LIB
STII
ÉTIC
A
NIÑO

~~20~~
2050

17647

PRIMERA ENSEÑANZA.

ARITMÉTICA.

[redacted]

[redacted]

[redacted]

PRIMERA ENSEÑANZA.

ARITMÉTICA

PARA

LOS NIÑOS,

POR

VALLIN Y BUSTILLO,

CATEDRÁTICO DE LA UNIVERSIDAD CENTRAL.

Esta obrita, destinada principalmente para los niños que concurren á las escuelas de primera enseñanza elemental y superior, puede servir tambien para los alumnos del primer periodo de la segunda enseñanza en la clase de ejercicios prácticos de Aritmética que señala la nueva ley de instruccion pública.

MADRID.

IMPRENTA DE SANTIAGO AGUADO Y COMPAÑIA, ESPADA, 9.

Librerías de *Hernando*, de *Cuesta* y de la *Publicidad*.

El Autor vive en la calle de la Luna, núm. 30.

1857.

El precio de cada ejemplar es de 4 reales.

Todos los ejemplares llevan una contraseña particular.

PROLOGO.

La instruccion pública en España adolece de un mal grave, que en nuestro concepto el gobierno y el profesorado en general deben combatir en todos los terrenos, si algun dia ha de llegar la enseñanza al floreciente estado, que hoy alcanza en las demás naciones de Europa.

Es el mal, á que aludimos, lo imperfecto de la primera enseñanza; no por falta de celo en sus profesores, ni menos porque la ley no consigne los conocimientos, que deben formar tanto la elemental como la superior, sino por el empeño invencible de los padres en acelerar equivocadamente la carrera de sus hijos, matriculándolos en los establecimientos de segunda enseñanza el dia mismo que cumplen el mínimum de la edad señalada por la ley para su admision y muchas veces aun antes, sin fijarse en la imposibilidad de estudiar con fruto la segunda enseñanza, si carecen de la primera, que ha de ser su base.

La generalidad de los niños no saben, ni pueden saber á la edad de nueve años mas que leer y escribir medianamente, y poseer á lo sumo una imperfecta práctica de las primeras operaciones de la Aritmética; y por eso, empezando el latin con solos estos conocimientos, pasan hoy á los estudios de filosofía sin saber la tabla de multiplicar. ¿Qué fruto, pues, han de sacar los niños de la segunda enseñanza comenzada con tan fatales auspicios?

Y si la segunda enseñanza es incompleta, ¿cómo es posible que la profesional produzca los resultados, que el interés individual y el interés y decoro del Estado exigen de los que al cabo de trece ó catorce años de continuos estudios logran adquirir el título, que les habilita, para ejercer una profesion?

Inútiles serán, pues, todas las disposiciones, que se establezcan acerca de la enseñanza superior, si la primera sigue en el estado en que hoy se encuentra, y si la segunda no se mejora, exigiendo en los exámenes de entrada el conocimiento de todas las materias, que previene la ley, con un rigor, si no excesivo, por lo menos prudente, obligando así á los padres á que retengan á sus hijos uno ó dos años mas en las escuelas de primera enseñanza, en provecho de ellos mismos y de la instruccion pública en general.

Otra medida no menos importante que la anterior es la no interrupcion del estudio de los principales ramos de la primera enseñanza durante el primer periodo de la segunda, consignada ya en la nueva ley de Instruccion pública y que hemos visto con la mas viva satisfaccion, puesto que habíamos tenido la honra de llamar la atencion del gobierno de S. M. acerca de su importancia, poco tiempo antes de la publicacion de la ley.

Todas estas reformas necesitan además, en nuestro juicio, la de que los niños sigan en las escuelas de instruccion primaria el mismo método y usen, por decirlo así, el mismo lenguaje que en la segunda enseñanza en todo lo que hayan de confiar á la memoria, puesto que variándoles, pongamos por ejemplo, la redaccion de una definicion, por sencilla que sea, necesitan estudiarla de nuevo, quedando como perdido el tiempo que emplearon anteriormente en aprenderla.

Estas y otras análogas razones, que nos ha sugerido la experiencia propia y la de algunos compañeros, cuyas observaciones hemos tenido ocasion de apreciar, nos han obligado á componer esta obrita, que puede considerarse como un extracto (convenientemente modificado) del tratado de Aritmética de nuestros ELEMENTOS DE MATEMÁTICAS.

Si, como lo esperamos, merece la aprobacion de los señores profesores de instruccion primaria y la adoptan para las escuelas y clases que á su celo ha encomendado la ley en el primer periodo de la segunda enseñanza; es indudable que, al pasar los niños con esta preparacion al estudio de nuestros ELEMENTOS DE MATEMÁTICAS, en el segundo periodo, harán los rápidos progresos que son consiguientes á todo método ó progreso científico, cuyo mas eficaz medio de aplicacion es el proceder de lo fácil á lo difícil por grados insensibles, y de lo conocido á lo desconocido, segun la opinion sensata y sábia del profundo Descartes.

En atencion á este principio y teniendo presente la division actual de la primera enseñanza en elemental y superior, hemos dividido esta Aritmética en dos partes, la primera para las escuelas elementales y la segunda para las superiores, sirviendo una y otra para los alumnos del primer periodo de la segunda enseñanza y tambien para los adultos, que, sin el aparato científico de las obras puramente racionales, quieran hacer un estudio práctico de la resolucion de las diferentes cuestiones aritméticas, que con tanta frecuencia se emplean en los usos ordinarios de la vida.

Incluimos en la primera parte y despues de las cuatro reglas de los números enteros, el sistema de monedas, pesas y medidas llamadas de Castilla y el métrico decimal, llamando sobre este punto la atencion de los señores profesores porque, si alguna vez se ha de generalizar este sistema entre nosotros, es de absoluta necesidad que comience su estudio desde los primeros años, á fin de que el uso contínuo del sistema antiguo no sea un obstáculo invencible para toda innovacion en edad mas madura.

Para la reduccion de las unidades de un sistema á unidades del otro, basta conocer por ahora las equivalencias aproximadas, que indicamos al final de la exposicion de ambos sistemas, y que los niños deben estudiar perfectamente de memoria. Para mayor exactitud acompaña al fin la tabla de equivalencias oficiales.

En la segunda parte tal vez parezca extraño que tratemos, siquiera muy sucintamente, de las abreviaciones y facilidad en los cálculos, que ofrece el conocimiento de los logaritmos; pero es tal en nuestro concepto la utilidad, que ha de resultar de la generalizacion de este poderoso instrumento aritmético, que no hemos vacilado un momento en añadir con este objeto un capítulo mas á nuestro libro, contando con la baratura y sencillez de las tablas de logaritmos de los números naturales, publicadas recientemente con tan buen éxito por nuestro ilustrado amigo el Excmo. Sr. D. Vicente Vazquez Queipo, individuo de la Academia de Ciencias y del Real Consejo de Instruccion pública.

INDICE.

ENSEÑANZA ELEMENTAL.

PRIMERA PARTE.

ENSEÑANZA ELEMENTAL.

La idea del NÚMERO es una de las primeras, que adquiere el niño por los sentidos y particularmente por el sentido de la vista. Imposible es, en efecto, dejar de conocer al observar un objeto cualquiera, si se halla solo ó está acompañado de otro ú otros de su misma especie. De esta intuicion primera depende la idea de la unidad ó de la pluralidad, que es propiamente la idea natural del número.

Unidad es, pues, un objeto cualquiera, como un libro, un tintero, una naranja, etc.

La reunion de una unidad y otra unidad se expresa con la palabra *dos*; la reunion de dos y una se llama *tres*; la de tres y una *cuatro*; la de cuatro y una *cinco*; la de cinco y una *seis*, la de seis y una *siete*; la de siete y una *ocho*; la de ocho y una *nueve*, y la de nueve y una *diez*.

PRIMERA ENSEÑANZA ELEMENTAL.

ARITMÉTICA.

Preliminares.

1. Llámase *unidad entera* ó simplemente *unidad* á un objeto cualquiera, como por ejemplo, un árbol, una casa, un libro, una pluma, etc.

Número entero es la reunion de dos ó mas unidades de una misma especie, como cuatro árboles, seis casas, diez libros, etc.

Llámanse *números abstractos* aquellos, que no se refieren á ninguna unidad determinada, como dos, cinco, nueve, etc.; y *concretos* los que se refieren á unidades determinadas, como dos reales, cinco libros, nueve naranjas, etc.

Números homogéneos son los números concretos, que se refieren á unidades de una misma especie, como cuatro libros, ocho libros; y *heterogéneos* los que se refieren á unidades de diferente especie, como cuatro libros y ocho reales.

La ARITMÉTICA enseña á resolver los problemas relativos á los números (*).

(*) Los *problemas* son cuestiones, en que se trata de hallar una ó mas cosas desconocidas ó incógnitas, por medio de otras ligadas con ellas, llamadas datos.
Resolver un problema es hallar el valor de la incógnita ó de las incógnitas que contiene.

NUMEROS ENTEROS.

Numeracion, adicion, sustraccion, multiplicacion y division (*).

Numeracion decimal de los números enteros.

2. La *numeracion* tiene por objeto el expresar todos los números por determinadas palabras ó signos convencionales. En el primer caso se llama *numeracion hablada* y en el segundo *numeracion escrita.*

El número de signos, cifras ó guarismos diferentes de un sistema de numeracion se llama *base* del sistema. Cuando la base es diez, el sistema se llama *decimal.*

Numeracion hablada ú oral.

3. Las palabras adoptadas en el sistema decimal de numeracion, para expresar todos los números enteros desde la unidad en adelante, son las siguientes...

Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve y diez (**).

La reunion de diez unidades se considera como una nueva unidad, que se llama *decena.*

Once, doce, trece, catorce, quince, diez y seis, diez y siete, diez y ocho, diez y nueve, veinte ó sean *dos decenas.*

Veintiuno, veintidos, veintitres, veinticuatro, veinticinco, veintiseis, veintisiete, veintiocho, veintinueve, treinta ó *tres decenas.*

Treinta y uno, treinta y dos, treinta y tres, treinta y cuatro, treinta y cinco, treinta y seis, treinta y siete, treinta y ocho, treinta y nueve, cuarenta ó *cuatro decenas.*

Cuarenta y uno, cuarenta y dos. . . cincuenta ó *cinco decenas.*

Cincuenta y uno, cincuenta y dos. . . . sesenta ó *seis decenas.*

Sesenta y uno, sesenta y dos. . . . . . setenta ó *siete decenas.*

Ochenta y uno, ochenta y dos. . . . noventa ó *nueve decenas.*

Noventa y uno, noventa y dos. . . . . . ciento ó *diez decenas.*

(*) La *adicion* y *sustraccion* se llaman tambien mas comunmente *sumar* y *restar.*

(**) La unidad se considera tambien como un número entero.
Los números enteros menores que diez se llaman números *dijitos.*

La reunion de diez decenas ó cien unidades compone otra nueva unidad, que se llama *centena.*

Ciento y uno, ciento y dos, ciento y tres, ciento y cuatro. . . . . ciento noventa y nueve, doscientos ó *dos centenas.* Doscientos y uno, doscientos y dos. . . . . doscientos noventa y nueve, trescientos ó *tres centenas.* Trescientos uno, trescientos dos. . . . . trescientos noventa y nueve, cuatrocientos ó *cuatro centenas.* Cuatrocientos uno, cuatrocientos dos. . . . . cuatrocientos noventa y nueve, quinientos ó *cinco centenas.* Quinientos y uno, quinientos y dos. . . . . quinientos noventa y nueve, seiscientos ó *seis centenas.* Seiscientos y uno, seiscientos y dos. . . . . seiscientos noventa y nueve, setecientos ó *siete centenas.* Setecientos y uno, setecientos y dos. . . . . setecientos noventa y nueve, ochocientos ú *ocho centenas.* Ochocientos y uno, ochocientos y dos. . . . . ochocientos noventa y nueve, nuevecientos ó *nueve centenas.* Nuevecientos y uno, nuevecientos y dos. . . . . nuevecientos y noventa y nueve, mil ó *diez centenas.*

La reunion de diez centenas, ó cien decenas ó mil unidades, se llama *unidad de millar.*

Diez unidades de millar componen una *decena de millar*, y diez decenas de millar una *centena de millar*, por consiguiente se cuenta por unidades de millar desde un millar ó mil hasta mil millares ó sea un *millon*, lo mismo que hemos contado por unidades desde uno hasta mil; así tendremos...

Mil, dos mil, tres mil, cuatro mil, cinco mil, seis mil, siete mil, ocho mil, nueve mil, diez mil (ó una *decena de millar*). Once mil, doce mil, trece mil..... cincuenta mil..... setenta mil.... noventa y nueve mil, cien mil (ó una *centena de millar*). Ciento y un mil, ciento y dos mil..... ciento tres mil, ciento cuatro mil..... ciento noventa y nueve mil, doscientos mil, doscientos y un mil, doscientos dos mil, doscientos tres mil....... trescientos mil..... cuatrocientos mil..... quinientos mil, y así sucesivamente has'a nuevecientos noventa y nueve mil.

Pero, como cada millar se compone de mil unidades, para pasar de uno á otro, habrá que añadir al primero los nuevecientos noventa y nueve números primeros.

Así, pues, para pasar de mil á dos mil, diremos:

Mil y uno, mil y dos, mil y tres.... mil ciento.... mil ochocientos... mil novecientos... mil novecientos noventa y nueve.

Entre dos mil y tres mil:
Dos mil y uno, dos mil y dos, dos mil y tres, dos mil y cuatro... dos mil novecientos noventa y nueve.

Entre novecientos noventa y nueve mil, y mil millares ó sea un *millon*:
Novecientos noventa y nueve mil y uno, novecientos noventa y nueve mil y dos, novecientos noventa y nueve mil y tres..... novecientos noventa y nueve mil y ciento..... novecientos noventa y nueve mil y quinientos..... novecientos noventa y nueve mil y ochocientos..... novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve.

La reunion de diez *centenas* de millar, ó mil millares ó sean un millon de unidades se llama *unidad de millon*.

Diez unidades de millon componen una *decena de millon*, diez de estas una *centena de millon*, diez de estas una *unidad de millar de millon*, diez de estas una *decena de millar de millon*, diez de estas una *centena de millar de millon*: por consiguiente desde un millon hasta un millon de millones ó sea un *billon* se cuenta por millones, lo mismo que hemos contado por unidades desde uno hasta un millon. Para pasar de un número cualquiera de millones al inmediato se agregarán al primero los novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve números primeros.

Desde un *billon* á un *trillon* se cuenta lo mismo que desde un millon á un billon, y así sucesivamente pudiéramos llegar á los *cuadrillones*, *quillones*, etc.

4. En la numeracion hablada vemos, pues, que los números se dividen en unidades, decenas y centenas simples, unidades de millar, decenas de millar, centenas de millar, unidades de millon, decenas de millon, centenas de millon, unidades de millar de millon, decenas de millar de millon, centenas de millar de millon, unidades de billon, etc.

Las unidades simples se llaman de primer órden, las decenas lo son de segundo, las centenas de tercero, las unidades de millar de cuarto, las decenas de millar de quinto, las centenas de millar de sexto, las unidades de millon de séptimo, y así sucesivamente, verificándose siempre que diez unidades de un órden componen otra del órden inmediato superior.

Numeracion escrita.

5. Los signos, cifras ó guarismos convencionales de la numeracion escrita y sus valores respectivos son los siguientes:

0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
cero,	uno,	dos,	tres,	cuatro,	cinco,	seis,	siete,	ocho,	nueve.

Las nueve últimas cifras se llaman *significativas* y el cero *no significativa.*

En la escritura de la numeracion las cifras significativas tienen dos valores, uno absoluto expresado por su figura y otro relativo segun el lugar, que ocupe respecto de las demás. Conviniendo, pues, en escribir las unidades siempre en el primero de la derecha, las decenas en el segundo; las centenas en el tercero, las unidades de millar en el cuarto, etc., tendremos que toda cifra puesta á la izquierda de otra representa unidades del órden inmediato superior, y por consiguiente...

6. *Para escribir un número entero cualquiera, se escriben los guarismos, que expresan las unidades de cada órden unos al lado de otros, principiando por la izquierda y cuidando de ocupar con ceros los lugares donde no haya unidades.*

Los números sucesivos desde uno hasta mil se escriben así:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,
11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18,	19,	20,
21,	22,	23,	24,	25,	26,	27,	28,	29,	30,
31,	32,	33,	34,	35,	36,	37,	38,	39,	40,
41,	42,	43,	. . .	. . .	. . .	. . .	48,	49,	50,
51,	52,	53,	. . .	. . .	. . .	. . .	58,	59,	60,
61,	62,	63,	. . .	. . .	. . .	. . .	68,	69,	70,
71,	72,	73,	. . .	. . .	. . .	. . .	78,	79,	80,
81,	82,	83,	. . .	. . .	. . .	. . .	88,	89,	90,
91,	92,	93,	. . .	. . .	. . .	. . .	98,	99,	100,
101,	102,	103,	. . .	. . .	. . .	. . .	108,	109,	200,
201,	202,	203,	. . .	. . .	. . .	. . .	208,	209,	300,
301,	302,	303,	. . .	. . .	. . .	. . .	308,	309,	400,
401,	402,	403,	. . .	. . .	. . .	. . .	408,	409,	500,
501,	502,	503,	. . .	. . .	. . .	. . .	508,	509,	600,
601,	602,	603,	. . .	. . .	. . .	. . .	608,	609,	700,
701,	702,	703,	. . .	. . .	. . .	. . .	708,	709,	800,
801,	802,	803,	. . .	. . .	. . .	. . .	808,	809,	900,
901,	902,	903,	904,	905,	906,	907,	908,	909,	1000,

Lo mismo pudiéramos continuar escribiendo desde mil hasta un millon; así tendremos.....

1001,	1002,	1003 . .	1100 . .	1999,	2000
2001,	2002,	2003 . .	2100 . .	2999,	3000
3001,	3002,	3003 . .	3100 . .	3999,	4000
4001,	4002,	4003 . .	4100 . .	4999,	5000
5001,	5002,	5003 . .	5100 . .	5999,	6000
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
100001,	100002,	100003 . .	100100 . .	199999,	200000
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
500001,	500002,	500003 . .	500100 . .	599999,	600000
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
800001,	800002,	800003 . .	800100 . .	899999,	900000
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
900001,	900002,	900003 . .	900100 . .	999999,	1000000

El número *mil ochocientas cincuenta y siete unidades*, que equivale á *un* millar, *ocho* centennas, *cinco* decenas y *siete* unidades, se escribirá así 1857. Para escribir el número *cinco mil* unidades, ó sean *cinco* unidades de millar, ocuparemos con ceros los lugares de los órdenes inferiores y será 5000. Del mismo modo se escriben... *cinco mil ciento cuatro* 5104. *Doce mil* 12000. *Veinte mil doce* 20012. *Quinientos mil uno* 500001. *Un millon cien mil y dos* 1100002. *Mil y cuatro millones, doce mil ciento cinco* 1004012105.

7. *Para leer un número, se pronuncian los valores relativos de sus cifras, empezando por las de órden superior.*

Si el número tiene muchos guarismos, para averiguar con mas facilidad el valor relativo de cada uno, se divide en secciones de tres en tres de derecha á izquierda. La primera seccion de la derecha es de *unidades*, la segunda de *millares*, la tercera de *billones*, etc.

El número 825	se lee:	ochocientas veinte y cinco unidades.
5,200	»	cinco mil y doscientas unidades.
4.500,312	»	cuatro millones quinientas mil trescientas doce unidades.
1,000.850,100	»	mil millones ochocientas cincuenta mil cien unidades.
12,500.100,080	»	doce mil quinientos millones, cien mil ochenta unidades.

Numeracion romana.

8. Llámase *numeracion romana* al arte de expresar los números enteros con las siete letras siguientes:

I	V	X	L	C	D	M

cuyos valores respectivos son

1	5	10	50	100	500	1000

Para escribir con estas letras un número entero cualquiera, basta escribir unas al lado de otras, empezando por las de mayor valor y teniendo presente que una letra menor antepuesta á otra mayor rebaja á esta el valor de aquella.

Hé aquí una tabla comparativa de varios de estos números:

1...	I	13...	XIII	45...	XLV	490...	XD
2...	II	14...	XIV	54...	LIV	601...	DCI
3...	III	15...	XV	66...	LXVI	900...	CM
4...	IV	16...	XVI	70...	LXX	1095...	MVC
5...	V	17...	XVII	79...	LXXIX	1311...	MCCCXI
6...	VI	18...	XVIII	81...	LXXXI	1450...	MCDL
7...	VII	19...	XIX	90...	XC	1496...	MCDXCVI
8...	VIII	20...	XX	97...	XCVII	1520...	MDXX
9...	IX	29...	XXIX	99...	IC	1571...	MDLXXI
10...	X	30...	XXX	112...	CXII	1808...	MDCCCVIII
11...	XI	39...	XXXIX	200...	CC	1857...	MDCCCLVII
12...	XII	40...	XL	400...	CD	2911...	MMCMXI

Las unidades simples pasan á ser unidades de millar, poniendo una línea horizontal encima de las letras correspondientes, ó una *m* por la parte superior ó inferior de las mismas. Así

X^{m} $\quad\overline{XV}C$ $\quad\overline{L}$ $\quad\overline{C}$ $\quad\overline{M}$ $\quad\overline{M}MCX$ $\quad\overline{MD}IL$

representan por su órden los números

10000 15100 50000 100000 1000000 1001110 1500049

Ejercicios para la numeracion.

9. Leer los números 10108, 10090, 500900, 1000100, 5100050, 6001994, 150094151, 9011010541, XVIII, XXXVII, LXXXI, IC, CXI, DLXX, DCCC, MXLVII.

Escribir en ambos sistemas de numeracion los números.....

Diez mil ciento cuatro; once mil uno; diez mil ciento uno; cien mil cuatrocientos uno; ciento y un mil ochenta; quinientos mil diez; un millon cien mil nuevecientos.

Adicion de los números enteros.

10. *Sumar* dos ó mas números enteros es reunirlos en uno solo. Los números, que se dan para sumar, se llaman *sumandos*, y el resultado *suma*.

Para indicar esta operacion, se escribe entre los sumandos el signo + que se lee *mas*. El resultado se separa de los datos por el signo = que significa *igual*. Así tendremos...

$$2+3=5 \qquad 3+2=5$$

11. Para sumar dos números díjitos, un número entero cualquiera con otro díjito, ó viceversa un número díjito con otro entero cualquiera, basta saber de memoria la siguiente

Tabla para la adicion.

0 y 0... 0	2 y 0... 2	4 y 0... 4	6 y 0... 6	8 y 0... 8
0 y 1... 1	2 y 1... 3	4 y 1... 5	6 y 1... 7	8 y 1... 9
0 y 2... 2	2 y 2... 4	4 y 2... 6	6 y 2... 8	8 y 2...10
0 y 3... 3	2 y 3... 5	4 y 3... 7	6 y 3... 9	8 y 3...11
0 y 4... 4	2 y 4... 6	4 y 4... 8	6 y 4...10	8 y 4...12
0 y 5... 5	2 y 5... 7	4 y 5... 9	6 y 5...11	8 y 5...13
0 y 6... 6	2 y 6... 8	4 y 6...10	6 y 6...12	8 y 6...14
0 y 7... 7	2 y 7... 9	4 y 7...11	6 y 7...13	8 y 7...15
0 y 8... 8	2 y 8...10	4 y 8...12	6 y 8...14	8 y 8...16
0 y 9... 9	2 y 9...11	4 y 9...13	6 y 9...15	8 y 9...17
1 y 0... 1	3 y 0... 3	5 y 0... 5	7 y 0... 7	9 y 0... 9
1 y 1... 2	3 y 1... 4	5 y 1... 6	7 y 1... 8	9 y 1...10
1 y 2... 3	3 y 2... 5	5 y 2... 7	7 y 2... 9	9 y 2...11
1 y 3... 4	3 y 3... 6	5 y 3... 8	7 y 3...10	9 y 3...12
1 y 4... 5	3 y 4... 7	5 y 4... 9	7 y 4...11	9 y 4...13
1 y 5... 6	3 y 5... 8	5 y 5...10	7 y 5...12	9 y 5...14
1 y 6... 7	3 y 6... 9	5 y 6...11	7 y 6...13	9 y 6...15
1 y 7... 8	3 y 7...10	5 y 7...12	7 y 7...14	9 y 7...16
1 y 8... 9	3 y 8...11	5 y 8...13	7 y 8...15	9 y 8...17
1 y 9...10	3 y 9...12	5 y 9...14	7 y 9...16	9 y 9...18

Ejemplos de aplicacion: 10 y 7 son 17, 32 y 8 son 40, 52 y 9 son 61, 96 y 6 son 102, 1857 y 5 son 1862.

12. *Para hallar la suma de dos ó mas números enteros, se suman sucesivamente las unidades simples ó de primer órden, las decenas, centenas, millares, etc. Si en la suma de las unidades de un órden resulta una ó mas unidades del inmediato superior, se reservan para añadirlas á este. El número formado por estas sumas parciales es la suma total.*

En el primero de los ejemplos siguientes, despues de escribir los sumandos los unos debajo de los otros, de modo que las cifras de igual órden se correspondan en columnas, y tirar una raya por la parte inferior, diremos:

4 y 2 son 6 y 3 son 9, que se escribe debajo de las unidades.

1 y 3 son 4 y 4 son 8 y 2 son 10; se escribe cero y se lleva 1 para sumar con la columna de las centenas.

1 y 8 son 9 y 7 son 16 y 9 son 25; se escribe 5 y se lleva 2 para sumar con las cifras de la columna que sigue.

2 y 2 son cuatro y 9 son 13, que se escribe á la izquierda del guarismo anterior: luego la suma total será 13509.

Sumandos		94084	6009948	
		100870	49084	
	2814	8947	5504	100249
	9732	999	89906	8210
	43	80100	4000	91400
	920	400940	10000000	1020
Sumas	13509	685940	16158442	200879

Tambien se pueden escribir los sumandos en un mismo renglon, separándolos por el signo + en esta forma:

$$1855+1492+8000102+78+100994+5=8104526$$

13. La suma de varios números no varia, aun cuando se altere el órden de los sumandos. La suma se aumenta ó disminuye en el mismo número que aumenta ó disminuye uno de los sumandos. La suma no varia aunque uno de los sumandos se aumente en el mismo número que se disminuye otro (*).

(*) Llámase prueba; de una operacion á una segunda operacion por la cual nos cercioramos de la exactitud de la primera.

La *adicion* se prueba sumando de nuevo los números dados en un órden inverso al seguido para obtener la primera suma; ès decir, principiando á sumar las cifras de cada columna de abajo para arriba, si la vez primera se sumaron de arriba para abajo. Las sumas obtenidas en ambos casos deben ser iguales, para que la operacion esté bien hecha.

Ejercicios para la adicion de los números abstractos.

11. Hallar la suma de las adiciones siguientes:

		90901041		
18074	6010184	990474	804100	1010484
8745	10817	10094	8099	980907
1000	749978	190477	14999	48978
40574	14090	148747	740778	749478
19104	9100747	6472008	1000947	1847709

$1808+45201+99043+1000010+104900=$

104 decenas+46 millones+254 unidades+166 centenas=

100447 decenas de millar+1512 unidades+209 centenas=

Si en la adicion hubiese muchos sumandos, se suman los diez primeros sumandos, despues los diez siguientes, y así sucesivamente; y la suma de todos estos resultados será la *suma* ó el resultado *total*.

Sumandos.

1492
12050
650
1872
14984124
1001287
10499
1990
987746
8724
8009185
10000
90109
109407
70914
987000
4741400084
10087484
8974196
90941974
1000977458
400408000
10099910
40109812346
10234691994

Sumas parciales { 17010434
4860680353
51755989708 }

Suma *total*.

Hallar la suma de todos los sumandos de las adiciones anteriores y expresar el resultado final con las letras de la numeracion romana.

Añadiendo 4 decenas y 1 centena al número 1857 unidades, ¿cuál será el resultado?

¿Cuál es el número, que excede en 400 unidades y XIX centenas á MCDXV decenas?

Aplicaciones de la adicion de los números enteros.

15. En las aplicaciones de la adicion, los sumandos deben ser homogéneos, es decir, de una misma especie, en cuyo caso la suma será tambien de la especie de los datos.

Propongámonos la resolucion de los siguientes problemas:

1.° *Hallar el número de dias del año comun y bisiesto, teniendo presente que...*

En el año comun		En el año bisiesto	
Treinta dias trae noviembre con abril, junio y setiembre, veinte y ocho trae el uno y los demas treinta y uno.		Treinta dias trae noviembre con abril, junio y setiembre, veinte y nueve trae el uno y los demas treinta y uno.	
Enero. . .	31	Enero . . .	31
Febrero . .	28	Febrero . .	29
Marzo . . .	31	Marzo . . .	31
Abril. . . .	30	Abril. . . .	30
Mayo. . . .	31	Mayo. . . .	31
Junio . . .	30	Junio. . . .	30
Julio. . . .	31	Julio. . . .	31
Agosto. . .	31	Agosto. . .	31
Setiembre .	30	Setiembre .	30
Octubre . .	31	Octubre . .	31
Noviembre.	30	Noviembre.	30
Diciembre .	31	Diciembre .	31
Suma. . .	365	Suma. . .	366

Luego el año comun tiene 365 dias, y el bisiesto 366.

2.° *¿Cuál es la poblacion total de la tierra, sabiendo que Europa tiene* 265010000, *Asia* 600000000, *Africa* 90000000, *América* 50000000 y *la Occeanía* 10000000 de almas?

$$\begin{array}{r} 265010000 \\ 600000000 \\ 90000000 \\ 50000000 \\ 10000000 \\ \hline 1015010000 \end{array}$$

Luego la poblacion total del globo es 1015010000 habitantes

3.° *¿Cuántos años han pasado desde la creacion del mundo hasta nuestros dias?*

Desde el principio del mundo hasta el diluvio. . .	1656 años
Desde el diluvio hasta Moisés.	796
Desde Moisés hasta la fundacion de Roma. . .	779
Desde Rómulo hasta Ciro.	215
Desde Ciro hasta Alejandro el Grande. . . .	202
Desde Alejandro el Grande hasta Jesucristo. . .	335
Desde Jesucristo hasta nuestros dias.	1857
Total.	5840 años

4.° *¿Cuántos reyes ha habido en España desde Ataulfo hasta Isabel II*, sabiendo que hubo 33 godos, 24 de Asturias y Leon, 25 de Castilla y Leon, 19 de Aragon, 24 de Navarra, 5 de la casa de Austria y 7 de la de Borbon?

La suma de todos estos números nos dá un total de 137.

5.° *¿Cuántos habitantes tiene España con sus posesiones ultramarinas, sabiendo que la Península tiene* 15038303; *las islas Baleares* 263316; *las Canarias* 216897; *los presidios de Africa* 13000; *Fernando Pó y Annobón* 2000; *Cuba* 1100000; *Puerto Rico* 200000 *y las Filipinas* 5000000?

Sumando todos estos números resulta que la poblacion total del reino asciende á 21833516 habitantes.

6.° *Hallar el número de años transcurridos desde la fundacion de Roma, hasta nuestros dias.*

Desde la fundacion de Roma hasta Jesucristo. . .	753 años.
Y desde el nacimiento de Jesucristo, hasta hoy. .	1857
Luego el número que se pide será.	2610

7.° *Salomon principió á edificar el templo de Jerusalen* 754 *años antes de Jesucristo y fué destruido* 74 *años despues de él, ¿cuánto tiempo duró aquella maravilla?* [828 años]

8.° *Si un comerciante compra un objeto cualquiera por* 4145 *rs. y se propone ganar* 320, *¿cuál será el precio de venta?* [4465 rs.]

9.° *Si tres hermanos tienen hoy* 17 *años el uno,* 12 *el otro y* 8 *el tercero, ¿cuántos años tendrá cada uno y cuántos tendrán todos juntos dentro de* 25 *años?*

Las incógnitas de este problema son 42, 37, 33 y 112 años.

Sustraccion de los números enteros.

16. *Restar* de un número entero otro menor es hallar la diferencia entre los dos. El número mayor se llama *minuendo*, el otro *sustraendo* y el resultado *resto*, *resíduo ó diferencia*.

El minuendo es siempre igual á la suma del sustraendo y el resíduo.

17. Para restar de un número entero otro díjito, basta saber de memoria la tabla de sumar, pues el resíduo sumado con el sustraendo debe producir el minuendo.

Así, 12 menos 5 son 7; 27 menos 8 son 19; 46 menos 9 son 35; 50 menos 7 son 43.

Para indicar la sustraccion, se escribe el signo — que se lee *menos*, entre el minuendo y el sustraendo. El resultado se separa de los datos con el signo =

Así, 5—3=2   5—2=3

18. *Para restar de un número entero otro menor ó sea para hallar la diferencia entre dos números enteros, se restan sucesivamente las unidades simples del sustraendo de las unidades simples del minuendo; las decenas, de las decenas; las centenas de las centenas, etc., y el número formado por estas restas parciales será la diferencia ó el resíduo total.*

Si alguna cifra del minuendo es menor que la del mismo órden del sustraendo, se agregan á ella diez unidades, ó sea una unidad del órden superior inmediato, teniendo presente al restar la cifra siguiente que la del minuendo tiene una unidad de menos, ó la del sustraendo una unidad de mas.

Se acostumbra á escribir el sustraendo debajo del minuendo de modo que se correspondan las cifras de un mismo órden. Hecho esto y despues de tirar una raya por la parte inferior en el segundo de los ejemplos que siguen, diremos:

9 menos 8 es 1, que se escribe debajo de las unidades;
4 menos 7 no puede ser, por consiguiente 14 menos 7 son 7;
0 menos 2 no puede ser, 10 menos 2 son 8;
8 menos 5 son dos; y 3 menos 2 es 1.

Luego la diferencia ó el resto total será 12871 unidades.

Minuendos	8264	38149	590600	100010052
Sustraendos	1201	25278	59845	89300090
Resíduos	7063	12871	530755	10709962

Tambien se pueden escribir el minuendo y el sustraendo en un mismo renglon, separándolos por el signo — en esta forma:

45200—5240=39960 10284000—529999=9754001

19. Si el minuendo aumenta ó disminuye en un número cualquiera, el resíduo aumentará ó disminuirá en el mismo número. Si por el contrario, el sustraendo aumenta ó disminuye, el resíduo disminuirá ó aumentará en el mismo número. Luego un resíduo no se altera, aunque al minuendo y sustraendo se les añada ó quite un mismo número (*).

Ejercicios para la sustraccion de los números abstractos.

20. Hallar el resíduo ó diferencia entre los números...

845697	600104	1000000	704001	5000100
427498	199405	990009	694999	4999099

10520841—254389= 1004700000—450999199=

¿Cuál es el exceso de 854 decenas sobre 59 centenas?

Para restar de un número otros varios, se resta del primero el segundo, y del resíduo se resta el tercero y de este resíduo se resta el cuarto y así sucesivamente; ó lo que es mejor, se resta del primero la suma de todos los demás

Restar de 20850, los números 5104, 259, 1032 y 7900.

	20850		
Sustraendo 1.º..	5104	. . . .	20850
Resíduo 1.º......		5104	
Sustraendo 2.º..	259	259	Suma = 14295
Resíduo 2.º......		1032	
Sustraendo 3.º..	1032	7900	Resíduo final.
Resíduo 3.º......			
Sustraendo 4.º..	7900		
Resíduo final....			

¿Cuál es el número, que sumado con 1500 unidades y restando de la suma doce decenas, dá por resultado 1857?

(*) Para *probar* la sustraccion, se suma el sustraendo con el resíduo, y el resultado, si la operacion está bien hecha ha de ser igual al minuendo.

Aplicaciones de la sustraccion de los números enteros.

21. En las aplicaciones de la sustraccion, el minuendo y el sustraendo deben ser homogéneos, es decir, de una misma especie, en cuyo caso el resíduo será tambien de la especie de los datos.

1.° *¿Cuántos reales se deben añadir á* 78590, *para componer un total de* 100000 *reales?*

Siendo el número que se pide la diferencia entre los números dados, tendremos...

	100000	número mayor
	78590	número menor
luego, si añadimos	21410	rs. al menor, resultará el mayor.

2.° *Si una persona tiene* 80000 *reales de renta y gasta anualmente* 35500, *¿cuánto economizará en cada año?*

La diferencia 44500 reales entre los números dados será el número pedido.

3.° *Hallar los años transcurridos hasta hoy desde el descubrimiento de las Américas por Cristóbal Colon en* 1492.

Desde J. C. hasta hoy.	1857 años.
Desde J. C. hasta dicho descubrimiento.	1492
Luego el número de años que se busca será. . .	365

4.° *¿Cuántos años há que se inventó la imprenta, habiéndolo sido en* 1440? [La diferencia entre 1857 y 1440].

5.° *¿Cuál es la diferencia de la poblacion de España y Portugal, de España y Francia, y de España é Inglaterra?*

España	15518516	Francia	35783059	Inglaterra	27675321
Portugal	3471000	España	15518516	España	15518516
	12047516		20264543		12156805

España tiene pues 12047516 habitantes mas que Portugal, 20264543 menos que Francia y 12156805 menos que Inglaterra.

6.° *Siendo* 21833516 *habitantes la poblacion total de España y sus posesiones ultramarinas y teniendo Cuba* 1100000, *Puerto Rico* 200000, *Filipinas* 5000000, *y Fernando Pó* 2000, *¿cuál es la poblacion de la Península con los presidios de Africa é islas adyacentes?*

Multiplicacion de los números enteros.

22. *Multiplicar* un número entero por otro es hacer al primero tantas veces mayor, como unidades tiene el segundo (*). El número primero ó el que se multiplica se llama *multiplicando*, el segundo *multiplicador*, y el resultado *producto*. El multiplicando y multiplicador juntos se llaman *factores* del producto. Un producto no varía aunque se tome el multiplicando por multiplicador y el multiplicador por multiplicando.

Todo número multiplicado por 1 da por producto el mismo número, y multiplicado por cero da un producto cero.

La multiplicacion se indica separando los factores por el signo $\times$ que se lee *multiplicado por*. El producto se separa de los datos por el signo $=$

$$3\times2=6 \qquad 2\times3=6$$

23. 1.^r Caso. *Para multiplicar dos números díjitos, basta saber de memoria la siguiente.....*

Tabla para la multiplicacion.

0 por 1.. 0	2 por 1.. 2	4 por 1.. 4	6 por 1.. 6	8 por 1.. 8
0 por 2.. 0	2 por 2.. 4	4 por 2.. 8	6 por 2.. 12	8 por 2.. 16
0 por 3.. 0	2 por 3.. 6	4 por 3.. 12	6 por 3.. 18	8 por 3.. 24
0 por 4.. 0	2 por 4.. 8	4 por 4.. 16	6 por 4.. 24	8 por 4.. 32
0 por 5.. 0	2 por 5.. 10	4 por 5.. 20	6 por 5.. 30	8 por 5.. 40
0 por 6.. 0	2 por 6.. 12	4 por 6.. 24	6 por 6.. 36	8 por 6.. 48
0 por 7.. 0	2 por 7.. 14	4 por 7.. 28	6 por 7.. 42	8 por 7.. 56
0 por 8.. 0	2 por 8.. 16	4 por 8.. 32	6 por 8.. 48	8 por 8.. 64
0 por 9.. 0	2 por 9.. 18	4 por 9.. 36	6 por 9.. 54	8 por 9.. 72
1 por 1.. 1	3 por 1.. 3	5 por 1.. 5	7 por 1.. 7	9 por 1.. 9
1 por 2.. 2	3 por 2.. 6	5 por 2.. 10	7 por 2.. 14	9 por 2.. 18
1 por 3.. 3	3 por 3.. 9	5 por 3.. 15	7 por 3.. 21	9 por 3.. 27
1 por 4.. 4	3 por 4.. 12	5 por 4.. 20	7 por 4.. 28	9 por 4.. 36
1 por 5.. 5	3 por 5.. 15	5 por 5.. 25	7 por 5.. 35	9 por 5.. 45
1 por 6.. 6	3 por 6.. 18	5 por 6.. 30	7 por 6.. 42	9 por 6.. 54
1 por 7.. 7	3 por 7.. 21	5 por 7.. 35	7 por 7.. 49	9 por 7.. 63
1 por 8.. 8	3 por 8.. 24	5 por 8.. 40	7 por 8.. 56	9 por 8.. 72
1 por 9.. 9	3 por 9.. 27	5 por 9.. 45	7 por 9.. 63	9 por 9.. 81

(*) O lo que es lo mismo, hallar la suma de tantos números iguales al primero, como unidades tiene el segundo.

La tabla para multiplicar se dispone tambien en forma de cuadrado, de este modo:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Para hallar por medio de esta tabla el producto de dos números díjitos, se busca uno de los factores de la primera línea horizontal, y el otro en la vertical de la izquierda, y el número de la casilla correspondiente al punto de concurso, será el producto. Así; $5 \times 8 = 40$ $6 \times 7 = 42$ $9 \times 9 = 81$

24. 2.° Caso. *Para multiplicar un número entero por 10, 100, 1000, etc., basta escribir á la derecha de dicho número tantos ceros cuantos sigan á la unidad.*

Así; $1854 \times 10 = 18540$ $1000 \times 104 = 104000$

25. 3.^{r} Caso. *Para multiplicar un número entero por otro de una cifra, se multiplican todas las cifras del multiplicando por el multiplicador, empezando por la derecha y añadiendo á cada producto parcial las unidades del mismo órden que resulten del producto parcial anterior. El número formado de todos estos productos parciales será el producto total.*

Multiplicandos	3024	8049	904702	8010001899
Multiplicadores	3	5	7	9
Productos	9063	40245	6332914	72090017091

Esplicacion del segundo ejemplo: Despues de escribir el multiplicador debajo del multiplicando y tirar una raya por la parte inferior decimos:

5 por 9 son 45, escribo 5 y llevo 4 decenas;
5 por 4 son 20 y 4 son 24, escribo 4 y llevo 2;
5 por 0 es cero y 2 del producto anterior son 2;
5 por 8 son 40: Luego el *producto total* será 40245.

26. 4.° Caso. *Para multiplicar dos números enteros de varias cifras, se multiplica todo el multiplicando por cada una de las cifras significativas del multiplicador, escribiendo los productos parciales unos debajo de otros, de modo que la primera de sus cifras ocupe el mismo lugar que la cifra correspondiente del multiplicador; y la suma de todos estos productos parciales será el producto total.*

El multiplicador se escribe debajo del multiplicando de modo que se correspondan las cifras de un mismo órden, tirando despues una raya por la parte inferior.

1627	multiplicando.
324	multiplicador.
6508	producto de 1627 por 4
32540	producto de 1627 por 2 con un cero á su derecha=1627×20
488100	producto de 1627 por 3 con dos ceros á su derecha=1627×300
527148	Producto total.

En la práctica se omiten los ceros de la derecha de los productos parciales y por eso se empieza á escribir cada uno debajo de la cifra respectiva del multiplicador.

120854	factores
1856	
725124	productos parciales
604270	
966832	
120854	
224305024	Producto total.

40907404
9478
327259232
286351828
163629616
368166636
387720375112

27. 5.º Caso. *Cuando uno ó ambos factores terminan en ceros, se abrevia la operacion prescindiendo de ellos y escribiéndolos en seguida á la derecha del producto total. Si entre los guarismos del multiplicador hay ceros, los productos parciales del multiplicando por los ceros del multiplicador serán todos ceros, por cuya razon no se multiplicará por ellos el multiplicando.*

1496	50840	4123400
700	1200	80090
1047200	10168	371106
	5084	329872
	61008000	330243106000

$$180008000 \times 7000900 = 1260218007200000 \quad (*)$$

28. Un producto indicado de varios factores quiere decir, que el producto de los dos primeros se ha de multiplicar por el factor siguiente, este producto por el otro factor, y asi sucesivamente. El producto de tres ó mas factores enteros no varia, aunque se altere el órden de los factores.

$$4 \times 5 \times 3 \times 8 = 20 \times 3 \times 8 = 60 \times 8 = 480$$

Duplo de un número es su producto por 2, *triplo* es su producto por 3, *cuádruplo* el producto por 4..... y en general *múltiplo* el producto de dicho número por otro cualquiera. Asi; el duplo de 12 es 24, el triplo es 36, y el cuádruplo es 48.

Ejercicios para la multiplicacion de los números abstractos.

29. Hallar los productos que resultan de multiplicar.....

1492 por 2	602×1000	904000×10400
15084 por 12	9048×9800	8612070×70890
50109 por 753	74900×5790	40907496×80911
410974 por 9768	60900×4900	753×602×1492×18080

Multiplicar 1 por 2, por 3, por 4 y así sucesivamente por 7, por 8 y por 9. (**)

(*) La multiplicacion de un número por 11 se abrevia, sumando dicho número consigo mismo, despues de añadir un cero á uno de los dos sumandos.

(**) Para hacer la *prueba* de la multiplicacion, se repite de nuevo tomando el multiplicador por multiplicando y este por multiplicador, y si el producto es el mismo, la operacion está bien hecha.

Aplicaciones de la multiplicacion de los números enteros.

30. En las aplicaciones de la multiplicacion se considera el multiplicador como un número abstracto, en cuyo caso el producto resulta de la especie del multiplicando.

Sentado esto, pasemos á resolver los siguientes problemas:

1.° *Averiguar el número de horas, que tiene una semana.*

Una semana tiene 7 dias, y teniendo cada dia 24 horas, habrá que sumar siete veces 24 horas ó bien multiplicar 24 horas por 7; luego el número, que se pide, será 168.

2.° *¿Cuántos pliegos tiene una resma de papel?*

Una resma tiene 20 manos de papel, y una mano tiene 25 pliegos; luego multiplicando 20 por 25, el producto 500 será el número de pliegos, que tiene una resma.

3.° *Un trabajador, que gana 10 reales diarios ¿cuánto ganará al cabo de una semana?*

En una semana ganará indudablemente siete veces mas que en un dia; luego multiplicando 10×7 el producto 70 reales será el salario semanal del trabajador.

4.° *¿Cuántos reales componen 496 napoleones?*

Un napoleon vale 19 reales, luego los 496 napoleones valdrán 496 veces mas; y por consiguiente multiplicando 19 por 496 el producto 9424 reales será el número que se busca.

5.° *¿Cuál seria la poblacion de España, si todas sus provincias tuvieran el mismo número de habitantes que el principado de Asturias?*

Asturias, ó sea la provincia de Oviedo, cuenta hoy 524288 habitantes, y como son 49 las provincias de España, multiplicando estos dos números, tendremos el número que se busca.

6.° *Si un empleado recibe mensualmente 1550 reales, y otro recibe 25 reales diarios, ¿cuál será el sueldo anual de los dos?*

Si el primero recibe 1550 reales cada mes, siendo 12 los meses del año, es evidente que multiplicando 1550 por 12, el producto 18600 reales será su sueldo anual.

Recibiendo el segundo 25 reales cada dia, recibirá en los 365, de que se compone el año, 365 por 25 ó sea 9125 reales.

Luego el sueldo anual de los dos juntos será 27725 reales.

Division de los números enteros.

31. *Dividir* un número entero por otro es hacer al primero tantas veces menor, como unidades tiene el segundo.

El número primero ó sea el que se divide se llama *dividendo*, el otro *divisor* y el resultado *cociente* (*).

El cociente multiplicado por el divisor debe ser igual al dividendo.

Llámase *division exacta* aquella, cuyo cociente es un número entero: el dividendo contiene entonces al divisor un número exacto de veces.

Division inexacta es aquella, cuyo cociente no es un número entero; en este caso, el dividendo no contiene al divisor un número exacto de veces.

En la division inexacta, el mayor número de veces que el dividendo contiene al divisor se llama *cociente entero*, y la diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por dicho cociente entero, se llama *resto*. El resto es siempre menor que el divisor.

En la division exacta, el dividendo es igual al producto del cociente por el divisor; en la division inexacta, el dividendo es igual al producto del cociente entero por el divisor, mas el resto.

Todo número dividido por 1 dá por cociente el mismo número. Todo número dividido por sí mismo dá por cociente 1. Cero dividido por cualquier número dá cero por cociente.

La division se indica escribiendo el dividendo sobre una raya horizontal y debajo el divisor ó separando este de aquel por dos puntos en esta forma:

El resultado se separa en uno y otro caso con el signo =

$$6:3=2 \qquad \frac{6}{2}=3$$

En la division de un número entero por otro, conviene distinguir los casos siguientes:

(*) Tambien se dice que dividir un número por otro es averiguar las veces que el dividendo contiene al divisor, ó las veces que este está contenido en aquel. Así pues, para hallar el *cociente* de dos números enteros se resta el divisor del dividendo todas las veces que sea posible, y este número de veces será el cociente.

32. 1.ʳ Caso. *Para dividir un número de una ó dos cifras por otro de una sola, siempre que esta sea mayor que la primera del dividendo, basta saber de memoria la tabla de multiplicar.*

Así el cociente de 8 entre 2 es 4 exactamente, puesto que el producto de 4 por 2 nos dá el dividendo 8.

Del mismo modo tendremos tambien.....

9 : 4 = 2 de cociente entero y 1 de resto.
34 : 6 = 5 de cociente entero y 4 de resto.
80 : 9 = 8 de cociente entero y 8 de resto.

De estos tres últimos ejemplos, y fundándonos en que el dividendo de toda division inexacta es igual al producto del cociente entero por el divisor, mas el resto, resulta.....

$9=4\times2+1 \qquad 34=6\times5+4 \quad \text{y} \quad 80=9\times8+8$

33. 2.º Caso. *Para dividir un número entero, que termina en ceros, por la unidad seguida de igual ó menor número de ellos, se suprimen de su derecha tantos ceros como tiene el divisor, y el resultado será el cociente.*

18540 : 10=1854   1040000 : 1000=1040

Para dividir un número entero cualquiera por la unidad seguida de ceros, se separan de su derecha tantas cifras como ceros tiene el divisor, y las cifras, que quedan á la izquierda, serán el *cociente entero* y las cifras separadas el *resto* de la division.

1857 : 100=18 cociente entero y 57 de resto.
1401098 : 1000=1401 cociente entero y 98 de resto.

34. 3.ʳ Caso. *Para dividir un número entero de varias cifras por otro de una sola, se dividen todas las del dividendo por el divisor, empezando por las del órden superior, para que de esta manera se añada á cada dividendo parcial el resíduo del anterior. El número formado por estos cocientes parciales será el cociente total.*

El primer cociente parcial se halla, dividiendo la cifra de órden superior del dividendo por el divisor, si fuere igual ó mayor que el divisor, ó las dos primeras en otro caso. Si un dividendo parcial es menor que el divisor, se escribe cero en el cociente, y el resto será todo el dividendo.

El valor absoluto de cada resto es siempre menor que el divisor.

Propongámonos hallar el cociente de 9063 por 3. Despues de escribir el divisor á la derecha del dividendo, y de tirar una raya entre los dos y otra debajo del divisor, diremos:

Dividendo	9063	3	divisor
		3021	cociente

9 millares entre 3 á 3 millares (se escribe 3 en el cociente)
0 centenas entre 3 á cero (se escribe 0 en el cociente)
6 decenas entre 3 á 2 decenas (se escribe 2 en el cociente)
3 unidades entre 3 á 1 unidad (se escribe 1 en el cociente)

Luego el cociente total será 3021 unidades.

Otro ejemplo:

Dividendo total	810015	5	divisor
2.º dividendo parcial	31	162003	cociente
3.º dividendo parcial	10		
4.º 5.º y 6.º	0015		
Resto	00		

8 entre 5 á 1 en el cociente, 1 por 5 es 5, al 8 van 3;
31 entre 5 á 6 en el cociente, 6 por 5 son 30, al 31 va 1;
10 entre 5 á 2 en el cociente, 2 por 5 son 10, al 10 va cero;
0 entre 5 á cero en el cociente;
11 entre 5 á cero tambien en el cociente;
15 entre 5 á 3 en el cociente, 3 por 5 son 15, al 15 va cero:

Luego el cociente total exacto será 162003 unidades.

Del mismo modo se hallan los cocientes respectivos en los ejemplos, que siguen:

100000	7 divisor		504001259	8 divisor	
30	14285 cociente		24	63000157 cociente	
20			00012		
60			45		
40			59		
5 (resto)			3 (resto)		

Tambien se dispone este caso de la division escribiendo el dividendo, el divisor y el cociente en un mismo renglon, y omitiendo además los restos y dividendos parciales, lo cual ofrece grandes ventajas en la práctica.

19472000 : 5 = 3894400 | 800019747 : 9 = 88891083

35. 4.° Caso. *Para dividir dos números enteros de varias cifras, se separan de la izquierda del dividendo tantas como tiene el divisor, ó una mas, si las primeras (consideradas como unidades simples) no contienen al divisor. Se dividen las cifras separadas ó sea el primer dividendo parcial por el divisor y tendremos la primera cifra del cociente. Se multiplica esta cifra por el divisor y se resta el producto del dividendo parcial. A la derecha del resíduo se escribe la cifra siguiente del dividendo y tendremos el segundo dividendo parcial, con el cual se ejecutará la misma operacion que con el anterior. El número formado por todos estos cocientes parciales será el cociente total.*

Propongámonos hallar el cociente entre 32481 y 12, en cuyo caso dispondremos la operacion como sigue:

Dividendo total	32481	12	divisor
prod. de la 1.ª cifra del cociente por el divisor	24	2706	cociente
2.° dividendo	8481		
prod. de la 2.ª cifra del cociente por el divisor	84		
3.° y 4.° dividendos	081		
prod. de la 4.ª cifra del cociente por el divisor	72		
Resto final	9		

En todo el curso de la division se ha de verificar que, cada cifra del cociente por todo el divisor ha de ser igual ó menor que el respectivo dividendo parcial, y además que el resíduo correspondiente á cada uno de estos dividendos parciales debe ser menor que el divisor.

Esto supuesto, despues de separar las dos primeras cifras de la derecha del dividendo con un punto, una coma, ú otra señal cualquiera, diremos:

3 entre 1 á 3 en el cociente, que aun no se escribe hasta saber, si su producto por el divisor es igual ó menor que el dividendo parcial 32.

3 (cociente) por 12 (divisor) son 36, que por ser mayor que 32 indica, que la cifra 3 del cociente es *mayor* que la verdadera.

Veamos la cifra 2:

2 (cociente) por 12 (divisor) son 24, que, por ser menor que el dividendo, indica que 2 es la cifra de órden superior del cociente.

Para hallar la 2.ª cifra del cociente, multiplicaremos la anterior 2 por el divisor 12 y, restando el producto 24 millares del dividendo total, el resíduo 8481 será el nuevo dividendo. Separando, pues, de su derecha las dos primeras cifras, diremos.....

8 entre 1 á 8; pero $8\times12=96$, que es mayor que 84
luego la cifra 8 no es buena:

7 entre 1 á 7 y como $7\times12=84$ es igual al dividendo,
tendremos que la cifra 7 será buena.

Para hallar la 3.ª cifra del cociente, multiplicaremos las centenas 7 por el divisor 12 y restando el producto 84 centenas del dividendo 8481, el resto 81 será el siguiente dividendo.

Para hallar las cifras restantes, diremos.....

8 entre 12 á cero (cero en el cociente)
teniendo ahora por nuevo dividendo el número 891.

8 entre 1 á 8; pero $8\times12=96$, luego la cifra 8 no es buena
8 entre 1 á 7; pero $7\times12=84$, luego la cifra 7 no es buena
8 entre 1 á 6 y como $6\times12=72$, la cifra 6 será buena:

luego 6 será la cuarta y última cifra del cociente total de los números dados.

Para hallar el resto final 9, se resta del último dividendo 81 el producto 6×12.

36. Como en cada dividendo parcial no se tienen en cuenta las cifras del órden inferior á la que se trata de determinar en el cociente, se abrevia la operacion, no escribiendo á la derecha de los resíduos parciales mas que la cifra correspondiente del dividendo total.

58725	85		564094	94
510	690 cociente		564	6001 cociente
772			0094	
765			94	
75 resto			resto 00	

37. La multiplicacion de cada cifra del cociente por el divisor y la sustraccion del dividendo parcial respectivo se pueden hacer á un mismo tiempo.

Propongámonos hallar el cociente de 326463 por 682.

Dividendo	326463	682	
2.° dividendo parcial	5366	478	cociente entero
3.°	5923		
resto	467		

Dispuesta la operacion como en los casos anteriores, diremos para la cifra 4 del cociente:

4 por 2 son 8 al 14 van 6 y llevamos 1;
4 por 8 son 32 y 1, son 33, al 36 van 3 y llevamos 3;
4 por 6 son 24 y 3, son 27, al 32 van 5;

Luego el resto correspondiente á esta primera cifra del cociente será 536.

Escribiendo ahora á la derecha de este resto la cifra siguiente del dividendo, resultará el segundo dividendo parcial, cuyo resto se obtiene como el anterior, diciendo:

7 por 2 son 14 al 16 van 2 y llevamos 1;
7 por 8 son 56 y 1, son 57, al 66 van 9 y llevamos 6;
7 por 6 son 42 y 6, son 48, al 53 van 5; luego el resto será 592.

Del mismo modo, se halla el resto final 467.

38. Sin efectuar la multiplicacion de la cifra del cociente por todo el divisor, se puede averiguar, si dicha cifra es ó no mayor que la verdadera, con solo empezar la multiplicacion por las unidades de órden superior del divisor.

Dividendo	1946215	348	
	2062	5592	cociente
	3221		
	0895		
resto final	199		

Comprobacion ó tanteo de la cifra 6 al hallar la primera del cociente anterior:

6 por 3 son 18 á 19 va 1, que unida al 4 hacen 14,
6 por 4 son 24 al 14 no puede ser; luego la cifra 6 no es buena.

Comprobacion de la cifra 5;

5 por 3 son 15 al 19 van 4, que con el 4 componen 44,
5 por 4 son 20 al 44 van 24, que con el 6 componen 246;
5 por 8 son 40 al 246 van 206. Luego la cifra 5 es buena.

Lo mismo se pueden comprobar las cifras restantes.

Cuando, siguiendo este método de comprobacion, se halla un resíduo parcial igual ó mayor que la cifra tomada por cociente, esta cifra no es mayor que la verdadera (*).

Dividendo total	326463	682	divisor
2.º dividendo parcial	5366		
3.º	5923	478	cociente entero
resto final	467		

Comprobacion de la cifra 5 del cociente:
5 por 6 son 30 al 32 van 2, que con el 6 hacen 26,
y como 5 por 8 son 40; la cifra 5 no es buena.
Veamos la cifra 4:
4×6 son 24 al 22 van 8, que es mayor que la cifra que se tantea, luego 4 será el cociente.

Ahora se continúa la division como en los casos anteriores.

Ultimamente la comprobacion de las cifras del cociente se hace de memoria sin escribir mas resíduos parciales que los correspondientes á las cifras verdaderas. El tanteo debe continuarse hasta llegar á una sustraccion imposible, ó bien á un resíduo igual ó mayor que la cifra, que se tantea, en el primer caso el cociente será mayor que el verdadero y en el segundo será el verdadero.

30. 5.º Caso. *Si el dividendo y divisor terminan en ceros, se puede suprimir de ambos igual número de ellos, sin que el cociente varie, cuidando, sin embargo, de añadir á la derecha del resto* (si la division es inexacta) *tantos ceros como se hayan suprimido en el dividendo ó en el divisor.*

Para hallar el cociente de 1492000 por 9000, basta dividir 1492 por 9 y el cociente 166 de estos números será el de los números dados.

Además, siendo 4 el resto de 1492 por 9, el resto de la division propuesta será 4000.

En el caso de que solo el divisor termine en ceros, se pue-

(*) El caso menos favorable se verifica, cuando las cifras siguientes del dividendo son ceros, y nueves las del divisor, por ejemplo en la division de 2500 por 499.

En este ejemplo, al comprobar la cifra 5 del cociente, resulta
5 por 4 son 20 al 25, sobran 5, que con el cero hacen 50,
5 por 9 son 45 al 50 van 5, que con el cero siguiente hace 50, etc.

de simplificar la operacion separando dichos ceros é igual número de cifras de la derecha del dividendo, dividiendo luego los números, que queden, y escribiendo á la derecha del resto las cifras separadas en el dividendo.

Para hallar el cociente de 170854 por 800, dividiremos 1708 por 8, cuyo cociente es 213 y 4 el resto; luego el cociente y el resto de los números dados serán respectivamente 213 y 454.

Hallar el cociente de 135074914 por 412000

135074(914	412(000
1147	327 cociente entero.
3134	
Resto final. . . 250914	

40. Un número es *divisible* por otro, cuando el primero contiene al segundo un número exacto de veces. El número segundo se llama *divisor*, *factor*, *submúltiplo ó parte alícuota* del primero.

El cociente exacto de un número por 2, 3, 4, 10, 100 ó 1000 se llama *mitad*, *tercera*, *cuarta*, *décima*, *centésima* ó *milésima* parte de dicho número.

Para dividir un número entero por otro y despues por otro, etc., se dividen los dos primeros, y el cociente de estos se divide por el tercero y así sucesivamente hasta dividir por el último divisor. O bien se divide el primero por el producto de todos los divisores.

Dividir el número 360 por 2, 3, 4 y 5.

360 : 2=180; 180 : 3=60; 60 : 4=15; 15 : 5=3

Luego el cociente final es 3, que se puede hallar tambien dividiendo 360 por el producto $2 \times 3 \times 4 \times 5$ ó sea 120.

Ejercicios para la division de los números abstractos.

41. Hallar los cocientes que resultan de dividir

11936 por 8	18000 : 100	18410024 : 1080
181008 por 12	19417 : 100	49009014 : 7906
37732077 por 753	574800 : 900	99149000 : 13090
4014394032 por 9768	6091194 : 4800	16034180 : 76699

Dividir 362880 por 1, y el cociente por 2, y el cociente de esta division por 3, y así sucesivamente por 4, por 5, por 6, por 7, por 8 y por 9.

Aplicaciones de la division de los números enteros.

42. Cuando el dividendo y el divisor son de una misma especie, el cociente será un número abstracto, que expresa las veces que el dividendo contiene al divisor.

Cuando el dividendo y divisor son de diferente especie, el divisor se considera como abstracto y el cociente, que resulta, es de la especie del dividendo.

El problema, que generalmente se resuelve en este caso, es averiguar el valor de la unidad de un número, conocido el valor de dicho número. El resultado se halla, dividiendo el valor conocido del número por el mismo número.

Esto supuesto, propongámonos resolver los problemas siguientes:

1.° *Siendo medio millon de reales la herencia de ocho hermanos, hallar lo que corresponde á cada uno, en el supuesto de llevar todos partes iguales.*

Cada uno de los hermanos llevará la octava parte de la herencia total, y por consiguiente, dividiendo medio millon de reales ó sean 500000 reales por 8, el cociente 62500 reales expresará lo que corresponde á cada uno de los ocho hermanos.

2.° *Un viajero tiene que recorrer 840 leguas en veinte dias, ¿cuántas leguas andará cada dia?*

Veinte veces las leguas que ande cada dia deben componer 840, luego, dividiendo este número por 20, el cociente 42 será el número de leguas, que se pide.

3.° *Hallar el número de pliegos, que tiene un libro de 500 páginas, suponiendo cada pliego de 16 páginas.*

El libro tendrá tantos pliegos cuantas veces el número 16 esté contenido en 500; dividiendo pues 500 por 16, el cociente entero 31 marcará el número de pliegos del libro y el resto 4 las páginas sobrantes.

4.° *El empleado, que perciba al fin del año 40000 rs. de sueldo, ¿cuánto recibirá mensualmente?*

Recibirá doce veces menos, y por consiguiente dividiendo 40000 rs. por 12, el cociente 3333 rs. será el sueldo mensual, con mas la parte que pudiera corresponderle de 4 rs. distribuidos en los doce meses del año.

5.° *¿Cuál seria la poblacion de cada provincia de España si todas tuvieran igual número de habitantes?*

Dividiendo 15518516 habitantes, que es la poblacion de la Península é Islas adyacentes, por 49, que es el número de provincias, el cociente nos daria la poblacion de cada una.

6.° *¿Cuántos napoleones son 34354 reales?*

Supuesto que 19 reales componen un napoleon, es evidente que el número 34354 reales compondrá tantos napoleones como veces contenga á 19: y como el cociente entero de estos números es 1808 y 2 el resto; resulta que 34354 reales son lo mismo que 1808 napoleones y 2 reales.

7.° *¿Cuántas veces el rádio de la tierra es mayor que la montaña mas elevada?*

Siendo el rádio de la tierra igual á 6366200 metros y la altura de la montaña mas elevada ó sea el pico llamado Himalaya, en el Asia, igual á 7821, el cociente de estos números nos dará la incógnita de este problema.

8.° *¿Cuántas leguas recorre la luz en un segundo, sabiendo que tarda 8 minutos y 13 segundos en llegar desde el Sol á la tierra?*

Siendo la distancia del Sol á la tierra igual á 27680000 leguas, el número pedido se hallará dividiendo ó partiendo esta distancia entre los segundos, que emplea la luz en recorrerla, es decir, entre 493.

9.° *¿Cuánto tiempo emplearia una bala de cañon en llegar desde la tierra á la Luna y desde la tierra al Sol, suponiendo que recorre 180 leguas en una hora?*

Desde la tierra á la Luna hay 67000 leguas y desde la tierra al Sol 27680000; luego, si dividimos estos dos números por 180, los cocientes respectivos señalarán las horas, que se piden en uno y otro caso.

10.° *Debiendo repartirse entre cuatro personas un capital de medio millon de reales, se desea averiguar lo que corresponde á cada uno*, en el supuesto de percibir la primera, la mitad del capital, la segunda la quinta parte, la tercera una décima, y la cuarta el resto, despues de rebajar mil reales.

Las incógnitas de este problema son los cuatro números 250000 reales; 100000 reales; 50000 reales; y 144000 reales.

MEDIDAS, PESAS Y MONEDAS ESPAÑOLAS.

Medidas, pesas y monedas legales de Castilla
hasta el 1.° de enero de 1860.

Sistema métrico-decimal de medidas, pesas y monedas españolas
desde el 1.° de enero de 1860.

43. Los objetos, se consideran no solo bajo el punto de vista del mayor ó menor *número* de ellos, sino que tambien debe atenderse en determinados casos á su extension, á su precio ó valor comercial, á su peso, etc. cosas todas, que pueden ser mayores ó menores y que debemos determinar exactamente, si deseamos tener una idea precisa de los objetos, que nos proponemos conocer.

Cantidad es todo lo que puede ser mayor ó menor. Tal es la extension, y por consiguiente la longitud y la superficie de los cuerpos, el peso y el precio de las cosas, el tiempo, etc.

Medir una cantidad es averiguar las veçes que contiene ó que está contenida en otra de la misma especie, que toma el nombre de *unidad.*

Los números sirven para expresar la medida de las cantidades, y pueden ser *enteros* ó *quebrados* (llamados tambien *fraccionarios*) segun expresen unidades completas ó partes de la unidad.

Suponiendo la unidad un dia, son *números enteros* dos, tres, cuatro ó cien dias; y medio dia, dos tercios de dia, tres cuartos de dia etc., lo son *quebrados.*

Número misto es la reunion de un entero y un quebrado; por ejemplo, ocho naranjas y media, diez horas y cuarto, etc.

Una misma cantidad puede representarse por diferentes números, segun la cantidad, que se tome por término de comparacion. Así decimos cuatro duros ú 80 reales, para expresar una misma cantidad de dinero; dos dias ó 24 horas, para expresar otra de tiempo, etc., etc.

Debemos por consiguiente tener una idea exacta de las diferentes unidades de medidas, para apreciar con exactitud el valor de las cantidades de su misma especie. Estas unidades prescritas por las leyes constituyen los sistemas legales de pesas, medidas y monedas de cada nacion.

MEDIDAS, PESAS Y MONEDAS DE CASTILLA

segun la Pragmática de 7 de Febrero de 1808.

Medidas de longitud.

44. La unidad usual, para apreciar las longitudes ó distancias desde un punto á otro, es la *vara* de Burgos, que se divide en 3 piés, el *pié* en 12 pulgadas y la *pulgada* en 12 líneas.

La vara se divide tambien en tres *tercias* y en cuatro *cuartas*, llamadas *palmos*.

La *legua* tiene 3 millas ó 20000 piés, ó bien 6666 varas y dos tercias. El *estadal* tiene 4 varas ó 12 pies.

Medidas de capacidad.

45. PARA LÍQUIDOS. La unidad usual es la *cántara* de Toledo, que se divide en ocho azumbres, el *azumbre* en cuatro cuartillos y el *cuartillo* en dos copas. El *moyo* tiene 16 cántaras.

PARA ÁRIDOS. La unidad usual es la *fanega* de Avila. Se divide en 12 celemines, y el *celemin* en 4 cuartillos.

El *cahiz* tiene 12 fanegas.

PARA EL ACEITE. La unidad usual es la *arroba*, que se divide en 25 libras, y la *libra* en 4 panillas ó cuarterones.

Medidas de peso.

46. COMERCIALES. La unidad usual es el *quintal*, que se divide en 4 arrobas, la *arroba* en 25 libras, la *libra* en 16 onzas, la *onza* en 16 adarmes, el *adarme* en 3 tomines, y el *tomin* en 12 granos. La *tonelada* de peso tiene 20 quintales.

MEDICINALES. El *marco* tiene 8 onzas, la *onza* 8 dracmas, la *dracma* 3 escrúpulos, y el *escrúpulo* 24 granos.

PARA EL ORO Y LA PLATA. El *marco* tiene 8 onzas, la *onza* 8 ochavas, la *ochava* 6 tomines, y el *tomin* 12 granos.

Medidas de superficie y agrarias.

47. SUPERFICIALES. La unidad usual es la *vara cuadrada*, ó sea un cuadrado, que tiene por lado una vara (*). La vara cuadrada tiene 9 piés cuadrados, y el *pié cuadrado* contiene 144 pulgadas cuadradas.

(*) Llámase *cuadrado* á una figura terminada por cuatro rectas iguales y cuyos ángulos son tambien iguales.

El número de cuadrados menores, que contiene otro mayor, es igual al número de veces que el lado del cuadrado mayor contiene al del menor, multiplicado por sí mismo.

Se usan tambien el *estadal cuadrado* y la *milla* y la *legua cuadradas*, que son cuadrados, que tienen por lado respectivamente un estadal, una milla ó una legua.

AGRARIAS. La unidad usual es la *fanega de marco real* ó sea un cuadrado, cuyo lado es de 96 varas. Tiene 9216 varas cuadradas ó 576 estadales cuadrados, y se divide en 12 celemines superficiales y el *celemin* en cuatro cuartillos.

La *aranzada* es un cuadrado, que tiene 20 estadales de lado, 400 estadales cuadrados, ó bien 6400 varas cuadradas.

Medidas de volúmen.

48. La unidad usual es la *vara cúbica* ó sea un cubo, cuyo lado ó arista es una vara (*). Se divide en 27 piés cúbicos, y el *pié cúbico* en 1728 pulgadas cúbicas.

Monedas.

49. ORO. La *onza de oro* tiene 16 duros, la *media onza* 8 duros, el *doblon* ú *ochentin* 4 duros, el *escudo de oro* 2 duros, y el *escudito de oro* 1 duro. El escudito de premio ó antiguo (anterior á 1786) vale 21 reales y cuartillo.

PLATA. El *peso fuerte, peso duro*, ó simplemente *peso* ó *duro*, tiene 20 reales, el *medio duro* 10 reales, la peseta 4 reales, la *media peseta* 2 reales. El *real*, que es la unidad usual, vale 8 cuartos y medio ó 34 maravedises.

La *peseta columnaria* vale 5 reales, la *media peseta columnaria* 2 reales y medio, y el *real columnario* 1 real y cuartillo.

COBRE. La *pieza de dos cuartos* vale 8 maravedis, el *cuarto* 4 maravedis, el *ochavo* 2 maravedis. El *maravedí*, moneda imaginaria, es la unidad usual, para expresar menos de un real.

Medidas de tiempo.

50. El *siglo* tiene 100 años, el *año* 12 meses ó 365 dias, si es comun, ó 366, si es bisiesto, el *dia* 24 horas, la *hora* 60 minutos, el *minuto* 60 segundos, etc.

El *mes* tiene 28, 29, 30 ó 31 dias (**).

(*) Llámase *cubo* el espacio cerrado por seis cuadrados iguales. Los lados de estos cuadrados son los lados ó aristas del cubo. El número de cubos menores, que contiene otro mayor, es igual al producto de tres factores, iguales al número de veces que el lado menor está contenido en el mayor.

(**) Un *lustro* equivale á 5 años y una *olimpiada* á 4.

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

de medidas y pesas españolas, segun la Ley de 14 de junio de 1849.

Sistema monetario, segun el Decreto de 15 de abril de 1847.

51. El sistema métrico decimal de pesas y medidas tiene la ventaja inapreciable de fijar exactamente todas sus unidades, relativamente á la fundamental, que es el *metro*, verificándose además que estas mismas unidades son siempre 10, 100, 1000, 10000, etc., veces mayores ó menores unas respecto de otras.

Para expresar una medida *diez*, *ciento*, *mil* ó *diez mil* veces mayor que la unidad usual, se anteponen al nombre de esta las voces griegas *deca*, que significa 10, *hecto* que significa 100, *kilo* que significa 1000 y *miria* que significa 10000.

Así, mil metros se expresará diciendo un *kilómetro*, y diez mil metros serán lo mismo que un *miriámetro*.

Para expresar una medida *diez*, *ciento* ó *mil* veces menor que la unidad usual, se antepondrán al nombre de estas las voces latinas *deci*, que significa décima parte, *centi* ó centésima parte, *mili* ó milésima parte.

Asi, dividiendo un metro en mil partes, una de estas se expresará diciendo un *milímetro*.

Medidas de longitud.

52. La unidad usual es el *metro* (*) que se divide en 10 *decímetros*, en 100 *centímetros* ó en 1000 *milímetros*.

Las unidades superiores son el *decámetro* ó 10 metros, el *hectómetro* ó 100 metros, el *kilómetro* ó 1000 metros y el *miriámetro* ó 10000 metros.

El *metro* reemplazará á la vara y al pié, y el *kilómetro* á la legua.

Las equivalencias aproximadas de estas unidades son

5 metros hacen 6 varas.	50 kilómetros hacen 9 leguas.

(*) O sea la diez millonésima parte del cuadrante del meridiano, que pasa por Paris. El metro tiene 1 vara, 7 pulgadas y una línea, ó sea poco mas de 3 piés y medio.

La palabra *metro* se deriva de *metpon* palabra griega que significa *medida*.

Medidas de capacidad.

53. La unidad usual es el *litro*, que se divide en 10 decílitros ó en 100 centílitros.

Las unidades superiores son el *decálitro* ó 10 litros y el *hectólitro* ó 100 litros.

El *litro* reemplazará al cuartillo de líquido, el *decálitro* al azumbre y el *hectólitro* á la fanega de áridos.

Las equivalencias aproximadas de estas unidades son:

1 litro de líquido vale tanto como 2 cuartillos.
1 libra de aceite tanto como 2 libras castellanas.
5 hectólitros de grano lo mismo que 9 fanegas.

Medidas de peso.

54. La unidad usual es el *kilógramo*, que se divide en 10 *hectógramos*, en 100 decágramos ó en 1000 gramos.

Las unidades superiores son el *quintal métrico*, que tiene 100 kilógramos y la tonelada de peso, que tiene 1000 kilógramos, ó sea un millon de gramos.

El *kilógramo* reemplazará á la libra, y el *quintal métrico* y la *tonelada* al quintal y tonelada antiguos.

Las equivalencias aproximadas son:

1 kilógramo es 2 libras ó mejor 46 kilógramos son 100 libras.
46 quintales métricos equivalen á 100 de los antiguos.
92 toneladas métricas son lo mismo que 100 antiguas.

Medidas de superficie y agrarias.

55. Las unidades usuales son el *metro cuadrado*, el *área* y la *hecto-área* ó *hectárea*.

El *metro cuadrado* es un cuadrado, que tiene de lado 10 metros: se divide en 100 decímetros cuadrados.

El *área* es un cuadrado, que tiene de lado 10 metros: consta por lo tanto de 100 metros cuadrados.

La *hecto-área* es un cuadrado, que tiene de lado 100 metros: consta de 100 áreas ó 10000 metros cuadrados.

El *metro cuadrado* remplazará á la vara cuadrada y la *hectárea* á la fanega de tierra.

Sus equivalencias aproximadas son:

7 metros cuadrados hacen 10 varas cuadradas.
9 hectáreas equivalen á 14 fanegas de tierra.

Medidas cubicas.

56. La unidad usual es el *metro cúbico*, que se divide en 1000 *decímetros cúbicos* ó en 1000000 de *centímetros cúbicos.*

1 metro cúbico equivale á 46 piés cúbicos.

Sistema monetario.

57. La unidad usual es el *real de plata*, que se divide en 10 décimas.

Las unidades superiores son el *escudo de plata* ó medio duro, que vale 10 reales y el *doblon-Isabel* ó *centen* de oro, que vale 100 reales.

Además, para facilitar los cambios, hay las monedas de plata siguientes: el *doble escudo* ó peso, que vale 20 reales, la *peseta* 4 reales y la *media peseta*, que vale 2 reales.

Las de cobre, además de la *décima*, son el *medio real* ó 5 décimas, y el *cuartillo de real* ó 25 centésimas.

El real nuevo reemplaza al antiguo con el mismo valor.

El órden de contabilidad, segun el nuevo sistema, será el siguiente: Doblones de Isabel, escudos, reales y décimas.

Observaciones generales.

58. Las relaciones aproximadas, que hemos indicado al final de cada clase de medidas, basta en la generalidad de los casos, para hacer la reduccion de un número cualquiera de unidades de un sistema á sus correspondientes en el otro, segun veremos mas adelante.

Para mayor exactitud, debe hacerse uso de las equivalencias oficiales, que van al final de este tratado.

El patron del metro, hecho de platina, que se guarda en el Real Instituto Industrial, y que fué calculado por D. Gabriel Ciscar y D. Agustin Pedrayes, es el patron prototipo y legal, y con arreglo á él deben ajustarse todos los del Reino.

La ley autoriza el uso de patrones, que sean el doble, la mitad ó el cuarto de las unidades legales.

Ultimamente los nuevos tipos ó patrones deben llevar grabado su nombre respectivo (*).

(*) Las unidades superiores á la usual se expresan con la letra mayúscula correspondiente, antepuesta á la minúscula, que expresa dicha unidad usual; así miriámetro se escribe Mm, kilógramo Kg. y decálitro Dl. etc.

NUMEROS QUEBRADOS O FRACCIONARIOS

ORDINARIOS Y DECIMALES.

QUEBRADOS ORDINARIOS (*).

Numeracion, adicion, sustraccion, multiplicacion y division.

Numeracion y sus consecuencias.

59. Se llama *unidad fraccionaria* á cada una de las partes iguales, en que se puede considerar dividida la unidad entera.

Si una unidad se divide en dos partes iguales, estas partes se llaman *medios* ó *mitades*, si se divide en tres partes iguales, estas se llaman *tercios*, si se divide en cuatro, *cuartos*, si en cinco, *quintos*, si en seis, *sestos*, y así sucesivamente, *séptimos*, *octavos*, *novenos*, *décimos*, *once-avos*, *doce-avos*, *trece-avos*, *veinte-avos*, *cien-avos*, etc., segun que la unidad se divida en 7, 8, 9, 10, 11, 12, 20, 100, etc., partes iguales.

Número fraccionario es la reunion de dos ó mas unidades fraccionarias. Asi un tercio, dos quintos y ocho cien-avos son quebrados ó números fraccionarios.

Numerador del número fraccionario es el número entero, que indica las partes, que se toman de la unidad, y *denominador* el número, que indica las partes iguales, en que esta se considera dividida. El numerador y denominador juntos se llaman *términos* del número fraccionario.

60. *Para enunciar un número fraccionario, se pronuncia el numerador como si fuera entero, añadiendo luego la denominacion respectiva ó sea la especie de la unidad fraccionaria á que se refiere.*

Dividida la unidad en ocho partes iguales, cinco de estas partes formarán un número fraccionario, que se enunciará así: 5 *octavos*. Siete de las mismas partes se leerán 7 *octavos*, etc.

(*) Cuando se dice simplemente números *fraccionarios* ó números *quebrados*, se sobreentienden ordinarios.

61. *Para escribir los números fraccionarios se escribe el numerador sobre una raya horizontal y debajo el denominador.*

Dos *tercios* y once *veinte-avos* se escriben así $\frac{2}{3}$ y $\frac{11}{20}$

Tambien se escribe el numerador y á su continuacion el denominador, separándolos por una raya oblícua ó inclinada en esta forma $^2/_3$ y $^4/_9$ etc.

La reunion de un entero y un fraccionario se llama *número misto*. Asi, doce y un tercio; tres y ocho quince avos son *números mistos*.

62. Los números fraccionarios, cuyo numerador es menor que su denominador, valen menos que la unidad (*). Si el numerador es igual al denominador, valen una unidad. Si el numerador es mayor que el denominador, valen mas que la unidad.

Así tendremos $1=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}=\frac{5}{5}=\frac{6}{6}=\frac{10}{10}=\frac{100}{100}$

Ordinariamente se llaman *fracciones ó quebrados propios* á los números fraccionarios menores que la unidad entera y *quebrados impropios* á los mayores que dicha unidad.

63. *El cociente completo ó total de dos números enteros se halla, añadiendo al cociente entero una fraccion, cuyo numerador sea el resto de la division y su denominador el divisor.*

El cociente total de 14 por 3, será $4+\frac{2}{3}$

Todo número fraccionario mayor que la unidad es igual al cociente total del numerador por el denominador.

Así los números fraccionarios $\frac{14}{5}$ $\frac{40}{7}$ $\frac{61}{12}$ y $\frac{100}{25}$ equivalen el primero á $2\frac{4}{5}$, el segundo á $5\frac{5}{7}$, el tercero á $5\frac{1}{12}$ y el cuarto á 4 unidades justas.

A todo número entero se le puede dar la forma fraccionaria poniéndole por denominador la unidad.

El entero 4 es lo mismo que $\frac{4}{1}$, y tambien $10=\frac{10}{1}$

Un entero se reduce á fraccionario de un denominador dado, poniendo por numerador de este su producto por el entero.

(*) Cuando se dice simplemente *unidad*, se sobreentiende la unidad entera.

Siendo una unidad igual á $\frac{5}{5}$, dos unidades serán $\frac{10}{5}$, tres unidades serán $\frac{15}{5}$, cuatro unidades serán $\frac{20}{5}$ y así sucesivamente; luego tendremos...

$$8=\frac{8\times 5}{5},\quad 10=\frac{10\times 12}{12},\quad 12=\frac{12\times 20}{20}$$

64. *Si aumenta ó disminuye el numerador de un número fraccionario, aumentará ó disminuirá el número fraccionario, y por consiguiente, si dos ó mas números fraccionarios tienen un mismo denominador, es mayor el que tenga mayor numerador.*

Así tendremos que $\frac{5}{8}$ es mayor que $\frac{4}{8}$; puesto que siendo iguales las unidades, á que ambos se refieren, el primero contiene cinco de estas y el segundo solo cuatro.

Si aumenta ó disminuye el denominador de un número fraccionario, disminuirá ó aumentará el número fraccionario, y, por consiguiente, si dos ó mas números fraccionarios tienen un mismo numerador, es mayor el que tenga menor denominador (*).

Sean por ejemplo los quebrados $\frac{3}{5}$ y $\frac{3}{8}$ Dividida la unidad en 5 partes iguales y dividida despues en 8, cada una de las primeras será mayor que cada una de las segundas, y por consiguiente 3 de aquellas valen mas que 3 de estas; luego el quebrado $\frac{3}{5}$ será mayor que $\frac{3}{8}$ y este mayor que $\frac{3}{9}$, etc.

Un número fraccionario no varía aunque se multipliquen el numerador y denominador por un mismo número entero cualquiera, ó se dividan el uno y el otro por un divisor comun á ambos.

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{6}{12}=\frac{600}{1200}\qquad\qquad \frac{60}{180}=\frac{6}{18}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

En el primer caso se han multiplicado los dos términos del primer quebrado por 2, los del segundo por 3, y los del tercero por 100.

En el 2.° caso se han dividido los dos términos del primer quebrado por 10, los del segundo por 2 y los del tercero por 3.

(*) Si añadimos ó restamos de los dos términos de una fraccion un mismo número entero, la fraccion, que resulta, es mayor en el primer caso y menor en el segundo que la fraccion primitiva. Lo contrario se verifica, si la fraccion es impropia ó mayor que la unidad.

65. *Simplificar un número fraccionario es transformarle en otro equivalente, pero cuyos términos sean menores.* Un número fraccionario se llama *irreducible*, cuando no se puede expresar exactamente por otro fraccionario, de términos menores.

Para simplificar un número fraccionario, cuyos dos términos tienen un divisor comun, se dividen su numerador y denominador por este divisor (*).

$$\frac{30}{42}=\frac{15}{21}=\frac{5}{7} \qquad \frac{1050}{11550}=\frac{105}{1155}=\frac{21}{231}=\frac{7}{77}=\frac{1}{11}$$

En el primer ejemplo, dividiendo los dos términos por 2, resulta el nuevo fraccionario $\frac{15}{21}$, y dividiendo los dos términos de este por 3, tendremos el fraccionario irreducible $\frac{5}{7}$ equivalente al quebrado propuesto.

Del mismo modo en el segundo ejemplo, se dividen los dos términos del quebrado propuesto por 10, los del segundo por 5, los del tercero por 3 y los del cuarto por 7.

Otros ejemplos: La simplificacion de los quebrados

$$\frac{12}{84} \quad \frac{60}{210} \quad \frac{1050}{2310} \quad \frac{9900}{11550} \quad \frac{437}{391} \quad \frac{29}{9889}$$

puede servir de ejercicio á los niños teniendo presente que, despues de simplificados, resultan respectivamente iguales á

$$\frac{1}{7} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{5}{11} \quad \frac{6}{7} \quad \frac{19}{17} \quad \frac{1}{341}$$

En los dos últimos ejemplos se debe hallar el máximo comun divisor del numerador y denominador (**).

(*) Un número entero es divisible por 10, 100, 1000, etc., cuando termina en uno, dos, tres, etc., ceros.

140, 500, 230, 1850 son divisibles por 10; 12500, 5000 son divisibles por 100.

Un número entero es divisible por 2 cuando la cifra de las unidades es 0, 2, 4, 6 ú 8; y es divisible por 5 cuando la misma cifra de las unidades es 0 ó 5.

1850, 258, 109994 son divisibles por 2; 1850, 105, 3330 son divisibles por 5.

Llámase número *par* el número divisible por 2, é *impar* el número, que no es divisible por 2. Las cifras pares son 2, 4, 6 y 8.

Un número entero es divisible por 3 ó por 9 cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras es divisible por 3 ó por 9.

1002, 3012, 802911, son divisibles por 3; 3006, 9810, 421911 son divisibles por 9.

El número, que no tiene otros factores ó divisores que el mismo y la unidad, se llama *número primo*. Tales son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, etc.

(**) Para hallar el máximo comun divisor de dos números, se divide el mayor por el menor, el menor por el resto, el primer resto por el segundo, etc., hasta hallar un resto cero, en cuyo caso el último divisor es el número que se busca.

66. *Para reducir dos ó mas números fraccionarios de diferentes denominadores á otros de igual valor y de un mismo denominador, se multiplicán los dos términos de cada uno por el producto de los denominadores de los demás.*

Sean los números dados $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{4}$

Multiplicando los dos términos del primero por 4, que es el denominador del segundo, y los dos términos de este por 3, que es el denominador del primero, tendremos que...

el quebrado $\frac{2}{3}$ será equivalente á $\frac{8}{12}$

y el quebrado $\frac{5}{4}$ lo será tambien á $\frac{15}{12}$

y como estos últimos tienen un mismo denominador, quedará resuelto el problema, es decir, reducidos los quebrados dados á otros de igual valor y de un mismo denominador.

Otros ejemplos:

$\frac{2}{7}, \frac{4}{3}, \frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{2}{7}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$
$\frac{60}{210}, \frac{280}{210}, \frac{21}{210}$	$\frac{35}{70}, \frac{14}{70}, \frac{20}{70}$	$\frac{60}{120}, \frac{40}{120}, \frac{30}{120}, \frac{24}{120}$

Reducir á un comun denominador los quebrados siguientes.....

$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{7}{11}$	$\frac{5}{2}, \frac{11}{6}, \frac{1}{18}$	$\frac{2}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{14}, \frac{5}{3}$

En algunos casos tambien se pueden reducir los números fraccionarios á un mismo denominador, despues de simplificados, multiplicando sus dos términos por un número tal que reduzca todos los denominadores á uno comun y el menor posible.

Sean por ejemplo $\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{7}{20}$

Multiplicando los dos términos del primero por 10, los del segundo por 4 y los del tercero por 5, y copiando el último, tendremos los números fraccionarios

$$\frac{10}{20}, \frac{16}{20}, \frac{15}{20}, \frac{7}{20}$$

respectivamente iguales á los propuestos.

Adicion de los números fraccionarios.

67. *Para sumar números quebrados ó fraccionarios, se reducen á un mismo denominador, se suman los numeradores, y á la suma se pone por denominador el denominador comun.*

$$\frac{4}{9}+\frac{3}{9}=\frac{7}{9} \qquad \frac{6}{11}+\frac{2}{11}+\frac{3}{11}=\frac{11}{11}=1$$

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{8}{12}+\frac{3}{12}=\frac{11}{12}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{4}=\frac{20}{40}+\frac{16}{40}+\frac{30}{40}=\frac{66}{40}=1\frac{26}{40}=1\frac{13}{20}$$

Para sumar un entero con un quebrado, basta multiplicar el entero por el denominador, añadir al producto el numerador, y poner por denominador el denominador del quebrado.

$$4+\frac{1}{3}=\frac{13}{3} \qquad \frac{10}{12}+5=\frac{70}{12} \qquad 1\frac{7}{15}=\frac{22}{15}$$

En el primer ejemplo el entero 4 equivale á $\frac{12}{3}$ y, por consiguiente la operacion queda reducida á sumar $\frac{12}{3}$ con $\frac{1}{3}$

Para sumar números mistos, se suman los quebrados y luego los enteros, añadiendo á estos lo que resulte de la suma de aquellos.

$$4\frac{1}{5}+10\frac{4}{5}+21\frac{3}{5}=35+\frac{8}{5}=36\frac{3}{5}$$

$$6\frac{1}{2}+8\frac{2}{3}+1\frac{1}{10}=15+\frac{30}{60}+\frac{40}{60}+\frac{6}{60}=15+\frac{76}{60}=16\frac{16}{60}=16\frac{4}{15}$$

Tambien se suman los números mistos, reduciéndolos á quebrados y sumando despues estos.

$$2\frac{1}{2}+10\frac{1}{3}=\frac{5}{2}+\frac{31}{3}=\frac{15}{6}+\frac{62}{6}=\frac{77}{6}=12\frac{5}{6}$$

68. Hallar los resultados de las siguientes operaciones indicadas:

$$\frac{6}{5}+\frac{4}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2} \quad \Big| \quad 108+\frac{11}{25} \quad \Big| \quad 12\frac{1}{2}+105\frac{2}{3}+\frac{8}{9}+\frac{3}{4}+10$$

Sustraccion de los números fraccionarios.

69. *Para restar un quebrado de otro, se reducen á un mismo denominador, se restan los numeradores, y á la resta se pone por denominador el denominador comun.*

$$\frac{3}{5}-\frac{2}{5}=\frac{1}{5} \qquad \frac{17}{20}-\frac{12}{20}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{10}{11}-\frac{1}{7}=\frac{70}{77}-\frac{11}{77}=\frac{59}{77} \qquad \frac{1}{7}-\frac{1}{8}=\frac{1}{56}$$

Para restar de un entero un quebrado, se multiplica el entero por el denominador, del producto se resta el numerador, y á la resta se pone por denominador el denominador del quebrado.

$$4-\frac{1}{3}=\frac{11}{3}=3\frac{2}{3} \qquad 10-\frac{5}{8}=\frac{75}{8}=9\frac{3}{8}$$

En el primer ejemplo el entero 4 equivale á $\frac{12}{3}$, y por consiguiente la operacion queda reducida á hallar la diferencia entre $\frac{12}{3}$ y el sustraendo $\frac{1}{3}$.

Para restar un número misto de otro, se restan los quebrados y luego los enteros. Si el quebrado del minuendo es menor que el del sustraendo, se tomará una unidad del entero del minuendo, para poder efectuar la resta.

1.° $4\frac{5}{8}-2\frac{4}{8}=2\frac{1}{8}$

2.° $10\frac{2}{5}-3\frac{4}{5}=9\frac{7}{5}-3\frac{4}{5}=6\frac{3}{5}$

3.° $10\frac{6}{7}-2\frac{1}{11}=10\frac{66}{77}-2\frac{7}{77}=8\frac{59}{77}$

4.° $6\frac{2}{3}-2\frac{7}{8}=6\frac{16}{24}-2\frac{21}{24}=5\frac{40}{24}-2\frac{21}{24}=3\frac{19}{24}$

En los ejemplos 2.° y 4.°, como el quebrado del minuendo es menor que el del sustraendo, se toma una unidad del entero correspondiente, para poder efectuar la resta. Al restar los enteros, se considera al minuendo con dicha unidad de menos. Asi en el ejemplo segundo en vez de 10 y $\frac{2}{5}$ hemos sustituído 9 y $\frac{7}{5}$, que es lo mismo, facilitando sin embargo bajo esta forma la sustraccion.

Tambien se restan los números mistos, reduciéndolos á quebrados y restando despues estos.

$$10\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2} = \frac{31}{3} - \frac{5}{2} = \frac{62}{6} - \frac{15}{6} = \frac{47}{6} = 7\frac{5}{6}$$

Si uno de los datos es entero ó fraccionario, basta sin embargo lo dicho en los casos anteriores, para determinar el resíduo. En efecto:

1.° $10\frac{4}{5} - 8 = 2\frac{4}{5}$

2.° $10\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = 10\frac{12}{15} - \frac{10}{15} = 10\frac{2}{15}$

3.° $10 - 8\frac{4}{5} = 9\frac{5}{5} - 8\frac{4}{5} = 1\frac{1}{5}$

En el ejemplo primero, la diferencia de los enteros es 2 y la de los quebrados $\frac{4}{5}$, puesto que el quebrado del sustraendo es cero. En el segundo, despues de reducidos los quebrados á un mismo denominador, la diferencia de los enteros es 10 y la de los quebrados $\frac{2}{15}$. En el último ejemplo, como el quebrado del minuendo es cero, la unidad, que se toma del entero, se convierte en $\frac{5}{5}$, resultando asi 1 de diferencia entre los enteros y $\frac{1}{5}$ entre los quebrados (*).

70. Sirvan de ejercicios en los diferentes casos de la sustraccion los ejemplos siguientes:

$\frac{21}{16} - \frac{3}{8}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{8}$	$5 - \frac{1}{10}$	$4\frac{1}{5} - 2\frac{5}{6}$
$15 - 2\frac{8}{11}$	$7 - \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{3}\right)$	$7\frac{3}{5} - \frac{9}{8}$	$12\frac{8}{9} - 10$

(*) Aplicando este procedimiento al caso de restar un quebrado de un entero, se facilita la regla dada anteriormente, puesto que aparece el resultado bajo la forma de un número misto.

$$10 - \frac{5}{8} = 9\frac{8}{8} - \frac{5}{8} = 9\frac{3}{8} \quad \Big| \quad 1857 - \frac{7}{12} = 1856\frac{5}{12}$$

En la práctica se omite el escribir la transformacion del minuendo, como se ve en el ejemplo segundo.

Multiplicacion de los números fraccionarios.

71. *Para multiplicar un quebrado por un entero ó un entero por un quebrado, se multiplica el entero por el numerador, dejando el denominador lo mismo.*

$$\frac{1}{9}\times 4=\frac{4}{9} \qquad 7\times\frac{4}{5}=\frac{28}{5}=5\frac{3}{5}$$

En el primer caso, el producto de $\frac{1}{9}$ por 4 es la suma de 4 sumandos iguales al multiplicando y, por consiguiente, el producto hallado es el verdadero.

En el segundo, el producto que se busca ha de ser *cuatro quintas partes* del multiplicando, y como una quinta parte de 7 es $\frac{7}{5}$, cuatro quintas partes serán $\frac{28}{5}$ (*).

Para multiplicar dos quebrados, se multiplican los numeradores y despues los denominadores, escribiendo el primer producto por numerador y el segundo por denominador.

$$\frac{4}{5}\times\frac{3}{8}=\frac{4\times3}{5\times8}=\frac{12}{40}=\frac{3}{10} \qquad \frac{6}{11}\times\frac{5}{12}=\frac{30}{121}$$

Para multiplicar dos números mistos, se reducen á quebrados y luego se multiplican como estos.

$$6\frac{1}{2}\times 2\frac{1}{4}=\frac{13}{2}\times\frac{9}{4}=\frac{117}{8}=14\frac{5}{8}$$

$$1\frac{1}{5}\times 10\frac{2}{3}=\frac{6}{5}\times\frac{32}{3}=\frac{192}{15}=12\frac{12}{15}=12\frac{4}{5}$$

Si uno de los factores es entero ó quebrado, la operacion quedará reducida á multiplicar un entero por un quebrado ó á multiplicar dos quebrados.

$$4\frac{1}{2}\times10=\frac{9}{2}\times10=45 \quad\Big|\quad \frac{2}{5}\times 2\frac{1}{4}=\frac{2}{5}\times\frac{9}{4}=\frac{9}{10}$$

(*) Siendo el multiplicador entero, indica con sus unidades las veces que el producto debe ser mayor que el multiplicando; pero, si el multiplicador es quebrado, el producto en este caso será respecto del multiplicando lo que el multiplicador es respecto de la unidad.

De modo que, si el multiplicador es $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ó $\frac{1}{4}$ el producto será la mitad, la tercera ó cuarta parte del multiplicando; si el multiplicador es $\frac{2}{3}$ ó $\frac{4}{5}$, el producto será tambien dos terceras partes ó cuatro quintas partes del multiplicando, etc., etc.

Tambien se puede efectuar el caso de multiplicar un número misto por un entero ó vice-versa, multiplicando las dos partes del misto por el entero y sumando despues los resultados.

$$4\frac{1}{2}\times10=4\times10+\frac{1}{2}\times10=40+5=45$$

$$108\frac{1}{12}\times11=1188\frac{11}{12}$$

Ultimamente, para hallar el producto de tres ó mas quebrados, se mnltiplican todos los numeradores y despues los denominadores, dividiendo el primer producto por el segundo. Si alguno de los factores es entero, se multiplica por el producto de los numeradores.

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{7}{11}=\frac{56}{165} \qquad 8\times\frac{1}{5}\times\frac{5}{2}\times\frac{2}{7}=\frac{80}{70}=1\frac{1}{7}$$

72. Llámase *quebrado de quebrado* el número, que representa una ó varias partes iguales de otro quebrado.

$\frac{4}{5}$ de $\frac{1}{3}$ es un quebrado de quebrado é indica cuatro quintas partes de un tercio de la unidad entera.

Un quebrado de quebrado se reduce á quebrado sencillo, multiplicando entre sí los quebrados componentes.

$$\frac{4}{5} \text{ de } \frac{1}{3}=\frac{4}{15} \qquad \frac{7}{10} \text{ de } \frac{2}{5}=\frac{14}{50}=\frac{7}{25}$$

73. Ejercicios para la multiplicacion de los fraccionarios:

$2\frac{1}{3}\times4\frac{3}{5}$	$4\frac{2}{3}\times\frac{5}{8}$	$5\frac{4}{11}\times4$	$10\times4\frac{1}{5}$

$(10\frac{4}{5}-\frac{1}{2})\times(5+\frac{1}{2})$	$(10-2\frac{1}{5})\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}\times\frac{6}{7}\times\frac{7}{11}$

Hallar la mitad de un tercio, el quinto de $8\frac{1}{2}$, y las tres cuartas partes de la mitad de 21.

Hallar el producto que resulta de multiplicar la suma por la diferencia de la mitad y tercera parte del número 8 y medio.

Division de los números fraccionarios.

74. Supuesto que el cociente multiplicado por divisor debe ser igual al dividendo, se deduce que...

Para dividir dos quebrados, se multiplica el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y el denominador del dividendo por el numerador del divisor, partiendo el primer producto por el segundo.

$$\frac{4}{5} : \frac{3}{8} = \frac{32}{15} = 2\,\frac{2}{15} \qquad \frac{2}{15} : \frac{5}{4} = \frac{8}{75}$$

Para dividir un entero por un quebrado ó un quebrado por un entero, se pone al entero la unidad por denominador, y luego se dividen como dos quebrados.

$$4 : \frac{2}{5} = \frac{4}{1} : \frac{2}{5} = \frac{20}{2} = 10 \qquad \frac{3}{4} : 8 = \frac{3}{32}$$

Para dividir dos números mistos, se reducen á quebrados y luego se dividen como estos.

$$5\,\frac{1}{4} : 2\,\frac{1}{3} = \frac{21}{4} : \frac{7}{3} = \frac{63}{28} = 2\,\frac{7}{28} = 2\,\frac{1}{4}$$

$$1\,\frac{1}{2} : 3\,\frac{3}{4} = \frac{3}{2} : \frac{15}{4} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

Si uno de los datos es entero ó quebrado, la operacion queda reducida á dividir un entero por un quebrado ó bien dos quebrados.

$$5 : 2\,\frac{1}{5} = 5 : \frac{11}{5} = \frac{25}{11} \qquad 5\,\frac{1}{4} : 10 = \frac{21}{4} : 10 = \frac{21}{40}$$

$$4\,\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{9}{2} : \frac{2}{3} = 6\,\frac{3}{4} \qquad \frac{5}{4} : 2\,\frac{1}{5} = \frac{5}{4} : \frac{11}{5} = \frac{25}{44}$$

Tambien se puede efectuar el caso de dividir un número misto por un entero, dividiendo las dos partes del dividendo por el divisor y sumando despues ambos resultados.

$$40\frac{2}{3} : 4 = 10\frac{1}{6} \quad \Big| \quad 17\frac{3}{7} : 8 = 2\frac{10}{56} \quad \Big| \quad 125\frac{2}{3} : 10 = 12\frac{17}{30}$$

75. Hallar los cocientes que resultan de dividir.....

$$\frac{6}{5} : \frac{4}{5} \quad \Big| \quad \frac{5}{6} : \frac{5}{4} \quad \Big| \quad 2 : 5\frac{1}{4} \quad \Big| \quad \left(10\frac{4}{9} - \frac{1}{2}\right) : 2$$

Aplicaciones de los números fraccionarios.

25. Como cuestion preliminar á todas las aplicaciones, que pueden hacerse con los números fraccionarios concretos, vamos á tratar de la conocida vulgarmente con el nombre de *valuar un quebrado concreto*, ó sea hallar su valor en unidades de especies inferiores.

Sea el quebrado propuesto $\frac{4}{5}$ de arroba.

Puesto que una arroba tiene 25 libras, el quebrado dado será equivalente á $\frac{4}{5}$ de 25 libras ó bien á $\frac{4\times25}{5} = 20$ libras

Del mismo modo, tendremos tambien

$\frac{3}{4}$ de vara $= \frac{3}{4}$ de 3 pies $= \frac{9}{4}$ pies $=$ 2 pies $+ \frac{1}{4}$ de otro pie; pero $\frac{1}{4}$ de pie es igual á $\frac{1}{4}$ de 12 pulgadas ó sean 3 pulgadas;

luego $\frac{3}{4}$ de vara serán lo mismo que 2 pies + 3 pulgadas (*).

Del procedimiento seguido en estos dos ejemplos, se puede deducir que

Para valuar un número fraccionario concreto, se multiplica el numerador por el número de unidades de especie inferior, que contiene la unidad á que se refiere el quebrado, y el producto se divide por el denominador.

El cálculo se puede disponer como se ve á continuacion:

Suponiendo el quebrado $\frac{31}{85}$ de un duro, tendremos

Numerador del quebrado	31	
Reales, que tiene un duro	20	
Producto en reales	620	85 denominador del quebrado
Resíduo	25 rs.	7 reales y 10 maravedises.
Maravedises de un real	34	
Producto en maravedises	850	
	00	

Luego el quebrado $\frac{31}{85}$ de un duro es igual á 7 reales y 10 mrs.

Otro ejemplo: $\frac{2}{5}$ de un dia equivalen á 9 horas y 36 minutos.

(*) Estos números, que constan de unidades de diferente especie pero de un mismo género, se llaman *números complejos*, para distinguirlos de los *incomplejos*, que se refieren á una sola especie de unidades.

Cuando la última division no es exacta, se desprecia el resto final, si no llega á la mitad del divisor, y se añade una unidad á las unidades inferiores del cociente, si es igual ó mayor que la mitad del divisor.

$\frac{9}{11}$ de vara $=$ 2 pies.... 5 pulgadas.... 5 líneas.

$\frac{7}{6}$ de qq. $=$ 4 arrobas 16 libras 10 onzas y 11 adarmes.

Inversamente, para reducir un quebrado á otro de especie superior, se divide el quebrado dado por el número que expresa las unidades de especie inferior, que componen una del órden superior.

Así, $\frac{2}{5}$ de hora es lo mismo que $\frac{2}{5\times24}$ de dia.

Igualmente tendremos tambien:

$\frac{4}{7}$ de un pié cuadrado $=\frac{4\times9}{7}$ de una vara cuadrada.

$\frac{2}{3}$ de onza $=\frac{2}{3\times16}$ de libra $=\frac{2}{3\times16\times25}$ de arroba.

76. Explicado ya el procedimiento, que se sigue en la valuacion de los quebrados concretos, pasaremos á resolver los siguientes problemas:

1.° *Habiendo hecho de una obra cualquiera primero* $\frac{1}{3}$, *despues* $\frac{1}{4}$ *y luego* $\frac{1}{5}$ *¿cuál es la parte acabada y la que falta por hacer?*

Siendo $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{20}{60}+\frac{15}{60}+\frac{12}{60}=\frac{47}{60}$

y considerando dividida la obra toda en 60 partes iguales, resultan hechas 47 y restan 13 por hacer.

2.° *Dividida una pieza de paño en cuatro partes de las cuales la primera tiene* 12 $\frac{1}{2}$ *metros, la segunda* 8 $\frac{1}{4}$ *metros, la tercera* 10 *metros y la cuarta un quinto de metro, se desea averiguar la longitud total de la pieza.*

$$12\frac{1}{2}+8\frac{1}{4}+10+\frac{1}{5}=30+\frac{10}{20}+\frac{5}{20}+\frac{4}{20}=30\frac{19}{20}$$

luego el número pedido será 30 metros, 9 decímetros y 5 centímetros.

3.° *Si dos fuentes llenan un estanque, la primera en cinco horas y la segunda en ocho horas, ¿qué parte del estanque llenarán en una hora corriendo juntas?*

La primera llenaria sola $\frac{1}{5}$ del estanque; y la segunda tambien sola llenaria $\frac{1}{8}$; luego las dos llenarán la suma de estos números ó sean $\frac{13}{40}$ del estanque.

4.° *Siendo la altura de la Giralda de Sevilla 364 pies y medio y la de una de la tres pirámides de Egipto 524, ¿qué diferencia hay entre ellas?*

$$524-364\tfrac{1}{2}=159\tfrac{1}{2}=159 \text{ pies y } 6 \text{ pulgadas.}$$

5.° *Si faltan á un cuerpo cualquiera 3 kilógramos y $\frac{1}{4}$ para pesar 40 kilógramos y medio, ¿cuánto pesa dicho cuerpo?*

$$40\frac{1}{2}-3\frac{1}{4}=40\frac{2}{4}-3\frac{1}{4}=37\frac{1}{4}$$

luego pesará 37 kilógramos y un cuarto de otro kilógramo.

6.° *Si un viagero anda cuatro leguas en tres horas y otro anda tres leguas en cuatro horas, ¿cuánto anda el uno mas que el otro en cada hora?*

$$\frac{4}{3}-\frac{3}{4}=\frac{16}{12}-\frac{9}{12}=\frac{7}{12}$$

y como $\frac{7}{12}$ de legua equivale á 11667 pies, esto será lo que el primero anda mas que el segundo en cada hora.

7.° *¿Cuál es el precio de 10 kilógramos y $\frac{3}{4}$ de azúcar á razon de 8 reales el kilógramo?*

$$8\times 10\frac{3}{4}=80+6=86 \text{ reales}$$

luego este número será el precio de los 10 y medio kilógramos.

8.° *¿Cuánto dinero corresponde á una persona, que debe recibir los $\frac{5}{8}$ de 100 duros?*

$$100\times\frac{5}{8}=\frac{500}{8}=62 \text{ duros y } 10 \text{ reales.}$$

9.° *Si una fanega de grano pesa tres arrobas y media ¿cuánto pesarán 10 fanegas y un tercio?*

El producto de $3\frac{1}{2}$ por $10\frac{1}{3}$ nos dará que el número, que se busca, es 36 arrobas..... 4 libras..... 3 onzas.

10. *¿Qué número de horas son los $\frac{2}{3}$ de la mitad de un quinto del dia natural de 24 horas?*

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{1}{2} \text{ de } \frac{1}{5} \text{ de } 24 \text{ horas} = \frac{48}{30}$$

luego el número, que se busca, es 1 hora y 36 minutos.

11. *Reducir 8 metros á varas de Búrgos.*

Supuesto que 5 metros equivalen á 6 varas, 1 metro será igual á $\frac{6}{5}$ de vara, y por consiguiente el producto de 8 por este número nos dará el que se busca.

$$\frac{6}{5} \times 8 = \frac{48}{5} = 9\,\frac{3}{5}$$

luego 8 metros equivalen á 9 varas, 1 pie y 10 pulgadas.

12. *Reducir 75 quintales antiguos á quintales métricos.*

Puesto que 100 quintales antiguos equivalen á 46 métricos, uno de los primeros será igual á $\frac{46}{100}$ de los segundos; y por consiguiente tendremos.....

$$\frac{46}{100} \times 75 = \frac{3450}{100} = 34\,\frac{5}{10}$$

luego el número, que se pide, será 34 qq. métricos y 50 kilóg.

13. *¿Cuántas fanegas serán 20 arrobas de trigo, pesando una fanega 3 arrobas y media?*

El número de fanegas será el que marque las veces que 3 arrobas y media esté contenido en 20 arrobas: luego el cociente de estos números será el que se busca.

$$20 : 3\,\frac{1}{2} = 20 : \frac{7}{2} = \frac{40}{7} = 5\,\frac{5}{7}$$

Resultan pues 5 fanegas, 8 celemines y $2\,\frac{2}{7}$ cuartillos.

14. *Si 4 litros y medio valen 12 reales, se pide el valor de un litro.*

El valor de un litro multiplicado por $4\,\frac{1}{2}$ debe producir 12 reales; luego, si dividimos 12 por $4\,\frac{1}{2}$, el cociente será el número de reales, que se busca.

$$12 : 4\,\frac{1}{2} = 12 : \frac{9}{2} = \frac{24}{9} = 2\,\frac{2}{3}$$

y por consiguiente el valor de un litro será aproximadamente igual á 2 reales y 22 maravedises.

QUEBRADOS DECIMALES.

Numeracion, adicion, sustraccion, multiplicacion y division.
Reduccion de los quebrados ordinarios á decimales y vice-versa.

Numeracion de los decimales.

77. Lámase *unidad fraccionaria decimal* la unidad fraccionaria, cuyo denominador es 10, 100, 1000 ó en general la unidad seguida de ceros.

$\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ etc., son unidades fraccionarias decimales.

Los nombres de las diferentes unidades decimales son las siguientes: *décimas* cuando el denominador es 10; *centésimas* cuando el denominador es 100; *milésimas* si el denominador es 1000; *diez milésimas* si el denominador es diez mil; y así sucesivamente *cien milesimas*, *millonésimas*, *diez millonésimas*, *cien millonésimas*, *mil millonésimas*, *diez mil millonésimas*, *cien mil millonésimas*, *billonésimas*, etc. para los denominadores 100000, 1000000, 10000000, etc.

Luego una *unidad entera* vale 10 décimas ó 100 centésimas ó 1000 milésimas, etc. Una *décima* vale 10 milésimas ó 100 milésimas ó 1000 diez milésimas, etc. Una *centesima* es lo mismo que 10 milésimas ó 100 diez milesimas ó 1000 cien milésimas, y asi sucesivamente.

Las décimas son unidades del primer órden decimal, las centésimas lo son del segundo órden decimal; las milésimas lo son del tercero, etc, y por consiguiente una unidad de un órden decimal cualquiera vale diez unidades del órden decimal siguiente. El número de unidades de cada órden es siempre inferior á diez.

Los números fraccionarios, cuyo denominador es la unidad seguida de ceros, se llaman *fraccionarios decimales* ó simplemente *decimales*; y por consiguiente, tambien se puede decir que *números decimales* son los que constan de varias unidades decimales.

$\frac{5}{10}$, $\frac{25}{100}$, $\frac{1857}{1000}$, etc., son números decimales.

Los números decimales menores que la unidad entera se llaman *fraccionarios decimales*, y los mayores que la unidad, números *mistos* de enteros y decimales.

Los números decimales menores que la unidad se escriben poniendo cero y despues la coma ó vírgula y á su derecha las décimas, las centésimas, milésimas, etc.

Si el número decimal es mayor que la unidad, la parte entera ocupará el lugar del cero.

El número decimal 4 décimas se escribirá así 0,4

Del mismo modo $\frac{12}{100} = 0{,}12$ $\frac{12}{1000} = 0{,}0012$

$\frac{1857}{10} = 185{,}7$ $\frac{1857}{1000} = 1{,}857$

Otra regla: Para escribir un número decimal, basta escribir su numerador y separar de la derecha de este tantas cifras decimales como ceros tenga el denominador.

Los números decimales se leen como si fuesen enteros, expresando al fin la denominacion correspondiente á la última cifra.

Si el número decimal consta de parte entera y parte decimal, la parte entera se puede leer como los números enteros y la decimal como se acaba de indicar.

Así el número 0,018 se lee diez y ocho *milésimas.*
2,04 dos cientas cuatro *centésimas*
ó 2 unidades y 4 centésimas.
10,108025 diez unidades y ciento ocho mil veinte y cinco *millonésimas.*

Los números decimales, que llevan una misma denominacion, se refieren á una misma unidad decimal y tienen un mismo número de cifras decimales. Estos números se llaman *homogéneos.*

El órden de las unidades, que representa cada una de las cifras de un número decimal, depende únicamente del lugar que ocupa, con relacion á la coma ó vírgula y por consiguiente

Un número decimal no varia, aunque se añadan ó quiten ceros de su derecha.

En efecto; 0,8 es lo mismo que 0,800
pues 800 milésimas equivalen á 8 décimas, cero centésimas y cero milésimas.

Adicion de los números decimales.

78. *Los números decimales se suman, como si fuesen enteros, cuidando de poner la coma en la suma, de modo que forme columna con las comas de los sumandos.*

10,8412	1,09412
0,21	0,02
4,074	40,2
15,1252	6,001
	47,31512

Sustraccion de los números decimales.

79. *Para restar decimales, se hacen homogéneos el minuendo y sustraendo y luego se restan como los enteros, cuidando de escribir la coma en la resta, de modo que forme columna con las comas de los datos.*

2,074	0,07412	5,2
0,185	0,018	4,8729
1,889	0,05612	0,3271

En el último ejemplo, se suponen tres ceros á la derecha del minuendo, efectuando despues la resta, como si fuesen números enteros.

Multiplicacion de los decimales.

80. *Para multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros, basta correr la coma tantos lugares á la derecha, cuantos sean los ceros que acompañan á la unidad.*

$0,257\times10=2,57$ | $5,18\times100=518$ | $18,57\times1000=18570$

La supresion de la coma en un número decimal equivale á hacerle tantas veces mayor, como indique la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene.

Así, la supresion de la coma en el número decimal 1,857 le transforma en el número entero 1857, que es *mil* veces mayor que el anterior.

Para multiplicar dos ó mas decimales, se consideran como enteros, y luego de la derecha del producto se separan tantas cifras decimales, cuantas tengan el multiplicando y multiplicador juntos.

Si el producto no tiene suficiente número de cifras, se cômpletan con ceros á la izquierda.

La regla es la misma, aun cuando uno de los factores sea entero.

$$\begin{array}{r} 4{,}32 \\ 5{,}2 \\ \hline 864 \\ 21\,60 \\ \hline 22{,}464 \end{array} \text{ producto.} \qquad \begin{array}{r} 5{,}0032 \\ 0{,}004 \\ \hline 0{,}0200128 \end{array}$$

$$4 \times 0{,}8 \times 1{,}05 = 3{,}360 = 3{,}36$$

Division de los números decimales.

81. *Para dividir un número decimal por la unidad seguida de ceros, basta correr la coma tantos lugares á la izquierda, cuantos sean los ceros, que acompañen á la unidad.*

$25{,}7 : 10 = 2{,}57$ | $25{,}7 : 100 = 0{,}257$ | $25{,}7 : 1000 = 0{,}0257$

Para dividir dos decimales, se hacen homogéneos y se dividen, como si fuesen enteros. El cociente entero, hallado de este modo, será el cociente de los números dados.

La regla es la misma, aun cuando uno de los datos sea entero.

$10{,}08 : 0{,}84 = 12$ pues $\begin{array}{r|l} 1008 & 84 \\ \cline{2-2} 168 & 12 \text{ cociente} \\ 00 & \end{array}$

Del mismo modo tendremos tambien que

$0{,}832 : 0{,}000008 = 104000$ pues $\begin{array}{r|l} 832000 & 8 \\ \cline{2-2} & 104000 \end{array}$

Otros ejemplos:

$2592 : 1{,}08 = 259200 : 108 = 2400$ | $121{,}009 : 25 = 4{,}84$

Supuesto que una unidad tiene diez décimas, cien centésimas, mil milésimas, etc., para aproximar por fracciones decimales el cociente de dos números, se añaden á la derecha del resíduo tantos ceros, como cifras decimales se quieran en el cociente, y el resultado se divide por el divisor.

Hallar el cociente de 142 por 5, con menos error que una décima:

Dividendo	1420	5 divisor
	42	28,4 cociente exacto.
	20	
	00	

Hallar el cociente de 358 por 32, con menos de una milésima de error.

	358000	32 divisor
	38	11,187 cociente aproximado (*)
	60	
	280	
	240	
residuo	16	

Otros ejemplos de division, aproximada por decimales.....

2,108 : 0,7 = 2108 : 700=3,011428.....

8,005 : 0,0103=80050 : 103=777,184.....

1854 : 125 =14,832 | 1204 : 2,5=481,6

En la aproximacion sucesiva de un cociente por decimales será cero uno de los restos, ó de lo contrario una parte de las cifras del cociente se repetirá periódicamente en el mismo órden.

4,21 : 0,07=421 : 7=60,142857 142857 142857.....

5 : 0,12=41,6666..... 0,71 : 9=0,0788888.....

Las cifras decimales, que se repiten constantemente, forman lo que llamamos el *periodo*, y las anteriores al primer periodo, *la parte no periódica.* Si el periodo de una fraccion decimal empieza inmediatamente despues de la coma, se llama *periódica pura*, y cuando no, *periódica mista.*

0,704704... es una fraccion decimal *periódica pura.*
12,166666... aquí la fraccion decimal es *periódica mista.*

Antes de terminar el cálculo de los números decimales, conviene advertir que, si un resultado tiene mas de tres cifras decimales, se acostumbra reducirlas á este número, despreciando las restantes y cuidando de añadir una unidad á la última de las que quedan, si la siguiente pasa de 5.

(*) Siempre que el resíduo de una division sea igual ó mayor que la mitad del divisor, se añadirá una unidad á la última cifra del cociente.

Reduccion de quebrados ordinarios á decimales.

82. *Para convertir en decimal un número fraccionario cualquiera, se divide el numerador por el denominador, y se tendrá la parte entera, y para hallar la decimal, se continúa la division, añadiendo un cero á cada resto.*

Si el número fraccionario es menor que la unidad, la parte entera del número decimal será cero. La diferencia entre el número fraccionario y el decimal será en todo caso menor que una unidad del último órden decimal. Ambos números serán exactamente iguales, si uno de los restos es cero.

$\frac{3}{7} = 3 : 7 = 0{,}42857$ con menos error que $0{,}00001$

$\frac{65}{16} = 4{,}0625 \qquad \frac{25}{15} = 1{,}6666.... \qquad \frac{7}{12} = 0{,}583333...$

Si el denominador de un número fraccionario ordinario é irreducible es múltiplo, únicamente de los factores 2 y 5, dicho número fraccionario se podrá convertir exactamente en decimal.

$\frac{11}{40} = 0{,}275 \qquad \frac{7}{8} = 0{,}875 \qquad \frac{12}{5} = 2{,}4$

Si el denominador de una fraccion ordinaria é irreducible no es múltiplo de los factores 2 ó 5, dicha fraccion equivale á otra decimal periódica pura.

$\frac{3}{77} = 0{,}038961038961..... \qquad \frac{5}{21} = 0{,}238095238095...$ (*)

Si el denominador de una fraccion ordinaria é irreducible es múltiplo de los factores 2 ó 5 y de algun otro, primo con ellos, dicha fraccion, reducida á decimales, será periódica mista.

$\frac{7}{12} = 0{,}58335 \qquad \frac{5}{14} = 0{,}3571428571428$

$\frac{7}{5.5.11.3} = 0{,}00848484...... \qquad \frac{7}{220} = 0{,}318181848$

(*) Si el denominador de una fraccion es 9, 99, 999, y en general un número cualquiera de nueves, el periodo de la fraccion decimal correspondiente será el numerador, precedido de tantos ceros, como indique la diferencia entre las cifras del numerador y denominador de la fraccion ordinaria dada.

$\frac{1}{9} = 0{,}111 \qquad \frac{8}{9} = 0{,}888.... \qquad \frac{1}{99} = 0{,}010101 \qquad \frac{12}{9999} = 0{,}00120012$

Reduccion de quebrados ordinarios á decimales.

83. En esta cuestion conviene distinguir tres casos, á saber: cuando la fraccion decimal consta de un número limitado de cifras; cuando es periódica pura; y cuando es mista.

1.° *Para reducir un número decimal de limitado número de cifras á fraccionario, basta poner por numerador el número dado, con supresion de la vírgula ó coma, y por denominador la unidad, seguida de tantos ceros, como cifras decimales tiene.*

$$0{,}14 = \frac{14}{100} = \frac{7}{50} \qquad 4{,}0108 = \frac{40108}{10000} \qquad 0{,}000825 = \frac{825}{1000000}$$

2.° *Para reducir una fraccion decimal periódica pura á fraccion ordinaria, se pone por numerador el periodo y por denominador un número, compuesto de tantos nueves como cifras tiene el periodo.*

$$0{,}121212... = \frac{12}{99} = \frac{4}{33} \qquad 0{,}005005... = \frac{5}{999}$$

Si el número decimal es mayor que la unidad, se añade la parte entera á la fraccion ordinaria, obtenida por la regla anterior.

$$2{,}030303... = 2\frac{3}{99} \qquad 10{,}015015... = 10\frac{15}{999}$$

3.° Para convertir una fraccion decimal *periódica mista* en fraccion ordinaria, se escribe por numerador la parte no periódica, seguida del primer periodo, menos la parte no periódica, y por denominador tantos nueves, como cifras tiene el periodo, y tantos ceros, como cifras tiene la parte no periódica.

$$0{,}58333 = \frac{583-58}{900} = \frac{7}{12}$$

$$0{,}12506506... = \frac{12506-12}{99900} = \frac{12494}{99900} = \frac{6247}{49950}$$

$$10{,}0003535... = 10 + \frac{35}{99000} \qquad 0{,}545020202 = \frac{53957}{99000}$$

Aplicaciones de los números decimales.

84. Conviene anteponer, á las diferentes aplicaciones de los números decimales, la resolucion de un problema análogo al que hemos expuesto en el núm. **75.**

Para valuar un número decimal concreto, se multiplica por las unidades de especie inferior, que contiene la unidad á que se refiere dicho número.

Así para hallar el valor de 0,54 de un quintal multiplicaremos dicho número por 4 arrobas, que son las que tiene un quintal, y el producto 2,16 expresará que el número dado vale 2 arrobas y 16 centésimas de otra arroba. Repitiendo el cálculo con 0,16 arrobas, tendremos por último que 0,54 quintales es lo mismo que 2 arrobas y 4 libras.

Del mismo modo hallaríamos los resultados, que siguen:

2,548 piés=2 piés..... 6 pulgadas.... 7 líneas. (*)
0,024 qq.=2 libras..... 6 onzas..... 6 adarmes.

Si el número propuesto se refiere á unidades del sistema decimal, su reduccion á unidades inferiores se obtienen solo con correr la coma una, dos ó mas lugares á la derecha.

1,857 decálitros=18,57 litros=185,7 decílit.=1857 centílit.

Inversamente, para reducir un número decimal á unidades de especie superior, basta correr la coma uno, dos ó mas lugares á la izquierda.

1857 centímet.=185,7 decímet.=18,57 met.=0,01857 km. etc.

Además, un número decimal métrico está reducido á unidades inferiores, con solo separar sus cifras y dar á cada una la especie de la unidad métrica respectiva. Así tendremos...

14,56 metros=14 metros..... 5 decímetros..... 6 centímet.
21,049 kilóg. =21 kilóg....... 4 decágramos.... 9 gramos
8,542 escud.= 8 escudos.... 5 reales........... 42 céntimos.

(*) Para reducir á maravedises un número cualquiera de céntimos de real, se divide este número por 3 y el cociente expresará aproximadamente los maravedises, que se piden.

Así, 36 centésimas ó centavos de real equivalen á 12 maravedises, y 0,61 de real serán lo mismo que 20 maravedises.

85. Sentado esto pasemos ya á resolver los siguientes problemas.

1.° *Suponiendo 1 el peso de la Tierra, Mercurio pesa 0,175, Venus 0,883, Marte 0,132, Júpiter 338, Saturno 101, Urano 15, Neptuno 25 y todos los demás planetas de segundo órden tanto como dos veces la tierra ¿cuál es el peso total del sistema planetario?*

Sumando todos estos números, resulta que el peso de todo el sistema planetario es aproximadamente igual á 483 veces el peso de la Tierra.

2.° *Siendo el peso de un cajon de azúcar 74,56 kilog. y pesando el cajon solo 5004 gramos, ¿cuál es el peso del azúcar?*

Restando del peso total el peso del cajon, tendremos el del azucar, pero siendo kilógramos el minuendo y gramos el sustraendo, se debe convertir este en kilógramos, para poder efectuar la resta, y tendremos

	74,56	minuendo
5004 gramos ó bien	5,004	kilógramos.
Peso del azúcar	69,556	kilógramos.

3.° *La toesa de Austria equivale á 1,896572 metros y la vara de Castilla á 0,835905 metros ¿cuál es la diferencia de estas dos medidas.*

Restando 0,835905 de 1,896572, tendremos que la toesa de Austria excede á nuestra vara en un metro y 6 centímetros aproximadamente.

4.° *¿Cuál es el valor de 24 metros y 2 decímetros costando cada metro 8 reales y 4 décimas?*

Si multiplicamos el valor de un metro por el número de ellos, tendremos el resultado final; y como el producto de 8,4 reales por 24,2 es igual á 203,28 reales, el número, que se busca, será 203 reales y 28 céntimos.

5.° *El aire pesa 770 veces menos que el agua, y el mercurio pesa 13,598 veces mas que el agua: ¿cuántas veces pesa el mercurio mas que el aire?*

El producto de 13,598 por 770 será el número, que se pide.

6.° *Si un litro de agua pesa un kilógramo, ¿cuánto pesa un litro de mercurio?*

El mercurio pesa 13,598 veces mas que el agua, luego un litro de mercurio pesará 13,598 kilógramos.

7.° *Habiendo pagado 100 reales por 5,2 varas, ¿cuál es el precio de una vara?*

Dividiendo 100 por 5,2, el cociente 19,23 nos dará 19 reales y 23 céntimos para el precio de una vara.

8.° *¿Cuántos metros de tela se podrán comprar con 80 escudos de la nueva moneda, 5 reales y 4 décimas, á razon de 2 escudos y 4 rs. el metro?*

Se podrán comprar 33 metros, 5 decímetros y 6 centímetros.

9.° *Por 25 libros se han pagado 180 rs.; si el precio de los libros se aumentase en 25 céntimos, ¿cuánto deberíamos pagar por los mismos libros?*

El producto de 25 céntimos ó sea 0,25 rs., por 25, que es el número de libros, nos dará lo que se debe añadir á 180 reales, resultando así un total de 186 reales y 25 céntimos.

---

86. Estando expresadas las relaciones de las diferentes unidades de pesos y medidas de Castilla en las del sistema métrico-decimal y viceversa, en números decimales, segun aparece de las equivalencias oficiales, que van al fin de este libro, en todas las reducciones de unas unidades á otras debe intervenir el cálculo de estos números conforme á la regla siguiente:

Para reducir un número concreto, expresado en uno de los dos sistemas, á su equivalente en el otro, basta multiplicar el número dado por la equivalencia de la unidad en el segundo sistema.

Así; para reducir 12 metros á piés de Burgos, se multiplicará el número 12 por la equivalencia de 1 metro en piés, es decir, por 3,14159, y el producto 37,69908 será el número pedido.

Inversamente; para reducir 12 pies de Burgos á metros, se multiplicará el número 12 por la equivalencia de 1 pié en metros, es decir, por 0,2786 y el producto 3,3432 serán los metros equivalentes á 12 piés.

Otros ejemplos: *Reducir 150 kilómetros á leguas.*

Multiplicando 0,1794 por 150, tendremos 26,91 leguas.

¿Cuántos litros hacen 12 cántaros de vino?

16,133×12=193 litros y 6 decílitros aproximadamente.

Reducir 25 áreas á fanegas de tierra.

64,396×25=1609 fanegas y 10 $\frac{4}{5}$ celemines.

¿Cuántos kilógramos son 100 arrobas de azúcar?

11,502×100=1150 kilógramos aproximadamente.

NUMEROS COMPLEJOS.

Preliminares, adicion, sustraccion, multiplicacion y division.

Preliminares.

87. Los números concretos se dividen en *complejos é incomplejos.* Se llaman *incomplejos* los números, que se refieren á una sola especie de unidades, como por ejemplo 4 dias, 10 varas, 8 kilómetros, etc.; y *complejos* los que se refieren á unidades de diferentes especies, pero de un mismo género, como son 4 dias.... 10 horas; 20 reales.... 30 maravedises; 5 varas.... 2 pies, etc.

88. *Para reducir un número complejo á incomplejo de especie inferior, se reducen las unidades principales á las de especie inferior inmediata, añadiendo al resultado las que hubiere de esta especie en el número dado, y así se continúa hasta llegar á las unidades inferiores.*

Reducir 4 dias y 8 horas á su especie inferior.
4 dias son lo mismo que 4×24 horas, es decir 96 horas.
luego el número dado será igual á 104 horas.

2.° 4 varas... 2 piés......... 8,2 pulgadas.
3 piés que tiene una vara.

producto 12 piés.
añadiendo 2, nos dará...

14 piés=4 varas..... 2 piés.
12 pulgadas que tiene un pié.

producto 168 pulgadas
añadiendo 8,2; tendremos...

176,2 pulgadas=4 varas... 2 piés... 8,2 pulgadas.

10 duros..... 10 reales.... 10 maravedís..=7150 mrs.
12 fanegas... 2 celem.... 10 varas cuad.=28032 varas cuad.

En el sistema métrico-decimal, tendremos...
5 kilómet... 2 hectóm... 4 decámet... 1 met...=5241 metros.
12 dob.... 4 reales... 2 décimas=12042 décimas
4 hecto-áreas... 3 áreas... 25 centi-áreas=40325 centi-áreas.

89. *Para reducir un número complejo á incomplejo de especie superior ú otra intermedia, se escribe por numerador el número dado, reducido á incomplejo de especie inferior, y por denominador el número, que indica las unidades de esta especie, que componen una de la superior ó de la intermedia, que se pide.*

El número 4 dias... 8 horas, equivale á 104 horas;

luego 4 dias... 8 horas, será igual á $\frac{104}{24}$ dias.

4 duros... 10 rs... 10 mrs. = 3070 mrs. $\frac{3070}{34}$ reales.

En el sistema decimal tendremos, segun hemos dicho ya...
12 kilólitros..... 2 hectólitros. 6 litros....... = 12,206 kilólit.
5 hecto-áreas.. 4 áreas........ 2 centi-áreas = 504,02 áreas.

Adicion de los números complejos.

90. *Para sumar dos ó mas números complejos, se suman las unidades de cada especie, empezando por las inferiores, añadiendo á cada suma parcial las unidades de su especie, que resulten de la suma anterior.*

12 duros	10 reales	25 mrs.	
4	2	10	
104	1	30	
2	15	6	
123	10	3	Suma total.

En este ejemplo, la columna de los maravedises vale 2 reales y 3 maravedises; y la de los reales, 1 duro y 10 reales; luego la suma total de los números dados será igual á 123 duros, 10 reales y 3 maravedises.

5 kilólitros,	8 hectólitros,	4 decálitros.		= 5840 lit.
2	4	7	2 litros.	= 2472
15	1	0	9	= 15109
12	0	8	5	= 12085
35 kilólitros	5 hectólitros	0 decálitros	6 litros	= 35506 lit.

(*) El cálculo de los números complejos se reduce al de los incomplejos, con solo transformar aquellos en estos; no obstante, en la adicion y sustraccion conviene operar directamente sobre los números complejos. En el sistema métrico-decimal siempre es conveniente la reduccion á incomplejos.

Sustraccion de los números complejos.

91. *Para hallar la diferencia entre dos números complejos, se restan de las unidades del minuendo las de la misma especie del sustraendo, empezando por las de especie inferior. Si algun sustraendo parcial es mayor que el minuendo respectivo, se añade á este una unidad de la especie superior inmediata, considerando luego al minuendo parcial siguiente con dicha unidad de menos.*

duros	reales
10. . . .	10
5. . . .	8
5. . . .	2

quintales	arrobas	libras	onzas
12.	1.	10.	4
10.	2.	5.	10
1.	3.	4.	10

En el segundo ejemplo, diremos:
1 libra tiene 16 onzas y 4 son 20; 20 menos 10, son 10:
9 libras menos 5 son 4 libras:
1 quintal tiene 4 arrobas y 1 son 5; 5 menos 2 son 3:
11 quintales menos 10 quintales es un quintal;
luego la diferencia total será 1 qq... 3 arrob... 4 lib... 10 onzas.

5 hecto-áreas. . . 12 áreas. . . 7 centi-áreas=512,07 áreas.
2 . . . . 58 . . . . . . 10 . . . .=258,10 »
Resíduo. . . . . 253,97 áreas.

Multiplicacion de los números complejos.

En la multiplicacion de los complejos conviene distinguir los casos siguientes; multiplicacion de un complejo por un incomplejo, y multiplicacion de un número incomplejo ó complejo por otro complejo.

92. *Para multiplicar un número complejo por un incomplejo, se multiplica este por cada una de las diferentes unidades de aquel, y la suma de los productos parciales será el producto total.*

Hallar el valor de 3 varas de paño, costando cada una 5 duros y 10 reales.
El multiplicando será el valor de una vara, ó 5 ds... 10 rs.
y el multiplicador el número de varas, es decir... 3
luego el número pedido será... 16 ds... 10 rs.

Valiendo 1 fanega y 4 celemines, un duro, ¿cuántas fanegas se pueden comprar con 200 rs. ó sean 10 duros?

(1 fan.... 4 cel.)$\times$10=10 fan.... 40 cel.=13 fan.... 4 celem.

93. *Para multiplicar un incomplejo por un complejo, se reduce el complejo á incomplejo, y la operacion será de multiplicar dos números incomplejos.*

Si una vara de un género cualquiera vale 10 rs. ¿cuánto valdrán 5 varas... 2 piés... 6 pulgadas?

El multiplicador reducido á incomplejo de la especie de la unidad, cuyo valor es el multiplicando, será $\frac{210}{36}$ varas; y por consiguiente tendremos...

10 rs.$\times$(5 vs... 2 piés... 6 pulg.)=10 rs.$\times\frac{210}{36}$=58 rs. 12 mrs.

Si en una hora se andan 9,3 kilómetros, ¿cuántos se andarán en 5 dias... 2 horas... 4 minutos?

9,3 kilómetros$\times$(5 dias.... 2 horas.... 4 minutos)=

9,3 kilómetros$\times\frac{7324}{60}$=1135,22 kilómet. ó bien 1335220 met.

94. *Para multiplicar un complejo por otro, se reducen á incomplejos, y la operacion será de multiplicar dos números incomplejos.*

Hallar el valor de 5 varas y 2 piés, costando cada vara 10 reales y 10 mrs.

(10 rs... 10 mrs.)$\times$(5 vs... 2 piés)=$\frac{350}{34}$ rs.$\times\frac{17}{3}$=58 rs.. 11 ms.

Hallar el valor de 5 varas y 10 pulgadas, costando cada pié 12 reales y 30 mrs.

(12 reales... 30 mrs.)$\times$(5 varas... 10 pulgadas.)

ó bien $\frac{438}{34}$ reales$\times\frac{190}{12}$=203 reales y 33 mrs.

Si una fanega de trigo pesa 3 arrobas y 5 libras, ¿cuántos quintales pesarán 4 fanegas, 2 celemines y 3 cuartillos?

(3 arrobas... 5 libras)$\times$(4 fanegas... 2 celemines... 3 cuartillos)

ó bien $\frac{80}{100}$ quint.$\times\frac{203}{84}$=3 quintales, 1 arroba, 13,3 libras.

Multiplicacion de los números complejos por el método de las partes alícuotas.

95. *Si una vara vale 5 duros... 6 rs... 10 mrs., ¿cuánto valdrán 4 varas, 2 pies y 6 pulgadas?*

Valor de una vara.......	5 duros.	6 rs. . .	10 mrs.
Valor de 4 varas. . . .	20 duros.	24 rs. . .	40 mrs.
Valor de un pié ó sea $^1/_3$ vara.	1. . . .	15. . . .	14,6
Valor de otro pié. . . .	1. . . .	15. . . .	14,6
Valor de 6 pulg. ó $\frac{1}{2}$ pié	». . . .	17. . . .	24,3
Total. . .	25 duros.	13 rs. . .	25,5 mrs.

Despues de hallar el valor de 4 varas, multiplicando por 4 el valor de una vara, se hallará el de los 2 piés descomponiendo este número en 1 pié y otro pié, que son la tercera parte de la vara. El valor de las 6 pulgadas, puesto que son la mitad de un pié tampoco ofrece ninguna dificultad.

2.° *Si una fanega de grano pesa 3 arrobas, 10 libras y 10 onzas, se pregunta el peso de 5 fanegas, 9 celemines y 3 cuartillos.*

Peso de una fanega. . . .	3 arrobas.	10 libras.	10 onzas.
Peso de 5 fanegas.	15.	50	50
Peso de 6 cel. ó $^1/_2$ fanega.	1.	17	13
Peso de 3 celemines..		21	6,5
[Peso de un celemin (auxiliar).		7	2,2]
Peso de 2 cuartillos.		3	9,1
Peso de un cuartillo.		1	12,6
Total. . . .	19.	22	11,2

En este ejemplo, el peso de un celemin no se suma con los demás sumandos: sirve únicamente para calcular el peso de los 3 cuartillos.

3.° *Si un quintal vale 104 duros, 10 rs. y 20 mrs., averiguar el valor de 10 quintales, 3 arrobas y 11 onzas.*

Hállese el valor de los 10 quintales y en seguida el de 2 arrobas (que es la mitad de un quintal), y el de una arroba. Calculado luego el valor auxiliar de 1 libra, se hallará por su medio el de 8 onzas y tambien el de 2 onzas y una onza.

La suma de todos estos valores nos dará por resultado total 1124 duros, 8 rs. y 7 mrs. aproximadamente.

Division de los números complejos.

Los casos diferentes, que pueden ocurrir al dividir los números complejos, son los siguientes... dividir un complejo por un incomplejo, y un número incomplejo ó complejo por otro complejo.

96. *Para dividir un número incomplejo por otro incomplejo, se divide cada parte del dividendo por el divisor, y la suma de los cocientes parciales será el cociente total.*

Si un correo anda en 8 minutos 1000 varas y 2 piés, ¿cuánto andará en 1 minuto con iguales circunstancias?

(1000 varas... 2 piés) : 8=125 varas... 3 pulgadas.

Hallar el precio de un pié cúbico de madera, en el supuesto de que 2 varas cúbicas han costado 20 duros, 10 rs. y 20 mrs.
2 varas cúbicas son lo mismo que 54 piés cúbicos: luego

(20 duros... 10 rs... 20 mrs.) : 54=7 rs.... 20,5 mrs.

97. *Para dividir un número incomplejo por un complejo, se reduce el complejo á incomplejo, y la cuestion será de dividir dos incomplejos.*

Suponiendo que diez varas de paño, 2 piés y 6 pulgadas han costado 100 duros, ¿cuál será el valor de una vara?

100 dur. : (10 vs. 2 piés... 6 pulg.)=100 dur. : $\frac{390}{36}$=184,6 rs.

Dadas dos piezas de tela de igual ancho, la una de 27 varas y la otra de 4 varas, 1 pie y 8 pulgadas, ¿cuántas veces es la primera mayor que la segunda?

27 varas : (4 varas... 1 pié... 8 pulg.)=27 : $\frac{164}{36}$=5,9

luego la primera contiene á la segunda muy cerca de 6 veces.

98. *Para dividir dos complejos se reducen á incomplejos, y la operacion será de dividir un número incomplejo por otro.*

Si una vara cuadrada de terreno vale 2 duros y 11 reales; ¿cuántas varas cuadr. se podrán comprar con 100 duros y 12 rs.?
(100 duros... 12 rs.) : (2 duros... 11 rs.)=39,451 varas cuadr.

Siendo 57 duros y 15 reales el valor de 5 quintales y 2 arrobas, *¿cuál es el precio de un quintal?*

$\frac{1155}{20}$ duros : $\frac{22}{4}$ qq. = 10 duros... 10 reales.

PROBLEMAS SOBRE LOS NUMEROS EN GENERAL.

99. Para terminar el estudio de la Aritmética en la parte, que corresponde á la primera enseñanza elemental, creemos muy conveniente exponer aquí los enunciados de una série de cuestiones, en cuya resolucion pueden ejercitarse los alumnos mas aventajados, en los últimos meses que permanezcan en la escuela, sirviéndoles estos ejercicios de repaso general de todas las materias anteriores y preparándoles además, para empezar con fruto la primera enseñanza superior ó bien el estudio de la Aritmética en la segunda enseñanza.

Estos problemas, en cuya resolucion entran muchas veces dos, tres, ó mas de las operaciones simples ya conocidas, sean los datos enteros, fraccionarios ó complejos, son los siguientes:

1.° Si los niños de una escuela se hallan divididos en tres secciones y la primera tiene 50, la segunda 40 y la tercera 25, *¿cuántos niños quedarán en cada seccion y cuántos en la escuela, si salen 12 de la primera seccion, 8 de la segunda y 7 de la tercera?*

2.° Debiendo repartir 320 rs. entre tres personas, de modo que la primera lleve 120 rs. y la segunda tres napoleones menos que la primera, *¿cuántos reales corresponden á la tercera?*

3.° Un empleado tiene de sueldo 20000 rs. al año, por réditos de su capital 12500, por las rentas de sus fincas 10000; gasta en su casa 25400 rs. y en la educacion de sus hijos 8600 reales, *¿cuántos duros economiza en cada año?*

4.° Un padre al morir ha dispuesto que el tercero de sus hijos lleve doble que el segundo y este triple que el primero, *¿cuál seria la herencia total, sabiendo que el primero llevó diez mil reales?*

5.° Hecha la distribucion de la herencia del problema anterior, de modo que el segundo saliera mejorado en el quinto y el menor en el tercio, *¿cuánto llevaria cada uno de los tres hermanos?*

6.° Si un librero compra 100 libros á 12 rs. cada uno y recibe además 10 gratis, *¿á cómo sale cada uno de los 110 libros recibidos?*

7.° Comprando 25 kg. de un género cualquiera á razon de 4 rs. y 45 cént. el kg. y habiendo pagado 10 rs. al comisionista y 25 cént. por kilóg. de derechos de entrada, *¿á cómo debe venderse el kilóg. para ganar 75 céntimos en cada uno despues de cubiertos todos los gastos?*

8.° En una fábrica se emplean 30 hombres, cuyo jornal es 10 reales diarios: si queremos en su lugar emplear 25 mugeres y 20 niños, sin aumentar los gastos y dando 8 reales á cada muger, *¿cuánto daremos á cada niño?*

9.° El tercio y el quinto de un número componen 80, *¿cuál es este número?*

10. La mitad, los dos tercios y las tres quintas partes de un número componen 106 metros, *¿cuál es este número en varas de Burgos?*

11. Restando del número 126 varas su tercio y despues el quinto de este resíduo, *¿cuál es el resíduo final en metros?*

12. Si un trabajor hace una obra cualquiera en 20 dias y otro emplea solo 15, *¿cuánto tiempo tardarán en hacer la misma obra, trabajando juntos y suponiendo 12 las horas diarias de trabajo?*

13. Una fuente dá 5 hectólitros en 8 minutos, otra 7 en 6 minutos y una tercera dá 3 litros por minuto, *¿cuántas cántaras darán las tres juntas en cada hora?*

14. *¿Cuántas libras son la mitad de los dos tercios de la quinta parte de 40 kilógramos de azúcar?*

15. Si una fuente dá 5 litros en 2 minutos y medio, *¿cuántos minutos tardará en llenarse un estanque de 100 azumbres?*

16. Una fuente dá 30 cuartillos por hora, otra 45 y otra 80, *¿cuántos hectólitros darán las tres fuentes en 24 horas?*

17. *Dividir 1950 reales entre dos personas*, con la condicion de llevar la primera lo que le corresponde en duros, y la segunda en napoleones, y ser tantas las monedas de una como las de otra.

18. Se han mezclado 40 litros y 12 centílitros de vino puro á 5 rs. y 50 cént. el litro con 10 litros y 2 cént. de vino aguado á 2 rs. el litro, *¿cuál será el precio de la mezcla?*

19. Comprada una pieza de paño de 54 metros y 2 decímetros á 10 duros y 12 reales el metro; y habiendo vendido 45 metros y 7 decímetros á 11 duros y 12 reales, y el resto á 12 duros y 8 reales y medio, *se pregunta la ganancia total.*

20. *¿Cuántas varas cuadradas componen* 40 fanegas y media, 520 áreas y 1503 piés cuadrados?

21. *Reducir á metros cuadrados 12 fanegas y 4 celemines de tierra.*

22. Si un quintal vale 125 duros, *hallar el valor de 10 libras y media.*

23. Si una fanega de trigo pesa 4 arrobas 10 libras y 8 onzas, *¿cuánto pesarán 11 celemines y 3 cuartillos?*

24. Resolver por el método de las partes alicuotas la cuestion siguiente: *siendo el valor de un quintal 104 duros 10 rs. y 20 mrs., averiguar el valor de 10 quintales, 3 arrobas, 1 libra y 10 onzas.*

25. Si 9 metros 2 centímetros de paño costaron 1000 reales, *¿cuál será el valor de un decámetro?*

26. Si un metro cúbico vale 2 duros y 11 rs., *¿cuántos metros cúbicos se podrán comprar con 100 duros y 12 reales?*

27. Siendo 57 duros y 15 rs. el valor de 4 quintales y 3 arrobas, *¿cuál es el precio de un quintal?*

28. Se han recibido 54 duros 8 rs. 10 mrs.; 104 napoleones 13 reales, 24 mrs. y 8 doblones Isabel. En cambio de este dinero se entregó una partida de acero á razon de 7 duros y 4 reales el quintal, *¿cuál es el número de quintales?*

29. De un capital líquido de 400 duros 12 rs. 10 mrs. se han satisfecho 400 rs. y 20 mrs., y con el resto se ha comprado una partida de trigo á razon de 55 rs. y medio la fanega: *averígüese el número de fanegas.*

30. Con 20 onzas de oro, 16 medias onzas, 10 doblon-Isabel, 70 duros, 125 napoleones, 104 pesetas y además el valor de 104 metros de paño á razon de 30 rs. cada decímetro, se han satisfecho los jornales de 4747 trabajadores, *se pregunta el jornal de cada uno.*

31. Un correo ha empleado 5 horas y 10 minutos en andar 40 kilómetros, *¿cuánto tiempo necesitará, para andar con iguales circunstancias, 42 miriámetros y medio?*

FIN DE LA PRIMERA PARTE.

SEGUNDA PARTE.

ENSEÑANZA SUPERIOR.

Potencias y raices.

Razones y proporciones.

Proporcionalidad de los números concretos.

Reglas de tres, compañia, aligacion, interés etc.

Breves nociones acerca de los logaritmos.

Reduccion de las unidades métricas á las de Castilla.

POTENCIAS Y RAICES.

Elevacion á potencias.

100. *Potencia* de un número es el producto, que resulta, de multiplicarle por sí mismo una ó mas veces. Este número, que se multiplica, se llama *raiz*, y el número de veces que se toma la raiz como factor se llama *exponente*, *grado* ó *índice* de la potencia.

Cuando la raiz se toma dos veces como factor, resulta la segunda potencia ó *cuadrado*; cuando tres, la tercera ó *cubo*, etc.

La *elevacion á potencias* tiene por objeto determinar las diferentes potencias de un número.

Para indicar una potencia cualquiera de un número, se escribe á su derecha y arriba el exponente ó grado de la potencia.

Así tendremos que el cuadrado de 5 será 25 y la quinta potencia de 2 es 32, pues

$$5^2=5\times5=25 \qquad 2^5=2\times2\times2\times2\times2=32$$

La primera potencia de un número es el mismo número.

Todas las potencias de la unidad son iguales á la unidad.

Las potencias sucesivas de la base 10 de nuestro sistema de numeracion, son las unidades 10, 100, 1000, 10000, etc., de los diferentes órdenes del mismo sistema.

101. La formacion de una potencia cualquiera de un número, sea entero ó fraccionario, se consigue con facilidad por medio de la multiplicacion sucesiva de dicho número por sí mismo cierto número de veces. El grado de la potencia determina el número de factores.

Hé aquí los *cuadrados* y *cubos* de los nueve primeros números enteros.

	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9
cuadrados...	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81
cubos........	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729

Del mismo modo $5^4=625$ y $(102)^2=10404$

Los cuadrados de los números enteros, cuya cifra de las unidades no sea cero, terminan por una de las cifras 1, 4, 5, 6, ó 9. Los cuadrados de los números, cuya cifra de las unidades es cero, terminan en dos ceros.

Las cifras del cuadrado de un número entero son el duplo de las de dicho número ó el duplo menos una.

102. *Para elevar un número fraccionario á una potencia cualquiera, se elevan el numerador y denominador á la misma potencia.*

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16} \qquad \left(\frac{5}{2}\right)^3=\frac{125}{8} \qquad \left(\frac{1}{10}\right)^4=\frac{1}{10000}$$

Para elevar un número misto á una potencia, se reduce el misto á fraccionario y se eleva este á dicha potencia.

$$\left(4\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{9}{2}\right)^2=\frac{81}{4}=20\frac{1}{4} \qquad \left(1\frac{1}{5}\right)^3=\left(\frac{6}{5}\right)^3=\frac{216}{125}=1\frac{91}{125}$$

103. *El cuadrado de la suma indicada de dos números enteros se compone del cuadrado del primero, mas el doble producto del primero por el segundo, mas el cuadrado del segundo.*

$$(4+5)^2=4^2+2 \text{ veces } 4\times5+5^2=16+40+25=81$$

$$\left(10+\frac{1}{2}\right)^2=10^2+2 \text{ veces } 10\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=100+10+\frac{1}{4}=110\frac{1}{4}$$

La diferencia de los cuadrados de dos números enteros consecutivos es igual al duplo del menor, mas 1.

Así, la diferencia de los cuadrados de los números consecutivos 100 y 101, es igual á $2\times100+1$ ó sea 201

Raiz cuadrada.

104. *Raiz* de un número es otro, que multiplicado por sí mismo una ó mas veces produce el número dado, que se llama *potencia* del mismo grado que el grado ó índice de la raiz.

Raiz cuadrada de un número es otro, cuyo cuadrado ó segunda potencia es igual al mismo número; *raiz cúbica* es otro, cuyo cubo ó tercera potencia es igual al mismo número, etc.

La *extraccion de raices* tiene por objeto hallar las diferentes raices de un número.

Para indicar la extraccion de la raiz de un número, se escribe delante el signo $\sqrt{\ }$ y en la abertura de este el índice de la raiz. El índice se suprime si es 2.

$$\sqrt{25}=5, \qquad \sqrt{64}=8, \qquad \sqrt[3]{8}=2 \qquad \sqrt[3]{64}=4$$

La raiz de un número, que no es potencia del mismo grado que el índice del radical, se llama *número incomensurable.*

$\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ y $\sqrt[3]{9}$ · son números incomensurables.

105. Llámase *raiz cuadrada entera* de un número entero la raiz cuadrada del mayor cuadrado entero contenido en dicho número.

Llámase *resíduo* ó resto de la raiz la diferencia entre el número dado y el mayor cuadrado entero contenido en él.

La raiz cuadrada verdadera se diferencia de la raiz cuadrada entera en menos de una unidad.

Para hallar las raices cuadradas exactas ó enteras de todos los números de una ó dos cifras, basta saber de memoria los cuadrados de los números díjitos. Así.....

$\sqrt{48}$ es 6; porque el mayor cuadrado contenido en 48 es 36.

Del mismo modo, $\sqrt{50}$ es 7; $\sqrt{74}$ es 8; $\sqrt{85}$ es 9.

106. *Para hallar la raiz cuadrada de un número entero cualquiera, se divide en secciones de á dos cifras, empezando por la derecha; se extrae la raiz cuadrada de la primera seccion de la izquierda, y se tendrá la primera cifra de la raiz. El cuadrado de esta cifra se resta de la primera seccion, y á la derecha del resto se baja la seccion siguiente de la cual se separa la primera cifra de la derecha con una coma. El número, que queda á la izquierda, se divide por el* *duplo de la raiz hallada. El cuadrado del cociente y el producto del cociente por el divisor se restan del número, que forman el dividendo y la cifra separada. A la derecha del nuevo resto se baja la seccion siguiente, y se continuará del mismo modo hasta que no haya mas secciones que bajar, y la raiz de la primera seccion, con los cocientes de las divisiones sucesivas, formará la raiz cuadrada del número dado.*

La raiz tiene tantas cifras como secciones tiene el número propuesto. El resto final debe ser menor que el duplo de la raiz hallada mas 1.

Hallar la raiz cuadrada del número 1024.

Disposicion del cálculo.	$\sqrt{10,24}=32$	raiz exacta del núm. dado.
cuadrado de la 1.ª cifra de la raiz.	9	
Residuo.	12,4	6 duplo de la 1.ª cifra de la raiz.
Producto del coc. por el divisor mas el cuadrado del cociente. . .	124	2... segunda cifra de la raiz.
Resto final.	00	

Dividido el número 1024 en secciones de á dos cifras, y siendo 3 la raiz cuadrada de 10, la primera cifra de la raiz que se busca será 3.

Restando de 10 el cuadrado de 3, y escribiendo á la derecha del resto la seccion siguiente, como el cociente de 12 entre el duplo 6 de la raiz hallada es 2, esta será la segunda cifra de la raiz, puesto que, restando su cuadrado y el producto de dicha cifra por el divisor del dividendo total 124, el resíduo es cero. Luego la raiz cuadrada de 1024 será 32.

Otro ejemplo:	$\sqrt{1,53,76}=124$	
	1	
	5,3	2 duplo de la raiz
Producto del coc. por el divisor mas el cuadrado del cociente. . .	44	2 segunda cifra de la raiz
	97,6	24 duplo de la raiz hallada
Producto del coc. por el divisor mas el cuadrado del cociente. . .	976	4 tercera cifra de la raiz
Resto final.	00	

Otros ejemplos:

$\sqrt{3448449}=1857$ | $\sqrt{90269001}=9501$

107. *Para extraer la raiz cuadrada de un número decimal, cuyo número de cifras es par, se extrae la raiz cuadrada como si fuera un número entero, y de la derecha del resultado se separan para decimales tantas cifras como indica la mitad de las cifras decimales del número dado.* Si el número de cifras decimales es impar, se escribe un cero á la derecha del número propuesto y quedará reducido este caso al anterior.

$\sqrt{72{,}25}=8{,}5$ exactamente

$\sqrt{32{,}7}=\sqrt{32{,}70}=5{,}7$ con menos error que una décima.

$\sqrt{0{,}94785}=\sqrt{0{,}947850}=0{,}973$ con menos error que una milés.

108. *Para extrar la raiz cuadrada de un número fraccionario, cuyos dos términos tienen raiz cuadrada exacta, se extraen la raiz del numerador y luego la del denominador.*

$$\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2} \qquad \sqrt{\frac{25}{36}}=\frac{5}{6} \qquad \sqrt{\frac{81}{144}}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

Si los dos términos no tienen raiz cuadrada exacta, se transforma el fraccionario en decimal, y se extrae la raiz de este.

$$\sqrt{\frac{5}{8}}=\sqrt{0{,}625}=0{,}79 \qquad \Big| \qquad \sqrt{4\frac{1}{3}}=\sqrt{4{,}3333}=2{,}08$$

109. *La raiz cuadrada de un número entero ó decimal se puede hallar con menos error que una unidad decimal dada con solo añadir ceros* (considerados como decimales) *á la derecha del número propuesto.*

Hallar la raiz cuadrada de 104 con menos error que una milésima:

$$\sqrt{104}=\sqrt{104{,}000000}=10{,}198$$

Del mismo modo la raiz cuadrada de 5,201 con menos error que una diez milésima será...

$$\sqrt{5{,}201}=\sqrt{5{,}20100000}=2{,}2805$$

$$\sqrt{\tfrac{3}{8}}=\sqrt{0{,}375}=\sqrt{0{,}375000000000}=0{,}395810$$

$$\sqrt{1\tfrac{2}{9}}=\sqrt{1{,}222222}=1{,}1055$$

RAZONES Y PROPORCIONES

y su aplicacion á las reglas de tres, compañía, aligacion, interés, etc.

---

110. *Razon* de dos números es el cociente indicado del primero, llamado *antecedente*, por el segundo, llamado *consecuente*. El antecedente es, pues, igual al producto del consecuente por la razon.

Para indicar la razon de dos números, se escribe el signo de dividir, entre el antecedente y el consecuente.

La razon de dos números no se altera multiplicando ó dividiendo el antecedente y el consecuente por un mismo número.

Asi $12:4$ es lo mismo que $120:40$ é igual á $6:2$

111. Llámase *proporcion* á la igualdad de dos razones.

La razon $10:5$ es lo mismo que $8:4$; luego los cuatro números 10, 5, 8 y 4 forman una proporcion, que se escribe así: $10:5::8:4$

y se enuncia diciendo 10 es á 5 como 8 es á 4.

Los términos primero y tercero son *antecedentes*, el segundo y cuarto *consecuentes*, el segundo y tercero *medios* y el primero y cuarto *extremos*. Cuando los medios son iguales, la proporcion es contínua, y el medio repetido se llama *medio, proporcional* á los otros dos.

$4:12::12:36$ es una proporcion contínua.

112. *En toda proporcion se verifica que el producto de los extremos es igual al producto de los medios, y al cuadrado del término medio en la contínua* y recíprocamente si el producto de dos números es igual al producto de otros dos, los cuatro forman una proporcion, siendo medios ó extremos los factores de un producto.

Si $3:5::8:10$ se verificará $4\times10=5\times8$

Siendo $8\times3=4\times6$ tendremos tambien $8:4::6:3$

Si $50:10::10:2$ se verificará $50\times2=10^2$

Siendo $12^2=8\times18$ tendremos tambien $8:12::12:18$

113. *Uno de los extremos de una proporcion es igual al producto de los medios dividido por el extremo conocido; y un medio equivale al producto de los extremos dividido por el otro medio* (*).

Así, en la proporcion $5 : 4 :: 10 : x$ será $x = \frac{4 \times 10}{5} = 8$

Igualmente en $5 : x :: \frac{1}{4} : 8$ $x = \frac{5 \times 8}{^1/_4} = 160$

En la proporcion continua, uno de los extremos es igual al cuadrado del término medio, dividido por el extremo conocido, y el medio equivale á la raiz cuadrada del producto de los extremos.

De la proporcion $x : 4 :: 4 : 10$ resulta $x = \frac{4^2}{10} = 1\frac{3}{5}$

$12 : x :: x : 3$ » $x = \sqrt{12 \times 3} = 6$

114. Una proporcion no deja de serlo, aunque se multipliquen ó se dividan por un mismo número todos sus términos, ó solo los dos antecedentes, los dos consecuentes, los dos primeros términos, ó los dos últimos.

En toda proporcion pueden mudar de lugar los medios, ó los extremos, sin que deje de subsistir proporcion: esta transformacion se llama *alternar*. Tambien se pueden poner los medios por extremos, que se dice *invertir*. Ultimamente, se puede poner la primera razon por segunda y esta por primera, lo que se llama *permutar*.

Segun esto, en la proporcion $5 : 4 :: 10 : 8$ se verificará

$5 : 10 :: 4 : 8$ | $4 : 5 :: 8 : 10$ | $10 : 8 :: 5 : 4$

Si dos ó mas proporciones se multiplican ó se dividen ordenadamente, los productos ó cocientes serán proporcionales.

Y por consiguiente, de las dos proporciones

$2 : 3 :: 10 : 15$ | $3 : 4 :: 6 : 8$

se deduce esta otra $2 \times 3 : 3 \times 4 :: 10 \times 6 : 15 \times 8$

(*) Los números desconocidos, se representan generalmente por la letra x.

Proporcionalidad de los números concretos.

115. Para que cuatro números concretos formen proporcion, se necesita que todos sean homogéneos, ó lo sean dos á dos. Por el enunciado de la cuestion cada uno de los dos primeros (llamados *principales*) está ligado al que llamamos su *correspondiente* de los otros dos.

Al proponernos resolver las dos cuestiones siguientes:

1.ª En 4 dias se gastaron 32 reales; en 10 dias *¿cuántos reales se gastarán*? Aquí los números homogéneos 4 dias y 10 dias se corresponden, el primero con 32 reales; y el segundo con los reales, que se piden.

2.ª En ocho meses hacen 10 hombres una obra determinada, para hacer la misma obra en dos meses, *¿qué número de hombres se necesita poner al trabajo*? Aquí los números principales son 8 meses y 2 meses, que se corresponde el primero con 10 hombres, y el segundo con x hombres.

116. *Cuando dos números homogéneos son proporcionales á otros dos tambien homogéneos de modo que* el número 1.° es al 2.° como el correspondiente al 1.° es al correspondiente al 2.°, *se dice que los cuatro forman proporcion directa ó son directamente proporcionales.*

Cuando dos números homogéneos son proporcionales á otros dos tambien homogéneos, de modo que el número 1.° es al 2.° como el correspondiente al 2.° es al correspondiente al 1.°; *se dice que los cuatro forman proporcion inversa ó son inversamente proporcionales.*

El análisis de la cuestion nos dará á conocer, si la proporcionalidad entre los cuatro números es directa ó inversa. Será *directa* cuando, multiplicando por 2, 3, etc., uno de los números principales, resulta multiplicado por 2, 3, etc., su correspondiente de la otra especie; y si, multiplicando el primero por 2, 3, etc., resulta dividido por el mismo número el segundo, será *inversa*.

En la cuestion primera, los cuatro números son directamente proporcionales; pues, si en 4 dias se gastan 32 reales, en 8 se gastarán 64. En la segunda los cuatro números son inversamente proporcionales; pues, si en 8 meses hacen 10 hombres una obra cualquiera, para hacerla en 16 meses bastará la mitad del número de hombres, es decir 5.

Regla de tres.

117. *Regla de tres* es la cuestion, en que entran cuatro números homogéneos ó dos de una especie y dos de otra, y los primeros estan en razon directa ó inversa de los segundos. Llámase regla de tres, porque su objeto es determinar uno de estos cuatro números, dados los otros tres.

Si 10 metros de tela costaron 50 reales, *¿cuánto costarán 6 metros?*

En esta cuestion los números principales 10 metros y 6 metros se corresponden el primero con 50 reales y el segundo con x reales; y como además, duplicando el número 10 metros, se duplica tambien su correspondiente 50 reales, pues doble tela debe costar doble dinero, la proporcion es directa y tendremos.....

10 met. : 6 met. :: 50 rs. : x rs. de donde $x=30$ reales.

Si 4,2 metros de paño costaron 200 reales; con 440 reales, *¿qué número de metros se comprará?*

4,2 met. : x met. : : 200 reales : 440 reales
que dá $x=9,24$ metros.

20 hombres hacen una obra en 12 dias, 16 hombres, *¿qué tiempo emplearán en la misma obra y en las mismas circunstancias?*

Aqui 20 hombres se corresponde con 12 dias, y como, siendo los hombres 40, los dias resultarian la mitad, pues doble número de hombres harian la obra en mitad del tiempo, la proporcion es inversa y tendremos.....
20 hombres : 16 hombres : : x dias : 12 dias $x = 15$ dias.

Para empapelar una sala se han necesitado 100 piezas de papel de $\frac{3}{4}$ de ancho, *¿cuántas piezas se necesitarán de otro papel de $\frac{2}{3}$ de ancho?* (*)

$$\tfrac{3}{4} : \tfrac{2}{3} : : x : 100 \qquad \text{de donde } x = 112\ \tfrac{1}{2}$$

luego se necesitarán 112 piezas y media.

(*) Cuanto mas estrecho sea el papel, mayor número de piezas se necesitan.

118. La regla general para resolver la regla de tres simple, sea directa ó inversa, es la siguiente:

El número menor de la primera especie es al mayor de la misma, como el menor de la segunda es al mayor de esta.

Basta, pues, averiguar, si el número desconocido es mayor ó menor que su homogéneo, para escribir en seguida esta proporcion.

Si una embarcacion tiene víveres para 10 dias; para estar en la mar 17 dias ¿á qué se reducirá la racion de cada indivíduo?

Cuantos mas dias esté el buque en la mar, menos racion corresponde á cada indivíduo; luego el valor de x será menor que 1, y tendremos.....

10 dias : 17 dias :: x : 1 racion $\qquad x=\frac{10}{17}$

Otros ejemplos:

1.° Habiendo comprado trigo á 30 reales la fanega, *¿á cómo debe venderse, para ganar un 8 por 100?*

¿Si en 100 debemos ganar 8, en 30 cuánto ganaremos?

100 : 8 :: 30 : x de donde resulta $x=2,4$

Luego el trigo debe venderse á 32 rs. y 4 décimas la fanega.

De otro modo: Cada 100 reales empleados en trigo deben convertirse despues de la venta en 108 reales, luego tendremos...

100 : 108 reales :: 30 : x que dá $x=32$ rs. y 4 décimas.

2.° Habiendo vendido una partida de azúcar á 5 reales y medio el kg. *¿cuál es el tanto por 100 de ganancia,* en el supuesto de haberse comprado á 4 reales y 20 céntimos?

¿Si 4 reales y 20 céntimos se han convertido en 5 reales y medio, 100 reales en cuánto se convertirán?

$x=130$ reales y 95 céntimos.

y por consiguiente, el tanto por ciento de ganancia seria 30 reales y 95 céntimos.

Todas estas cuestiones se pueden resolver, evitando las proporciones, por medio del método conocido con el nombre de *reduccion á la unidad.*

En efecto, propongámonos resolver el problema 1.° del número **117** y tendremos....

Si 10 metros costaron 50 reales, 1 metro costará 5 rs.
y por consiguiente 6 met. costarán $5\times6=30$ rs.

119. La regla de tres se llama *compuesta*, cuando su solucion depende de la de dos ó mas reglas de tres simples, ó bien, cuando el número, que se trata de determinar, depende directa ó indirectamente de dos ó mas circunstancias.

10 hombres en 12 dias han construido 100 varas de pared; se pregunta *cuántas varas harán 6 hombres, trabajando 21 dias.*

En esta cuestion las obras ejecutadas (en iguales circunstancias) estarán en razon directa del número de obreros y del tiempo empleado en el trabajo, y por consiguiente la resolucion de dos reglas de tres simple nos dará el número, que se busca.

$10 : 6 :: 100 : x$, que dá $x=60$ ó sea el número de varas ejecutadas por 6 hombres en 12 dias: luego la proporcion $12 : 21 :: 60 : X$ nos dará el número pedido 105 varas (*)

Siendo necesarios 115 kg. de heno para mantener 3 caballos durante 4 dias, *¿cuántos kg. se necesitarán, para mantener 100 caballos durante 3 semanas?*

3 caballos : 115 kg. :: 100 caballos : x $\quad x=3833\frac{1}{3}$

4 dias : $3833\frac{1}{3}$ :: 21 dias : x $\quad x=20125$

Luego el número, que se busca, será igual á 20125 kg. ó sean 201 quintales métricos y 25 kg.

600 hombres en 15 dias, trabajando 12 horas diarias, han construido la mitad de las fortificaciones de una plaza; para completar la obra en 11 dias, trabajando 800 hombres, *¿qué número de horas deben trabajar cada dia?*

Aqui el número de hombres, lo mismo que los dias de trabajo, son inversamente proporcionales á las horas diarias de trabajo, y por consiguiente:

$800 : 600 : 12 : x$ que dá $x=9$ horas

$11 : 15 :: 9 : X$ de donde $X=12$ horas... 16 minutos.

(*) Este mismo resultado se obtiene resolviendo solo una proporcion:

En efecto, de las dos proporciones $\left\{\begin{array}{l} 10 : 6 :: 100 : x \\ 12 : 21 :: x : X \end{array}\right\}$

se deduce $10\times12 : 6\times21 :: 100 : X$ que da $X=105$ varas.

Regla de compañía.

120. Llámase *regla de compañía* la que enseña á averiguar la ganancia ó pérdida, que corresponde á cada uno de varios indivíduos, que han puesto su caudal en un fondo, en proporcion con los capitales de los asociados y del tiempo, que dichos capitales han estado en el fondo. Se llama *simple*, si el tiempo es el mismo para todos, y *compuesta* cuando esto no se verifica.

En la regla de compañía simple se verifica que:

Capital total : ganancia ó pérdida total : : capital de cada uno : ganancia ó pérdida correspondiente, luego se puede establecer la siguiente regla....

La ganancia ó pérdida de cada uno de los asociados se halla, multiplicando la ganancia total por el capital asociado, cuya ganancia ó pérdida se busca, y el producto se divide por la suma de todos los capitales ó sea por el fondo total.

1.° Tres asociados han puesto en un fondo, el 1.° 100 duros, el 2.° 240 y el tercero 170; todos por el mismo tiempo: han ganado 80 duros, ¿cuánto ganará cada uno?

$$\left.\begin{array}{l} 1.° \ 100 \text{ pesos.} \\ 2.° \ 240 \\ 3.° \ 170 \end{array}\right\} \text{ganaron 80 pesos.}$$

$$\overline{510 \text{ pesos; capital total.}}$$

Ganancias.

$$1.° \ \frac{80\times100}{510} = 15 \text{ p. } 13 \text{ rs. } 24{,}7 \text{ ms.}$$

$$2.° \ \frac{80\times240}{510} = 37 \ldots \ 12 \ldots \ 32$$

$$3.° \ \frac{80\times170}{510} = 26 \ldots \ 13 \ldots \ 11{,}5$$

$$\overline{80}$$

Tambien se puede resolver la regla de compañía simple, dividiendo la ganancia total por el capital de todos los sócios y multiplicando despues este resultado por el capital de cada sócio.

Asi en el ejemplo anterior, dividiendo 80 por 510, tendremos la ganancia de un duro; multiplicando luego este cociente por 100, resultará la ganancia del primero, multiplicando el mismo cociente por 240, tendremos la ganancia del segundo, y asi sucesivamente.

2.° Cinco sócios A, B, C, D, E, forman una sociedad de 200 acciones, tomando el primero 80, el segundo 50, el tercero 35, el cuarto 20 y el quinto 15. Suponiendo que hayan perdido 24000 reales, *se desea averiguar lo que corresponde á cada sócio.*

Dividiendo 24000 reales por 200, el cociente 120 reales será la pérdida, que corresponde á cada accion, y por consiguiente, multiplicando este número por 80, tendremos la pérdida del 1.°, multiplicándole por 50 resultará la del 2.°, etc.

Luego las pérdidas de todos los sócios serán.

A, 9600; B, 6000; C, 4200; D, 2400; y E, 1800.

3.° *Dividir 48000 reales entre tres personas, de modo que la segunda lleve tres veces mas que la primera y la tercera tanto como las otras dos.*

Suponiendo que la primera llevó 1 real, la segunda llevará 3 y la tercera 4, por consiguiente la cuestion queda reducida á dividir el número 48000 reales en la misma razon que lo está 8 en las partes 1, 3 y 4. Luego tendremos, para hallar la parte del primero, $8 : 1 :: 48000 : x$ de donde se deduce 6000 rs. para el 1.°, 18000 rs. para el 2.° y 2400 rs. para el 3.°

121. *En la regla de compañía compuesta, se multiplica el capital de cada asociado por el tiempo, que ha estado en el fondo, y la cuestion queda reducida á una regla de compañia simple.*

Los capitales de tres asociados son 200, 150 y 500 duros: el primero le ha puesto en el fondo por 4 años, por 5 el segundo y por 2 el tercero: la pérdida total es de 200 duros. Se pregunta la pérdida de cada uno.

200 pesos en	4 años se consideran como	4×200	duros en un año
150	por 5 años son lo mismo que	5×150	por un año
500	por 2 años son como	2×500	en un año

Luego el problema propuesto se puede sustituir por este otro: tres sugetos forman compañía durante un año; el primero pone 800 duros, el segundo 750 y el tercero 1000: han perdido 200 duros ¿cuánto corresponde á cada uno?

Capital total 2550 duros.

Y por consiguiente, el mismo cálculo de los ejemplos anteriores nos dará los valores siguientes:

Pérdida del 1.° = 62 pesos 14 rs. 30,7

Pérdida del 2.° = 58.........16.....16

Pérdida del 3.° = 78..........8.....21,3

Regla de aligacion.

122. Se llama *regla de aligacion*, la que tiene por objeto resolver las dos cuestiones siguientes: 1.ª *Hallar el precio medio de la mezcla de varias especies, conociendo el precio y la cantidad de las especies mezcladas.* 2.ª *Hallar el número de unidades, que conviene mezclar, para vender la mezcla á un precio medio, conociendo los precios de las unidades mezcladas.*

La regla de aligacion se divide en *directa ó inversa*, segun resuelve la una ó la otra cuestion.

123. *Para resolver una regla de aligacion directa, se divide el valor total de las unidades mezcladas por el número de ellas.*

Habiendo mezclado 10 cántaras de vino de á 6 reales la cántara, con 7 de á 3, *¿cuál es el precio de la mezcla?*

10 cántaras á 6 reales = 60 reales	
7 cántaras á 3 reales = 21 reales	
17 número de cántaras	81 rs. valor de las 17 cántaras.

Luego, dividiendo 81 por 17, el cociente 4 reales y 26 maravedises expresará el valor de una cántara.

Otros ejemplos:

10 fanegas á 40 rs. = 400 rs.	valor de una fanega 41 rs. 23 ms.
15 fanegas á 44 rs. = 660 rs.	
5 fanegas á 38 rs. = 190 rs.	
30 número de fanegas; 1250 reales valor de las 30 fanegas (*).	

2.º Fundiendo 70 kg. de cobre con 30 de zinc, resultan 100 de laton: si cada kg. de cobre vale 10 reales y el de zinc 2 rs. y medio, *¿cuánto costará cada kilógramo de laton?*

70 kg. de cobre á 10 reales = 700	total 775
30 de zinc á $2\frac{1}{2}$ = 75	

Dividiendo este número por 100, resulta que el kilógramo de laton vale 7 reales y 75 céntimos.

(*) Conocidos varios valores aproximados de un número, se llama *promedio* á otro nuevo valor deducido de los valores dados y mas exacto que cada uno de ellos. El *promedio* de dos ó mas números conocidos es igual al cociente de dividir la suma de todos por el número de ellos.

3.° Fundiendo 100 libras de cobre con 11 de estaño, resultan 111 del bronce propio para construir estátuas y cañones: Suponiendo que la libra de cobre vale 4 reales y la de estaño 8 reales y 10 maravedises, *¿cuál será el valor de la libra de bronce?*

Las cien libras de cobre importan 400 rs.

Y las 11 de estaño. . . . . 91 rs. y 8 mrs.

Luego si dividimos la suma. . . 491 rs. y 8 mrs. por 111; el cociente nos dará el número, que se busca.

4.° Fundiendo 110 kg. de estaño, con 290 de cobre, 5 de zinc y 4 de plomo, se ha hecho una campana. Si el kg. de estaño vale 9 reales y medio, el de cobre 10 reales, el de zinc 2 reales y el de plomo 2 reales 25 céntimos, *¿cuál es el precio de todo el bronce de la campana y el de un kg. del mismo?*

Los	110 kg.	de estaño valen.	1045
Los	290	de cobre.	2900
Los	5	de zinc.	10
Los	4	de plomo.	9
		Precio total del bronce. . .	3964

Dividiendo ahora este número por los kilógramos de bronce, que componen la campana, el cociente será el valor de uno de ellos.

124. *Para resolver la regla de aligacion inversa, se toma de cada especie de unidades, que se han de mezclar, la diferencia entre el precio medio y el de la otra especie.*

Teniendo vino de á 14 reales el litro y vino de á 24, se quiere saber el número de litros, que se deben mezclar de cada especie, para vender la mezcla á 20 reales.

Precio medio 20 reales.	vino de 14 rs.	$24 - 20 = 4$
	vino de 24 rs.	$20 - 14 = 6$

Luego se pueden mezclar 4 litros de á 14 reales y 6 de á 24 ó un número cualquiera de veces 4 de á 14 reales y el mismo número de veces 6 de á 24.

Esta cuestion es pues indeterminada, puesto que ofrece cuantas soluciones se quieran, con solo multiplicar 4 y 6 por un número cualquiera.

Para que esta y todas las cuestiones análogas sean determinadas, ó lo que es lo mismo, para que las incógnitas tengan un solo valor, hay que someterlas á nuevas condiciones, como son por ejemplo la de conocer una de las dos cantidades, que entran en la mezcla, ó bien la suma ó la diferencia de ambas.

¿Cuántas libras de café de 14 reales se deben mezclar con 15 libras de á 10, para vender la mezcla á 9 reales?

El procedimiento anterior nos dirá que mezclando 5 libras de lo malo con 1 de lo bueno, resulta la mezcla á 9 reales la libra; luego quedará resuelto el problema por la siguiente regla de tres: si á 5 libras de á 10 reales se debe mezclar 1 de á 14, á 15 libras de lo primero ¿cuántas libras corresponden de lo segundo?

5 libras (á 10 reales) : 1 libra (á 14 reales) ::
15 libras (á 10 reales) : x libras (á 14 reales).

de donde resulta para valor de x el número 3 libras.

¿Cuántos hectólitros de trigo de á 85 y de á 98 reales deben mezclarse para formar 500 hectólitros de á 90 reales?

$$90 \text{ rs. (precio medio)} \begin{cases} 85 \text{ rs.} \ldots\ldots\ldots\ 8 \text{ hectólitros.} \\ 98 \text{ rs.} \ldots\ldots\ldots\ 5 \text{ hectólitros.} \end{cases}$$

luego si para 13 hectólitros de trigo mediano, se toman 8 de primera clase, para tener 500 hectólitros, ¿cuántos se han de tomar?

307,69 hectóg. de primera clase y 192,31 hectóg. de segunda.

125. *Cuando las especies son mas de dos, se hallará el número de las unidades, que se han de mezclar de dos cualesquiera, cuyos precios comprendan al precio medio; luego el de otras dos, y asi sucesivamente.*

¿Qué número de kilógramos de té de á 120 reales, 160 y 70 se han de mezclar, para vender la mezcla á 110 reales?

$$\text{Precio medio } 110\text{; luego tendremos} \begin{cases} 120.\ .\ .\ .\ \ 40 \\ \ \ 70.\ .\ .\ .\ \ 50 + 10 \\ 160.\ .\ .\ .\ \ 40 \end{cases}$$

Y por consiguiente, 40 kilógramos de á 120 reales, 60 de á 70 reales y 40 de 160 reales valen lo mismo que 140 kilógramos, vendidos al precio medio de 110 reales.

Tambien aquí tenemos un número infinito de soluciones, multiplicando 40, 60 y 40 por un mismo número, sea el que quiera.

Regla de interés.

126. Se llama *interés* la ganancia, que produce un capital empleado. Para mayor uniformidad en el modo de determinar el interés, se conviene ordinariamente en el que produce el capital 100 unidades en un año, cuyo número, considerado como absoluto, se llama *tanto por ciento*. El interés puede ser simple ó compuesto; llámase *simple*, cuando el capital es el mismo durante todo el tiempo que existe el empleo del capital, y compuesto cuando el interés de cada año se añade al capital existente, para ganar nuevos intereses en los años sucesivos.

En las cuestiones de interés simple hay que distinguir dos casos: 1.°, que el capital se emplee por un año, y 2.° que se emplee por mas ó menos de un año. En el primer caso, la siguiente proporcion resuelve con facilidad las diversas cuestiones, que pueden presentarse.....

100 : capital :: tanto por 100 : interés anual.

Hallar el interés anual de 1800 *reales al* 5 *por* 100.

100 : 1800 :: 5 : x de donde x=90 reales (*).

Hallar el capital, que produce 180 *reales anuales de interés, al* 3 *por* 100.

100 : x :: 3 : 180 de donde x=6000 reales.

Se desea saber el tanto por 100, *á que se prestaron* 5000 *reales, para producir* 30 *duros en un año.*

100 : 5000 :: x : 600 : luego el tanto por ciento será 12.

Para el segundo caso tendremos las siguientes proporciones, segun que la unidad de tiempo sea el dia, el mes ó el año.

Tomando por unidad de tiempo el dia (**).

36000 : capital$\times$tiempo :: tanto por 100 : interés que se pide.

(*) Para hallar un cierto tanto por ciento de un número cualquiera, se multiplica este número por el tanto y del producto se separan para decimales las dos cifras de la derecha. Si estas dos cifras son centésimas de real, se convertirán en maravedises tomando su tercera parte.

¿Cuál es el $\frac{1}{2}$ por 100 de 1000000 reales? x=5000 reales.

(*) En el comercio se considera el año de 360 dias y el mes de 30 dias.

Tomando por unidad de tiempo el mes.

1200 : capital×tiempo : : tanto por 100 : interés pedido.

Tomando por unidad de tiempo el año.

100 : capital×tiempo : : tanto por 100 : interés respectivo.

Hallar el interés de 2150 *duros en* 80 *dias al* 12 *por* 100.
36000 : 2150×80 : : 12 : x de donde x=57 duros y 6,7 rs.

¿En cuántos dias 9000 *rs. producirán* 100, *al* 10 *por* 100?
36000 : 9000×x : : 10 : 100; que dá x = 40 dias.

600 *doblones han producido* 45 *de interés en tres meses, ¿cuál es el tanto por* 100?
1200 : 600×3 : : x : 45 luego el tanto por 100 será 30.

¿Cuál es el capital, que produce 800 *reales de interés en* 3 *años, al* 1 $\frac{1}{2}$ *por* 100?
100 : x×3 : : 1 $\frac{1}{2}$: 800 de donde x=17777 $\frac{7}{9}$ reales.

127. *Se dice que el interés es compuesto cuando al fin de cada año se capitalizan los intereses, esto es, se une el capital con los intereses devengados en el año anterior, para producir nuevos intereses en el año siguiente.*

Las cuestiones de interés compuesto se resuelven por medio de la siguiente fórmula, en que c representa el capital empleado ó puesto á interés al 100 r por 100 (*) y C el capital total ó sea el capital primitivo, con mas todos los intereses devengados durante el tiempo t años.

$$C=c\times(1+r)^t$$

Hallar los réditos de 4000 *reales en* 3 *años, á interés compuesto al* 5 *por* 100.

c=4000 rs. 100r=5 y por consig. r=0,05 y t=3 años.

$$1+r=1,05$$
$$(1+r)^t=(1,05)^3=1,157625$$
$$c\times(1+r)^t=4000\times\ 1,157625$$

Capital total. . . . . 4630 rs..... 17 mrs.

Intereses compuestos. . . 630 rs..... 17 mrs.

Al tratar en el capítulo inmediato de las aplicaciones de los logaritmos, veremos la facilidad de resolver por su medio esta y otras cuestiones análogas, tanto mas complicadas cuanto mayor sea el número de años, que permanece el capital empleado.

(*) O lo que es lo mismo siendo r el interés de una unidad del capital.

Descuento de letras.

128. Se llama *letra de cambio* un papel ó billete por el cual una persona se compromete por sí ó por medio de sus corresponsales á pagar á otra, bien sea del mismo pais ó extranjero, la cantidad consignada en el mismo billete. En la letra de cambio, no sólo se expresa el nombre del que la libra ó *gira*, el del que debe pagarla y el del dueño ó *tenedor* (que es el que debe cobrar su importe) sino tambien, si puede hacerlo á la vista, es decir; en el acto de su presentacion, ó á un plazo determinado de 2, 3, 8, 15, 90, etc., dias, en cuyo caso el pagador la firma *aceptándola* ó sea comprometiéndose al pago de su valor, despues de transcurrido el plazo. El dueño ó tenedor de una letra puede *endosarla*, es decir, transmitir su derecho á otra persona, y esta á otra, etc., con solo escribir á la espalda que se pague á la órden del nuevo tenedor.

Siendo el objeto de las letras de cambio el evitar la conduccion material del dinero, puede suceder, segun las circunstancias mercantiles de las plazas, que el tenedor de una letra haya pagado por ella una cantidad igual á su valor efectivo, ó un tanto por 100 convenido de mas ó de menos. En el primer caso se dice que la letra se ha negociado á la par, en el segundo con *beneficio* y en el tercero con *daño*, puesto que estas denominaciones se refieren á la persona, que vende ó entrega la letra.

Modelo de una letra de cambio.

VALLIN Y BUSTILLO.

MADRID 2 DE NOVIEMBRE DE 1850. **8000 rs.**

A *cuatro dias vista* se servirá V. pagar por esta *primera* de cambio á la órden de *Smit y Compañía* la cantidad de **ocho mil reales en plata ú oro** valor *recibido del mismo*, segun aviso de S. S. S. Q. S. M. B.

Vallin y Bustillo.

Sr. D. Francisco Pizarro de Valladolid.

Vale 8000 rs.

Siendo el beneficio para la persona, que ha entregado la letra, se aumentará á los 8000 reales el 1 por 100, que son 80, y por consiguiente Smit debe pagar por ella 8080 reales, recibiendo en cambio solo 8000 en Valladolid, cuatro dias despues de su presentacion en casa de Pizarro.

¿Cuál será la cantidad entregada por Smit al recoger la letra recibida con $\frac{1}{2}$ por 100 de daño?

El medio por 100 de 8000 reales es 40 reales; luego el número, que se busca, será 7960 reales.

Ultimamente, entregando 20000 reales por una letra comprada al uno y medio por 100 de daño, *¿ cuál deberá ser su valor nominal ó sea la cantidad expresada en la misma letra?*

El uno y medio por 100 de 20000 reales son 300; luego el valor nominal de la letra será 20300 reales.

129. Si las monedas de la plaza, en que se gira una letra, son diferentes de las de la plaza en que debe pagarse, como sucede entre España y Francia, España é Inglaterra, etc., entonces se llama *cambio* al mayor ó menor número de monedas, que se dan por un duro español. Francia dá 5 francos 25 céntimos mas ó menos é Inglaterra 50 peniques mas ó menos, y asi sucesivamente (*).

Entregando en España 10500 reales para una letra pagadera en Paris al cambio de 5 francos y 30 céntimos, *¿cuál será su valor nominal en Francia?*

Si 20 reales de España valen 5,30 francos de Francia; 10500 reales de España, ¿cuántos francos valdrán?

$20 : 5{,}30 :: 10500 : x$ luego $x = 2782$ fr. y 50 cént.

Si la letra se girase contra una casa de Lóndres al cambio de 52, su valor nominal seria....

$20 : 52 :: 10500 : x$ de donde resulta $x = 27300$ peniques.

(*) La unidad monetaria en Francia es el *franco*, que se divide en 100 *céntimos*, y la de Inglaterra es una *libra sterlina* (moneda imaginaria) que se divide en 20 *chelines*, y el chelin en 12 *peniques*.

130. En todas estas cuestiones se ha supuesto que las letras se hacian efectivas despues de su vencimiento. Puede sin embargo el tenedor hacerlas efectivas antes de esta época, mediante un tanto por 100 convenido, que se llama *descuento*. Generalmente, al fijar el tanto por 100 de descuento, se fija por el plazo de un año.

¿Cuál es el descuento de una letra de 8000 *rs. que vence dentro de un año al* 5 *y medio por* 100*?*

El 5 y medio por 100 de 8000 reales ó sea el descuento, que se busca es igual á 440 reales;

Luego el *valor actual* de la letra será 7560 reales.

Si el plazo de la letra es diferente de un año, se halla el descuento para un año y en seguida se calcula el correspondiente al plazo fijado por la proporcionalidad entre los descuentos y los tiempos.

¿Cuál es el descuento de una letra de 100000 *reales, pagados á* 90 *dias vista, siendo* 8 *el tanto por* 100 *al año?*

El descuento en un año seria:

$$100 : 8 :: 100000 : x \quad \text{luego} \quad x = 8000$$

Si en 360 dias se deben descontar 8000 reales, en 90 dias ¿cuánto se descontará? 2000 reales.

Luego el *valor actual* de la letra será de 98000 reales.

Fondos publicos.

131. Llámase *renta contra el Estado* el interés de los capitales prestados al Gobierno por los particulares.

El Gobierno tiene el derecho de amortizar el capital recibido, y, mientras no lo verifique, satisface por semestres, que vencen en junio y diciembre, el interés estipulado, quedándose con una parte del título llamada *cupon*.

Si un título se vende por todo su valor nominal, se dice que se ha negociado á la *par*. Hay *alza*, cuando aumenta el valor del papel, y *baja* cuando disminuye.

Los títulos ó fondos públicos de España son el 3 por 100 consolidado y el 3 por 100 diferido. El valor del 3 por 100 consolidado en la actualidad es de 39 á 40; es decir, que el tenedor de un título de 100 rs., por ejemplo, de capital, y que produce una renta anual de 3 rs., no vale al contado mas que 39 ó 40 reales.

Logaritmos.

Breves nociones acerca de los logaritmos. Uso de las tablas y su aplicacion á la resolucion de las principales cuestiones aritméticas.

132. Llámanse *tablas de logaritmos* á un libro cuyas páginas, divididas en columnas, contienen por un lado la série de los *números* naturales 1, 2, 3, 4,..... hasta 11000 las llamadas pequeñas y hasta 100000 ó 108000 las grandes, y en frente de cada uno de estos números, otro decimal, que es su *logaritmo*, calculado con arreglo á ciertas condiciones cuya inteligencia no es de este lugar.

Siendo los logaritmos números decimales, constan de parte entera y parte decimal. La parte entera, que se llama *característica* del logaritmo es.....

0 para los logaritmos de los números de una cifra;
1 para los logaritmos de los números de dos cifras;
2 para los logaritmos de los números de tres cifras;
3 para los logaritmos de los números de cuatro cifras;
4 para los logaritmos de los números de cinco cifras;

Y asi sucesivamente, de modo que la característica del logaritmo de un número consta de tantas unidades como cifras menos una tiene dicho número (*).

La parte puramente decimal del log. se llama *mantisa.*

Los logaritmos de los números 1, 10, 100, 1000 y en general de la unidad seguida de ceros, no tienen mantisa, son pues respectivamente 0, 1, 2, 3..... y en general un número entero, que consta de tantas unidades como ceros acompañen á la unidad. Segun esto el

log. de 100000 es 5 y el log. de mil millones será 9.

(*) Puesto que es tan fácil hallar la característica del log. de un número los autores de las tablas suelen suprimir en ellas todas las características, dejando al calculador su determinacion en cada caso.

132. Los logaritmos tienen propiedades muy notables, que permiten abreviar y facilitar los cálculos aritméticos.

Estas propiedades son las siguientes:

1.° *El logaritmo de un producto de dos ó mas factores es igual á la suma de los logaritmos de estos factores.*

Por ejemplo, tomando de la primera página de las tablas del señor Vazquez Queipo, que contienen los logaritmos de todos los números desde 1 hasta 99 con su correspondiente cacaracterística, los logaritmos de los números 15 y 5, tendremos.....

$$\begin{array}{lr} & \text{log. } 15=1.176091 \\ & \text{log. } 5=0.698970 \\ \hline \text{Suma.... . .} & 1.875061 \end{array} \text{ ó sea el log. de } 15\times5=75$$

$$\begin{array}{lr} \text{Otro ejemplo: } & \text{log. } 3=0.477121 \\ & \text{log. } 4=0.602060 \\ & \text{log. } 8=0.903090 \\ \hline & 1.982271 \end{array} \text{ ó sea el log. de } 96=3\times4\times8$$

De esta propiedad se deduce que

Para multiplicar dos ó mas números, basta sumar sus logaritmos, y el número correspondiente á esta suma será el producto.

Hallar por logaritmos el producto de 192 por 27.

$$\begin{array}{r} \text{log. } 192=2.283301 \\ \text{log. } 27=1.431364 \\ \hline 3.714665 \end{array}$$

y como este log. corresponde á 5184; tendremos que el producto de 192 por 27 será igual á 5184, como en efecto así se verifica.

Del mismo modo, sumando los log. de 53, de 9 y de 5, tendremos el log. 3.377489, que corresponde al número 2385, producto de 53 por 9 y por 5 (*).

(*) Las mantisas logarítmicas de las tablas de V. Queipo tienen 6 cifras decimales, otras tienen 5 y otras 7, etc., y esto es natural, puesto que, siendo los logaritmos números incomensurables, se pueden expresar con mas ó menos exactitud, pero siempre con un error por exceso ó por defecto de menos de media unidad del último órden decimal. Estos errores producen muchas veces, al combinar varios logaritmos, la diferencia de 1 y á veces 2 unidades en la última cifra decimal del resultado, que se debe tener presente, para no empeñarse en buscar con exactitud lo que solo es aproximado, como sucede en el ejemplo del texto.

2.° *El logaritmo del cociente de dos números es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.*

Asi tendremos que el log. 15=1.176091
y el log. 5=0.698970

y por consiguiente el resíduo.... 0.477121
será el logaritmo de 3 ó sea del cociente de 15 por 5.

Segun esto; *para dividir un número por otro, se resta del logaritmo del dividendo el logaritmo del divisor, y el número correspondiente á este resíduo será el cociente.*

Hallar el cociente de 5184 por 192.

log. 5184=3.714665
log. 192=2.283301

1.431364 y como este log. corresponde al núm. 27, el cociente de 5184 por 192 será 27, como en efecto se verifica.

3.° *El logaritmo de una potencia cualquiera de un número es igual al logaritmo de dicho número, multiplicado por el exponente ó índice de la potencia.*

Siendo pues el log. de 15=1.176091
multiplicándole por 3

resultará 3.528273=log. 3375
y por consiguiente el cubo de 15 será 3375

Luego, *para elevar á una potencia cualquiera un número entero, se multiplica el logaritmo de este número por el índice de la potencia y el número de las tablas, correspondiente á este producto, será la potencia pedida.*

Hallar el cuadrado del número entero 79.

log. 79=1.897627
×2

3.795254 luego el cuadrado de 79 debe ser 6241.

4.° *El logaritmo de una raiz de un número es igual al logaritmo de este número, dividido por el índice de la raiz.*

Dividiendo el log. de 3375, que es 3.528273, por 3, resulta 1.176091, ó sea el logaritmo, que nos dán las tablas para el número 15, ó sea la raiz cúbica de 3375.

Luego *para hallar la raiz de un grado cualquiera de un número dado, se divide el logaritmo de este número por el índice de la raiz, y el número correspondiente al cociente será la raiz pedida.*

¿Cuál es la raiz cuadrada de 6241?

$$\frac{\log.\ 6241}{2}=\frac{3.795254}{2}=1.897627=\log.\ \text{de}\ 79$$

luego 79 será la raiz cuadrada del número propuesto.

Del mismo modo, para la raiz cúbica de 1728 tendremos...

$$\frac{\log.\ 1728}{3}=\frac{3.237544}{3}=1.079181=\log.\ 12$$

luego 12 será la raiz cúbica del número 1728.

Estas cuatro propiedades son las mas preciosas de los logaritmos, puesto que por su medio cambiamos la multiplicacion en suma, la division en resta, la elevacion en multiplicacion y la extraccion de raices en division, verificándose además que estas dos últimas operaciones se reducen casi siempre á multiplicar ó dividir un número decimal por un número díjito.

131. Las ventajas, que ofrecen los logaritmos, son pues de grande utilidad; pero, para poder aplicarlas á toda clase de cuestion, necesitamos conocer siquiera sea muy ligeramente (*) el modo de calcular los logaritmos de los números, tanto enteros como fraccionarios, que no se hallan en las tablas.

1.° *Para hallar el logaritmo de un número* 10, 100, 1000, *etc., veces mayor ó menor que otro de la tabla, basta añadir ó restar de su característica* 1, 2, 3, *etc., unidades.*

Así, siendo el log. de 185 = 2.267172; tendremos.....

log. 1850 = 3.267172	log. 185000 = 5.267172
log. 18,5 = 1.267172	log. 1,85 = 0.267172

Luego al multiplicar un número por 10, aumenta la característica de su logaritmo en 1 unidad; al multiplicarle por 100, aumenta la característica en 2 unidades, al multiplicarle por 1000, aumenta en 3 unidades y así sucesivamente. Inversamente, al dividir un número por 10, la característica de su log. disminuye en una unidad, al dividirle por 100, la característica disminuye en 2 unidades, etc., permaneciendo siempre constante la mantisa.

log. 149600000 = 8.174932 | log. 1,496 = 0.174932

(*) Decimos muy ligeramente, porque el Sr. V. Quecipo expone en la introduccion de su obra cuantos pormenores son necesarios, no solo para resolver estas cuestiones, sino tambien las relativas al modo de manejar las tablas en todos los casos.

2.° *El logaritmo de un número fraccionario es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.*

El log. de un número misto es igual al logaritmo del fraccionario equivalente.

Asi tendremos; log. $\frac{12}{7}$ = log. 12 — log. 7 = $\begin{cases} 1.079181 \\ 0.845098 \end{cases}$

log. pedido. . . . 0.234083

Igualmente resulta para....

log. $1\frac{1}{2}$ = log. $\frac{3}{2}$ = 0.176091 | log. $\frac{1512}{999}$ = 0.179986

Si los quebrados son propios, es decir, si tienen el numerador menor que el denominador, no se podrá hacer la resta los logaritmos, pero en este caso se resta del logaritmo del denominador el logaritmo del numerador anteponiendo, al resultado el signo —

Estos logaritmos se llaman *negativos* y para hacer uso de ellos se les añaden 10 de característica, resultando así, despues de restar el uno del otro, un nuevo logaritmo llamado *complemento*, que tiene 10 unidades mas que el primero.

En los logaritmos complementarios se escribe el punto, que separa la característica de la mantisa, en la parte superior, para recordar que en el resultado de los cálculos sucesivos con dicho logaritmo se deben rebajar las 10 unidades, que lleva de mas.

Segun esto, tendremos log. $\frac{2}{3}$ = $\begin{cases} \text{log. } 2 = 0.301030 \\ \text{log. } 3 = 0.477121 \end{cases}$

— 0.176091 log. negat.

y añadiendo 10.000000 á este log. resulta 9.823909 que será el comp. log. del quebrado propuesto.

Del mismo modo; log. $\frac{11}{12}$ = $\begin{cases} \text{log. } 11 = 1.041393 \\ \text{log. } 12 = 1.079181 \end{cases}$

— 0.037788

luego el comp. log. de $\frac{11}{12}$ será 9.962212

Aplicaciones de las reglas anteriores.

135. Ya hemos dicho que, por medio de los logaritmos, la multiplicacion se cambia en suma, la division en resta, la elevacion á potencias en multiplicacion y la extraccion de raices en division. Esto supuesto:

Hallar por logaritmos el producto de 1,857 por 1,781 con tres cifras decimales.

log. 1,857 = 1.268812
log. 1,781 = 0.250664
1,519476; luego el producto será 3,307

Hallar en el mismo supuesto que antes el cociente de los mismos números.

log. 1,857 = 1.268812
log. 1,781 = 0.250664
1.018148 ; luego el cociente será 1,043

Si se combina la multiplicacion y la division, como sucede siempre que haya de calcularse el cuarto término de una proporcion, se suman los logaritmos de los medios y de esta suma se resta el logaritmo del extremo conocido.

Sea la proporcion 6225 : 159,6 :: 804,9 : x

log. 159,6 = 2.203033
log. 804,9 = 2.905742 (*)
5.108775
log. 6225 = 3.794139
1.314636 ; luego el valor de x será 2,064

Hallar la potencia de quinto grado del número 2,578.

log. 2,578 = 0.411283
× 5
2.056415 = log. 11,39 aproximadamente;

luego 11,39 será la potencia del quinto grado de 2,578

(*) En la práctica se escriben simplemente los logaritmos y el número correspondiente al resultado final, que no expresamos con mayor exactitud, por no complicar inútilmente la sencillez del procedimiento en cada caso.

Hallar las raices cuadrada y cúbica del número 14960000, cuyo log. es 7.174932.

Dividiendo este logaritmo, por 2 para la raiz cuadrada y por 3 para la raiz cúbica; resultan respectivamente 3.587466 y 2.391644: como estos logaritmos corresponden aproximadamente á los números 3868, y 246,4, quedará resuelto el problema.

136. Las aplicaciones anteriores, consideradas como aisladas, no dan todavia una idea clara de las verdaderas ventajas de los logaritmos. Donde estos presentan su auxilio de una manera eficaz es en todas las cuestiones relativas á las reglas de interés compuesto, anualidades, cuentas corrientes con interés, cambios y descuento de letras, etc., etc.; pero, como el Sr. V. Queipo trata de todas estas cuestiones en la introduccion de sus tablas, no creemos necesario hacerlo nosotros en este lugar.

Queremos, sin embargo, en vista de las muchas aplicaciones de la regla de interés compuesto, dejar consignadas, antes de terminar este capítulo, sus fórmulas logarítmicas, y el modo de resolverlas en un caso particular, llamando sobre este punto la atencion de los señores profesores acerca de la notable mejora, que debe recibir la instruccion popular, si al fin se consigue introducir el estudio de los logaritmos en las escuelas primarias superiores, generalizando su uso entre los alumnos mas aventajados.

Llamando, pues, c el capital empleado ó puesto á interés al 100 r por 100 y C el capital total, ó sea el capital primitivo c con mas todos los intereses devengados durante el tiempo t años; la fórmula siguiente, de que ya hemos hablado en otro lugar, nos facilita la resolucion de todos los problemas, en los cuales se den conocidas tres de las cuatro cantidades C, c, $100r$ y t y se pida hallar la cuarta.

$$C = c \times (1+r)^t$$

Aplicando á esta fórmula la teoría de los logaritmos, resultan estas otras....

$\log.\ C = \log.\ c + t\ \log.\ (1+r)$	$\log.\ (1+r) = \dfrac{\log.\ C - \log.\ c}{t}$
$\log.\ c = \log.\ C - t\ \log.\ (1+r)$	$t = \dfrac{\log.\ C - \log.\ c}{\log.\ (1+r)}$

Por la primera de estas fórmulas se calcula el capital total C; por la segunda el capital primitivo ó prestado c; por la tercera se determina á $1+r$ y por consiguiente á r y á $100\,r$, que es el tanto por 100, puesto que r expresa el interés de una unidad del capital c, y finalmente por la cuarta se halla el tiempo t.

Aplicaciones á casos particulares.

1.ª *Hallar la suma de 1800 reales y sus intereses compuestos durante 5 años, siendo 3 el tanto por 100.*

$$\text{Log. } C = \text{log. } c + t \text{ log. } (1+r)$$

$$\text{log. } c = \text{log. } 1800 = 3.255273$$

$$t \times \text{log. } (1+r) = 5 \text{ log. } 1{,}03 = 0.064185 \quad (*)$$

$$\text{log. } C = \ldots\ldots\ldots\ 3.319458 = \text{log. } 2087 \text{ aproximad.}^{te}$$

luego el capital total será. . . . . 2087 reales
y los intereses devengados. . . . . 287 reales

2.ª *Hallar el capital, que debe prestarse al 5 por 100 á interés compuesto, para producir 2000 duros en 4 años.*

$$\text{log. } c = \text{log. } C - t \text{ log. } (1+r)$$

$$\text{log. } c = \text{log. } 2000 - 4 \text{ log. } 1{,}05 = 3.216274 = \text{log. } 1645{,}4;$$

luego el capital será 1645 duros y 8 reales.

Este problema puede tambien enunciarse así: ¿cuál es el valor actual de 2000 duros, pagados dentro de 4 años?

3.ª *Si 12 reales valen 200 al cabo de 6 años y medio ¿cuál es el tanto por 100?*

$$\text{log. } (1+r) = \frac{\text{log. } C - \text{log. } c}{t}$$

$$\text{log. } (1+r) = \frac{\text{log. } 200 - \text{log. } 12}{6{,}5} = \frac{1.221849}{6{,}5} = 0.187976 = \text{log. } 1{,}5416$$

siendo pues $1+r = 1{,}5416$, será $r = 0{,}5416$ y $100r = 54{,}16$

4.ª *¿Qué tiempo necesita el capital 10000 reales para producir 20000 al 10 por 100?*

$$t = \frac{\text{log. } 20000 - \text{log. } 10000}{\text{log. } 1{,}1} = \frac{0.301030}{0.041393}$$

Dividiendo ahora el numerador por el denominador de este último quebrado, resulta que el número que se busca es igual á 7 años..... 3 meses.... 8 dias (aproximadamente.)

(*) Siendo $100\,r = 3$, será $r = 0{,}03$ y por consiguiente $1 + r = 1{,}03$ y como el log. $1{,}03 = 0.012837$, multiplicando esto por 5, tendremos el log. del texto.

REDUCCION LEGAL DE LAS PESAS Y MEDIDAS MÉTRICAS

Á LAS DE CASTILLA Y VICE-VERSA.

Medidas de longitud.

Miriámetro..	1,79446	leguas.			
Kilómetro....	0,17945	leguas.			
Hectómetro.	119,6308	varas.	Legua........	5,572705	kilómetros.
Decámetro...	11,96308	varas.	Estadal.......	3,343625	metros.
METRO........	3,58892	pies.	VARA.........	0,835905	metros.
decímetro...	4,30671	pulgadas.	pié............	2,786352	decímetros.
centímetro..	0,43067	pulgadas.	pulgada......	2,3230	centímetros

Medidas de capacidad.

Kilólitro......	61,9848	cántaras.	Cahiz.........	6,66012	hectólitros.
Hectólitro...	1,80177	fanegas.	FANEGA.......	0,55501	hectólitros.
Decálitro.....	0,79599	arrobas.	celemin.......	4,62508	litros.
LITRO líquidos	1,98351	cuartillos.	CÁNTARA.....	16,133	litros.
LITRO áridos..	0,21621	celemines.	azumbre......	2,017	litros.
LITRO aceite...	1,98991	libras.	cuartillo......	0,504	litros.
decílitro.....	0,7954	copas.	Arroba........	12,56306	litros.
centílitro....	0,0796	panillas.	LIBRA.........	0,50252	litros.

Medidas de superficie y agrarias.

METRO CUADR.	1,43115	varas cuadr.	VARA CUADR.	0,69874	met. cuadr.
decim. cuadr.	0,12880	pies cuadr.	pié cuadrado	7,7637	dec. cuadr.
—			—		
Hecto-área..	1,55290	fanegas.	FANEGA.......	64,39562	áreas.
AREA.........	143,11535	varas cuadr.	aranzada.....	44,71918	áreas.
centi-área...	12,88037	pies cuadr.	celemin.......	5,63630	áreas.

Medidas cúbicas ó de volúmen.

METRO CÚB..	1,71210	varas cúbic.	VARA CÚBICA	0,58408	metros cúb.
decímet.cúb.	0,04623	pies cúbicos	pié cúbico...	21,6325	decím. cúb.
centím. cub.	0,07988	pulg. cúbic.	púlgada cúb.	12,519	pulg. cúb.

Pesas.

Tonelada.....	21,73474	quintales.	Tonelada.....	9,20186	qq. métric.
Quintal métr.	2,17347	quintales.	Quintal.......	46,0093	kilógramos.
KILÓGRAMO..	2,17347	libras.	Arroba.......	11,50232	kilógramos.
Hectógramo.	3,47756	onzas.	LIBRA.........	0,46009	kilógramos.
decágramo...	5,56409	adarmes.	onza..........	28,756	gramos.
gramo........	20,03074	granos.	adarmes......	1,797	gramos.

VALLI
Y BUST

ARITMÉT

PARA
LOS NIÑ