LECCIONES

DE

GEOMETRÍA DESCRIPTIVA.

PLANOS ACOTADOS

POR

DON VICENTE CORREA Y PALAVICINO,

CORONEL GRADUADO CAPITAN DE ARTILLERÍA, PROFESOR DE LA ACADEMIA ESPECIAL DEL CUERPO.

SEGOVIA:
IMPRENTA DE SEGUNDO RUEDA. JUAN BRAVO, 20.
1881.

Sor. D. Cor.l Comand.te de Artillería D. Manuel Cabanyes su buen amigo y subord.o
Vicente Correa

LECCIONES

DE

GEOMETRÍA DESCRIPTIVA.

PLANOS ACOTADOS

POR

DON VICENTE CORREA Y PALAVICINO.

CORONEL GRADUADO CAPITAN DE ARTILLERÍA, PROFESOR DE LA ACADEMIA ESPECIAL DEL CUERPO.

SEGOVIA:
IMPRENTA DE SEGUNDO RUEDA. JUAN BRAVO, 20.
1881.

AL EXCMO. SR. D. FERNANDO CORREA Y MIYARES,

Mariscal de Campo de los Ejércitos Nacionales, Caballero Gran Cruz y Comendador de la Real Órden Americana de Isabel la Católica, Gran Cruz de la Real y Militar Órden de San Hermenegildo, Caballero de la Real y Militar Órden de San Fernando de 3.ª clase, cuatro veces de la de 1.ª y otras varias condecoraciones por diferentes batallas, etc., etc.

Como pequeña prueba de respetuoso cariño, su hijo

VICENTE CORREA.

Al dar á luz el modesto trabajo que hoy someto al juicio de mis Jefes y compañeros, cumple á mi propósito dejar consignado, que solo la necesidad, de una parte, y de otra las imperiosas exigencias del deber, han sido los móviles que me hanimpulsado y sostenido para llevarlo á cabo.

La utilidad del sistema de acotaciones, y las indiscutibles ventajas de su empleo, hicieron desde luego que este sistema formase parte y muy principal, de la asignatura de GEOMETRÍA DESCRIPTIVA, *siendo más indispensable y aun absolutamente necesario su estudio, dadas sus preferentes aplicaciones á la Topografía y á la Fortificacion, para aquellos que han de servir al Estado en la carrera de las armas.*

De esta necesidad, innegable á no dudarlo, surge la de un texto adecuado para facilitar la enseñanza, presentando al alumno, desembarazado el camino que ha de recorrer, para hacerse dueño de los recursos que el método proporciona; y aquella es la que me ha obligado, sin consultar mis fuerzas, á reunir en este tratado los principios en que el sistema de acotaciones se funda y los procedimientos que enseña para resolver las cuestiones que á la representacion de los cuerpos se refieren.

Encargado de profesar el curso de GEOMETRÍA DESCRIPTIVA *en la Academia del Cuerpo á que me honro de pertenecer, he tenido presente que escribia para alumnos, quehan estudiado la representacion por medio de dos planos de proyeccion, si bien puede ser igualmente útil, para quienes solo conozcan el método de rebatimientos. Tal ha sido nuestro sencillo propósito, cuya realizacion esperamos sea benévolamente juzgada en gracia á los móviles, que como queda dicho, nos impulsaron á acometerla.*

LECCION 1.ª

Preliminares, representacion del punto, la recta y el plano.

1. La representacion de los cuerpos por medio de dos planos de proyeccion, presenta el inconveniente, cuando aquellos tienen una gran extension con relacion á las alturas de los diversos detalles que los componen y estos son numerosos, que una de las proyecciones aparece tan confusa, que no es fácil apreciar en el dibujo el cuerpo representado; de aquí la necesidad de seguir otro sistema, llamado *de los planos acotados, ó de las acotaciones*.

2. Consiste este sistema, en proyectar ortogonalmente el cuerpo que trata de representarse, sobre un plano llamado de *comparacion* y poner, en las proyecciones de sus diferentes puntos, las magnitudes de las distancias que hay de ellas al plano de comparacion; á estas magnitudes se llaman *cotas*.

Generalmente se supone, que el plano de comparacion ocupa una posicion horizontal en el espacio.

3. Un punto A del espacio (fig.ª 1.ª) está representado por su proyeccion 4 sobre el plano de comparacion MN y por la magnitud $A4$ que suponemos igual á cuatro unidades, siendo esta magnitud la cota del punto A.

A las cotas de todos los puntos que están á un mismo lado del plano de comparacion, se las considera afectadas del mismo signo y por consiguiente dos puntos como los A y B situados en diferente region, tendrán sus cotas de signo contrario. Si se supone el plano de comparacion horizontal, los puntos que están en la parte superior, tienen sus cotas positivas y los de la inferior negativas, é inversamente en los planos *ori-hidrográficos*.

Algunas veces, en lugar de afectar con signos estas cotas, se escriben con tinta de distintos colores; pero lo mas conveniente, para mayor claridad en los dibujos, es procurar que las cotas tengan igual signo, lo cual se consigue, suponiendo que el plano de comparacion deje á un mismo lado al cuerpo que trata de representarse.

4. Las magnitudes de las cotas, así como las distancias entre las proyecciones horizontales de los diferentes puntos, se aprecian por medio de una *escala*, que se coloca siempre en la parte inferior de los dibujos. Esta escala, representa la relacion constante que existe entre las magnitudes del dibujo y las correspondientes del cuerpo representado; así llamando l y L dos líneas homólogas del

dibujo y del cuerpo y $\frac{1}{E}$ la escala, tendremos

$\frac{l}{L} = \frac{1}{E}$. En esta ecuacion, dados los valores de dos de las cantidades que entran en ella, se puede determinar el tercero.

5. Segun que E sea mayor, igual ó menor que la unidad, se dice que el dibujo está hecho á escala reducida, natural ó mayor.

La escala no debe ser demasiado reducida, porque tendriamos el inconveniente de no poder apreciar en el dibujo detalles necesarios: si estos detalles en el espacio, tienen una magnitud m y los instrumentos de que disponemos no pueden apreciar mas que medios milímetros, la escala $\frac{1}{E}$ debe ser lo menos igual á $\frac{0'0005}{m}$.

6. Una escala, es una recta dividida en partes iguales, de las cuales una, se subdivide en partes tambien iguales; á esta escala se la llama *ordinaria* y la tenemos representada en la (fig.ª 2) en la que podemos observar, que aprecia unidades de dos órdenes diferentes.

Otra escala llamada de *trasversales*, representada en la (fig.ª 3) aprecia unidades de tres órdenes y se construye del modo siguiente:

Supongamos que la relacion $\frac{1}{E}$ sea igual $\frac{1}{2000}$,

es decir que 0'05 en el dibujo, representa 100 metros.

Sobre una recta indefinida *a b*, se toman diferentes partes *a*-0, 0-100,.... etc., iguales á 0'05; en los extremos y puntos de division, se levantan perpendiculares y tomando en una de ellas 0 0' diez partes arbitrarias, iguales entre sí, se numeran como indica la figura, trazando por los puntos 1, 2, 3, 4........ 0', paralelas á la recta *a b*.

Hecho esto, únanse los puntos 0 y *c*: esta recta quedará dividida en diez partes iguales, por las paralelas á *a b*, y por medio de ella, divídase tambien 0 *a* en diez partes iguales, numerando los puntos de division con 10, 20, 30, 40, etc., etc... Trácese la recta *c* 90 y por los puntos 80, 70, 60, etc......, paralelas á la *c* 90; cada una de las partes 0-10, 10-20, 20-30, etc.........., por ser décimas partes de *a* 0, serán iguales á 0'005 y nos representarán 10 metros.

Los diferentes triángulos equiángulos 0' 0 *d*, 9 0 *e*, etc., etc..... cuyo vértice comun es 0, tienen sus lados 0-1, 0-2, 0-3, etc., etc....... iguales á

$$\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \text{ etc., etc.......}$$

de 0 0', luego los lados paralelos á la base 0' *d* que pasan por los puntos 1, 2, 3, etc., etc......, serán

$\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, etc., etc...... de $O'd = 10$ metros,

por consiguiente estos lados, son respectivamente iguales á 0'0005, 0'001, 0'0015...,y nos representan 1, 2, 3, etc., etc....... metros.

Construida la escala, pasemos á indicar la manera de usarla.

Supongamos que se quiere representar en el dibujo, una magnitud de 358 metros; se colocará una punta del compás, sobre el punto de interseccion de la línea horizontal que pasa por el punto 8, con la vertical del 300 y la otra, en la interseccion de dicha horizontal, con la trasversal que pasa por el punto 50.

Para apreciar en partes de escala, la longitud de una recta dada, se tomará el compás con una abertura igual á esta longitud y aplicando una punta en 0, se llevará la otra á la derecha sobre la línea 0 *b* y suponiendo que caiga entre las divisiones 100 y 200, se corre la punta de la derecha hasta la division 100, con lo que la de la izquierda vendrá á colocarse á la izquierda del punto 0, en un punto que supondremos sea entre las divisiones 60 y 70, y haciendo marchar el compás sobre las paralelas á la recta *a b*, de modo que la punta de la derecha, se apoye en los puntos de interseccion de estas paralelas y la 100-100' hasta que la punta de la izquierda, coincida con uno de los puntos de la trasversal 60 y suponiendo que esto se verifique en la cuarta paralela, resultaria la magnitud apreciada, de 164 metros.

7. Algunas veces, como se verá mas adelante, se aprecian las cotas y las distancias horizontales con escalas diferentes.

8. *Una recta está completamente determinada, cuando se conocen las proyecciones y cotas de dos de sus puntos, sobre el plano de comparacion.*

Sean los puntos 3 y 5, (fig.ª 4) unámoslos y tendremos representada en la recta 3—5, la proyeccion de la del espacio y que determina aquella.

Si rebatimos el trapecio proyectante de la recta dada, sobre el plano de comparacion, obtendremos en *a b* su verdadera magnitud.

Para efectuar el rebatimiento indicado, basta observar que cada punto, moviéndose en un plano perpendicular al eje, describe una circunferencia, cuyo centro y rádio, son respectivamente la proyeccion del punto y su distancia al eje.

Este rebatimiento, es mas conveniente hacerlo sobre el plano horizontal que pasa por uno de los puntos dados, pues de este modo, solo hay que levantar una perpendicular á la proyeccion de la recta en el otro punto y tomar en ella una magnitud igual á la diferencia de las dos cotas tomadas con sus signos; en el caso (fig.ª 5) de que los puntos tengan cota de signo contrario, la magnitud que deberá tomarse sobre la perpendicular 4*a*, será la de 6 unidades, puesto que la cota del otro punto es —2.

A la diferencia de cotas de dos puntos 3 y 5 (fig.ª 4), se llama *desnivel.*

Tambien podria hallarse la verdadera magnitud de una recta, observando que esta, es en el espacio, la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos son iguales á la proyeccion horizontal de la recta y al desnivel entre los puntos que limitan aquella; llamando L y D respectivamente estas magnitudes, tendremos;

$$X=\sqrt{L^2+D^2}\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Este triángulo, dá tambien *el ángulo que la recta* 3-5 *forma con el plano de comparacion,* el cual está medido por el rectilíneo $b\ a\ c$.

La tangente trigonométrica de este ángulo ó sea *la pendiente* de la recta, que representamos por P, tiene por valor

$$P=\frac{b\,c}{a\,c}=\frac{D}{L}\ldots\ldots \quad (2)$$

Fórmula que facilita la resolucion de muchos problemas.

9. *Si tenemos una recta* 4-8 (fig.ª 6), *podemos encontrar gráficamente, la cota de un punto de ella dado por su proyeccion* a y *recíprocamente, conocida la cota de un punto de la recta, hallar su proyeccion.*

Basta en ambos casos, rebatir el trapecio proyectante de la recta $c\ b\ 4\ 8$, sobre un plano horizontal y supongamos sea sobre el de comparacion. Levántese la perpendicular $a\,a'$ y la magnitud 5 unidades de esta recta, será la cota del punto a.

Para hallar la proyeccion del punto de cota 7, tómese $8\,d = 7$ unidades, tírese la $d\,e$ paralela á 4-8 y en el punto e, tendremos el de cota 7 rebatido: la perpendicular e 7 á 4-8, dará la proyeccion del punto pedido.

Tambien podemos encontrar estos resultados por medio de la fórmula (2).

La primera parte quedará resuelta, cuando se conozca el desnivel entre el punto a y otro dado, por ejemplo el 4; porque aumentando á este desnivel la cota 4, hallaremos la del punto pedido.

Siendo aquí la incógnita el desnivel, tendremos;

$$D = P \times L = \frac{4}{12} \times 3 = 1,$$

suponiendo las distancias 4-a y 4-8 iguales á 3 y 12 unidades.

La cota del punto a será igual á $4+1=5$.

En la segunda cuestion, obsérvese que la incógnita es $L = \frac{D}{P}$: tomando por punto de comparacion el 4, el desnivel D es igual á 3 unidades y $P = \frac{4}{12}$; luego

$$L=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{12}}=9$$

es decir, que el punto pedido, que se encontrará entre el 4 y el 8, distará del 4, que hemos tomado como de comparacion, la magnitud 9.

10. Cuando el desnivel es igual á la unidad, la magnitud

$$L=\frac{1}{P},$$

se llama *intérvalo*, siendo constante en una misma recta, puesto que su valor es recíproco de la pendiente.

Se llama *escala de pendiente* de una recta, á su proyeccion dividida en intérvalos, cuando son enteras las cotas de los puntos de division.

Para hallar la escala de pendiente de la recta 5-8 (fig.ª 7), no habrá mas que dividir su proyeccion, en tantas partes iguales, como unidades tenga el desnivel y encontraremos los puntos de cotas 6 y 7.

Si las cotas dadas de la recta no fuesen enteras, por ejemplo, 6'4 y 9'6, (fig.ª 8) se reducirian á enteras del órden inferior, y estariamos en el caso ya esplicado; pero como hallariamos al dividir la recta en 32 partes, diferencia de 96 y 64, las décimas de los intérvalos que no son necesarias, se tendrá cuidado de no encontrar mas puntos de division, que aquellos que tengan cota entera del órden propuesto.

Tambien podriamos haber hallado los puntos de cota 7 y 9, como se ha esplicado en el número anterior ó considerando que si un intérvalo cualquiera 8-9, se divide en diez partes iguales, cada uno de los puntos que resultan tendrán por cotas 8‘1, 8‘2... 8‘9, es decir, 0‘1 mas que el anterior; luego teniendo el valor del intérvalo, tomaremos las 0‘6 de él y obtendremos la magnitud de 6‘4-7.

11. Cuando la recta es horizontal, todos los puntos tienen la misma cota y se representa como indica la (fig.ª 9).

Si la recta es perpendicular al plano de comparacion, se representa por su traza y una letra en ella.

Cuando varias rectas tienen sus proyecciones confundidas, se las distingue unas de otras poniendo tildes á sus cotas: asi en la (fig.ª 10) tenemos las rectas diferentes 4-8, 2'-6', 3''-9''.

12. Cuando dos rectas 2-6 y 3-5 (fig.ª 11) se cortan en el espacio, el punto de interseccion *a* de sus proyecciones, tendrá la misma cota 3‘5 en la escala de cada una de las rectas, porque pertenece á un solo punto del espacio.

13. Dos rectas paralelas 4-6 y 5-7 (fig.ª 12), además de tener sus proyecciones paralelas, están acotadas en el mismo sentido y sus intérvalos son iguales.

Siendo paralelas, fácilmente se comprende que las cotas, irán aumentando en el mismo sentido y sus pendientes serán iguales, por consiguiente tambien los intérvalos que son recíprocos de aquellas.

Podemos ya resolver el problema siguiente.

Por un punto de cota 3 (fig.ª 13) *hacer pasar una recta paralela á otra dada* 5-8.

Basta trazar la $3X$ paralela á la proyeccion de la propuesta y tomar una magnitud $3a$ igual á los tres intérvalos 5-8: á este punto a le corresponderá la cota 6, y si la magnitud la hubiéramos llevado en sentido contrario $3a'$, al punto a' le corresponderia cota 0.

14. Se deduce de lo expuesto en los dos párrafos anteriores, que cuando dos rectas se cruzan en el espacio, podrán tener sus proyecciones paralelas, pero les faltará alguna de las otras dos condiciones del paralelismo de dos rectas. Si se cortan sus proyecciones, al punto de interseccion le corresponderá cota diferente en cada una de las escalas de las rectas. Tampoco podrán tener dos rectas que se crucen sus proyecciones confundidas, porque serian uno mismo, los planos proyectantes de ellas, lo cual es contra el supuesto.

15. Para la representacion del plano por el sistema de acotaciones, se ha tenido en cuenta, que siendo la línea de máxima pendiente, el elemento mas sencillo de todos los que determinan aquel, bastará tener la escala de pendiente de esta recta, para que el plano sea conocido.

A la línea de pendiente acotada, se llama *escala de pendiente del plano*.

Con objeto de distinguir las escalas de pendientes de las rectas y de los planos, se dibujan las últimas con una doble raya 0-6 (fig.ª 14).

Las horizontales de este plano de cota 0, 1, 2, 3......, siendo en el espacio perpendiculares á la línea de máxima pendiente y paralelas al plano de comparacion, se proyectarán sobre este, segun rectas 0-0, 1-1, 2-2......., perpendiculares á la escala *M*.

El ángulo que forma esta recta con su proyeccion, es el rectilíneo correspondiente al diedro formado por el plano propuesto con el de comparacion, que como sabemos mide la pendiente del plano.

Es evidente, que las escalas *P* y *P'* (fig.ª 15) nos representan el mismo plano, puesto que tienen dos horizontales 8-8 y 4-4 confundidas; luego *se puede correr la escala de un plano paralelamente, á si misma, á derecha é izquierda, á lo largo de una horizontal, sin que varíe la posicion del plano que representa.*

16. *Hallar la cota de un punto* a (fig.ª 16) *contenido en un plano M.*

Trácese la horizontal del plano que pasa por el punto dado; véase en la escala *M* que cota le corresponde y esta 6'5, será la del punto.

Si el punto se dá acotado y se desea saber si pertenece ó no al plano, por ejemplo el 6'5, trazariamos la proyeccion de la horizontal de aquel, que pasa por la proyeccion del punto y si resulta que dicha horizontal tiene igual cota que el punto, este pertenece al plano. En el caso de tener la horizontal mayor ó menor cota que el punto propuesto, estaría este, por debajo ó por encima del plano.

17. Una figura situada en un plano cualquiera, se representa por la escala de pendiente del plano P en que está contenida, y la proyeccion de dicha figura *abcde* sobre el plano de comparacion (fig.ª 17).

Si el plano de la figura fuese horizontal, se representaria esta, por su proyeccion y por las cotas de tres de sus puntos, iguales á las del plano en que está contenida.

18. *Dado un plano por los elementos que lo determinan, encontrar su escala de pendiente.*

Supongamos que el plano propuesto esté determinado por tres puntos de cotas 2, 5 y 6 (fig.ª 18).

Trácese la recta 2-6 que pasa por dos de ellos, generalmente los de mayor y menor cota y despues de hallar su escala de pendiente 2-3-4-5-6, únase el punto de cota 5 de esta recta, con el 5 propuesto y tendremos una horizontal del plano. La escala pedida M es perpendicular á esta horizontal y para acotarla, bastará trazar horizontales por los diferentes puntos de cota entera de la recta 2-6.

Si los elementos que determinan el plano, fuesen dos rectas que se cortan, un punto y una recta, ó dos rectas paralelas, se procedería de un modo análogo.

19. *Hallar la escala de pendiente de uno de los diferentes planos que pasan por una recta dada* 3-6 (fig.ª 19).

Se trazan dos paralelas arbitrarias por los puntos 3 y 6, y tendremos dos horizontales de un mismo plano, cuya escala de pendiente *M* es perpendicular á ellas.

Si las paralelas 3-3 y 6-6 fuesen perpendiculares á la recta dada 3-6, esta misma recta, sería la escala de pendiente del plano.

LECCION 2.ª

Interseccion de rectas y planos.

20. Las intersecciones de una recta 0-6 (fig.ª 20) con los planos horizontales de cotas 0, 1, 2, etc...., son los puntos de igual cota de la recta propuesta.

21. Las intersecciones de un plano *M* (fig.ª 14) con los planos horizontales de cota 0, 1, 2, etc..., son las horizontales 0-0, 1-1, 2-2, etc.........., del plano *M*.

22. Para encontrar el punto de interseccion de dos rectas 2-6 y 3-5 (fig.ª 11) situadas en un mismo plano; se prolongan sus proyecciones, hasta su punto de encuentro *a* y este es la proyeccion del punto pedido, cuya cota 3'5 se hallará en la escala de una de las rectas.

23. Cuando las rectas propuestas tienen sus proyecciones confundidas 4-8, 4'-8' (fig.ª 21) basta rebatirlas sobre un plano horizontal, por ejemplo el de cota 4, haciéndolas girar alrededor de la horizon-

tal de igual cota de su plano proyectante: el punto c en que se cortan las rectas 4 a y 4' b, es el de interseccion rebatido.

La proyeccion 6 y cota de este punto se determina como se ha esplicado en otros casos.

24. Siendo la interseccion de dos planos una línea recta, quedará determinada esta, por dos de sus puntos, ó por uno solo, si es conocida su direccion.

Generalmente para hallar estos puntos, se emplean planos auxiliares convenientes, cuya interseccion con cada uno de los propuestos sea fácil de encontrar y los puntos de interseccion de estas rectas, serán los pedidos.

25. Sean los dos planos, M y N (fig.ª 22) dados por sus escalas de pendiente.

Cortemos á ambos, por el plano horizontal de cota 6, cuyas intersecciones con aquellos son las horizontales 6 y 6 (núm. 21); el punto a de encuentro de estas, de cota 6, pertenecerá á los dos planos propuestos. Del mismo modo se determinaria el punto b.

La recta ab acotada es la interseccion que buscamos.

Cuando las horizontales de la misma cota no se cortan en los límites del dibujo, lo cual supone que los planos empleados anteriormente no son convenientes por si solos, tomariamos como auxiliares otros diferentes.

Supongamos dos planos M y N (fig.ª 23) en que esto se verifique: córtense los planos dados por un tercero *P*, cuyas horizontales 4 y 6, encuentren á las de igual cota de aquellos en los límites del dibujo. Hállense las intersecciones *ab* y *cd* del plano auxiliar con los *M* y *N*, y su punto de encuentro *f* pertenece á la vez á los planos dados. Procédase del mismo modo para encontrar el punto *f'*, por medio de otro plano auxiliar *P'*.

La recta *ff'* acotada, es la interseccion pedida.

En la práctica basta trazar dos rectas paralelas, en vez de cada uno de los planos auxiliares *P* y *P'*.

26. En el caso de tener los dos planos sus horizontales paralelas, no hay necesidad de hallar mas que un solo punto, puesto que se conoce la direccion de la interseccion.

Este punto, se determinaria como acaba de indicarse ó por la interseccion de las líneas de máxima pendiente, que se encuentran en un mismo plano proyectante, como indica la (fig.ª 24) y análogamente á como se ha dicho (núm. 23).

27. Para hallar el punto de interseccion de una recta con un plano dado, se hace pasar por aquella un plano auxiliar (núm. 19); encuéntrese la interseccion de estos dos planos y donde esta recta corte á la dada, será el punto pedido.

Sea el plano *P* y la recta *ab* (fig.ª 25): por los puntos de cota 6 y 10 de *ab*, tracénse dos horizontales 6*n* y 10*m* del plano auxiliar, cuidando que corten convenientemente á las horizontales 6-6 y 10-10 del plano dado. Encuéntrese la interseccion *mn* de estos planos y el punto 8, donde esta recta corta á la propuesta, es el de interseccion pedido.

Si la recta dada *ab* (fig.ª 26) es una horizontal cualquiera, se halla su interseccion con la horizontal del plano 8-8, de la misma cota que aquella, y el punto de encuentro *m* es el que buscamos.

28. Como aplicacion de cuanto acabamos de decir se puede fácilmente encontrar la interseccion de tres planos.

LECCION 3.ª

Rectas y planos, paralelos y perpendiculares.

29. Fundándonos en lo expuesto (núm. 13) vamos á resolver los siguientes problemas, de rectas y planos paralelos.

30. *Por un punto dado* a *de cota* 4 (fig.ª 27) *hacer pasar un plano paralelo á la recta* 2-6.

Trácese por el punto *a*, la recta 4-8 paralela á la propuesta: todos los planos, que como el *P*, pasen por aquella, resolverán el problema, excepto el que contenga á la recta dada 2-6.

31. *Por un punto dado* a *de cota* 2 (fig.ª 28) *hacer pasar un plano paralelo al M.*

Recordando que cuando dos planos son paralelos, sus líneas de pendiente tambien lo son; trácese por el punto *a*, la recta 2-6 paralela á la escala de pendiente del plano dado y tendremos en aquella la escala del plano pedido.

32. *Por un punto dado* a *de cota* 6 (fig.ª 29)

*hacer pasar una recta paralela á un plano tambien dado **M**.*

Hágase pasar por el punto *a*, el plano *N* paralelo al *M*: todas las rectas que como la *ab*, esten situadas en aquel y pasen por el punto dado, serán soluciones de este problema.

33. *Por una recta dada* m (fig.ª 30) *hacer pasar un plano paralelo á otra tambien dada* n.

Por un punto 6 de la recta *m*, trácese la 6-10 paralela á la *n*; el plano *P* determinado por las dos rectas *m* y 6-10, es el que buscamos.

34. *Por dos rectas dadas, no situadas en un mismo plano, hacer pasar dos planos paralelos entre sí.*

Basta repetir con cada una de las rectas propuestas, la construccion esplicada en el número anterior, para tener el problema resuelto; pues serán los planos de dos ángulos que tienen sus lados paralelos.

35. Antes de empezar á resolver los problemas sobre rectas y planos perpendiculares, conviene demostrar, que cuando una recta y un plano son perpendiculares entre sí, sus escalas de pendiente son paralelas, sus intérvalos son recíprocos y están acotadas en sentido contrario.

En efecto, la recta *nm* (fig.ª 31) que suponemos perpendicular al plano *P*, lo será á las rectas *na* que es su línea de pendiente y á la *bc*; esta última es por consiguiente perpendicular al plano *anm* determinado por las otras dos, que es un plano proyectante sobre el de comparacion H; luego estando situadas las rectas na y nm en el mismo plano proyectante, sus escalas de pendiente ad y md están confundidas; pero recordando lo que se dijo (núm. 15) que la escala de un plano podia correrse á derecha é izquierda sin que variase su posicion, resulta que las escalas de la perpendicular nm y de la línea de pendiente na serán paralelas.

Si bajamos la perpendicular nd á am, tomando en ella una magnitud nn' igual á la unidad y se hace pasar por el punto n' la recta $a'm'$ paralela á am, tendremos en el triángulo rectángulo $a'nm'$

$$nn'^2 = m'n' \times a'n' = 1,$$

pero $n'm'$ y $a'n'$ son respectivamente los intérvalos de la escala de pendiente de la recta nm y de su plano perpendicular P, los cuales segun la anterior ecuacion son recíprocos.

Fácilmente se comprende, que la escala de pendiente de la recta estará acotada en sentido md y la del plano en el contrario ad.

De lo que acabamos de exponer y de la inspeccion de la figura resulta; que para trazar una recta nm perpendicular á un plano P, basta trazarla á su línea de máxima pendiente na, en el plano proyectante de ella y para trazar un plano P perpendicular á una recta nm, se traza á esta recta la perpendicular na, en el plano proyectante de aquella y esta perpendicular será la línea de pendiente del plano pedido.

36. Establecida la relacion que existe entre las escalas de las rectas y planos perpendiculares, pasemos á la resolucion de los problemas siguien tes.

Por un punto dado, hacer pasar una recta perpendicular á otra tambien dada.

Supongamos que el punto dado 9 (fig.ª 32) pertenezca á la recta propuesta 6-10, y que la perpendicular pedida debe estar en el plano proyectante de aquella.

Rebátase la recta 6-10, sobre el plano horizontal de cota 6, haciéndola girar alrededor de la horizontal de su plano proyectante, de la misma cota: sea 6 *n* la recta rebatida.

El punto 9 tomará la posicion *m* y la perpendicular rebatida la obtendremos tirando *m*6' perpendicular á 6*n*; el punto 6' donde esta corta á la horizontal que ha servido de eje, tendrá por cota 6.

Deshaciendo el rebatimiento, obtendremos en 6'-9 la proyeccion de la perpendicular pedida.

Cuando el punto dado 12', está fuera de la recta 6-10, se rebate esta y aquel de un modo análogo y desde *a*, rebatimiento del punto 12', se tira la perpendicular *a*6' á 6*n*.

La 12'-6' será la escala de la recta que se busca.

El pié de esta perpendicular es el punto 9 y *am* la magnitud de la mínima distancia entre el punto 12' y la recta dada.

Si la perpendicular pedida fuera cualquiera, se traza por el punto dado 9 (fig.ª 33) un plano perpendicular á la recta 6-10, cuya línea de pendiente rebatida $6'm$ se encuentra como ya hemos indicado: la escala del plano perpendicular seria M.

Toda recta $9a$ contenida en él y que pase por el punto dado 9, resolveria el problema propuesto.

Este plano M, podia haberse trazado, tirando por un punto cualquiera de su horizontal 9-9, una recta perpendicular á ella y tendriamos en direccion su escala de pendiente, la cual graduariamos desde el punto 9 en sentido contrario de la recta dada, con intérvalos iguales á $\frac{1}{i}$, siendo i el intérvalo de la recta.

Últimamente, supongamos en este problema, que el punto dado a (fig.ª 34) de cota 2, no pertenece á la recta bc y que ambos elementos no estén en el mismo plano proyectante.

Únase el punto a con el de igual cota 2 de la bc y hágase girar esta recta alrededor de la horizontal 2-2, hasta que se confunda con el plano horizontal que pasa por ella. El punto 2 en que la recta corta al eje, no variará de posicion: otro cualquiera, por ejemplo el 6, describirá una circunferencia en un plano vertical, cuya traza $6m'$ es perpendicular al eje 2-2 y el centro, la interseccion d de este con aquel. Cuando dicho punto se confunda con el plano horizontal de cota 2, distará del centro la magnitud del radio $d6$ que es igual á dm; por consiguiente el punto 6 vendrá al m', siendo 2 m' la recta rebatida.

Trazando ahora por el punto dado, la perpendicular $2x$ á esta recta y deshaciendo el giro anterior, el punto x pié de aquella, volverá al 3'3 de la bc.

La recta a-3'3, es la proyeccion de la perpendicular pedida y ax la mínima distancia entre el punto a y la recta bc.

37. *Por un punto dado, hacer pasar una recta perpendicular á un plano tambien dado.*

Sea el punto 8' (fig.ª 35) y supongamos que pertenece al plano propuesto M.

Trasládese la escala de pendiente del plano M, hasta que pase por el punto dado y rebatidos este y aquella, sobre un plano horizontal, tomarán respectivamente la posicion b y $c6$. Tírese la perpendicular $b6'$ á la $c6$ y deshaciendo el rebatimiento, tendremos en 6'-8' la recta pedida.

Si el punto dado 10' estuviese fuera del plano, traslád ese tambien la escala M, hasta que pase por la proyeccion del punto 10': hecho el rebatimiento como anteriormente, 10' vendrá al punto a. Trácese la $a6'$ perpendicular á $6c$ y tendremos en la recta 10'-6' la proyeccion de la perpendicular que se busca.

La mínima distancia entre el punto 10' y el plano M es ab.

38. *Por un punto dado, hacer pasar un plano perpendicular á una recta tambien dada.*

Cuando el punto pertenece á la recta, ya se ha resuelto (núm. 36).

Si el punto dado está fuera de la recta, se hace pasar por aquel una paralela á la recta dada: el plano perpendicular á dicha paralela, que pasa por el punto propuesto, será el plano pedido.

39. *Por un punto dado, hacer pasar un plano perpendicular á otro tambien dado.*

Trácese por el punto, una recta perpendicular al plano propuesto (núm. 37) y todos los planos que pasen por ella, resolverán el problema.

40. *Por una recta dada, hacer pasar un plano perpendicular á otro tambien dado.*

Por un punto de la recta dada, trácese una perpendicular al plano propuesto (núm. 37); el plano determinado por estas dos rectas, será el que buscamos.

41. *Trazar una perpendicular comun á dos rectas dadas* ab *y* cd (fig.ª 36) *no situadas en un mismo plano.*

Hágase pasar por la recta *ab*, el plano *P* paralelo á la *cd* (núm. 33) y por la recta *cd* el plano *R* perpendicular al *P*, trazando la recta 4*f* perpendicular á este plano. La 4*f* por tener su direccion perpendicular á las rectas propuestas, será paralela á la perpendicular que se busca. Encuéntrese la interseccion *sm* de los planos *P* y *R*, la cual por ser paralela á *cd*, quedará determinada con un solo punto *s*, donde se cortan las horizontales de cota 0. Últimamente, por el punto *m* en que encuentra la *sm* á la recta *ab*, tírese la *mn*, paralela á 4*f* y tendremos la recta pedida.

La perpendicular *mn*, es la mínima distancia entre las rectas dadas y observando que esta distancia, es igual á la que existe entre un punto cualquiera 4 de la recta *cd* y el plano paralelo á ella *P*, que pasa por *ab*, tendremos su magnitud en *xz*.

Si las rectas dadas *ab* y *cd* (fig.ª 37) son horizontales, la perpendicular comun está proyectada en el punto *m* y la mínima distancia, es igual al desnivel 6—4=2.

Cuando las rectas propuestas *ab* y *cd* (fig.ª 38) tienen sus escalas paralelas, la mínima distancia entre ellas, es la perpendicular comun 4-4′ á sus proyecciones.

Para encontrar la proyeccion de la perpendicular comun á estas rectas, basta trasladar una de ellas *ab* á 4′-6′ y rebatir esta recta y la *cd*: por el punto *x* de cota 5, de su interseccion, pasa la perpendicular 5-5 que se busca.

42. *Trazar una perpendicular comun á dos rectas paralelas* ab *y* cd (fig.ª 39) *y hallar la magnitud de la distancia entre ellas.*

Por el punto 6 de la recta *cd*, trácese la perpendicular 6-7 á *ab* como se ha esplicado (núm. 36) y tendremos la perpendicular que se pide, cuya magnitud 6-*m*, es la distancia entre las rectas dadas.

Cuando las dos rectas 2-6 y 2′-6′ (fig.ª 40) tienen sus proyeciones confundidas, es mas conveniente rebatirlas: la perpendicular *mn* á estas, es la distancia buscada.

43. *Trazar una perpendicular comun á dos planos paralelos M y N* (fig.ª 41) *y hallar la distancia entre ellos.*

Trácese una recta ab, paralela á las escalas M y N y trasládense estas á 2'-6' y 4''-8'' sobre aquella.

Rebatiendo las líneas de pendiente 2'-6' y 4''-8'', sobre el plano de comparacion, tendremos en la perpendicular á ellas mn, la distancia pedida.

La recta que une las proyecciones 3'9 y 5'9 de los puntos m y n, será la proyeccion de una perpendicular comun á los planos dados.

LECCION 4.ª

Ángulos de rectas y planos.

44. *Hallar el ángulo de dos rectas y las proyecciones de su bisectriz.*

Sean $8m$ y $8n$ (fig.ª 42) las rectas dadas que se cortan en el punto 8. Hágase girar á este punto, alrededor de la horizontal 2-2 del plano determinado por aquellas, hasta que se confunda con el plano horizontal de cota 2. El punto 8 vendrá al c, siendo ac igual á ab, magnitud del radio de la circunferencia descrita por el punto en el giro. Uniendo c con los puntos de cota 2 de las dos rectas, que no habrán variado de posicion, por pertenecer al eje, tendremos en el ángulo $2c2$, la magnitud del formado por las rectas dadas.

Trácese la bisectriz cd del ángulo rebatido y al volver las rectas que forman éste á la posicion 2-8-2, el punto d, en que la bisectriz corta al eje 2-2, permanecerá fijo; luego uniendo dicho punto con el 8, tendremos en la recta $8d$, la proyeccion de la bisectriz pedida.

Algunas veces para hallar el ángulo de dos rectas, será preciso hacer la construccion indicada anteriormente, con el ángulo suplementario.

Supongamos que el ángulo propuesto sea el $m8n$ (fig.ª 43). Prolónguese la recta $m8$ hasta el punto que tenga por cota 4 y repitiendo cuanto acaba de decirse, tendremos en $4c4$ el ángulo suplementario; por consiguiente $4cX$ será el pedido.

La bisectriz cd, que en este caso, no corta á la horizontal que ha servido de eje en los límites del dibujo, se determina encontrando un punto d, de su interseccion con otra horizontal del plano del ángulo.

45. *Por un punto dado* n *de cota* 2 (fig.ª 42) *trazar una recta que forme un ángulo G con otra recta tambien dada* $8m$.

Únase el punto n con el de igual cota de la recta propuesta y rebátase esta recta $8m$ sobre el plano horizontal de cota 2, girando alrededor de la 2-2. Tírese por el punto n la recta nc que forme con aquella, rebatida en $2c$, el ángulo G. Hallando ahora la proyeccion del punto c, por la perpendicular c-8 á 2-2, tendremos el ángulo $28n$ que se pide.

Como por el punto n, pueden trazarse dos rectas que formen el ángulo G con la $2c$, se vé que este problema tiene dos soluciones.

46. *Hallar el ángulo de dos planos y su plano bisector.*

Sean los planos *M* y *N* (fig.ª 44) dados por sus escalas y la recta 2-8 su comun interseccion.

Trácese por un punto *d* de la proyeccion de 2-8, la perpendicular *d*2 y suponiéndola de cota 2, será la horizontal de un plano perpendicular á la recta 2-8: los puntos 2 y 2, donde corta la 2*d* á las horizontales de los planos *M* y *N* de igual cota, serán dos puntos de los lados del rectilíneo, que mide el diedro formado por los planos propuestos.

El vértice de este ángulo, que es el punto de interseccion de la recta 2-8 con el plano perpendicular que pasa por 2*d*, lo encontraremos, bajando desde un punto de este plano, una perpendicular á la recta 2-8 y para mayor sencillez se escoje el punto *d*, que pertenece tambien al plano proyectante de esta recta; el pié *a* de la perpendicular *da*, es el vértice rebatido y el punto de la recta 2-8, de cota 3'1 su proyeccion.

Rebatiendo el ángulo rectilíneo 2 - 3'1 - 2, sobre el plano horizontal de cota 2, tendremos en 2*b*2 el ángulo pedido.

El plano bisector *P*, está determinado por la recta 2-8, interseccion de los planos dados y por la bisectriz *bc*, del ángulo 2*b*2, cuya proyeccion hemos encontrado (núm. 44).

Cuando la recta 2*d*, fuese tambien perpendicular á la escala del plano *M* (fig.ª 45) el punto 2 de encuentro con la horizontal de este plano, estaria en el infinito y la construccion, análoga á la anterior, se haria como está indicada (fig.ª 46).

Algunas veces será conveniente resolver este problema, trazando por un punto cualquiera, una perpendicular á cada plano y hallando el ángulo que forman estas dos rectas.

47. *Hacer pasar por una recta* 2-8 (fig.ª 44) *contenida en el plano M, otro plano que forme con aquel un ángulo G.*

Encuéntrese como en el problema anterior, la interseccion rebatida $2b$, del plano M con el plano perpendicular á la recta 2-8, que pasa por la horizontal $2d$.

Trácese la bx que forma con la $b2$ el ángulo dado G y el punto de encuentro x, de aquella recta con la $2d$, que tendrá tambien por cota 2, es del plano pedido.

Resta solo hallar la escala N, del plano determinado por la recta 2-8 y el punto x.

Como por el punto b pueden trazarse dos rectas que formen con la $b2$ el ángulo dado, este problema tiene dos soluciones.

48. *Hallar el ángulo que forma una recta dada* ab (fig.ª 46) *con un plano M tambien dado.*

Desde un punto de cota 8 de la recta ab, trácese la perpendicular 8-2 al plano M: hállese el ángulo $2c2$ formado por esta perpendicular y la recta dada, rebatiendo el punto 8 sobre el plano horizontal de cota 2: el complementario $2cx$ de aquel, será el ángulo pedido.

49. *Hacer pasar por un punto* d *de cota* 8 (fig.ª 46) *una recta que forme un ángulo G dado, con el plano M.*

La recta pedida formará con la perpendicular 8-2 al plano M, trazada desde el punto d, un ángulo G' igual á $90^{\circ}—G$. Aplicando esta perpendicular al plano horizontal de cota 2, haciéndola girar alrededor de una de las horizontales de esta cota, de los diferentes planos que pasan por la recta 8-2, vendrá á tomar la posicion ec. Tírese la $c2$ que forme con la perpendicular rebatida ec, el ángulo $ec2$ igual á G' y la proyeccion de aquella ab, será la pedida.

Otra solucion sería la proyeccion de la recta que formase con la ce el ángulo G' adyacente al $2ce$: ademas, como el rebatimiento de la perpendicular $e8$ puede hacerse alrededor de infinitas horizontales de cota 2, se ve que este problema es indeterminado.

50. *Por el punto* a *de cota* 5 (fig.ª 47) *hacer pasar una recta que forme con el plano de comparacion un ángulo dado ó lo que es igual, trazar una recta de pendiente dada.*

Supongamos esta pendiente igual á $\frac{5}{3}$.

El punto en que la recta pedida, corta al plano de comparacion, tendrá por cota cero; por consiguiente en la fórmula

$$P = \frac{D}{L}, \text{ conocemos } P = \frac{5}{3} \text{ y } D = 5,$$

por lo tanto el valor de

$$L = \frac{D}{P} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3.$$

Luego, todos los radios de la circunferencia descrita desde el punto *a* como centro é iguales á 3 unidades, cumplen con la condicion pedida: *ab* es uno de ellos y al punto *b* de la circunferencia le corresponde la cota cero.

51. *Por una recta dada* 0-10 (fig.ª 48) *hacer pasar un plano de pendiente tambien dada.*

Sea esta pendiente $\frac{5}{2}$.

La línea de máxima pendiente de este plano, que pasa por el punto 10 de la recta dada, será uno de los radios de la circunferencia 10 descrita con

$$L = \frac{D}{P} = \frac{10}{\frac{5}{2}} = 4:$$

segun se ha esplicado en el problema anterior.

De todos los planos cuyas escalas son estos radios, los 10-*m* y 10-*n* cumplen con la condicion de contener á la recta propuesta, porque sus horizontales de cota 0, pasan por el punto de igual cota de aquella recta; luego para encontrar las escalas 10-*m* y 10-*n* de los planos pedidos, bastará trazar las tangentes 0*m* y 0*n*, desde el punto 0 á la circunferencia 10.

Si la recta dada fuera horizontal, las tangentes 0*m* y 0*n* serian paralelas á ella.

En este caso y en el anterior, en que hemos supuesto la pendiente del plano, mayor que la pendiente de la recta, el problema tiene dos soluciones, porque el radio de la circunferencia es menor que la longitud 0-10 de la escala de la recta dada.

Cuando la pendiente del plano fuera igual á la pendiente de la recta, la magnitud del radio de la circunferencia 10 seria igual á 0-10 y el problema solo tendria una solucion y no tendria ninguna si el plano tuviera menor pendiente que la recta; porque el radio en este caso, seria mayor que la longitud 0-10 y el punto 0 quedaria dentro de la circunferencia.

52. *Por un punto* a (fig.ª 49) *situado en un plano* P, ***hacer pasar una recta contenida en él y de pendiente dada*** $\frac{5}{2}$.

Los radios de la circunferencia *a* descrita con

$$L = \frac{D}{P} = \frac{10}{\frac{5}{2}} = 4,$$

son rectas que pasan por el punto dado y tienen la pendiente $\frac{5}{2}$; de todas ellas solo están contenidas en el plano dado, las rectas *ab* y *ac*, por tener en él, los puntos *c* y *b* de interseccion de la circunferencia *a* con la horizontal de cota 0; luego dichas rectas *ab* y *ac* son las que cumplen con la condicion pedida.

Suponiendo la pendiente del plano, mayor que la pendiente de la recta, el radio de la circunferencia es mayor que la longitud 0-10 y por consiguiente aquella corta en dos puntos *b* y *c* á la horizontal de cota 0 del plano *P*, dando dos soluciones para el problema.

Si el plano y la recta tuvieran igual pendiente, el radio seria igual á 0-10 y en este caso siendo la circunferencia tangente á la horizontal 0-0, habria solo una solucion.

Cuando la recta tenga mas pendiente que el plano, el radio será menor que 0-10 y el problema no tendria solucion.

53. Antes de pasar mas adelante, se puede ya observar por lo que llevámos dicho, que el sistema de los planos acotados tiene la ventaja sobre el de los planos de proyeccion, que los problemas en general se resuelven con mas facilidad y que los resultados se obtienen con datos numéricos, condicion necesaria en las aplicaciones que de este estudio hacemos.

LECCION 5.ª

Líneas curvas y superficies cónicas y cilíndricas.

54. Una línea curva cualquiera, se representa en el sistema de acotaciones, por su proyeccion sobre el plano de comparación y por las cotas de sus diferentes puntos. Asi, la curva AB (fig.ª 50) está representada por la línea ab, proyeccion de aquella y las cotas 4, 4'4, 5, 6,...., de varios puntos.

Una curva asi representada estará mas determinada, cuanto mayor sea el número de puntos acotados: sin embargo sucede en algun caso, que por la posicion especial de la curva con respecto al plano de comparacion y por la naturaleza de su generacion, son suficientes las cotas de algunos de sus puntos, para que estén completamente determinadas las de todos los demas. Esto sucede en la hélice circular, cuando el eje del cilindro en que está contenida, es perpendicular al plano de comparacion (fig.ª 51). Conocida la circunferencia proyeccion de la hélice y las cotas 0 y 3 de dos de sus puntos, se pueden encontrar las cotas de todos los demas; por ejemplo los 1, 2, 4,..., recordando la relacion constan e que existe entre las ordenadas de los puntos de la curva, que aqui son las cotas y sus abcisas curvilineas.

Si la curva es plana, se representa por su proyeccion sobre el plano de comparacion y por la escala de pendiente del plano en que está contenida, pues esta escala graduada, nos facilitará las cotas de los diferentes puntos de la curva.

Para conocer si una curva acotada es ó no plana, empezaremos por encontrar la escala de pendiente del plano que pasa por tres de sus puntos y luego se verá si los otros puntos acotados de la curva, están situados en este plano: si uno de ellos se halla fuera de él, la curva propuesta ya no será plana.

Cuando la curva que trata de representarse, se encuentra en un plano horizontal de cota n, nos bastará tener su proyeccion y acotados tres de sus puntos con la cota n.

Si dos ó mas curvas tienen sus proyecciones confundidas, por estar situadas en el mismo plano ó cilindro proyectante, se distinguen unas de otras, poniendo tildes iguales, á las cotas de los puntos de una misma curva, como ya se dijo (núm 11) para las líneas rectas.

55. Dada la importancia que tiene la circunfe-

rencia, vamos á representarla con los datos necesarios al efecto.

Hallar la proyeccion de una circunferencia, contenida en un plano cuya escala es M (figª. 52) *siendo el centro el punto* a *de cota* 4 *y el radio igual á* 4'5 *unidades.*

La proyeccion pedida es una elipse, por ser la interseccion del cilindro proyectante de la circunferencia con el plano de comparacion y no ser este plano paralelo al *M*.

Para encontrar los ejes de esta elipse observemos, que el mayor ha de tener la direccion de la horizontal del plano que pasa por el punto *a*, por ser el único diámetro de la circunferencia que se proyecta en su verdadera magnitud: tomando en dicha horizontal *ab*=*ac*=4'5 unidades, los puntos *b* y *c*, son los extremos del eje mayor. La direccion del eje menor es *ed*, perpendicular trazada á *bc* por el punto *a*: aplicando sobre el plano de comparacion la línea de pendiente del plano *M*, que está proyectada en *ed* y tomando $\bar{a}m=\bar{a}n=4`5$ unidades, tendremos en las proyecciones 7 y 1 de los puntos *m* y *n* los extremos del otro eje.

Conocidos los ejes *bc* y 7-1 de la elipse, dibujaremos esta por medio del compás elíptico ó por puntos y se tendrá la proyeccion pedida.

Si el plano de la circunferencia dada fuese horizontal, su proyeccion seria otra circunferencia igual á ella y la representariamos como se ha dicho para las curvas planas horizontales. Cuando el plano fuera vertical, la proyeccion de la circunferencia seria una recta igual al diámetro.

56. Las superficies cónicas y cilíndricas se representan, por las proyecciones acotadas de los elementos que determinan á estas.

Un cono queda representado, por las proyecciones acotadas, de su directriz *a c b* (fig.ª 53) que suponemos situadas en el plano *M* y la del vértice *S* de cota 12: pues uniendo este punto, con uno cualquiera *b* de la base, cuya cota 4 se busca en la escala del plano, se tiene la proyeccion de una generatriz.

Algunas veces se representa esta superficie con su contorno aparente, que está determinado por las generatrices 12-*a* y 12-*c* tangentes á la base.

Un cono de revolucion, de eje vertical, cuyas generatrices tengan la pendiente *K*, se representaria trazando desde la proyeccion del vértice una circunferencia con radio *R* igual á $\frac{D}{K}$, pues todos los radios de ella tendrian la pendiente dada (núm. 50)

$$\frac{D}{R}=\frac{D}{\frac{D}{K}}=K.$$

Representada esta superficie, vamos á determinar la cota de un punto, situada en la parte visible de ella y dado por su proyeccion *x*.

Para esto trácese la generatriz 12-4 que pase por el punto x; gradúese esta recta y encontraremos la cota 5 para el punto dado.

Si el punto se diese acotado y se quiere saber si pertenece á la superficie, trazariamos las dos generatrices cuyas proyecciones pasan por la del punto dado y despues se veria si estaba contenido en una de estas rectas, en cuyo caso, seria de la superficie.

57. Todo lo que hemos dicho en el número anterior respecto á la superficie del cono, es aplicable tambien á la del cilindro.

Se representa esta superficie, por las proyecciones acotadas de su directriz *acb* (fig.ª 54) que la suponemos situada en el plano *M* y por la de una recta *mn*, á la cual deben ser paralelas las generatrices del cilindro; pues trazando por un punto cualquiera *b* de la directriz, la recta 1'-5' paralela á la *mn*, tendremos una generatriz de esta superficie.

El contorno aparente de la superficie de este cilindro, lo determinan las generatrices *a*-11 y *c*-5, tangentes á la proyeccion de la directriz.

Para encontrar la cota de un punto x dado por su proyeccion, que pertenece á la parte invisible de la superficie; se traza la proyeccion de la generatriz 7-11 que pasa por la del punto y graduando esta recta, se halla la cota 10 que se busca.

Si el punto dado estuviese acotado, por ejemplo el 14'' y se quiere saber si pertenece á la superficie. Trazariamos las dos generatrices 1'-5' y 7-11, cuyas proyecciones pasan por la proyeccion de aquel y si como sucede en este caso, el punto no está contenido en dichas generatrices, no pertenecerá á la superficie.

58. Todas las superficies regladas y de revolucion, se representan en general de un modo análogo al que acabamos de indicar, para las cónicas y cilíndricas.

Supongamos el paraboloide hiperbólico, por la aplicacion que tiene en el trazado de las cañoneras en las baterías. Esta superficie está engendrada por una línea recta, que resbala sobre otras dos no situadas en un mismo plano, que sirven de directrices, permaneciendo paralela á un plano llamado *director*. Para la representacion de esta superficie, serian necesarias las escalas del plano director y de las rectas directrices y fácilmente se encontrarian las proyecciones de las generatrices.

LECCION 6.ª

Planos tangentes á conos y cilindros.

59. En Geometría elemental hemos visto, que el plano tangente á una superficie cualquiera, es el lugar de todas las tangentes trazadas por el punto de contacto, á las diferentes curvas que pasan por él, situadas en la superficie. Luego conocido el punto de contacto, el plano tangente estará determinado por dos de dichas tangentes.

Cuando la superficie es reglada, una de las tangentes puede ser sustituida por la generatriz rectilínea que pasa por el punto de contacto, como sucede en las superficies de que vamos á ocuparnos.

60. *Hacer pasar, por un punto dado en la superficie de un cono (ó cilindro) un plano que le sea tangente.*

Sea el punto S de cota 6 (fig.ª 55) el vértice del cono propuesto; la base, la circunferencia 2-2-2 y el punto dado sobre la superficie, el *a* de cota 5.

La generatriz 6-2 que pasa por el punto *a* y la tangente 2-2 á la base en el punto *b*, estan contenidas en el plano tangente, por ser la superficie desarrollable; por consiguiente, el plano *P* determinado por estas dos rectas es el que se busca.

61. Supongamos que la superficie sea un cilindro, cuya base está en el plano *P* (fig.ª 56) y el punto *a* de cota 6 es el dado.

Trácese por el punto *a* la generatriz *ab* y despues la tangente *bc* á la base en el punto *b*; esta tangente por estar contenida en el plano *P* la graduaremos fácilmente. El plano *M* determinado por las rectas *ab* y *bc* es el pedido.

62. *Hacer pasar por un punto dado, fuera de la superficie de un cono (ó cilindro) un plano que le sea tangente.*

Sea la superficie, el cono cuya base está situada en el plano *P* (fig.ª 57) y el punto dado el *a* de cota 8. Únase este punto con el 12 vértice del cono y la recta que resulta 12-8, está contenida en el plano tangente, por estarlo cada uno de aquellos puntos.

Por el punto 6 de interseccion del plano *P* con la recta 12-8, tírese la tangente 6*d* á la base del cono: el plano *M* determinado por las rectas 12-8 y 6*d* es el que se busca.

Como desde el punto 6 pueden tirarse dos tangentes á la base del cono, resulta que el problema tiene dos soluciones.

63. Supongamos que la superficie sea el cilindro, cuya base es la circunferencia 3-3-3 (fig.ª 58) una generatriz la recta 3-7 y *a* el punto dado de cota 4.

Hágase pasar por el punto *a*, la recta 4-8 paralela á las generatrices: gradúese esta paralela y desde el punto de cota 3, trácese la tangente 3-3 á la base.

El plano *M* determinado por las rectas 3-3 y 3-8, es el que se pide.

Tambien en este caso como en el anterior, el problema tiene dos soluciones.

64. *Trazar á la superficie de un cono (ó cilindro) un plano tangente paralelo á una recta dada.*

Sea el vértice del cono el punto *S* (fig.ª 59) de cota 10; la base, la circunferencia 2-2-2 y *ab* la recta dada.

Por el vértice del cono, hágase pasar la recta 10-6 paralela á la *ab*, la cual estará contenida en el plano que buscamos. Desde el punto de cota 2 de la 10-6, trácese la tangente 2-2 á la base del cono.

La paralela 10-2 y la tangente 2-2 nos determinan el plano *M* pedido.

Este problema tendrá tantas soluciones, como tangentes puedan trazarse desde el punto 2 á la base del cono.

65. Cuando la superficie sea un cilindro (fig.ª 60) el plano que se busca será paralelo, al determinado por la recta dada *ab* y una paralela á las generatrices.

Para encontrarlo, trácese por el punto 12 de *ab* la recta 12-6 paralela á la generatriz del cilindro 8-14 y determínese la escala del plano *N* que pasa por las rectas *ab* y 12-6.

Para trazar un plano tangente al cilindro, paralelo al *N*, encuéntrese la interseccion *cd* de este plano con el plano *M* de la base y la recta *cd* que resulta, debe ser paralela á la tangente 4-10 á la base del cilindro, que está contenida en el plano pedido. La escala *P* de este plano se determina ya fácilmente.

Este problema tiene dos soluciones, porque pueden trazarse dos tangentes á la base del cilindro, paralelas á la recta *cd*.

66. *Trazar á la superficie de un cono (ó cilindro) un plano tangente, de pendiente dada* $\frac{7}{3}$.

Sea el vértice del cono el punto 10 (fig.ª 61) y la base, la circunferencia *abc* de cota 3.

Constrúyase un cono recto, que tenga el mismo vértice 10 y cuyas generatrices tengan la pendiente $\frac{7}{3}$, cuidando que la base de este cono auxiliar, esté en el mismo plano horizontal que la base del cono dado: el radio de la base del cono auxiliar será igual á $\frac{D}{P}=\frac{7}{\frac{7}{3}}=3$ unidades. Descrita la circunferencia de centro 10, con este radio, todos los planos que tracemos tangentes á esta superficie tendrán la pendiente dada, por consiguiente el problema queda reducido á trazar un plano tangente comun á estos dos conos.

Para esto, tírese la tangente *c*3 á las dos bases y el plano *P* determinado por esta recta y el vértice 10 es el pedido.

Cada una de las tangentes comunes que puedan trazarse á estas bases, determinará una solucion del problema.

Si el plano de la base del cono no fuera horizontal, graduariamos diferentes generatrices y uniendo los puntos de estas rectas de la misma cota, determinariamos la seccion del cono con un plano horizontal y estariamos en el caso anterior.

57. Supongamos la superficie dada un cilindro (fig.ª 62) cuya directriz es la circunferencia 2-2-2 y la recta 2-9 una generatriz.

Constrúyase en un punto cualquiera 12, el cono auxiliar esplicado en el caso anterior. Todo plano *M* tangente á este cono y paralelo á la generatriz 2-9, será paralelo al que buscamos; porque tiene la pendiente dada y es paralelo á las generatrices del cilindro. Luego trazando la tangente 2-2 á la base del cilindro, paralela á las horizontales del plano *M* tendremos una horizontal del plano *N* pedido.

Si no se hubiera encontrado mas que la direccion de la horizontal 5-5 del plano *M*, para hallar la escala del plano *N* nos valdriamos de la generatriz de contacto 2-9 del cilindro.

Por cada uno de los planos tangentes al cono auxiliar, que sean paralelos á las generatrices del cilindro, resultan dos soluciones del problema y pudiendo ser aquellos, dos, uno ó ninguno, tendremos que el número de planos que cumplen con la condicion pedida podrán ser cuatro, dos ó ninguno.

Si la base de esta superficie estuviese situada en un plano cualquiera, hallariamos la interseccion de este con el plano *M* y esta recta seria paralela á las tangentes á la base del cilindro, que nos determinan los planos pedidos.

LECCION 7.ª

Secciones planas de conos y cilindros é intersecciones de estas superficies (1).

68. Se determinan las secciones planas de los conos y cilindros, encontrando la interseccion del plano secante, con cada una de las generatrices de estas superficies y uniendo los puntos que resultan por medio de un trazado contínuo.

Si la seccion es horizontal, uniremos los puntos de las generatrices, de la misma cota que el plano horizontal que se considera.

69. La tangente en un punto cualquiera de la seccion, es la interseccion del plano tangente á la superficie en dicho punto y el plano secante, porque esta recta, debe estar contenida á la vez en dichos planos. Para encontrar esta interseccion, bas-

(1) Las superficies cónicas y cilíndricas á que hacemos referencia, son de segundo grado.

tará hallar un solo punto de ella, puesto que ya tenemos otro en el de contacto.

Es muy conveniente tener los puntos de la seccion con sus tangentes, para trazar con mas exactitud la curva; tambien lo es, conocer la naturaleza de la interseccion, para encontrar esta con mas facilidad.

70. Los puntos de la seccion, mas próximo y separado de un plano cualquiera, tienen sus tangentes, paralelas á la interseccion del plano secante con el plano de referencia; por consiguiente, para encontrar estas tangentes y aquellos puntos, trazaremos planos tangentes á la superficie, paralelos á la indicada interseccion.

71. Un plano dado M (fig.ª 63) secante á un cono y que pasa por su vértice 8, corta á la superficie de dicho cono, segun las dos generatrices $8a$ y $8b$, las cuales se determinan, hallando los puntos a y b, donde la horizontal del plano M de cota 0-0, corta á la base del cono.

Si el plano P de la base (fig.ª 64) no fuese horizontal, los puntos a y b, estarán en la interseccion de la base del cono con la recta ab, que es interseccion del plano M con el P.

72. En el caso que el plano secante no pase por el vértice, su interseccion con el cono es una curva de segundo grado y por esta propiedad, se les dá á estas curvas el nombre de *secciones cónicas*.

La seccion será una curva *limitada*, cuando el plano secante no sea paralelo á ninguna generatriz

::

del cono, ó *ilimitada* sin asíntotas ó con ellas, cuando dicho plano sea paralelo á una sola generatriz ó á dos. En efecto, en el primer caso, cortará el plano á todas las generatrices del cono á una distancia finita; por consiguiente, la interseccion será una *elipse* ó *circunferencia*: en el segundo, la curva tendrá un punto en el infinito, el cual resulta de la interseccion con el plano secante, de la generatriz que le es paralela y como tambien son paralelos los planos que determinan la tangente en dicho punto, no tendrá asíntota la seccion y será una *parábola*; por último, en el tercer caso hay tambien puntos en el infinito, pero los planos que nos determinan las tangentes en ellos no son paralelos, luego la curva por tener asíntotas, será *hipérbola*.

Para encontrar las generatrices de un cono, paralelas al plano secante, se hace pasar por su vértice un plano paralelo á aquel y las generatrices de la superficie que están contenidas en este plano, que podrán ser dos, una ó ninguna, serán las que se buscan.

73. *Hallar los puntos de interseccion de una recta con un cono.*

Sea *ab* (fig.ª 65) la recta dada; la base del cono, la circunferencia 0-0-0 y el punto *S* de cota 9, el vértice.

Hágase pasar un plano por la recta *ab* y por el vértice *S*, uniendo este punto con uno cualquiera 5 de aquella: este plano cortará al cono segun las generatrices *S* 0 y *S* 0 (núm. 71). Los puntos *m*. y

n, interseccion de estas generatrices con la recta ab, serán los pedidos; porque estarán á la vez en la recta y en el cono dado.

74. *Hallar la interseccion de un plano con un cono.*

Sea la base del cono la circunferencia Omn (fig.ª 66); el vértice el punto S de cota 6 y M el plano secante.

Ante todo, averiguaremos la naturaleza de la interseccion, haciendo pasar por el vértice del cono, un plano paralelo al M, para ver que generatrices están contenidas en él. Por la simple inspeccion de la figura en el ejemplo propuesto, se observa, que el plano secante, no es paralelo á ninguna generatriz, luego la seccion será una elipse.

En este caso, en vez de efectuar lo indicado en el (núm. 68) es mas conveniente hallar cuatro puntos de la curva, que sean extremos de diámetros conjugados, cuyos datos son suficientes para dibujar aquella.

Recuérdese que cada uno de estos diámetros tiene la propiedad, de ser paralelo á las tangentes á la elipse en los extremos del otro.

Para encontrar un diámetro cualquiera, bastará determinar los dos puntos de la curva mas próximo y separado de un plano cualquiera, por ejemplo, el mas alto y mas bajo, cuyas tangentes son horizontales.

Estas tangentes se hallan contenidas en los planos tangentes, paralelos á las horizontales del plano secante y segun se dijo (núm. 70) dichos planos están determinados por cada una de las tangentes á la base 0-0′ y 0-0″, paralelas á aquellas horizontales y por las generatrices correspondientes *Sm* y *Sn*.

Las intersecciones *a*-3‘8 y *b*-2 de cada uno de estos planos tangentes con el secante, pasan respectivamente por los puntos rebatidos *x* é *y* (núm. 26); estas tangentes *a*-3‘8 y *b*-2 cortan á las generatrices *Sm* y *Sn*, en los puntos *a* y *b*, que son los extremos de un diámetro.

El otro diámetro *c d* conjugado á este, pasa por su punto medio *p* y tiene la direccion de una horizontal del plano *M*, cuya cota 2‘9 se halla en la escala de este plano. Para hallar los extremos *c* y *d* del diámetro *c d*, encontremos la interseccion de esta recta con la superficie del cono (núm. 73) por medio del plano auxiliar que pasa por ella y el vértice *S*, para lo cual unimos este punto, con el *p* centro de la elipse.

Si la base del cono no fuera horizontal, la construccion anterior, aunque menos sencilla, se haria de una manera análoga.

La direccion de la tangente *zc*, en el punto *c*, es conocida, por ser paralela al diámetro *ab*; pero si esto no sucediera, para determinarla, encontrariamos otro punto de ella, por medio de la interseccion *z* de las horizontales *z*-0 y *z*-0 de la misma cota, del plano tangente y del plano secante.

Si se pide la verdadera forma de la interseccion, rebátase el plano *M* sobre el de comparacion, haciéndole girar alrededor de su horizontal de cota 0. Los puntos a, b, c y d, tomarán despues del giro la posicion $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ y la tangente zc la $z\,\bar{c}$ porque el punto z no ha variado, por pertenecer al eje.

75. Para hacer el desarrollo de este cono, inscribásele una pirámide y considérese sustituida aquella superficie por esta. El error de esta sustitucion será menor á medida que el número de caras de la pirámide inscrita sea mayor.

La superficie lateral de la pirámide se desarrolla, construyendo triángulos iguales á cada una de las caras y colocándolos en un mismo plano, por el órden y relacion entre sí, que tienen ellos en el espacio: estos triángulos se construyen hallando la magnitud de cada uno de sus lados. Al propio tiempo que hacemos esto, podemos encontrar la distancia de los puntos de la seccion plana al vértice del cono: llevando todas estas magnitudes, á las aristas respectivas en el desarrollo y uniendo los puntos que resulten por medio de un trazado contínuo, obtendremos la trasformada de la seccion.

76. Si el cono fuera de revolucion, el desarrollo seria un sector circular, de radio igual á sus generatrices y encontrariamos su valor gradual por medio de la proporcion

$$\frac{360^{\circ}}{2\pi R} = \frac{X^{\circ}}{2\pi r}$$

llamando R la generatriz del cono y r el radio de la circunferencia de la base.

Despejando el valor de X° tendremos

$$X^{\circ} = \frac{r}{R} 360^{\circ}.$$

77. Se encontrará la seccion cuando sea parábola ó hipérbola, hallando la interseccion de diferentes generatrices con el plano secante y procediendo en todo lo demas, de un modo análogo al caso de elipse.

78. Cuando la interseccion sea una hipérbola, veamos la manera de encontrar las asíntotas.

Sea el vértice del cono el punto S de cota 6 (fig.ª 67); la base, la circunferencia 0-0-0 y M la escala del plano secante.

Hágase pasar por el vértice 6, un plano N paralelo al M y hállense las generatrices Sa y Sb intersecciones del cono con aquel plano. Dichas generatrices, paralelas al plano M, deben serlo tambien respectivamente á cada una de las asíntotas ef y dg; porque á estas rectas las determinan el plano secante y los planos tangentes á la superficie que pasan por Sa y Sb.

79. La naturaleza de la seccion plana de un cilindro, depende de la posicion que tiene el plano secante con relacion á las generatrices á la superficie.

Puede suceder que estas rectas sean ó no paralelas al plano; en el primer caso, la interseccion son dos generatrices y en el segundo una elipse ó circunferencia, que recibe el nombre de ***seccion recta***, en el caso particular de que el plano secante sea perpendicular á las generatrices.

La trasformada de la seccion recta, tiene la propiedad de ser en el desarrollo una línea recta.

80. *Hallar la interseccion de un cilindro con un plano paralelo á sus generatrices.*

Supongamos la base del cilindro situada en el plano *P* (fig.ª 68); sea la recta 6-11 una generatriz y *M* el plano secante.

Siendo dos generatrices la interseccion pedida, bastará encontrar un punto de cada una de ellas para que esten determinadas.

Estos puntos 8 y 2, se hallan á la vez, en la base del cilindro y en la recta *cd*, que es interseccion de los planos *M* y *P*; por consiguiente, las generatrices que se buscan son las 8*m* y 2*n* que pasan por aquellos puntos.

81. *Hallar la interseccion de una recta con un cilindro.*

Sea *ab* la recta dada (fig.ª 68); y el cilindro, el mismo que hemos considerado en el problema anterior.

Por un punto 4 de la recta *ab*, trácese la 4-9 paralela á las generatrices del cilindro. El plano *M* determinado por las rectas *ab* y 4-9, cortará al cilindro segun las generatrices, 8*m* y 2*n*. Los puntos pedidos son los *m* y *n*, interseccion de estas generatrices con la recta dada, por lo que se dijo (núm. 73).

82. *Hallar la interseccion de un cilindro con un plano cualquiera.*

Sea la base del cilindro, la elipse 0-*q*-0-*r* (figª. 69) situada en el plano de comparacion; una generatriz la recta *q*6 y *M* el plano secante.

Siendo generalmente, la proyeccion de la interseccion que se busca una elipse, vamos á hallar cuatro puntos de ella, extremos de diámetros conjugados. Para esto, trácense dos planos tangentes á la superficie, paralelos entre sí, los cuales están determinados, por una de las tangentes paralelas 0-0′ y 0-0″, trazadas á la base y las generatrices 0*m* y 0*n* que pasan por los puntos de contacto.

Las intersecciones 4-*b* y 2-*a* de estos planos, con el secante *M* se han encontrado por medio de sus líneas de pendiente rebatidas 0*f*, 0′*g* y 0″*h*, por tener sus horizontales paralelas (núm. 26).

Los puntos *a* y *b*, donde cortan las rectas 2-*a* y 4-*b* á las generatrices 0*n* y 0*m*, determinan los extremos de uno de los diámetros, porque en ellos las tangentes á la curva son paralelas.

El diámetro conjugado al *ab* es el *cd*, que pasa por el punto *p* medio de aquel y ambas rectas quedarán determinadas por la escala del plano *M*, en que están contenidas.

Para hallar los extremos *c* y *d* de este último diámetro, encontraremos la interseccion de esta recta con la superficie dada (núm. 81) por medio del plano auxiliar que pasa por ella y el eje del cilindro.

La verdadera forma de la seccion y la tangente en un punto cualquiera de ella, se encontraría del mismo modo que ya se ha esplicado en la interseccion de un cono con un plano (núm. 74).

83. Para hacer el desarrollo del cilindro, limitado por su base y por la seccion oblícua que se acaba de obtener, empezariamos encontrando su seccion recta, la cual rectificariamos (1) despues de hallar su verdadera forma y tomando sobre una recta indefinida una magnitud igual á esta rectificacion, tendriamos su trasformada.

Las generatrices del cilindro, continúan siendo perpendiculares á esta trasformada, por consiguiente, levantando en los extremos de ella perpendiculares, estas dos rectas representarán la posicion que toma la generatriz por donde se considere abierto el cilindro y la superficie plana comprendida entre dichas generatrices, el desarrollo del cilindro indefinido. Para limitarlo es preciso encontrar las *sinusoides*, trasformadas de sus bases.

Para esto, divídase la seccion recta en diferentes partes y trácense generatrices por los puntos de division. Los arcos en que ha quedado dividida la seccion recta, despues de rectificados, llévense sobre su trasformada, colocándolos por el mismo órden sucesivo que tienen en el espacio.

La rectificacion de estos arcos de elipse, se

(1) Por rectificacion de esta elipse, se suele tomar $2a + b + \frac{1}{7}b$, siendo a el eje mayor y b el menor.

::

podrá determinar, por medio del cálculo ó gráficamente; siendo uno de los procedimientos del último medio, inscribir al arco una línea poligonal y considerar á la suma de sus diferentes lados como su rectificacion. Cuando sea pequeña la cuerda del arco que se considera puede tomarse aquella por este.

Por los puntos de division de la trasformada, levántense perpendiculares y estas serán las generatrices que pasan por los puntos correspondientes. En cada una de ellas tómense magnitudes iguales á las longitudes respectivas, desde la seccion recta, á la base del cilindro y á la seccion oblícua, teniendo cuidado de tomarlas en el sentido que tengan respecto á aquellas.

Uniendo todos los puntos de una misma seccion, obtendremos las trasformadas de las bases, que determinan la parte de cilindro que se deseaba desarrollar.

Si el plano de la base del cilindro no fuera horizontal se resolveria este problema de un modo semejante al que hemos esplicado.

84. *Interseccion de dos conos.*

Sean los puntos S y V de cotas 6 y 10 (fig.ª 72) los vértices de los conos dados y sus bases respectivas las circunferencias *icn* y *mjph*, situadas en el plano de comparacion.

Para resolver este problema, tracemos planos secantes auxiliares por la recta *ab*, que une los vértices S y V. Estos planos cortarán á los conos dados segun generatrices y las intersecciones de estas darán puntos de la curva pedida; porque pertenecerán á la vez á ambas superficies.

Antes de empezar á encontrar estos puntos es conveniente saber la naturaleza de la interseccion que se busca.

Puede ser la interseccion de dos conos por *penetracion* ó por *arranque*, segun que todas las generatrices de uno de ellos corten á un cierto número del otro, ó que solo un cierto número de generatrices de ambos conos se corten entre sí: se verá, que fácilmente puede distinguirse cada uno de estos casos, por medio de los planos auxiliares indicados. Tambien puede ser esta curva *ilimitada* ó *limitada*, lo cual dependerá de que los conos dados tengan ó no generatrices paralelas.

Sentado esto, para encontrar puntos de la interseccion, trácense por el punto *a* de cota 0, horizontales de los planos auxiliares, las cuales tendrán por límites las *ac* y *ad*, pues todo plano cuya horizontal de cota 0 esté fuera del ángulo que forman aquellas, no cortará á la vez á ambos conos. Los planos auxiliares que pasan por las rectas *ac* y *ad* reciben el nombre de *planos límites*.

En el ejemplo propuesto, puede observarse, que todas las generatrices del cono *V* se hallan comprendidas en los planos límites y solamente del otro, las que pasan entre los puntos 0-0-0 y *nic* de su base; por consiguiente, el primero de estos conos penetra en el segundo.

La interseccion seria por arranque cuando cada horizontal de los planos límites, siendo tangente á una base diferente sea secante á la otra.

El plano auxiliar determinado por la horizontal *ai*, corta á las superficies dadas segun las generatrices *Vm*, *Vp* y *Si*; los puntos 4'2 y 1 donde se corten estas rectas, son de la curva pedida. Acotaremos los puntos hallados, por medio de la escala de la recta *ab*, trazando horizontales del plano auxiliar que pasen por ellos.

Del mismo modo se encontrarian los puntos 2'8 y 3 que estan en los planos límites y todos los que fueran necesarios para obtener, uniéndolos por medio de un trazado contínuo, la curva que se pide.

La proyeccion de estos puntos será visible, si lo son tambien las dos generatrices que á cada uno determinan é invisibles en el caso contrario.

La tangente en el punto 4'2, es la interseccion de los planos tangentes á cada uno de los conos en dicho punto; para encontrarla bastará trazar las horizontales *ix* y *mx* de la misma cota, de estos planos y unir el punto de encuentro de ellas *x*, con el 4'2.

Haciendo esta construccion en los puntos límites, resulta que su tangente, es la generatriz del cono, donde el plano límite es secante.

En el caso que la recta *ab* fuera horizontal, las horizontales de los planos auxiliares serian paralelas á ella y las cotas de los puntos de la interseccion se encontrarian por las escalas de las generatrices que los determinan.

85. *Interseccion de dos cilindros.*

Sean las circunferencias *S* y *T* (fig.ª 71) situadas en el plano de comparacion, las bases de los cilindros dados y las rectas acotadas *ab* y *cd* sus generatrices respectivas.

La interseccion de dos cilindros puede ser como en los conos por penetracion ó por arranque y todo lo dicho allí referente á esta cuestion, se aplica tambien á las superficies propuestas.

Para hallar la interseccion, se cortan ambos cilindros, por planos auxiliares paralelos á sus generatrices; los puntos donde se encuentren las secciones del mismo plano con ambos cilindros, serán de la curva pedida.

Trazando por un punto 2, las rectas 2-0 y 2-0 paralelas á las generatrices *ab* y *cd*; el plano *M* que determinan aquellas será paralelo á los auxiliares que vamos á emplear.

Los planos auxiliares límites, serán los que pasan por cada una de las horizontales de cota cero, *mn* y *rs*, pues otro cualquiera exterior á estos dos no cortará á la vez á ambos cilindros.

Considerando el plano cuya horizontal es *pq*, vemos que corta á los cilindros segun las generatrices determinadas por los puntos *e*,*f*,*g* y *h*, (núm. 80).

Las intersecciones de estas generatrices entre si, dan cuatro puntos que son los 3‘9, 7‘3, 1 y 4‘6, cuyas cotas se hallan fácilmente teniendo graduada una generatriz.

De la misma manera obtendriamos los puntos 3‘6, 4‘8, 2‘9 y 5‘5, que estan situados en los planos límites.

Una vez determinados los puntos que se consideren necesarios, los uniremos por medio de un trazado contínuo y tendremos la interseccion pedida.

La tangente x-1 á la curva, en el punto 1, es la interseccion de los planos tangentes á los dos cilindros en dicho punto; la cual quedará determinada, uniendo aquel con el x donde se cortan las horizontales de la misma cota de aquellos planos.

Se observará por consiguiente, que las tangentes en los puntos límites son las generatrices del cilindro en que el plano límite es secante.

Los desarrollos de estas superficies y las trasformadas de la interseccion, tanto en este caso como en el de los dos conos, se encontrarian del mismo modo que se indicó en las secciones planas.

86. *Interseccion de un cilindro con un cono.*

Los planos auxiliares para resolver este problema, deben pasar por el vértice del cono y ser paralelos á las generatrices del cilindro, para que corten segun estas rectas á las superficies dadas; por consiguiente, trácese por aquel punto una paralela á dichas generatrices y todos los planos que pasen por ella, comprendidos entre los límites, serán los planos auxiliares que determinan puntos de esta interseccion. La marcha que se sigue en este problema es la misma que en los dos anteriores.

LECCION 8.ª

Superficies topográficas.

87. La representacion de las superficies topográficas, ó sea del relieve del terreno, es una de las aplicaciones mas importantes del sistema de acotaciones, porque el procedimiento que se emplea es á la vez que sencillo, bastante aproximado; teniendo en cuenta, que la naturaleza de estas superficies no permite representarlas con la exactitud matemática que las geométricas.

88. Considerando las superficies topográficas cortadas por planos horizontales, todas las intersecciones serán líneas que unirán los diferentes puntos del terreno de la misma cota; y para tener determinadas estas líneas bastará acotar un punto de cada una de ellas.

Estas intersecciones, que tienen cotas enteras, reciben el nombre *de curvas de nivel* y aquellas el de *cotas redondas*.

El modo de encontrar las cotas de los puntos del terreno, para obtener despues las curvas de nivel, corresponde á una parte del estudio de la Topografía.

Los planos horizontales de estas curvas, están equidistantes y por esto se llama *equidistancia* á la diferencia de cotas de dos consecutivas.

La equidistancia conveniente en cada caso, depende de la irregularidad del terreno, de su pendiente y de la escala del dibujo.

En las partes de la superficie en que haya detalles importantes, convendrá disminuir la equidistancia, por exigirlo así la mejor representacion del terreno y entónces, las curvas de nivel intercaladas, no serán en general de cotas redondas.

Á las zonas comprendidas entre dos curvas de nivel consecutivas, se las considera como superficies engendradas por una línea recta, que se mueve, apoyándose en dichas curvas, permaneciendo sensiblemente normal á ellas. Errónea parece la idea de suponer, que puedan sustituirse las zonas topográficas del terreno por superficies desarrollables; pero teniendo en cuenta la escala reducida de estos planos y lo pequeña que es la equidistancia, se disminuirá tanto el error, que podrá llegar á ser casi despreciable en el dibujo. Además, obsérvese lo inútil de exigir una precision rigurosa en cuestiones como esta, donde las construcciones que se proyectan, quizá resulten menos exactas por las alteraciones fortuitas del terreno, que por el modo empleado en representarlo.

Admitiendo la generacion indicada para las zonas superficiales, resulta, que las tangentes á las curvas de nivel, en los extremos de cada posicion de la generatriz, pueden suponerse paralelas; por consiguiente, dicha recta pasará de una posicion á otra infinitamente próxima, resbalando sobre aquellas; siendo la proyeccion de la normal sobre los planos horizontales, perpendicular á las proyecciones de las tangentes.

89. Se deduce de cuanto acabamos de considerar, que estas normales dán desde luego una idea clara de la pendiente del terreno: esta será mayor á medida que la proyeccion de aquellas rectas sea menor; así sucede en *cd* (fig.ª 72) con respecto á *ab*: luego, donde las curvas se aproximen, aumentará la inclinacion del terreno y disminuirá en las partes en que se separen. Puede suceder que las curvas de nivel coincidan en una extension *MN*, en la cual será infinita la pendiente y se dice, que la superficie está allí *cortada á pico*.

Hay en las superficies algunos puntos como el *m*, desde el cual pueden trazarse diferentes normales *mn*, *mn'* y *mn''*: de todas ellas, á la mayor *mn* se la llama línea de *mínima pendiente*.

Cuando las curvas de nivel estén algo separadas, como sucede en *fg*, en vez de trazar una recta sensiblemente normal á dichas curvas, que resultaria

::

poco exacta, se determinan curvas intermedias y sus normales sucesivas ff', $f'f''$, $f''f'''$ y $f'''g$ formarán con mas exactitud, la línea de pendiente en el punto f.

En un punto cualquiera de la superficie se determinaria la línea de pendiente, trazando las normales HH', $H'H''$ y $H''H'''$ á las diferentes curvas de nivel.

90. *Dada la proyeccion* q (fig.ª 72) *de un punto de la superficie topográfica* S, *determinar su cota.*

Trácese la línea de pendiente ab, que pasa por el punto dado: las cotas de los puntos b y a son 0 y 2 respectivamente.

Repitiendo lo que se dijo (núm. 9) encontraremos gráfica ó numéricamente la cota pedida 1‘5.

91. *Dada la línea de pendiente* ab (fig.ª 72) *contenida en la superficie* S, *encontrar el punto de ella que tiene la cota* 1‘5.

Teniendo acotada la recta ab, se resolverá este problema del modo indicado (núm. 9) y encontraremos que q es el punto pedido.

Cuando no se dá la recta ab, el problema es indeterminado y tiene por objeto encontrar la curva de nivel de cota 1‘5. Para esto, tracemos diferentes normales en la zona comprendida por las curvas 0 y 2, y en cada una de estas rectas, hállese el punto de cota 1‘5 y uniéndolos, tendremos la curva que se busca.

92. *Trazar un plano tangente á una superficie topográfica, en un punto dado de ella.*

El plano tangente estará determinado por la tangente á la curva de nivel en el punto dado y la línea de pendiente que pasa por él.

Cuando el punto de contacto esté fuera de las curvas de nivel de la superficie, se trazará la curva que pasa por dicho punto y estaremos en el caso anterior.

93. *Por un punto dado* a (figª. 73) *situado en la curva de cota* 0 *de la superficie* S, *hacer pasar una recta que se apoye en la curva de nivel* 8 *y cuya pendiente sea* $\frac{2}{3}$.

La proyeccion de la recta pedida será,

$$L=\frac{D}{P}=\frac{8}{\frac{2}{3}}=12,$$

segun se dijo (núm. 50).

Haciendo centro en a, con un radio igual á 12 unidades, se describe una circunferencia, que cortará á la curva de nivel de cota 8 en los puntos d y h: las rectas ad y ah acotadas, resolverán el problema.

El número de soluciones que podrá haber, será igual al de puntos de interseccion de la circunferencia con la curva de nivel de cota 8.

94. Como aplicacion de este problema se puede trazar sobre las superficies topográficas, caminos de pendiente dada; para esto, no tendremos mas que

repetir en el punto *d* y en los sucesivos, la construccion anterior, hecha para *a*.

De las varias soluciones que tiene generalmente este problema, se escojerá la mas conveniente, con objeto que su coste sea menor; dependiendo este, de la longitud del camino, de los puntos accidentados por donde pasa, etc., etc.

95. La recta *ad*, generalmente cortará á la superficie. Para averiguarlo, buscaremos las cotas 1'5,7, etc., de varios puntos *b* y *c*, etc., (núm. 90) de la línea del terreno, proyectada en *abcd*, con objeto de tenerla mas determinada; y rebatiendo esta línea y la recta *cd*, que están en el mismo plano proyectante, hallaremos en aquellas rebatidas $\bar{a}$-8 y $\bar{a}$-1'5-7-8 (fig.ª 74) el punto *s* de interseccion.

Para que la superficie tenga la inclinacion del camino, será necesario rebajar el terreno en la parte *s*78 y elevarlo en la $\bar{a}$-1'5-*s*, lo cual se consigue por medio de la remocion de tierras.

Los puntos tales como el *s*, en que corta la línea $\bar{a}$-8 de un proyecto á la del terreno $\bar{a}$-1'5-7-8, se llaman *puntos de paso*, y *cotas rojas* las partes 7-5'3, 1'5-2'7 de rectas verticales, comprendidas entre las líneas del proyecto y las del terreno. Son positivas estas cotas, cuando los puntos del proyecto están mas elevados que los del terreno y negativas cuando sucede lo contrario.

De aquí se deducen los dos problemas siguientes.

96. *Dadas las rectas* 2'7-5'3, y 1'5-7 (fig.ª 74)

del proyecto y del terreno, y conocida la cota roja R, del punto 2'7, encontrar la cota roja que corresponde á otro punto g, cuya distancia horizontal K al dado, sea conocida.

Gráficamente se puede resolver este problema tomando $\overline{b}m=K$ y levantando en m una perpendicular; la magnitud ng, es la cota roja que se busca.

Las cotas de los puntos g y n, se pueden determinar numéricamente (núm. 9) y la diferencia de estas, será la cota roja que se pide.

Para esto representemos por P y P', las pendientes de las rectas del proyecto y del terreno; por C y C' las cotasde los puntos 2'7 y 1'5 y por $\overline{C}$ y $\overline{C}'$ las de g y n. Los valores de estas últimas serán

$$\overline{C}=C+K.\ P.$$
$$\overline{C}'=C'+K.\ P'.$$

Llamando x la cota roja en el punto K, tendremos

$$x=\overline{C}-\overline{C}'=(C-C')+K\,(P-P')$$

y sustituyendo por $C-C'$ su valor R, resulta

$$x=R+K(P-P')\ \ldots\ldots(3).$$

97. *Dadas las rectas y cota roja anterior, determinar el punto de paso.*

La construccion gráfica para encontrar el punto de paso, se haria como (núm. 95) cuando se ha definido este punto y la magnitud ss' será su cota.

Podemos tambien hallar numéricamente el valor de $\overline{b}\,s'$ y por medio del problema (núm. 9) aplicado á una de las rectas dadas, buscar la cota del punto de paso.

Para determinar el valor de $\overline{b}\,s'$, hágase en la fórmula (3) $x=0$ y despéjese K: resultando

$$K=\frac{R}{P'-P}\ldots\ldots\ldots(4).$$

Cuando sean conocidas las cotas rojas de dos puntos 1'5 y 7, se puede hallar el punto s', dividiendo la recta $\overline{b}\,\overline{c}$ en partes proporcionales á dichas cotas.

Porque se tiene

$$\frac{2'7\text{-}1'5}{7\text{-}5'3}=\frac{2'7\text{-}s}{5'3\text{-}s}=\frac{\overline{b}\,s'}{\overline{c}\,s'}.$$

98. La línea $\overline{a}$-1'5-s-7-8 (fig.ª 74) es la interseccion de la superficie topográfica, con el plano vertical que tiene por traza *ad* (fig.ª 73). Esta interseccion, se llama *perfil* de la superficie S en direccion de la traza del plano en que está contenido.

Tambien se entiende por *perfil*, la interseccion de la superficie topográfica con superficies prismáticas, cuyas caras son verticales, ó con superficies cilíndricas proyectantes.

Vamos á encontrar estos diferentes perfiles.

99. *Hallar la interseccion de la superficie* S, (fig.ª 75) *con el plano vertical cuya traza es* mn.

La interseccion pedida, estará proyectada en la parte de traza *aa'*, limitada por la curva de nivel exterior y los puntos *a*, *b*, *c*, *d*, *d'*, *c'*, *b'* y *a'*, donde la recta *mn* corte á las curvas, tendrán las cotas respectivas de estas.

Para encontrar la forma de este perfil, rebátase la curva determinada por dichos puntos, sobre un plano horizontal.

Para mayor claridad, como hicimos (núm. 95) llévese este rebatimiento fuera de la figura que representa la superficie dada.

Sobre una recta indefinida *XY*, que suponemos sea la horizontal de cota 0 del plano secante, tómese la parte $\overline{aa'}$ igual *aa'* y en ella $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$......., iguales á *ab*, *bc*, *cd*... Por los puntos de division que resulten en $\overline{aa}'$ levántense perpendiculares á esta recta y en cada una de ellas, tómense magnitudes iguales á las cotas respectivas de los puntos.

La línea que resulta uniendo los extremos de estas perpendiculares, será la forma del perfil que se busca.

Algunas veces, como se dijo (núm. 7) la escala de las cotas es diferente á la de las distancias horizontales, con objeto de que se destaque mas el relieve del perfil.

100. *Hallar la interseccion de la superficie topográfica* S (fig.ª 76) *con la superficie prismática, cuya traza es la línea poligonal* acehl.

Esta interseccion estará proyectada en la traza *acehl*: las cotas de los vértices *c*, *e* y *h* se hallarán por medio de las normales *mn*, *m'n'*, *m''n''*.

Determinaremos el perfil, desarrollando la superficie lateral del prisma; para lo cual tomaremos sobre una recta indefinida *XY* la magnitud $\overline{al}$ igual á la suma de los lados de la línea poligonal dada: llevando sobre esta recta las partes *ab*, *bc*, *cd*, etc..., continuaremos la construccion como en el caso anterior.

En esta figura hemos supuesto la escala de cotas, doble de la de distancias horizontales y puede observarse, que de este modo están mas á la vista las sinuosidades del perfil.

101. Como las superficies cilíndricas pueden considerarse prismáticas de infinito número de caras, resulta, que el perfil sobre aquellas superficies, se determinará de una manera semejante á la que acabamos de esplicar.

102. *Dado el perfil ABCDD'C'B'A'* (fig.ª 75) *y la traza limitada* aa' *de su plano, encontrar la proyeccion de los puntos de cota* 2, 4, 6, *etc.*

En un punto *Y* de la recta *XY*, levántese la perpendicular *YZ* á esta y tómense en ella magnitudes iguales á 2, 4, 6, etc. unidades, de la escala de cotas.

Por los puntos 2, 4, 6, etc., que resulten, trácense las paralelas 2*B*, 4*C*, 6*D*, etc. á la recta *XY*: las intersecciones de estas con el perfil dado, darán los puntos de él *B*, *B'*, de cota 2; *C*, *C'*. de cota 4;

etc., etc. Proyéctense los puntos *B*,*C*,*D*, *D'*, etc.... etc......... sobre la recta *XY*. Llevando las distancias que resulten $\overline{ab}$ de *a* á *b*; $\overline{bc}$ de *b* á *c* y así sucesivamente, encontraremos los puntos pedidos *a*, *b*, *c*, *d*, etc.

103. El problema que acaba de resolverse es recíproco del esplicado (núm. 99) y ambos son de aplicacion importante; el directo, en los proyectos de construcciones, y el recíproco, en el levantamiento de planos.

La cuestion recíproca del (núm. 100) se resolveria de una manera semejante á como se ha hecho en el número anterior.

104. *Hallar la interseccion de una superficie topográfica* S (fig.ª 77) *con un plano secante cualquiera* M.

Esta interseccion se determina cortando las dos superficies dadas por planos auxiliares; elegimos los horizontales, como mas convenientes en este caso, porque cortan á la superficie topográfica segun curvas de nivel y al plano secante segun horizontales.

La interseccion de estas horizontales, con las curvas de nivel de igual cota, son puntos de la interseccion pedida: así obtenemos los *b*, *b'*, *c*, *c'*, *d*, *d'*, *e*, *e'*.

Como la horizontal 6 es secante á la curva de nivel de esta cota, y la de cota 8 no corta á la curva respectiva, se comprende que en la zona limitada por estas curvas, estará el punto mas alto de la interseccion que se busca.

Para encontrar dicho punto trácese la generatriz *xy* de la superficie topográfica, perpendicular á las horizontales del plano dado y el punto *a*, interseccion de *M* con aquella recta, será el mas alto; porque su tangente es la horizontal 7'4.

105. *Hallar la interseccion de una recta con una superficie topográfica.*

Sea *mn* la recta dada (fig.ª 78) y *S* la superficie.

Hágase pasar por la recta un plano, cuyas horizontales 0-0, 2-2, 4-4, 6-6, etc........, corten de una manera conveniente á las curvas de nivel de igual cota. Determínese la interseccion *abcd* de este plano auxiliar con la superficie dada (núm. 104): el punto *x* donde la curva *a b c d* corta á la recta *mn*, será el pedido, porque pertenece á la vez, á la superficie y recta dadas.

La cota del punto *x*, se determina por la escala de la recta *mn*.

Tambien podia haberse empleado como plano auxiliar, el proyectante de *mn* y la interseccion del perfil de este plano con la recta dada, seria el punto que se busca.

106. *Hallar la interseccion de dos superficies topográficas dadas* S *y* S' (fig.ª 79).

Supongamos que se cortan ambas superficies por planos horizontales, las intersecciones de estos con las superficies dadas serán curvas de nivel; de manera que los puntos de encuentro de las curvas de la misma cota, serán puntos de la interseccion pedida.

La línea *abcc'b'a'* que une dichos puntos, es la interseccion de las superficies propuestas.

107. *Hallar la interseccion de una linea cualquiera, con una superficie topográfica.*

Sea *MN* la línea dada (fig.ª 80) y *S* la superficie topográfica.

Para resolver este problema, consideramos como superficie auxiliar, una cilíndrica que tenga por directriz la *MN* y por generatrices las rectas horizontales 0-*a*, 2-*b*, 4-*c*, 6-*d*.

Hállese la interseccion *abcd* de la superficie *S* con la cilíndrica auxiliar, siguiendo el mismo procedimiento que en el problema anterior.

El punto *x* donde corta la línea dada, á la *abcd*, es el que se busca.

LECCION 9.ª

—

Planos rasantes.

108. Se entiende por *rasante* á una curva plana ó superficie cualquiera, la recta que apoyándose en ellas, no las corte en ningun punto. Al plano que se apoya en una superficie ó línea curva y las deja por completo á un mismo lado de él, se le llama *plano rasante*. Por ejemplo, la TT' (fig.ª 81) es rasante á la curva plana abc: el plano determinado por aquella recta y el vértice S, es rasante á la superficie cónica que tenemos representada y tambien á la curva abc.

La aplicacion que se hace del trazado de los planos rasantes en las desenfiladas de Fortificacion, hace necesario dividir este problema en los casos siguientes.

109. *Hacer pasar por la horizontal* ab (fig.ª 82) *de cota* 0, *un plano rasante á la superficie topográfica S.*

Para esto, se envuelve la superficie topográfica dada, por una superficie cónica, cuyo vértice sea un punto cualquiera de la horizontal *ab* y las generatrices, rasantes á la superficie *S*; el plano rasante á esta superficie cónica, que pase por *ab* será el pedido. Para encontrarlo, bastará cortar á la superficie cónica, por un plano horizontal y trazar á la interseccion, una rasante paralela á *ab:* estas dos rectas nos determinan el plano que buscamos.

Para hallar las generatrices de la superficie cónica, se hacen pasar planos verticales por el vértice y desde este punto, se tiran rasantes á los diferentes perfiles que resulten, para lo cual no hay mas que rebatirlos.

El método que acabamos de indicar, por ser algo pesado, es poco usual y se emplea frecuentemente otro que es mas sencillo, el cual está fundado, en que teniendo bien representada la superficie, el punto de apoyo del plano rasante, debe pertenecer á una de las curvas de nivel.

Apoyándonos en esta consideracion, indicaremos tambien en los problemas siguientes, la manera de resolverlos con mas facilidad.

Consiste este método, en trazar por la horizontal dada *ab*, planos rasantes, á cada una de las curvas de nivel de la superficie *S* y de estos diferentes planos, el de mayor pendiente será el pedido; porque dejando debajo á todos los demas planos, tambien dejará á la superficie considerada.

El plano rasante á la curva de nivel de cota 1, está determinado por la recta *ab* y por rasante 1-1 á la curva propuesta, paralela á la recta dada. Análogamente se determinan los planos rasantes á las otras curvas de nivel, siendo las líneas de pendiente de estos planos, las rectas 0-1, 0-3', 0-5'', 0-7''', 0-9^{IV}.

Para averiguar cual de estas rectas tiene mayor pendiente, trácese por el punto 0 la recta 0*c* y en ella, tómense las partes arbitrarias iguales 0-1, 1-2, 2-3, etc., etc.......: únanse los puntos 1, 3, 5, 7 y 9 de esta recta, respectivamente con los 1, 3', 5'', 7''' y 9^{IV} de aquella y de las rectas que resulten la 7-7''' que forma menor ángulo con la *c*0, corresponde al plano *M* que se busca; porque el intérvalo 0-1''' de la escala de este plano, por la posicion de la recta 7-7''', es menor que el intérvalo de los otros planos.

110. *Hacer pasar por una oblícua dada* ab (fig.ª 83) *un plano rasante á la superficie topográfica S*.

Como en el caso anterior, envuélvase la superficie topográfica, por una superficie cónica análoga á la que allí se ha empleado, cuyo vértice sea un punto de la recta *ab*. El plano rasante á esta superficie cónica que pasa por *ab*, será el plano pedido, y estará determinado por dicha recta y por la rasante trazada desde un punto de ella, á la seccion horizontal de la superficie cónica de la misma cota que el punto.

Puede tambien emplearse para resolver este problema otro método mas breve, que consiste en trazar por la oblícua dada, planos rasantes á cada una de las curvas de nivel y de estos diferentes planos, el de mayor pendiente será el pedido, porque dejará debajo á todos los demas.

El plano rasante á la curva de nivel de cota 2, contendrá á la rasante á dicha curva trazada desde el punto de la recta *ab* de igual cota y dicho plano está determinado por ella y por la recta dada. Los planos rasantes á las curvas de nivel de cota 3, 4, 5 y 6 están tambien determinados por la recta *ab* y cada una de las rasantes 3-3, 4-4, 5-5 y 6-6 respectivamente.

De todos estos planos, el de mayor pendiente, es el que corresponde á la rasante que forma menor ángulo con la parte descendente de la oblícua, es decir, que siendo el ángulo 4-4-0 menor que todos los demas, el plano *M* determinado por las rectas *ab* y 4-4 es el que buscamos. En efecto, trácese la semi-circunferencia $0\bar{a}1$ sobre el intérvalo 0-1 como diámetro y por el punto 1, la cuerda $1\text{-}\bar{a}$ paralela á la horizontal 4-4; el intérvalo de la escala del plano *M* es igual á la cuerda $0\bar{a}$. Si se encuentran del mismo modo, los intérvalos de los otros planos, se verá, que todos son mayores que $0\bar{a}$, por formar las horizontales con la recta *a b* un ángulo mayor que el $\bar{a}$-1-0; luego teniendo la escala *M* menor intérvalo, tendrá este plano mayor pendiente.

111. *Por un punto dado m. de cota* 0 (fig.ª 84)

hacer pasar un plano de pendiente mínima, rasante á una superficie topográfica S.

Envuelta la superficie topográfica por una superficie cónica, como las consideradas en los problemas anteriores y cuyo vértice sea el punto *m*, el plano que se busca, será el de pendiente mínima rasante á la superficie cónica. Para encontrar este plano, supongamos que la curva 4-4-4 (fig.ª 85) sea una seccion horizontal de la superficie cónica: haciendo centro en el punto *m*, trácese el arco de circunferencia *b*4*f* de menor radio, tangente á dicha seccion, de tal manera que la tangente *ed* en el punto de contacto de ambas curvas, resulte rasante á la 4-4-4. El plano *M*, que determina la horizontal *ed* y el punto *m*, es el pedido; porque otro plano rasante á la supeficie, estará determinado por una recta que como la *ab*, es secante á la circunferencia y su escala 0*c* tiene intérvalos menores que los del plano *M*, luego tendria mas pendiente que este.

Tambien se puede resolver este problema, trazando por el punto dado los planos de mínima pendiente, rasantes á cada una de las curvas de nivel y el de mayor pendiente de estos diferentes planos, será el pedido.

Los planos que acabamos de indicar, los encontraremos aplicando á cada una de las curvas de nivel (fig.ª 84) la construccion esplicada anteriormente; trazando los arcos de circunferencia $a1$, $b2'$, $c3''$, $d4'''$ y $e5^{IV}$, siendo las líneas de pendiente de estos planos 0*a*, 0*b*, 0*c*, 0*d* y 0*e*.

Para averiguar cual de estas rectas tiene mayor pendiente, háganse girar todas ellas alrededor de la vertical que pasa por el punto 0, hasta colocarlas en el mismo plano proyectante y como no habrán variado sus pendientes en el giro, repitiendo en las nuevas posiciones de ellas 0-1, 0-2', 0-3'', 0-4''' y 0-5^{IV} lo esplicado en el segundo método del primer problema, encontraremos que la 0-4''', es la de mayor pendiente, por ser el ángulo 4'''-4-0 menor que los demas; por consiguiente, el plano pedido es el *M*, determinado por el punto dado y la rasante 4-4'.

112. *Hacer pasar por un punto dado M de cota* 0 (fig.ª 86) *un plano rasante á dos superficies topográficas* D é Y.

Considérense las superficies cónicas envolventes á cada una de las superficies *D* é *Y*, cuyo vértice sea el punto *m* y trácese un plano rasante á ambas superficies cónicas y este será el que se busca, el cual le encontraremos cortando las dos superficies cónicas por un plano horizontal y trazando una recta rasante á la vez á las dos secciones. Esta recta y el punto dado determinan el plano rasante.

De otro modo se puede hallar este plano. Trácese por *m* una oblícua y haciéndola girar alrededor de la vertical que pasa por este punto, averiguaremos por medio de una curva de ensayo, en que posicion coincide con el plano pedido. Conviene que esta recta no tenga mucha pendiente, para que siendo menor que la del plano rasante, pueda estar en una de sus posiciones, contenida en él.

::

Veamos como se construye esta curva de ensayo. Supongamos que *mn* sea una posicion de la oblícua. Háganse pasar por ella los planos rasantes á cada una de las superficies topográficas dadas (núm. 110); estos dos planos están determinados por la recta *mn* y cada una de las rasantes 8-8 y 5-5, á las superficies *D* é *Y* respectivamente. Si estas rasantes fueran paralelas, estarian confundidos los dos planos, y tendriamos resuelto el problema. No sucediendo esto, tómese en la circunferencia de radio 0-1 la cuerda *id* de un ángulo *imd*, igual al que forman las horizontales 8-8 y 5-5 y llévese esta magnitud *id* de *x* á *a*, en direccion del radio prolongado *mx*; tendremos en el punto *a*, uno de la curva de ensayo.

Considérese otra posicion *mp* de la oblícua, y repítase con ella la misma construccion que acabamos de esplicar. Al trazar el ángulo *d'mi'*, igual al que forman las rasantes 6-6 y 7-7, la paralela *md'* á la 7-7, rasante á la superficie de la derecha, resulta por encima de la paralela á la otra, es decir, sucede lo contrario que en el caso anterior, luego la cuerda *d'i'*, correspondiente á este ángulo, la llevaremos en direccion del radio prolongado 0*y*; pero en sentido interior á la circunferencia, de *y* á *b*.

La línea que resulta, uniendo los puntos *a*, *b* y otros que podriamos haber encontrado, es la curva de ensayo, que queriamos hallar y que sirve para resolver este problema. En efecto, la oblícua en la posicion *mq*, que pasa por el punto 1 de interseccion de la curva de ensayo con la circunferencia, estará contenida en el plano que se busca, porque el ángulo que forman las horizontales 7-7 y 5-5 de los planos rasantes á las superficies que pasan por mq es nulo por serlo su cuerda, luego estos dos planos se confunden con el M, que es el pedido.

ÍNDICE.

Párrafos.

LECCION 1.ª—Preliminares, representacion del punto, la recta y el plano.

LECCION 2.ª—Interseccion de rectas y planos.

LECCION 3.ª—Rectas y planos, paralelos y perpendiculares.

LECCION 4.ª—Ángulos de rectas y planos.

LECCION 5.ª—Líneas curvas y superficies cónicas y cilíndricas.

LECCION 6.ª—Planos tangentes á conos y cilindros.

LECCION 7.ª—Secciones planas de conos y cilindros, é intersecciones de estas superficies.

LECCION 8.ª—Superficies topográficas.

LECCION 9.ª—Planos rasantes.

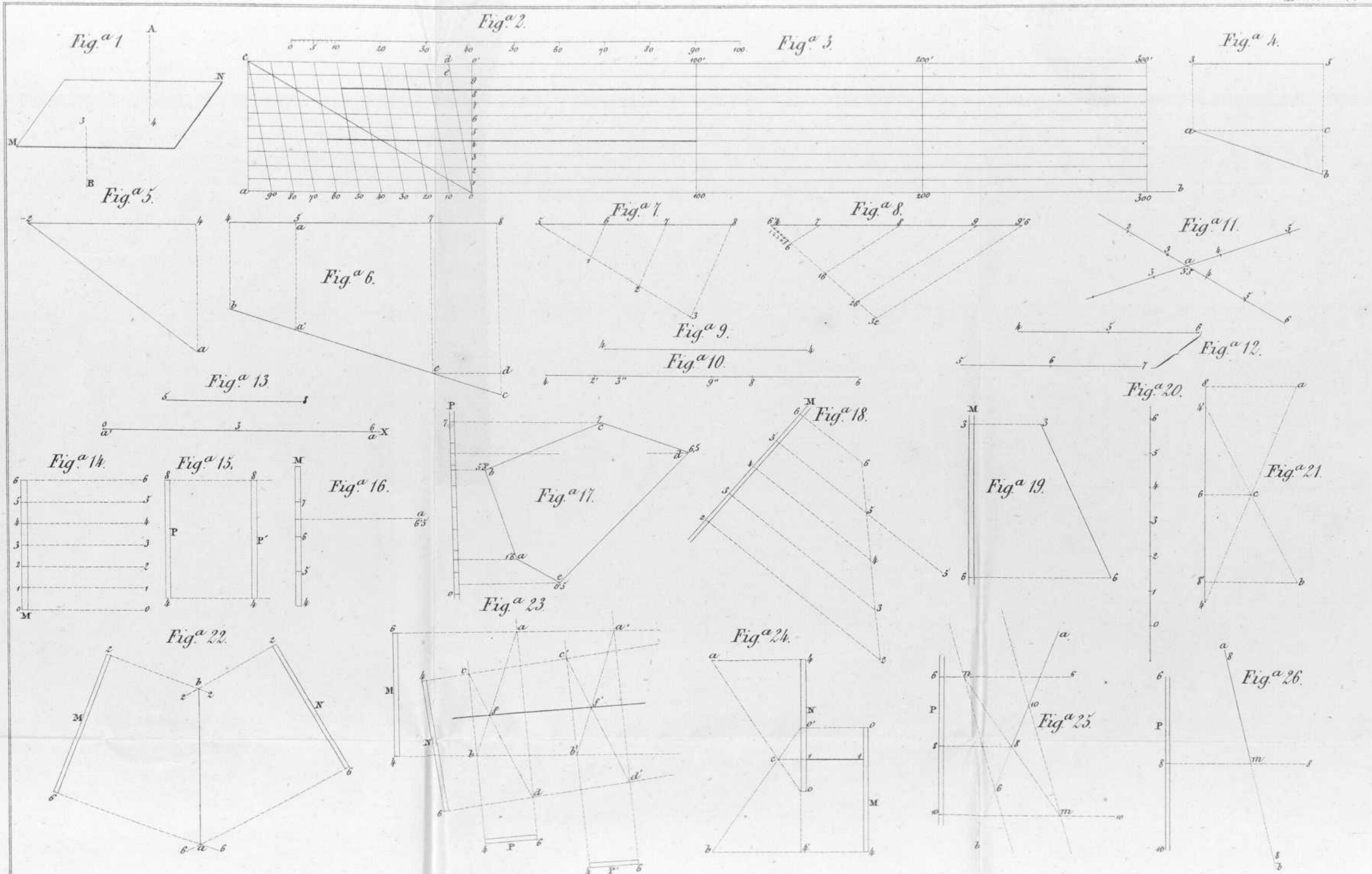


Fig.a 1
Fig.a 2
Fig.a 3
Fig.a 4
Fig.a 5
Fig.a 6
Fig.a 7
Fig.a 8
Fig.a 9
Fig.a 10
Fig.a 11
Fig.a 12
Fig.a 13
Fig.a 14
Fig.a 15
Fig.a 16
Fig.a 17
Fig.a 18
Fig.a 19
Fig.a 20
Fig.a 21
Fig.a 22
Fig.a 23
Fig.a 24
Fig.a 25
Fig.a 26

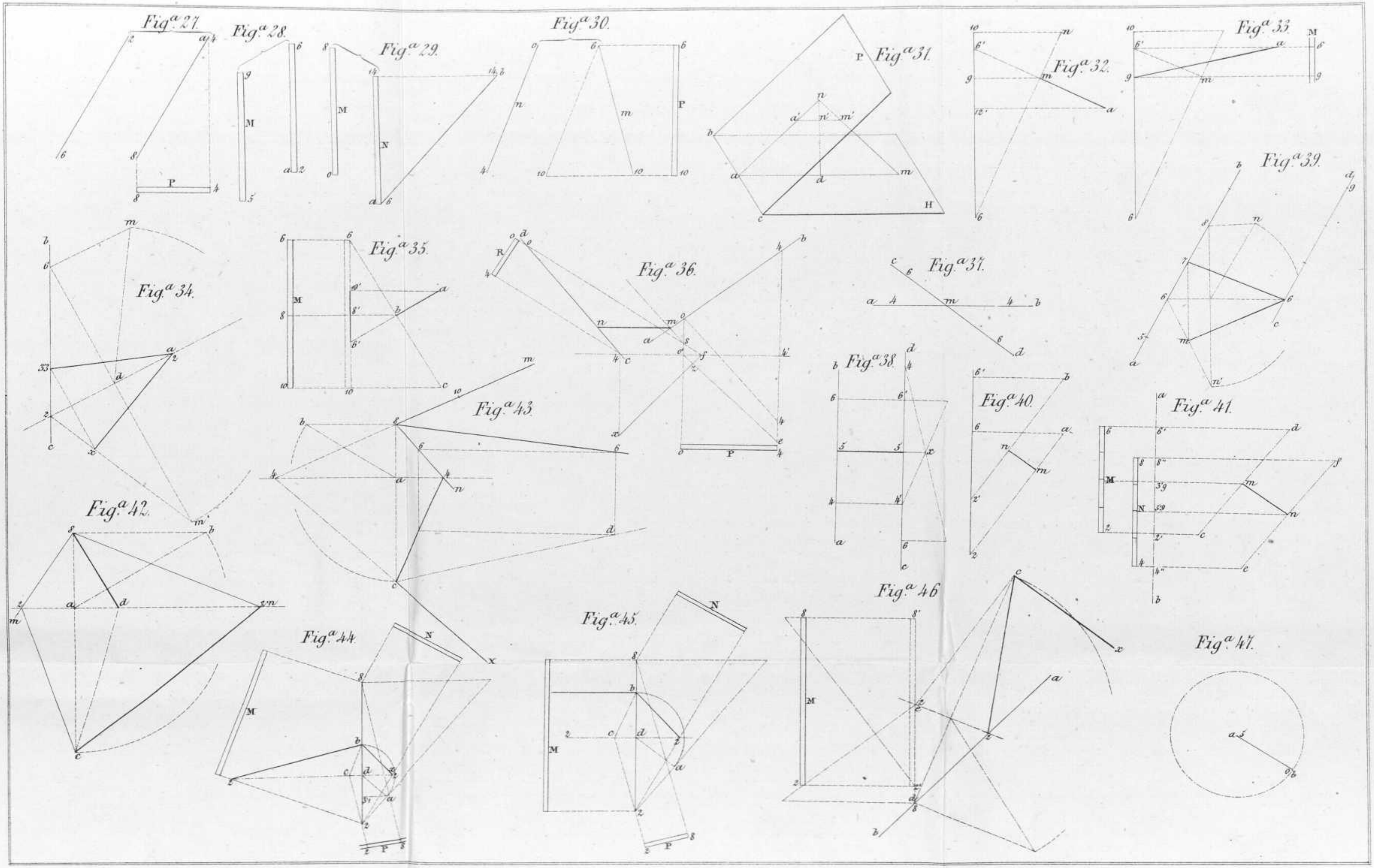
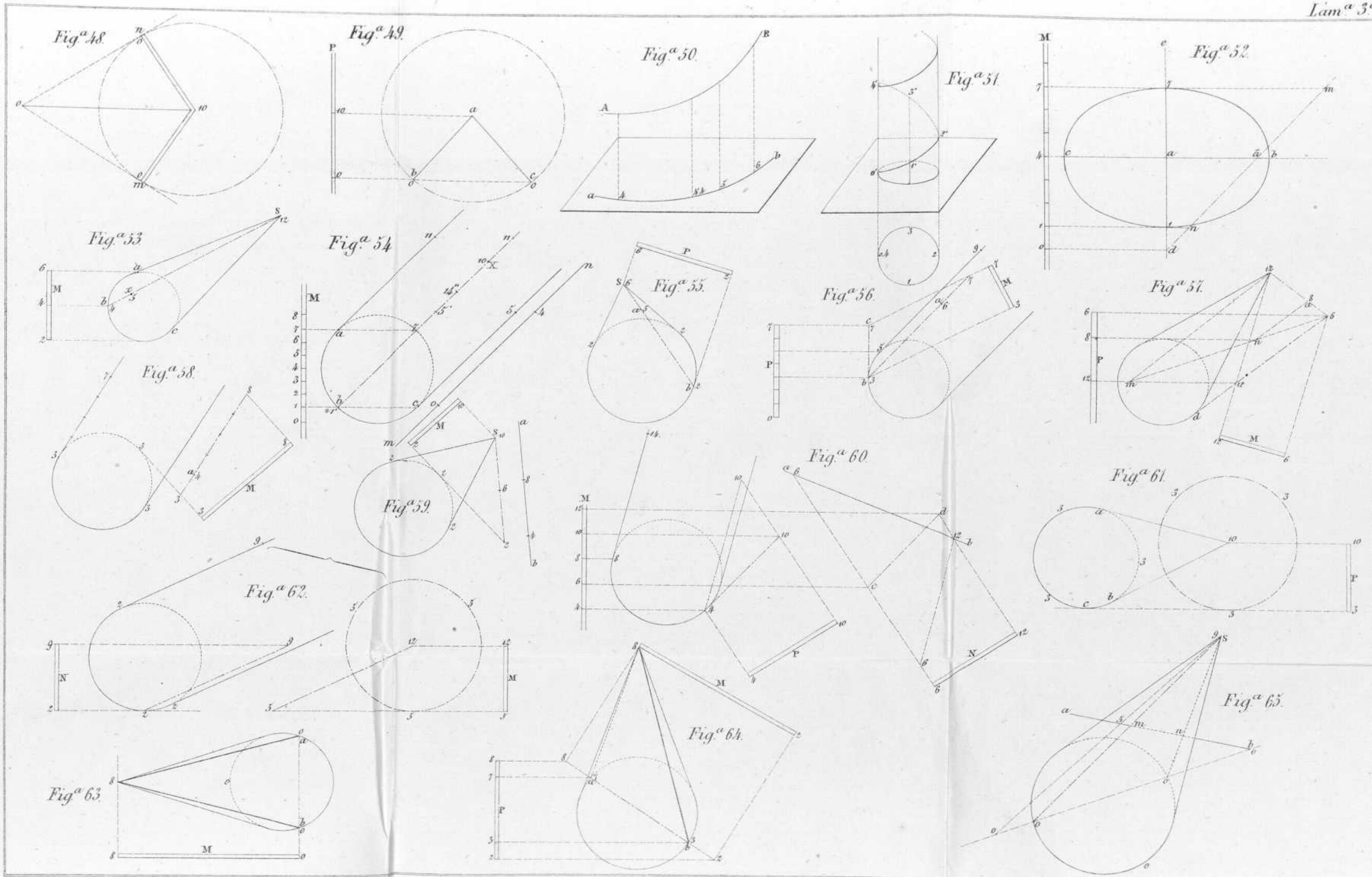
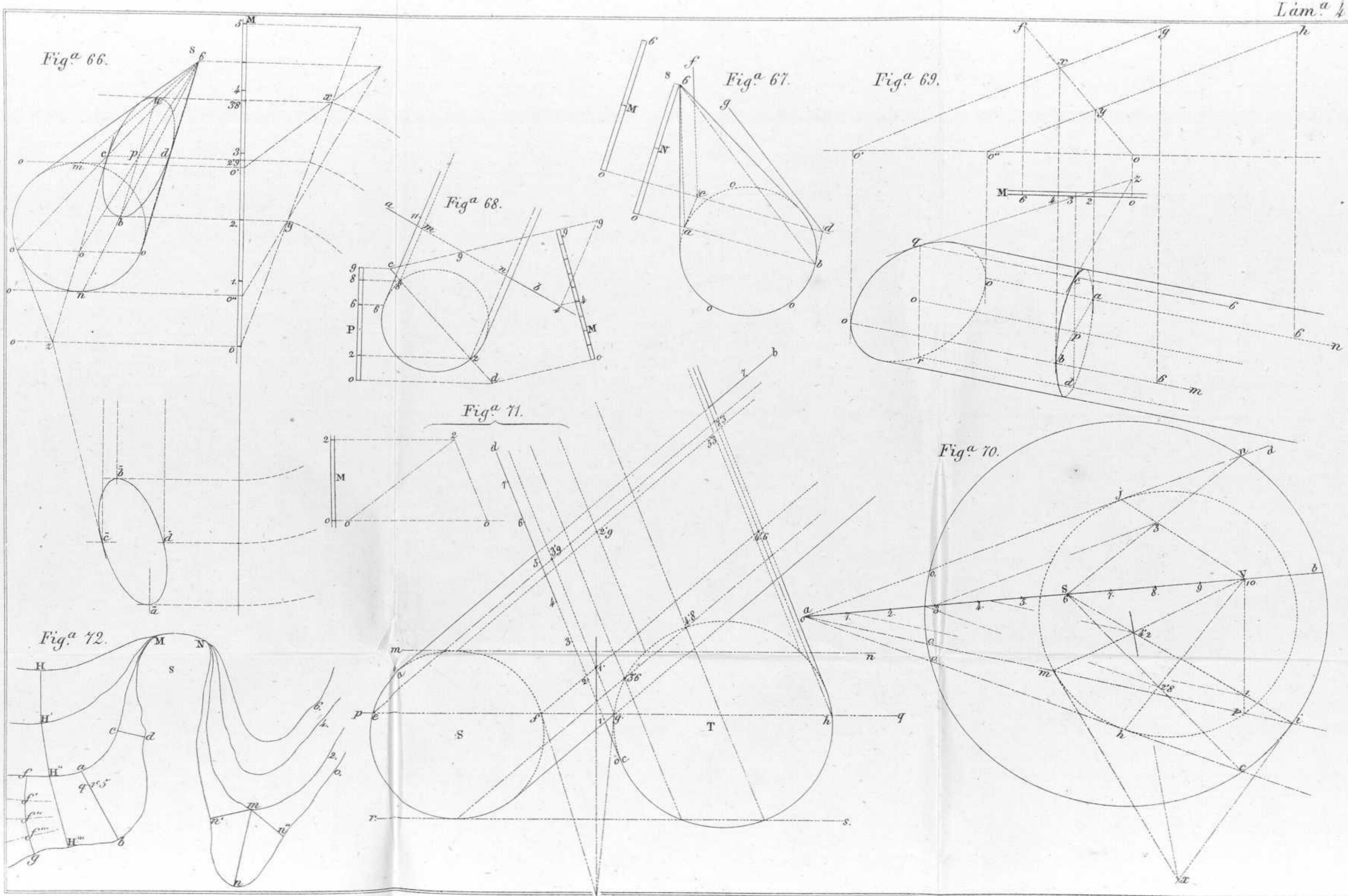


Fig.ª 27.
Fig.ª 28.
Fig.ª 29.
Fig.ª 30.
Fig.ª 31.
Fig.ª 32.
Fig.ª 33.
Fig.ª 34.
Fig.ª 35.
Fig.ª 36.
Fig.ª 37.
Fig.ª 38.
Fig.ª 39.
Fig.ª 40.
Fig.ª 41.
Fig.ª 42.
Fig.ª 43.
Fig.ª 44.
Fig.ª 45.
Fig.ª 46.
Fig.ª 47.


Figª 48.
Figª 49.
Figª 50.
Figª 51.
Figª 52.
Figª 53.
Figª 54.
Figª 55.
Figª 56.
Figª 57.
Figª 58.
Figª 59.
Figª 60.
Figª 61.
Figª 62.
Figª 63.
Figª 64.
Figª 65.

Gosset gr.


Figª 66.
Figª 67.
Figª 68.
Figª 69.
Figª 70.
Figª 71.
Figª 72.
S
T

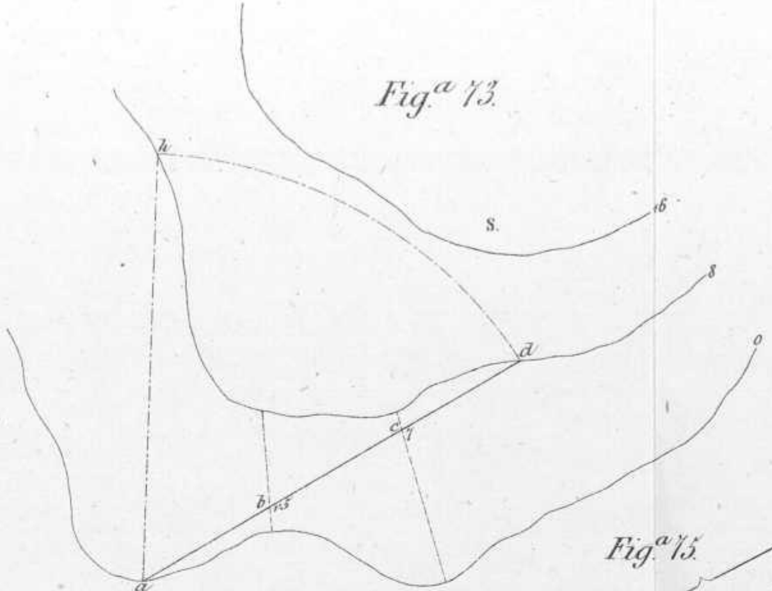


Fig.ª 73.

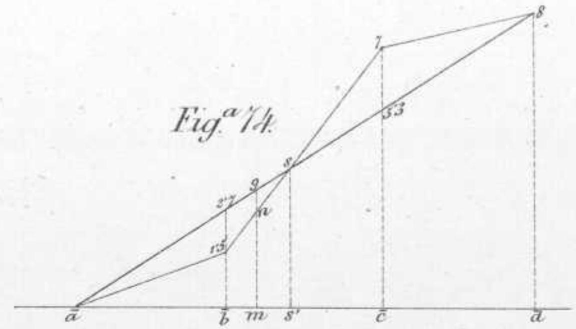


Fig.ª 74.

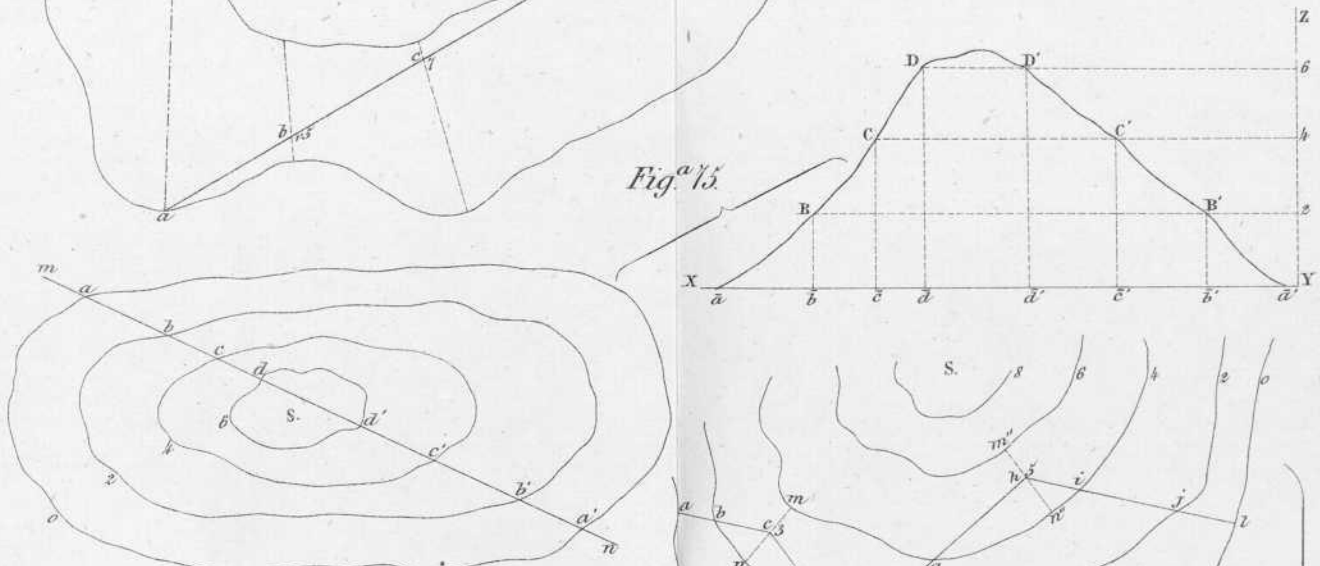


Fig.ª 75.

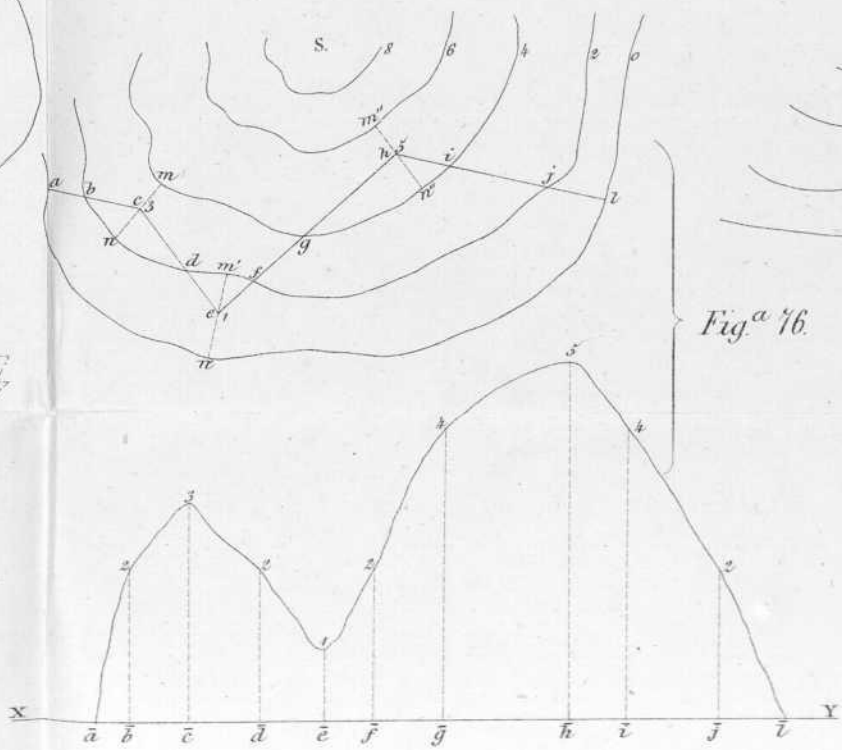


Fig.ª 76.

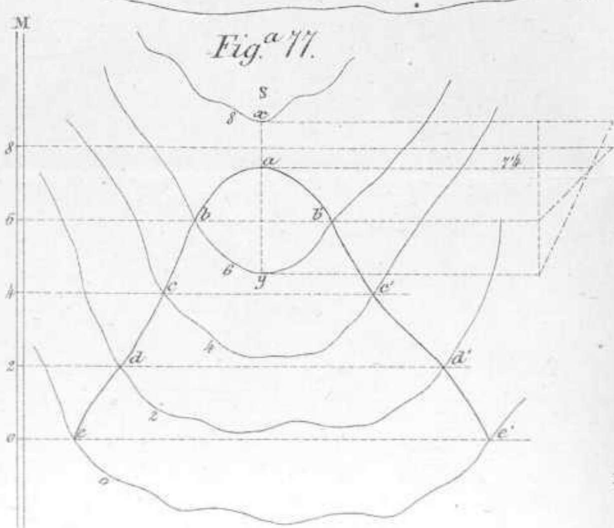


Fig.ª 77.

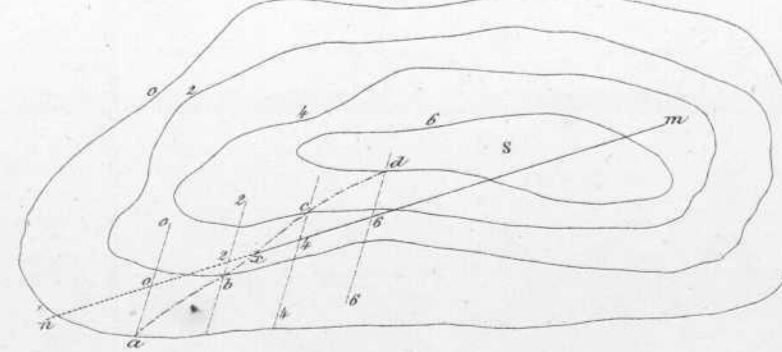


Fig.ª 78.

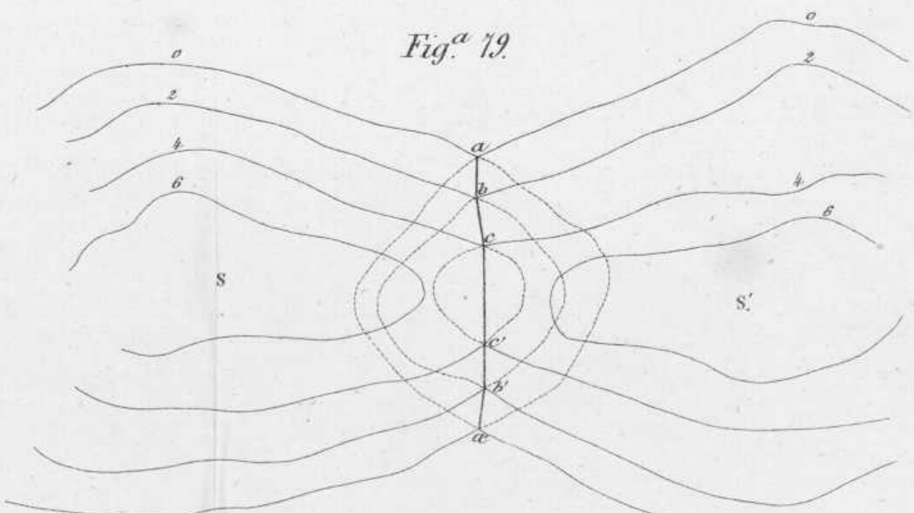


Fig.ª 79.

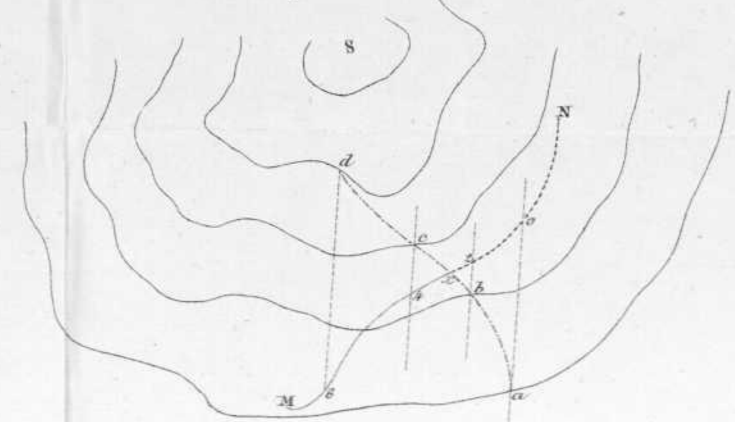


Fig.ª 80.

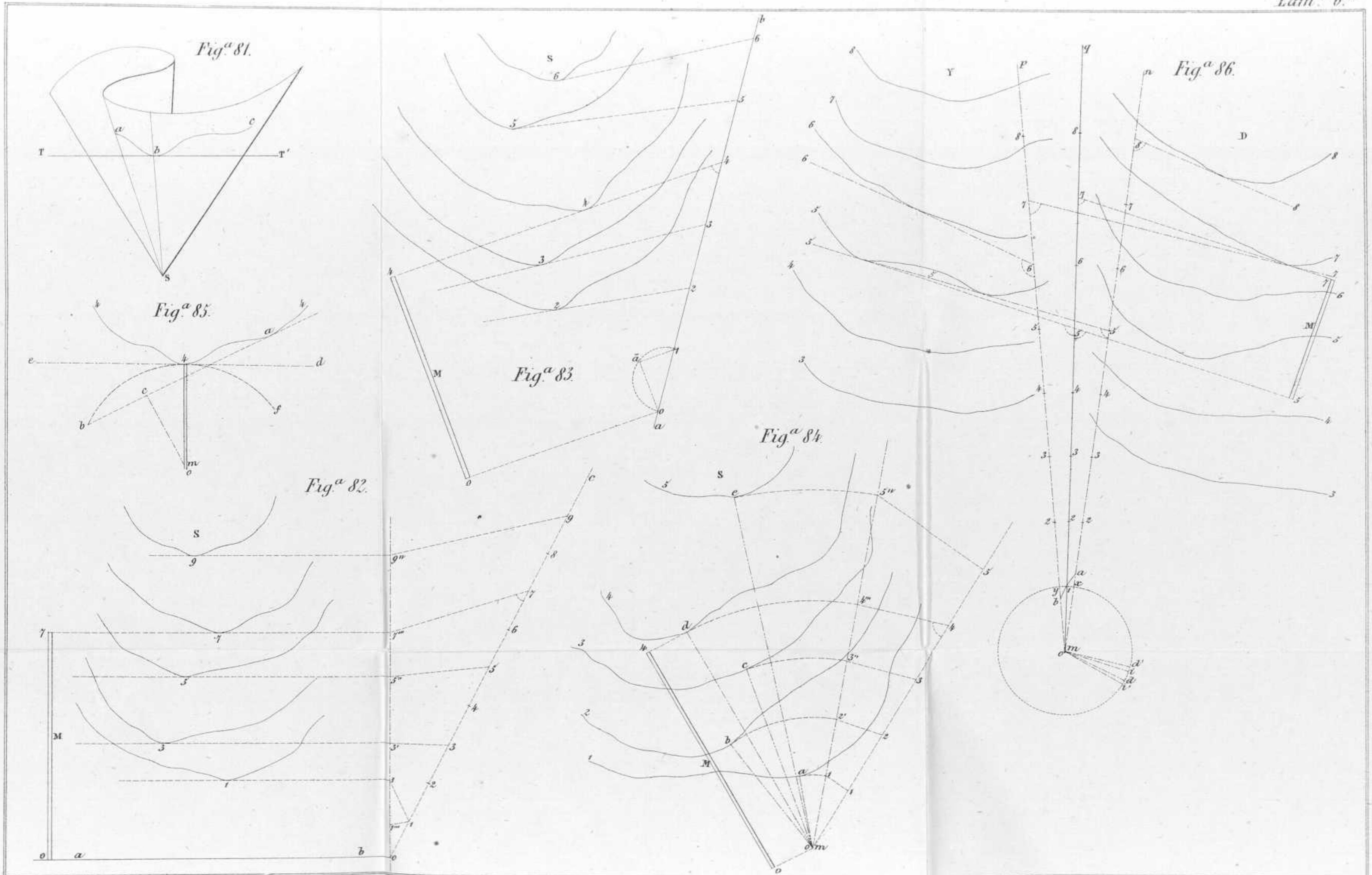


Fig.ª 81.

Fig.ª 85.

Fig.ª 82.

Fig.ª 83.

Fig.ª 84.

Fig.ª 86.

F.co Gosset g.o