las tangentes PQ, P′Q′ $\|^{as}$ entre sí (fig. 49).

Construccion.—Trácense los rádios que pasan por cada [.] de contacto.

Demostracion.—Estos rádios están en prolongacion uno de otro; porque, si no formáran una $|^{a}$, como son $\perp^{s}$ á la vez á las dos tangentes $\|^{as}$ (115, *recíp.*°); por el [.] o habría trazadas á una $|^{a}$ dos $\perp^{s}$, lo cual es imposible (51, 3.° *consec.*)

Estando los rádios en prolongacion, forman un diámetro que dividirá á la circunferencia en dos partes iguales (79, *cor.* 1.°)

§ 3.°—El ángulo en el círculo ó en la circunferencia.

TEOREMA.

117. *En una circunferencia, ó en circunferencias iguales, á ángulos en el centro iguales* CORRESPONDEN ARCOS IGUALES y **recíprocamente.**

Demostracion.—1.° Siendo (fig. 48)

$$\left.\begin{matrix} |^{\circ}\,AO = |^{\circ}\,A'O';\ |^{\circ}\,OB = O'B' \\ y\ \angle\ AOB = \angle\ A'O'B' \end{matrix}\right\}\text{(hipótesis)},$$

resulta que $\triangle\ AOB \cong \triangle\ A'O'B'$ (88);
luego cuer. AB = cuer. A′B′;
luego arc. AB = arc. A′B′ (111, *recíp.*)

2.° Siendo por hipótesis arc. AB = arc. A′B′, se tendrá
cuerda AB = cuerda A′B′ (111);
luego en los $\triangle^{s}$ ABC y A′B′C′
$|^{\circ}\,AO = |^{\circ}\,A'O'$, $|^{\circ}\,BO = |^{\circ}\,B'O'$ y $|^{\circ}\,AB$ y $|^{\circ}\,A'B'$;
luego $\triangle\ AOB \cong A'O'B'$ (92);
luego $\angle\ AOB = \angle\ A'O'B'$

Corolario.—*Todo* $\llcorner$ TIENE POR ARCO CORRESPONDIENTE UN

CUADRANTE y, **recíprocamente**, *á todo cuadrante* CORRESPONDE UN $\llcorner$.

Demostracion.—1.° Si un $\angle$ A'O'B' es $\llcorner$ (fig. 54), su adyacente tambien será $\llcorner$ (51, *cor.* 3.°), y se tendrá que

$$\llcorner\ A'O'B' = \llcorner\ C'O'B' \ (51,\ 2.°);$$

luego $$\text{arc. } A'B' = \text{arc. } B'C' \ (117),$$

y como entre los dos sumados valen la semi-circunferencia, cada uno valdrá un cuadrante.

2.° **Recíprocamente.**—Si el arco A'B' es un cuadrante, el arco B'C' que se obtiene, prolongando el rádio A'O', será otro cuadrante, luego

$$\angle\ A'O'B' = \angle\ C'O'B'$$

y como sumados valen 2 $\llcorner^{s}$, cada uno será un $\llcorner$.

TEOREMA.

118. *En una circunferencia, los* $\angle^{s}$ *inscritos, cuyos* $|^{os}$ *pasan por los extremos de una cuerda y cuyos vértices se hallan á un mismo lado de ésta,* SON IGUALES ENTRE SÍ, *y los que se hallan á distinto lado,* SON SUPLEMENTARIOS.

Figura 54.

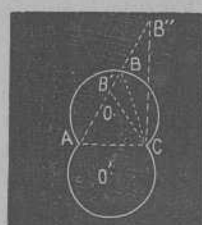

Figura 55.

Construccion.—Por el vértice B del $\angle$ ABC (fig. 55) trácese el diámetro BOD.

1.° **Demostracion.**—Siendo los $\triangle^{s}$ AOB y BOC isósceles, se tendrá:

$$\angle\ COD = 2\ \angle\ CBO, \quad \angle\ DOA = 2\ \angle\ OBA;$$

luego (sumando) $\angle\ COD + \angle\ DOA = 2\,(\angle\ CBO + \angle\ OBA)$,

ó $\angle$ COA $= 2 \angle$ CBA (fig. 54);
pero el $\angle$ COA es *constante*;
luego $\angle$ CBA tambien es *constante* (cualquiera que sea el [.] B del segmento ABC).

2.° **Demostracion.**—Siendo los $\angle^s$ AOB y BOC (fig. 54) exteriores de los $\triangle^s$ iósceles AOD, DOC, resultará:

$\angle$ AOB $= 2 \angle$ ADO, $\angle$ BOC $= 2 \angle$ CDO;
luego $\angle$ AOB $+ \angle$ BOC $= 2\,(\angle$ ADO $+ \angle$ CDO),
ó $\angle$ cóncavo AOC $= 2 \angle$ ADC;
pero $\angle$ cóncavo AOC $+ \angle$ convexo AOC $= 4 \llcorner^s$;
luego $\angle$ ABC $+$ ADC $= 2 \llcorner^s$.

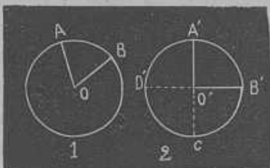

Figura 54'.

Corolario 1.° De la demostracion anterior resulta que, cuando la cuerda AC no es diámetro (figura 54), es decir, cuando los rádios que unen sus extremos forman un $\angle$ cóncavo y otro convexo, el $\angle$ *inscrito agudo* es la mitad del $\angle$ *central convexo*, y el $\angle$ *inscrito obtuso* es la mitad del $\angle$ *central cóncavo*.

Corolario 2.° Cuando los rádios AO y OC (fig. 54) se hallan en prolongacion, los $\angle^s$ cóncavo y convexo pasan á ser *llanos*, y entónces los $\angle^s$ *inscritos* situados á uno y otro lado del diámetro son $\llcorner^s$.

El razonamiento sería el mismo que el arriba expuesto, y entónces resultaría que, como los $\angle^s$ AOD y DOC, ó los $\angle^s$ AOB y BOC serían adyacentes, sumados valdrían $2 \llcorner^s$, y los $\angle^s$ ABC ó ABC serian $\llcorner^s$.

TEOREMA.

119. *En la parte de plano situada á un lado de una* $|^a$ AC (fig. 55) *el* **lugar geométrico** *de los* [.]^s *desde los cuales se ve esta* $|^a$ *bajo un* $\angle$ *dado*, es un arco de circunferencia que pasa por las extremidades A y C de la $|^a$.

Demostracion.—1.° *Todos los* $\angle^s$ *que*, como el ABC, *tienen el vértice en la circunferencia trazada por los* [.]^s A, B y C SON IGUALES Á ÉSTE, pues son todos la mitad del ∠ central AOC (118, cor. 1.º)

2.º *Todos los* ∠ˢ *que tienen el vértice en el interior de la circunferencia* SON MAYORES QUE EL ∠ ABC, pues prolongando el |º AB′ del ∠ AB′C, por ejemplo, y uniendo el [.] B en que encuentra á la circunferencia con el [.] C, resultará que el ∠ AB′C es externo del △ BB′C, y, por consiguiente, será mayor que el ∠ ABC.

3.º *Todos los* ∠ˢ *que tienen su vértice en el exterior de la circunferencia* SON MENORES QUE EL ∠ ABC, pues uniendo el [.] B en que el |º AB″ del ∠ AB″C (fig. 55) encuentra á la circunferencia, con el [.] C, se formará el △ BCB″, en el cual es ∠ externo el ∠ ABC.

Resultando, pues, que los ∠ˢ cuyos vértices se hallan en la circunferencia que pasa por A, B y C son iguales á la mitad del ∠ AOC, miéntras que los interiores ó exteriores son respectivamente menores ó mayores, queda demostrado que los únicos ∠ˢ cuyo valor es igual al ∠ dado, son los que tienen el vértice en dicha circunferencia, que será, por consiguiente, el *lugar geométrico* de sus vértices.

Observaciones.—1.ª En la parte inferior de la |ª AB pueden hacerse análogas construcciones, y obtenerse de éstas iguales resultados, pudiéndose extender el teorema anterior y decir que, *el lugar geométrico de los* [.]ˢ *desde los cuales se ve una* |ª AC *bajo un* ∠ *dado, se compone de dos arcos de circunferencias iguales entre sí y que pasan por las extremidades de dicha* |ª.

2.ª Cuando el ∠ considerado es ∟, los arcos son dos semi-circunferencias, pues los ∠ centrales cóncavo y convexo se han reducido á un ∠ *llano*, y, por consiguiente, el lugar de los [.]ˢ, desde los cuales se ve una |ª *bajo un* ∟ *es la circunferencia descrita sobre la* |ª *como diámetro.*

TEOREMA.

120. *Por un* [.] *exterior de una circunferencia* SÓLO SE LE PUEDE CIRCUNSCRIBIR UN ∠ DADO Y TRAZAR OTRO QUE INTERCEP-

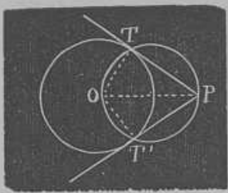

Figura 56.

TE EN AQUÉLLA CUERDAS IGUALES, ó de otro modo, *por un* [.] *exterior á una circunferencia* SÓLO SE LE PUEDEN TRAZAR: 1.° DOS TANGENTES Y: 2.° DOS SECANTES QUE INSCRIBAN EN LA MISMA SEGMENTOS DE MAGNITUD DADA *(siendo unas y otras respectivamente* IGUALES.)

1.° **Demostracion.**—Si tomando el [.] dado P y el centro de la circunferencia O (fig. 56) como extremos de un diámetro, se traza una circunferencia, ésta tendrá que cortar necesariamente á la propuesta, por tener á la vez [.]s interiores y exteriores á la misma; y la tendrá que cortar sólo en dos [.]s T y T′, porque dos circunferencias no pueden tener más de dos [.]s comunes, sin confundirse (109);
pero los ∠s PTO y PT′O son ∟s (118, *cor.* 2.°);
luego PT y PT′ son tangentes á la circunferencia O (115).

Además, los △s OPT, OPT′ son iguales (106, 1.°);
luego PT = PT′.

COROLARIO.—*Los* ∠s TOT′ *y* TPT′ *son suplementarios.*

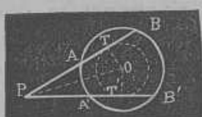

Figura 57.

2.° **Demostracion.**—Si se traza la circunferencia tangente á todas las cuerdas de longitud igual á la dada (113, 1.° y 115) y por el [.] P dado (figura 57) las dos tangentes PAB y PA′B′ á dicha circunferencia; como todas las cuerdas iguales á la AB tienen sus [.]s medios en dicha circunferencia (112), y dichas tangentes son todas las que pueden trazarse desde el [.] P, resulta que sólo pueden trazarse las dos secantes PAB y PA′B′, cuyos segmentos AB y A′B′ sean de longitud dada. Además, dichas secantes son iguales; porque, siendo el △ PTO ≅ △ PT′O (106, 1.°),
resultará que PT = PT′ [1];
y siendo BA = B′A′ (113, *recip.* 1.°),
se tendrá BT = B′T′ [2];
luego (sumando [1] y [2]) PTB = P′T′B′.

V.—LOS POLÍGONOS EN EL CÍRCULO Y EN LA CIRCUNFERENCIA

§ 1.º—Cuadrilátero inscrito y circunscrito.

TEOREMA.

121. *Dadas tres* $|^{as}$ *que se encuentran dos á dos*, PUEDE TRAZARSE UNA CIRCUNFERENCIA TANGENTE Á LAS TRES y **sólo una**.

Demostracion.—Por estar el [.] *o* en la bisectriz del $\angle$ A (fig. 58) equidista de AD y AB; por estar en la bisectriz del $\angle$ B equidista de AB y BC;
luego equidista de AD, AB y BC.

Pero sólo los [.]^{s} de la bisectriz AO equidistan de AD y AB, y sólo los [.]^{s} de la bisectriz BO equidistan de AB y BC; luego sólo puede existir la circunferencia, cuyo centro es el único [.] de interseccion de dichas bisectrices, tangente á DA, AB y BC.

122. *En todo cuadrilátero* **inscrito**, LOS $\angle^{s}$ OPUESTOS SON SUPLEMENTARIOS, *y en todo cuadrilátero* **circunscrito** LOS $|^{os}$ OPUESTOS SUMADOS DAN VALORES IGUALES.

Figura 58.

1.º **Demostracion.**—Los $\angle^{s}$ ABC y ADC (fig. 54) son suplementarios (118, cor. 1.º)

2.º **Demostracion**. — Siendo los $|^{os}$ del cuadrilátero ABCD tangentes á la circunferencia, se tendrá (fig. 58);

BE = BF, EA = AH, CG = CF, GD = HD, (120, 1.º)
y, sumando miembro á miembro,

$$BE + EA + CG + GD = BF + AH + FC + HD$$

ó

$$BA + CD = BC + AD.$$

Recíprocamente.—*Si en un cuadrilátero los* $\angle^{s}$ *opuestos son suplementarios ó los* $|^{os}$ *opuestos sumados, dan re-*

sultados iguales, SERÁN RESPECTIVAMENTE **inscriptibles** ó **circunscriptibles** EN UNA CIRCUNFERENCIA.

1.° **Demostracion.**—Si el ∠ ABC es suplemento del ∠ ADC (fig. 54), tendrá que estar inscrito en el segmento circular ABC (119).

2.° Si la circunferencia que fuese tangente á los tres |os DA, AB y BC del cuadrilátero dado (121), no lo fuese al cuarto DC, se podría obtener un cuadrilátero circunscrito DABM, trazando por el [.] D una tangente DM á dicha circunferencia, y se tendría

$$AB + MD = BM + AD;$$

pero $CD < CM + MD$ (102);

luego (sumando) $AB + MD + CD < BM + AD + CM + MD$,

y, suprimiendo el segmento MD, comun á los dos miembros,

$$AB + CD < AD + BC,$$

lo cual es contra la hipótesis; luego si ésta se verifica, las sumas de los |os opuestos del cuadrilátero tienen que ser iguales.

§ 2.°—Polígonos regulares.

TEOREMA.

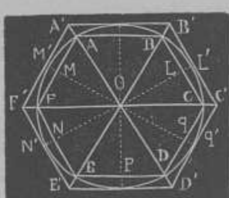

Figura 59.

Figura 60.

123. *Todo polígono regular* ES INSCRIPTIBLE EN UNA CIRCUNFERENCIA Y CIRCUNSCRIPTIBLE EN OTRA (1).

(1) Se llama *rádio* de un polígono regular, el rádio de la circunferencia circunscrita y *apotema* el de la inscrita.

1.° **Hipótesis.**—Sea el polígono regular ABCDEF (figura 59).

Construccion.—Trácese la circunferencia que pasa por los [.]^s A,B,C, y desde su centro la OL $\perp$ á CB.

Demostracion.—La circunferencia trazada pasará por el vértice D, pues siendo los cuadriláteros OLBA y OLCD iguales, por tener

$$\llcorner \text{ OLB} = \llcorner \text{ OLC } (51,\ 2.°),$$

$$\angle \text{ LBA} = \angle \text{ LCD}, \ |^{\circ} \text{ BA} = |^{\circ} \text{ CD (por hipótesis)},$$

resultará que OA = OD;

luego el [.] D pasará por la circunferencia trazada, y como de igual manera se demuestra esta propiedad para los otros vértices, queda demostrado el teorema.

2.° **Demostracion.**—Siendo un polígono regular, inscriptible en una circunferencia, sus lados serán cuerdas iguales; luego equidistarán del centro (113, 1.°) y serán tangentes á la circunferencia trazada con el mismo centro que aquélla y con un rádio igual á la distancia comun de éste á los lados.

TEOREMA.

124. *Todo polígono inscrito y equilátero ó circunscrito y equiángulo,* ES REGULAR.

1.° **Demostracion.**—Siendo los $|^{os}$ AB, BC...... (figura 59) iguales, se tendrá

$$\text{arc. AB} = \text{arc. BC} = \text{arc. CD. ...;}$$

luego $\angle \text{ ABC} = \angle \text{ BCD} = \angle \text{ CDE,......}$

2.° Siendo

$\triangle$ OL′C′ $\cong$ $\triangle$ OC′Q′, $\triangle$ OQ′D′ $\cong$ $\triangle$ OD′P′..... (106, 1.°),

se tendrá $\angle$ L′C′O = $\angle$ Q′C′O, $\angle$ Q′D′O = $\angle$ P′D′O.....;

y como son mitades de $\angle^s$ iguales, resultará que todos estos $\angle^s$ son iguales entre sí;

luego tambien

$$\triangle \text{ OB'C'} \cong \triangle \text{ OC'D'} \cong \triangle \text{ OD'E'..... (89)}$$

luego $|^{\circ}$ B′C′ = $|^{\circ}$ C′D′ = $|^{\circ}$ D′E′.....

Siendo, pues, el polígono, además de equiángulo equilátero, será regular.

TEOREMA.

125. *En una circunferencia* PUEDE INSCRIBIRSE Ó CIRCUNSCRIBIRSE UN POLÍGONO REGULAR DE CIERTO NÚMERO DE | os (1).

1.° **Demostracion.**—Trazando las cuerdas AB, BC...., (fig. 59) que unen los [.]s de division, resultará un polígono inscrito y equilátero que será regular (62).

2.° Trazando por los [.]s de division A, B, C..... (figura 60), tangentes á la circunferencia, formarán un polígono circunscrito cuyos $\angle^s$ M, N..... serán iguales, por ser suplementarios de los $\angle^s$ centrales iguales (120, cor.); luego será regular (124, 2.°).

Tambien se llegará á este resultado, trazando los rádios OL′, OQ′..... (fig. 59) que dividen á los arcos BC, CD..... en partes BL′, L′C..... iguales, y las tangentes B′C′, C′D′..... en los [.]s de division, pues tambien los $\angle^s$ A′, B′, C′, son iguales, como suplementos de los $\angle^s$ centrales que son todos iguales.

Observacion.—Los [.]s A y A′, B y B′..... se hallan en línea recta con el centro, pues, equidistando el [.] O de los [.]s L′ y Q′, por ejemplo, porque es el centro de la circunferencia y el [.] C′ de los [.]s L′ y Q′, por ser catetos iguales en los $\triangle^s$ rectángulos iguales L′OC′, Q′OC′, la | a C′O es $\perp$ á la | a L′Q′ en su [.] medio y contiene al [.] C, que tambien equidista de los L′ y Q′.

VI.—LAS CURVAS CON RELACION Á LAS QUEBRADAS INSCRITAS Ó CIRCUNSCRITAS.

DEFINICIONES.

126. *Se llama* LONGITUD *de un arco de curva el límite hácia el cual tiende el perímetro de una línea quebrada*

---

(1) Este teorema exige la posibilidad de dividirse la circunferencia en el número dado de partes iguales.

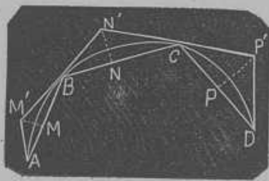

Figura 61.

inscrita en este arco, cuando sus lados tienden hácia cero.

Dada una línea quebrada inscrita ABCD en el arco AD (figura 61), se llama línea quebrada *circunscrita correspondiente*, la línea AM′N′P′D que se forma, trazando las tangentes á la curva AB en los vértices de la línea inscrita.

Si se inscriben nuevamente en el arco AD líneas quebradas que vayan formándose, segun una ley determinada, y no se les impone más que la condicion de que sus lados tiendan hácia cero, diremos que la ley de inscripcion es *cualquiera*; pero si las líneas quebradas sucesivas son además tales, que los vértices de cada una de ellas sean tambien vértices de la siguiente, se dirá que la ley de inscripcion es *simple* (1).

TEOREMA.

127. *La relacion de los perímetros de una línea quebrada inscrita y de la circunscrita correspondiente* TIENDE HÁCIA LA UNIDAD, *sea cualquiera la ley, segun la cual tienden hácia cero los lados de la línea inscrita.*

Construccion.—Trácense las proyecciones M, N...., sobre la línea inscrita, de los vértices M′, N′..... de la circunscrita (fig. 61).

Demostracion.—El valor de la relacion

$$\frac{AM' + M'B + BN' + \ldots\ldots}{AM + MB + BN + \ldots\ldots}$$

está comprendido entre los valores de la mayor y menor de las relaciones

$$\frac{AM'}{AM}, \quad \frac{M'B}{MB}, \quad \frac{BN'}{BN} \ldots\ldots;$$

pero cada una de éstas tiene por límite la unidad, pues cuando cada lado AB,BC... de la línea inscrita tiende hácia

(1) Estas denominaciones están tomadas de la Geometría de los señores Rouché y Comberouse, que adoptamos por brevedad.

cero, cada $\triangle$ AMM′, MBM′..... tiende á convertirse en dos |as superpuestas, y por consiguiente, cada hipotenusa tiende á confundirse con el cateto que es su proyeccion sobre la quebrada inscrita;

luego $\frac{AM' + M'B + BN' + \ldots}{AM + MB + BN + \ldots}$ tiene por límite la unidad.

TEOREMA.

128. *El perímetro de una línea quebrada inscrita* (1) *segun una ley simple*, TIENDE HÁCIA UN LÍMITE DETERMINADO, *y este límite es el mismo, cualquiera que sea la ley simple que se considere.*

Demostracion.—1.° Si varias líneas quebradas inscritas en un arco dado, se suceden, segun una ley simple determinada, sus perímetros tienden hácia un límite determinado L, porque estos perímetros crecen incesantemente, siendo menores que el perímetro de una línea quebrada cualquiera circunscrita al arco AD (103, 4.°) y además (127) las líneas quebradas circunscritas correspondientes tienden hácia el mismo límite.

2.° Considerando dos líneas inscritas que pertenecen á dos leyes *simples* diferentes, llamando p y p' sus perímetros; P y P′ los de las circunscritas correspondientes, L el límite comun de p y P, L′ el de p′ y P′, se tendrá

$$p < P'$$

(porque una línea *inscrita* es < una línea *circunscrita* cualquiera) (103, 3.° y 4.°);

luego el lím. L de p no puede ser > que el límite L′ de P′

Siendo, por otra parte, p′ < P se deduce, de igual modo que el lím. L′ de p′ no puede ser > que el límite L de P; luego si L no puede ser > que L′, ni L′ puede ser > que L, serán iguales.

---

(1) Se considera en este teorema una quebrada convexa, pues si así no fuere podría reducirse la demostracion á este caso, descomponiendo la quebrada en porciones convexas.

TEOREMA.

129. *El perímetro de una línea quebrada inscrita, segun una ley cualquiera,* TIENDE HÁCIA UN LÍMITE DETERMINADO, *y este límite es independiente de la ley de inscripcion adoptada.*

Demostracion.—Consideremos una série de líneas quebradas inscritas en un arco dado, segun una ley cualquiera.

Sean p el perímetro de una quebrada de las de la série, y P el perímetro de la quebrada circunscrita correspondiente. Se pueden tomar los lados de la línea quebrada inscrita bastante pequeños para que la diferencia $P - p$ sea menor que una cantidad fija, tan pequeña como se quiera, puesto que (127) la relacion de p á P tiende hácia la unidad.

Sea L el límite de los perímetros de las líneas quebradas inscritas en el arco dado segun una ley simple cualquiera; siendo $P >$ que una línea quebrada cualquiera inscrita segun una ley simple, será $>$ ó á lo ménos $=$ que límite L. Se tendrá, pues, que siendo

$$P - p < \varepsilon \text{ ó } p + \varepsilon > P,$$

resultará *á fortiori*,

$$p + \varepsilon > L \text{ ó } p > L - \varepsilon$$

Pero siendo $p <$ que una cualquiera de las quebradas circunscritas correspondientes á las inscritas, segun una ley simple, será $<$ que su límite L; luego

$$p < L.$$

Estando, pues, p comprendida entre L y $L - \varepsilon$ que difiere de L en tan poco como se quiera, tendrá por límite L.

COROLARIO.

La longitud de la circunferencia es el LÍMITE COMUN *de los perímetros de dos polígonos regulares inscritos y circunscritos, cuando se hace crecer indefinidamente el número de lados de éstos.*

VII.—POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS.

TEOREMA.

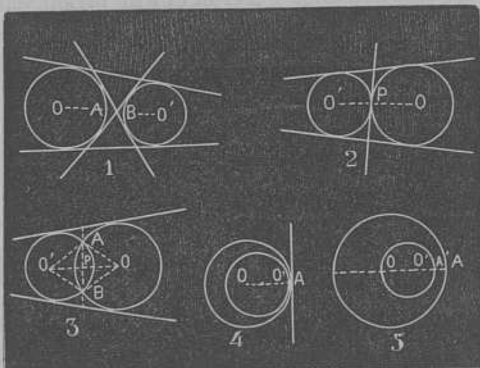

Figura 62.

130. *Si dos circunferencias tienen un* [.] A *comun, fuera de la línea OO′ que une sus centros*, TENDRÁN OTRO [.] COMUN B Á DISTINTO LADO DE ESTA LÍNEA, es decir, SERÁN SECANTES.

Construccion.—Trácese por el [.] A la ⊥ AP á la línea de los centros, (fig. 62, 3) y prolónguese una longitud PB = PA.

Demostracion.—Siendo OO′ la ⊥ trazada ó AB en su [.] medio P, O′ y O equidistan de A y B; luego O y O′ son los centros de dos circunferencias que pasan por los [.]s A y B.

COROLARIO.—*Si dos circunferencias son tangentes*, EL [.] DE CONTACTO ESTÁ EN LA LÍNEA DE LOS CENTROS.

Demostracion ad absurdum.—Si el [.] supuesto comun estuviese fuera de la |a de los centros, serían secantes las circunferencias, segun el teorema, lo que es contra la hipótesis.

TEOREMA.

131. 1.° *Si dos circunferencias son exteriores*, LA DISTANCIA DE LOS CENTROS ES IGUAL Á LA SUMA DE LOS RÁDIOS.

2.° *Si son tangentes exteriormente*, LA DISTANCIA DE LOS CENTROS ES IGUAL Á LA SUMA DE LOS RÁDIOS.

3.° *Si se cortan*, LA DISTANCIA DE LOS CENTROS ES MENOR QUE LA SUMA DE LOS RÁDIOS Y MAYOR QUE SU DIFERENCIA.

4.° *Si son tangentes interiormente*, LA DISTANCIA DE LOS CENTROS ES IGUAL Á LA DIFERENCIA DE LOS RÁDIOS.

5.° *Si es interior la una á la otra*, LA DISTANCIA DE LOS CENTROS ES MENOR QUE LA DIFERENCIA DE LOS RÁDIOS.

Demostracion.

1.° $OO' = OA + AB + BO' > OA + BO'$ (fig. 62, 1.°)
2.° $OO' = OP + PO'$ (fig. 62, 2.°)
3.° $OO' < O'A + OA$ y $> O'A - OA$ (fig. 62, 3.°)
4.° $OO' = OA - O'A$ (fig. 62, 4.°)
5.° $OO' = OA - O'A = OA - (O'A' + AA') < OA - O'A'$ (figura 62, 5.°)

RECÍPROCAMENTE.—1.° *Si la distancia de los centros es mayor que la suma de los rádios*, LAS CIRCUNFERENCIAS SON EXTERIORES.

2.° *Si la distancia de los centros es igual á la suma de los rádios*, LAS CIRCUNFERENCIAS SON TANGENTES EXTERIORMENTE.

3.° *Si la distancia de los centros es menor que la suma de los rádios y mayor que su diferencia*, LAS CIRCUNFERENCIAS SE CORTAN.

4.° *Si la distancia de los centros es igual á la diferencia de los rádios*, LAS CIRCUNFERENCIAS SON TANGENTES INTERIORMENTE.

5.° *Si la distancia de los centros es menor que la diferencia de los rádios*, UNA CIRCUNFERENCIA ES INTERIOR Á LA OTRA.

Demostracion.—*(Ad absurdum)*.

Ejemplo.—Si la distancia de los centros es igual á la suma de los rádios las circunferencias son tangentes exteriormente, pues si esto no se verificase, serían exteriores, secantes, tangentes interiormente ó interiores, y en ninguno de estos casos, la diferencia de los centros sería igual á la suma de los rádios, lo que es contra la hipótesis.

LIBRO III.

APLICACION DE LA TEORIA DE LA PROPORCIONALIDAD

de las magnitudes á la geometria.

I.—NOCIONES PRELIMINARES SOBRE LA PROPORCIONALIDAD DE LAS MAGNITUDES GEOMÉTRICAS.

132. Para que dos entidades puedan considerarse como magnitudes y entrar en el dominio de las Matemáticas, basta que estén definidas su *igualdad* y su *suma*. En este caso podrá obtenerse su *medida*.

Medir una cantidad conmensurable con otra, es hallar las veces que contiene á ésta ó á una de sus partes alícuotas, y el número que expresa esta medida será *entero* en el primer caso, y *fraccionario* en el segundo.

Si se trata de medir una magnitud *inconmensurable* con la unidad elegida, se dividirá ésta en un número cualquiera n de partes iguales entre sí y menores que la magnitud M que quiere medirse, y tomando 1, 2, 3..... de estas partes, se tendrá una série de magnitudes.

$$M_1\ , M_2 \ldots\ldots\ M_k\ , M_{k+1} \ldots\ldots,$$

cuyas medidas respectivas son los números

$$\frac{1}{n}\ , \frac{2}{n}\ ,\ldots\ldots\ \frac{k}{n}\ , \frac{k+1}{n}$$

La magnitud, cuya medida buscamos, tiene que hallarse necesariamente entre dos de las magnitudes de la série superior, así como su medida entre los dos números correspondientes de la série inferior, y por consiguiente, tomando como su medida, uno cualquiera de éstos, se cometerá un error por exceso ó defecto menor que la n ^{sima} parte la unidad, error que puede hacerse menor que cualquier valor dado, haciendo suficientemente grande el número n.

La relacion examinada entre las magnitudes M, M_k y M_{k+1}, que se expresa diciendo, que la primera es el *límite* de las segundas, se traduce aritméticamente diciendo, que el *número que mide la primera es el límite de los números que miden las segundas.*

Este tránsito de las magnitudes á los números que las miden, debe considerarse en el estudio de su *relacion* ó *razon*, diciéndose que: *cuando dos magnitudes han sido medidas con una misma unidad, se obtiene su relacion, dividiendo el número que mide la primera por el número que mide la segunda,* es decir, *se obtiene la relacion de dos magnitudes, mediante la relacion de los números que las miden.*

133. La medicion de unas magnitudes por otras sólo es realizable cuando se halla establecida su proporcionalidad; y las condiciones necesarias y suficientes de ésta, son *la correspondencia en la igualdad y en la suma*, la cual se establece por el siguiente

Principio: *Dos magnitudes son proporcionales entre sí, cuando á dos valores cualesquiera, pero iguales, de la primera, corresponden dos valores iguales de la segunda; y cuando además, á la suma de dos valores cualesquiera de la primera corresponde la suma de los valores correspondientes de la segunda* (1).

Demostracion.—Sean a y a' dos valores cualesquiera de la primera magnitud, b y b' los valores correspondientes de la segunda.

Supongamos, por ejemplo, que la relacion $\frac{a}{a'}$ sea $\frac{3}{5}$

Si representamos por α la quinta parte de a′, se tendrá:

$$a = 3\alpha \qquad a' = 5\alpha.$$

(1) No encontrando medio de sustituir ventajosamente la excelente exposicion que sobre el particular hacen los Sres. Rouché y Comberouse en su Geometría elemental, la trasladamos íntegra.

Representando por β el valor de la segunda magnitud, correspondiente al valor α de la primera, tendremos las dos séries de valores correspondientes de las mismas:

$$\alpha + \alpha \text{ ó } 2\alpha,\ 2\alpha + \alpha \text{ ó } 3\alpha,\ 3\alpha + \alpha \text{ ó } 4\alpha,\ 4\alpha + \alpha \text{ ó } 5\alpha$$
$$\beta + \beta \text{ ó } 2\beta,\ 2\beta + \beta \text{ ó } 3\beta,\ 3\beta + \beta \text{ ó } 4\beta,\ 4\beta + \beta \text{ ó } 5\beta$$

Pero á los valores 3α ó a y 5α ó a′ de la primera magnitud, corresponden, por hipótesis, los valores b y b′ de la segunda;

luego, segun dicha série, se tendrá:

$$b = 3\beta \qquad b' = 5\beta;$$

luego $$\frac{b}{b'} = \frac{3}{5} = \frac{a}{a'}.$$

Recíprocamente.—*Si dos magnitudes son proporcionales:* 1.° *la relacion*

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

manifiesta que para a = a′ *se tiene* b = b′, *es decir, que* Á VALORES IGUALES DE LA PRIMERA MAGNITUD CORRESPONDEN VALORES IGUALES DE LA SEGUNDA.

2.° Dicha relacion da tambien,

$$\frac{a + a'}{a} = \frac{b + b'}{b},$$

es decir, que Á LA SUMA DE DOS VALORES CUALESQUIERA DE LA PRIMERA MAGNITUD CORRESPONDE LA SUMA DE LOS DOS VALORES CORRESPONDIENTES DE LA SEGUNDA.

II.—ESPECIES PARTICULARES DE MAGNITUDES PROPORCIONALES.

§ 1.°—Segmentos rectilíneos.

TEOREMA.

134. *Si dos líneas que se encuentran* (1) *se hallan cortadas por un sistema de* ‖ as; 1.° LOS SEGMENTOS INTERCEPTADOS

(1) Si fuesen ‖ as los segmentos serían respectivamente iguales, como partes de ‖ as comprendidas entre ‖ as.

POR LA ÚNA SON PROPORCIONALES Á LOS SEGMENTOS INTERCEPTADOS POR LA OTRA, y 2.° DICHAS $\|^{as}$ SON Á SU VEZ PROPORCIONALES Á LAS DISTANCIAS RESPECTIVAS DE SUS $[.]^{s}$ DE INTERSECCION CON LAS $|^{as}$ DADAS AL [.] DE ENCUENTRO DE ÉSTAS.

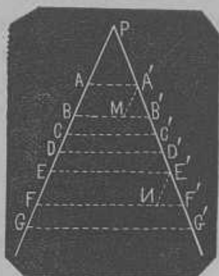

Figura 63.

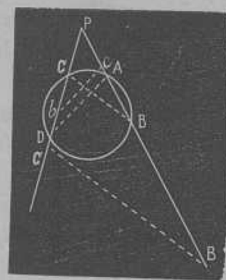

Figura 64.

1.° **Hipótesis.**—$A'B' = E'F'$, $C'D' = F'G'$, $E'G' = A'B' + C'D'$ (fig. 63).

Construccion.—Trácense $A'M$, $E'N$ $\|^{as}$ á PG.

1.° **Demostracion.**—$A'B' = E'F'$ (hipótesis)

$$\angle MA'B = \angle NE'F' \ (97);$$
$$\angle MB'A' = \angle NF'E' \ (97);$$

luego el $\triangle A'MB' = \cong \triangle E'NF'$ (89);

luego $A'M = E'N$ ó $AB = EF$ (107).

2.° Siendo $E'F' = A'B'$, $F'G' = C'D'$, se tendrá (1.°)

$$EF = AB,\ FG = CD;$$

luego (sumando) $EF + FG = AB + CD$.

El **principio** de la proporcionalidad de las magnitudes, es, pues, aplicable al caso actual; y el teorema queda demostrado en su primera parte.

Observacion.—Siendo proporcionales los segmentos de cada $|^{a}$ con sus correspondientes de la otra, tambien serán proporcionales sumas cualesquiera de segmentos de la 1.ª con las sumas de los segmentos correspondientes de la 2.ª, y á su vez dos sumas cualesquiera de segmentos correspondientes, con dos de éstos tambien correspondientes;

luego $\dfrac{PA + AF}{PA' + A'F'} = \dfrac{PA}{PA'} = \dfrac{AB}{A'B'}$ (fig. 63).

ó $$\frac{PF}{P'F'} = \frac{PA}{PA'} = \frac{AF}{A'F'},$$

lo cual puede enunciarse diciendo que, si dos | os de un △ ó sus prolongaciones (fig. 63) se cortan por una ‖ a al tercer | o, aquellos | os son proporcionales á los segmentos correspondientes interceptados por la ‖ a.

2.° En el △ PBB′, por ejemplo, pueden considerarse como paralelas las | as PB y MA′, y como secantes las | as B′P y B′B, y se tendrá:

$$\frac{B'B}{BM} \text{ ó } \frac{B'B}{A'A} = \frac{B'P}{A'P} (1.°),$$

conforme con la 2.ª parte del enunciado del teorema.

TEOREMA.

135. *Si por un [.] C de un | ° DP de un △ APD (figura 64) ó de su prolongacion, se traza una | a anti-paralela (1), con otro | ° AD (respecto al ∠ P)*, CORTARÁ AL 3.° PB, Ó Á SU PROLONGACION, EN UN PUNTO TAL, QUE SE TENGA

$$PC.\ PD = PA.\ PB.$$

Construccion.—Tómese sobre PA una distancia $Pc = PC$ y por c, trácese una ‖ a $c\,b$ á DA.

Demostracion.—El triángulo $Pcb \cong \triangle PCB$, porque

$Pc = PC$ (construccion), ∠ P es comun,

∠ Pbc = ∠ PDA (97, 2.°) = ∠ PBC (hipótesis);

luego tambien $Pb = PB$.

Pero, siendo bc ‖ a á AD, se tiene (134, 1.°)

$$\frac{Pc}{PA} = \frac{Pb}{PD} \text{ ó } \frac{PC}{PA} = \frac{PB}{PD} \text{ ó } PC.\ PD = PA.\ PD,$$

y el teorema queda demostrado.

§ 2.°—Ángulos y arcos.

TEOREMA.

136. *Los ∠ s son proporcionales á sus arcos correspondientes.*

(1) Se dice que dos | as AD y BC (fig. 64) son anti-paralelas respecto de dos | os PB y PC de un ∠ P, cuando una de ellas forma con uno de éstos | os un ∠ igual al que la otra | a forma con el otro | o.

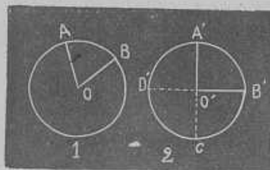

Figura 65.

Demostracion.—Como la superposicion de dos $\angle^s$ ó de dos sumas angulares iguales, lleva consigo la superposicion de los arcos correspondientes, queda establecido el teorema.

COROLARIO.—*La medida de un ángulo es la misma que la del arco que interceptan sus lados en una circunferencia descrita desde su vértice como centro con un rádio cualquiera.*

Demostracion.—Segun el teorema, se tiene (fig. 65):

$$\frac{\text{arc. AB}}{\text{arc. A'B'}} = \frac{\angle \text{ AOB}}{\angle \text{ A'O'B'}}$$

Pero, si se supone que el $\angle$ A'O'B' y su arco A'B' son las unidades de medida angular y de arco, resultará que el primer miembro de la igualdad obtenida expresa la medida del arco AB, y que el segundo expresa la medida del $\angle$ correspondiente AOB.

Observacion.—Se han adoptado como unidades angular y de arcos el *ángulo recto* y *su arco correspondiente*, que es el *cuadrante* (117, *cor.*)

Para mayor facilidad en la práctica, se considera el cuadrante dividido en 90 partes iguales que se llaman *grados*, cada grado en 60 partes iguales, que se llaman *minutos*, y cada minuto en 60 pártes iguales llamadas *segundos*.

Así, 15°, 13′ y 14″ se lee 15 grados, 13 minutos y 14 segundos.

Los grados, minutos y segundos se expresan en la escritura por medio de un cero y uno ó dos acentos colocados á la derecha del número á que afectan y un poco más elevados.

Tambien se suele dividir cada cuadrante en 100 grados, cada grado en 100 minutos y cada minuto en 100 segundos.

TEOREMA.

137. *La medida de los ángulos inscritos y semi-inscritos* ES LA MITAD DEL ARCO (1) QUE INTERCEPTAN SUS $|^{os}$ *en la*

(1) Enunciado abreviado; se toma el arco por el número que lo mide.

circunferencia; la de los interiores excéntricos ES LA SEMISUMA DE LOS ARCOS INTERCEPTADOS POR SUS | OS Y SU PROLONGACION, *y la de los exteriores secantes ó tangentes* ES LA SEMIDIFERENCIA ENTRE LOS ARCOS CÓNCAVOS Y CONVEXOS.

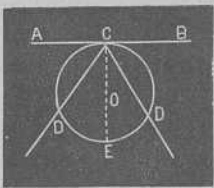

Figura 66.

Demostracion.—1.° Siendo el $\angle$ ABC $= \frac{1}{2}$ $\angle$ AOC (118, *cor*, 1.°) (figura 54); la medida del $\angle$ ABC será tambien la mitad de la medida del $\angle$ AOC, es decir, $\frac{1}{2}$ arco AC.

2.° $\angle$ ACD $=$ $\angle$ ACE $\pm$ $\angle$ ECD (fig. 66); pero el $\llcorner$ ACE tiene por medida un cuadrante, ó sea $\frac{1}{2}$ arc. CDE; luego el $\angle$ ACD tiene por medida

$$\frac{1}{2} \text{ arc. CDE} \pm \frac{1}{2} \text{ arc. ED},$$

es decir, $\frac{1}{2}$ arc. CD ó $\frac{1}{2}$ arc. CDED.

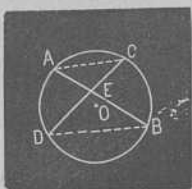

Figura 67.

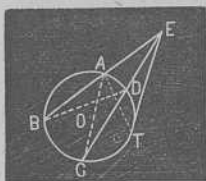

Figura 68.

3.° Se tiene, respectivamente, en las figuras 67 y 68: $\angle$ BEC $=$ $\angle$ BAC $+$ $\angle$ ACD, $\angle$ BEC $=$ BAC $-$ $\angle$ ACD; pero los $\angle^{s}$ BAC y ACD tienen, respectivamente, por medida

$$\frac{1}{2} \text{ arc CB}, \frac{1}{2} \text{ arc. AD}$$

luego:

el $\angle$ BEC $\left\{\begin{matrix}\text{(fig. 67)}\\ \text{(fig. 68)}\end{matrix}\right\}$ tiene por medida $\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2} \text{ (arc. BC + arc. AD).}\\ \frac{1}{2} \text{ (arc. BC — arc. AD).}\end{matrix}\right.$

De igual manera que cuando los $|^{os}$ del $\angle$ exterior son *dos secantes*, si son *una secante y una tangente ó dos tangentes*, la medida será la semi-diferencia entre los arcos cóncavo y convexo, pues, por ejemplo, si se trata del $\angle$ BET (fig. 68), se tendrá que, en el $\triangle$ AET:

$$\angle \text{AET ó } \angle \text{BET} = \angle \text{BAT} - \angle \text{ATE};$$

luego su medida será $\frac{1}{2}$ (arc. BCT — arc. ADT).

§ 3.° — Áreas y dimensiones.

TEOREMA.

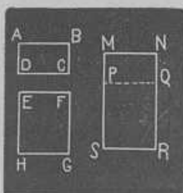

Figura 69.

138. 1.° *Las áreas de dos* $\square^s$ (1) *de igual base ó altura* SON PROPORCIONALES Á SUS ALTURAS Ó Á SUS BASES, *y* 2.° *las áreas de dos* $\square^s$ *de distintintas bases y alturas* SON PROPORCIONALES Á LOS PRODUCTOS RESPECTIVOS DE LAS UNAS POR LAS OTRAS.

Construccion.—Trácese en el $\square$MNRS (fig. 69) de igual base que los ABCD y EFGH y cuya altura es MS = AD + EH, la $\parallel^a$ PQ, de manera que se tenga:

$$\text{MP} = \text{AD}, \ \text{PS} = \text{EH}.$$

Demostracion.—Como á $\square^s$ de bases y alturas iguales corresponden superficies iguales, y como á $\square^s$ de bases iguales, y cuyas alturas son, en el uno, la suma de las alturas de los demás, corresponde una superficie que es la suma de las superficies de éstos, segun resulta de la construccion, el principio general es aplicable, y queda demostrado que *la relacion de dos* $\square^s$ *de bases iguales es igual á sus alturas.*

Si ahora se consideran las bases como alturas y las alturas como bases, podrá decirse que: la *relacion de dos* $\square^s$ *de iguales alturas es igual á la relacion de sus bases*; pero, segun se demuestra en Aritmética:

Cuando una magnitud M es proporcional á otras varias A, B, C; *la relacion de dos valores cualesquiera de M es*

(1) Los signos $\square$, $\varparallelogram$, $\square$, léanse, respectivamente, *rectángulo, paralelógramo, cuadrado.*

igual al producto de las relaciones de los valores correspondientes de las otras (1), y cómo, de lo expuesto, resulta que: *el área de un □ es á la vez proporcional á su base y altura*; resulta, en fin, que: *la relacion de las áreas de dos □s cualesquiera es igual al producto de las relaciones de sus bases y de sus alturas*, con lo que queda demostrada la 2.ª parte del teorema.

Corolario.—*El área de un □ tiene por medida el producto del número que mide su base por el número que mide su altura, cuando se toma por unidad de área el □ que tiene por lado la unidad de longitud.*

Demostracion.—Aplicando el teorema demostrado, al caso de considerarse un □ R, cuya altura y base sean a y b, y un □, cuyo | ° sea la unidad, resultará que

$$\frac{R}{\text{cuad.}^{\circ}} = \frac{a.\,b}{1.\,1} = a.\,b.$$

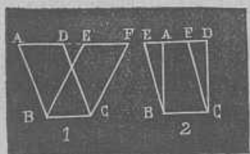

Figura 70.

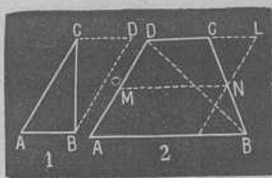

Figura 71.

TEOREMA.

139. *Dos □s de igual base y altura* SON EQUIVALENTES.

---

(1) Sean m, a, b, c; m', a', b', c' dos séries de valores correspondientes de las magnitudes M, A, B, C, obtenidos refiriendo cada una de éstas á una unidad de su espécie; se tendrá:

$$\frac{m}{m'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{b}{b'} \cdot \frac{c}{c'}.$$

Sea, en efecto, m_1 el valor de M que corresponde á los valores a', b, c de A, B, C, m_2 el correspondiente á a', b', c. Por definicion, se tiene

$$\frac{m}{m_1} = \frac{a}{a'}\ ;\ \frac{m_1}{m_2} = \frac{b}{b'}\ ;\ \frac{m_2}{m'} = \frac{c}{c'}$$

y, multiplicando miembro á miembro, se tiene

$$\frac{m.\ m_1\ m_2}{m_1\ m_2\ m'} \quad ó \quad \frac{m}{m'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{b}{b'} \cdot \frac{c}{c'}.$$

Hipótesis.—Sean los ▱^{s} ABCD y BCEE de la misma base y de alturas iguales (fig. 70).

Demostracion.—Si del trapecio BCFA (fig. 70, 1) se quita el triángulo CDF ó el EBA, quedará uno de los ▱^{s} ABCD ó BCFE; y lo mismo sucederá, si al trapecio ABCE (fig. 70, 2) se le aumenta uno ú otro de los △^{s} CDF ó EBA; pero siendo

CD = y ∥° á AB; CF = y ∥° á EB (fig. 70, 1 y 2);

resulta que el △ CDF ≅ △ ABE (87 y 98);

luego los restos en el 1er caso y las sumas en el 2.° tendrán igual valor, es decir que

el ▱ ABCD es equivalente al ▱ BCFE.

Corolario.—*El área de un ▱ tiene por medida el producto de su base por su altura*; porque el área de un ▱ cualquiera es igual á la de un ▭ de la misma base y altura.

TEOREMA.

140. *Dos △^{s} de igual base y altura* son equivalentes.

Construccion.—Por el [.] C (fig. 71, 1) trácese la ∥^{a} CD á AB y por el [.] B, trácese la ∥^{a} BD á AC.

Demostracion.—En el ▱ ABCD se tiene

△ ABC = △ BCD;

luego, siendo un △ cualquiera la mitad de un ▱ de igual base y altura, resulta, en virtud del teorema anterior, demostrado éste.

Corolario 1.°—*El área de un △ tiene por medida la mitad del producto de su base por su altura*, pues, segun el teorema, el área de un △ es la mitad de la de un ▱ de la misma base y altura.

Corolario 2.°—*El área de un trapecio tiene por medida el producto de la semi-suma de sus bases por su altura.*

Demostracion.—Las áreas de los dos △^{s} ABD y DBC (fig. 71, 2) están expresadas, respectivamente, por

$\frac{1}{2}$ H. AB, y $\frac{1}{2}$ H. CD (*llamando* H *á la altura comun*);

luego (sumando),

$$\text{área del trapecio} = H.\frac{1}{2}(AB + CD).$$

Corolario 3.°—*El área de un polígono regular tiene por medida la mitad del producto de su perímetro por su apotema* (fig. 59), pues

$$\text{área de } \triangle OBC = OL.\ \frac{1}{2}\ BC$$

$$\text{área de } \triangle OCD = OQ.\ \frac{1}{2}\ CD$$

. . . .

y sumando, y sacando OL como factor comun, por ser

$$(OL = OQ = OP......),$$

$$\text{área del poligono} = \frac{1}{2}\ OL\,(BC + CD + DE....)$$

Observacion.—Para hallar el área de un polígono cualquiera, se descompone en triángulos, y se halla la de cada uno de éstos.

Corolario 4.°—*El área de un círculo tiene por medida el producto de su circunferencia por la mitad del rádio.*

Demostracion.—El área del círculo, es el límite de las áreas de los polígonos regulares inscritos, cuyo número de | os crece indefinidamente; pero, para un polígono regular inscrito, se tiene

$$s = p.\ \frac{1}{2}\ a$$

(designando por s, p y a el área, el perímetro y la apotema) y si S, C y R designan el área del círculo, su circunferencia, y su rádio; tendremos, en el límite, (observando que s tiende hácia S, p hácia C y a hácia R):

$$S = \frac{1}{2}\ C.\,R.$$

III.—DETERMINACION DE LAS FIGURAS MEDIANTE LA PROPORCIONALIDAD DE DISTANCIAS.

§ 1.°—Determinacion del punto en la recta.

141. **Axioma.**—*En la direccion de una* | ª *y, á contar desde un* [.] *fijo, á un lado de éste,* NO HAY MÁS QUE OTRO [.]

cuya distancia á aquél se halle en una razon dada con otra distancia ó longitud dada.

Este axioma no es más que una generalizacion de éste: *En la direccion de una* |ª *y, á un lado de un* [.], NO HAY MÁS QUE OTRO, *cuya distancia al* 1.° *sea igual á una longitud dada*, pues es evidente, que si no hay más que un solo [.], en este caso, tampoco dejará de haberlo, y único, cuando la distancia haya de ser, por ejemplo, una distancia igual á la mitad, tercera parte..... de la distancia fija, y en general, *una distancia en razon fija con la dada.*

TEOREMA.

Figura 72.

142. *Dados dos* [.]^s A y B (figura 72), **existen** *siempre en la* |ª *indefinida que los une, ó mejor, se hallan* **determinados** DOS [.]^s, *y* SOLAMENTE DOS *tales, que las relaciones de las distancias de cada uno de ellos á los* [.]^s A *y* B, *tengan un mismo valor dado; y dichos* [.]^s *se hallan situados al mismo lado del* [.] *medio* O *de la* |ª AB, *uno entre* A *y* B, y *el otro fuera; hallándose los dos á la izquierda del* O, *cuando la relacion es* < 1 *y á la derecha, cuando es* > 1.

Demostracion.—1.° Supóngase un [.] P en movimiento desde el centro O de la |ª AB hácia la izquierda. Se tendrá

En O $\quad AO = OB, \quad \frac{OA}{OB} = 1$

Entre O y A, $PA < PB, \quad \frac{PA}{PB} < 1$ (decreciendo hácia cero)

(PA va disminuyendo, miéntras PB va aumentando).

En A $\quad \left.\begin{array}{l} PA = 0 \\ PB = AB \end{array}\right\}$ luego $\frac{PA}{PB} = \frac{0}{AB} = 0.$

A la izquierda de A, $P'A < P'B, \quad \frac{P'A}{P'B} < 1$ (creciendo hácia 1).

(P'A y P'B aumentan en el mismo valor y, como el quebrado es propio, aumenta, siendo siempre inferior á 1, que es su *límite* cuando P′ se halle en el infinito).

2.° Supongamos un [.] Q en movimiento desde O hácia la derecha. Se tendrá:

En O $\quad OA = OB \quad \frac{OA}{OB} = 1.$

Entre O y A, $QA > QB, \quad \frac{QA}{QB} > 1$ (creciendo siempre).

(QA va aumentando, miéntras QB va disminuyendo, y como crece sin limite la fraccion, su valor se acerca al infinito, á medida que el [.] Q se aproxima á B).

En B $\quad \left.\begin{matrix} QA = AB \\ QB = 0 \end{matrix}\right\}$ luego $\frac{QA}{QB} = \frac{AB}{0} = \infty$

(es decir, la relacion ha llegado á su valor límite, el *infinito*).

A la derecha del [.] B, $Q'A > Q'B, \quad \frac{Q'A}{Q'B} > 1$ (decreciendo siempre).

(Q′A y Q′B aumentan en el mismo valor, y como el quebrado es impropio, disminuye, siendo siempre mayor que 1, valor límite del mismo, en que éste se convierte, cuando Q′ se halle en el infinito).

En resúmen:

(A la izquierda de O).

Entre A y O	la relacion DECRECE siempre de 1 á 0.
En A	la relacion es = 0.
A la izquierda de A	la relacion CRECE siempre de 1 á ∞.

(A la derecha de O).

Entre O y B	la relacion CRECE siempre de 1 á ∞.
En B	la relacion es = ∞.
A la derecha de B	la relacion DECRECE siempre de ∞ á 1.

Como el crecimiento ó decrecimiento es siempre contínuo con el movimiento del [.] P ó Q; para cada situacion, en cada region designada de la $|^a$, la relacion tiene un VALOR ÚNICO, sometido á las condiciones arriba designadas.

DEFINICIONES.

143. Los SEGMENTOS PA y PB (fig. 72) que tienen por suma AB se llaman *aditivos*, y los P′A y P′B que tienen AB por diferencia se llaman *sustractivos*.

Cuando $\frac{PA}{PB} = \frac{P'A}{P'B}$ se dice que los $[.]^s$ P y P′ dividen *armónicamente* á la $|^a$ AB ó que son *conjugados armónicos* respecto de esta $|^a$ y, **recíprocamente** lo mismo puede decirse de los $[.]^s$ A y B, respecto de la $|^a$ P P′.

§ 2.º—Determinacion de la recta en el plano.

TEOREMA.

144. *Si por un* [.] A′ *ó* A″, *tomado en un* $|^o$ SA *de un* △ SAD, *ó en su prolongacion* (fig. 73), *se traza una recta que corte al otro* SD, *ó á su prolongacion, de modo que se tenga*

$$\frac{A'S}{AA'} = \frac{D'S}{D'D} \quad ó \quad \frac{A''S}{A''A} = \frac{D''S}{D''D} ,$$

DICHA RECTA SERÁ PARALELA AL TERCER $|^o$.

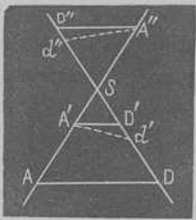

Figura 73.

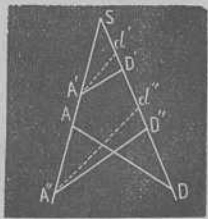

Figura 74.

Hipótesis.—Sea el △ ASD y la $|^a$ A′D′ ó A″D″.

Demostracion.—Segun (134); si por A′ ó A″ se traza una $\|^a$ al $|^o$ DA, cortará al $|^o$ SD, ó á su prolongacion, en un cierto [.] *d′* ó *d″*, y se tendrá

$$\frac{d'S}{d'D} = \frac{A'S}{A'A} \quad ó \quad \frac{d''S}{d''D} = \frac{A''S}{A''A} ;$$

pero (142) entre S y D, ó en la parte superior de SD; sólo hay un [.] D′ ó D″ que satisfaga á la relacion del enunciado; luego el [.] *d′* se confunde con D′ ó el *d″* con el D″, y por consiguiente: la |ª A′D′, ó la A″D″ se confunde con la paralela trazada á AD por el [.] A′ ó por el [.] A″.

TEOREMA.

145. *Si por un* [.] A′ *ó* A″, *tomado en un* |° SA *de un* △ ASD *ó en su prolongacion* (fig. 74), *se traza una* |ª A′D′ *ó* A″D″ *que corte á otro de sus* |os, *ó á su prolongacion, de modo que se tenga,*

$$SA.\ SA' = SD.\ SD' \quad ó \quad SA.\ SA'' = SD.\ SD'', \ [1]$$

DICHA RECTA SERÁ LA ANTI-PARALELA QUE POR EL [.] A′ *ó* A″ SE PUEDE TRAZAR AL 3.er |° AD.

Demostracion.—Segun (135), si por el [.] A′ ó A″ se traza la |ª anti-paralela á la AD con respecto al ∠ S; cortará al |° SD en un [.] *d′* ó *d″* tal, que:

$$SA.\ SA' = SD.\ Sd' \quad ó \quad SA.\ SA'' = SD.\ Sd'';$$

luego, en virtud de las relaciones [1], *d′* no es otro que D′ ó *d″* no es otro que D″; luego la recta A′D′ ó A″D″ se confunde con la anti-paralela que por el [.] A′ ó A″ puede trazarse á la |ª AD.

IV.—HOMOTÉCIA Y SEMEJANZA.

§ 1.º—Polígonos homotéticos y semejantes.

DEFINICIONES.

146. *Dado un sistema de* [.]s A, B, C.... (figs. 75 y 76) *situados en un plano; si se toman á partir de un* [.] *cualquiera del plano, y en la direccion de los rádios* SA, SB, SC....., *ó en su prolongacion, los segmentos* SA′, SB′, SC′....., *tales que se tenga:*

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \ldots\ldots = K,$$

se dirá que el nuevo sistema de [.]s *es* **homotético** *del sistema primitivo; los polígonos formados, uniendo dos á dos los* [.]s *correspondientes de los dos sistemas, se llaman homotéticos; el* [.] S *es el centro de homotécia y el n.º* K *es la relacion de homotécia.*

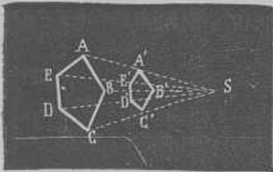

Figura 75.

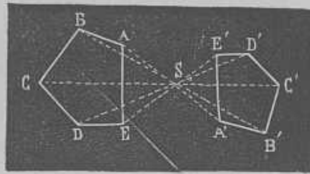

Figura 76.

La homotécia será *directa* ó *inversa*, segun que los segmentos estén tomados, con relacion al centro, al *mismo* ó á *distinto lado*. Los [.]ˢ A y A′, B y B′ se llaman *homólogos* y las rectas que los unen *rectas homólogas*.

TEOREMA.

147. *El polígono* ABCDE *formado, prolongando en una razon constante las distancias de un* [.] S (figs. 75 y 76) *del plano á los vértices de un polígono* A′B′C′D′E′, TIENE SUS LADOS RESPECTIVAMENTE ∥ ᵒˢ Y PROPORCIONALES Á LOS DE ÉSTE Y SUS ∠ˢ HOMÓLOGOS IGUALES.

Demostracion.—Segun (144) AB es ∥ ª á A′B′, BC ∥ ª á B′C′........ Además, siendo ∥ ªˢ las | ªˢ de un sistema á sus homólogas de otro, se tendrá (134, 2.ª)

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{A'B'}{AB}, \quad \frac{SB'}{SB} = \frac{B'C'}{BC}, \quad \frac{SC'}{SC} = \frac{C'D'}{CD} \text{ y,}$$

y como $\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} \ldots\ldots = K$ (hipótesis),

resultará que $\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} \ldots\ldots = K.$

Observacion.—De igual manera se demostrará que *las* diagonales de dichos polígonos son tambien respectivamente ∥ ªˢ proporcionales, entre sí y con los | ᵒˢ.

Recíprocamente.—*Si los polígonos tienen sus* | ᵒˢ *respectivamente paralelos y en una razon constante*, LAS RECTAS QUE UNEN SUS VÉRTICES HOMÓLOGOS SE ENCONTRARÁN EN UN [.] CUYAS DISTANCIAS Á ÉSTOS SE HALLAN EN UNA RAZON DADA.

Demostracion.—Las | ªˢ A′A y C′C, por ejemplo, (figuras 75 y 76) tienen que encontrar á la DD′ prolongada en un mismo [.] S, pues si lo verificase la 1.ª en un [.] S y la 2.ª en un [.] distinto S′ resultaría (134, 2.°);

$$\frac{SD'}{SD} = \frac{A'D'}{AD} = K \quad y \quad \frac{S'D'}{S'D} = \frac{C'D'}{CD} = K (147\ \textit{observ.}),$$

es decir, que á un lado del segmento DD′, (fig. 75), ó entre D y D′ (fig. 76), habría dos [.]ˢ tales, que las relaciones de sus distancias á los extremos de éste, tuvieran un mismo valor, lo cual es absurdo (142).

Se tendrá además:

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \ldots\ldots = K\ (134,\ 2.°),$$

y por consiguiente, los polígonos serán homotéticos.

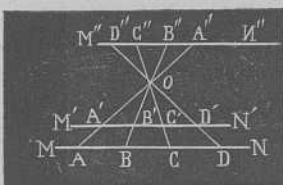

Figura 77.

Caso particular. Si en vez del polígono ABCDE (fig. 75), se considera la | ª ABCDE (figura 77); se observará que las figuras homotéticas A′B′C′D′, A″B″C″D″ son tambien líneas | ᵃˢ, y que *si los segmentos de dos de ellas se hallan en una misma relacion*, LAS RECTAS QUE UNAN DOS Á DOS LOS [.]ˢ HOMÓLOGOS, SE CORTARÁN EN UN MISMO [.] O.

COROLARIO.—*Dos polígonos homotéticos* SE PUEDEN DESCOMPONER CON IGUAL NÚMERO DE △ˢ HOMOTÉTICOS É IGUALMENTE DISPUESTOS.

DEFINICION.

148. Se llaman *polígonos semejantes* los que tienen sus ∠ˢ homólogos iguales, y sus | ᵒˢ homólogos proporcionales; y el teorema directo puede enunciarse, diciendo que: *Si dos polígonos son homotéticos*, SERÁN SEMEJANTES.

De esto se deduce que: *para demostrar que dos polígonos son semejantes basta probar que uno de ellos es igual á uno de los homotéticos del otro.*

COROLARIO.—*Dos polígonos regulares* SON SEMEJANTES, puesto que los | ᵒˢ del uno están en la misma razon que los lados del otro y los $\angle^s$ son iguales, como la misma parte alícuota de una misma suma.

§ 2.º—Casos de la semejanza de triángulos

TEOREMA.

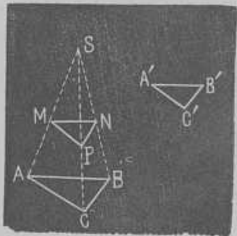

Figura 78.

149. DÓS TRIÁNGULOS SON SEMEJANTES ENTRE SÍ: 1.º *cuando tienen dos $\angle^s$ respectivamente iguales.*

2.º *Cuando tienen un $\angle$ igual, comprendido entre dos $|^{os}$ proporcionales.*

3.º *Cuando tienen sus $|^{os}$ respectivamente proporcionales.*

1.er CASO. **Hipótesis.** $\angle A' = \angle A$, $\angle C' = \angle C$.

Construccion.—Desde un [.] cualquiera S, tomado como centro de homotécia, trácense las $|^{as}$ SA, SC, SB (fig. 78). Tómese desde S, en la direccion SA, un segmento SM, en la misma razon con SA, que dos $|^{os}$ homólogos AC y A'C' de los $\triangle^s$ propuestos; y trácense, en fin, la $\|^a$ MP á la AC, la $\|^a$ PN á la CB y únase el [.] N con el M.

Demostracion.—El $\angle$ MNP es homotético con el ABC. Siendo la relacion de homotécia la misma que la de semejanza, se tendrá que MP y A'C' están con respecto á AC en la misma razon, luego

$$MP = A'C'$$

Además $\angle NMP = \angle BAC$ (construccion)

$\angle B'A'C' = \angle BAC$ (hipótesis);

luego $\angle NMP = \angle B'A'C'$.

$\angle MPN = \angle ACB$ (construccion)

$\angle A'C'B' = \angle ACB$ (hipótesis);

luego $\angle MPN \cong \angle A'C'B'$

El $\triangle$ MNP es, pues, igual al $\triangle$ A'B'C' (89); pero aquél es semejante al ABC (148); luego éste tambien lo será.

2.º CASO. **Hipótesis.**— $\angle ACB = \angle A'C'B'$, $\dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{C'B'}{CB}$

Construccion.—La misma que anteriormente.

Demostracion.—El $\triangle$ MNP es homotético del ABC, y se tiene:

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{C'B'}{CB} \text{ (hipótesis)}$$

$$\frac{MP}{AC} = \frac{PN}{CB} = \frac{SM}{SA} = \frac{A'C'}{AC} \text{ (construccion)};$$

ó $$\frac{MP}{AC} = \frac{A'C'}{AC} \quad \text{y} \quad \frac{PN}{CB} = \frac{C'B'}{CB};$$

luego $A'C' = MP$ y $C'B' = PN$;

y como $\angle ACB = \angle A'C'B'$ (hipótesis),

y $\angle ACB = \angle MPN$ (construccion);

será $\angle A'C'B' = \angle MPN$

luego el $\triangle MPN \cong \triangle A'B'C'$ (87);

luego el $\triangle$ A'B'C' es semejante al $\triangle$ ABC (148).

3er caso. **Hipótesis.**— $\frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B'}{AB}$.

Construccion.—La misma que en los casos anteriores.

Demostracion.—El $\triangle$ MNP es homotético del ABC.

Siendo la relacion homotética, en virtud de la construccion, igual á la de semejanza, teniéndose por lo tanto

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B'}{AB} \text{ (hipótesis)},$$

$$\frac{MP}{AC} = \frac{PN}{CB} = \frac{NM}{AB} = \frac{SM}{SA} = \frac{A'C'}{AC} \text{ (construccion)};$$

luego $\left(\text{en virtud de la razon comun } \frac{A'C'}{AC}\right)$

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{MP}{AC} = \frac{PN}{CB} = \frac{NM}{AB}$$

ó $$\frac{A'C'}{AC} = \frac{MP}{AC}, \quad \frac{B'C'}{BC} = \frac{PN}{BC}, \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{NM}{AB}$$

luego $A'C' = MP$, $B'C' = PN$, $A'B' = NM$

luego el $\triangle MPN \cong \triangle A'B'C'$, (82);

luego el $\triangle$ A'B'C' es semejante al $\triangle$ ABC (148).

TEOREMA.

150. Dos $\triangle^s$ RECTÁNGULOS SON SEMEJANTES, *cuando tienen*

un $\angle$ *agudo igual, ó cuando tienen proporcionales las hipotenusas y dos catetos homólogos.*

La demostracion es análoga á las anteriores, reduciéndose á deducir la igualdad de uno de los $\triangle^s$ propuestos con uno de los homotéticos del otro, en virtud del caso de igualdad, análogo al de semejanza de que se trata.

TEOREMA.

151. *Dos* $\triangle^s$ *que tienen sus* $|^{os}$ *respectivamente* $\|^{os}$ *ó* $\perp^s$, SON SEMEJANTES.

Demostracion.—Llamando A, B, C, los $\angle^s$ del uno, y A′, B′, C′, los homólogos del otro, tiene que ocurrir alguno de estos tres casos:

1.° $\angle A + \angle A' = 2 \llcorner^s$, $\angle B + \angle B' = 2 \llcorner^s$, $\angle C + \angle C' = 2 \llcorner^s$.

2.° $\angle A + \angle A' = 2 \llcorner^s$, $\angle B + \angle B' = 2 \llcorner^s$, $\angle C = \angle C'$.

3.° $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$.

Y como los dos primeros no pueden ocurrir, porque entre los seis $\angle^s$ no pueden valer más de $4 \llcorner^s$, los $\triangle^s$ propuestos serán equiángulos, y por consiguiente semejantes.

§ 3.°—Semejanza de los polígonos.

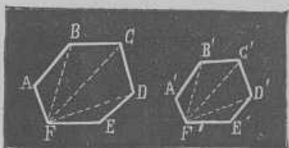

Figura 79.

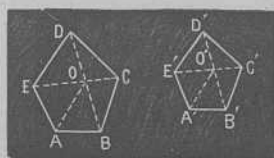

Figura 80.

TEOREMA.

152. *Si dos polígonos se componen del mismo número de* $\triangle^s$ *semejantes y semejantemente dispuestos*, SON SEMEJANTES.

Hipótesis.—$\triangle$ ABF semejante á $\triangle$ A′B′F′; $\triangle$ BCF semejante al $\triangle$A ′B′F′.......

Demostracion.—En virtud de la hipótesis:

$\angle A = \angle A'$ (fig. 79) $\qquad \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AF}{A'F'} = \dfrac{FB}{F'B'}$

$\angle ABF = \angle A'B'F'$

$\angle FBC = \angle F'B'C' \qquad \dfrac{FB}{F'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CF}{C'F'}$

$\angle BCF = \angle B'C'F'$

$\angle FCD = \angle F'C'D' \qquad \dfrac{CF}{C'F'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{DF}{D'F'}$

. . . .

luego:

$\angle ABF + \angle FBC = \angle A'B'F' + \angle F'B'C'$ ó $\angle ABC = \angle A'B'C'$

$\angle BCF + \angle FCD = \angle B'C'F' + \angle F'C'D'$ ó $\angle BCD = \angle B'C'D'$

. . . .

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AF}{A'F'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} \ldots\ldots$$

Recíprocamente.—*Si dos polígonos son semejantes,* PUEDEN DESCOMPONERSE EN IGUAL NÚMERO DE $\triangle^s$ SEMEJANTES Y SEMEJANTEMENTE DISPUESTOS (fig. 80).

Construccion.—Dado un [.] O en el polígono ABCDEF, trácese el homólogo O′ del A′B′C′D′E′F′, es decir, un [.] tal, que los $\triangle^s$ AOB y A′O′B′ sean semejantes, y únanse dichos [.]^s á los vértices de sus polígonos respectivos.

Demostracion.—El $\triangle$ AOB es semejante al $\triangle$ A′O′B′ (por construccion);

luego $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{OB}{O'B'}$ y $\angle OBA = \angle O'B'A'$;

pero $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'}$ y $\angle ABC = \angle A'B'C'$ (hipótesis);

luego $\dfrac{OB}{O'B'} = \dfrac{BC}{B'C'}$ y $\angle OBC = \angle O'B'C'$,

y los $\triangle^s$ OBC y O′B′C′ son semejantes.

Continuando de esta manera, se concluirá por demostrar la semejanza de todos los $\triangle^s$ componentes de los polígonos.

§ 4.º—Triángulos semejantes en el círculo.

TEOREMA.

153. *Si desde un* [.] *tomado en el plano de un círculo, se trazan secantes á dicho círculo, el producto de las distancias de dicho* [.] *á los dos* [.]^s *de interseccion de cada*

ecante con la circunferencia, es constante, cualquiera que sea la direccion de la secante.

1er CASO. **Hipótesis.**—Sea el [.] E situado en el interior de la circunferencia O (fig. 67).

Construccion.—Trácense las cuerdas AC y DB.

Demostracion.—Los $\triangle^s$ AEC y DEB son semejantes, por tenér el $\angle$ ACE $= \angle$ ABD y el $\angle$ CAB $= \angle$ CDB (149, 1.°); luego $\frac{AE}{ED} = \frac{EC}{EB}$ ó EA. EB $=$ EC. ED.

2.° CASO.—Se demuestra repitiendo las consideraciones del 1.° (fig. 68).

Observacion.—Las relaciones expresadas en el teorema se deducen inmediatamente considerando que AC y DB son anti-paralelas respecto al $\angle$ E.

COROLARIO.—*Si desde un* [.] E *exterior á una circunferencia se le trazan una tangente y una secante; el segmento de la tangente comprendido entre el* [.] E *y el de contacto, es medio proporcional entre el segmento externo de la cuerda y toda ésta* (fig. 68).

Demostracion.—Se ve que este corolario es un caso particular del teorema, considerado cuando el [.] E es exterior á la circunferencia; porque la tangente es el límite de las posiciones de la secante AB que gira alrededor del [.] E, hasta que los dos segmentos AE y BE sean iguales, y entónces el cuadrado del segmento de la tangente será igual al producto constante dado.

Observacion.—Tambien puede deducirse esta proposicion de la semejanza de los $\triangle$ AET y EBT (fig. 68).

V.—RELACIONES MÉTRICAS ENTRE LOS ELEMENTOS RECTILÍNEOS DE UN TRIÁNGULO.

TEOREMA.

154. *Si desde el vértice del* $\llcorner$ *de un* $\triangle$ *rectángulo se traza la* $\perp$ *á la hipotenusa:* 1.° CADA CATETO ES MEDIO PROPORCIONAL ENTRE LA HIPOTENUSA Y SU PROYECCION SOBRE ÉSTA. 2.° LA $\perp$ AD ES MEDIA PROPORCIONAL ENTRE LOS SEGMENTOS BD Y CD DE LA HIPOTENUSA (fig. 81).

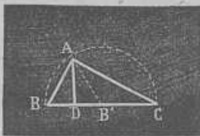

Figura 81.

Demostracion.—1.° Las | as AC y AD son anti-paralelas respecto del ∠ B, puesto que forman un ∟ la primera con AB y la segunda con BC, luego (135)

$$BA^2 = BC.\ BD,$$

y análogamente se demuestra que

$$CA^2 = BC.\ CD.$$

2.° Teniendo los △s rectángulos ABD y ABC el ∠ B comun, resultará que

$$\angle DAB = \angle C;$$

pero, si se traza la | a AB′ de modo que el ∠ B′AD sea = al ∠ DAB, se tendrá que

$$AB' = AB\ (106,\ 2.°)$$

y AB′ y AC son anti-paralelas en el ∠ ADC;

luego (135) $AD^2 = B'D.\ CD$ ó $AD^2 = BC.\ CD.$

Observacion.—La semejanza de los △s parciales con el total, ó de los parciales entre sí dá inmediatamente estas relaciones.

COROLARIO.—*Uniendo un* [.] *cualquiera de una circunferencia con las extremidades* B *y* C *de un diámetro, se forma un △ rectángulo* BAC (fig. 81), lo cual permite enunciar la proposicion anterior de la manera siguiente:

1.° *Toda cuerda* AB *de una circunferencia* ES MEDIA PROPORCIONAL ENTRE EL DIÁMETRO BC QUE PASA POR UNA DE SUS EXTREMIDADES Y SU PROYECCION BD SOBRE DICHO DIÁMETRO.

2.° *La* ⊥ AD *bajada desde un* [.] *cualquiera de la circunferencia sobre un diámetro* BC ES MEDIA PROPORCIONAL ENTRE LOS DOS SEGMENTOS BD Y CD DE DICHO DIÁMETRO.

TEOREMA.

155. *Si los tres* | os *de un △ rectángulo están evaluados en números por medio de una unidad comun,* EL CUADRADO DEL NÚMERO QUE MIDE LA HIPOTENUSA ES IGUAL Á LA SUMA DE LOS CUADRADOS DE LOS NÚMEROS QUE MIDEN LOS CATETOS.

Demostracion.—Sumando las dos igualdades obtenidas,

$$AB^2 = BC.\ BD \qquad AC^2 = BC.\ CD,$$

resulta $AB^2 + AC^2 = BC\ (BD + DC) = BC^2$

TEOREMA.

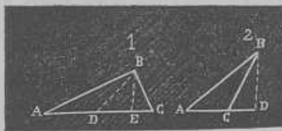

Figura 82.

156. *En todo △, el cuadrado de un |° opuesto á un ∠ agudo es igual á la suma de los cuadrados de los otros |os ménos dos veces el producto de uno de éstos |os por la proyeccion del otro sobre él.*

Construccion.—Trácese la ⊥ BE al |° AC (fig. 82, 1).

Demostracion.—En el △ rectángulo ABE se tiene:

$$AB^2 = BE^2 + AE^2 \ [1];$$

pero $AE = AC - EC$ y $AE^2 = AC^2 - 2\ AC.\ EC + EC^2$;
y sustituyendo este valor en [1], se tendrá:

$$AB^2 = BE^2 + AC^2 - 2\ AC.\ EC + EC^2 \ [2];$$

pero, en la figura, se tiene (155) $BE^2 + EC^2 = BC^2$
y, sustituyendo en [2], se tendrá:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2\ AC.\ EC.$$

TEOREMA.

157. *En un △ obtusángulo, el cuadrado del |° opuesto al ∠ obtuso es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos |os mas dos veces el producto de uno de éstos por la proyeccion del otro sobre él.*

Construccion.—Bájese desde el vértice B la ⊥ BD á la base prolongada AC (fig. 82, 2).

Demostracion.—En el △ rectángulo ABD se tiene (155)

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 \ [1];$$

pero $AD = AC + CD$ y $AD^2 = DC^2 + 2\ AC.\ CD + CA^2$;
y, sustituyendo este valor en [1], se tendrá:

$$AB^2 = BD^2 + DC^2 + 2\ AC.\ CD + CA^2 \ [2];$$

pero, en la figura, se tiene (155)

$$BD^2 + CD^2 = BC^2,$$

y, sustituyendo en [2], se tendrá:

$$AB^2 = BC^2 + 2\ AC.\ CD + CA^2.$$

Corolario.—De los tres teoremas anteriores se puede deducir que, *en un △, el cuadrado de un |° es < = ó > que* *la suma de los cuadrados de los otros dos, segun que el ∠ opuesto á aquél es agudo, recto ú obtuso.*

Recíprocamente.—*Un ∠ de un △ es agudo, recto ú obtuso, segun que el cuadrado del* $|^{o}$ *opuesto es < = ó > que la suma de los cuadrados de los otros dos* $|^{os}$.

TEOREMA.

158. *La suma de los cuadrados de dos* $|^{os}$ *de un △ es igual á dos veces el cuadrado de la mediana* (1) *relativa al* 3^{er} $|^{o}$ *mas dos veces el cuadrado de la mitad de dicho* 3^{er} $|^{o}$ (fig. 82, 1).

Demostracion.—De los $\triangle^{s}$ ABD y CBD se deduce:

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 + 2\ AD.\ DE\ (157)$$

y

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2\ CD.\ DE\ (156)$$

y, sumando miembro á miembro,

$$AB^2 + BC^2 = 2\ BD^2 + 2\ AD^2$$

pues

$$AD = CD.$$

159. Restando dichas expresiones, se tiene:

$$AB^2 - BC^2 = 4\ AD.\ DE = 2\ AC.\ DE,$$

pues

$$AC = 2\ AD, \text{ luego:}$$

TEOREMA.

La diferencia de los cuadrados de dos $|^{os}$ *de un △ es igual al doble producto del* 3^{er} $|^{o}$ *por la proyeccion sobre éste* $|^{o}$ *de la mediana correspondiente.*

TEOREMA.

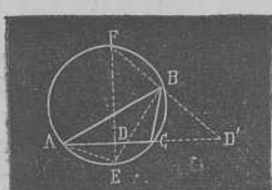

Figura 83.

160. *El producto de dos* $|^{os}$ *de un △ es igual al cuadrado de la bisectriz del ∠ comprendido mas el producto de los dos segmentos que esta bisectriz determina sobre el* 3^{er} $|^{o}$.

Hipótesis.—Sea ABC el △ propuesto, BE la bisectriz del ∠ B y AECBF la circunferencia circunscrita (fig. 83).

(1) La mediana del △ ABC respecto del $|^{o}$ AC (fig. 82, 1), es la $|^{a}$ BD que une el vértice B con el [.] medio de dicho $|^{o}$.

Demostracion.—Los $\triangle^s$ ABE y BDC son semejantes, porque

$\angle$ CBD $= \angle$ DBA (*hipótesis*) y $\angle$ BCD $= \angle$ BEA (118);

luego $$\frac{AB}{BD} = \frac{BE}{BC},$$

ó $AB.\,BC = BD.\,BE = BD\,(BD + DE) = BD^2 + BD.\,DE$;

pero $BD.\,DE = DC.\,DA$ (153, 1.°);

luego $AB.\,BC = BD^2 + DC.\,DA$.

TEOREMA.

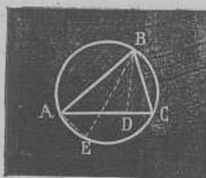

Figura 84.

161. *El producto de dos* $|^{os}$ AB *y* BC *de un* $\triangle$ ABC *es igual al producto del diámetro de la circunferencia circunscrita por la altura relativa al* 3er $|^{o}$ (fig. 84).

Construccion.—Trácese el diámetro BE y la cuerda EA.

Demostracion.—En los $\triangle^s$ rectángulos BCD y BEA se tiene

$\angle$ BCD $= \angle$ BEA (118);

luego son semejantes (149, 1.°), y se tendrá:

$$\frac{BC}{BD} = \frac{BE}{BA} \text{ ó } BC.\,BA = BE.\,BD.$$

TEOREMA.

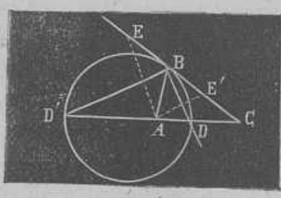

Figura 85.

162. *La razon entre dos* $|^{os}$ *de un* $\triangle$ ABC (fig. 85) *es la misma que la de los dos segmentos aditivos ó sustractivos que la bisectriz del* $\angle$ *comprendido, ó del* $\angle$ *suplementario á éste, forma con el* 3er $|^{o}$.

1.° **Construccion**. —Trácese por el vértice A la $\parallel^a$ AE á la bisectriz BD del $\angle$ ABC.

Demostracion.—Se tendrá (134, 1.°)

$$\frac{DC}{DA} = \frac{BC}{BE} \quad [1];$$

pero, siendo $\angle$ CBD = $\angle$ CEA (97, 2.°)
$\angle$ DBA = $\angle$ BAE (id.)
y $\angle$ CBD = $\angle$ DBA (por ser DB la bisectriz);
se tendrá $\angle$ CEA = $\angle$ BAE;
luego el $\triangle$ ABE es isósceles y

$$BE = BA \ (90);$$

y, en fin, la proporcion [1] se reducirá á

$$\frac{DC}{DA} = \frac{BC}{BA} \ [2],$$

como se quería demostrar.

2.° **Construccion.**—Trácese por el vértice A la ||ª AE′ á la bisectriz BD′ del $\angle$ ABE (fig. 85).

Demostracion.—Se tendrá (134, 1.°)

$$\frac{D'C}{D'A} = \frac{BC}{BE'} \ [3],$$

pero, siendo $\angle$ EBD′ = $\angle$ EE′A (97, 2.°)
$\angle$ D′BA = $\angle$ BAE′, (97, 2.°)
$\angle$ EBD′ = $\angle$ D′BA (por ser BD′ bisectriz del $\angle$ EBA),
se tendrá $\angle$ EE′A = $\angle$ BAE′;
luego el $\triangle$ ABE′ es isósceles (90), y

$$BE' = BA,$$

y la proporcion [3] se reducirá á

$$\frac{D'C}{D'A} = \frac{BC}{BA} [4],$$

como se quería demostrar.

Recíprocamente.—*Cuando la razon entre dos* |os *de un* $\triangle$ *es la misma que la de los segmentos aditivos ó sustractivos formados sobre el* 3er |° *por una* |ª *trazada desde el vértice comun de aquéllos;* DICHA |ª SERÁ LA BISECTRIZ DEL $\angle$ FORMADO POR LOS MISMOS Ó DE SU SUPLEMENTO.

Demostracion.—Entre A y C sólo hay un [.] tal, que la relacion de sus distancias á los [.]s A y C sea igual á la relacion $\frac{AB}{CB}$ (142); y fuera de este segmento, sólo hay un [.] D′ tal, que la relacion de sus distancias á los [.]s A y C sea tambien igual á $\frac{AB}{CC}$ (142); luego, segun el teorema directo, las | as que satisfagan á estas condiciones, no pueden ser más que la bisectrizes BD y BD′.

Corolario 1.°—Los dos [.]s D y D′ satisfacen á la proporcion

$$\frac{DA}{DC} = \frac{D'A}{D'C} \ ;$$

son pues, conjugados armónicos respecto de la recta AC (143); luego, *los dos | os de un* $\angle$, *la bisectriz de éste y la del* $\angle$ *suplementario, determinan sobre una secante cualquiera cuatro [.]s tales, que los dos últimos son conjugados con respecto á los otros dos.*

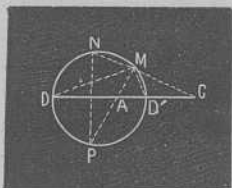

Figura 86.

2.° *Si un* $\triangle$ MNP (fig. 86) *se halla inscrito en una circunferencia,* EL DIÁMETRO DD′ $\perp$ Á UNO DE LOS | OS NP DE AQUÉL, QUEDA DIVIDIDO ARMÓNICAMENTE POR LOS OTROS DOS | os; pues siendo arc. DN = arc. DP (112), la | a MD es bisectriz del $\angle$ NMP y la $\perp$ MD′ á ésta (118, cor 2.°), es la bisectriz del $\angle$ suplementario PMC.

Recíprocamente.—*Si se tiene un* $\triangle$ MNP *inscrito en una circunferencia y el diámetro* DD′ *queda dividido armónicamente en los* [.]s A y C *por los* | os MP y MN; DICHO DIÁMETRO ES $\perp$ AL 3er | o NP, pues si la $\perp$ bajada desde N al diámetro cortase á la circunferencia en otro [.] P′ distinto del P, la | a P′M cortaría al diámetro DD′, segun el directo, en un [.] A′ conjugado armónico del C con respecto á DD′, y habría dos [.]s A y A′ entre D y D′ conjugados armónicos del C, lo cual es absurdo (142).

TEOREMA.

163. *El lugar geométrico de los* [.]s *cuyas distancias á dos fijos* A y C *están en una relacion dada* $\frac{m}{n}$, ES UNA CIRCUNFERENCIA (fig. 86).

Demostracion.—Si M es un [.] del lugar, se tendrá:

$$\frac{MA}{MC} = \frac{m}{n} \ [1];$$

pero existen sobre la $|^{a}$ indefinida AC dos $[.]^{s}$ del lugar, ó sea, dos $[.]^{s}$ D y D′ que satisfacen á las relaciones

$$\frac{DA}{DC} = \frac{m}{n}, \quad \frac{D'A}{D'C} = \frac{m}{n};$$

luego, en virtud de la anterior,

$$\frac{D'A}{D'C} = \frac{MA}{MC}, \quad \frac{DA}{DC} = \frac{MA}{MC}.$$

La primera de estas proporciones demuestra que MD′ es la bisectriz del $\angle$ AMC, y la segunda que MD es la bisectriz del $\angle$ suplementario AMN; pero las bisectrizes de dos $\angle^{s}$ suplementarios son $\perp^{s}$ entre sí; luego el [.] M, variable, es el vértice de un $\llcorner$ cuyos $|^{os}$ pasan por los $[.]^{s}$ fijos D y D′; luego todo [.] del lugar está en la circunferencia descrita sobre DD′ como diámetro y además, **recíprocamente**, *todo* [.] M *de la circunferencia* PERTENECE AL LUGAR; es decir, satisface á la relacion [1], pues dividiendo los $[.]^{s}$ A y C armónicamente al diámetro DD′, la $|^{a}$ NP (fig. 83) será la $\perp$ á éste (162, cor. 2.° recip.) luego (112);

$$\text{arc. DN} = \text{arc. DP};$$

luego DM es la bisectriz del $\angle$ NMP y la $|^{a}$ DM′ es la bisectriz del $\angle$ PMC;

luego (162) $$\frac{MA}{MC} = \frac{DA}{DC} = \frac{m}{n}.$$

VI.—RELACION ENTRE ÁNGULOS Y LADOS DE UN TRIÁNGULO.

§ 1.° – Ideas y principios fundamentales.

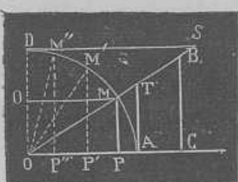

Figura 87.

164. Sea M un [.] de una circunferencia (fig. 87) trazada con un rádio OM, y consideremos el [.] A como orígen desde donde se cuentan los arcos de la circunferencia ó los $\angle^{s}$ correspondientes á éstos.

Se llama *seno* de un $\angle$ AOM, en la circunferencia AM....., la $\perp$ MP bajada desde el extremo M de su arco correspondiente AM al rádio que pasa por el orígen. *Coseno* del $\angle$ AOM es el seno MQ de su complemento $\angle$ MOD, ó tambien, *la parte* OP *de rádio comprendida entre el centro y el pié del seno. Tangente* del ∠ AOM es la parte AT de tangente comprendida entre el orígen y la prolongacion del rádio que pasa por el extremo. *Cotangente* del ∠ AOM es la tangente DS de su complemento.

El *seno*, *coseno*, *tangente* y *cotangente*, se conocen con el nombre de *líneas trigonométricas*.

Como *todos los* △^s *equiángulos entre sí* TIENEN SUS | os HOMÓLOGOS PROPORCIONALES y, recíprocamente, como *todos los* △s *cuyos* | os *homólogos son proporciones*, SON TAMBIEN EQUIÁNGULOS ENTRE SÍ; se concluirá, como consecuencia inmediata que, inversamente, *los* △s *que no son equiángulos entre sí*, NO TIENEN SUS | os HOMÓLOGOS PROPORCIONALES, y que los △s que *no tienen respectivamente proporcionales sus* | os NO SON EQUIÁNGULOS ENTRE SÍ. Si ahora, suponemos que el rádio OM, girando alrededor del centro O, tome todas las posiciones posibles en el cuadrante AD, desde la posicion AO hasta la final DO y que, en cada una de sus posiciones, se forma el △ rectángulo correspondiente MOP, M'OP',.... resultará que:

1.° Cada uno de los △s rectángulos MOP, M'OP',.....; podrá considerarse como *tipo* de una especie de △s, en la cual están incluidos todos los △s semejantes á él.

2.° Cada △ tendrá comunes, con todos los de su misma especie, las relaciones entre sus | os, y estas relaciones serán distintas para dos △s de distinta especie.

Considerando △s de una misma especie, tendremos que:

1.° Cada ∠ de un △ rectángulo estará determinado, cuando se dé la relacion de magnitud entre la hipotenusa y uno de los catetos, ó entre los dos catetos; es decir, cuando se dé una de las relaciones.

$$\frac{PM}{OM},\ \frac{OP}{OM},\ \frac{MP}{OP},\ \frac{OP}{MP},\ \text{ó mejor,}$$

$$\frac{PM}{OM},\ \frac{OP}{OM},\ \frac{AT}{OA},\ \frac{OA}{AT},$$

(reemplazando, por las dos últimas, sus iguales correspondientes al △ OAT).

2.° Tomando como unidad de longitud el rádio, estas relaciones expresarán los valores numéricos del *seno*, *coseno*, *tangente y cotangente* del ∠ AOM, que estará determinado por cualquiera de estas *líneas*, es decir, que *á cada valor dado de una de estas cuatro lineas corresponde un valor determinado de un* ∠, y **recíprocamente**; y por esta correspondencia resulta, que *la consideracion de una de estas líneas lleva consigo la del ∠ correspondiente, ó la consideracion de un ∠ la de cada una de estas cuatro líneas.*

3.° Si de cada △ tipo de una especie se desea pasar á alguno de los de ésta, bastará multiplicar cada línea por la relacion entre el $|^{o}$ correspondiente al $|^{o}$ unidad y éste. Así tendremos que, si se trata del △ OBC:

$$BC = \frac{PM}{OM} . OB = \text{sen} \angle AOM. OB$$

$$OC = \frac{OP}{OM} . OB = \cos \angle AOM. OB$$

$$BC = \frac{AT}{OA} . OC = \text{tg} \angle AOM. OC$$

ó más brevemente, reemplazando el ∠ AOM por su arco, que llamamos a

$$BC = \text{sen a}. OB \ [1] \qquad OC = \cos a. OB \ [2]$$

$$BC = \text{tang a}. OC \ [3] \qquad OC = \cot a. BC \ [4] \quad (1).$$

Las lineas trigonométricas, pues, son factores ó coeficientes que sirven para extender una relacion entre $|^{os}$ de un △ tipo, á cualquier △ de su especie.

Estas fórmulas, traducidas al lenguaje ordinario, pueden enunciarse en el siguiente

TEOREMA.

165. *En todo △ rectángulo: 1.° un cateto es igual á la hipotenusa multiplicada por el seno del ∠ opuesto ó por*

(1) Añadimos esta relacion, por la importancia que tiene en la práctica; es la recíproca de [3] como las siguientes: $OB = \frac{OS}{OD} . BC =$ cosecante ∠ AOD. BC y $OB = \frac{OT}{OA} . OC =$ secante ∠ AOM. OC son las recíprocas de las [1] y [2].

el coseno del $\angle$ adyacente, 2.° un cateto es igual al otro cateto multiplicado por la tangente del $\angle$ opuesto ó por la cotangente del $\angle$ adyacente.

§ 2.°—Aplicacion á las relaciones entre las líneas de un mismo ángulo.

TEOREMA.

166. *El cuadrado del seno de un arco más el cuadrado de su coseno es siempre igual á la unidad* (1).

Demostracion.—En un $\triangle$ rectángulo cualquiera MOP (fig. 87) de los que tienen por hipotenusa la unidad, resulta:

$$\text{sen}^2 \angle \text{AOM} + \cos^2 \angle \text{AOM} = 1 \quad (155)$$

$$\text{ó } \cos^2 a + \text{sen}^2 a = 1 \quad [1]$$

TEOREMA.

167. *La tangente de un arco, menor que un cuadrante, es igual al cociente de dividir el seno por el cóseno, y la cotangente es igual al cociente de dividir el coseno por el seno* (fig. 87).

Demostracion.—Siendo (165)

$$\text{tang } a = \frac{BC}{OC} \qquad \cot a = \frac{OC}{BC},$$

se tendrá, reemplazando por BC y OC sus valores (164);

$$\text{tang } a = \frac{\text{sen } a.\ OB}{\cos a.\ OB} \qquad \cot a = \frac{\cos a.\ OB}{\text{sen } a.\ OB}$$

$$\text{ó} \qquad \text{tang } a = \frac{\text{sen } a}{\cos a}\ [2] \qquad \cot a = \frac{\cos a}{\text{sen } a}\ [3]$$

Corolario.—De estas expresiones se deduce evidentemente que $\text{tang } a.\ \cot a = 1$ [4].

Tambien se obtiene, considerando que tang *a.* y cot *a.* tienen por denominador la unidad, en las expresiones [2] y [3], y despues de elevar al cuadrado,

$$\frac{\text{tang}^2 a}{1} = \frac{\text{sen}^2 a}{\cos^2 a} \qquad \frac{\cot^2 a}{1} = \frac{\cos^2 a}{\text{sen}^2 a}$$

de lo que resulta,

(1) En las proposiciones y expresiones sucesivas reemplazaremos los $\angle^s$ por sus arcos correspondientes, para mayor brevedad.

$$\frac{1 + \text{tang}^2 a}{1} = \frac{\text{sen}^2 a + \cos^2 a}{\cos^2 a}$$

$$\frac{1 + \text{tang}^2 a}{\text{tang}^2 a} = \frac{\text{sen}^2 a + \cos^2 a}{\text{sen}^2 a},$$

$$\frac{1 + \cot^2 a}{\cot^2 a} = \frac{\text{sen}^2 a + \cos^2 a}{\cos^2 a},$$

$$\frac{1 + \cot^2 a}{1} = \frac{\text{sen}^2 a + \cos^2 a}{\text{sen}^2 a},$$

ó $$\frac{1 + \text{tang}^2 a}{1} = \frac{1}{\cos^2 a}, \quad \frac{1 + \text{tang}^2 a}{\text{tang}^2 a} = \frac{1}{\text{sen}^2 a}$$

$$\frac{1 + \cot^2 a}{\cot^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a}, \quad \frac{1 + \cot^2 a}{1} = \frac{1}{\text{sen}^2 a}$$

y, en fin,

$$\cos^2 a = \frac{1}{1 + \text{tang}^2 a} \qquad \text{sen}^2 a = \frac{\text{tang}^2 a}{1 + \text{tang}^2 a}$$

$$\cos^2 a = \frac{\cot^2 a}{1 + \cot^2 a} \qquad \text{sen}^2 a = \frac{1}{1 + \cot^2 a},$$

expresiones por las cuales se obtiene el valor numérico del seno y el coseno de un arco, cuando se conoce la tangente ó la cotangente del mismo.

§ 3.º—Aplicacion á las relaciones entre líneas correspondientes á arcos distintos.

TEOREMA.

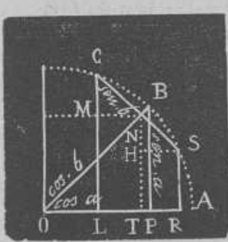

Figura 88.

168. *El seno de la suma ó diferencia de dos arcos es igual á la suma ó diferencia de los productos del seno de cada arco por el coseno del otro* (1).

1.º **Construccion.** — Dados los arcos AB y BC que expresaremos, para brevedad, por las letras a y b (fig. 88); trácense las $\perp^s$ BP = sen a,

(1) La demostracion de este teorema sólo se extiende aquí á los arcos cuya suma no excede de un cuadrante.

CL = sen (a + b) al rádio AO, la ⊥ CN = sen b al rádio BO y la ‖ª NM al rádio AO.

Demostracion.

$$\text{Sen } (a + b) = CL = LM + MC;$$

pero, en el △ rectángulo ONT, se tiene:

NT ó ML (107) = NO. sen *a* (165, 1.°) = cos *b* sen *a*.

En el △ rectángulo NCM se tiene:

CM = CN. cos ∠ MCN = CN. cos ∠ BOA (98, cor. 3.°) = CN. cos a (136) = sen *b* cos *a*,

y, sumando las dos expresiones, resulta:

$$\text{sen } (a + b) = \text{sen } a \cos b + \cos a \text{ sen } b \ [1].$$

1.° Como sen (*a* — *b*) = RS = HT = NT — HN

y HN = CM,

resulta, restando las mismas expresiones,

$$\text{sen } (a - b) = \text{sen } a \cos b - \cos a \text{ sen } b \ [2].$$

TEOREMA.

169. *El coseno de la suma ó diferencia de dos arcos es igual á la diferencia entre el producto de los cosenos y el producto de los senos de los mismos.*

Demostracion.—Siendo

TO = NO. cos *a* (165, 1.°) = cos *b* cos *a*,

y RT = SH (107) = SN. sen ∠ HNS = SN. sen ∠ BOA = SN. sen *a* = sen *b* sen *a*

se tendrá, restando y sumando sucesivamente,

OL = OT — TL = OT — RT (107 y 106) = cos *a* cos *b* — sen *a* sen *b*

OR = OT + TR = cos *a* cos *b* + sen *a* sen *b*

es decir,

$$\cos (a + b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b \ [3]$$
$$\cos (a - b) = \cos a \cos b + \text{sen } a \text{ sen } b \ [4].$$

Corolario.—Sustituyendo en las expresiones [1] y [3] *a* en vez de *b*, resulta:

$$\text{sen } 2a = \text{sen } a \cos a + \cos a \text{ sen } a = 2 \text{ sen } a \cos a \ [5]$$
$$\cos 2a = \cos a \cos a - \text{sen } a \text{ sen } a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a \ [6].$$

Observacion.—Análogamente se podrían obtener las expresiones que dan los valores de sen 3 *a* y cos 3 *a* cuando se conozcan los valores de sen a y cos a y así sucesivamente; pero se ha de tener presente que hasta ahora sólo estamos autorizados para admitir estos resultados miéntras el múltiplo dado del arco no exceda del primer cuadrante.

TEOREMA.

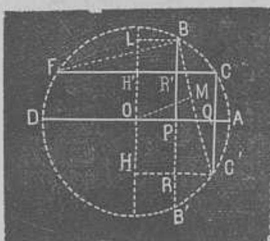

Figura 89.

170. *La suma de los senos de dos arcos es igual al doble del seno de la semi-suma de estos arcos por el coseno de su semi-diferencia; la diferencia de los senos de dos arcos es igual al doble del seno de la semi-diferencia de estos arcos por el coseno de su semi-suma.*

La suma de los cosenos de dos arcos es igual al doble del coseno de la semi-suma de estos arcos por el coseno de la semi-diferencia, y la diferencia de los cosenos de dos arcos es igual al doble del seno de la semi-suma de estos arcos por el seno de la semi-diferencia (1).

1.° **Construccion.**—Tómese hácia la parte superior de O la longitud OL = sen a y hácia la parte inferior la longitud OH = sen b trácense las $\|$ as LB y HC′ al rádio OA y las BB′ y CC′ $\perp$ á éste; y únase B con C′.

Demostracion.—Tenemos:

$$\text{arc BAC}' = a + b; \qquad \text{arc BC} = \text{arc B}'\text{C}' = a - b;$$

$$\text{BM} = \text{sen}\ \frac{1}{2}\ (a + b) \qquad \text{cuerda BC}' = 2\ \text{sen}\ \frac{1}{2}\ (a + b)$$

En el $\triangle$ rectángulo BRC′, se tiene que

$$\text{BR ó LH} = \text{BC}'.\ \cos \angle\ \text{B}'\ \text{BC}'\ (165,\ 1.°);$$

luego, haciendo las sustituciones necesarias,

$$\text{sen}\ a + \text{sen}\ b = 2\ \text{sen}\ \frac{1}{2}\ (a + b)\ \cos\ \frac{1}{2}\ (a - b)\ [1].$$

(1) Esta demostracion por ahora sólo se extiende á los arcos cuya suma no llegue á valer la semi-circunferencia.

2.° Si, en vez de tomar OH = sen b en prolongacion de OL, tomamos OH′, en el mismo sentido, y por el extremo H′, se traza la $|^{a}$ FC, que será $\|^{a}$ al diámetro AD (107, recip. 2.°), y se une F con B, se tendrá

$$\text{arc BF} = 180^{\circ} - (a+b), \qquad \text{BR}' = \text{sen } a - \text{sen } b$$

$$\text{FB} = 2 \text{ sen } \frac{1}{2}\, [180^{\circ} - (a+b)] = 2 \cos \frac{1}{2}\, (a+b);$$

pero, en el △ rectángulo BFR′, se tiene que

$$\text{BR}' = \text{BF. sen} \angle \text{ BFC} \text{ ó } \text{BR}' = \text{BF. sen } \frac{1}{2}\, (a+b)$$

$$\text{ó} \quad \text{sen } a - \text{sen } b = 2 \cos \frac{1}{2}\, (a+b) \text{ sen } \frac{1}{2}\, (a-b) \; [2].$$

3.° En el △ rectángulo BFR′, se tiene que

$$\text{FR}' = \cos a + \cos b$$

$$\text{FR}' = \text{FB. cos} \angle \text{ BFC} \text{ ó } \text{FR}' = \text{FB. cos } \frac{1}{2}\, (a-b)$$

$$\text{ó} \quad \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}\, (a+b) \cos \frac{1}{2}\, (a-b) \; [3].$$

4.° En el △ rectángulo RBC′ se tiene

$$\text{RC}' = \text{BC}'. \text{ sen} \angle \text{ B}'\text{BC}' \text{ ó } \text{RC}' = \text{BC}'. \text{ sen } \frac{1}{2}\, (a-b);$$

$$\text{pero} \quad \text{RC}' = \cos b - \cos a \quad \text{y} \quad \text{BC}' = 2 \text{ sen } \frac{1}{2}\, (a+b);$$

luego

$$\cos b - \cos a = 2 \text{ sen } \frac{1}{2}\, (a+b) \text{ sen } \frac{1}{2}\, (a-b) \; [4].$$

§ 4.°—Extension de las relaciones por medio del Algebra.

171. Consideremos A como el orígen desde donde se cuentan las tangentes hácia la parte superior ó la inferior (fig. 90); sea B el orígen desde donde se cuentan las cotangentes hácia la derecha ó la izquierda; sea el diámetro AB el orígen desde donde se cuentan los senos hácia su parte superior ó inferior; y, en fin, sea O el orígen desde donde se cuentan los cosenos.

Podremos considerar como positivos la tangente y el seno tomados hácia la parte superior de sus orígenes respectivos,

Figura 90.

así como el coseno y la cotangente tomados hácia la izquierda de los suyos.

En virtud de estas convenciones, resultará que los senos, terminados en el primer cuadrante, tendrán las cuatro líneas positivas.

Ejemplo: Para el arco AM, el seno, el coseno, la tangente y la cotangente son MP, OP, AT y BS.

Los arcos terminados en el segundo cuadrante, tendrán todas sus líneas negativas, excepto el seno, que será positivo. Así, el seno, el coseno, la tangente y cotangente del arco AM′ son M′P′, OP′, AT′ y BS′.

Los arcos terminados en el tercer cuadrante, tienen el seno y el coseno negativos, la tangente y cotangente positivas. Así, el seno y el coseno del arco AM′M″ son M″P′ y OP′, la tangente y cotangente del mismo son AT y BS.

Los arcos terminados en el cuarto cuadrante, tienen negativas todas sus líneas, excepto el coseno, que es positivo. Así, el seno, coseno, tangente y cotangente del arco AM′M″M‴ son M‴P, PO, AT′ y BS′.

TEOREMA.

172. *Las líneas trigonométricas de un arco negativo son iguales, en valor absoluto, á las del mismo arco hecho positivo; pero de signos contrarios, excepto el coseno, que es igual para los dos arcos.*

Demostracion.—1.° Siendo arc AM = arc AM‴ (fig. 90), sus $\angle^s$ correspondientes serán iguales (117, recip.); luego

$\triangle$ MOP $\cong$ $\triangle$ M‴OP, $\triangle$ AOT $\cong$ $\triangle$ AOT′ (106, 2.°)

Además, $\angle$ BOM = $\angle$ BOM′, por tener complementos iguales, luego:

$\triangle$ MOQ $\cong$ $\triangle$ M′OQ, $\triangle$ BOS $\cong$ $\triangle$ BOS′ (id.),

igualdades que demuestran la igualdad, en valor absoluto, de las líneas correspondientes á los arcos AM y AM‴

2.° Siendo MP y M'''P, AT y AT', BS y BS' de signo contrario y OP coseno comun de dichos arcos, queda demostrado lo concerniente á los signos.

173. La consideracion de las líneas correspondientes á los arcos AM y AM'' permite enunciar que: *El seno y coseno de dos arcos que difieren en una semi-circunferencia, son iguales, en valor absoluto, y de signo contrario; la tangente y cotangente son iguales en magnitud y signo.* De manera, que siendo a uno de los arcos, el otro será $180 + a$, y se tendrá:

$$\text{sen}\,(180 + a) = -\,\text{sen}\,a \qquad \cos\,(180 + a = -\cos a$$
$$\text{tg}\,(180 + a) = \text{tg}\,a \qquad \cot\,(180 + a) = \cot a.$$

Cambiando $-a$ por $+a$ en estas expresiones, se tendrá:

$$\text{sen}\,(180 - a) = -\,(\text{sen} - a) = \text{sen}\,a \ (172)$$
$$\cos\,(180 - a) = -\,(\cos - a) = -\cos a \ (172)$$
$$\text{tg}\,(180 - a) = (\text{tg}. - a) - \text{tg}\,a$$
$$\cot\,(180 - a) = (\cot - a) - \cot a.$$

Es decir, que *los senos de dos arcos suplementarios son iguales y del mismo signo, miéntras que las demás líneas son iguales en valor numérico, pero de signo contrario.*

174. Expuestas estas consideraciones, pueden extenderse las relaciones demostradas para el primer cuadrante á los demás. Así, el teorema (166) será cierto siempre, porque los *cuadrados de las cantidades positivas ó negativas son siempre positivos*; el teorema (167) será cierto en todos los casos, porque, observando la fig. 90, cuando la *tangente ó cotangente consideradas son positivas ó negativas, sus senos y cosenos correspondientes son de igual signo en el* 1er *caso y de desigual en el 2.°*

El teorema (168) se extiende enseguida al caso de estar la suma de los arcos a y b comprendida entre el 1.° y 2.° cuadrante; pues, siendo la suma de sus complementos a' y b' menor que un cuadrante, se tendrá para éstos:

$$\text{sen}\,(a' + b') = \text{sen}\,a' \cos b + \cos a' \,\text{sen}\,b';$$

y observando que $a' = 90 - a$ y $b' = 90 - b$, y reemplazada línea ó colínea por la colínea ó línea de su arco complementario, resultará la fórmula [1].

Se puede hacer constar enseguida, que *las fórmulas* [1] y [2] (núm. 168) *subsisten cuando se agrega á los arcos a y b un cuadrante.*

Sea, por ejemplo, $a' = a + 90°$; de manera, que $a = a' - 90°$. Reemplazando por a la diferencia entre el arco a' y 90°, resultará:

$$\text{sen}\,(a' + b - 90°) = \text{sen}\,(a' - 90°)\cos b + \cos\,(a' - 90°)\,\text{sen}\, b$$

$$\cos\,(a' + b - 90°) = \cos\,(a' - 90°)\cos b - \cos\,(a' - 90°)\,\text{sen}\, b$$

y en virtud de que $\text{sen}\,(a - 90°) = -\,\text{sen}\,(90° - a) = -\cos a$

$$\cos\,(a - 90°) = \cos\,(90° - a) = \text{sen}\, a$$

resultará que:

$$\cos\,(a' + b) = \cos a' \cos b - \text{sen}\, a' \,\text{sen}\, b$$

$$\text{sen}\,(a' + b) = \text{sen}\, a' \cos b + \cos a' \,\text{sen}\, b,$$

fórmulas donde el arco a está reemplazado por otro que le excede en un cuadrante.

Análogas consideraciones servirán para extender las demás fórmulas.

§ 5.º—Aplicacion á las relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo.

TEOREMA.

175. *En todo △ oblicuángulo los* |*os son proporcionales á los senos de los* ∠*s opuestos.*

Construccion.—Trácese la ⊥ BE á la base AC del △ ABC (fig. 82, 1).

Demostracion.—En los △s BEC y BEA se tiene

EB = BC. sen ∠ C, EB = BA. sen ∠ A (165, 1.º);

luego BC. sen ∠ C = BA. sen ∠ A

$$\text{y}\quad \frac{BC}{BA} = \frac{\text{sen}\,\angle A}{\text{sen}\,\angle C} \quad \text{ó} \quad \frac{BC}{BA} = \frac{\text{sen}\, a}{\text{sen}\, c},$$

reemplazando todo ∠ por su arco correspondiente, que se acostumbra á representar por la letra minúscula igual á la del vértice (1).

(1) Se llegaría á la misma conclusion empleando la (fig. 82, 2) pudiendo reemplazar el sen ∠ BCD por el de su suplemento ∠ ACB.

TEOREMA.

176. *En todo △ oblicuángulo, el cuadrado de un |° es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de éstos multiplicado por el coseno del ∠ que comprenden.*

Construccion.—Trácese la ⊥ BE (fig. 82, 1.°) al lado AC del △ ABC.

Demostracion.—Se tiene en el △ ABC (156)

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AC.\,AE$$

pero $AE = AB.\cos \angle A$ (165, 2.°);

luego, reemplazando por AE su valor,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AC.\,AB.\cos \angle A$$

TEOREMA.

177. *En un △ oblicuángulo un |° es igual á la suma de los otros dos multiplicados respectivamente por el coseno de los ∠ˢ que forman con aquél.*

Construccion.—Trácese la ⊥ BE (fig. 82, 1) al |° AC.

Demostracion.—En los △ˢ EBC y ABE se tiene,

$$CE = CB \cos \angle C,\ AE = AB \cos \angle A$$

y, sumando, $AC = CB \cos \angle C + AB \cos \angle A$

Observacion.—Lo mismo resultaría empleando la (figura 82, 2).

TEOREMA.

178. *El área de un △ es igual á la mitad del producto de dos |ᵒˢ por el seno del ∠ que comprenden.*

Demostracion.—Llamando S al área del △ ABC (figura 80, 1), se tiene

$$S = \frac{1}{2}\,EB.\,CA$$

pero $EB = BC \text{ sen } \angle C$ ó $= AB \text{ sen } \angle A$;

luego $S = \frac{1}{2}\,BC.\,CA \text{ sen } \angle C$ ó $= \frac{1}{2}\,AB.\,CA \text{ sen } \angle A$,

es decir, $S = \frac{1}{2}\,a.b \text{ sen } \angle C$ ó $= \frac{1}{2}\,c.b \text{ sen } \angle A$

TEOREMA.

179. *En todo △ inscrito un | ° es igual al diámetro de la circunferencia por el seno del ∠ opuesto.*

Construccion.—Trácese el diámetro BE (fig. 84) y únanse A con E

Demostracion.—En el △ rectángulo BEA, se tiene

BA = 2 R. sen ∠ E; pero ∠ E = ∠ C (118);

luego BA = 2 R sen ∠ C.

Observacion.—Este teorema es el (161) demostrado por distinto procedimiento, y tanto el uno como el otro razonamiento, aunque distintos en la forma, son el mismo en el fondo, pues se fundan en los mismos principios.

CONCLUSION.—Si, pues, se consiguiese determinar, para los △s MOP, M′OP etc. de cada especie comprendidos en la circunferencia *O* (fig. 87) el valor de cada una de las líneas, llamadas *trigonométricas*, es evidente que se podrían determinar ciertos elementos de cualquier △ rectilíneo, mediante los valores numéricos de otros que fueran conocidos, en virtud de las relaciones establecidas entre ellos por los teoremas anteriores.

Este es el objeto de la Trigonometría, que lo realiza con el auxilio de *Tablas* donde están calculados, no las líneas de cada ∠ ó arco, sino los logaritmos de éstas; lo cual facilita los cálculos, segun se demuestra en Álgebra, y despues se pasa con facilidad de los logaritmos á los valores buscados.

VII.—RELACIONES MÉTRICAS DE LOS POLÍGONOS SEMEJANTES.

TEOREMA.

180. *La relacion de dos perímetros de dos polígonos semejantes, es igual á su relacion de semejanza.*

Demostracion.—En los polígonos ABCDEF y A′B′C′D′E′F′ (fig. 79), se tiene

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} \;\dots\dots;$$

luego $\dfrac{AB + BC + CD.....}{A'B' + B'C' + C'D'.....} = \dfrac{AB}{A'B'}$ ó $\dfrac{P}{P'} = \dfrac{AB}{A'B'}$,
llamando P y P′ á los perímetros.

TEOREMA.

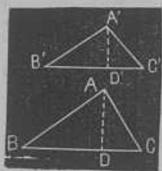

Figura 91.

181. *En dos △ semejantes, las bases son proporcionales á sus alturas.*

Demostracion.—En los △s ABC y A′B′C′ (fig. 91), se tiene

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \text{ (hipótesis)}.$$

En los △s rectángulos BAD y B′A′D′ queson semejantes por tener ∠ B = ∠ B′ (hipótesis), se tiene

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AD}{A'D'};$$

luego $$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AD}{A'D'}$$

TEOREMA.

182. *Los perímetros de dos polígonos regulares semejantes, son proporcionales á sus rádios y apotemas.*

Demostracion.—En los polígonos ABCD...y A′B′C′D′... (fig. 59), se tiene (146)

$$\frac{P}{P'} = \frac{BC}{B'C'};$$

pero $$\frac{BC}{B'C'} = \frac{OL}{OL'} = \frac{OC}{OC'};$$

luego $$\frac{P}{P'} = \frac{OL}{OL'} = \frac{OC}{OC'}$$

ó $$\frac{P}{P'} = \frac{A}{A'} = \frac{R}{R'}$$

(llamando A y A′ y R y R′ los rádios y apotemas).

TEOREMA.

183. *Dos circunferencias son entre sí como sus rádios ó diámetros, ó la razon de la longitud de una circunferencia á su diámetro es constante.*

Demostracion.—Sean dos circunferencias *O* y *O'* de rádios R y R'. Si inscribimos en cada una un polígono regular de un mismo número de lados el uno que el otro; llamando P y P' sus perímetros respectivos, se tendrá

$$\frac{P}{P'} = \frac{R}{R'} ;$$

y, siendo cierta esta proporcion, cualquiera que sea el número de lados de los dos polígonos, subsistirá haciendo crecer indefinidamente el número de lados; pero entónces los perímetros P y P', tienden hácia sus límites respectivos, y su relacion tenderá hácia $\frac{C}{C'}$. Se tendrá, pues, en el límite:

$$\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'}$$

$$\text{ó } \frac{C}{R} = \frac{C'}{R'} \text{ ó } \frac{C}{2\,R} = \frac{C'}{2\,R'}$$

El número que expresa la relacion de la circunferencia al diámetro se indica por la letra π

Observacion 1.ª—Siendo $\frac{C}{2\,R} = \pi$ se tendrá

$$C = 2\,\pi\,R \quad y \quad R = \frac{C}{2\,\pi} ;$$

de manera que, siempre que esté determinado el valor de π, podrá calcularse la longitud de la circunferencia cuando esté dada la del rádio y recíprocamente.

Además, siendo π R la longitud de la semi-circunferencia, la del arco 1.º será $\frac{\pi R}{180}$ y, por consiguiente: *la longitud* L *del arco de* n *grados, en la circunferencia de rádio* R, *tendrá por expresion* $L = \frac{\pi R n}{180}$

Estando expresada el área de un círculo por $\frac{1}{2}$ C. R (140 cor. 4.º); si se sustituye por el valor de la circunferencia su expresion hallada, se tendrá

$$\text{área del círculo} = \pi\,R^2.$$

Observacion 2.ª—Llamando L á la base de un sector circular, análogas consideraciones á las empleadas para el círculo (140 cor. 4.°) conducen á la expresion de su área

$$S = \frac{1}{2} R.\,L \quad y \quad S = \frac{1}{2} R.\,\frac{\pi R n}{180}$$

ó área del sector $= \dfrac{n}{360} \pi R^2$,

designando n el número de grados de la base.

TEOREMA.

184. *Dos arcos semejantes, es decir, dos arcos que corresponden á $\angle^s$ en el centro iguales, en dos circunferencias diferentes, son proporcionales á sus rádios.*

Demostracion.—Siendo L y L′ las longitudes de los arcos, R y R′ los rádios y O y O′ los $\angle^s$ en el centro iguales que corresponden á estos arcos, se tiene

$$\frac{L}{2\pi R} = \frac{O}{4 \llcorner^s}, \quad \frac{L'}{2\pi R'} = \frac{O'}{4 \llcorner^s} \ (136),$$

y como estas proporciones tienen una razon comun, resulta

$$\frac{L}{2\pi R} = \frac{L'}{2\pi R'} \quad ó \quad \frac{L}{R} = \frac{L'}{R'} \quad ó \quad \frac{L}{L'} = \frac{R}{R'}$$

TEOREMA.

185. *La relacion de las áreas de dos polígonos semejantes, es igual al cuadrado de su relacion de semejanza, ó dos polígonos semejantes son entre sí como los cuadrados de sus $|^{'s}$ homólogos.*

Demostracion.—Sean, primeramente, dos $\triangle^s$ ABC y A′B′C′ (fig. 91) semejantes; se tiene

$$\text{área de ABC} = \frac{1}{2} BC.\,AD, \ \text{área de A'B'C'} = \frac{1}{2} B'C'.\,A'D'$$

$$\text{luego} \ \frac{\text{área del } \triangle \text{ ABC}}{\text{área del } \triangle \text{ A'B'C'}} = \frac{B'C'.\,A'D'}{BC.\,AD} = \frac{BC}{B'C'} \cdot \frac{AD}{A'D'};$$

$$\text{pero (181)} \quad \frac{BC}{B'C'} = \frac{AD}{A'D'};$$

$$\text{luego} \quad \frac{\text{área de ABC}}{\text{área de A'B'C}} = \frac{BC^2}{B'C'^2}.$$

Sean ahora los dos polígonos ABC... y A′B′C′... (fig. 79).

Si los descomponemos en $\triangle^s$, llamando T_1 T_2 T_3... los $\triangle^s$ del uno y T'_1 T'_2 T'_3... los del otro, se tendrá:

$$\frac{T_1}{T'_1} = \frac{AB^2}{A'B'^2} \quad \frac{T_2}{T'_2} = \frac{AB^2}{A'B'^2} \quad \frac{T_3}{T'_3} = \frac{AB^2}{A'B'^2} \; ;$$

luego $$\frac{T'_1 + T'_2 + T'_3 + \ldots}{T_1 + T_2 + T_3 + \ldots} = \frac{AB^2}{A'B'^2} \text{ ó } \frac{S}{S'} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$$

Observacion.—De esta relacion se deduce, recíprocamente,

$$\frac{AB}{A'B'} = \sqrt{\frac{S}{S'}},$$

es decir, que la relacion entre dos $|^{os}$ homólogos es la misma que la de las raices cuadradas de las áreas.

TEOREMA.

186. *La relacion de las áreas de dos polígonos regulares del mismo número de* $|^{os}$*, es igual á la relacion de los cuadrados de sus apotemas ó de los cuadrados de sus rádios.*

Demostracion.—Sean p, a, r, el perímetro, la apotema y el rádio del primer polígono; p′, a′, r′, el perímetro, la apotema y el rádio del segundo; se tendrá que la relacion de sus áreas será (140 cor 1.°)

$$\frac{\frac{1}{2}\, p \cdot a}{\frac{1}{2}\, p' \cdot a'} = \frac{p}{p'} \cdot \frac{a}{a'} \; ;$$

pero (182) $$\frac{p}{p'} = \frac{a}{a'} = \frac{r}{r'} \; ;$$

luego $$\frac{\text{área del 1.}^{er} \triangle}{\text{área del 2.}^{o} \triangle} = \frac{a^2}{a'^2} = \frac{r^2}{r'^2}$$

TEOREMA.

187. *La relacion de las áreas de dos círculos y la de dos sectores circulares semejantes es igual á la de los cuadrados de sus rádios.*

1.° **Demostracion.**—Siendo R y R′ los rádios de cada círculo, se tendrá (183, observ. 1.ª);

$$\frac{\text{área de círculo R}}{\text{área de círculo R}'} = \frac{\pi R^2}{\pi R'^2} = \frac{R^2}{R'^2}$$

2.° **Demostracion.**—Siendo S, L, R, el área, la longitud del arco y el rádio del primer sector, y S′, L′, R′, el área, la longitud del arco y el rádio del segundo, se tendrá (183, observ. 2.ª)

$$\frac{S}{S'} = \frac{L.\ \frac{1}{2}\ R}{L'.\ \frac{1}{2}\ R'} = \frac{L}{L'} \cdot \frac{R}{R'}\ ;$$

pero $\frac{L}{L'} = \frac{R}{R'}$ (184),

por ser los arcos semejantes;

luego $\frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}$

TEOREMA.

188. *La relacion de las áreas de dos segmentos semejantes* (es decir, limitados por arcos semejantes) *es igual á la de los cuadrados de sus rádios.*

Demostracion.—Sean S y T las áreas del sector y del △ cuya diferencia es el primer segmento, y S′ y T′ las del sector y △ cuya diferencia es el segundo segmento.

Siendo semejantes los △ˢ, así como los sectores, se tendrá (187 y 185):

$$\frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}\ ,\quad \frac{T}{T'} = \frac{R^2}{R'^2}$$

ó $\frac{S}{S'} = \frac{T}{T'} = \frac{R^2}{R'^2}\ ;$

luego $\frac{S' - T'}{S - T} = \frac{R^2}{R'^2}$

LIBRO IV.

I.—PROBLEMAS.

§ 1.º—Problemas relativos á la línea recta.

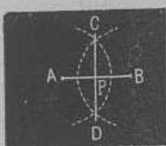

Figura 92.

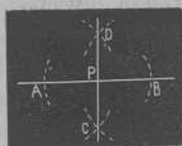

Figura 93.

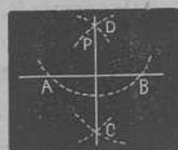

Figura 94.

189. Problema 1.º—*Dividir una | ª dada en dos partes iguales por medio de una* $\perp$.

Resolucion.—Haciendo centro en sus extremos, y con un rádio mayor que la mitad de la | ª AB (fig. 92), trácense dos arcos de circunferencia, y únanse los [.]s C y D de interseccion por una | ª, que será la buscada (106, observ. 2.ª)

Problema 2.º—*Por un* [.] *dado* P, *trazar una* $\perp$ *á una | ª dada.*

Resolucion.—1.º Si el [.] P está en la | ª AB (fig. 93); haciendo centro en él, trácense, con un rádio cualquiera, dos arcos que determinarán, por sus intersecciones con la | ª, los [.]s A y B; y haciendo con respecto á éstos la construccion del problema anterior, se obtendrá la | ª buscada DPC (106, observ. 2.ª)

2.º Si el [.] P está fuera de la | ª AB (fig. 94); haciendo centro en él, trácese un arco AB que corte á la | ª propuesta en los [.]s A y B; y repitiendo la construccion anterior, se obtendrá la | ª buscada DPC (106, observ. 2.ª)

3.º Si el [.] dado es el extremo A de la | ª AB (fig. 95); descríbase, desde un [.] cualquiera P como centro, una circunferencia que pase por A, trácese la | ª DC, que pasa por los [.]s D y P y la | ª que una el [.] C de interseccion de ésta con la circunferencia al [.] A, será la | ª buscada AC.

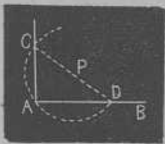

Figura 95.

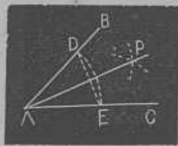

Figura 96.

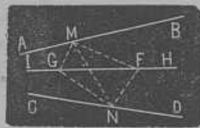

Figura 97.

Problema 3.º—*Trazar la bisectriz de un ∠ dado.*

Se distinguen dos casos, segun esté dado el vértice ó no.

1.º **Resolucion.**—Trácese el arco DE (fig. 97) y, haciendo centro en D y E, trácense dos arcos que se corten. El [.] de encuentro P y el A determinan la bisectriz buscada (91, 2.º)

2.º **Resolucion.**—Trácese una | ª MN que corte los | os dados AB y CD (fig. 97); trácense las bisectrices MG, NG, MF y NF de los cuatro ∠s que forma dicha | ª con los | os. La | ª IH será la bisectriz buscada, pues el [.] G equidista de AM y MN, de MN y CN (106, observ. 2.ª), y, por consiguiente de AB y CD, lo mismo que el [.] F; luego determinarán la bisectriz.

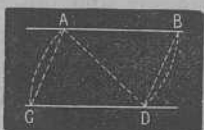

Figura 98.

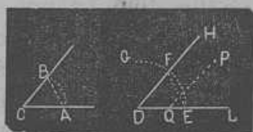

Figura 99.

Problema 4.º—*Por un* [.] D *exterior á una* | ª, *trazarle una* ∥ ª.

Resolucion.—Haciendo centro en un [.] A de la | ª AB, y con un rádio igual á la distancia al [.] dado D (fig. 98), trácese un arco BD; haciendo centro en D con el rádio AD, trácese el arco AC; tómese la cuerda AC igual á la cuerda DB. La | ª CD que une los [.]s C y D es la | ª buscada, pues trazando la | ª AD, resulta que los ∠s CDA y DAB son iguales (117, 2.º) y, porconsiguiente, AB y CD son ∥ as (97, 1.º).

Problema 5.°—*Por un [.] trazar una |ª que forme con otra dada un ∠ igual á otro dado.*

Se distinguen dos casos, segun que el [.] esté en la |ª ó fuera de ella.

Resolucion.—1.° Haciendo centro en el [.] dado D, trácese un arco EG (fig. 99) con el mismo rádio que el arco AB trazado en el ∠ dado; tómese la cuerda EF = cuerda AB, y únase el [.] F con el [.] D. La |ª OH será la buscada (111 y 117, *recip.*ˢ)

2.° Si el [.] dado es el H (fig. 99), por un [.] Q de la |ª, trácese el ∠ PQL = ∠ ACB y por el [.] H una ‖ª á la PQ que será la |ª buscada (97).

§ 2.°—Problemas relativos á polígonos.

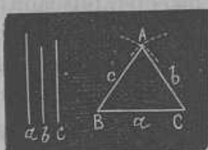

Figura 100.

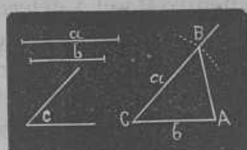

Figura 101.

190. Problema 1.°—*Construir un △, dados sus tres |os* a, b y c (fig. 100).

Resolucion.—Desde los extremos B y C de una |ª BC = a, trácense dos arcos con rádios iguales á cada uno de los |os dados *b* y c; únase su [.] de interseccion A con B y C. El △ ABC será el buscado (92).

Nota. Para que el problema sea posible se necesita y basta que el mayor de los |os sea menor que la suma de los ótros dos.

Problema 2.°—*Construir un △, dados dos |os* a, b y *el ∠* C *comprendido* (fig. 101).

Resolucion.—En uno de los extremos C del |° CA = *b* trácese un ∠ ACB = ∠ C; desde C como centro, trácese, con un rádio igual á la |ª a, un arco que determina el [.] B en la |ª CB. La |ª BA que une su [.] de interseccion, determina el △ buscado (87).

PROBLEMA 3.º—*Construir un* $\triangle$, *dados dos* $|^{os}$ a, b *y el* $\angle$ B *opuesto á uno de ellos* (fig. 102).

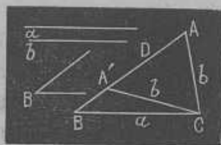

Figura 102.

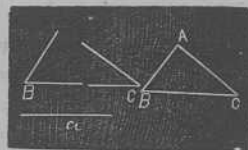

Figura 103.

Resolucion.—En el extremo B de la $|^{a}$ BC $= a$, trácese una $|^{a}$ que forme el $\angle$ CBA $= \angle$ B; haciendo centro en C, con un rádio igual al $|^{o}$ b, trácese un arco cuya interseccion A con la $|^{a}$ AB, determinará el vértice C del $\triangle$ buscado.

Observacion.—Cuando el $\angle$ B es agudo, si $b < a$, el problema admite dos soluciones, dadas por los $\triangle^{s}$ BCA y BCA′; pero si b no es $< a$, sólo admite una.

Cuando el $\angle$ B es recto, el problema es imposible si b es menor ó igual que a y admite una solucion si $b >$ a (101, *recip.*)

Cuando el $\angle$ B es obtuso, para que el problema sea posible, se necesita que b sea mayor que a (101, recip.)

PROBLEMA 4.º—*Construir un* $\triangle$, *dados dos* $\angle^{s}$ A *y* C *y el* $|^{o}$ a *adyacente á los mismos* (fig. 103).

Resolucion.—En los extremos de BC = a, trácense dos $|^{as}$ que formen $\angle^{s}$ respectivamente iguales á los $\angle^{s}$ dados. El $\triangle$ ABC será el buscado (89).

Observacion.—Para que el problema sea posible se necesita y basta que la suma de los $\angle^{s}$ dados no llegue á 2 $\llcorner^{s}$ ni exceda de esta suma.

PROBLEMA 5.º—*Construir un paralelógramo, dados dos* $|^{os}$ a, b *y el* $\angle$ *comprendido* (fig. 104).

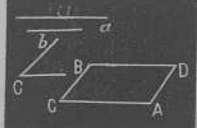

Figura 104.

Resolucion.—Trácese un $\angle$ BCA $= \angle$ C; tómense en sus $|^{os}$ dos longitudes CB $= b$, CA $=$ a y, por los extremos B y A, trácense dos $\|^{as}$ que se cortarán en cierto [.] D. El paralelógramo ABCD es el buscado (96, 4.°)

Problema 6.°—*Construir un polígono igual á otro dado.*

Resolucion.—Descompóngase en △ˢ y constrúyanse, sucesivamente y en el mismo órden, △ˢ iguales á los componentes del polígono, ó trácense ‖ ᵃˢ de igual longitud, que pasen por todos los vértices del polígono dado, y únanse los extremos de las que corresponden á cada | °. El nuevo polígono tendrá sus | ᵒˢ respectivamente iguales y ‖ ᵒˢ á los del propuesto y será el polígono buscado.

§ 3.°—Problemas relativos á líneas proporcionales.

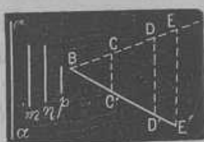

Figura 105.

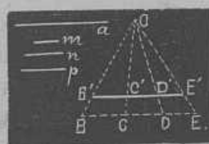

Figura 106.

191. Problema 1.°—*Dividir una* | ª a *en partes proporcionales á otras dadas* m, n, p (figˢ. 105 y 106).

Resolucion.—1.° Tómese, en uno de los | ᵒˢ de un ∠ cualquiera, una longitud BE $= a$ y en el otro, las longitudes BC′ $= m$, C′D′ $= n$, D′E′ $= p$; únanse los extremos E y E′ por una | ª EE′ y trácense las ‖ ᵃˢ á ésta D′D y C′C. Los segmentos BC, CD y DE son los buscados (134, 1.°)

2.° Trácense, á continuacion unos de otros, y sobre una | ª, los segmentos BC $= m$, CD $= n$, DE $= p$, y trácese sobre la | ª BE un △ equilátero BOE; tómense los segmentos OB′ $=$ OE′ $= a$; únanse los [.]ˢ B′ y E′ por una | ª, así como los O y C, O y D. Los segmentos B′C′, C′D′ y D′E′ son los buscados (144 y 134).

Observacion.—Si en vez de ser proporcionales los segmentos á longitudes dadas, hubiesen de ser iguales, la construccion sería la misma.

Problema 2.°—*Hallar una cuarta proporcional á tres* | ᵃˢ *dadas* a, b *y* c (fig. 107).

Resolucion.—En uno de los | ᵒˢ de un ∠ NMQ, tómense, á contar desde el vértice, dos segmentos MN $= a$, MP $= b$ y en el otro | ° el segmento MQ $= c$; únase N con Q y trácese PX || ª á NQ. El segmento MX será el buscado (134, *observ*.)

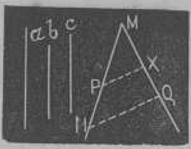

Figura 107.

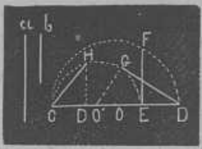

Figura 108.

Observacion.—El segmento igual á b podrá tambien tomarse en la prolongacion del MN $= a$ y entónces, el segmento buscado estará en la prolongacion del MQ $= c$.

Problema 3.°—*Hallar una media proporcional á dos* | ªˢ *dadas* a y b (fig. 108).

Resolucion.—1.° Tómense los segmentos CE $= a$, ED′ $= b$, á continuacion uno de otro en una | ª cualquiera; trácese una semi-circunferencia sobre CD′ como diámetro y, por el [.] E la ⊥ EF á CD′; EF será la media proporcional buscada (154, 2.°).

2.° Tómense, desde el [.] C, los segmentos CE $= a$, CD $= b$; trácese una semi-circunferencia sobre CE como diámetro y la ⊥ DH á éste. La cuerda CH será la media proporcional buscada (154, 1.°).

3.° Si se toma D′C igual á una de las longitudes dadas y D′E igual á la otra; la tangente DG trazada á la circunferencia, cuyo diámetro es EC, será la media proporcional buscada (153, *cor.*)

Problema 4.°—*Construir dos* | ªˢ *cuya suma y producto se conocen* (fig. 109).

Resolucion.—Sobre la | ª BC igual á la suma dada, tomada como diámetro, constrúyase una semi-circunferencia; por uno de los extremos de dicho diámetro, trácese la ⊥ á éste, de una longitud, cuyo valor numérico sea la raiz cuadrada del producto dado; por su extremo D trácese la || ª

DF′ al diámetro CB. Las $\perp^s$ E′E y F′F determinan los segmentos buscados BE y CE ó BF y FC (154, 2.°)

PROBLEMA 5.°—*Construir dos* | ^{as} *cuya diferencia y cuyo producto se conocen* (fig. 110).

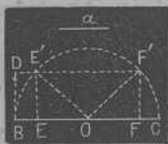

Figura 109.

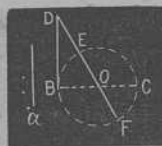

Figura 110.

Resolucion.—Sobre la | ^{a} BC igual á la diferencia dada, como diámetro, trácese una circunferencia; levántese la $\perp$ BD al diámetro BC, de una longitud igual á la raiz cuadrada del producto dado, y trácese la | ^{a} BF que pasa por el centro. Los segmentos DE y DF serán los buscados (153, *cor.*)

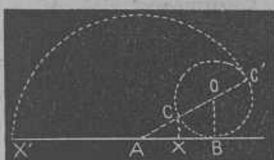

Figura 111.

PROBLEMA 6.°—*Dividir una* | ^{a} *en media y extrema razon*, es decir, *en dos segmentos tales, que el mayor sea medio proporcional entre el menor y toda la* | ^{a} (fig. 111).

Resolucion.—Trácese por el extremo B de la | ^{a} dada AB, la $\perp$ á ésta, igual en longitud á la mitad de la misma; desde el extremo O como centro, y con OB como rádio, descríbase una circunferencia; únase el extremo A con el centro. El segmento AX = AC resuelve la cuestion.

Demostracion.—Considerando la secante AC′ y la tangente AB, se tiene:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AC'} \text{ (153, } cor.) \text{ ó } \frac{AB - AC}{AC} = \frac{AC' - AB}{AB}$$

ó

$$\frac{XB}{AX} = \frac{AX}{AB},$$

pues $AC = AX,\ AB - AC = AB - AX = XB$

y $AC' - AB = AC' - CC' = AC = AX$

Observacion.—Tambien, de la proporcion $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AC'}$

se deduce que $$\frac{AB}{AB + AC} = \frac{AC'}{AB + AC'},$$

y, tomando el [.] X′, de manera que X′A sea igual á AC′,

resultará que $$\frac{AB}{X'A} = \frac{X'A}{X'B},$$

lo cual conduce á decir que: los [.]ˢ X y X′ son tales, que *sus distancias á uno de los extremos de la* |ª AB *son medias proporcionales entre las distancias respectivas al otro y toda la* |ª; manera más general de definir la division de una |ª en media y extrema razon.

Se notará además que no hay más [.]ˢ que tengan esta propiedad; pues si, por ejemplo, entre A y B hubiera otro

[.] X″ tal que $$\frac{X''B}{X''A} = \frac{AX''}{AB}$$

se tendría que $$\frac{AB + AX''}{AB} = \frac{(AX'' + X''B) \text{ ó } AB}{AX''},$$

proporcion incompatible con la que establece la relacion entre la tangente y los segmentos de la secante; porque los extremos AB + AX″ y AX″ de la una son á la vez mayores ó menores que los extremos AC y AC′ de la otra, siendo los medios iguales.

§ 3.º—Problemas relativos á la circunferencia.

192. Problema 1.º—*Dados tres* [.]ˢ A, B y C, *no situados en línea recta, trazar una circunferencia que pase por ellos* (fig. 47).

Resolucion.—Unanse A y B, B y C por las |ᵃˢ AB y BC, y, en sus [.]ˢ medios *m* y *n*, trácense las ⊥ˢ *mo* y *no*, cuya interseccion *o* determina el centro de la circunferencia buscada (109).

Problema 2.º—*Por un* [.] *dado, trazar una tangente á una circunferencia.*

Ocurren dos casos, segun que el [.] esté en la circunferencia ó fuera de ella.

Resolucion.—1.º Sea el [.] P de la circunferencia (figura 53). Trácese el rádio OP y la ⊥ AB á éste, la cual será la tangente buscada (115).

2.° Sea el [.] P exterior á la circunferencia (fig. 56) cuyo centro es O; tomando OP como diámetro, trácese una circunferencia y únanse los [.]s de interseccion T y T′ con el [.] dado P. Las |as PT y PT′ satisfacen á la cuestion (120, 1.°)

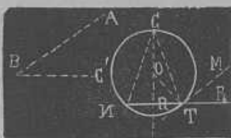

Figura 112.

Problema 3.°—*Trazar sobre una* |a NT *un arco de circunferencia capaz de un* ∠ ABC (fig. 112).

Resolucion.—Trácese en el extremo T de NT la |a MT que forme un ∠ MTB = ∠ ABC′; levántese la ⊥ OT á TM y la ⊥ RO á NT en su [.] medio. El [.] de interseccion O es el centro del arco buscado (118, *cor* 1.° y 98, *cor* 3.°)

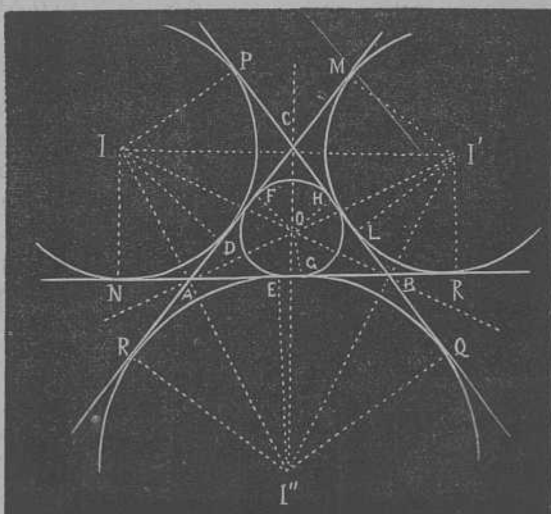

Figura 113.

Problema 4.°—*Trazar una circunferencia tangente á tres* |as *dadas* (fig. 113).

Resolucion.—Trácense las bisectrices de los $\angle^s$ del $\triangle$ ABC. El [.] O de interseccion de dos de ellas es el centro de una de las circunferencias que resuelven la cuestion.

Las bisectrices de los $\angle^s$ exteriores del $\triangle$ ABC determinan los centros I, I′, I″, de otras circunferencias que satisfacen tambien á la cuestion.

II.—PROBLEMAS RELATIVOS Á LOS POLÍGONOS REGULARES.

§ 1.º—Problemas gráficos.

Figura 114.

193. PROBLEMA 1.º—*Dividir una circunferencia en cuatro partes iguales é inscribir ó circunscribir á ella un cuadrado* (fig. 114).

Resolucion.—Trácense los diámetros BD y AC $\perp$ entre sí. Las cuerdas de los arcos que determinan son los $|^{os}$ del cuadrado.

Demostracion.—Siendo $\llcorner^s$ los cuatro $\angle^s$ formados alrededor de O, son iguales (51, 2.º); luego los arcos correspondientes son iguales (117); luego tambien sus cuerdas (111), que forman un polígono inscrito y equilátero, que será regular (124).

El cuadrilátero formado por las tangentes será á su vez circunscrito y equiángulo y por consiguiente regular (124, 2.º)

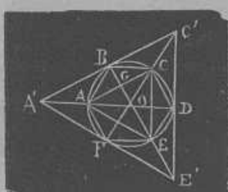

Figura 115.

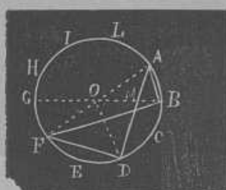

Figura 116.

PROBLEMA 2.º—*Dividir una circunferencia en seis partes*

iguales é inscribir ó circunscribir á ella un exágono regular (fig. 115).

Resolucion.—Tomándose como cuerda el rádio, se obtendrá el exágono buscado.

Demostracion.—Siendo BC = OB = OA por construccion, el △ OAB es equilátero, luego sus ∠ˢ son iguales (88) y, como sumados valen 2 ∟ˢ (100, 2.°), cada uno valdrá $\frac{2\,∟^s}{3} = \frac{4\,∟^s}{6}$; luego el ∠ AOB puede colocarse seis veces exactamente alrededor del [.] O, y las cuerdas AB, BC....... serán iguales (117 y 111); de manera que el polígono ABCDEF, que es inscrito y equilátero, será regular (124).

El exágono circunscrito correspondiente que será equiángulo, será tambien regular (124, 2.°)

Observacion.—Se obtendrán los △ˢ equiláteros inscrito y circunscrito, uniendo los vértices alternados del exágono, y trazando tangentes en éstos (124, 1.° y 2.°)

PROBLEMA 3.°—*Dividir una circunferencia en diez partes iguales é inscribir y circunscribir á la misma un decágono regular* (fig. 116).

Resolucion.—Divídase el rádio en media y extrema razon, y el segmento mayor aditivo será la cuerda del arco que divida á la circunferencia en diez partes iguales. Trazándose tangentes por los [.]ˢ de division, se obtendrá el decágono regular circunscrito (124, 2.°)

Análisis.—1.° Supóngase que AB es el | ° del decágono regular buscado (fig. 116).

El △ AOB es isósceles y además el ∠ AOB es, por hipótesis, igual á $\frac{360°}{10} = 36°$; luego entre los ∠ˢ OBA y OAB valdrán 180° — 36° = 144° (100, 2.°) y cada uno 72° (88).

Si se traza la bisectriz AM del ∠ OAB, se tendrá que los △ˢ BMA y AMO son isósceles; pues en el primero, valiendo el ∠ ABM 72° y el ∠ BAM 36°, el ∠ BMA valdrá 72°; y en el segundo, los ∠ˢ MAO y AOB valen cada uno 36°; luego (90) AB = AM = MO;

pero, siendo AM la bisectriz del $\angle$ BAO, se tiene (162)

$$\frac{BM}{MO} = \frac{AB}{AO} \quad ó \quad \frac{BM}{AB} = \frac{AB}{BO},$$

(reemplazando MO y AO por AB y BO), con lo cual queda justificado el procedimiento enunciado.

2.º Se circunscribirá el decágono regular, trazando tangentes por los [.]s de division obtenidos al construir el inscrito (124).

Observacion 1.ª—Siendo OD la bisectriz del $\angle$ BOF suplementario del $\angle$ AOB, se tendrá (162, 2.º)

que $$\frac{DA}{DM} = \frac{AO \text{ ó } DM}{MO \text{ ó } AM}$$

[pues, teniendo los $\angle^s$ DOB y OMD la misma medida, (136, *cor* y 137. 3.º) el $\triangle$ OMD es isósceles]; es decir, que AD es el mayor segmento sustractivo del rádio OD = MD dividido en media y extrema razon.

Esta cuerda que comprende tres arcos del decágono regular convexo puede servir de |º á otro decágono regular llamado *estrellado.*

Observacion 2.ª—Uniendo los vértices del decágono convexo alternadamente, se obtendrá el pentágono regular inscrito.

PROBLEMA 4.º—*Dividir una circunferencia en quince partes iguales é inscribir ó circunscribir á ella un pentadecágono regular.*

Resolucion.—Tómese la cuerda del arco, diferencia entre los del exágono y decágono convexos regulares, y podrá colocarse quince veces en la circunferencia.

El pentadecágono circunscrito se obtendrá trazando tangentes en los [.]s de division (124, 2.º)

Demostracion.—Se tiene, en efecto,

$$\frac{1}{6} \text{ de c.}^{\text{cia}} - \frac{1}{10} \text{ de c.}^{\text{cia}} = \frac{1}{15} \text{ de c.}^{\text{cia}}$$

PROBLEMA 5.º—*Dado un polígono regular inscrito ó circunscrito, inscribir ó circunscribir otro de doble número de* |os (fig. 117).

Resolucion.—Trácense rádios $\perp^s$ á cada |º del polígono inscrito, que dividirán á los arcos correspondientes en dos partes iguales (112), y uniéndose cada [.] medio con los extremos del arco correspondiente, ó trazando tangentes por los nuevos y primitivos [.]s de division, se obtendrán uno y otro polígono.

Observacion.—Aplicando este procedimiento se podrán inscribir y circunscribir exactamente los polígonos de los siguientes números de | os:

3, 6, 12, 24, 48,.......
4, 8, 16, 32, 64,.......
5, 10, 20, 40, 80,.......
15, 30, 60, 120, 240,.......

§ 2.°—Problemas numéricos.

194. Problema 1.°—*Hallar la relacion que existe entre los | os de los cuadrados inscrito y circunscrito y el rádio* (fig. 114).

Resolucion.—1.° En el △ rectángulo AOB se tiene

$$AB^2 = OB^2 + OA^2 \ (155) = 2\,OB^2$$

ó $$l^2 = 2\,r^2 \qquad l = r\sqrt{2}$$

(reemplazando l por AB y r por OB, y extrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros);

luego $$\frac{l}{r} = \sqrt{2}$$

2.° El | ° del cuadrado circunscrito es evidentemente igual al diámetro, es decir, que $l = 2\,r$.

Problema 2.°—*Hallar la relacion que existe entre los | os del △ regular inscrito y circunscrito, y el rádio* (figura 115).

Resolucion.—1.° En el △ rectángulo ACD se tiene (155)

$$AC^2 = AD^2 - CD^2$$

ó $$l^2 = (2\,r)^2 - r^2 = 4\,r^2 - r^2 = 3\,r^2,$$

(reemplazando l por AC, $2\,r$ por AD y r por CD (193, *prob.* 2.°);

luego $$\frac{l^2}{r^2} = 3 \quad \text{ó} \quad \frac{l}{r} = \sqrt{3}$$

2.° Como el cuadrilátero ABCD es rombo ó cuadrado,

$(3.r)^2$ $8(r)^2$

$9^2 r^2$

por tener sus | os iguales (193, *prob.* 2.°, y 68), las diagonales OB y AC son $\perp^s$ entre sí y se cortan en partes iguales (108, 2.° y 4.°); y además AC es $\parallel^a$ á A'C' por ser $\perp^s$ al rádio OB; resultando de esto que

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{OB}{OC},$$

es decir, que el | ° de un $\triangle$ equilátero circunscrito es doble que el del inscrito, pues OB = 2 OC; luego

$$\frac{l}{r} = 2\sqrt{3}$$

Problema 3.°—*Hallar la relacion que existe entre el | os de los decágonos inscritos y el rádio.*

Resolucion.—Si AB (fig. 111) es el rádio la circunferencia dada, los segmentos AX y AX' ó sus iguales AC y AC' representarán los | os de los decágonos regulares convexo y estrellado (193, *prob.* 3.°); pero

$$AB = CC' = AC' - AC$$

y además, en el $\triangle$ rectángulo AOB, se tiene

$$AO = \sqrt{AB^2 + OB^2}$$

Las expresiones que se buscan de AC y AC' serán, pues,

$$AC = AO - CO = \sqrt{AB^2 + OB^2} - CO$$
$$AC' = AO + OC' = \sqrt{AB^2 + OB^2} + OC';$$

y, sustituyendo en dichas expresiones, R por AB y $\frac{R}{2}$ por CO y CO', resultará:

$$AC = \sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2} - \frac{R}{2} = \sqrt{\frac{4R^2 + R^2}{4}} - \frac{R}{2}$$
$$= \frac{R}{2}\sqrt{5} - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$$
$$AC' = \sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2} + \frac{R}{2} = \sqrt{\frac{4R^2 + R^2}{4}} + \frac{R}{2}$$
$$= \frac{R}{2}\sqrt{5} + \frac{R}{2} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

Problema 4.°—*Hallar la relacion que existe entre el | ° del pentágono regular y el rádio.*

Resolucion.—Siendo FD (fig. 116) el | ° del pentágono regular (193, *prob.* 3.°, *observ.* 2.a), AD el del decágono regular estrellado (id. *observ.* 1.ª) y el $\triangle$ AFD rectángulo en D, resulta que

$$FD = \sqrt{\overline{AF}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{(2\,R)^2 - \frac{R^2}{4}(\sqrt{5}+1)^2}$$

$$= \sqrt{4\,R^2 - \frac{R^2}{4}(5 + 2\sqrt{5} + 1)}$$

$$= \sqrt{\frac{16\,R^2 - 5\,R^2 - 2\,R^2\sqrt{5} - R^2}{4}} = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

[reemplazando 2 R por AF y $\frac{R}{2}$ $(\sqrt{5}+1)$ por AD].

Análogamente se obtendrá el | ° FB del pentágono regular estrellado considerando el $\triangle$ rectángulo FAB. Así

$$FB = \sqrt{\overline{AF}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{4\,R^2 - \frac{R^2}{4}(\sqrt{5}-1)^2}$$

$$= \frac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Observacion.—Si n es número de | os de un polígono regular convexo, existen tantos estrellados como números inferiores á $\frac{n}{2} - 1$ ó $\frac{n+1}{2} - 1$ (segun sea n par ó impar) y primos con n.

Problema 5.°—*Hallar la relacion que existe entre el | ° de un polígono regular inscrito y el del circunscrito de igual número de | os* (fig. 117).

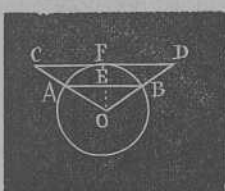

Figura 117.

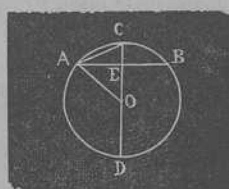

Figura 118.

Resolucion. —Sean AB y CD los | os de un polígono regular inscrito y del circunscrito de igual número de | os.

Trácese el rádio OF que será $\perp$ al | ° AB (115 y 96, 2.°)

En el $\triangle$ rectángulo OBE, se tiene

$$\mathrm{OE}^2 = \mathrm{OB}^2 - \mathrm{EB}^2 = r^2 - (\tfrac{1}{2}\, l)^2 = r^2 - \tfrac{1}{4}\, l^2 = \frac{4r^2 - l^2}{4}$$

(reemplazando OB por r, BE por $\frac{1}{2}\, l$ y efectuando operaciones); luego $\mathrm{OE} = \sqrt{\dfrac{4r^2 - l^2}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2}$;
pero, siendo AB $\parallel^{a}$ á CD (115, 112 y 96, 2.°), se tiene

$$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OE}}\ (134,\ 2.°) = \frac{r}{\frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2}} = \frac{2\,r}{\sqrt{4r^2 - l^2}}$$

ó tambien $\qquad \mathrm{CD} = \dfrac{2\,r\,l}{\sqrt{4r^2 - l^2}}$

PROBLEMA 6.°—*Hallar la relacion que existe entre el |° de un polígono regular inscrito y el del inscrito de doble número de |os* (fig. 118).

Resolucion.—Sea AB el |° de un polígono regular inscrito y AC el del que tiene doble número de |os. (119)

En el $\triangle$ AOC, siendo agudo el $\angle$ AOC por ser $\llcorner$ el $\angle$ AEO que pertenece con aquél al $\triangle$ AOC; se tiene que

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AO}^2 + \mathrm{CO}^2 - 2\,\mathrm{OC}.\,\mathrm{OE}\ (156)$$
$$= r^2 + r^2 - 2\,r.\,\frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2}$$
$$= 2\,r^2 - r\sqrt{4r^2 - l^2} = r\left(2\,r - \sqrt{4r^2 - l^2}\right)$$

y $\qquad \mathrm{AC} = \sqrt{r\left(2\,r - \sqrt{4r^2 - l^2}\right)}$

(reemplazando r por el rádio, l por el |° del polígono dado y efectuando operaciones).

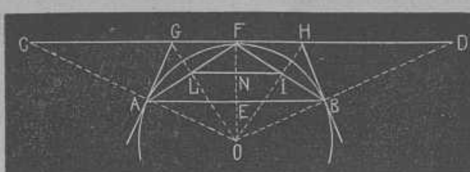

Figura 119.

PROBLEMA 7.°—*Dados el rádio* r *y la apotema* a *de un polígono regular, calcular el rádio* r′ *y la apotema* a′ *del* *polígono regular* ISOPERÍMETRO (1) *de doble número de* | os (fig. 119).

Resolucion.—Siendo AB el | o del polígono dado, trácense la ⊥ OF á dicho | o, las | as AF y BF, la | a LI que une los [.]s medios de AF y BF y las | as LO, IO. La | a LI es el | o buscado, pues es la mitad de AB (134, 2.o), y el ∠ en el centro LOI es la mitad del ∠ en el centro AOB (91, 1.o); de manera que el | o LI, mitad del AB, puede inscribirse doble número de veces que éste en la circunferencia.

Siendo N el [.] medio de EF y el △ OLF, rectángulo en L (91, 1.o), se tendrá que:

$$ON = \frac{1}{2}\ (OE + OF)\ [1]$$

(pues $OE = ON - NE$ y $OF = ON + NF = ON + NE$)

y $OL^2 = OF.\ ON$ (154, 1.o) ó $OL = \sqrt{OF.\ ON}$ [2], ó mejor,

$$a' = \frac{1}{2}\ (a + r)\ [3] \quad y \quad r' = \sqrt{r.\ a'}\ [4]$$

(sustituyendo OF, OE, OL y ON por r, a, r′ y a′).

Despues de obtenido el valor de a' por la primera expresion, se obtendrá el de r' por la segunda.

Observaciones.—1.a *Cuando se pasa de un polígono regular al isoperímetro regular de doble número de* | os, *la apotema aumenta y el rádio disminuye.*

2.a Si obtenido el primer polígono isoperímetro, se obtiene otro de doble número de | os que éste, y así se continúa indefinidamente, los | os de los mismos irán siendo cada vez más pequeños, y tanto como se quiera, á medida que aumente el número de | os; pero en el △ OAE se tiene que $AO - OE > AE$; luego *el exceso del rádio sobre la apotema puede hacerse tan pequeño como se quiera.*

PROBLEMA 8.o—*Determinar la razon de la circunferencia al diámetro.*

Resolucion por el método de los perímetros.—Inscríbase un polígono regular, por ejemplo, el cuadrado, y

---

(1) De igual perímetro.

calcúlese el valor de su | ° y, por consiguiente, el de su perímetro por la expresion obtenida (194, *prob.* 1.°); calcúlese enseguida el valor del | ° del octógono por medio de la expresion

$$AC = \sqrt{r\left(2r - \sqrt{4r^2 - l^2}\right)} \text{ (194, } \textit{prob. } 6.°\text{)}$$

Hallada la longitud del | ° del octógono regular, y, por consiguiente, de su perímetro, se obtendrá el perímetro del polígono de 16 | os y, así sucesivamente, obteniéndose, en fin, el de la circunferencia, con la aproximacion que se quiera (129, *cor.*)

Resolucion por el método de los isoperímetros.— Si se considera la circunferencia igual á 2, la expresion $R = \frac{C}{2\pi}$ se reduce á $R = \frac{1}{\pi}$ y el problema á calcular el valor del rádio de la dicha circunferencia; pues éste será el valor de la cantidad $\frac{1}{\pi}$, inversa de π.

Pero la apotema y el rádio de todo polígono regular, cuyo perímetro es igual á 2, son dos valores aproximados de $\frac{1}{\pi}$, el primero por defecto, y el segundo por exceso; pues las circunferencias inscrita y circunscrita á dicho polígono, cuyos rádios son la apotema y el rádio del mismo, son la una menor y la otra mayor que el perímetro 2 del polígono, y, por consiguiente, que la circunferencia dada; por lo cual sus rádios serán, respectivamente, menor y mayor que el de ésta.

Consideremos, pues, el cuadrado cuyo | ° es $\frac{1}{2}$; su perímetro será igual á 2, su apotema $a_1 = \frac{1}{4}$ y su rádio

$$r_1 = \sqrt{(a_1)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{2}.$$

Si se calculan sucesivamente los rádios y apotemas a_2 y r_2, a_3 y r_3,..... de los polígonos regulares isoperímetros de 8, 16, 32,..... | os, se obtendrá la série de valores

$$a_1,\ r_1,\ a_2,\ r_2,\ a_3,\ r_3, \ldots\ldots$$

que contendrá los términos a_1, a_2, a_3,..... de lugar impar, crecientes indefinidamente é inferiores á $\frac{1}{\pi}$, y los de lugar par, decrecientes indefinidamente, y cuyos valores son superiores á $\frac{1}{\pi}$; de manera que entre dos consecutivos de estos valores, se hallará el de $\frac{1}{\pi}$, y tomando uno de ellos, se tendrá el de $\frac{1}{\pi}$ por defecto ó exceso, segun sea de lugar par ó impar, con tanta aproximacion como se quiera, sin más que tomarlo suficientemente lejano del orígen (194, *prob.* 7.°, *observ.* 2.ª)

PROBLEMA 9.°—*Dados los perímetros de dos polígonos regulares, uno inscrito y otro circunscrito á una circunferencia, calcular los de los polígonos de doble número de* $|^{os}$, *uno inscrito y otro circunscrito á la misma circunferencia* (fig. 119).

Resolucion.—Sean p y P los perímetros de los polígonos regulares inscrito y circunscrito, cuyos $|^{os}$ son AB y CD; sean tambien p′ y P′ los de dos polígonos inscrito y circunscrito, cuyos $|^{os}$ son AF y GH, es decir, los polígonos inscrito y circunscrito de doble número de $|^{os}$ (193, *prob.* 5.°)

En virtud de (182), se tiene:

$$\frac{p}{P} = \frac{OE}{OF} \quad \frac{p'}{P'} = \frac{OL}{OF} = \frac{ON}{OL} \ (154,\ 1.°);$$

es decir, $\quad OF.\ p = OE.\ P, \quad OL.\ p' = ON.\ P',$

ó $$\frac{OF}{\frac{1}{p}} = \frac{OE}{\frac{1}{P}}, \quad \frac{OL}{\frac{1}{p'}} = \frac{ON}{\frac{1}{P'}}$$

Pero tambien, por ser semejantes los $\triangle^s$ rectángulos OLF y AFE, que tienen el $\angle$ AFO comun, se tiene:

$$\frac{OL}{OF} = \frac{AE}{AF} = \frac{p}{p'}$$

(pues AE, que es mitad del $|^{o}$ AB del polígono cuyo perímetro es *p*, se halla contenido en este perímetro, el mismo número de veces que el $|^{o}$ AF del polígono de doble número de | os, cuyo perímetro es p' se halla contenido en éste);

ó $\quad OL.\,p' = OF.\,p$, es decir, $\quad \dfrac{OL}{\frac{1}{p'}} = \dfrac{OF}{\frac{1}{p}}$.

Pero estas razones iguales pertenecen á las proporciones arriba deducidas; luego

$$\frac{OF}{\frac{1}{p}} = \frac{OE}{\frac{1}{P}} = \frac{OL}{\frac{1}{p'}} = \frac{ON}{\frac{1}{P'}} ;$$

resultando de estas expresiones que

$$OF = \frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{P'}}\,ON,\ OE = \frac{\frac{1}{P}}{\frac{1}{P'}}\,ON$$

y $$OF = \frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{p'}}\,OL,\ ON = \frac{\frac{1}{P'}}{\frac{1}{p'}}\,OL$$

si se sustituyen estos valores de OF y OE, OF y ON, respectivamente, en las expresiones [1] y [2] (194, *prob.* 7.°) se obtendrá:

$$ON = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{P'}}\,ON + \frac{\frac{1}{P}}{\frac{1}{P'}}\,ON\right) \quad ó \quad 1 = \frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{P}\right)}{\frac{1}{P'}}$$

$$OL = \sqrt{\frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{p'}}\,OL.\ \frac{\frac{1}{P'}}{\frac{1}{p'}}\,OL} = \sqrt{\frac{\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{P'}}{\frac{1}{p'^2}}\,OL^2}$$

$$ó \quad 1 = \frac{\sqrt{\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{P'}}}{\frac{1}{p'}}$$

y, en fin,

$$\frac{1}{P'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{P}\right), \qquad \frac{1}{p'} = \sqrt{\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{P'}}$$

GEOMETRIA DEL ESPACIO.

LIBRO PRIMERO.

PRINCIPIOS DE LA EXISTENCIA, DETERMINACION y sustituciones geométricas.

I.—DETERMINACION DEL PLANO.

TEOREMA.

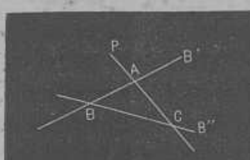

Figura 192.

196. *Tres* [.]^{s}, *no situados en* | ^{a} *recta*, **determinan un plano.**

Construccion.—Únanse los tres [.]^{s} dados B, B′ y B″ por | ^{as} (fig. 192).

Demostracion.—La cuestion se reduce á probar que no pueden ser distintos los planos que pasen por dichos [.]^{s} y, en efecto; sea P un [.] cualquiera que se halla en uno de los planos. Si se traza en el mismo una | ^{a} PAC, que cortará necesariamente á dos de las | ^{as} BB′, BB″ y B′B″, ó sus prolongaciones (1), en dos [.]^{s} A y C, por ejemplo, resultará lo siguiente:

Por hallarse los [.]^{s} B, B′ y B″ en los dos planos, se hallarán, en éstos, las | ^{as} que los unen (22). Por hallarse en los mismo dichas | ^{as}, se hallarán los [.[^{s} A y C que están en las BB′ y BB″. Por hallarse los [.]^{s} A y C en los dos pla-

---

(1) Porque, si la | ^{a} PA no encontrase á dos de las BB′, BB″ ó B′B″, indefinidamente prolongadas, habría por el [.] de encuentro de éstas, dos || ^{as} á la PAC, lo cual es absurdo (95).

nos, se hallará la | ª PAC que los contiene (22), y en fin, el [.] P que se halla en esta | ª; luego, cualquier [.] de un plano pertenece al otro; luego no son dos planos distintos, sino uno sólo.

COROLARIOS.

1.º *Un [.] y una | ª, dos | as que se encuentran y dos | as || as* DETERMINAN UN PLANO.

Demostracion.—En el 1er caso, el plano estará determinado por el [.] y dos [.]s cualesquiera de la | ª dada; en el 2.º por el [.] de interseccion y un [.] cualquiera de cada | ª y en el 3.º, por dos [.]s de una de las || as y uno de la otra.

2.º *La interseccion de dos planos es una línea | ª*, pues, si la interseccion tuviera tres [.]s, no en línea | ª, los dos planos se confundirían en uno solo, lo cual es contra la hipótesis.

3.º *Toda | ª que se mueve, pasando constantemente por un [.] y una | ª fijos, engendra un plano*, pues, como la | ª móvil contiene, en todas sus posiciones, al [.] fijo y á un [.] de la | ª fija, se hallará siempre contenida en el plano determinado por los mismos.

II.—EXISTENCIA Y DETERMINACION RELATIVA DE LA RECTA Y EL PLANO.

§ 1.º—Rectas y planos paralelos.

DEFINICION.

197. *Se dice que dos | as son || as en el espacio, cuando, situadas en un plano, no se encuentran* (1) *por más que se prolonguen*; luego, se puede decir (95) que: *Por un [.] del espacio se puede trazar á una | ª* UNA || ª, Y SÓLO UNA.

COROLARIOS.

1.º Como las | as || as no se encuentran, *tampoco podrá encontrar ninguna de ellas á un plano que pase por la otra;*

---

(1) Además de las | as situadas en un plano que *se encuentran* ó son *paralelas*, existen las | as que no se hallan en un plano, ni se encuentran, es decir, que *se cruzan*.

pues si una de ellas encontrase al plano que pasara por la otra, tendría que encontrar á ésta, lo cual es contra la hipótesis.

Queda, pues, justificada la siguiente

DEFINICION.

Un plano y una $|^{a}$ *son* $\|^{os}$, *cuando no se encuentran por más que se prolonguen.*

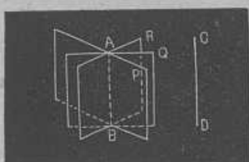

Figura 121.

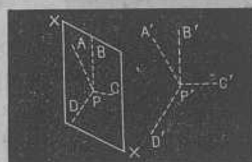

Figura 122.

2.° *Por un* [.] *se pueden trazar* { infinidad de planos $\|^{os}$ á una $|^{a}$ (fig. 121), infinidad de $|^{as}$ $\|^{as}$ á un plano (fig. 122);

pues en el 1.er caso se hallan los planos P, Q, R,............ que pasan por la única $\|^{a}$ AB que puede trazarse á la $|^{a}$ CD por un [.] A; y en el 2.° se hallan las $|^{as}$ P′A′, P′B′, P′C′,..... $\|^{as}$ respectivamente á las $|^{as}$ cualesquiera PA, PB, PC,..... del plano XX.

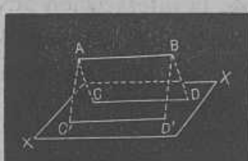

Figura 123.

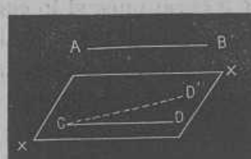

Figura 124.

3.° *Si por una* $\|^{a}$ AB *á un plano* (fig. 123) *se traza un plano que corte á éste*, LA INTERSECCION CD SERÁ $\|^{a}$ Á AQUÉLLA y, **recíprocamente**; *si por un* [.] C *de un plano* XX (figura 124) *se traza una* $\|^{a}$ CD *á la* $|^{a}$ AB, SE HALLARÁ CONTENIDA TODA EN EL PLANO.

En el 1.er caso, las $|^{as}$ CD y AB no pueden encontrarse, sin que ésta encuentre al plano XX, lo cual es contra la hipótesis.

En el 2.° caso, si CD no estuviese contenida en el plano XX, lo estaría la interseccion CD′ de este plano con el (AB, C) y habría por el [.] C las $\|^{as}$ CD′ (1.er caso) y CD (*hipótesis*) á la $|^{a}$ AB, lo cual es absurdo (197).

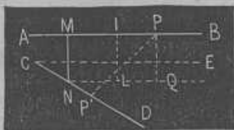

Figura 125.

4.° *Si dos* $|^{as}$ AB y CD (fig. 125) *se cruzan en el espacio*, es decir, *si no se encuentran ni se hallan en un plano*, POR UNA DE ELLAS PUEDE TRAZARSE UN PLANO $\|^{o}$ Á LA OTRA, y **sólo uno**; pues si por un [.] C de la $|^{a}$ CD se traza una $\|^{a}$ CE á la $|^{a}$ AB, el plano DCE no podrá encontrar á ésta (*cor.* 1.°)

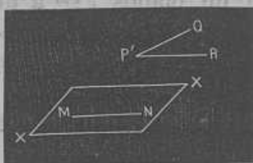

Figura 126.

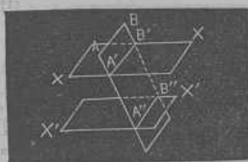

Figura 127

5.° *Si por un* [.] P′ (fig. 126) *se trazan dos* $\|^{as}$ P′Q y P′R *á un plano* XX, DETERMINAN OTRO PLANO QUE NO PUEDE ENCONTRAR Á ÉSTE; pues si lo encontrase, la interseccion MN sería $\|^{a}$ á la vez á las dos $|^{as}$ P′Q y P′R (*cor.* 3.°), lo cual es absurdo. Esto justifica la siguiente

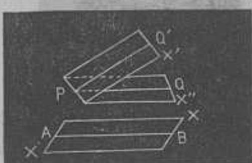

Figura 128.

DEFINICION.—*Dos planos que no se encuentran, indefinidamente prolongados, se llaman* PLANOS PARALELOS.

6.° *Las intersecciones* AB y A″B″ (fig. 127) *de dos planos* $\|^{os}$ XX, X′X′ *con un tercero* (AB, A″B″) SON $\|^{as}$; pues dichas $|^{as}$ están en un plano y no pueden encontrarse; porque si esto se verificara, los planos tambien se encontrarían.

7.° *Por un* [.] P (fig. 128), SÓLO PUEDE TRAZARSE UN PLANO PX″ $\parallel^{o}$ Á OTRO XX; pues si se pudiera trazar otro PX′ tambien $\parallel^{o}$ al XX, trazándose por el [.] P un plano que cortara á los tres, resultarían las $|^{as}$ PQ y PQ′ $\parallel^{as}$ á la AB (*cor.* 6.°), lo cual es absurdo (197).

§ 2.°—Rectas y planos perpendiculares entre sí.

TEOREMA.

198. (**Existencia.**)—*Por un* [.] O *de una* $|^{a}$ OP PUEDEN *trazarse dos* $|^{as}$ OA y OC $\perp^{s}$ *á aquélla y:*

1.° *Cualquiera* $|^{a}$ OB *trazada en el plano* AOC *por el* [.] O, SERÁ TAMBIEN $\perp$ *á la* OP (**directo**).

2.° *Cualquiera* $|^{a}$ OB *trazada por el* [.] O $\perp$ *á la* OP, SE HALLARÁ TAMBIEN EN EL PLANO AOC (**recíproco**).

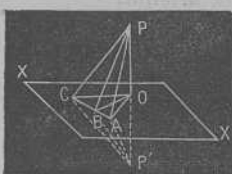

Figura 129.

1.° **Construccion.**—Trácense por la $|^{a}$ OP los planos POA y POC, y en cada uno de éstos una $\perp$ OA, OC á la $|^{a}$ OP (fig. 129).

Para demostrar que la $|^{a}$ OB es $\perp$ á la $|^{a}$ OP, tómese OP′ = OP en la prolongacion de esta $|^{a}$, y únanse, por medio de los $[.]^{s}$ P y P′ con los A, B y C.

1.° **Demostracion.**—En los $\triangle^{s}$ PAC y P′AC se tiene $|^{o}$ CP = $|^{o}$ CP′, $|^{o}$ AP = $|^{o}$ AP′ (106, 3.°), $|^{o}$ AC comun;

luego $\triangle$ PAC $\cong$ $\triangle$ P′AC;

luego $\angle$ PCB = $\angle$ P′CB,

y los $\triangle^{s}$ PCB y P′CB son iguales por tener

$|^{o}$ CP = $|^{o}$ CP′, $\angle$ PCB = $\angle$ P′CB y $|^{o}$ CB comun;

luego BP = BP′;

luego la $|^{a}$ OB es $\perp$ á la $|^{a}$ OP (106, *observ.* 2.ª)

2.° **Demostracion.**—Si una $\perp$ OB á la OP, no estuviera en el plano AOC; trazando porestas dos $|^{as}$ un plano, su interseccion OB′ con el plano XX, sería $\perp$ á la $|^{a}$ OP (1.°), y habría por el [.] O, en un plano, dos $\perp^{s}$ á dicha $|^{a}$, lo cual es absurdo (51, 1.°)

Observacion.—De este recíproco resulta que el plano AOC contiene todas las $\perp^s$ á la OP en el [.] O, es decir, es el *lugar geométrico* de éstas.

DEFINICION.

199. *Un plano que contiene todas las* $\perp^s$ *trazadas á una* $|^a$ *en uno de sus* [.]^s *se llama plano* $\perp$ *á la misma en dicho* [.] *y*, **recíprocamente**, *se dice que una* $|^a$ *es* $\perp$ *á un plano, cuando es* $\perp$ *á todas las que pasen por su pié en dicho plano.*

TEOREMA.

200. (**Determinacion**.)

1.° *Por un* [.] *de un plano* SÓLO *se puede trazar una* $|^a$ $\perp$ *al mismo.*

2.° *Por un* [.] *de una* $|^a$ SÓLO *se puede trazar un plano* $\perp$ *á la misma.*

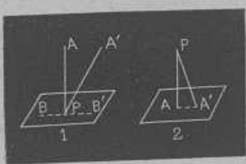

Figura 130.

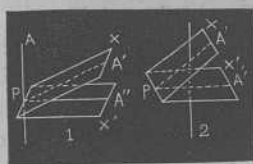

Figura 131.

Demostracion.

1.° Si por el [.] P (fig. 130) hubiera trazadas dos $\perp^s$ PA y PA′ al plano XX; trazando por dichas $|^{as}$ un plano PAA′, su interseccion con el primero sería $\perp$ á las $|^{as}$ PA y PA′ (198, 1.°), lo cual es absurdo (51, *cor.* 3.°, *consec.*)

2.° Si por el [.] P (fig. 131) hubiera trazados dos planos PX, PX′ $\perp^s$ á la $|^a$ dada; trazando por dicha $|^a$ y el [.] P un plano PA′A″, sus intersecciones PA′ y PA″ serían $\perp^s$ á la $|^a$ dada (198, 1.°), lo cual es absurdo (51, *cor.* 3.°, *consec.*)

TEOREMA.

201. *Si una* $|^a$ AB *es* $\perp$ *á un plano* XX (fig. 132), *y por su pié se traza una* $\perp$ BD *á otra* $|^a$ EF *situada en dicho*

plano; uniéndose el [.] *de encuentro* D *con cualquiera* [.] A *de la* | ª AB, LA | ª AD SERÁ TAMBIEN $\perp$ Á LA EF (1).

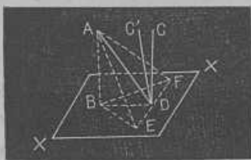

Figura 132.

Construccion.—Tómense las distancias DE y DF iguales entre sí, y únanse los [.]ˢ E y F con los B y A por medio de | ªˢ.

Demostracion.—Los $\triangle$ˢBDE y BDF son iguales (87), luego BE = BF,
y como AB es un cateto comun de los $\triangle$ˢ ABE y ABF, éstos serán iguales (87), luego

AE = AF,

luego AD es $\perp$ á EF en su [.] medio D (106, *observ.* 2.ª)

COROLARIOS.

202. De la consideracion y comparacion de los $\triangle$ˢ ABE, ABF y ABD, resulta que:

1.° *Si desde un* [.] A *exterior á un plano, se le trazan la* $\perp$ AB *y diferentes oblícuas*: 1.° LA $\perp$ ES LA MENOR; 2.° LAS OBLÍCUAS QUE DISTAN IGUALMENTE DEL PIÉ DE LA $\perp$, SON IGUALES; 3.° DE DOS OBLÍCUAS QUE DISTAN DESIGUALMENTE, ES MAYOR LA QUE MÁS DISTA.

Además: *El lugar geométrico de los* [.]ˢ *del plano que distan igualmente del* [.] A, *es una circunferencia trazada desde el pié de la* $\perp$ *como centro.*

§ 3.°—Correlaciones del paralelismo ó determinacion directiva de la recta y el plano.

TEOREMA.

203. *Dos* | ªˢ AA′ y BB′ ‖ ªˢ *á una* 3.ª CC′; SON ‖ ªˢ ENTRE SÍ (fig. 133).

Demostracion.—Las | ªˢ AA′ y BB′ no pueden encontrarse; porque si se encontrasen, habría por el [.] de en-

---

(1) Este teorema se llama de *las tres perpendiculares*.

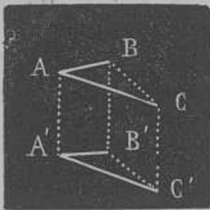

Figura 133.

cuentro dos $\|^{as}$ á la $|^{a}$ CC′. Ademas, dichas $|^{as}$ están en un mismo plano, porque, trazando un plano que pase por la $|^{a}$ BB′ y un [.] A de la AA′, este plano será $\|^{o}$ á la $|^{a}$ CC′ (197, *cor.* 1.°); y, por consiguiente, contendrá á la $|^{a}$ AA′ (197, *cor.* 3.°, *recip.*); luego AA′ y BB′ son $\|^{as}$ entre sí.

TEOREMA.

204. *Si dos* $|^{as}$ AB y CD *son* $\|^{as}$ *entre sí*, TODO PLANO $\|^{o}$ Á LA UNA SERÁ $\|^{o}$ Á LA OTRA Ó LA CONTENDRÁ, y; (**contrario**) TODO PLANO QUE CORTE Á LA UNA CORTARÁ Á LA OTRA.

1.° **Hipótesis.**—Sea la $|^{a}$ AB $\|^{a}$ á la CD y al plano XX (fig. 134).

Construccion.—Por la $|^{a}$ AB trácese un plano AB A′B′ que corte al dado.

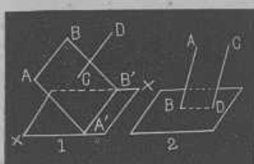

Figura 134.

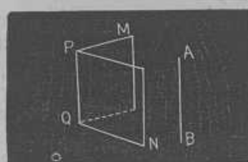

Figura 135.

Demostracion.—La interseccion A′B′ será $\|^{a}$ á la $|^{a}$ AB (197, *cor.* 3 °); luego tambien lo será á su $\|^{a}$ CD (203); luego el plano XX es $\|^{o}$ á la $|^{a}$ CD, si no la contiene.

2.° *(Demostracion ad absurdum.)*

TEOREMA.

205. *Si dos planos son* $\|^{os}$ *á una* $|^{a}$, *ésta será* $\|^{a}$ *á su comun interseccion* (fig. 135).

Demostracion.—Si por un [.] de la comun interseccion de los planos, se traza una $|^{a}$ $\|^{a}$ á la AB, estará contenida la vez en los dos planos (197, *cor.* 3 °, *recip.*); luego será su comun interseccion.

TEOREMA.

206. Si dos planos son $\|^{os}$ entre sí:
- 1.° *Toda* $\|^{a}$ *al uno, ó contenida en el mismo*, SERÁ $\|^{a}$ AL OTRO Ó ESTARÁ CONTENIDA EN ÉL (**directo**).
- 2.° *Toda* $|^{a}$ *que corta al uno*, CORTARÁ AL OTRO (**contrario**).

1.° **Construccion.**—Si la $|^{a}$ AB (fig. 127) es $\|^{a}$ al plano XX, trácese un plano ABA′B′ que corte á éste.

Demostracion.—La $|^{a}$ A′B′ contenida en el plano XX, no puede encontrar al X′X′; luego su $\|^{a}$ AB tampoco lo podrá encontrar (204, 1.°)

Si la $|^{a}$ propuesta está en uno de los planos, evidentemente no podrá encontrar al otro.

2.° *(Demostracion ad absurdum.)*

TEOREMA.

207. *Dos planos* $\|^{os}$ *á un tercero*, SON $\|^{os}$ ENTRE SÍ; y **contrario**, *si dos planos son* $\|^{os}$, TODO PLANO QUE ENCUENTRA AL UNO ENCUENTRA AL OTRO.

1.° **Demostracion.**—Si los dos planos dados se encontrasen, por cualquier [.] de la interseccion, habría dos planos $\|^{os}$ al tercero, lo cual es absurdo.

2.° *(Demostracion ad absurdum.)*

§ 1.°—Angulos en el espacio.

TEOREMA.

208. *Dos* $\angle^{s}$ *que tienen sus* $|^{os}$ *respectivamente* $\|^{os}$: 1.° SON IGUALES Ó SUPLEMENTARIOS; 2.° SE HALLAN EN PLANOS $\|^{os}$.

1.° **Construccion.**—Tómese A′B′ = AB, A′C′ = AC (fig. 133), y únanse los [.]^{s} A y A′, B y B′, C y C′, B y C, B′ y C′.

Demostracion.—Siendo AA′BB′ y AA′CC′ $\square^{s}$ (107, *recíproco*, 2.°), resultará que:

BB′ = y $\|^{a}$ con AA′, CC′ = y $\|^{a}$ con AA′;

es decir, que:

$$BB' = CC' \quad y \quad BB' \parallel^{a} á\ CC' \ (203);$$

luego $BB'CC'$ es un $\square$ (107, *recip.* 2.°)

luego $BC = B'C'$ (107, 1.°);

luego el $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (92);

luego el $\angle BAC = \angle B'A'C'$.

Si uno de los $|^{os}$ estuviera en prolongacion, los $\angle^{s}$ serían suplementarios.

2.° **Demostracion.**—Si los planos ABC y A'B'C' se cortasen, habría por un [.] dos $\parallel^{as}$ á una $|^{a}$ (197, 1.° y 3.°)

Observaciones.—1.ª No produciendo alteracion en los valores angulares de las $|^{as}$ la sustitucion de éstas por sus $\parallel^{as}$, podrá extenderse la nocion del $\angle$ diciéndose que: *el $\angle$ de dos $|^{as}$ que se cruzan en el espacio es el formado por las $\parallel^{as}$ respectivas trazadas por un [.] cualquiera.* De esta nocion del $\angle$, resulta el siguiente

COROLARIO.—*Si dos $|^{as}$ son $\parallel^{as}$,* TODA $\perp$ Á UNA LO SERÁ Á LA OTRA.

2.ª De esto se deduce que: *todas las $|^{as}$ de un plano $\perp$ á una $|^{a}$* SON $\perp^{s}$ Á ÉSTA; y el plano XX (fig. 132) estará determinado, no sólo por dos $|^{as}$ trazadas perpendicularmente á la $|^{a}$ AB por el [.] B, sino por una cualquiera BD de éstas y otra $\perp$ á la AB, trazada desde cualquier [.] de la BD; resultando, por consiguiente, que *el plano $\perp$ á una $|^{a}$ en uno de sus [.]^{s}, es el* LUGAR GEOMÉTRICO *de todas las $|^{as}$ $\perp^{s}$ que pueden trazarse á aquélla por todos los [.]^{s} de cualquiera $\perp$ á la misma en dicho [.]*

DEFINICIONES.

209. Se llama *ángulo diedro* el espacio comprendido por dos planos que se encuentran; éstos se llaman *caras* y la interseccion, *arista*.

CABX (fig. 136) es un $\angle$ diedro, cuyas caras son AX y BC, y cuya arista es AB.

Un $\angle$ diedro se nombra por cuatro letras, colocándose siempre en medio las de la arista; cuando haya un $\angle$ diedro solo, basta nombrar las letras de la arista.

Corolario.—*Un $\angle$ diedro no altera, aunque varíe la extension superficial de sus caras.*

210. Se dice que dos $\angle^s$ *diedros son iguales*, cuando superpuestos coinciden.

211. Se llaman $\angle^s$ *diedros adyacentes*, los que tienen la arista y una cara comun y las otras dos en un mismo plano, como los XABC y CABX′ (fig. 136).

212. Se llama $\angle$ *diedro recto* á cada uno de los $\angle^s$ adyacentes iguales que un plano forma con otro (fig. 136).

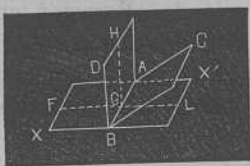

Figura 136.

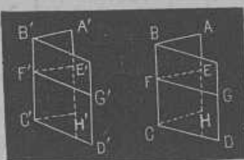

Figura 137.

213. **Existencia del $\angle$ diedro recto.**—Si el plano BC gira alrededor de la $|^a$ AB (fig. 136), desde la posicion primitiva BX′, hasta la final BX, formará siempre con el plano XX′ dos $\angle^s$ diedros, de los que el menor va constantemente aumentando y el mayor disminuyendo; luego ha de haber necesariamente una posicion BH, y sólo una, en que sean iguales.

214. Se dice que un plano es *perpendicular á otro*, cuando forma con éste dos $\angle^s$ diedros adyacentes iguales.

Del anterior razonamiento, resulta el siguiente

Corolario.—*Por una $|^a$ de un plano no se puede trazar á éste más que otro que le sea $\perp$.*

215. Se dice que dos $\angle^s$ diedros son *complementarios* ó *suplementarios*, cuando sumados valen uno ó dos $\angle^s$ diedros $\llcorner^s$.

Observacion.—La nocion del $\angle$ diedro conduce á proposiciones análogas á las expuestas en la Geometría plana, y que se demuestran empleando los mismos razonamientos.

El $\angle$ retilíneo correspondiente á un $\angle$ D ABCD (fig. 137) es el ∠ EFG formado por las ⊥^s FE y FG trazadas á la arista en cada una de las caras y por un [.] de aquélla.

TEOREMA.

216. *Si dos ∠ˢ diedros son iguales*, SUS ∠ˢ RECTILÍNEOS TAMBIEN LO SERÁN.

Demostracion.—*(Por superposicion.)*

Recíprocamente.—*Si dos ∠ˢ rectilíneos correspondientes á dos ∠ˢ dˢ son iguales*, ÉSTOS TAMBIEN LO SERÁN; pues, superponiendo los ∠ˢ EFG y E'F'G' (fig. 137), las ⊥ˢ BC y B'C' á sus planos, tambien se confundirán (200, 1.°), y por consiguiente, las caras de sus ∠ˢ dˢ.

COROLARIO.—*Si un ∠ d es* ∟, SU RECTILÍNEO TAMBIEN LO SERÁ y **recíprocamente.**

§ 5.°—Correlaciones de la perpendicularidad y el paralelismo.

TEOREMA.

217. *Dos* | ^as ⊥ˢ *á un plano*, SON ‖ ^as ENTRE SÍ.

Construccion.—Trácese la | ^a BD (fig. 132) que une los piés de las ⊥ˢ AB y CD al plano y la ⊥ EF á la | ^a BD, en dicho plano; únase, en fin, el [.] D con uno cualquiera de la ⊥ AB.

Demostracion.—La | ^a BD es ⊥ á la EF, por construccion; la CD, lo es por hipótesis, y la AD, por el teorema de las tres ⊥ˢ (201); luego están en un mismo plano ABCD (198, *recip*); luego las | ^as AB y CD están en un mismo plano; además, son ⊥ˢ á la | ^a BD por ser ⊥ˢ al plano XX (198, 1.°); luego son ‖ ^as entre sí (94).

Recíprocamente.—*Si dos* | ^as AB y *y* CD *son* ‖ ^as *entre sí y una de ellas* AB, *por ejemplo,* (fig. 132) *es* ⊥ *á un plano* XX, LA OTRA TAMBIEN LO SERÁ; pues si CD no fuese ⊥ al plano, sería oblícua y, trazando por el [.] D una ⊥ DC' al mismo, sería ‖ ^a á la AB *(directo)*, y habría por un [.] dos ‖ ^as á dicha | ^a, lo cual es absurdo (197).

TEOREMA.

218. Si una |ª es $\perp$ á un plano,
1.° *Toda* |ª $\|$ª *al plano*, ES $\perp$ Á LA |ª (**directo**).
2.° *Toda* |ª $\perp$ *á la* |ª, ES $\|$ª AL PLANO Ó ESTARÁ CONTENIDA EN ÉL (**recíproco**).

Construccion.—Trácese por el [.] B′ (fig. 138), una $\|$ª B′C′ á la |ª BC.

Demostracion.

DIRECTO.

Siendo la |ª BC $\|$ª al plano XX, la |ª B′C′ se hallará contenida en éste (197, 3.° *recíp.*); luego es $\perp$ á la AB (198, 1.°); luego su $\|$ª BC tambien lo será (208, *cor.*)

RECÍPROCO.

Siendo la BC $\perp$ á la AB, su $\|$ª B′C′ tambien lo será (208, *cor.*); luego se hallará contenida en el plano XX (198, *recíp.*); luego la |ª BC será $\|$ª al plano XX (si el [.] B′ no pertenece al plano) ó estará en él (204, 1.°)

TEOREMA.

219. Si una |ª es $\perp$ á un plano,
1.° *Todo plano* $\|$° *al propuesto*, SERÁ $\perp$ Á LA |ª (**directo**).
2.° *Otro plano* $\perp$ *á la* |ª SERÁ $\|$° AL PLANO DADO (**recíproco**).

Construccion.—Trácense por un [.] cualquiera B del plano ZZ, y en éste (fig. 138) dos |as BC y BD.

Demostracion.

DIRECTO.

Siendo el plano ZZ $\|$° al XX, las |as BC y BD tambien lo serán (206, 1.°); luego serán $\perp$s á la |ª AB (218, 1.°); luego el plano ZZ será $\perp$ á la |ª AB (198, 1.°)

RECÍPROCO.

Siendo el plano ZZ $\perp$ á la |ª AB, las |as BC y BD tambien lo serán (198, 1.°); luego serán $\|$as al plano XX (218, 2.°); luego el plano ZZ será $\|$° al XX (197, 5.°)

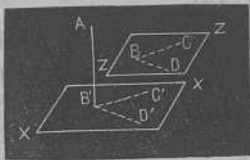

Figura 138.

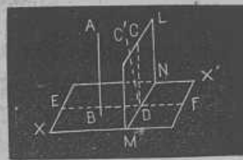

Figura 139.

TEOREMA.

220. *Si dos planos son* $\perp^s$, *y en uno de ellos se traza una* $\perp$ *á su comun interseccion*, LO SERÁ TAMBIEN $\perp$ AL OTRO.

Construccion.—Trácese, en el plano XX (fig. 139), la |ª EF $\perp$ á la interseccion MN.

Demostracion.—Como los $\angle^s$ D^s XMNL y X'MNL son iguales (214), sus rectilíneos CDE y CDF tambien lo serán (216); luego CD, que es $\perp$ á MN y EF, lo será al plano XX'.

TEOREMA.

221. *Si dos planos* { son $\parallel^{os}$ / son $\perp^s$ } y por un [.] del uno se traza una { $\parallel^a$ / $\perp$ } al otro { ESTARÁ CONTENIDA EN AQUÉL.

Demostracion.—1.° Si la $\parallel$ª BC al plano XX no estuviera contenida en el plano ZZ (fig. 138); trazando por dicha |ª un plano que cortase al XX, la interseccion con éste sería á la vez $\parallel$ª á la |ª BC *(hipótesis)* y á la interseccion del plano secante con el ZZ (197, *cor* 6.°), lo cual es absurdo (197).

2.° Si la $\perp$ DC' al plano XX' no estuviera contenida en el plano ML (fig. 139); trazando en éste la |ª CD $\perp$ á MN, sería $\perp$ al plano XX' (220); luego habría por el [.] D dos $\perp^s$ á un plano, lo cual es absurdo (200, 1.°)

TEOREMA.

222. Si una |ª es $\perp$ á un plano XX, { 1.° *Todo plano que contiene á la* |ª *ó que le es* $\parallel$°, ES $\perp$ AL PLANO XX (**directo**).
2.° *Todo plano* $\perp$ *al* XX', ES $\parallel$° Ó CONTIENE Á LA |ª (**recíproco**).

DIRECTO (1.^{er} *caso*).

Demostracion.—Si la | ª CD, $\perp$ al plano XX', está contenida en el plano ML (fig. 139); como forma con la $\perp$ EF á la interseccion ML los $\angle^s$ rectilíneos $\llcorner^s$ CDE y CDF, los diedros correspondientes serán $\llcorner^s$ y el plano ML será $\llcorner$ al XX.

Construccion.

DIRECTO (2.º *caso*).

Si el plano ML es ‖ º á la | ª AB; trácese por un [.] cualquiera de aquél una ‖ ª CD á ésta.

RECÍPROCO.

Trácese por un [.] cualquiera del plano ML una $\perp$ CD al plano XX.

Demostracion.

La | ª CD será $\perp$ al plano XX (217, *recip.*); estará además contenida en el plano ML (221, 2.º), y, por consiguiente, éste será $\perp$ al XX (1.º)

La $\perp$ CD será ‖ ª á la | ª AB (217, *direc.*), estará además contenida en el plano ML (221, 2.º), y, por consiguiente, éste será ‖ º á la | ª AB ó la contendrá (197, 3.º *recip.*)

Observacion.—Puede verse cómo las construcciones del directo y recíproco corresponden, respectivamente, con las hipótesis del directo y recíproco (217). En la demostracion, esta correspondencia de reciprocidad, se conserva al deducirse, respectivamente, las tésis de dichos teoremas. Inmediatamente se deduce, en uno y otro razonamiento, mediante el teorema (221, *recip.*), la continencia de la | ª CD en el plano ML; y, en fin, queda demostrado uno y otro teorema, fundándose, respectivamente, en dos teoremas *correlativos*; á saber:

Si una | ª y un plano son ‖ ºˢ,

1.º *Toda* ‖ ª *trazada por un* [.] *del plano*, estará contenida en éste (197, 3.º *recip.*)

2.º Todo plano $\perp$ al plano dado, trazado por un [.] de la | ª, contendrá á ésta (217, 2.º)

TEOREMA.

223. *Si dos planos son* ‖ ^{os}, TODO PLANO ⊥ AL UNO LO SERÁ AL OTRO.

Construccion.—Suponiendo que el plano AC (fig. 141) sea ⊥ al BD, trácese un plano $m'pq$ ⊥ á la arista BC, el cual cortará á los dos planos ‖ ^{os} BD y B'D'.

Demostracion.—Siendo BC ‖ ^{a} á la B'C' (197, *cor.* 6.°) el plano secante $m'pq$, que es ⊥ á la primera, lo será á la segunda, y los ∠ ^{s} $m'n'q'$ y $m'pq$ serán los rectilíneos de los ∠ ^{s} D^{s} ABCD y AB''C''D'; pero ∠ $m'n'q'$ = ∠ $m'pq$ (97, 2.°); luego ∠ D ABCD = ∠ D AB''C''D' (216, *recip.*); y como el primero es ∟, el segundo tambien lo será.

TEOREMA.

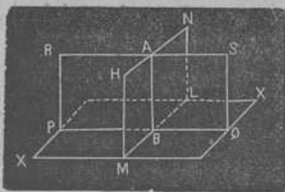

Figura 140.

224. *Si dos planos* RQ *y* MN *son* ⊥ ^{s} *á otro* XX (fig. 140), SU INTERSECCION AB TAMBIEN LO SERÁ.

Demostracion.—Si por el [.] B se traza una ⊥ al plano XX, estará contenida á la vez en los dos (221, 2.°); luego será la AB.

§ 6.°—Transformaciones ó sustituciones de las relaciones angulares por relaciones de paralelismo.

DEFINICIONES.

225. *Cuando un plano* AC'' (fig. 141) *corta á otros* BD *y* B'D', *se llama* SECANTE *y forma con éstos ocho* ∠ ^{s} D^{s} *que reciben las mismas denominaciones que en el núm.* 58.

TEOREMA.

226. *Si dos planos* BD *y* B'D' (fig. 141), *cortados por otro* AC'', *de manera que las intersecciones* BC *y* B''C'' *sean* ‖ ^{as} *entre sí, forman con éste* ∠ ^{s} *iguales ó suplementarios,* SERÁN ‖ ^{os}.

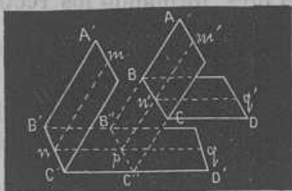

Figura 141.

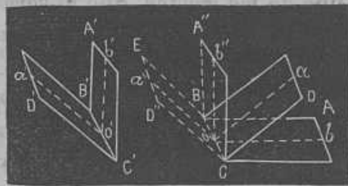

Figura 142.

Construccion.—Trácese un plano $m'qp$ $\perp$ á una de las intersecciones BC, que lo será tambien á la otra (208, *cor.*)

Demostracion.—Siendo BC $\perp$ á $q'n'$ y $n'm'$ y B″C″ $\perp$ á pq y pm' (198, 1.°); los $\angle^s$ $q'n'm'$ y qpm' serán los rectilíneos de los $\angle^s$ D′ ABCD y AB″C″C′; pero como éstos son iguales por hipótesis, aquéllos tambien lo serán; luego $q'n'$ es $\parallel^a$ á pq (97); pero BC es $\parallel^a$ á B″C″ *(hipótesis)*; luego el plano BD es $\parallel^o$ al plano B′D′ (217, *recip.*)

Observacion.—Análogo razonamiento se aplicará á otros $\angle^s$ cualesquiera.

Recíprocamente.—*Dos planos* $\parallel^{os}$ *cortados por otro,* FORMAN CON ÉSTE $\angle^s$ D^s AGUDOS Ú OBTUSOS IGUALES, Y LOS AGUDOS SERÁN, RESPECTO DE LOS OBTUSOS, SUPLEMENTARIOS.

Demostracion.—(Análoga á la anterior, pasándose de la igualdad de los $\angle^s$ rectilíneos á la de los $\angle^s$ D^s.)

Contrario.—(*Demostracion ad absurdum.*)

TEOREMA.

227. *Dos* $\angle^s$ D^s *cuyas aristas son* $\parallel^{as}$ *y cuyas caras son* $\perp^s$ *entre sí,* SON IGUALES Ó SUPLEMENTARIOS (figs. 141 y 142).

1.° **Construccion.**—Prolónguese el plano AC, y trácese otro $\perp$ á una de las aristas, el cual lo será tambien á la otra (217, *recip.*)

Demostracion.—Las intersecciones $n'q'$ y nq son $\parallel^{as}$ (197, 6.°);

luego $\angle\, m'n'q' = \angle\, m'pq = \angle\, mnq$ (98);

luego $\angle$ D ABCD $= \angle$ D AB″C″D′ $= \angle$ D A′B′C′D′ (216, *recip.*)

2.° **Construccion.**—Trácense los planos CA″ y CE $\parallel^{os}$

respectivamente á los C′A′ y C′D′ y además, un plano $\perp$ á una de las aristas, que lo será á la otra, formando los rectilíneos de los $\angle^s$ D^s de la figura.

Demostracion.—Siendo $\llcorner^s$ los $\angle^s$ D^s DBCE y ABCA″ (223), sus rectilíneos *aoa″* y *bob″* tambien lo serán (216);
luego $\angle\ aob = \angle\ a''ob'' = \angle\ a'o'b'$ (98, 3.°);
luego $\angle$ D ABCD $= \angle$ D A′B′C′D′ (216, *recip.*)

III.—PROYECCION ORTOGONAL.

DEFINICIONES.

228. Se llama *proyeccion ortogonal*, ó simplemente *proyeccion*, de un [.] sobre un plano, el pié de la $\perp$ tirada desde dicho [.] al plano. El [.] A′ es la proyeccion del A (fig. 143).

229. Se llama *proyeccion de una* | ª sobre un plano, *el lugar geométrico de las proyecciones de todos sus* [.]^s

230. Todas las | ^{as}, que proyectan los diversos [.]^s de una | ª, se hallan en un mismo plano $\perp$ al plano de proyeccion, que se llama *plano proyectante*; y como la interseccion de ambos es una | ª, resulta que: *la proyeccion de una línea* | ª *es tambien una línea* | ª.

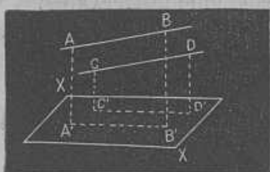

Figura 143.

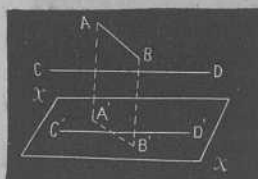

Figura 144.

TEOREMA.

231. *Las proyecciones de dos* | ^{as} ‖ ^{as} AB y CD SON TAMBIEN ‖ ^{as} ENTRE SÍ (fig. 143).

Demostracion.—Siendo AB ‖ ª á CD y AA′ ‖ ª á CC′ (216), lo serán los planos ABA′B′ y CDC′D′ (208, 2.°); luego sus intersecciones A′B′ y C′D′ con el XX tambien lo serán (197, 6.°)

TEOREMA.

232. *Si dos* $|^{as}$ AB y CD *son* $\perp^{s}$ *entre sí* (fig. 144), SUS PROYECCIONES SOBRE UN PLANO $\|^{o}$ Á UNA DE ELLAS, TAMBIEN LO SERÁN y **recíprocamente**.

Demostracion.

DIRECTO.

CD es $\perp$ á AB; luego C′D′ tambien lo será (208, *cor.*); pero BB′ que es $\perp$ al plano XX, lo será á C′D′ (198, 1.°); luego C′D′ es $\perp$ al plano proyectante ABA′B′ (208, *observacion* 2.ª); luego C′D′ es $\perp$ á A′B′.

RECÍPROCO.

C′D′ es $\perp$ á A′B′; luego CD tambien lo será (208, *cor.*); pero BB′, que es $\perp$ al plano XX, lo será á C′D′ (198, 1.°); luego CD es $\perp$ al plano proyectante ABA′B′ (208, *observacion* 2.ª); luego CD es $\perp$ á AB.

TEOREMA.

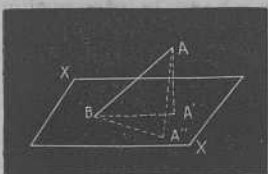

Figura 145.

233. *Si una* $|^{a}$ AB *es oblícua á un plano* (fig. 145), EL $\angle$ AGUDO ABA′ QUE FORMA CON SU PROYECCION SOBRE ESTE PLANO, ES MENOR QUE EL QUE FORMA CON CUALQUIERA OTRA $|^{a}$ QUE PASE POR SU PIÉ EN DICHO PLANO.

Construccion.—Tómese una longitud BA″ = BA′ y únase A con A′ y A″.

Demostracion.—En los $\triangle^{s}$ ABA′ y ABA″ se tiene: AB comun, BA′ = BA″ y AA′ < AA″ (202, 1.°); luego $\angle$ ABA′ < $\angle$ ABA″ (104, *recíp.*)

DEFINICIÓN.—El $\angle$ ABA″ se llama *el* $\angle$ *de la* $|^{a}$ *con el plano.*

TEOREMA.

234. *Dadas dos* $|^{as}$ AB *y* CD (fig. 125) *que se cruzan en el espacio:* 1.° *Existe una* $|^{a}$ *y* SÓLO UNA *que las encuentra formando* $\llcorner$ *con aquéllas.* 2.° *Esta* $\perp$ *comun es la* MÁS CORTA DISTANCIA *de las mismas.*

Construccion.—Trácese por un [.] C de la |ª CD una ||ª CE á la |ª AB; el plano CDE será ||º á la |ª AB (197, 1.º). Trácese tambien la proyeccion NQ de la |ª AB sobre dicho plano.

Demostracion.—1.º Siendo el plano ABNQ ⊥ al ECD (222, 1.º); si por el [.] N se traza la ⊥ NM á éste, se hallará en aquél (221, 2.º); pero encuentra á NQ y le es ⊥ (198, *observacion* y 199); luego tambien encontrará y será ⊥ á su ||ª AB (96, 1.º y 2.º); además es ⊥ á la |ª CD, que es lo que se quería demostrar.

2.º Una |ª cualquiera PP′ comprendida entre las propuestas es mayor que la ⊥ PQ trazada por el [.] P (202, 1.º), es decir, que sea igual MN.

IV.—PRINCIPIOS DE SIMETRÍA.

DEFINICIONES.

235. Dos [.]s P y P′ (fig. 146) *son simétricos con relacion á un centro* O, cuando este centro es el medio de la |ª PP′.

236. Dos [.]s P y P′ *son simétricos con relacion á un eje ó á un plano* XX, cuando este eje ó plano son ⊥s á PP′ en su [.] medio.

237. Dos figuras son simétricas con relacion á un centro, á un eje ó á un plano, cuando sus [.]s son, dos á dos, simétricos con relacion á este centro, á este eje ó á este plano. Los [.]s simétricos de dos figuras, se llaman *homólogos*.

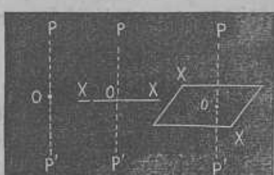

Figura 146.

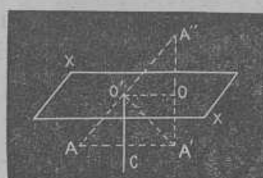

Figura 147.

TEOREMA.

238. *Dos figuras* F y F′ (fig. 147) *simétricas de una mis-*

ma figura F'', *con relacion á dos centros diferentes* O y O', SON IGUALES.

Demostracion.—Sean A, A' y A'' tres [.]s homólogos de las tres figuras.

Siendo O'A = O'A'' y OA' = OA'', resulta que

AA' = 2. OO' (134, 2.°);

es decir, que cada [.] de la figura F, pasará á confundirse con su homólogo de la F', mediante una traslacion, doble que la distancia de los centros de simetría y ‖ a á la direccion de la | a que los une.

TEOREMA.

239. *Si dos figuras* F' y F'' (fig. 147) *son simétricas con relacion á un plano* XX, *se pueden colocar de manera que sean simétricas con relacion á un centro* O' *tomado arbitrariamente en dicho plano*; y, **recíprocamente,** *si dos figuras* F y F'' *son simétricas con relacion á un centro* O', *se pueden colocar de tal manera, que sean simétricas con relacion á un plano cualquiera* XX *que pase por dicho centro.*

Demostracion.—1.° Siendo A' y A'' dos [.]s simétricos de las figuras F' y F'', respecto al plano XX; si se hace girar á la figura F' 180° alrededor de la ⊥ OC al plano XX, el [.] A' tomará la posicion A en prolongacion de A'C; y, como

A'C = AC y O'C es ‖ a á AA' (217);

se tendrá O'A = O'A'' (134).

2.° Si A y A'' son dos [.]s simétricos de las figuras F y F'' respecto del centro O'; haciendo girar la figura F 180° alrededor de la ⊥ OC al plano XX, se verá igualmente que el [.] A tomará la posicion del A'; de manera que A'O = A''O.

V.—DETERMINACION DE LAS FIGURAS COMPUESTAS DE PLANOS.

§ 1.°—Condiciones necesarias y suficientes para la existencia del ángulo triedro.

DEFINICIONES.

240. *Angulo poliedro* es el espacio comprendido por varios planos que concurren en un [.]; cuando éstos son

tres, se llama *ángulo triedro*; los planos que los forman se llaman *caras*, y sus intersecciones *aristas*. Un $\angle$ triedro consta además de los tres $\angle$ *diedros* que forman sus caras, dos á dos.

TEOREMA.

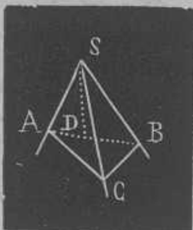

Figura 148.

241. *En un $\angle$ triedro una cara es menor que la suma de las otras dos y mayor que su diferencia* (fig. 148).

Construccion.—Tómese, en la cara mayor ASB, un $\angle$ BSD $=$ $\angle$ BSC; trácese una $|^{a}$ arbitraria AB; tómese SC $=$ SD y únanse A y B con C.

Demostracion.

El $\triangle$ BSD $\cong$ $\triangle$ BSC (87);

luego BD $=$ BC;

además, en el $\triangle$ ABC se tiene

AB ó AD $+$ DB $<$ BC $+$ CA (102) ó

(restando BD y BC, que son iguales), AD $<$ AC;

luego en los $\triangle^{s}$ ASD y ASC, $\angle$ ASD $<$ $\angle$ ASC (104, *recip.*);

y, sumando los $\angle^{s}$ iguales BSD y BSC, resulta

BSD $+$ DSA ó BSA $<$ ASC $+$ BSC.

TEOREMA.

242. *En todo $\angle$ triedro, la suma de los $\angle^{s}$ planos ó caras es $<$ que 4 $\llcorner^{s}$.*

Construccion.—Trácese un plano que corte á las tres aristas, y sea la seccion producida, el $\triangle$ ABC (fig. 148).

Demostracion.—Los $\angle^{s}$ de los tres $\triangle^{s}$ SAB, SAC y SBC, valen 3. 2 $\llcorner^{s}$ $=$ 6 $\llcorner^{s}$; pero los $\angle^{s}$ de las bases de estos $\triangle^{s}$ que forman parte de los triedros A, B y C, valen más que 2 $\llcorner^{s}$, suma de los $\angle^{s}$ del $\triangle$ ABC que forman los restantes de dichos triedros (241); luego los $\angle^{s}$ en S valdrán ménos que 4 $\llcorner^{s}$.

Observacion.—Si se tratara de un $\angle$ poliedro convexo de n caras, los $\angle^{s}$ de los $\triangle^{s}$ en S valdrían 2 n $\llcorner^{s}$; pero los de las bases valdrían más que los del polígono de seccion, es decir, más que 2 n $\llcorner^s$ — 4 $\llcorner^s$; luego los del vértice S no llegarían á valer 4 $\llcorner^s$. De manera que el teorema se extiende á un $\angle$ poliedro convexo cualquiera.

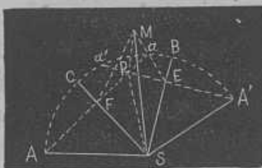

Figura 149.

243. **Construccion del $\angle$ triedro.**—De los teoremas anteriores resulta que el ser una cara menor que la suma de las otras dos, y valer los tres $\angle^s$ de un triedro ménos de 4 $\llcorner^s$ son condiciones *necesarias*; tambien es fácil ver que son *suficientes*, es decir, que cuando están satisfechas, la construccion del triedro es posible con tres caras dadas.

En efecto, siendo

$\angle$ A'SB + $\angle$ BSC + $\angle$ CSA $<$ 4 $\llcorner^s$ *(hipótesis)* (fig. 149),

el *arc.* ACBA' es $<$ que una circunferencia;

pero $\angle$ BSC $<$ $\angle$ ASC + $\angle$ BSA' *(hipótesis)*;

luego *arc* BC $<$ *arc.* AC + *arc.* A'B (117, *contr.*);

trácense las $\perp^s$ AFa á SC y A'Ea' á SB;

como además *arc.* a'B = BA' y *arc.* aC = *arc.* AC (112); los arcos Ba' y aC se cruzan, y las cuerdas A'a' y Aa' se cortan en un [.] P.

Trácese la $\perp$ PM al plano BSC, y, haciendo centro en E, con un rádio EA', trácese en el plano EPM un arco de circunferencia que cortará á la $\perp$ PM (pues EP es $<$ EA' = EM).

Uniendo el [.] de interseccion con S, se formará el triedro buscado, pues

$\triangle$ MES $\cong$ $\triangle$ ESA' (87);

por tener ES comun, $\llcorner$ MES = $\llcorner$ A'ES (51, 2.°) y ME = EA';

$\triangle$ MSF $\cong$ $\triangle$ FSA (106, 1.°),

por tener SF comun, AS = AS' *(constr.)* = MS y

$\llcorner$ SFA = $\llcorner$ MFS;

luego $\angle$ MSE = $\angle$ A'SB y MSF = $\angle$ CSA.

TEOREMA.

244. *En un $\angle$ triedro la suma de los $\angle^s$ diedros es inferior á 6 $\llcorner^s$.*

Demostracion.—Cualquier $\angle$ plano BAC, por ejemplo, trazado en las caras de un $\angle$ D del triedro SABC (fig. 148) forma parte de un $\triangle$ ABC y vale, por consiguiente, ménos que 2 $\llcorner^s$ (100, 2.°); luego los tres rectilíneos correspondientes á los tres diedros valdrán ménos que 6 $\llcorner^s$.

VI.—DETERMINACION DE LOS TRIEDROS.

§ 1.°—Determinacion del triedro suplementario.

TEOREMA.

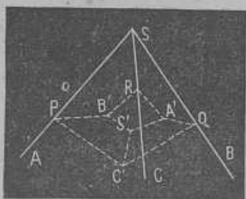

Figura 150.

245. *Dado un triedro, queda determinado su triedro suplementario, es decir, un triedro cuyas caras y* $\angle^s$ D^s *son suplementos respectivamente de los* $\angle^s$ D^s *y de las caras de aquél.*

Construccion del triedro suplementario.—Por un [.] interior del triedro SABC, trácense las $\perp^s$ S'A', S'B' y S'C', respectivamente, á las caras SBC, SAC y CAB; el triedro formado será el suplementario del propuesto.

Demostracion.—1.° Si por S'B' y S'C' se traza un plano, sus intersecciones PC' y PB' con los ASC y ASB determinarán con S'B' y S'C' el cuadrilátero PB'S'C', en el cual los $\angle^s$ PB'S' y PC'S' son $\llcorner^s$, por ser S'B' y S'C' respectivamente $\perp^s$ á las caras ASC y ASB (198, 1.°); luego los $\angle^s$ C'S'B' y C'PB' son suplementarios (100, 4.°); pero el $\angle$ C'PB' es el rectilíneo del diedro AS; pues, siendo el plano B'S'C' $\perp$ á los ASC y ASB, lo es á su interseccion AS (224), y, por consiguiente, ésta lo es á las $\perp^{as}$ C'P y B'P; luego cada $\angle$ plano del triedro S' es suplemento de cada $\angle$ diedro del S.

2.° Siendo AS $\perp$ á la cara B'S'C' del triedro S' y SB $\perp$ á la cara A'S'C'; en virtud del razonamiento anterior, el $\angle$ rectilíneo ASB del triedro S será suplemento del diedro S'C' del S', y lo mismo se dirá, respectivamente, de los demás rectilíneos del S relacionados con su diedro correspondiente del triedro S'.

§ 2.º—Determinacion de los triedros.

TEOREMA.

246. Dos ángulos triedros son iguales:

1.º *Cuando tienen igual una cara adyacente á dos* $\angle^s$ D^s *respectivamente iguales é igualmente dispuestos.*

2.º *Cuando tienen un* $\angle$ D *igual comprendido entre caras respectivamente iguales é igualmente dispuestas.*

3.º *Cuando tienen sus caras respectivamente iguales é igualmente dispuestas.*

4.º *Cuando tienen sus* $\angle^s$ D^s *respectivamente iguales é igualmente dispuestos.*

1.º y 2.º **Demostracion.**—*(Por superposicion)* (1).

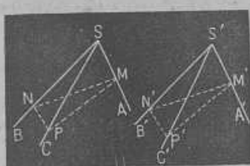

Figura 151.

3.º **Hipótesis.**— $\angle$ ASC = $\angle$ A'S'C', $\angle$ BSA = B'S'A', $\angle$ BSC = $\angle$ B'S'C' (fig. 151).

Construccion.—Tómese SM = S'M'. trácense los $\angle^s$ rectilíneos NMP y N'M'P' de los $\angle^s$ D^s SA y S'A', y trácense las $|^{as}$ PN y P'N'.

Demostracion.

El $\triangle$ rectángulo NSM $\cong$ $\triangle$ rectángulo N'S'M' (89),

el $\triangle$ rectángulo PMS $\cong$ $\triangle$ rectángulo P'M'S' (id.);

luego NS = N'S', PS = P'S', NM = N'M', MP = M'P';

pero $\angle$ PSN = $\angle$ P'S'N' (hipótesis);

luego NP = N'P' (87);

luego $\triangle$ MPN $\cong$ $\triangle$ M'P'N' (92);

luego $\angle$ PMN = $\angle$ P'M'N';

luego $\angle$ D SA = $\angle$ D S'A' (216, *recip.*),

y queda este caso reducido al 2.º

Observacion.—Este razonamiento supone que, por lo

(1) Para demostrar por superposicion un teorema de Geometría del espacio, bastará reemplazar en el razonamiento correspondiente de la Geometría plana las palabras *lado*, *ángulo* y *punto*, por las siguientes: *cara*, *ángulo diedro* y *arista* ó *recta*, respectivamente.

ménos, dos $\angle^s$ planos de los triedros S y S' son agudos. Si esto no se verifica, se tomará

$$SN = SM = SP = S'N' = S'M' = S'P',$$

y, construyendo los $\triangle^s$ MNP y M'N'P', resultará que los seis $\triangle^s$ concurrentes en S y S', tendrán, cada uno, iguales los $\angle^s$ de sus bases (88), y que serán, por consiguiente, agudos; pues ningun $\triangle$ puede tener dos ángulos rectos ni obtusos, y la igualdad de dos $\angle^s$ diedros de los triedros propuestos, se deducirá inmediatamente, aplicando el razonamiento anterior á cualquiera de los triedros N y N', P y P' ó M y M', que tienen, por lo ménos, dos $\angle^s$ agudos cada uno.

4.ª Siendo los $\angle^s$ D^s de los triedros propuestos, respectivamente iguales, serán iguales los $\angle^s$ rectilíneos de los triedros suplementarios (245, 1.°); luego los $\angle^s$ D^s de éstos, tambien serán iguales (246, 3.°); luego los $\angle^s$ rectilíneos de los triedros propuestos tambien lo serán (245, 2.°)

§ 3.°—Determinacion de los poliedros.

DEFINICIONES.

247. Se llama *poliedro* el espacio encerrado completamente por planos.

Estos planos, limitados mútuamente, forman polígonos que son las *caras* del poliedro.

248. La *interseccion de dos caras*, se llama *arista*, y el *punto comun* de tres ó más, *vértice*.

Los elementos, pues, de un poliedro, son las *caras*, *aristas*, *vértices*, *ángulos diedros* y *ángulos poliedros*, y además las *diagonales*, que son las rectas que unen dos vértices cualesquiera no situados en una misma cara.

249. Se llaman *tetraedro*, *exaedro*, *octaedro*, *dodecaedro* é *icosaedro*, los poliedros de cuatro, seis, ocho, doce y veinte caras.

250. Los poliedros se dividen en *cóncavos* y *convexos*.

251. Poliedro *convexo* es el que se halla situado en su totalidad á un mismo lado de una cualquiera de sus caras

252. Poliedro *cóncavo* es el que no satisface á esta condicion.

Los poliedros se dividen tambien en *regulares* é *irregulares*: serán regulares cuando tengan sus *caras, ángulos diedros y poliedros iguales*; é irregulares, en el caso contrario.

253. Entre los poliedros se considera particularmente el prisma y la pirámide.

254. *Prisma* es el poliedro formado por dos caras poligonales opuestas, iguales y paralelas, que son sus bases, unidas por paralelógramos ó *caras laterales*. *Altura* de un prisma es la distancia de sus tres bases.

Los polígonos ABCDE y A'B'C'D'E' (fig. 152) son las bases del prisma ABCDEA'B'C'D'E', los paralelógramos A'B, BC'..... sus caras laterales y las rectas AA', BB', CC'... sus aristas laterales.

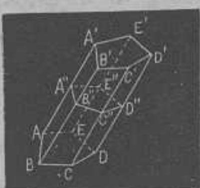

Figura 152.

255. **Existencia del prisma.**—Si se trazan por los vértices de un polígono ABCDE (fig. 152) $|^{as}$ cualesquiera, AA', BB', CC'..... $\|^{as}$ entre sí, que terminen en un plano $\|^{o}$ al ABCDE, y se trazan los planos A'B, B'C, C'D,..... se tendrá que

A'B' es $\|^{a}$ á AB, B'C' es $\|^{a}$ á BC, C'D' es $\|^{a}$ á CD..... (197, 6.°)

$\angle$ A'B'C' = $\angle$ ABC, $\angle$ BCD = $\angle$ B'C'D'..... (208);

luego A'B, B'C, C'D..... son $\square^{s}$ (67)

y además polígono A'B'C'D'E' $\cong$ polígono ABCDE (61).

Corolario.—*Si un plano corta á las aristas de un prisma paralelamente á sus bases,* DETERMINARÁ UN POLÍGONO IGUAL Á ÉSTAS.

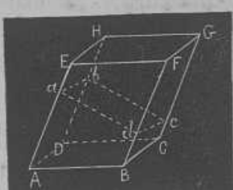

Figura 153.

256. Un prisma será *triangular, cuadrangular, pentagonal*..... segun que sus bases sean triángulos, cuadriláteros, pentágonos.....

257. Entre los prismas debe considerarse el *paralelepípedo* (fig. 153), que es *aquél cuyas bases son* $\square^{s}$..

Corolario.—1.° *Cada dos caras laterales opuestas de un pa-*

ralelepípedo son iguales y paralelas, pues, por ejemplo,

AB es = y ∥ ^{a} á DC y BF es = y ∥ ^{a} á CG;

luego ∠ ABF = ∠ DCG (208, y ▱ AF = ▱ DG (96, 4.°)

2.° *Todo plano que encuentra las caras opuestas de un paralelepípedo, lo corta segun un* ▱ (197, 6.° y 67).

258. Se llama *tronco de prisma* ó *prisma truncado*, la parte de prisma comprendida entre una de las bases y un plano no paralelo á éstas.

259. *Pirámide* es un poliedro formado por una cara poligonal cualquiera, y las demás triangulares concurrentes en un [.] (fig. 154); éste se llama *vértice*; las caras triangulares, *caras laterales*; sus intersecciones, *aristas laterales*; la cara poligonal, *base*, y la distancia del vértice á la base, *altura*.

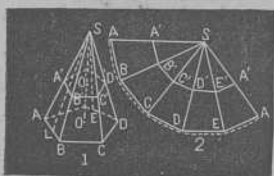

Figura 154.

260. La pirámide será *triangular, cuadrangular, pentagonal*... cuando la base sea un triángulo, cuadrilátero, pentágono.....

261. La pirámide es *regular* cuando su base es un polígono regular cuyo centro se confunde con el pié de la altura de la pirámide.

Corolario.—*Las aristas de la pirámide regular son iguales* (202, 2.°) *y las caras laterales* △^{s} *isósceles.*

262. Las alturas de las caras laterales, se llaman *apotemas.*

263. Se llama *tronco de pirámide*, la parte de pirámide comprendida entre la base y un plano cualquiera. Si éste es paralelo á la base del tronco, se dice de *bases paralelas*. Si la pirámide es regular, el tronco de bases paralelas se llamará tambien *regular*.

La parte ABCDEA'B'C'D'E' de la pirámide SABCDE (fig. 154) es un tronco de bases ∥ ^{as}.

TEOREMA.

264. Dos tetraedros son iguales: 1.° *Si tienen igual*

una cara comprendida entre tres ángulos diedros iguales é igualmente dispuestos; 2.° Si tienen igual un diedro comprendido entre dos caras respectivamente iguales é igualmente dispuestas; 3.° Si tienen iguales un triedro y las caras que lo forman, y éstas igualmente dispuestas, y 4.° *Si tienen iguales las aristas é igualmente dispuestas.*

1.°, 2.° y 3.° **Demostracion.**—*(Por superposicion.)*

4.° **Demostracion**.—Siendo las aristas respectivamente iguales, lo serán tambien las caras, y, por consiguiente, cualquiera de sus triedros (246, 3.°), y queda la cuestion reducida al tercer caso.

TEOREMA.

265. *Dos prismas son iguales si tienen un triedro igual comprendido entre tres caras respectivamente iguales é igualmente dispuestas.*

Demostracion.—*(Por superposicion.)*

TEOREMA.

266. DOS POLIEDROS SON IGUALES *si se componen de igual número de tetraedros iguales é igualmente dispuestos*; **recíprocamente**, *si dos poliedros son iguales*, PUEDEN DESCOMPONERSE EN IGUAL NÚMERO DE TETRAEDROS IGUALES É IGUALMENTE DISPUESTOS.

Hipótesis.—TETR. ABCD = TETR. A'B'C'D', TETR. ACDG = TETR. A'C'D'G', TETR. ADGE = TETR. A'D'G'E', TETR. AGEF = TETR. A'G'E'F' (fig. 155).

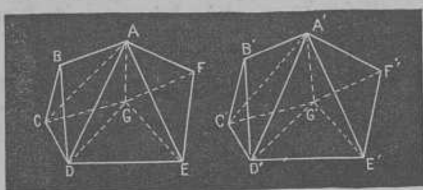

Figura 155.

Demostracion.—En virtud de la hipótesis se tendrá:

$\triangle BCD \cong \triangle B'C'D'$, $\triangle BCA \cong \triangle B'C'A'$, $\triangle CAG \cong \triangle C'A'G'$...
luego

$\triangle BCD \cong \triangle B'C'D'$, $BCGA = B'C'G'A'$, $CDEG = C'D'E'G'$ (93)
por la misma razon, se tendrá

$\angle_D BCDA = \angle_D B'C'D'A'$, $\angle_D ACDG = \angle_D A'C'D'G'$;
luego

$$\angle_D BCDG = \angle B'C'D'G';$$

tambien se tendrá

$$\angle_D BA = \angle_D B'A', \ \angle_D BD = \angle_D B'D' .....$$

además $\angle_D DGEA = \angle_D D'G'E'A'$ y $\angle_D AGEF = \angle A'G'E'F'$
y, por consiguiente, sumando

$$\angle_D DGEF = \angle_D D'G'E'F'.$$

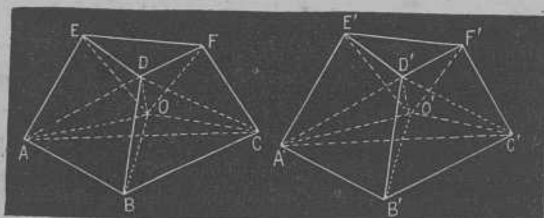

Figura 156.

2.° **Recíprocamente**.—Sea O un [.] cualquiera, por ejemplo, en el interior del poliedro ABCDEF (fig. 156); uniremos dicho [.] O á todos sus vértices, por medio de | as; y se va á demostrar que se podrá hacer del poliedro A'B'C'D',... igual descomposicion en tetraedros.

Construccion.—Trácese un $\angle_D O'A'B'C' = \angle_D OABC$ y, en el plano O'A'B', el $\triangle O'A'B' \cong \triangle OAB$, y únase O' con A' y B'.

Demostracion.—El TETR. OABC $\cong$ TETR. O'A'B'C' (264, 2.°);
además se tiene

$$\left.\begin{array}{r}\triangle ADB \cong \triangle A'D'B' \\ \angle_D DABC = \angle_D D'A'B'C'\end{array}\right\} \text{(hipótesis)}$$

$$\angle_D OABC = \angle_D O'A'B'C' \text{ (construccion)}$$

restando,

$\angle_{D}$ DABC — $\angle_{D}$ OABC = $\angle_{D}$ D′A′B′C′ — $\angle_{D}$ O′A′B′C′
ó $\angle_{D}$ DABO = $\angle_{D}$ D′A′B′O′;
luego TETR. OADB = TETR. O′A′D′B′ (264, 2.°);

y, por consiguiente, $\left\{ \begin{array}{l} \triangle \text{ ODA} \cong \triangle \text{ O′D′A′} \\ \angle_{D} \text{ ODAB} = \angle_{D} \text{ O′D′A′B′}; \end{array} \right.$

luego $\angle_{D}$ ODAE = $\angle_{D}$ O′D′A′E′
(por ser suplemento de los anteriores);
y además $\triangle$ DAE $\cong$ $\triangle$ D′A′E′ (hipótesis);
luego TETR. ODAE = TETR. O′D′A′E′ (264, 2.°)

. . . .

§ 4.°—Posibilidad de los poliedros regulares.

TEOREMA.

267. *No pueden existir más de cinco poliedros regulares convexos.*

Demostracion.—Debiendo ser la suma de los $\angle^s$ planos de un $\angle$ poliedro convexo inferior á 4 $\llcorner^s$, si las caras de un poliedro convexo son $\triangle^s$ equiláteros, no pueden reunirse de éstos, alrededor de un [.], más que tres, cuatro ó cinco; pues

$60^\circ \times 3 = 180^\circ$; $60^\circ \times 4 = 240^\circ$; $60^\circ \times 5 = 300^\circ$; $60^\circ \times 6 = 360^\circ$

No se pueden emplear cuadrados ó pentágonos regulares más que en número de tres; pues

$$90^\circ \times 3 = 270^\circ;\ 90^\circ \times 4 = 360^\circ$$
$$108^\circ \times 3 = 324^\circ;\ 108^\circ \times 4 = 432^\circ$$

En fin, con exágonos,..... regulares no pueden formarse $\angle^s$ poliedros; luego á lo más podrán formarse con polígonos regulares, cinco poliedros.

VII.—EXISTENCIA Y DETERMINACION DE LAS FIGURAS ESFÉRICAS.

§ 1.°—Determinacion de la esfera.

DEFINICIONES.

268. *Superficie esférica* es una superficie cerrada por

todas partes, cuyos puntos equidistan de uno interior que se llama *centro*, y puede ser engendrada por la revolucion de una semi-circunferencia alrededor de su diámetro.

269. *Esfera* es el cuerpo limitado por la superficie esférica.

Rádio es toda |ª que une el centro con un [.] de la superficie esférica; y *diámetro* toda |ª que une dos [.]ˢ de la superficie esférica, pasando por el centro.

TEOREMA.

270. *Dos esferas de rádios iguales*, SON IGUALES; pues si superpuestas no coincidieran en todos sus [.]ˢ, habría [.]ˢ más distantes que otros, lo que es contra la definicion.

TEOREMA.

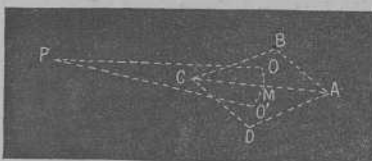

Figura 157.

271. *Cuatro* [.]ˢ, *no situados en un plano, determinan una esfera.*

Construccion.—Trácense los $\triangle^s$ ABC y ADC (fig 157), y los centros O y O′ de sus círculos circunscritos; trácense las $\perp^s$ OM y O′M al lado comun CA, las cuales se encontrarán en el [.] medio M (112), y trácense las $\perp^s$ OP y O′P á cada uno de los planos ABC y ADC.

Demostracion.—AC es $\perp$ á MO y MO′; luego lo es al plano OMO′ (198, 1.°); luego éste lo será á los ABC y ADC (222, 1.°); luego las |ᵃˢ OP y O′P están en el plano OMO′ (221, 2.°), y como son $\perp^s$ á las OM y O′M (198, 1.°) que se encuentran; se encontrarán en un [.] P (96, *ext. contr.*), el cual, por estar en OP, equidista de A, B y C (202) y, por estar en O′P, equidista de A, D y C (id.); luego equidista de A, B, C y D; luego puede pasar una esfera por dichos [.]ˢ. Ahora bien; esta esfera es ÚNICA, pues son únicos los centros O y O′, las $\perp^s$ OP y O′P y, por consiguiente, el [.] P.

§ 2.° — El plano en la esfera.

TEOREMA.

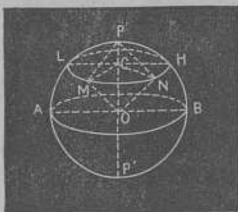

Figura 158.

272. *Si un plano corta á una esfera*, LA INTERSECCION CON SU SUPERFICIE ES UNA CIRCUNFERENCIA.

Construccion.—Trácese la ⊥ OC al plano del círculo y varios rádios OM, ON,..... de la esfera.

Demostracion.—Siendo OM, ON,..... oblícuas iguales, los [.]ˢ M, N,... equidistan del pié de la ⊥ OC (202, 2.° *recíp.*); luego LMNH es una circunferencia.

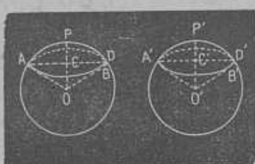
Figura 159.

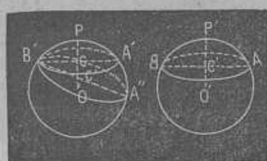
Figura 160.

COROLARIO 1.°—*El diámetro ⊥ al plano de un círculo de la esfera*, PASA POR EL CENTRO DE ÉSTE.

2.° *En una esfera ó en esferas iguales*, CÍRCULOS IGUALES EQUIDISTAN DEL CENTRO, EL MAYOR CÍRCULO DISTA MÉNOS *y* **recíprocamente** (figs. 159 y 160).

Esto se deduce inmediatamente de la relacion $d^2=R^2-r^2$, en la que d, R y r representan, respectivamente, la distancia y los rádios de la esfera y circunferencias dadas.

3.° *De todos los círculos de una esfera, el mayor es el que pasa por el centro*, y *se llama* CÍRCULO MÁXIMO.

Observacion.—Tres [.]ˢ de la superficie esférica determinan un *círculo mínimo*, y dos [.]ˢ un *círculo máximo*.

4.° *Todo círculo máximo divide á la esfera en dos partes iguales;* pues si despues de haber separado las dos partes, se aplican sobre su base comun, volviendo la convexidad hácia el mismo lado, las dos superficies coincidirán, sin lo cual, habría, en la esfera, $[.]^{s}$ desigualmente distantes del centro.

5.° *Dos círculos máximos se cortan en partes iguales,* porque el centro de la esfera, que pertenece á sus dos planos, está situado en su interseccion, la cual es, por consiguiente, un diámetro.

6.° *La superficie esférica es de revolucion alrededor de un diámetro cualquiera;* pues la circunferencia determinada por un plano cualquiera que pase por dicho diámetro, teniendo el mismo centro y rádio que la esfera, la engendrará evidentemente.

DEFINICION.

273. *Polos* de un círculo LMNH de una esfera (fig. 158), son las extremidades P y P′ del diámetro $\perp$ al plano de aquél.

TEOREMA.

274. *Todos los* $[.]^{s}$ *de una circunferencia de la esfera, equidistan de su polo* (fig. 158).

Demostracion.—La $|^{a}$ PC, que une el polo al centro de la circunferencia, es $\perp$ al plano de ésta (272, *cor.* 1.° y 273); luego las $|^{as}$ PL, PM,..... son oblícuas que se separan igualmente del pié de la $\perp$ y, por consiguiente, iguales.

DEFINICIONES.

275. La distancia rectilínea PN (fig. 158) que separa el polo P de un [.] N de la circunferencia, se llama *distancia polar*, y la longitud de círculo máximo correspondiente, *rádio esférico* de dicha circunferencia.

TEOREMA.

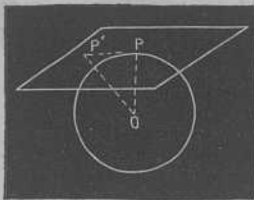

Figura 161.

276. *Todo plano* ⊥ *á un rádio en su extremo*, ES TANGENTE EN DICHO [.] Á LA ESFERA *y* **recíprocamente**.

Demostracion.—(Análoga á la correspondiente de la Geometría plana.)

Contrarios.—*Si un plano es oblicuo á un rádio en un extremo*, SERÁ SECANTE, *y si es secante*, SERÁ OBLÍCUO Á LOS RÁDIOS QUE PASAN POR TODOS LOS [.]^{s} DE INTERSECCION.

Demostracion.—*(Ad absurdum.)*

§ 3.º—Los polígonos en la superficie esférica.

DEFINICIONES.

277. Se llama *polígono esférico* la parte de superficie esférica comprendida por varios arcos de circunferencia máxima. Los polígonos esféricos reciben análoga denominacion que los planos, segun el número de sus arcos.

Los arcos que forman un polígono esférico, se llaman sus *lados*; sus *ángulos* son los curvilíneos formados por cada dos lados, y sus *vértices* son las intersecciones de éstos.

TEOREMAS.

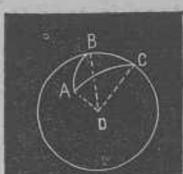

Figura 162.

278. Aquí se enunciarán todos los teoremas ya enunciados en la teoría de triedros, reemplazando, respectivamente, las palabras *triedro, ángulo plano* y *ángulo diedro*, por las siguientes: *triángulo esférico, lado* y *ángulo esférico*; pues, efectivamente, á cada △ esférico ABC (fig. 162) corresponde un ∠ triedro OABC, y á cada ∠ *plano* ó *diedro* de éste, corresponde un *lado* ó *ángulo* de aquél, por tener cada lado la

misma medida que su ángulo plano correspondiente (136, *corolario*), y cada ángulo esférico la misma medida que su diedro correspondiente (133, *princip.*)

Demostraciones.—Las mismas que las empleadas para los triedros, sustituyendo los elementos que se corresponden.

LEMA.

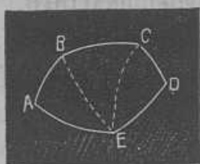

Figura 163.

279. *Un lado de un polígono esférico es menor que la suma de los demás.*

Construccion.—Trácense las diagonales EB, EC..... (fig. 163) formadas por arcos de circunferencia máxima.

Demostracion.

$AB < AE + BE$ (241 y 117)
$BE < BC + CE$ (id.)
$CE < CD + DE$ (id.)

y sumando, y suprimiendo términos comunes á los dos miembros de la suma, resulta, en fin, que

$$AB < AE + ED + DC + CB.$$

TEOREMA.

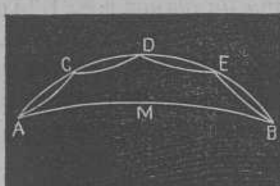

Figura 164.

280. *En la superficie esférica, el* CAMINO MÁS CORTO *que une dos* [.]^s, *es el* MENOR ARCO DE CÍRCULO MÁXIMO *que pasa por los mismos.*

Construccion.—Siendo AMB el arco menor de circunferencia máxima que une los [.]^s A y B, inscríbase en la curva dada una línea poligonal formada por arcos de circunferencia máxima AC, CD, DE, EB.

Demostracion.—En el polígono esférico ABCDEA se tendrá $AMB < AC + CD + DE + EB$ (279);
pero esta relacion no dejará de subsistir cuando se aumente el número de lados de la quebrada inscrita; luego subsistirá para el límite, que es la curva ACDEB.

LIBRO II.

APLICACION DE LA TEORIA DE LA PROPORCIONALIDAD

de las magnitudes á la geometría del espacio.

I.—ESPECIES PARTICULARES DE MAGNITUDES PROPORCIONALES.

§ 1.º—Segmentos rectilíneos.

TEOREMA.

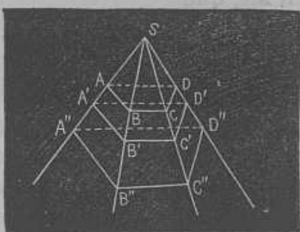

Figura 165.

281. *Si desde un* [.] S *cualquiera* (fig. 165), *se trazan varias* |as *cortadas por un sistema de planos* ||os: 1.º LOS SEGMENTOS AA', BB', CC'....., A'A'', B'B'', C'C''....., INTERCEPTADOS ENTRE ÉSTOS, Ó ENTRE CADA UNO DE ÉSTOS Y DICHO [.], á saber, LOS SA, SB, SC....., SA', SB', SC'....., SON PROPORCIONALES; 2.º LOS |os AB, BC, CD....., A'B', B'C', C'D'....., DE LOS POLÍGONOS FORMADOS EN CADA PLANO POR LAS |as QUE UNEN, DOS Á DOS, LOS [.]s DE INTERSECCION, SON PROPORCIONALES Á LOS HOMÓLOGOS DE LOS DEMÁS PLANOS, *respectivamente.*

Demostracion.—1.º Siendo AB, A'B', A''B'' ||as entre sí (197, 6.º), lo mismo que las BC, B'C', B''C''....., resulta que (134, 1.º)

SA : AA' : A'A'' :: SB : BB' : B'B'' :: SC : CC' : C'C''.....
y SA : SA' : SA'' :: SB : SB' : SB'' :: SC : SC' : SC''.....

2.° Siendo homotéticos los $\triangle^s$ SAB, SA′B′....., SBC, SB′C′..... y teniendo, cada dos de ellos, comunes las razones de los $|^{os}$ no $\|^{os}$, es decir, SA, SA′, SA″.... ó SB, SB′, SB″.....; resultarán para los $\|^{os}$ AB, A′B′, A″B″..... BC, B′C′, B″C″....., las siguientes relaciones (134, 2.°):

$$\frac{AB}{A'B' \text{ ó } A''B''} = \frac{BC}{B'C' \text{ ó } B''C''} = \frac{CD}{C'D' \text{ ó } C''D''} = ...$$

Recíprocamente.—*Dados un* S (fig. 165) *y varias* $|^{as}$ *que van á parar desde éste á un plano* A″B″C″.....; *si por dos* $[.]^s$ *cualesquiera* A y B *que dividen á las* $|^{as}$ SA″ y SB″ *en una razon dada, se traza un plano que divida á cualquiera otra* $|^a$ SC″ *en la misma razon,* DICHO PLANO SERÁ $\|^o$ AL DADO.

Demostracion.—Sean, por ejemplo, los $[.]^s$ A y B que dividen á las $|^{as}$ SA″ y SB″ en parte tales, que

$$\frac{SA}{AA''} = \frac{SB}{BB''} = K,$$

(representando K la razon dada).

Tenemos además

$$\frac{SC}{CC''} = K \quad \text{(hipótesis)};$$

luego BC es $\|^a$ á B″C″ (144);
pero tambien AB es $\|^a$ á A″B″ (144);
luego el plano ABC es $\|^o$ al A″B″C″ (208, 2.°)

Corolario.—*El lugar geométrico de los* $[.]^s$ *que dividen, en una razon dada, á todas las* $|^{as}$ *trazadas desde un* [.] S *dado á un plano* A″B″C″D″....., *es un plano* ABC..... $\|^o$ *á éste, trazado por el* [.] *que divide á cualquiera de las* $|^{as}$ *en dicha razon*, pues, segun se acaba de demostrar, dicho plano $\|^o$ pasa por el [.] que divide á cualquiera de las $|^{as}$ *dadas* SC″, SD″..... en la razon dada; y, **recíprocamente**, el único plano $\|^o$ *que puede trazarse* por un [.] A, divide á todas las $|^{as}$ SB″, SC″..... en la razon dada.

Observacion.—Estos teoremas incluyen los que se enuncian de la manera siguiente: *Todo plano* $\|^o$ *á la base de una pirámide es un polígono semejante á aquélla*; y, **recíprocamente**, *todo plano que corta á las aristas laterales de* *una pirámide en partes proporcionales* ES $\|^{o}$ Á LA BASE Y SU SECCION UN POLÍGONO SEMEJANTE Á ÉSTA.

§ 2.º—Homotecia y semejanza.

282. Si en vez de considerar, como en 146, un sistema de $[.]^{s}$ situados en un plano, se consideran éstos situados de un modo cualquiera en el espacio, y aplicamos á los mismos las definiciones ya expuestas acerca de la homotecia en un plano, resultarán las correspondientes á la homotecia en el espacio.

TEOREMA.

283. *Toda figura homotética de una* $|^{a}$, *es otra* $|^{a}$ $\|^{a}$ *á la primera.*

Figura 166.

Demostracion.—Se tiene, por hipótesis, (fig. 166)

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \frac{OD}{OD'} = \ldots..;$$

luego A'B' es $\|^{a}$ á AB,
B'C' es $\|^{a}$ á BC,..... (144);
pero por B', sólo puede trazarse una $\|^{a}$ á la $|^{a}$ ABCD (95); luego B'C' es prolongacion de A'B', y lo mismo se deducirá que C'D' lo es de B'C'.....

TEOREMA.

284. *Toda figura homotética de un plano, es otro plano* $\|^{o}$ *al primero.*

La demostracion de este teorema se halla incluida en la del núm. 281.

TEOREMA.

285. *Toda figura homotética de un poliedro es otro poliedro cuyas caras homólogas, situadas en planos* $\|^{os}$, *son respectivamente semejantes, y cuyos ángulos poliedros*

son iguales ó simétricos, segun que la homotecia sea directa ó inversa.

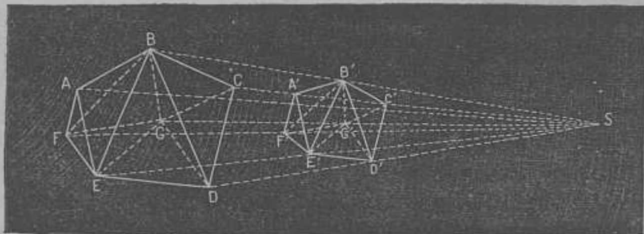

Figura 167.

Demostracion.—1.° Si la homotecia es directa, en cada plano SAB, SBC..... (fig. 167) se tiene

AB ‖ª á A′B′, BC ‖ª á B′C′..... (144);

luego todos los ∠ˢ de los △ˢ de un poliedro, son iguales á sus homólogos del otro (208, 1.°); luego los △ˢ serán, respectivamente, semejantes (149, 1.°) y, por consiguiente, todas las caras (152). Además, sus planos serán, respectivamente, ‖ᵒˢ (208, 2.°), hallándose los ∠ˢ poliedros dispuestos de igual manera.

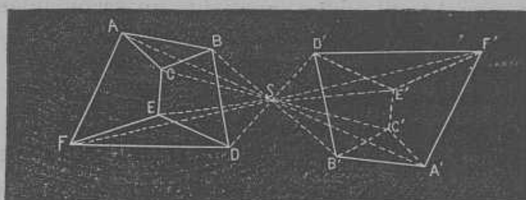

Figura 168.

2.° Si la homotecia es inversa (fig. 168), resultan las mismas conclusiones, respecto al paralelismo y semejanza de las caras; pero no sucede lo mismo con los ∠ˢ poliedros que se hallan formados por iguales ∠ˢ planos; pero inversamente colocados alrededor de sus vértices.

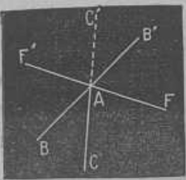

Figura 169.

En este caso, *los* $\angle^{s}$ *poliedros*, generalmente, *no se pueden superponer*, pues, siendo, por ejemplo, las aristas AB, AC y AF del triedro A, respectivamente $\|^{as}$ á las A'B' A'C' y A'F' del A', y hallándose dirigidas en sentido opuesto; si se transporta el triedro A' (fig. 168), manera que el vértice A' llegue á confundirse con el A y que sus aristas se conserven $\|^{as}$ á sus direcciones primitivas, resultarán los dos triedros de la fig. 169, de los cuales, cada uno tiene sus aristas en prolongacion de las del otro; y si los superponemos, de manera que AB' se confunda con AB y AF' con AF, entónces la arista AC' caerá al otro lado del plano BAF; si, en fin, los superponemos de manera que la arista AB' se confunda con la AF y la AF' con la AB, entónces no coincidirían más que en el caso particular de ser iguales los $\angle^{s}$ D^{s} AB y AF, en cuyo caso, lo serán los AB' y AF, AF' y AB, y las mismas consideraciones se aplicarán á un $\angle$ poliedro cualquiera.

Observacion.—1.ª De la coincidencia de los triedros ABCF y AB'C'F' cuando $\angle$ D AB = $\angle$ D AF, resulta que: *en todo triedro, á* $\angle^{s}$ D^{s} *iguales, se oponen caras iguales* y tambien se demuestra que, **recíprocamente**, *á caras iguales se oponen* $\angle^{s}$ D^{s} iguales, mediante un razonamiento calcado sobre el del núm. 88 (1).

COROLARIO.

286. Cuando dos poliedros son homotéticos, tambien lo son, respectivamente, los tetraedros componentes homólogos; luego dos *poliedros homotéticos, directos ó inversos, se componen de igual número de tetraedros homotéticos directos ó inversos, igualmente dispuestos en el primer caso.*

---

(1) Tambien se pueden deducir inmediatamente las propiedades de los triedros análogas á las de los $\triangle^{s}$, señaladas con los núms. 101, 103, 2.° y 104.

ó inversamente en el segundo, alrededor de cada vértice. Este corolario sirve de fundamento á las siguientes

Definiciones.—Se llaman *poliedros semejantes* los que tienen sus $\angle^s$ D^s homólogos iguales y las caras homólogas semejantes; y, cuando un poliedro es semejante al simétrico de otro, se dice que son *inversamente semejantes.*

Observacion.—*Para demostrar que dos figuras son semejantes, basta probar que una de ellas es igual á una de las homotéticas de la otra*, y así las cuestiones de *semejanza* se reducen á cuestiones de *homotecia.*

TEOREMA.

287. *Dos tetraedros serán semejantes: 1.° Si tienen semejante una cara é iguales los tres $\angle^s$ D^s adyacentes; 2.° si tienen dos caras semejantes é iguales los $\angle^s$ D^s que forman; 3.° si tienen tres caras semejantes é igual al triedro que forman, y la semejanza será directa ó inversa; segun que los elementos se hallen igual ó inversamente dispuestos alrededor de cada vértice.*

Demostracion.—(Análoga á la correspondiente de la Geometría plana.)·

TEOREMA.

288. *Dos poliedros que se componen de igual número de tetraedros semejantes é igualmente dispuestos alrededor de cada vértice*, SERÁN DIRECTA Ó INVERSAMENTE SEMEJANTES; y, **recíprocamente**, *si dos poliedros son directa ó inversamente semejantes*, SE PODRÁN DESCOMPONER EN EL MISMO NÚMERO DE TETRAEDROS SEMEJANTES, IGUAL Ó INVERSAMENTE DISPUESTOS (1).

Observacion.—Cuando la razon de homotecia inversa es la unidad, es decir, cuando las distancias al centro S (figura 168) de los $[.]^s$ homólogos son iguales y se hallan dirigidas en sentido opuesto, las figuras son simétricas respecto

(1) Para demostrar este teorema, bastará repetir el razonamiento del número 266, sin más que considerar la semejanza de los polígonos, en vez de la igualdad.

al centro S, y así resulta que: *la simetría es un caso particular de la homotecia.*

289. *Toda figura homotética de una circunferencia, es otra circunferencia.*

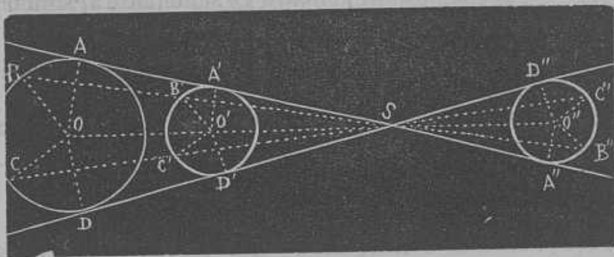

Figura 170.

Demostracion.—1.° Si el centro de homotecia se halla en el mismo plano que la circunferencia dada, se concluye inmediatamente (144), que

$$\frac{AO}{A'O' \text{ ó } A''O''} = \frac{BO}{B'O' \text{ ó } B''O''} = \frac{CO}{C'O' \text{ ó } C''O''} = \ldots\ldots;$$

y como $AO = BO = CO = \ldots\ldots$ por hipótesis, tambien resultará que

$A'O' = B'O' = C'O' = \ldots$ ó $A''O'' = B''O'' = C''O'' = \ldots$

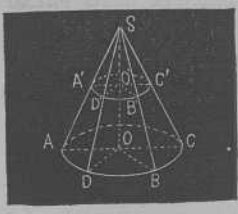

Figura 171.

2.° Si el centro S de simetría se halla fuera del plano de la circunferencia ABCD (fig. 171), se ve inmediatamente que

$$\frac{OA}{O'A'} = \frac{OD}{O'D'} = \frac{OB}{O'B'} = \ldots\ldots,$$

y como $OA = OD = OB = OC\ldots\ldots$, resultará que

$O'A' = O'D' = O'B' = O'C' = \ldots\ldots$

La consideracion de la fig. 171, conduce á las siguientes

DEFINICIONES.

290. Se llama *superficie cónica* á la engendrada por el movimiento de una | ª sujeta al pasar por un [.] fijo S y por una línea dada. Esta se llama *directriz* y la | ª generadora

de la superficie, *generatriz*. Si la directriz es una circunferencia, la superficie se llama *cónica circular*. En este caso, se llama eje la |ª SO (fig. 171) que une el vértice con el centro de la circunferencia.

291. *Cono* es el espacio comprendido entre la superficie cónica y el plano de la directriz. Este plano, se llama *base*; el [.] fijo dado, *vértice* del cono y de la superficie cónica, y *lado*, la generatriz en cualquiera de sus posiciones. El cono será *recto ó oblicuo*, segun que el eje sea perpendicular ó no á la base. SABCD (fig. 171) es un cono circular recto.

El cono puede considerarse engendrado por un △ rectángulo que gira alrededor de uno de sus catetos.

Cono truncado ó tronco de cono es la parte de cono comprendida entre la base y un plano ||° á ésta, que es su base superior. *Lado* del tronco de cono es la parte del lado del cono correspondiente, comprendida entre las dos bases.

Observacion.—Teniendo presentes estas definiciones, pueden enunciarse los siguientes teoremas, incluidos en el 281: *La seccion de todo plano que corta á las generatrices de un cono circular, paralelamente á la base*, ES UNA CIRCUNFERENCIA; y, **recíprocamente**, *el plano que corta las generatrices de un cono en parte proporcionales*, DETERMINA EN LA SUPERFICIE DE ÉSTA, UNA CIRCUNFERENCIA CUYO PLANO ES ||° Á LA BASE.

292. Si, en vez de concurrir la generatriz en un [.], cuando pasa por sus diferentes posiciones, se conserva ||ª á su posicion primitiva, entónces la superficie engendrada se llama *superficie cilíndrica*, y *cilindro*, la parte del espacio comprendida entre la superficie cilíndrica y dos planos ||ᵒˢ entre sí. En Geometría elemental, sólo se considera *la superficie cilíndrica* y *el cilindro de revolucion*, siendo la primera *la superficie engendrada por una |ª que gira alrededor de otra |ª fija, á la cual permanece invariablemente unida y ||ª*, y el segundo *el cuerpo engendrado por un ▭ que gira alrededor de uno de sus |ᵒˢ*. La |ª alrededor de la cual gira la |ª generadora de la superficie cilíndrica ó el ▭ generador del cilindro, se llama *eje*.

293. Se dice que *una pirámide está inscrita ó circunscrita* á un cono, cuando, teniendo el mismo vértice, la base de aquélla está inscrita ó circunscrita á la de éste, y tambien un *prisma está inscrito ó circunscrito* á un cilindro, cuando las bases de aquél se hallan inscritas ó circunscritas á las de éste.

294. Cuando una pirámide ó un prisma se halla circunscrito á un cono ó á un cilindro, sólo tienen comun con éste una de sus generatrices, y se dice en este caso que las caras laterales de aquéllos *son tangentes á éstos, segun dichas generatrices.*

TEOREMA.

295. *Toda figura homotética de una esfera, es otra esfera.*

Demostracion.—Siendo O la esfera dada (fig. 170), como para cada plano que pase por la |ª OO′S, se verifica que los [.]ˢ A′, B′, C′..... equidistan del [.] O′ (289), resultará que la superficie que contienen dichos [.]ˢ es una esfera.

§ 3.º—Angulos diedros y rectilíneos.

TEOREMA.

296. *Los* $\angle^s$ D^s *son proporcionales á sus* $\angle^s$ *rectilíneos correspondientes.*

Demostracion.—Como la superposicion de dos $\angle^s$ D^s ó de dos sumas de $\angle^s$ D^s lleva consigo la superposicion de los $\angle^s$ rectilíneos correspondientes, queda establecido el teorema (133, *principio*).

Corolario.—*La medida de un* $\angle$ D *es la misma que la de su* $\angle$ *rectilíneo correspondiente.*

§ 4.º—Areas y líneas.

TEOREMA.

(**Prisma y cilindro.**)

297. *El área lateral de un prisma tiene por medida el*

producto del número que mide una de sus aristas laterales, por el número que mide el perímetro de una seccion ⊥ á éstas (1).

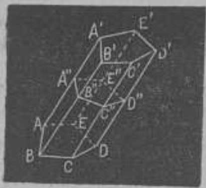

Figura 172.

Demostracion.—Los ▱s A'B, B'C, C'D,..... (fig. 172) tienen por medida AA'. A''B'', BB'. B''C'', CC'. C''D'',..... si ahora se suman estas expresiones, sacándose el factor comun

$$AA' = BB' = CC' = ...,$$

resultará

área lateral $= AA'\,(A''B'' + B''C'' + ...)$

ó *área lateral = arista × seccion recta.*

Corolarios.—1.° *El área lateral de un prisma recto tiene por medida el producto de su altura por el perímetro de la base* (2). Así, pues, llamando s al área, a á la altura y p al perímetro de la base, se tendrá

$$s = a.\,p \qquad [1].$$

2.° *El área lateral de un cilindro circular recto ú oblícuo, tiene por medida el producto del número que mide la arista, por el número que mide la circunferencia de la base;* pues un cilindro puede considerarse como el límite hácia que tiende un prisma regular inscrito en aquél, cuyo número de caras va aumentando indefinidamente, así como va disminuyendo la magnitud de éstas, miéntras sus bases poligonales tienden hácia las circulares de aquél.

Llamando, por consiguiente, r al rádio de la circunferencia y a á la altura, se tendrá

$$s = a.\,2\pi r \qquad [2].$$

TEOREMA.

298. *El desarrollo, en un plano, de la superficie lateral de un prisma recto, es un ▭ cuya altura es la del prisma y cuya base es igual al perímetro de la base de éste.*

---

(1) Esta seccion se llama *seccion recta* del prisma.

(2) Enunciado abreviado. Se sobreentiende aquí como en otras ocasiones los números que las miden.

Demostracion.—Siendo $\llcorner^s$ los $\angle^s$ en A, B, C,..... A', B', C',..... (fig. 173); si se hace girar la cara B'C alrededor de la arista BB', hasta que resulte colocada en la prolongacion de la cara A'B; si se hace lo mismo con la D'C alrededor de la arista CC'....., los segmentos AB, BC, CD,..... A'B', B'C', C'D',..... quedarán en prolongacion unos de otros (51, 3.° *recip.*) formando las bases AB..... N, A'B'..... N' del $\square$ ANN'A'.

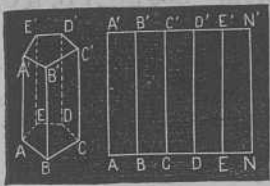

Figura 173.

Corolario.—*El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro circular recto es un $\square$ cuya altura es la del prisma y cuyas bases son las circunferencias de las de aquél, rectificadas.*

Demostracion.—*(Método de los límites).*

TEOREMA.

(**Pirámide y cono.**)

299. *El área lateral de una pirámide regular tiene por medida el producto del número que mide la apotema, por la mitad del que mide el perímetro de la base.*

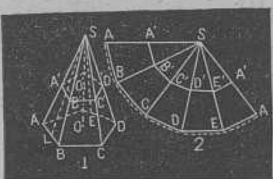

Figura 174.

Demostracion.--Las áreas de los $\triangle^s$ SAB, SBC,... (fig. 174), tienen por expresiones $\frac{1}{2}$ SL. AB, $\frac{1}{2}$ SL. BC,.....
(pues, en la pirámide regular todas las apotemas son iguales) y sumando, resultará

$$S = \frac{1}{2}\,SL.\,AB + \frac{1}{2}\,SL.\,BC + ... = \frac{1}{2}\,SL\,(AB + BC + ...)$$

$$\text{ó}\quad S = \frac{1}{2}\,a.\,p \qquad [3]$$

(representando por a la apotema y por p el perímetro de la base).

Corolario 1.°—*El área lateral de un cono circular recto* *tiene por medida el producto de la mitad del número que mide la apotema por el que mide la circunferencia de la base*; pues el área del cono es el límite del área de una pirámide cuya base tiende indefinidamente hácia la de aquél, y, en el límite, se tendrá (fig. 175, 1);

$$S = \frac{1}{2} SA. 2\pi. AP \qquad [4]$$

$$ó \quad S = \pi r l \qquad [5],$$

(representando por r el rádio y por l el lado del cono).

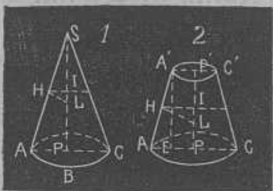

Figura 175.

Corolario 2.°—Si se traza un plano ‖ ° á la base por el [.] medio de la altura del cono, se tendrá, en el plano SAP (fig. 175, 1),

$$\frac{SI}{SP} = \frac{HI}{AP},$$

de lo cual resulta que $2HI = AP$, y sustituyendo en la expresion [4], se obtiene que

$$S = AS. 2\pi. HI \qquad [6]$$

ó (sustituyendo) $\quad S = l. 2\pi \frac{r}{2} \qquad [7]$;

es decir, que: *la superficie lateral de un cono circular recto, tiene por medida el producto de su lado por la circunferencia que determina el plano trazado por el* [.] *medio de la altura, paralelamente á la base.*

Corolario 3.°—*El área de la superficie lateral de un cono circular recto, tiene por medida el producto del eje por la circunferencia, cuyo rádio es la* $\perp$ *al lado en su* [.] *medio, interceptada entre éste y el eje*; pues, siendo semejantes los $\triangle^s$ ASP y SHL (fig. 175, 2), resulta

$$\frac{AS}{PS} = \frac{HL}{HI} \quad ó \quad AS. HI = PS. HL$$

y, sustituyendo en la expresion [6],

$$S = 2\pi\, HL. PS \qquad [9].$$

TEOREMA.

300. *La superficie lateral de una pirámide truncada de*

bases $\|^{as}$ *tiene por medida el producto del número que mide la apotema por la semi-suma de los que miden los perímetros de las bases.*

Demostracion.—Sumando las áreas de los trapecios laterales A′B, B′C,..... (fig. 174) y, sacando, como factor comun, la apotema que llamaremos a, resultará

$$S = a\left(\frac{AB + A'B'}{2} + \frac{BC + B'C'}{2}\right)$$

$$= a\left(\frac{AB + BC + \ldots..}{2} + \frac{A'B' + B'C' + \ldots..}{2}\right)$$

ó
$$S = a\,\frac{p + p'}{2} \qquad [10]$$

(representando por p y p' los perímetros de las bases).

COROLARIO 1.°—*El área lateral de un tronco de cono circular recto tiene por medida el producto del número que mide el lado por la semi-suma de los que miden las circunferencias de las bases*; pues el tronco de cono es el límite de un tronco de pirámide, cuyas bases tienen por límite las de aquél; resulta, pues (fig. 175, 2), que

$$s = l\,\frac{2\pi AP + 2\pi A'P'}{2} = l\pi\,(AP + A'P') \qquad [11]$$

ó
$$s = \pi l\,(r + r') \qquad [12].$$

COROLARIO 2.°—*El área de un tronco de cono tiene por medida el producto del número que mide el lado por el que mide la circunferencia de la seccion, producida por el plano equidistante de las bases y* $\|^{o}$ *á éstas*; pues, en el trapecio APA′P′ (fig. 175, 2), se tiene

$$HI = \frac{AP + A'P'}{2}, \qquad [13]$$

y, sustituyendo en la expresion [11], resulta

$$s = l.\,2\pi\,HI \qquad [14].$$

COROLARIO 3.°—*El área del tronco de cono tiene por medida el producto del número que mide el eje por el que mide la circunferencia cuyo rádio es la* $\perp$ *al lado en su* [.] *medio, interceptada entre éste y el eje*; pues, siendo semejantes los $\triangle^s$ AA′E y LHI (fig. 175, 2) (98, *cor.* 3.° y 149), resultará

$$\frac{AA'}{EA'} = \frac{HL}{HI} \quad ó \quad AA'.\,HI = EA'.\,HL$$

y, sustituyendo en [12] (observando que $l = AA'$ y, en virtud de la relacion [13]), se tendrá

$$s = EA'\,2\pi\,HL = PP'\,2\pi\,HL \ (107,\ 1.°)$$

DEFINICION.

(**Superficie esférica**.)

301. Se llama *zona* la porcion de superficie esférica comprendida entre dos circunferencias cuyos planos son ‖ os, las cuales son sus *bases*, siendo su *altura* la distancia de dichos planos. El arco BCD (fig. 176), girando alrededor del diámetro AA′, engendra una zona y los [.]s B y D sus bases; cuando úno de los círculos se reduce á un [.], la zona tiene una sola base y se llama *casquete*.

TEOREMA.

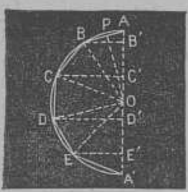

Figura 176.

302. *El área engendrada por la base de un sector poligonal regular, que gira alrededor de uno de sus rádios extremos, tiene por medida el producto del número que mide la proyeccion de aquélla sobre el eje, por el número que mide la circunferencia cuyo rádio es la apotema.*

Demostracion.—Sea el sector OABCDE (fig. 176).

El | ° AB engendra la superficie lateral de un cono, el CB la de un tronco de cono, el CD la de un cilindro,.. .. y, representando por a la apotema, resulta:

superficie engendrada por AB $= 2\pi\, a.\ AB'$
» » » BC $= 2\pi\, a.\ B'C'$
» » » CD $= 2\pi\, a.\ C'D'$
» » » DE $= 2\pi\, a.\ D'E'$

y sumando, y sacando los factores comunes,

superficie total $= 2\pi\, a\,(AB' + B'C' + ...) = 2\pi\, a\, AE'$.

Corolario 1.°—*El área de una zona esférica, tiene por medida el producto del número que mide su altura, por el* *que mide una circunferencia máxima*; pues el sector circular es el límite del poligonal; y como la apotema se convierte en el rádio, resulta, en el límite,

$$s = 2\pi\, r\, AE'$$

(representando por s y r la superficie de la zona y su rádio).

2.° *El área de la esfera tiene por medida el producto del diámetro por una circunferencia máxima*; pues, siendo

superficie engendrada por $ABCD = 2\pi r. AD'$

» » » $DEA' = 2\pi r. D'A'$,

sumando, resultará:

sup. eng. por $ABCDA' = 2\pi r(AD' + D'A') = 2\pi r. AA' = 4\pi r^2$,

lo que se expresa tambien diciendo que: *la superficie de la esfera es el cuádruplo de la de un círculo máximo.*

§ 5.°—Volúmenes y dimensiones.

TEOREMA.

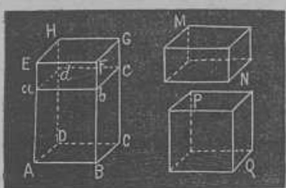

Figura 177.

303. *Los volúmenes de dos paralelepípedos rectángulos, de iguales bases, son proporcionales á sus alturas* (figura 177).

Demostracion.—La misma que la análoga de la Geometría plana, sustituyendo la palabra paralelepípedo rectángulo á la palabra rectángulo.

Corolario 1.°—*Los volúmenes de dos paralelepípedos rectángulos de iguales alturas, son proporcionales á sus bases.*

Demostracion.—(Resulta del teorema y de la nota del núm. 138). Así, siendo P, a, b, c, P′, a, b', c', dos paralelepípedos y sus dimensiones respectivas; si se considera un paralelepípedo P_1, cuyas dimensiones sean a, b y c', resultará

$$\frac{P}{P_1} = \frac{c}{c'} \qquad \frac{P_1}{P'} = \frac{b}{b'},$$

$$\frac{P.\,P_1}{P_1.\,P'} = \frac{a.\,b}{a'.\,b'} \quad \text{ó} \quad \frac{P}{P'} = \frac{a}{a'} \times \frac{b}{b'}.$$

Observacion.—Pudiéndose tomar como altura cualquiera de las dimensiones del paralelepípedo, este teorema se enunciará tambien diciendo: *Los volúmenes de dos paralelepípedos rectángulos que tienen dos dimensiones comunes, son entre sí como sus terceras dimensiones.*

Aplicando á dos paralelepípedos rectángulos cualesquiera el razonamiento de la nota del núm. 138, resulta el siguiente:

Corolario 2.°—*Los volúmenes de dos paralelepípedos rectángulos cualesquiera son entre sí como los productos de sus tres dimensiones.*

Corolario 3.°—*El volúmen de un paralelepípedo rectángulo tiene por medida el producto del número que mide su altura por el número que mide su base, ó el producto de los números que miden sus tres dimensiones*; pues, tomando como unidad de volúmen un cubo C, cuyas aristas tengan por longitud la unidad, y llamando P al paralelepípedo propuesto, cuyas dimensiones son a, b y c; se tendrá que

$$\frac{P}{C} = \frac{a.\ b.\ c}{1.\ 1.\ 1} = a.\ b.\ c.$$

DEFINICION.

304. Dos cuerpos geométricos son *equivalentes*, cuando tienen volúmenes iguales y distintas formas.

TEOREMA.

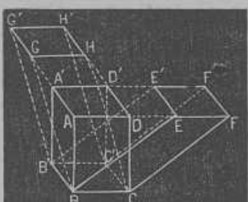

Figura 178.

305. *Dos paralelepípedos cualesquiera de bases y alturas iguales* SON EQUIVALENTES.

1.° **Construccion.**—Sean los paralelepípedos CA′ y BF′ (fig. 178) que tienen la base inferior BCB′C′ comun, y cuyas bases superiores, que se hallan en un plano (por ser iguales las alturas), se encuentran comprendidas entre las ||as AF y A′F′. Trácense los planos ABCF y A′B′C′F′.

1.° **Demostracion.**—Si de la figura total se quita el prisma triangular CDFC'D'F', queda el paralelepípedo A'C; si se quita el prisma ABEA'B'E', queda el BF'.

Pero estos prismas son iguales (265), pues

$$\text{TRIED. } DFD'C = \text{TRIED. } AEA'B,$$

porque

$$\angle FDC = \angle EAB,\ \angle FDD' = EAA' \ (97,\ 2.°)$$

y

$$\angle CDD' = \angle BAA' \ (208,\ 1.°);$$

además,

$$\triangle FDC \cong \triangle EAB,\ \square CD' = \square BA'$$

(lo cual se deduce, recordando los teoremas citados y los 87, 96, 4.° y 107, 1.°)

y

$$\square FD' = \square EA'$$

(pues $\square$ FE' y $\square$ DA', que son iguales al BC' *(hipótesis)*, son iguales entre sí y el $\square$ ED' es una parte comun).

2.° **Construccion.**—Si los paralelepípedos son BF' y BH, trácense los planos CH', BG', BF y B'F' que se obtienen prolongando dos caras opuestas de cada paralelepípedo.

2.° **Demostracion.**—El paralelepípedo CA', obtenido por dichos planos y los de las bases, es equivalente á cada uno de los propuestos, segun el 1.er caso; luego éstos son equivalentes entre sí.

Corolario.—*El volúmen de un paralelepípedo cualquiera tiene por medida el producto del número que mide su altura, por el número que mide su base ó el producto de los números que miden sus tres dimensiones;* pues el volúmen de un paralelepípedo cualquiera BF' (fig. 178) tiene la misma medida que el paralelepípedo recto D'B que le es equivalente, y, á su vez, éste tiene la misma medida que el paralelepípedo rectángulo, que se obtendría, tomando el $\square$ ABCD como base, como aristas laterales las $\perp$s trazadas á éste en sus vértices A, B, C y D, y cuya otra base se hallara en el plano A'B'C'F'.

TEOREMA.

306. *Todo prisma triangular es equivalente á la mitad de un paralelepípedo de la misma altura y dupla base.*

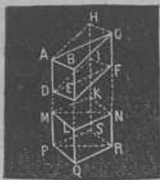

Figura 179.

1.er caso. Si el prisma triangular es recto, por ejemplo, el MLNPQR (fig. 179); completando el paralelepípedo KQ, se ve inmediatamente que el prisma dado y el NKMBSP son iguales, por tener iguales los triedros S y L, y las caras que los forman.(257, *cor.* 1.°, 107, 1.° y 92).

2.° caso. **Construccion.**—Dado el prisma oblícuo triangular ABCDEF, complétese el paralelepípedo EH; prolónguense todas las aristas; trácese un plano cualquiera MLNK $\perp$ á éstas (217, *recíp.*); tómese la distancia MP = AD, y trácese el plano PQRS $\perp$ tambien á las aristas.

Demostracion.—Siendo AD = MP,
se tendrá tambien BE = LQ, CF = NR,..... (257, *cor.*);
luego AM = DP, BL =EQ, ...;
pues resultan de sumar á los dos miembros de las igualdades anteriores, respectivamente, los segmentos DM, EL,.....

Los prismas rectos truncados HL, IQ, que tienen iguales las bases PQRS y MLNK (254), así como las aristas laterales, podrán superponerse, de manera que coincidan, serán pues, iguales;
luego HQ — HL ó KQ = HQ — IQ = HE.

De igual manera resulta que
prisma MLNPQR = *prisma* ABCDEF
y *prisma* MNKPRS = *prisma* ACHDIF
pero *prisma recto* MLNPQR = *prisma recto* MNKPRS (1.°);
luego *prisma* ABCDEF = *prisma* ACHDEF;
de manera, que cada uno es la mitad del paralelepípedo HE.

Corolario 1.°—*Dos prismas triangulares de igual altura y bases equivalentes, son equivalentes*; pues son mitades de paralelepípedos equivalentes.

Corolario 2.°—*El volúmen de un prisma triangular tiene por medida el producto del número que mide su base por el número que mide su altura*; pues el prisma triangular ABDEFH (fig. 180, 1) es la mitad del paralelepípedo AG.

Corolario 3.°—*El volúmen de un prisma cualquiera*

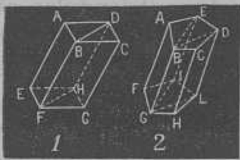

Figura 180.

tiene por medida el producto del número que mide su altura por el número que mide su base; pues el prisma ABCDEFGHLI (fig, 180, 2) se puede descomponer por los planos diagonales EG y DG en prismas triangulares, cuyas expresiones, sumadas, darán la siguiente

$$V = a\,(T + T' + T'')$$

(representando por a la altura y por T, T′ y T″ las medidas de los $\triangle^s$ de las bases).

Corolario 4.°—*El volúmen de un cilindro tiene por medida el producto del número que mide su altura por el número que mide su base;* pues el cilindro es el límite de una série de prismas variables de la misma altura y cuyas bases tienen por límite la del cilindro.

LEMA.

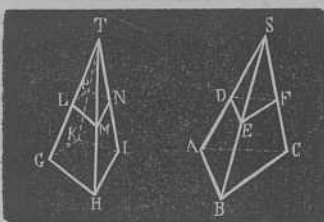

Figura 181.

(**Pirámides y conos.**)

307. *Si dos pirámides, de alturas iguales y bases equivalentes, se cortan por planos equidistantes de sus vértices,* LAS SECCIONES SERÁN TAMBIEN EQUIVALENTES.

Demostracion.— Siendo semejantes los $\triangle^s$ ABC y DEF (fig. 181), así como los cuadriláteros GHIK y LMNP, se tiene (185)

$$\frac{\textit{área de } \mathrm{DEF}}{\textit{área de } \mathrm{ABC}} = \frac{\mathrm{DE}^2}{\mathrm{AB}^2} \qquad \frac{\textit{área de } \mathrm{LMNP}}{\textit{área de } \mathrm{GHIK}} = \frac{\mathrm{ML}^2}{\mathrm{GH}^2}\ (185);$$

$$\text{pero}\quad \frac{\mathrm{SD}}{\mathrm{SA}} = \frac{d}{D} = \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AB}}\,, \quad \frac{\mathrm{TL}}{\mathrm{TG}} = \frac{d}{D} = \frac{\mathrm{LM}}{\mathrm{GH}}\ (281)$$

(representando por D y d las distancias de los vértices S y T á las bases y secciones respectivas);

$$\text{luego}\quad \frac{d^2}{D^2} = \frac{\mathrm{DE}^2}{\mathrm{AB}^2} = \frac{\mathrm{LM}^2}{\mathrm{GH}^2}\ ;$$

luego $$\frac{\text{área DEF}}{\text{área ABC}} = \frac{\text{área LMNP}}{\text{área GHIK}}$$

pero $$\text{área ABC} = \text{área GHIK};$$

luego $$\text{área DEF} = \text{área LMNP}.$$

TEOREMA.

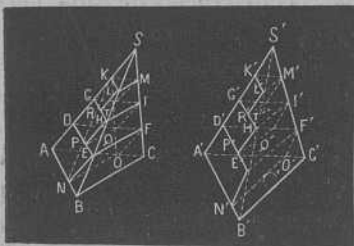

Figura 182.

308. *Dos pirámides triangulares, de alturas iguales y bases equivalentes, son equivalentes.*

Construccion.—Divídanse las alturas (figura 182) en un número cualquiera de partes iguales; por los [.]^{s} de division trácense planos $\parallel^{os}$ á las bases, y constrúyanse las séries de prismas triangulares que se ven en la figura, cuyas aristas laterales son $\parallel^{as}$, respectivamente, á las aristas SAy SA′.

Demostracion.—Los prismas DEFANO y D′E′E′A′N′O′, GHIDPQ y G′H′I′D′P′Q′ y GRTKLM y G′R′T′K′L′M′ son respectivamente equivalentes, cualquiera que sea el número de planos y, por consiguiente, de prismas trazados. Siendo, además, KT, TQ y QO $\parallel^{as}$ á SC y KR, RP y PN $\parallel^{as}$ á SB, por construccion; unos y otros segmentos están en prolongacion (95), formando las $|^{as}$ KO y KN $\parallel^{as}$ á SC y SB, respectivamente.

Pero la diferencia entre la pirámide SABC y la suma de los prismas KLMGRT, GHIDPQ,..... es menor que el prisma triangular KONSBC truncado, el cual puede hacerse menor que cualquier valor, por pequeño que sea, para lo cual, basta que sea suficiente pequeño el segmento KS, y lo mismo puede decirse de la pirámide S′A′B′C′; luego, en el límite, dichas pirámides pueden considerarse como las sumas de un número infinito de prismas triangulares, respectivamente iguales; luego ellas serán equivalentes entre sí.

TEOREMA.

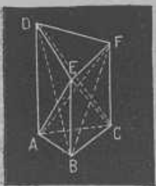

Figura 183.

309. *Un tronco de prisma triangular equivale á tres tetraedros que tienen por base la de aquél y cuyas alturas son, respectivamente, las distancias de cada vértice á la base.*

Construccion.—Trácense los planos ECA y ECD (fig. 183) que dividen al prisma truncado en tres tetraedros EABC, EACD y ECDF; trácense, además, los planos CDB y FBA que forman los tetraedros DABC y FABC.

Demostracion.—El TETR. EABC satisface al enunciado. El TETR. EACD es equivalente al TETR. BCAD (308) (pues tienen la misma base ACD y los vértices en una ‖ª á ésta) que tambien satisface al enunciado; en fin, el TETR. ECFD es equivalente al EAFC (308); pues sus bases son equivalentes, y éste lo es al BACF, que satisface al enunciado.

COROLARIO 1.°—*Una pirámide triangular es la tercera parte de un prisma triangular de igual base y altura*; pues, dado el tetraedro EABC, se puede completar el prisma, prolongándose los planos EBC y EBA, hasta que corten al plano ‖° á EB trazado por la |ª AC (197, 4.°), y, trazando por E un plano ‖° á la base, en cuyo caso, los vértices ED y F distarán igualmente de la base, y, por consiguiente, los tetraedros componentes serán iguales entre sí y á la tercera parte del prisma.

COROLARIO 2.°—*El volúmen de un tetraedro tiene por medida el tercio del número que mide la altura por el que mide la base.*

COROLARIO 3.°—*El volúmen de una pirámide tiene por medida el tercio del número que mide su altura por el que mide la base*, pues una pirámide puede descomponerse en tetraedros, trazando planos por su vértice y las diagonales que dividen su base en $\triangle^s$.

COROLARIO 4.°—*El volúmen de un cono tiene por medi-*

da el tercio del número que mide su altura por el que mide su base; pues el cono es el límite de las pirámides regulares inscritas, cuyo número de caras crece indefinidamente.

Representando por a la altura de un cono circular, por r el rádio de su base y por V su volúmen, se tendrá:

$$V = \frac{a}{3} \cdot 2\pi r.$$

TEOREMA.

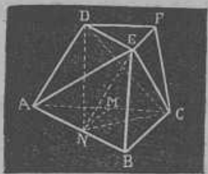

Figura 184.

310. *Un tronco de pirámide, de bases paralelas, equivale á tres tetraedros cuyas alturas son la del tronco y cuyas bases son las de éste y su media proporcional.*

1.er CASO. **Construccion.**--Trácense: la ‖ª EN á la AD, la ‖ª NM á la BC (fig. 184), y únanse N con C, D con C y con N por las |as NC, DC y DN.

Demostracion.—Los tetraedros componentes EABC y EFCD satisfacen al enunciado. El tetraedro restante EACD es equivalente al NACD (308), cuya altura es la del tronco y cuya base ANC es una media proporcional entre ABC y DEF, ó su igual NAM (203, 208 107, 1.° y 89) ;pues, en efecto, siendo semejantes los △s ANM y ABC (149, 1.°); resulta

$$\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB};$$

teniendo los △s NAM y NAC el vértice comun y sus bases en una misma |ª, sus áreas son entre sí como éstas, es decir, que

$$\frac{\textit{área del } \triangle \text{ NAM ó DEF}}{\textit{área del } \triangle \text{ NAC}} = \frac{AM}{AC};$$

de igual manera se tendrá, considerando los △s CAN y CAB, que

$$\frac{\textit{área del } \triangle \text{ CAN}}{\textit{área del } \triangle \text{ CAB}} = \frac{AN}{AB};$$

luego $\frac{\text{área del } \triangle \text{ DEF}}{\text{área del } \triangle \text{ NAC}} = \frac{\text{área del } \triangle \text{ NAC}}{\text{área del } \triangle \text{ ABC}}$,
y el TETR. DANC satisface tambien al enunciado.

2.° CASO. Si el tronco es de una pirámide cualquiera, constrúyase otra triangular de igual altura y base equivalente, y su tronco, de igual altura que el dado (fig. 181), y queda extendido el 1.er caso al general.

Representando por B, b y a las bases y la altura del tronco de pirámide y por V su volúmen, resulta:

$$V = \frac{a}{3} (B + b + \sqrt{Bb}).$$

COROLARIO 1.°—*El volúmen de un tronco de cono de bases paralelas es igual á la suma de los volúmenes de tres conos, cuya altura comun es la del tronco y cuyas bases son, la superior, la inferior y una media proporcional entre ambas.*

Demostracion.—*(Método de los límites.)*

Representando por R y r los rádios de las bases, resultará, para la expresion del volúmen, la siguiente

$$V = \frac{a}{3} (\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi^2 R^2 r^2} = \frac{\pi a}{3} (R + r + Rr).$$

TEOREMA.

(Esfera).

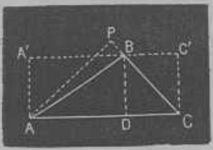

Figura 185.

311. *El volúmen engendrado por un △ que gira alrededor de un eje, situado en su plano y que pasa por uno de sus vértices, sin atravesar su superficie, tiene por medida el producto del número que mide el área que engendra el | ° opuesto al vértice, por el tercio del número que mide la altura relativa á éste | °.*

1.er CASO. **Construccion.**—Sea el △ ABC (fig. 185), cuyo | ° AC se confunde con el eje. Trácense el ▭ ACC'A' y la ⊥ BD á AC.

Demostracion.—El volúmen engendrado por el △ ABC es igual á la suma de los volúmenes de los conos engendrados, respectivamente, por los $\triangle$ BDC y BDA, que son los tercios de los volúmenes de los cilindros engendrados por los $\square^s$ BDCC′ y BDAA′ (309, *cor.* 4.°); luego

$$\text{vol. ABC (1)} = \frac{1}{3}\pi\, BD^2 . AC \;(309, \textit{cor. } 4.°) =$$

$$\frac{1}{3}\pi\, BD . BC . AP$$

(pues BD. AC y BC. AP expresan el doble del área del $\triangle$ ABC); pero π BD. BC expresa el área lateral del cono engendrado por el $\triangle$ BDC;

luego

$$\text{vol. ABC} = \textit{área}\ \text{eng.}^{da}\ \text{por BC.}\ \frac{AP}{3}$$

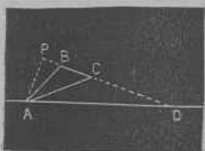

Figura 186.

2.° **Construccion.** — Prolónguese el $|^{\circ}$ BC (fig. 186) hasta encontrar al eje.

Demostracion.

$$\text{vol. ABC} = \text{vol. ABD} - \text{vol. ACD}$$

ó $$\text{vol. ABC} = (\textit{área}\ BD - \textit{área}\ DC)\,\frac{AP}{3} = \textit{área}\ BC.\,\frac{AP}{3}$$

3.° Sea el $\triangle$ ABC (fig. 185), cuyo $|^{\circ}$ AC es $\|^{\circ}$ al eje A′C′ que pasa por el vértice B.

Construccion.—Trácense la $\perp^s$ AA′, CC′ y BD al eje A′C′.

Demostracion.—Los volúmenes engendrados por los $\triangle^s$ AA′B y CC′B son, respectivamente, los dos tercios de los engendrados por los $\square^s$ AA′DB y CC′DB; y entre los dos, los dos tercios del engendrado por el $\square$ AA′C′C, luego

$$\text{vol. ABC} = \frac{2}{3}\pi\, BD^2 . AC = \textit{área}\ AC.\ BD$$

(pues π BD. AC expresa el área lateral del cilindro engendrado por el $\square$ A′C′CA).

TEOREMA.

312. *El volúmen engendrado por un sector poligonal*

(1) Notacion abreviada para expresar el área engendrada por el $\triangle$ ABC.

regular, que gira alrededor de un diámetro exterior á su superficie, tiene por medida el producto del número que mide el área que engendra la base de aquél, por el tercio de la apotema.

Demostracion.—El sector poligonal OABCD (fig. 176) puede descomponerse en los $\triangle^s$ OAB, OBC, OCD, y resulta

$$\text{vol. OAB} = \textit{área}\ \text{AB}.\ \frac{\text{OP}}{3}$$

$$\text{vol. OBC} = \textit{área}\ \text{AB}.\ \frac{\text{OP}}{3}$$

$$\text{vol. OCD} = \textit{área}\ \text{CD}.\ \frac{\text{OP}}{3}\ ;$$

luego $\text{vol. OABCD} = \frac{\text{OP}}{3}\,(\textit{área}\ \text{AB} + \textit{área}\ \text{BC} + \textit{área}\ \text{CD})$

$$\text{vol. OABC} = \frac{\text{OP}}{3}\ .\ \textit{área}\ \text{ABCD}.$$

DEFINICIONES.

Cuando se hace girar un sector circular OBD (fig. 176) alrededor de un rádio OA, exterior á aquél, se engendra un volúmen, que se llama *sector esférico*, comprendido entre la zona engendrada por la base BD y las superficies cónicas engendradas por dos rádios OB y OD.

Segmento esférico es la porcion de volúmen de la esfera comprendido entre dos planos secantes paralelos; estos planos son sus *bases* y la distancia de los mismos su *altura*. Cuando uno de los planos pasa á ser tangente, el segmento es de una sola base.

Corolario 1.°—*El volúmen de un sector esférico tiene por medida el producto del número que mide el área que le sirve de base por el tercio del rádio de la esfera*, pues el sector circular generador es el límite de un sector poligonal regular, cuyo número de lados aumenta definidamente y, en el límite, la apotema se convierte en el rádio, así como la base del sector poligonal, en el arco del circular correspondiente.

Corolario 2.°—*El volúmen de la esfera tiene por me-*

dida el producto del número que mide su área por el tercio del que mide su rádio, pues este volúmen puede considerarse como el de un sector esférico, cuyo sector circular correspondiente es un semicírculo.

La expresion de dicho volúmen será

$$V = 4\,\pi\,R^2 . \frac{R}{3} = \frac{4}{3}\,\pi\,R^3$$

§ 6.º—Relaciones métricas de las figuras semejantes.

TEOREMA.

313. *La relacion de los perímetros de dos líneas poligonales homotéticas y semejantes es igual á su relacion de homotecia y semejanza* (figs. 165 y 167). Esta se deduce inmediatamente del teorema 281 y sumando los antecedentes entre sí, así como los consecuentes, sumas, cuya relacion, será igual á la de homotecia. Si se trata de figuras semejantes se reducirá su consideracion á la de la homotecia (286, *observ.*)

Corolario.—*La relacion de las longitudes de dos segmentos rectilíneos homotéticos, ó de dos polígonos planos* (1) *homotéticos, es igual á la de sus distancias respectivas á sus centros de homotecia.*

TEOREMA.

314. *La relacion de las áreas de dos poliedros homotéticos ó semejantes es igual á la de los cuadrados de sus distancias al centro de homotecia, ó á la de los cuadrados de sus líneas homólogas* (281 y 185).

Observacion.—Este teorema comprende, en particular, los prismas y las pirámides semejantes, *cuyas áreas son proporcionales á los cuadrados de sus rádios, cuando son*

---

(1) Los polígonos que no se hallan en un solo plano se llaman *gauchos.*

regulares, y, considerando sus límites respectivos, resulta el siguiente

TEOREMA.

315. *Las áreas de dos cilindros ó conos semejantes* (1) *son como los cuadrados de sus rádios.*

TEOREMA.

316. *Los volúmenes de dos cilindros y de dos conos semejantes, así como los de dos esferas cualesquiera, son proporcionales á las terceras potencias de sus rádios.*

Esto resulta de comparar las expresiones de sus volúmenes, dadas en los números (306, *cor.* 4.°, 309 y 312).

II.—PROBLEMAS.

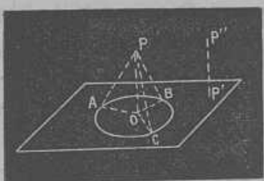

Figura 187.

PROBLEMA 1.°—*Por un* [.] (figura 187) *trazar una* ‖ª *á una* |ª *dada.*

Resolucion. — En el plano determinado por el [.] y la |ª, trácese una ‖ª á ésta.

PROBLEMA 2.°—*Dado un plano, trazar, por un* [.] *dado, una* ⊥ *al mismo.*

Resolucion. 1.er CASO. Si el [.] dado P está fuera del plano (fig. 187), tómense tres longitudes iguales PA, PB y PC que terminen en el plano; trácese la circunferencia que pase por A, B y C. La |ª OP que une su centro con el [.] P será la ⊥ buscada (202, *recip.*)

2.° CASO. Si el [.] P′ está en el plano, trácese, por un [.] P cualquiera exterior al plano (fig. 187), una ⊥ PO á éste (1.er *caso*) y, por el [.] dado P′, trácese una ‖ª P′P″ á PO, que será la ‖ª buscada (217).

PROBLEMA 3.°—*Dado un tronco de pirámide, hallar la altura de la pirámide total y de la deficiente* (fig. 174).

(1) Dos cilindros ó dos conos son *semejantes* cuando están engendrados por ▭s ó △s semejantes.

Resolucion.—Si se supone construida la pirámide total SABCDE, se tendrá (281):

$$\frac{SO}{SO'} = \frac{AB}{A'B'} \quad ó \quad \frac{SO - SO'}{SO \text{ ó } SO'} = \frac{AB - A'B'}{AB \text{ ó } A'B'}$$

$$\text{luego} \quad SO = \frac{SO - SO'}{AB - A'B''} AB \quad SO' = \frac{SO - SO'}{AB - A'B'} A'B'$$

PROBLEMA 4.°—*Dado un tronco de cono, determinar la altura del tronco total y del deficiente* (fig. 175).

Resolucion.—Suponiendo completado el cono, se tiene

$$\frac{SP}{SI} = \frac{AP}{HI} \quad ó \quad \frac{SP - SI}{SP \text{ ó } SI} = \frac{AP - HI}{AP \text{ ó } HI};$$

$$\text{luego} \quad SP = \frac{SP - SI}{AP - HI} AP \quad SI = \frac{SP - SI}{AP - HI} HI$$

$$ó \quad SP = \frac{a}{r - r'} r \quad SI = \frac{a}{r - r'} r'$$

(representando por a la altura del tronco y por r y r' los rádios de las bases).

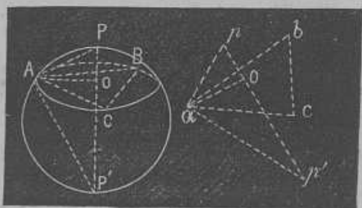

Figura 188.

PROBLEMA 5.° — *Hallar el rádio de una esfera dada.*

Resolucion. — Desde un [.] P, como polo, (fig. 188) con una abertura arbitraria de compás, descríbase una circunferencia ABC. Aparte, en un plano, constrúyase un △ ABC con las longitudes AB, BC y CA como | os; determínese el centro O de la circunferencia circunscrita. El rádio ao es igual á la distancia AO.

En seguida con un rádio ap = AP, es decir, igual al rádio que ha servido para trazar la circunferencia ABC, determínese un [.] p en la ⊥ pp' al rádio ao. Trácese, en fin, la ⊥ ap' á ap. La hipotenusa pp' del △ pap' será igual al diámetro de la esfera.

SECCION CRÍTICA

CRÍTICA GEOMÉTRICA.

LIBRO PRIMERO.

METODOLOGÍA GEOMÉTRICA.

SECCIÓN CRÍTICA.

I.

316. La metodología geométrica es la parte de la Geometría que trata del método, como instrumento necesario para el descubrimiento de las verdades, y para su organizacion en un conjunto que le dé el carácter propio de toda ciencia.

317. Método es la direccion seguida por la inteligencia en la investigacion y exposicion de la verdad.

Este doble objeto indica ya dos métodos, ó mejor, dos fases distintas del método, llamadas análisis y síntesis, que satisfacen respectivamente á uno y otro fin de la ciencia.

318. Lo primero en la ciencia es descubrir las verdades. Este descubrimiento se verifica, en matemáticas, mediante el análisis demostrativo. Descubiertas las verdades por el análisis, corresponde despues ordenarlas y clasificarlas.

Este es el objeto de la síntesis, que coordina las verdades en grupos ó conjuntos de las mismas, subordinados á una misma idea; las cuales, unidas por leyes análogas, se unen en el plan general de la ciencia.

CRÍTICA GEOMÉTRICA.

LIBRO PRIMERO.

METODOLOGIA GEOMÉTRICA.

I.—NOCIONES GENERALES.

I.

314. La *metodologia* geométrica es la parte de la Geometría que trata del método, como instrumento necesario para el descubrimiento de las verdades, y para su organizacion en un conjunto que le dé el carácter propio de toda ciencia.

315. *Método* es la direccion seguida por la inteligencia en la *investigacion* y *exposicion* de la verdad.

Este doble objeto indica ya dos métodos, ó mejor, dos fases distintas del método, llamadas *análisis y síntesis*, que satisfacen respectivamente á uno y otro fin de la ciencia.

316. Lo primero en la ciencia es *descubrir* las verdades. Este descubrimiento se verifica, en matemáticas, mediante el *análisis demostrativo*. Descubiertas las verdades por el análisis, corresponde enseguida ordenarlas y clasificarlas.

Este es el objeto de la *síntesis*, que coordina las verdades en *teorías* ó conjuntos de las mismas, subordinados á una misma idea, las cuales, enlazadas por otras analogías, se unen en el plan general de la ciencia.

Ejemplo: La teoría de *paralelas* es el conjunto de verdades relativas al *paralelismo*, la cual se une con la de *triángulos*, *circunferencia*, etc., para constituir, con su conjunto, la ciencia geométrica.

Los procedimientos de la síntesis son: la *definicion*, *division* y la *demostracion*.

317. *Definir* un objeto es exponer el conjunto de sus cualidades ó propiedades.

Un objeto se define señalando el *género* á que pertenece, por lo cual expresamos lo *comun* que tiene con los del mismo género y su *última diferencia*, por lo cual expresamos lo *propio* que tiene, y que le distingue de los demás objetos de su género.

Ejemplo: En la definicion: *cuadrilátero es un polígono de cuatro lados*; indicamos á dicha figura como perteneciente al *género* polígono; pero le hacemos distinguirse de los demás que no tienen cuatro lados, y es lo propio de la *especie definida*.

318. La *division* es el complemento necesario de la definicion; por ella se determina la variedad de las especies de un objeto.

Ejemplos: El triángulo se divide en *acutángulo*, *rectángulo* y *obtusángulo*; el paralelógramo se divide en *romboide*, *rombo*, *rectángulo* y *cuadrado*.

319. La *demostracion* es el tercer procedimiento de la síntesis científica. Los dos primeros dan nociones precisas y adecuadas á los objetos considerados; el tercero fija sus propiedades y relaciones naturales por medio del razonamiento.

320. En Geometría, la definicion señala clara y distintamente cada objeto; la division expresa circunstancias particulares del mismo (en el triángulo, por ejemplo, ser *acutángulo*, *rectángulo* ú *obtusángulo*), y en fin, la combinacion de unas líneas ó figuras con otras, á la par que multiplica los objetos geométricos, da lugar á nuevas propiedades ó relaciones, que la *demostracion* justifica, para dar un producto asimilable á la síntesis científica.

FALTAN DOCUMENTOS
(paginas, cuadernillos...)
ISO 9878/1990

y el punto P, exterior á ella; lo coexistente, la tangente; las construcciones auxiliares, la circunferencia cuyo diámetro es PO, así como las cuerdas PT y OT. El teorema que relaciona dichos objetos es: *Todo* $\angle$ *inscrito cuyos* $|^{os}$ *pasan por los extremos de un diámetro, es un* $\llcorner$.

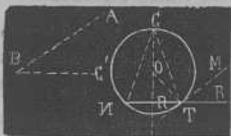

Figura 192.

Por último, en el problema: *Construir un segmento capaz de un* $\angle$ *dado* (fig. 192); lo hipotético, es la cuerda TN y el $\angle$ ABC′; lo coexistente, la circunferencia inscrita al $\angle$ y, por lo tanto, su centro; las construcciones auxiliares, el $\angle$ MTR = $\angle$ ABC′, la $\perp$ OR á NT, las cuerdas TC y NC y el rádio OT. Los teoremas que relacionan dichos objetos son los siguientes: *Un* $\angle$ *externo de un* $\triangle$ *es igual á la suma de los dos no adyacentes. En todo* $\triangle$, *á* $|^{os}$ *iguales se oponen* $\angle^{os}$ *iguales. Los* $\angle^{os}$, *cuyos* $|^{os}$ *son* $\perp^{s}$, *son iguales ó suplementarios. La* $\perp$ *al rádio es tangente.*

329. Además del teorema, se hallan en la ciencia el *lema*, proposicion que prepara á la demostracion de un teorema y el *corolario*, que expresa las consecuencias que se deducen de éste.

330. Los teoremas, así como los problemas, se dividen en *elementales* y *complejos*.

Los teoremas elementales son aquellos cuya demostracion se deriva inmediatamente de una definicion.

Ejemplos:

El diámetro divide á la circunferencia en dos partes iguales que se llaman semi-circunferencias.

Por un [.] *sólo puede trazarse una* $\perp$ *á una* $|^{a}$.

331. Los problemas elementales son aquellos cuya resolucion es inmediata y á los cuales se reducen todos los demás, y son: *trazar una* CIRCUNFERENCIA, *una* RECTA *igual á otra dada* y *un* ÁNGULO *igual á otro dado.*

332. Los teoremas y problemas complejos son los que necesitan de la consideracion de otros para su demostracion y resolucion.

333. Tambien se dividen los teoremas y problemas en *directos* y *recíprocos*.

Se llama *teorema recíproco* de otro, aquél cuya hipótesis es la tésis de éste y cuya tésis es la hipótesis del mismo. Se llama *problema recíproco* de otro, aquel cuyos datos son el resultado de éste y cuyo resultado es lo dado en éste.

Para que dos teoremas ó problemas sean recíprocos, basta que alguna de sus condiciones esté invertida en ambos.

Ejemplos:

Los teoremas: *Si dos* $\angle^s$ *son suplementarios y* TIENEN EL VÉRTICE Y UN $|^{\circ}$ COMUN, tendrán sus otros $|^{os}$ en prolongacion; *si dos* $\angle^s$ *son iguales* y TIENEN DOS $|^{os}$ EN PROLONGACION serán opuestos por el vértice; son los recíprocos de; *si dos* $\angle^s$ *son adyacentes* serán suplementarios, y *si dos* $\angle^s$ *son opuestos por el vértice*, serán iguales.

334. Para que exista la reciprocidad, ha sido preciso añadir á uno y otro recíproco, respectivamente, las condiciones de TENER EL VÉRTICE Y UN $|^{\circ}$ COMUN *y de* TENER LOS $|^{os}$ EN PROLONGACION.

Tambien se hallan en este caso los teoremas núms. 96, 2.°, recíproco del 94 y el 217, *recip* ; la condicion que debe añadirse, en este caso, para la reciprocidad es que una de las $|^{as}$ $\|^{as}$ sea $\perp$ á la $|^{a}$ ó al plano.

335. La necesidad de restringir ó limitar las hipótesis de los teoremas, es debida á que éstas solas tienen más extension que la tésis, por lo cual darían teoremas defectuosos, sin dichas limitaciones, que, haciendo igual la extension de ambos términos, dan orígen á la reciprocidad.

Así, hay muchos $\angle^s$ iguales que no son opuestos por el vértice, y muchos $\angle^s$ suplementarios que no son adyacentes; y sólo una pequeña parte de los mismos reunen tales condiciones, de igual manera que hay muchos sistemas de $|^{as}$ $\|^{as}$ que no son $\perp^s$ á una $|^{a}$ ó á un plano.

REGLA. *Para hacer recíprocas dos proposiciones relativas á una misma cuestion, se tiene que añadir á la condicion más extensa alguna otra condicion, que particularizándola, la haga idéntica, en extension, á la que es ménos extensa.*

336. Hay tambien proposiciones cuyos términos no son en totalidad recíprocos de los de otras. Sin embargo, no dejan de ser recíprocas; pues constan de una parte comun y de otra completamente recíproca.

Esta circunstancia se observa en los teoremas núms. 218, 219, 221 y 222.

337. Dos problemas son recíprocos, cuando los datos y resultados del uno, en totalidad ó parcialmente, son los resultados y los datos del otro.

Así, por ejemplo:

Construir un $\triangle$, *cuando se conocen dos* | ^{os} *y el* $\angle$ *comprendido*, es recíproco de *construir un* $\triangle$, *cuando se dan un* | ^{o} *y los* $\angle$ *adyacentes ó cuando se dan los tres* | ^{os}.

338. Hay teoremas contrarios de otros, que se forman negando la hipótesis y la tésis de éstos.

Ejemplos:

Los teoremas: *Todo* [.] *situado en la* $\perp$ *levantada á una* | ^{a} *en su* [.] *medio*, EQUIDISTA de sus extremos. *Si dos* | ^{as} *forman con una secante* $\angle^{s}$ ALTERNOS Ó CORRESPONDIENTES IGUALES, *serán* $\parallel^{as}$, tienen por contrarios los siguientes: *Todo* [.] *situado fuera de la* $\perp$ *levantada á una* | ^{a} *en su* [.] *medio* DISTA DESIGUALMENTE *de los extremos de ésta: Si dos* | ^{as} *forman con una secante* $\angle^{s}$ ALTERNOS Ó CORRESPONDIENTES DESIGUALES, no serán $\parallel^{as}$.

339. Hay muchas cuestiones que tienen cuatro partes, ó que están expresadas completamente por cuatro teoremas: dos directos, contrarios entre sí, y sus dos recíprocos.

Ejemplos: A la cuestion de la posicion de un [.] respecto á los extremos de una | ^{a}, se refieren los teoremas:

1.° – (Directo afirmativo.)	Todo punto situado *en la perpendicular* trazada á una recta en su punto medio *equidista* de sus extremos.	2.° – (Directo negativo.)	Todo punto situado *fuera de la perpendicular* trazada á una recta en su punto medio *dista desigualmente* de sus extremos.
3.° – (Recíproco afirmativo.)	Todo punto que *equidista* de los extremos de una recta, se halla *en la perpendicular* trazada á ésta en su punto medio.	4.° – (Recíproco negativo.)	Todo punto que *dista desigualmente* de los extremos de una recta, está *fuera de la perpendicular* trazada en su punto medio.

A la cuestion de una recta que corta á otras dos se refieren los teoremas:

1.º—(Directo afirmativo.)	Si á dos rectas *paralelas* se corta por una secante, formarán con ésta ángulos alternos-internos *iguales*.	2.º—(Directo negativo.)	Si á dos rectas *no paralelas* se corta por una secante, formarán con ésta ángulos alternos-internos *desiguales*.
3.º—(Recíproco afirmativo.)	Si dos rectas forman con otra ángulos alternos-internos *iguales* serán *paralelas*.	4.º—(Recíproco negativo.)	Si dos rectas forman con otra ángulos alternos internos *desiguales*, *no serán paralelas*.

340. Los métodos geométricos, tanto de investigacion como de demostracion, se dividen en generales y particulares.

Los métodos de investigacion se comprenden bajo la denominacion comun de *análisis*.

Los métodos particulares de investigacion, ó más bien procedimientos, son variedades del análisis, basadas en alguna circunstancia particular de los objetos sometidos al mismo.

Si la Geometría para su *constitucion* tiene el método análitico, para su *exposicion* ú *organizacion* como sistema de verdades, cuenta con los métodos demostrativos. Estos son *generales* y *particulares*.

Los métodos demostrativos generales, son: de *reduccion al absurdo* y de los *límites*.

Los métodos demostrativos particulares pueden dividirse, segun su objeto, en *determinativos* y *extensivos*.

II.—MÉTODO ANALÍTICO Ó DE INVENCION.

341. Se llama *análisis matemático* y en particular *geométrico*, el procedimiento que consiste en suponer *cierto* (si se trata de un teorema), ó *resuelto* (si se trata de un problema), lo que se busca *demostrar* ú *obtener*.

342. Esta hipótesis facilita el obtener una figura, con la cual pueden combinarse otras figuras ó *líneas auxiliares*, que

se juzguen como las más adecuadas para llegar á deducir de sus relaciones, con la supuesta, la *verdad* ó *resultado* propuestos.

Ejemplos:

1.º *Trazar una tangente comun á dos circunferencias dadas* (fig. 193).

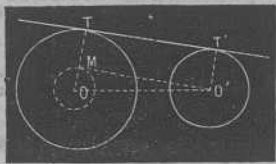

Figura 193.

HIPOTÉTICAMENTE (análisis), se principia por considerar:

1.º T'T tangente á las dos circunferencias.

2.º De esta hipótesis, unida á las CONSTRUCCIONES AUXILIARES: rádios OT y O'T' y la O'M ‖ª á TT', resulta: que O'M es ⊥ á OT).

3.º Deduciéndose, en fin, que (O'M es tangente á circunferencia de rádio R — R',

Este resultado, deducido de suponer resuelto el problema, conduce

PRÁCTICAMENTE (síntesis), á la CONSTRUCCION FINAL siguiente:

1.º Trazar la tangente O'M á la circunferencia de rádio R — R', desde O'.

2.º Trazar los rádios OT' y O'T' que son ⊥ˢ á O'M.

3.º Trazar la ‖ª TT' á MO' que resuelve el problema.

Así, el cuadro:

Hipótesis.	TT' tangente pedida.	*Construccion final..*	O'M tangente á la circunferencia auxiliar.
Construcciones auxiliares ó intermedias....	rádios OT y O'T' que son ⊥ˢ á TT' y O'M ‖ª á TT',	realizacion de las construcciones auxiliares, ántes hipotéticas	OT y OT' ⊥ˢ á MO', que son rádios, y TT' ‖ª á MO'.

Solucion final...	Luego, O'M es tangente á la circunferencia auxiliar	realizacion de la hipótesis primera...	TT' es tambien tangente á la circunferencia O';

hace ver más claramente que el anterior, la perfecta reciprocidad é inversion del problema, en su fase HIPOTÉTICA (análisis), y en su fase REAL (síntesis ó construccion final.)

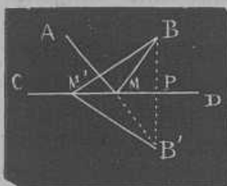

Figura 194.

2.° *Por dos puntos* A *y* B (figura 194), *situadas en un mismo lado de una recta* CD, *trazar á un punto de ésta, otras dos igualmente inclinadas, respecto á la misma.*

HIPOTÉTICAMENTE (análisis), se principia por considerar: $\angle$ BMD = $\angle$ AMC De esta hipótesis, unida á las CONSTRUCCIONES AUXILIARES; prolongacion MB' de AM y $\perp$ BB' á CD, resulta: $\angle$ BMD = $\angle$ B'MD (pues $\angle$ AMC = $\angle$ DMB' como opuestos por el vértice) y $\triangle$ PMB $\cong$ $\triangle$ PMB' (pues tienen un cateto y un $\angle$ iguales), obteniéndose, en fin, que BP = B'P	Esta relacion, deducida de suponer resuelto el problema, conduce	PRÁCTICAMENTE (síntesis), á la CONSTRUCCION FINAL siguiente: Tómese B'P = BP en la $\perp$ BB' á CD prolongada. Únase el punto B' con A y el B con el M, resultando: $\triangle$ BPM $\cong$ $\triangle$ B'PM (pues tienen dos catetos iguales), y en fin: $\angle$ AMC = $\angle$ BMD

343. El análisis geométrico lleva consigo la necesidad de SUSTITUIR unas cuestiones á otras, y por esta razon puede muy bien llamarse MÉTODO DE SUSTITUCIONES SUCESIVAS.

Así, en el primer ejemplo, el problema propuesto se ha reducido á trazar por el [.] O′ una | ª tangente á la circunferencia de rádio R — R′. En el 2.° problema, la cuestion se ha reducido á buscar el [.] B′ simétrico de B.

III.—MÉTODOS DEMOSTRATIVOS Ó DE EXPOSICION.

§ 1.°—Métodos generales.

344. **Método ad absurdum.**—Este método consiste en probar que es falsa la proposicion contraria de una dada, y admitir, por consiguiente, ésta como verdadera; porque es evidente que lo contrario de lo falso es cierto.

Ejemplo: Si se ha demostrado ser falso que dos ∠ˢ contíguos y suplementarios no son adyacentes, quedará probado que son adyacentes.

REGLA GENERAL: *Para demostrar por reduccion al absurdo un teorema, se supone falsa la tésis, y si de esta suposicion resulta una proposicion contraria á alguna definicion admitida á alguna verdad demostrada, ó á la hipótesis del teorema propuesto, se debe desechar dicha tésis contraria á la supuesta, y admitir, por consiguiente, ésta, es decir, el teorema propuesto, que resulta demostrado.*

345. Tres casos ocurren en la demostracion ad absurdum: 1.° que el resultado de suponer falsa la tésis del teorema sea contrario á una *definicion*; 2.° que sea contrario á *una verdad conocida*, y 3.° que sea contrario á la *hipótesis* del teorema propuesto.

346. PRIMER CASO. Hay teoremas que son consecuencias de definiciones conocidas. Para demostrarlos, basta suponer que sucede lo contrario de lo afirmado en ellos, resultando una contradiccion con lo definido.

Sea el teorema: *El diámetro divide á la circunferencia en dos partes iguales.* Para demostrarlo, diremos:

Haciendo girar la semi-circunferencia inferior ABC sobre el diámetro, hasta colocarse en el plano de la ADC, los [.]ˢ de la primera se confundirán con los de ésta; porque *si no se confundiesen*, resultaría que HABRÍA [.]ˢ DESIGUALMENTE DISTANTES DEL CENTRO, lo cual es *contra la definicion.*

347. SEGUNDO CASO. Hay teoremas referentes á propie-

dades, de las que sólo ocurre un caso (por ejemplo: Por un [.] no se puede trazar á una $|^{a}$ más que una $\perp$ ó una $\|^{a}$), y con auxilio de éstos; probada una proporcion, podrá demostrarse su recíproco, por reduccion al absurdo.

Ejemplo: Supóngase demostrado que: *Si dos* $|^{as}$ A *y* B (fig. 25) *son* $\perp^{s}$ *á otra* $|^{a}$ C, *serán* $\|^{as}$, y que: *Por un* [.] *no se puede trazar á una* $|^{a}$ *más que una* $\|^{a}$, es decir, las proposiciones 94 y 95.

Para demostrar el 96, 2.°, que es el recíproco del 94, cuyo enunciado es el siguiente: *Si dos* $|^{as}$ A *y* B *son* $\|^{as}$, y A *es* $\perp$ *á otra* C, *tambien lo será* B, se dirá: A y B que son $\perp^{s}$ á C, *son* $\|^{as}$ *entre sí (demostrado)*; pero por un [.] cualquiera O de la $|^{a}$ B, sólo puede trazarse una $\|^{a}$ á A (95); luego esta única $\|^{a}$ es la $\perp$ dada en el teorema 94, es decir, que la $\|^{a}$ del recíproco y la $\perp$ B del directo son una misma cosa. De igual manera, en la Geometría del espacio, demostrados los teoremas 200, 1.° y 217, se demuestra el recíproco de éste.

Pueden citarse tambien, como ejemplos, los teoremas 142 y 134, que permiten la demostracion, ad absurdum, del 144, ó sea, á concluir, que la única $\|^{a}$ A′D′ trazada por el [.] A′ á la AD (fig. 73), y la única $|^{a}$ que, pasando por A′, puede dividir á SD en una razon dada, son una misma cosa, y, por consiguiente, que la $|^{a}$ que posee esta última propiedad, posee necesariamente la otra.

348. Tercer caso. En éste se comprenden las proposiciones que constan de cuatro partes; es decir, los teoremas *directo-afirmativo*, *directo-negativo*, *recíproco-afirmativo y recíproco-negativo:* sea, por ejemplo, la constituida por los cuatro teoremas:

(1).—Todo punto situado *en la perpendicular* levantada á una recta en su punto medio, *equidista* de sus extremos.

(2).—Todo punto situado *fuera de la perpendicular* levantada á una recta en su punto medio *dista desigualmente* de sus extremos.

(3).—Todo punto que *dista igualmente* de los extremos de una recta, se halla *en la perpendicular* levantada en su punto medio.

(4).—Todo punto que *dista desigualmente* de los extremos de una recta, se halla *fuera de la perpendicular* levantada en su punto medio.

O abreviadamente.

(1).—Si en. . . . . igual (2).—Si fuera. . . . . . desigual
(3).—Si igual. . . . . en (4).—Si desigual. . . . . fuera.

Enunciar uno de los teoremas (1) y (4), ó de los teoremas (2) y (3), es enunciar el otro; es decir, que los teoremas *directo-afirmativo y recíproco-negativo* son equivalentes entre sí, y lo mismo sucede con los teoremas *directo-negativo y recíproco-positivo*, son uno mismo expresado de distinta manera; cada uno de estos teoremas es el *recíproco-contrario del otro*.

349. REGLA PRIMERA. *Basta demostrar uno de los cuatro teoremas, para que su* RECÍPROCO CONTRARIO *se deduzca por reduccion al absurdo.*

Ejemplos:

DIRECTOS.	RECÍPROCOS CONTRARIOS.
Si dos rectas forman ángulos alternos-internos *iguales* con otra, serán *paralelas*.	Si dos rectas *no* son *paralelas*, *no* formarán ángulos alternos internos *iguales* con otra.
Si un punto se halla *en la perpendicular* levantada á una recta en su punto medio, dista *igualmente* de sus extremos.	Si un punto *no* dista *igualmente* de los extremos de una recta, *no* estará *en la perpendicular* levantada en su punto medio.

En efecto. Supongamos demostrado que: *Si dos* $|^{as}$ *forman* $\angle^{s}$ *alternos internos iguales con otra*, SON $\|^{as}$; se demostrará inmediatamente, por reduccion al absurdo, que: *Si dos* $|^{as}$ *no son* $\|^{as}$, NO FORMARÁN CON OTRA DADA $\angle^{s}$ ALTERNOS INTERNOS IGUALES; pues si formasen $\angle^{s}$ alternos internos iguales, segun el directo demostrado, *tendrian que ser* $\|^{as}$, lo cual es contra la hipótesis.

Como ejemplo, en que se demuestra el teorema recíproco contrario de otro, citaremos, con el desarrollo conveniente, las proposiciones 51, *cor.* 3.° *consec.* y 94, de las cuales, la segunda es la recíproca-contraria de la $|^{a}$ (1).

Supongamos demostrado el teorema: *Por un punto situado fuera de una recta, no se le puede trazar más que una perpendicular.*

Se demuestra, por reduccion al absurdo, el recíproco de

---

(1) Estos dos teoremas se pueden poner bajo la forma siguiente, que hace inmediatamente visible la relacion señalada:

Si una recta A *es perpendicular á otra* C, $\left\{\begin{array}{l}\textit{y una B encuentra á A, no será perpendicular á C.}\\ \textit{y una es B perpendicúlar á C, no encontrará á A.}\end{array}\right.$

su contrario: *Dos rectas perpendiculares á una tercera son paralelas*, diciendo; si no fueran paralelas se encontrarían, y habría, desde el punto de encuentro, dos perpendiculares á una recta, lo cual es absurdo.

Sea el teorema:

Si dos rectas forman con otra ángulos alternos-internos iguales, serán paralelas.

El recíproco de su contrario es: *Si dos rectas no paralelas se cortan por otra, no formarán con ésta ángulos alternos-internos iguales*, el cual se demostrará ad absurdum, diciendo: si esta conclusion no fuese la verdadera, lo sería la contraria y tendríamos la proposicion: *Si dos rectas no paralelas se cortan por otra, formarán con ésta ángulos alternos-internos iguales*; pero si forman ángulos alternos-internos iguales, son paralelas; luego tendremos, finalmente, que: *Dos rectas no paralelas son paralelas*, lo cual es contradictorio ó absurdo.

350. Un hecho digno de atencion puede observarse en la teoría del paralelismo. Siendo así, que para tener completamente probado en sus cuatro partes un teorema, acabamos de ver que se necesitan conocer dos que no sean las reconocidas como equivalentes, se observa que hay teoremas en los cuales basta probar uno de sus casos para quedar demostrado el contrario.

Así, por ejemplo, demostrado que: *Si la* $|^{a}$ C *es* $\|^{a}$ *á una de dos* $\|^{as}$ A, LO SERÁ Á LA OTRA B; se deduce, ad absurdum, su contrario, á saber, que: *Si la* $|^{a}$ C *corta á una de dos* $\|^{as}$ A, CORTARÁ Á LA OTRA B; pues, en efecto, si no cortase á B, le sería $\|^{a}$ y, entónces, tendría que serlo tambien á la A, segun el teorema anterior, supuesto demostrado, lo que resultaría contra la hipótesis.

De igual manera, demostrado éste, se deduce el primero, ad absurdum, diciéndose: si la $|^{a}$ C no fuese $\|^{a}$ á la B, la encontraría y, por consiguiente, tambien tendría que encontrar á la A, segun el teorema, supuesto demostrado, lo cual es contra la hipótesis.

Admitido el teorema: *Si un plano* X *corta á una de dos*

| ^{as} ‖ ^{as}, CÓRTARÁ Á LA OTRA; queda probada la proposicion: *Si un plano es* ‖ ^{o} *á una de dos* | ^{as} ‖ ^{as} *ó la contiene*, TAMBIEN CONTIENE Á LA OTRA Ó LE ES ‖ ^{o}, pues se demuestra *ad absurdum* fundándose en la anterior, é inversamente, admitida como demostrada ésta, quedaría probada *ad absurdum* aquélla.

La razon de esto se halla en que, por motivo de cierta simetría de posicion, propia de las rectas paralelas, cada uno de estos teoremas es doble. Así, el primero de los dos últimamente citados, equivale á decir: *Si un plano* X *corta á una de las dos paralelas* A, *cortará tambien á la* B y, recíprocamente, *si corta á la* B, *cortará á la* A. En cuanto al segundo, equivale á decir; *Si un plano es paralelo ó contiene á una de dos paralelas* A, *es paralelo ó contiene á la otra* B y, recíprocamente, *si es paralelo ó contiene á la* B, *será paralelo ó contendrá á la* A.

351. **Método de sustituciones sucesivas.**—Se emplea, en la exposicion científica, para facilitarla, consistiendo en descomponer una cuestion compleja en sus casos particulares, cuya exposicion se hace gradual y sucesivamente.

352. **Método de los límites.**—Sirve para pasar del caso de una demostracion, en que se trata de cantidades conmensurables, al en que se trata de cantidades inconmensurables.

Ejemplos:

Suponiendo demostrado el teorema: *En dos circunferencias iguales, los* $\angle^s$ AOB y A′O′B′ *son proporcionales á sus arcos correspondientes* AB y A′B′, para el caso en que son conmensurables, se extenderá al caso de la inconmensurabilidad de la manera siguiente (fig. 195):

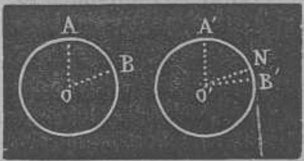

Figura 195.

Tómese una parte alícuota del arco A′B′ todas las veces que se pueda sobre el AB, y supóngase que el extremo de la última parte tomada es N; se tendrá el ángulo A′ON, cuyo arco A′N es conmensurable con el AB y, por consiguiente, la proporcion $\dfrac{arc\ AB}{arc\ A'N} = \dfrac{\angle AOB}{\angle A'O'N'}$; y como estas relaciones son siempre iguales, cualquiera que sea la parte alícuota tomada, que puede ser tan pequeña como se quiera, resulta que: límite de $\dfrac{AB}{A'N}$ = límite de $\dfrac{AOB}{A'ON}$; y como en el límite, N y B' se confunden, se tiene finalmente $\dfrac{arc\ AB}{arc\ A'B'} = \dfrac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}$.

Este razonamiento, que corresponde al caso de la inconmensurabilidad del teorema 136, es aplicable á este caso de los teoremas 134, 138, 281, 303.

§ 2.°—Métodos particulares determinativos.

353. **Método de superposicion.**—Consiste en colocar mentalmente dos figuras dadas, la una sobre la otra, de manera que se correspondan las partes que se suponen iguales, haciéndose ver que se confunden las demás.

La superposicion de las figuras consta de dos partes: 1.ª una superposicion que depende del que demuestra, y consiste en colocar una | ª ó una figura plana, segun que la cuestion sea de geometría plana ó del espacio, sobre su igual, en las figuras de que forma parte; 2.ª la superposicion de las demás partes dependiente, tan sólo, de las hipótesis hechas en el teorema.

Muchos ejemplos pueden citarse de este método; entre ellos se encuentran los relativos á igualdad de triángulos, triedros, tetraedros, núms. 87, 89, 92, 246 y 264. Tambien deben agregarse á éstos los 88, 90, 111, 265 y, además, todos los teoremas que tienen por objeto demostrar igualdad de líneas, ángulos, etc., como son los 93 y 266 relativos á la igualdad de polígonos y de poliedros, los 105, 2.°, 106, 112, 113, 117, 120, 216. Sin embargo, en general, es preferible á la superposicion, el empleo de triángulos ó tetraedros iguales, con lo cual se consigue ir deduciendo la igualdad de los elementos expuestos en la tésis, en virtud de los elementos dados como iguales en la hipótesis, y mediante las construcciones auxiliares convenientes.

Esto se ha hecho en los teoremas arriba citados, como puede verse.

354. **Método de rebatimiento.**—Consiste en hacer girar una figura alrededor de una recta, separándose de su plano, hasta volverse á colocar en el mismo, á distinto lado de la recta sobre que se efectúa el giro.

Ejemplos:

1.° *Si por un* [.] P, *situado fuera de una* | ^{a} AB (figura 43), *se trazan una* ⊥ *y una oblícua, la* ⊥ *será la menor.*

Haciendo girar la figura alrededor de AB, el [.] P tomará una posicion P′. Siendo PNP′ una | ^{a}, será menor que cualquiera otra quebrada PMP′; luego PN, mitad de la primera, será menor que PM, mitad de la segunda.

2.° *Si por un* [.] P, *situado fuera de una* | ^{a} AB (fig. 43), *se trazan varias oblícuas, la que más dista es la mayor.*

Haciendo girar la figura alrededor de AB, resultan las dos quebradas PMP′ y PRP′, de las cuales PRP′ es la mayor (103, 2.°); luego PR, mitad de PRP′, será mayor que PM, mitad de PMP′.

3.° Puede citarse además la *consecuencia* del núm. 51.

355. **Método de giro.**—Consiste en hacer girar parte de una figura alrededor de un punto, de manera que las rectas que pasen por éste queden en la prolongacion de su posicion primitiva (fig. 196).

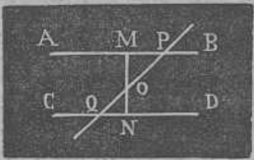

Figura 196.

Ejemplo:

Si dos | ^{as} AB *y* CD *forman con una secante* ∠^{s} APQ *y* PDQ *alternos-internos iguales, serán* ∥ ^{as}.

Trazando por el [.] medio O de PQ, la ⊥ MN á AB, prolongándola hasta cortar en N á CD, y haciendo girar la parte MPO alrededor de O, Q se confundirá con P, por ser PO = OQ; PA se confundirá con QD, por ser el ∠ APQ igual al PQD, OM con ON, por ser los ∠^{s} MOP y NOQ iguales (54) y, por consiguiente, los

$\angle^s$ PMO y QNO, cuyos $|^{os}$ están superpuestos, coincidirán y serán iguales; luego el $\angle$ ONQ será tambien $\llcorner$, y MON será una $|^a$ que formará $\llcorner^s$ con AB y CD, es decir, éstas serán $\|^{as}$ (1).

Observacion.—Estos dos métodos no son más que variaciones del de superposicion, y los tres pueden suplirse por el empleo de los *casos de igualdad de los triángulos*, como puede verse examinando la demostracion del núm. 97.

356. **Método de la cuarta proporcional**.—Consiste en comparar una proporcion, deducida de dos figuras semejantes, con otra proporcion dada en el teorema, y hacer ver que hay en ambas tres términos respectivamente iguales, y que, por consiguiente, lo son los cuatro.

Ejemplo:

Si dos $\triangle^s$ ABC y A′B′C′ *tienen los* $\angle^s$ B y B′ *iguales* y *los* $|^{os}$ AB y BC *proporcionales con los* A′B′ y B′C′, *serán semejantes* (fig. 197).

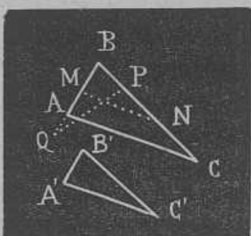

Figura 197.

Tomando en BA, desde B, la distancia BM = B′A′, y trazando MN $\|^a$ á AC, se tendrá la proporcion BA : BM :: BC : BN (134). Se tiene, por hipótesis, BA : B′A′ :: BC : B′C′, y como B′A′ = BM, hay tres términos iguales á otros tres; luego tambien lo serán los cuartos BC y B′C′.

357. **Método de rectas anti-paralelas**.—Consiste en obtener tambien la igualdad de dos segmentos rectilíneos por medio de productos iguales ó de proporciones; sólo que, en este caso, los términos de la proporcion tienen una colocacion inversa en las figuras (fig. 197).

Ejemplo:

Si dos $\triangle^s$ ABC y A′B′C′ *tiene los* $\angle^s$ B = B′ *y los* $|^{os}$ *adyacentes á ambos proporcionales, serán semejantes.*

Tomando sobre BC una distancia BP = B′A′, $|^o$ no homólogo á éste, y trazando PQ que forme con BC un $\angle$ BPQ

---

(1) En virtud del teorema; *Dos rectas perpendiculares á una tercera son paralelas* (94).

igual al B'A'C'; se tendrá, por ser PQ y AC anti-paralelas en el $\angle$ B, que BP. BC = BA. BQ, (135) ó BC : BA :: BQ : BP. Se tiene tambien, por hipótesis, BC : BA :: B'C' : B'A', y por ser BP = A'B', hay en las dos proporciones tres términos respectivamente iguales, de lo que se deduce que tambien serán iguales los cuartos.

El teorema 154 ofrece otro ejemplo de este método, y con auxilio del mismo podrían demostrarse tambien fácilmente los del núm. 153.

Este método es sustituido por el *ad absurdum*, cuando se prueba ántes el teorema 142, y así podrá demostrarse el 145.

§ 3.° Métodos particulares extensivos.

358. Estos métodos extienden una propiedad de varios elementos geométricos, á otros ligados con los primeros por una relacion determinada, ó la transforman en otra propiedad de los mismos.

En Geometría elemental, se halla el método de *triedros suplementarios*, que transforma una propiedad de ángulos planos en otra de diedros, y, recíprocamente.

El principio fundamental de este método es el teorema 245, que permite realizar dicha transformacion de una manera muy sencilla; pues, representando por a, b y c los números que miden los $\angle^s$ planos de un triedro, por A, B y C los que miden sus $\angle^s$ diedros; y si a', b', c', A', B' y C' representan los elementos correspondientes del suplementario, éstos se hallarán ligados con aquéllos por las relaciones siguientes:

$$a' = 2 \llcorner^s - A \qquad A' = 2 \llcorner^s - a$$
$$b' = 2 \llcorner^s - B \qquad B' = 2 \llcorner^s - b$$
$$c' = 2 \llcorner^s - C \qquad C' = 2 \llcorner^s - c.$$

Si, pues, conocida una propiedad de un triedro, es decir, una relacion entre los elementos a, b, c, A, B y C, se aplica á los elementos a', b', c', A', B' y C' del suplementario, y, enseguida, se reemplazan, en las expresiones obtenidas, éstos por sus valores arriba indicados, se obtendrá una nueva relacion entre a, b, c, A, B y C, es decir, una nueva propiedad del triedro primitivo.

Ejemplo: Demostrado el teorema 242, se tendrán, entre los $\angle^s$ planos a′, b′ y c′ del triedro suplementario, las siguientes relaciones:

$$a' + b' + c' > o \qquad a' + b' + c' < 4\llcorner^s,$$

y, sustituyendo los valores, arriba indicados, resultará:

$$2\llcorner^s - A + 2\llcorner^s - B + 2\llcorner^s - C > o \text{ ó } 6\llcorner^s > A + B + C$$

$$\text{y } 2\llcorner^s - A + 2\llcorner^s - B + 2\llcorner^s - C < 4\llcorner^s \text{ ó } 2\llcorner^s < A + B + C,$$

propiedad expresada en el teorema 244.

Si se aplica este procedimiento al teorema 241, que expresa una propiedad de $\angle^s$ planos, resultará, como propiedad correspondiente de los $\angle^s$ D^s, que: *En todo triedro, el menor ángulo triedro aumentado en dos rectos, es mayor que la suma de los otros dos.*

De manera, que esta propiedad y la expresada por el teorema 244, manifiestan las condiciones necesarias y suficientes para la existencia del triedro correspondiente, que son sustituibles á las señaladas en los núms. 241 y 242.

Tambien, en fin, puede notarse que el caso 4.° del teorema 246 se demuestra, aplicando al 3.°, este método.

Observacion.—La Geometría superior cuenta muchos de estos métodos.

LIBRO II.

CRITICA DE LAS VERDADES GEOMÉTRICAS.

I.—NOCIONES GENERALES.

359. El objeto de la Geometría es la extension figurada. Los tres modos de concebirse la extension figurada son: la *línea*, la *superficie* y el *cuerpo geométrico*.

La *experiencia* nos sugiere la idea de éste último. Las de superficie y línea se adquieren por medio de una *abstraccion*, segun la cual nos representamos el cuerpo despojado sucesivamente de una ó dos dimensiones.

360. En Geometría elemental se estudian únicamente la *recta*, la *circunferencia*, el *plano* y las figuras resultantes de sus combinaciones; y, en ciertos límites, las superficies *curvas de revolucion*, ó sea las *superficies cónica*, *cilíndrica* y *esférica*.

361. Los objetos ó entidades que estudia la Geometría, reciben el nombre general de *figuras*; entendiéndose por figura *una combinacion cualquiera de puntos, líneas y superficies*.

362. De las figuras se estudia, en Geometría, su *existencia ó posibilidad*, su *generacion*, sus *determinaciones* y sus *correlaciones*.

II.—LA EXISTENCIA EN GEOMETRÍA.

363. Hay ciertas figuras elementales, cuya existencia se da y está expresada por medio de *postulados*, á saber: la *recta* y el *plano*. Así, se admiten como principios funda-

mentales de la Geometría, que: *Entre dos puntos existe una línea recta, y sólo una,* y que *existe una superficie tal, que contiene completamente todas las rectas* que tienen *dos puntos comunes con ella,* la cual, se ve enseguida, que se halla determinada por tres puntos (196).

364. Establecida la existencia de estos elementos geométricos, y fijadas las condiciones más simples que los determinan, corresponde, naturalmente, justificar la existencia de la *recta perpendicular* á otra, en uno de sus puntos, cuestion que se ofrece como un caso particular del axioma que expresa la *permanencia de la suma angular á un lado de una recta* (48, 51).

365. La existencia de la perpendicular á una recta, trazada desde un punto exterior, aparece, á su vez, como corolario de la existencia y determinacion de la recta (51, *corolario* 3.° *consec.*)

366. La existencia del plano perpendicular á la recta y al plano, así como el paralelismo de rectas y planos, ya es una derivacion de estos primeros principios, de igual manera que la existencia de otras figuras construidas con dichos primeros elementos, pues la existencia de dichas figuras elementales lleva consigo, necesariamente, la existencia de los resultados de sus combinaciones.

III.—LA DETERMINACION EN GEOMETRÍA.

367. Establecida ó justificada la existencia de las figuras, se ofrece, como una nueva cuestion, *su determinacion*, cuestion que consiste en averiguar y exponer el conjunto de condiciones necesarias y suficientes para que una figura geométrica exista como distinta de todas las demás, con sus caractéres propios.

368. La línea recta se halla determinada, en absoluto, cuando se dan **dos de sus puntos**.

Pero, además de este modo primitivo y fundamental de determinarse la recta, aparece, como su derivacion inmediata, otro, comprendido en la proposicion 100, *cor.* 3.°, segun el cual: *Desde un* [.] *no se puede* trazar á una |* *más* *que otra que forme con ella un* ∠ *dado*, proposicion que, á su vez, incluye, en los casos particulares de ser el ∠ ángulo *recto* ó *nulo*, las siguientes:

1.ª *Por un punto* SÓLO *puede trazarse* UNA PERPENDICULAR *á una recta* (51, 1.° y *consec.*) 2.ª *Por un punto exterior á una recta* SÓLO *se le puede trazar* UNA PARALELA (94).

La circunstancia de hallarse expuesto el caso general despues de los particulares, obedece á la necesidad de irse elevando, en la exposicion científica, de lo elemental, simple y particular, á lo complejo y general.

369. El plano se halla determinado, en absoluto, cuando se dan **tres** de sus puntos.

Pero, análogamente á lo que sucede con la recta, tambien hay, además, un modo de determinacion, con respecto á otro plano, mediante una **recta** y un **ángulo**, el cual se expresa diciendo que: *Por una recta, no perpendicular* (1) *á un plano, y á un lado del plano perpendicular á éste trazado por dicha recta* (2), SÓLO *puede trazarse un plano que forme con otro* UN ÁNGULO DADO (3).

370. Sin embargo, en los casos particulares, se advierte una anomalía; pues, si es cierto que: *por una* |ª *no* ⊥ *á un*

---

(1) Por una recta perpendicular á un plano, sólo pueden trazarse planos perpendiculares.

(2) Dicho plano perpendicular, es el plano proyectante de la recta (230).

(3) En general, por una recta se pueden trazar, á un cono circular, cuyo vértice pase por uno de los puntos de aquélla, dos planos tangentes determinados por dicha recta y las dos tangentes, que, en el plano de la circunferencia de la base, pueden trazarse á ésta desde el punto en que la recta dada lo corta. Dichos planos, forman con éste el mismo ángulo que cualquiera generatriz del cono.

Para obtener, pues, un plano que forme con otro un ángulo dado, primero se trazará, tomando como vértice un punto de la recta, exterior al plano dado, y como eje la perpendicular á éste bajada desde dicho punto, un cono cuyo ángulo con el eje sea el complemento del ángulo dado y, por el punto en que la recta dada corta al plano dado, la tangente ó tangentes que puedan trazarse á la circunferencia de la base; aquélla y cada una de éstas determinarán dicho plano.

Como en el círculo, puede no haber plano tangente ó haber uno ó dos, segun que la recta sea exterior al cono formado con el ángulo dado, se confunda con una de las generatrices ó sea exterior á aquél.

plano, sólo puede trazarse un plano $\perp$ *á otro*; es imposible que un plano $\|^{o}$ *á otro contenga una* $|^{a}$ que encuentre á éste, puesto que un *plano* $\|^{o}$ *á otro es el* LUGAR GEOMÉTRICO *de las* $|^{as}$ $\|^{as}$ *á éste, trazadas por cualquier* [.] *de aquél*; y la determinacion de un plano $\|^{o}$ á otro, deberá expresarse diciendo que: *Por un* PUNTO *ó una* RECTA PARALELA *á un plano* SÓLO *puede trazarse otro* PLANO PARALELO *al mismo.*

371. La recta, respecto al plano, ofrece tambien restricciones, pues, si la $|^{a}$ $\perp$ á un plano, en un [.] queda determinada, así como el plano $\perp$ á la $|^{a}$ (200, 1.° y 2.°); no puede decirse lo mismo en el caso de la oblicuidad ó el paralelismo, pues: *Por un punto pueden trazarse infinidad de rectas que formen con un plano un ángulo dado, las cuales constituirán una superficie cónica circular*; y tambien: *Por un punto de una recta se pueden trazar infinidad de planos que formen con la misma un ángulo dado, los cuales serán el conjunto de planos tangentes á la superficie cónica circular, cuya generatriz forma con la recta dada, el ángulo que ésta forma con cualquiera de los planos.*

372. Respecto al paralelismo, se observará que: *Por un* [.] *pueden trazarse infinidad de* $|^{as}$ $\|^{as}$ *á un plano é infinidad de planos* $\|^{os}$ *á una* $|^{a}$ (197, 2.°)

IV.—GENERACION DE LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS.

§ 1.°—Generacion superficial.

373. La *generacion* de las figuras geométricas es un modo de determinacion de éstas por medio de sus elementos, sujetos á una ley dada, que es la ley segun la cual se verifica la generacion y que define la figura.

374. El punto, la línea y la superficie son los tres elementos generadores de las figuras geométricas, y se puede ascender ó descender de unos á otros, ya por un movimiento generador de las inferiores, como por ejemplo, sucede cuando un punto engendra, por su movimiento, una circunferencia, ya por una interseccion de las superiores

como sucede cuando dos planos se cortan, produciendo una recta que es su interseccion (196, *cor.* 2.°)

375. Distinguiremos, pues, la generacion superficial y la lineal. Como ejemplos de la primera, pueden citarse las indicadas en los núms. 196, *cor.* 3.°, 290 y 292, que corresponden á la generacion del *plano, superficie cónica* y *superficie cilíndrica* por el movimiento de la recta, y la de la *superficie esférica* por el movimiento de una circunferencia (272, 6.°).

376. La generacion lineal puede concebirse como resultado de dos generaciones superficiales simultáneas, ó como resultado de una generacion lineal, en una superficie dada.

Como ejemplos de lo primero, pueden citarse los números 196, *cor.* 2.° y 272, que expresan la generacion de la *recta* por la interseccion de dos planos y la de la *circunferencia* por la interseccion de un plano, con una supercie esférica.

Como ejemplos de lo segundo, pueden citarse la generacion de la circunferencia en el plano ó en la superficie esférica por el movimiento de un punto, cuya distancia al centro ó polo es constante en todas sus posiciones.

§2.°—La recta y la circunferencia como lugares geométricos, ó como resultados de la generacion en el plano.

377. Con respecto á UNA RECTA:

1.° El lugar geométrico de los *puntos equidistantes de ésta* se halla formado por DOS PARALELAS á la misma (94 y 107, 1.°).

2.° El lugar geométrico de los *puntos simétricos de una recta ó circunferencia* es otra *recta ó circunferencia* igual á la primera (238 y 239).

378. Con respecto á una CIRCUNFERENCIA:

1.° El lugar geométrico de las *rectas iguales é igualmente inclinadas*, respecto de cada rádio en su extremo, es una *circunferencia*.

2.° El lugar geométrico de los *puntos tomados en cuerdas iguales, ó en sus prolongaciones, á distancias iguales* de vértices homólogos, es una *circunferencia*.

En el caso 1.°, cada [.] A se determina con respecto á uno B, mediante un △ OBA, del que se conocen dos lados y el ángulo comprendido (fig. 198).

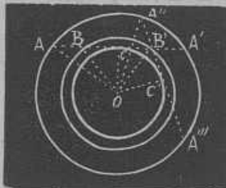

Figura 198.

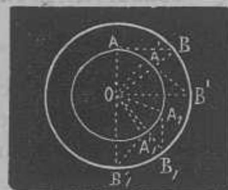

Figura 199.

En el caso 2.°, cada vértice A se determina mediante un △ OBB′ y la prolongacion constante BA del lado BB′, ó cada vértice c, perteneciente á la nueva circunferencia, se determina mediante un △ OBc, en el que se conocen los lados OB, Bc y el ∠ OBc comprendido (fig. 198).

Casos particulares: 1.° El lugar de los *extremos de las tangentes iguales* trazadas á una circunferencia (fig. 199).

2.° El lugar de los *puntos medios de cuerdas iguales* de una circunferencia (fig. 199).

Estos casos resultan de los anteriores, cuando el ∠ considerado es ∟, y se deducirá de cada [.] A un punto c, ó recíprocamente, de cada [.] c uno A, mediante cada △ OcA.

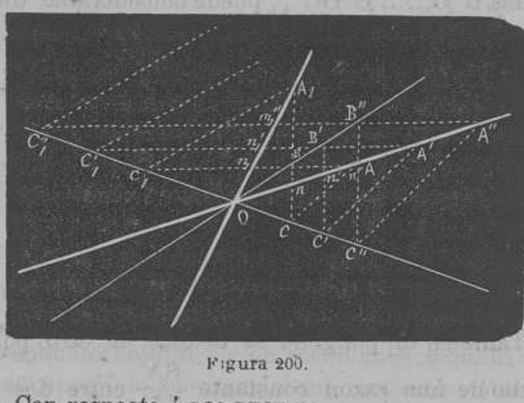

Figura 200.

379. Con respecto á DOS RECTAS:

El lugar geométrico de los vértices A, A'... de los sistemas de $\triangle^{os}$ de $|^{os}$ $\|^{os}$, cuyos vértices B, B',..... C, C',..... (fig. 200) se hallan sobre dos $|^{as}$ B''O, C''O, es *un sistema de dos* $|^{as}$ concurrentes en un [.] con las primeras (147, *recíproco*).

CASOS PARTICULARES: 1.° Las $|^{as}$ BnC, B'n'C',.... pueden considerarse como el caso de ser los $\angle^{s}$ en A, A',..... iguales á dos $\llcorner^{s}$, y, entónces puede decirse tambien, que: el lugar geométrico de los puntos que dividen un *sistema de paralelas* BC, B'C'..... interceptadas por dos rectas, en una *razon dada* (sistema anarmónico), es un conjunto de DOS RECTAS OB'', OC'' CONCURRENTES CON LAS PRIMERAS OA'', AO_{1} en un punto.

Por otra parte, las relaciones

$$\frac{BA}{Bn} = \frac{B'A'}{B'n'} = \ldots\ldots \quad y \quad \frac{AC}{nC} = \frac{A'C'}{n'C'} = \ldots\ldots,$$

deducidas de los $\triangle^{s}$ semejantes BnA, B'n'A',..... AnC, A'n'C',....., de las cuales, en virtud de la hipótesis

$$\left(\frac{BA}{AC} = \frac{B'A'}{A'C'} = \ldots\ldots\right), \quad \text{resulta } \frac{Bn}{Cn} = \frac{B'n'}{C'n'} = \ldots\ldots,$$

hacen ver, directamente, cómo de una cuestion se pasa á la otra.

2.° Cuando los $|^{os}$ de los $\angle^{s}$ A,..... A_{1},..... son $\perp^{s}$ á las $|^{as}$ dadas B''O,..... C''OC''$_{1}$, puede considerarse dicho lugar, como *las intersecciones de sistemas de* $\perp^{s}$ *á dichas* $|^{as}$, *en una relacion* de longitud constante.

3.° Cuando, además, esta relacion de longitud es igual á la unidad, nos hallamos en los casos de los teoremas (106, *cor.* 4.° y 162). Las BISECTRICES BD y BD' (fig. 85) de los $\angle^{s}$ que forman las $|^{as}$AB y BC constituyen el lugar buscado (sistema armónico).

380. Con respecto á UN PUNTO:

1.° Una RECTA puede deducirse de otra RECTA por medio de una RAZON DIRECTA *(rectas homotéticas)* (fig. 77).

2.° Tambien un polígono se deduce de otro polígono, por medio de una razon constante $\frac{SA}{SA'}$ entre dos puntos homólogos, situados al mismo ó á distinto lado del centro de homotecia S *(polígonos homotéticos)* (figs. 75 y 76).

3.° Una circunferencia se deduce de otra (fig. 170), por medio de una razon constante $\frac{SA}{SA'}$ ó $\frac{SA}{SA''}$ entre dos puntos homólogos situados al mismo ó distinto lado del S *(circunferencias homotéticas)*, obteniéndose así cada punto por medio de un homólogo.

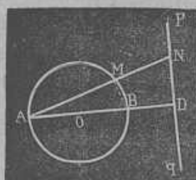

Figura 202.

4.° Se deducirá de una circunferencia una recta, como su *figura inversa* (1), cuando el centro sea un punto de aquélla (fig. 202), ó, recíprocamente, de una recta la circunferencia, mediante un producto constante de sus distancias al *orígen*, pues, en efecto, siendo semejantes los $\triangle^s$ rectángulos AND y AMB, resulta que AD : AN :: AM : AB ó AN. AM = AD. AB = valor contante; y esto se verifica, para cualquiera direccion de la recta AN.

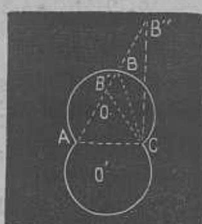

Figura 203.

381. Con respecto á DOS PUNTOS:

1.° El lugar geométrico de los puntos *vértices* de ÁNGULOS *iguales* cuyos lados pasan por dichos dos puntos A y C (fig. 202), es un sistema de DOS SEGMENTOS CIRCULARES (119).

2.° El LUGAR GEOMÉTRICO de los puntos, cuyas distancias á aquéllos está en una relacion dada, es una CIRCUNFERENCIA (163).

A éste puede reducirse, como caso particular, el *lugar geométrico* de los puntos, cuyas distancias á otros dos son iguales, pues, cuando el punto D' se aleja al infinito, la cir-

---

(1) Se dice que dos figuras son *inversas*, respecto á un punto dado A (fig. 202 que se llama *orígen*, cuando los productos AB. AD, AM. AN de los segmentos interceptados por aquéllas sobre rectas, ó *rádios vectores* AD, AN que parten de dicho orígen, son una cantidad constante, cualquiera que sea el rádio vector considerado.

cunferencia se reduce á la *perpendicular en el punto medio* de AC (fig. 85)

V.—SÍNTESIS GEOMÉTRICA.

§ 1.º—Nociones generales

382. Las verdades de la ciencia se hallan subordinadas y coordinadas entre sí, segun su grado de importancia; y de igual modo que en cada teoría se distingue una verdad ó un corto número de verdades, á las cuales quedan las demás subordinadas, como corolarios; entre las verdades y las teorias puede haber cierta coordinacion ó correlacion que las haga aparecer como miembros de análoga importancia en su conjunto.

383. La *existencia*, la *determinacion* y la *generacion* son las cuestiones á que se refieren todas las verdades de la geometría, y todas se resuelven, con auxilio de alguno de los métodos expuestos en la metodología, los cuales pueden reducirse á dos: el de *superposicion* y el del *empleo de proporciones*. El primero se refiere á las ideas de *igualdad* y de *coincidencia*, y conduce á los resultados de una manera *inmediata* y *directa*; el segundo se refiere á la idea de *proporcion*, y conduce á los resultados de una manera *mediata* é indirecta, considerando, no los objetos en sí, sino los *números* que los miden y representan; de manera que se sustituye, por el objeto, su símbolo.

§ 2.º—Subordinacion de las verdades.

384. **Teoría de ángulos.**—La idea fundamental es el **axioma**: *La suma angular á un lado de una recta ó un plano es constante.*

Todas las demás proposiciones relativas á ángulos rectilíneos ó diedros se derivan de ésta (51 á 55 y 215 *observ.*)

385. DETERMINACION DE LAS FIGURAS RECTILÍNEAS.—Además de la determinacion de la perpendicular y paralela á una recta (51, 1.º y *consec.*, y 94) de la recta perpendicular al plano, del plano perpendicular á la recta y paralelo al

plano (200, 1.° y 2.°, 197, 7.°), que son casos particulares de determinacion, se ofrecen, como relaciones fundamentales, las expresadas por la igualdad de triángulos, triedros y tetraedros en los teoremas 87, 89, 92, 246 y 264; y *toda cuestion de igualdad de ángulos rectilíneos, driedros ó poliedros, de segmentos rectilíneos, de figuras esféricas* y *de caras de poliedros* depende de aquéllas, y, con el auxilio de los teoremas 111, 117 y 216, que permiten el tránsito de los arcos á las cuerdas y de las cuerdas y arcos á los ángulos, constituyen casi la totalidad de la primera parte de la Geometría caracterizada por la consideracion de las figuras bajo el punto de vista de su *igualdad ó desigualdad*, y cuyo procedimiento natural es la *superposicion*, con todas sus variedades, ya expuestas en la metodología.

De todas las conclusiones á que conducen dichas proposiciones, merecen citarse las siguientes: *Desde un punto sólo se puede trazar á una recta otra que forme un ángulo dado con una misma direccion de aquélla* (100, *cor.* 3.°), y *por un punto, y á un lado de la perpendicular, sólo puede trazarse á una recta, otra de longitud dada* (105, *observ.*)

386. **Relaciones de desigualdad.**—La verdad fundamental, en las cuestiones de desigualdad de ángulos, es la expuesta en el núm. 100, *cor.* 3.°, que se expresa diciendo: *Un ángulo externo de un triángulo es mayor que cualquiera interno, no adyacente á él.* Los teoremas 101 y 102 establecen la correspondencia entre la *desigualdad de rectas y de ángulos* en las figuras rectilíneas. El corolario 2.° (número 103) establece una relacion de desigualdad, fundamental, entre dos quebradas; y todas las demás relaciones de desigualdad de rectas ó ángulos dependen de las enunciadas.

387. **Teoría de las magnitudes proporcionales.**—El *principio* del núm. 133, aplicado á las diferentes especies de magnitudes proporcionales, á saber: *segmentos rectilíneos* comprendidos entre un sistema de rectas ó planos paralelos, *ángulos y arcos, ángulos diedros y rectilíneos, áreas y sus dimensiones, volúmenes y sus dimensiones*, permite redu-

cir las relaciones de magnitud de todos estos objetos geométricos á las de los números que los miden, los unos por medio de los otros, como expresan las proposiciones que constituyen los libros 2.° y 3.° de la Geometría plana y del espacio, respectivamente.

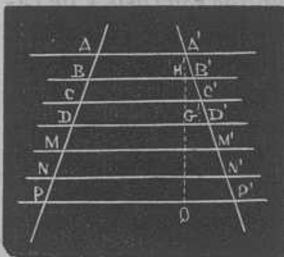

Figura 204.

En particular: 1.° Si se trata de *segmentos rectilíneos*, se observa (fig. 204) que, cuando las rectas AP y A′P′ son paralelas, consideradas entre dos paralelas cualesquiera del sistema AA′, BB′, CC′....., son lados opuestos de paralelógramo, y por consiguiente, iguales (107, 1.°), de manera que *dos* | ^{as} || ^{as} *varían de igual manera entre un sistema de* || ^{as}; pero, cuando las direcciones son cualquiera, como indica la figura, A′B′, C′D′..... A′P′ se refieren á las perpendiculares correspondientes AH′, C′G.... A′Q, y el principio fundamental, que relaciona dichos segmentos, es el teorema 165: *En todo triángulo rectángulo* 1.° *una cateto es igual á la hipotenusa multiplicada por el seno del ángulo opuesto*, etc., al cual puede agregarse, para el caso general de dos rectas cualesquiera AP y A′P′ (fig. 204) el teorema 175, que es una consecuencia inmediata de aquél.

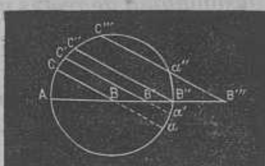

Figura 205.

2.° Si se trata de *ángulos y arcos*, es fácil ver que la proporcionalidad, demostrada para el caso de los ángulos centrales, se extiende á ángulos cualesquiera *excéntricos*, *inscritos*, *semi-inscritos* y *exteriores*; pues siendo (fig. 205)

la medida del $\angle$ ABC $\quad \frac{1}{2}$ arc $(AC + aB'')$

la » del $\angle$ AB′C′ $\quad \frac{1}{2}$ arc $(AC' + a'B'')$

la medida del $\angle AB''C''$ $\frac{1}{2}$ arc $(AC'' + 0)$

la » del $\angle AB'''C'''$ $\frac{1}{2}$ arc $(AC''' - a''B'')$;

por ser $CC' = aa'$, $C''C' = B''a'$, $C'''C'' = a''B''$ (116)
y $\angle ABC = \angle AB'C = \angle AB''C = \angle AB'''C$ (97, 2.°), resulta: *que á las diferentes posiciones de un ángulo, corresponden expresiones de su medida iguales, aunque bajo distintas formas*, indicadas en el corolario núm. 136 y teoremas 137, 1.°, 2.° y 3.°

3.° *Si se trata de áreas y sus dimensiones* ó de *volúmenes y sus dimensiones*, se observa, que así como entre UN SISTEMA de rectas paralelas, las líneas varían *proporcionalmente al número de espacios iguales ó fajas*, entre DOS SISTEMAS, las áreas varían *proporcionalmente al producto de los números de espacios iguales comprendidos en cada sistema (productos de las dos dimensiones)* y, en fin, entre TRES SISTEMAS de paralelas (no situados en un plano) los volúmenes *varían proporcionalmente al producto de los números de espacios iguales comprendidos en cada sistema (producto de las tres dimensiones)*.

Esto es lo que manifiestan los teoremas 139 y 305 que extienden los principios de la proporcionalidad de rectángulos y paralelepípedos á todas las figuras que resultan de sus transformaciones, sin alteracion de sus áreas ó volúmenes (figs. 70 y 178).

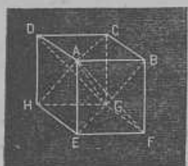

Figura 206.

El tránsito del *paralelógramo* y *paralelepípedo* al *triángulo* y á la *pirámide*, respectivamente, se verifica afectando á éstos de los coeficientes $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, por comprender entre las mismas dimensiones, *cada paralelógramo dos triángulos iguales* (140), y *cada paralelepípedo tres pirámides* AEFGH, ABCGF, ACDHG (figuras 75, 1 y 206) *equivalentes*, puesto que los tetraedros GABC, GACD y GAHE, mitades de cada una, lo son (308).

4.° Además de las áreas y volúmenes, comprendidos en el caso de las magnitudes proporcionales á dos ó más, *cuyas variaciones*, segun el núm. 139, *son proporcionales á los productos de las relaciones entre los valores correspondientes de éstas*, pueden citarse, como incluidas en el mismo caso, las *figuras semejantes y homotéticas*.

Siendo en éstas, las relaciones de dos líneas homólogas sustituibles mútuamente, porque son iguales (281), se llega inmediatamente, por esta sustitucion, á las conclusiones de los teoremas 185 á 188 y 314 á 316, que corresponden á un caso particular de las expresiones,

$$\frac{m}{m'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{b}{b'} \qquad \frac{M}{M'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{b}{b'} \cdot \frac{c}{c'}$$

pues verificándose, en virtud de la relacion de semejanza, que

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \;;$$

aquéllas se convierten en

$$\frac{m}{m'} = \frac{a^2}{a'^2} \qquad \frac{M}{M'} = \frac{a^3}{a'^3} \;,$$

segun se trate de áreas ó de volúmenes, las cuales se traducen diciendo que: *Las áreas y los volúmenes de las figuras semejantes son, respectivamente, proporcionales á los cuadrados ó á los cubos de sus líneas homólogas.*

§ 3.°—Coordinacion de las verdades.

388. **Correlacion del punto y la recta.**—En el plano, el punto y la recta se presentan, con frecuencia, como elementos *recíprocos ó correlativos*, dando orígen á proposiciones llamadas tambien *recíprocas ó correlativas*. Así:

Dos *puntos* de un plano determinan una *recta*

Dos *rectas* de un plano determina un *punto*,

son dos proposiciones correlativas.

Esta correlacion se nota en los teoremas 87 y 89:

Dos $\triangle^s$ que tienen, respectivamente, iguales un $\angle$ y los $|^{os}$ que lo forman, son iguales;

Dos $\triangle^s$ que tienen, respectivamente, iguales un $|^{o}$ y los $\angle^s$ adyacentes, son iguales;

pues, uno y otro, se reducen á expresar, respectivamente,

la determinacion de *una recta* que une *dos puntos*, implícitamente dados en la hipótesis.

la determinacion de *un punto* de interseccion de *dos rectas*, implícitamente dadas en la hipótesis.

El *polígono* y el *multilátero* son dos figuras geométricas que expresan conceptos recíprocos. Así

POLÍGONO SIMPLE es una figura formada de *n puntos* de un plano y de las *n rectas (lados)* de las cuales cada una, une dos puntos *(vértices)* consecutivos.

MULTILÁTERO SIMPLE es una figura formada de *n rectas* de un plano y de los *n puntos* de interseccion de las mismas, tomadas dos á dos.

Y tambien:

POLÍGONO PLANO COMPLETO es una figura plana formada por *n puntos* de un plano y por todas las *rectas (lados)* que los unen dos á dos, es decir, un *polígono* simple considerado con todas sus *diagonales*.

MULTILÁTERO PLANO COMPLETO es una figura formada por *n rectas* de un plano y por todos sus *puntos* de interseccion *(vértices)* tomados dos á dos, es decir, un *multilátero* simple, considerado con todos los *puntos* de interseccion de sus lados.

En fin, una curva ó, en particular, una circunferencia puede considerarse:

como el conjunto de todos los *puntos* en ella contenidos.

como el conjunto de todas las *tangentes* que la envuelven.

389. **Correlaciones del punto y del plano.**—En el espacio, el punto y el plano son dos elementos recíprocos ó correlativos. Ejemplos:

Dos *puntos* determinan una *recta* que los une.

Dos *planos* determinan una *recta* que es su interseccion.

Una *recta* y un *punto*, no situado en aquélla, determinan un *plano* que pasa por la recta y el punto.

Una *recta* y un *plano*, que no pasa por aquélla, determinan un *punto* situado en la recta y el plano.

Tres puntos, no situados en línea recta, determinan un plano.

Tres planos, que no pasan por una misma recta, determinan un punto.

La correlacion existe del mismo modo en los problemas, como se observa en los siguientes:

Por *dos puntos* trazar una recta.

Hallar la interseccion de *dos planos*.

Por una *recta* y un *punto*, exterior á la misma, trazar un *plano*.

Hallar el *punto* de intersección de un *plano* y una *recta*, no contenida en él.

Por *tres puntos* trazar un *plano*.

Hallar el *punto* de interseccion de *tres planos*.

390. **Angulos planos y diedros.**—A los *ángulos planos*, formados por *líneas rectas* concurrentes en un punto, corresponden los *ángulos diedros* formados por *planos* que se cortan segun *una recta*, y la teoría de éstos se halla calcada sobre la de aquéllos, como se observa en los teoremas núms. 35 á 52 y 209 á 215.

El teorema 216, que expresa la perfecta correspondencia entre la igualdad de los ángulos diedros y de sus rectilíneos correspondientes, establece la relacion que liga á estos dos elementos geométricos, y sirve para extender teoremas, en que se trata de figuras planas, al caso de figuras consideradas en el espacio, como sucede en las demostraciones de los teoremas 220, 222 y 246, 4.°

391. **Paralelismo en el plano y en el espacio.**—La teoría del paralelismo tiende, casi exclusivamente, á establecer que: *toda propiedad de posicion de una recta ó un plano, corresponde de igual manera á cualquiera de las rectas paralelas á la primera, ó á los planos paralelos al segundo*, proposicion que expresa *la identidad directiva* de las rectas y planos paralelos (96 á 98, 1.°, 203, 204, 206, 207 y 208).

La relacion más general de posicion que se concibe entre dos rectas ó planos, comprende los dos casos opuestos que tienen lugar, segun que se encuentren ó no se encuentren.

Bajo este punto de vista, pueden observarse las siguientes analogías:

(**En un plano**.)

Si dos $|^{as}$ son $\|^{as}$, { *toda* $|^{a}$ *que encuentra á la una, encuentra á la otra* (**directo**) (96, 1.°)
toda $|^{a}$ $\|^{a}$ *á la una, es* $\|^{a}$ *á la otra* (**contrario**) (96, 3.°)

(**En el espacio.**)

Si dos RECTAS son $\|^{as}$, { *todo* PLANO $\|^{o}$ *á la una, es* $\|^{o}$ *á la otra* (**directo**) (204, 1.°)
todo PLANO *que corta á la una, corta á la otra* (**contrario**) (204, 2.°)

Si dos PLANOS son $\|^{os}$, { *toda* RECTA $\|^{a}$ *al uno, es* $\|^{a}$ *al otro* (**directo**) (206, 1.°)
toda RECTA *que corta al uno, corta al otro* (**contrario**) (206, 2.°)

Si dos PLANOS son $\|^{os}$, { *todo plano* $\|^{o}$ *al uno, es* $\|^{o}$ *al otro* (**directo**) (207, 1.°)
todo plano que corta al uno, corta al otro (**recíproco**) (207, 2.°)

Observacion.—Cada uno de estos teoremas, por razon de simetría, incluye el directo y el recíproco (350); por esta razon, los contrarios se demuestran inmediatamente, por reduccion al absurdo.

Otra relacion de posicion que se establece en la teoría del paralelismo, más concreta ó particular que la anterior, es la que hace referencia al ángulo que forma una recta con otras, paralelas entre sí, ó un plano con otros tambien, paralelos entre sí. Esta relacion, expresada en los teoremas 97 y 226, puede expresarse tambien diciendo, que:

Dos rectas ó dos planos paralelos forman los mismos ángulos con otra recta ó plano cualquiera.

Y esta proposicion comprende, como casos particulares, los teoremas 94 y 96, 3.° y los 207, 1.° y 223, correspondientes, respectivamente, á las rectas y á los planos paralelos.

392. **Triángulos y triedros.**—A los triángulos rectilíneos corresponden perfectamente los ángulos triedros. Los *lados, ángulos* y *vértices* de los primeros están representados por *caras, ángulos diedros* y *aristas* de los segundos; y esta diferencia se nota en los enunciados de los teoremas 87, 89, 92 y el 246; y así, por ejemplo, *si en un triángulo rectilíneo, un lado es menor que la suma de los otros dos, y mayor que su diferencia, lo mismo sucede en un triedro con una cara y la suma ó diferencia de las otras dos.*

Los teoremas 88, 90, 101, 103, 2.° y 104 tienen sus correspondientes, con las modificaciones indicadas, lo cual se extiende tambien á los procedimientos demostrativos.

Y, en fin, puede observarse que, en la determinacion de

los **triángulos**, UN LADO *se halla limitado por* DOS VÉRTICES *de ángulos planos ó* CENTROS *de* CIRCUNFERENCIAS, *cuyos* RÁDIOS *son los otros* LADOS.	*los* **triedros**, UNA CARA *se halla limitada por* DOS ARISTAS *de ángulos diedros ó* EJES *de* SUPERFICIES CÓNICAS, *cuyos* ÁNGULOS GENERADORES *son las otras* CARAS.

Estas analogías reciben una nueva extension, si se consideran las secciones producidas por un *plano* ó una *superficie* esférica en un triedro, pues al

TRIÁNGULO RECTILÍNEO *de la primera, á sus* LADOS, ÁNGULOS Y VÉRTICES.	Corres-ponden	*un* TRIÁNGULO ESFÉRICO *de la segunda, sus* LADOS (1) ÁNGULOS Y POLOS.

Y, teniendo presente esta correspondencia, se enuncian y demuestran, para los triángulos esféricos, análogas proposiciones que para los triángulos rectilíneos y triedros (278.)

393. **Correlaciones de la geometría plana y esférica.**—Para terminar la exposicion de las analogías que ofrecen las cuestiones geométricas, recordando la correspondencia señalada entre *la recta en el plano* y el *arco de circunferencia máxima en la superficie esférica*, entre el *centro* de la circunferencia, en el plano, y el *polo* de la circunferencia, en la superficie esférica, y, despues de observarse que:

---

(1) Estos son *rádios esféricos*.

En un *plano*, la *más corta distancia*, entre dos puntos, es una *línea recta*,

En una *superficie esférica*, la *más corta distancia*, entre dos puntos, es un *arco de circunferencia máxima*,

podrán enunciarse los siguientes teoremas:

En un plano.—Si desde un punto, situado fuera de una *recta*, se trazan á ésta una *recta perpendicular* y diversas *oblícuas*: 1.° La *perpendicular* es menor que cualquiera *oblícua*; 2.° Las *oblícuas* que distan igualmente del pié de la *perpendicular*, son iguales; 3.° De dos *oblícuas*, desigualmente distantes del pié de la *perpendicular*, es mayor la que más dista.

En una superficie esférica.—Si desde un punto, situado fuera de una *circunferencia máxima*, se trazan al plano de ésta, un *arco de circunferencia máxima perpendicular* (menor que un cuadrante) y diversos *arcos de circunferencia máxima oblícuos*: 1.° El *arco perpendicular* es menor que cualquiera *oblícuo*; 2.° Los *arcos oblícuos*, cuyos piés equidistan del pié del *arco perpendicular*, son iguales; 3.° De dos *arcos* que distan desigualmente, el que más dista es el mayor.

El lugar geométrico de los puntos que distan igualmente de los extremos de *una recta*, es la *perpendicular* levantada á ésta en su punto medio.

El lugar geométrico de los puntos equidistantes de los extremos de *un arco de circunferencia máxima*, es el *arco de circunferencia máxima perpendicular* á aquél, en su punto medio.

Si dos circunferencias se cortan, la *recta* que une los puntos comunes, es perpendicular á la *recta* que une sus *centros*, en su punto medio.

Si dos circunferencias mínimas se cortan, el *arco de circunferencia máxima* que une sus puntos comunes, es perpendicular al *arco de circunferencia máxima* que une sus *polos*, en su punto medio.

Respecto á los procedimientos seguidos para demostrarlos, debe observarse que, si, en general, la igualdad de *triángulos rectilíneos* sirve para el caso de las cuestiones referentes al plano, para las análogas referentes á la superficie esférica, servirán los teoremas tambien análogos de *igualdad ó simetría de triángulos esféricos.*

ÍNDICE.

SECCION EXPOSITIVA.

GEOMETRIA PLANA.

LIBRO PRIMERO.

Definiciones, divisiones y nociones primitivas.

LIBRO II.

Principios de la existencia, determinacion y sustituciones geométricas.

Págs

LIBRO III.

Aplicacion de la teoría de la proporcionalidad de las magnitudes á la geometría.

Págs.

LIBRO IV.

GEOMETRIA DEL ESPACIO.

LIBRO PRIMERO.

Principios de la existencia, determinacion y sustituciones geométricas.

Págs.

LIBRO II.

Aplicacion de la teoria de la proporcionalidad de las magnitudes á la Geometría del espacio.

SECCION CRÍTICA.

LIBRO PRIMERO.

Metodologia geométrica

LIBRO II.

Crítica de las verdades geométricas.

31

21.
15
6.

GALDEANO

GEOMETRI

ELEMENTA