Iraola

GEOMETRIA Y TRIGONOMETRIA

PROGRAMA RAZONADO

de

UN CURSO ELEMENTAL

DE

GEOMETRÍA

Y TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA,

POR

DON EDUARDO MATEO DE IRAOLA,

Licenciado en la Facultad de Ciencias, Catedrático de Matemáticas en el Instituto y Profesor de Aritmética y Geometría en la Escuela de Artes y Oficios de Segovia, Académico correspondiente de la de Bellas Artes de San Fernando, etc.

SEGOVIA:

TIP. DE SEGUNDO RUEDA.

Juan Bravo, 20.

1890.

GEOMETRIA.

I.

PRELIMINARES.

1. *Geometría es la ciencia de la extensión.*

2. *Extensión es toda porción limitada del espacio.*

Todo cuerpo ú objeto material ocupa una porción de espacio y el espacio ocupado por ese cuerpo es lo que llamamos *cuerpo geométrico.*

3. Se llaman *dimensiones* de los cuerpos, los diversos modos de ser extensos. Por esta razón se dice que los cuerpos tienen tres dimensiones: *longitud* ó largo, *latitud* ó ancho y *profundidad* ó grueso.

No se concibe la existencia de cuerpo alguno sin las tres dimensiones; pero existen extensiones geométricas de dos dimensiones y de una. Tales son, por ejemplo, la cabida de una huerta y la altura de un edificio.

De donde se deduce que podemos considerar tres clases de extensión: extensión de tres dimensiones, que recibe el nombre de *cuerpo*; extensión de dos dimensiones, llamada *superficie* y extensión de una dimensión ó *línea.*

4. Existen infinitos cuerpos.

El límite que separa un cuerpo del espacio que le rodea, así como el que separa dos porciones del mismo cuerpo, es una *superficie*, puesto que no tiene más que dos dimensiones.

Cada cuerpo tiene, pues, infinitas superficies.

El límite que termina las superficies y el que separa dos partes contiguas de la misma superficie, no tiene más que una dimensión y es, por tanto, una *línea*.

Luego en toda superficie se conciben infinitas líneas.

Del propio modo, los extremos de las líneas y los límites que separan dos partes de la misma línea, no tienen dimensión alguna y reciben el nombre de *puntos*.

Toda línea consta, pues, de infinitos puntos.

5. En toda extensión hay que considerar la *posición*, la *figura* y la *magnitud*.

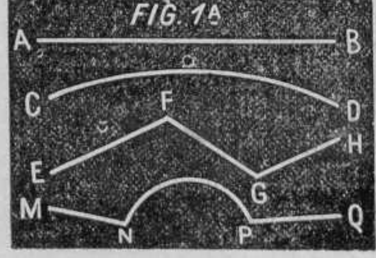
Se denominan *iguales* dos extensiones, cuando tienen la misma figura y la misma magnitud.

Dícense *semejantes* cuando tienen la misma figura y distinta magnitud; y se llaman *equivalentes* cuando tienen distinta figura pero la misma magnitud.

6. El punto geométrico no tiene ni figura, ni magnitud. Los distintos puntos, todos iguales, se distinguen tan solo por su posición. Se representan bien por el punto de la escritura ó por la intersección de dos líneas, y se designan por una letra. A, $\times$ B. Así diremos, punto A ó punto B.

7. Las líneas se clasifican con relación á su figura en dos clases: *rectas* y *curvas*.

La línea recta no puede definirse; dícese comunmente *que es la más corta distancia entre dos puntos*. Tal es A B.



Línea curva es la que no es recta, ni se compone de rectas como C D.

También suele designarse con el nombre de *línea quebrada ó poligonal la reunión de varias rectas, de las que dos con-*

secutivas no forman una misma recta, como E F G H; y *mixta la reunión de rectas y curvas,* tal es M N P Q.

8. Las diversas superficies se distinguen por su figura en *planas* y *curvas.*

Se llama *superficie plana,* ó simplemente *plano, toda superficie á la que se adapta perfectamente una recta en cualquier sentido que se aplique.*

Superficie curva es la que no es plana, ni tiene porción alguna plana.

También suelen distinguirse con los nombres de *superficies quebradas la reunión de varias superficies planas, de las que dos consecutivas no forman un solo plano;* y de *superficies mixtas, las compuestas de superficies planas y curvas.*

Las superficies se representan en general, por las líneas que las limitan.

9. Los cuerpos se clasifican y representan por las superficies que les sirven de límite.

10. La Geometría se divide en *plana* y del *espacio.*

La Geometría plana, ó *Planimetría, estudia la extensión cuyos puntos están todos en un mismo plano.*

La Geometría del espacio, ó *Estereometría, se ocupa de la extensión cuyos puntos no están todos en un mismo plano.*

Geometría plana.

II.

PROPIEDADES DE LA LÍNEA RECTA.

11. Hemos dicho que la línea recta no puede definirse y hemos indicado, sin embargo, (7) la definición que suelen dar la mayor parte de los autores.

Esta definición constituye la propiedad fundamental de la línea recta, de la que se deducen inmediatamente las siguientes consecuencias:

1.ª *Por dos puntos no puede pasar más que una sola línea recta.*

2.ª *Dos rectas distintas no pueden tener más que un punto común.*

3.ª *Dos rectas son siempre superponibles, para lo que solo es preciso hacer que coincidan dos de sus puntos.*

12. De estas propiedades se infiere que todas las líneas rectas son semejantes y que tan solo difieren unas de otras por su magnitud y su posición.

Si las rectas las consideramos ilimitadas, solo se distinguirán en la posición.

13. En las artes, en los oficios y en las aplicaciones todas de la geometría, es de uso frecuente el trazado de rectas, que se efectúa con el auxilio de la *regla*, instrumento de todos conocido.

Si la regla no estuviera bien construída, el trazado pudiera ser defectuoso. Conviene, pues, antes de usarla, asegurarnos de su buena construcción, para lo que basta trazar una recta, invertir la regla y trazar otra recta por el mismo borde antes usado; si las dos rectas coinciden, la regla estará bien construída por el borde ensayado, pues este medio presenta duplicada la curvatura que pudiera existir y, por tanto, fácil de apreciar.

14. La magnitud de las rectas, ó sea la distancia entre dos puntos, se determina midiéndola.

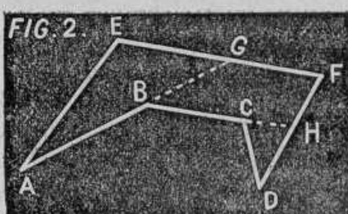
Medir una recta, es comparar su longitud con la de otra recta que se toma como unidad.

La unidad para medir longitudes, ó sea la unidad lineal, es el metro, con sus múltiplos y divisores.

15. Se llaman *líneas convexas, las que no pueden ser cortadas por una recta en más de dos puntos.*

Toda línea quebrada convexa envuelta por otra, es menor que esta otra.

Sea la línea quebrada convexa A B C D envuelta por la A E F D; digo que A B C D < A E F D.



En efecto, prolongo los lados A B y B C hasta que encuentren á la línea envolvente; y tendremos que, como la línea recta es la más corta entre dos puntos, resultarán las desigualdades: $AB + BG < AE + EG$

$$BC + CH < BG + GF + FH$$
$$CD < CH + HD$$

que sumadas ordenadamente nos darán,

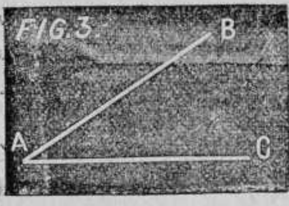
$AB + BG + BC + CH + CD < AE + EG + BG + GF + FH + CH + HD$, ó bien,

$AB + BC + CD < AE + EF + FD$; que es lo que queríamos demostrar.

III.

ÁNGULOS.

16. Se llama *ángulo la porción de plano comprendido entre dos rectas que concurren en un punto.*



Las rectas A B y A C se llaman *lados del ángulo*; el punto A de encuentro se llama *vértice del ángulo.*

Un ángulo se designa con tres letras; una de cada lado y la del vértice que se coloca enmedio. Así, el ángulo formado por las rectas A B y A C, se leerá B A C ó C A B.

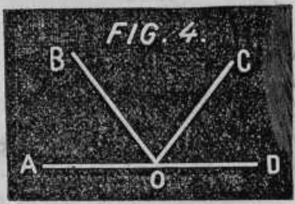
Si el ángulo está solo, se designa con la letra del vértice y se dice ángulo A.

El ángulo se considera engendrado por el movimiento de la recta A B que, adaptada primero sobre A C, gira alrededor del punto A. De aquí se deduce que la magnitud del ángulo no depende de la longitud de sus lados, sinó de la mayor ó menor separación de estos.

Dos ángulos se dicen iguales cuando, coincidiendo el vértice y uno de los lados, coinciden también los otros dos lados.

17. *Se llaman ángulos consecutivos los que tienen un mismo vértice, un lado común y los otros dos lados, á una*

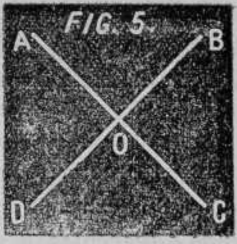
y otra parte del lado común. A O B, B O C y C O D son ángulos consecutivos. (fig. 4.)



Bisectriz de un ángulo es la recta que le divide en dos partes iguales. Si los ángulos A O B y B O C son iguales, B O será la bisectriz del ángulo A O C.

Angulos adyacentes son los consecutivos cuyos lados no comunes están en línea recta. A O C y C O D son ángulos adyacentes.

Angulos opuestos por el vértice, son los que tienen sus lados en prolongaciones opuestas, como A O B y D O C. (fig. 5.)

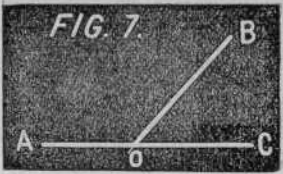


Angulos rectos son los ángulos adyacentes iguales, como A O C y C O B. (fig. 6.)

Se dice que una recta es perpendicular á otra cuando forma con ella ángulos rectos.

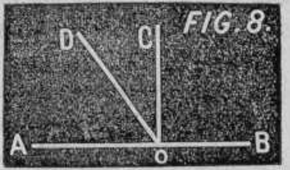
Así O C es perpendicular á A B.

Una recta O B se llama oblícua á otra A C, cuando forma con ella ángulos adyacentes desiguales. (fig. 7.)



18. *Un punto de una recta determina una perpendicular á dicha recta.* Es decir, por un punto de una recta, siempre puede trazarse una perpendicular á dicha recta, pero nunca dos ó más. (fig, 8.)

Sea A B la recta y O un punto cualquiera de A B.



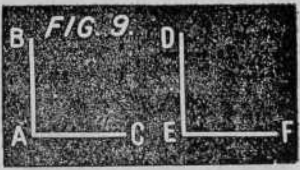
Hemos visto (núm. 16) que el ángulo se considera engendrado por el movimiento de la recta O C que, coincidiendo primero con O A, gira alrededor del punto O, engendrando dos ángulos adyacentes desiguales A O D y D O B. En este movimiento, el ángulo A O D crece y el D O B decrece de una manera contínua, de suerte que llegará un momento en que O D tome la posición O C y forme los ángulos adyacentes iguales A O C y C O B. Luego por un punto O siempre puede pasar una perpendicular O C á una recta A B.

Además, otra cualquiera O D formará con A B dos ángulos, el uno A O D menor que el A O C y el otro D O B mayor que el C O B; y como A O C y C O B son iguales, los A O D y D O B serán desiguales; luego O D es oblícua á A B.

Corolario. *Dos ángulos rectos son iguales, aunque no sean adyacentes.*

Sean dos ángulos rectos cualesquiera B A C y D E F.

Coloco el ángulo D E F sobre el B A C, de modo que el punto E coincida con el punto A y el lado E F caiga sobre el A C; entonces el lado E D tomará la dirección A B, según el teorema; luego los dos ángulos coinciden y por consiguiente son iguales.



19. Se llama *ángulo agudo* el que es menor que el recto; y *obtuso* el que es mayor.

Angulos complementarios, ó complemento uno de otro, son aquellos cuya suma es un ángulo recto.

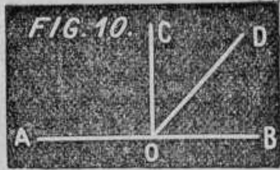
Angulos suplementarios, ó suplemento uno de otro, son aquellos cuya suma es dos ángulos rectos.

De aquí se deduce que dos ángulos que tengan el mismo complemento, ó el mismo suplemento, serán iguales; pues en el primer caso á los dos les falta la misma cantidad para valer un ángulo recto; y en el segundo, para valer dos.

20. *La suma de dos ángulos adyacentes es igual á dos ángulos rectos.*

Sean los ángulos adyacentes A O D y D O B; (fig. 10.) digo que A O D + D O B = 2 R. En efecto, trazando en O la perpendicular O C, tendremos:

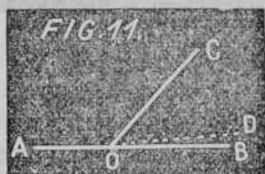
A O D = A O C + D O C y D O B = B O C — D O C; sumando ordenadamente estas dos igualdades resulta, A O D + D O B = A O C + B O C = 2 R.



Recíproco. *Si la suma de dos ángulos consecutivos es igual á dos ángulos rectos, estos ángulos serán adyacentes.*

Digo que (fig. 11.) si A O C + C O B = 2 R, O B será prolongación de A O. En efecto, si no lo fuera, lo sería otra tal como O D, y en este caso tendríamos:

A O C + C O D = 2 R; pero por hipótesis
A O C + C O B = 2 R; luego
C O D = C O B, lo que es absurdo.



Corolarios.—1.° *La suma de todos los ángulos consecutivos que se pueden formar á un mismo lado de una recta, es igual á dos ángulos rectos*, porque todos equivalen á la suma de dos ángulos adyacentes.

2.° *La suma de todos los ángulos consecutivos formados alrededor de un punto, es igual á cuatro ángulos rectos.* Pues prolongando uno de los lados, todos los ángulos consecutivos que queden sobre dicho lado valen dos rectos y los que queden debajo de ese lado otros dos.

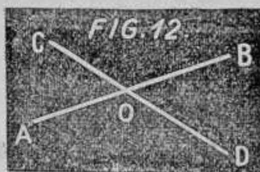
3.° *Los cuatro ángulos que forma una recta con otra á la cual es perpendicular son rectos.* Pues siendo la primera perpendicular á la segunda, formará dos ángulos rectos con ella; luego sus adyacentes ó sean los otros dos, también lo serán.

De aquí se deduce que *si una recta es perpendicular á otra, la segunda es también perpendicular á la primera.*

4.° *Todo ángulo es menor que dos rectos.* Pues prolongando uno de sus lados resultará su adyacente y entre los dos componen dos ángulos rectos.

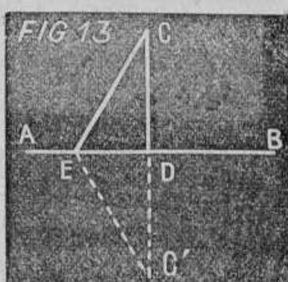
5.° *Las bisectrices de dos ángulos adyacentes son perpendiculares.* Pues valiendo la suma de los ángulos propuestos dos ángulos rectos, la de sus mitades valdrá un ángulo recto.

21. *Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.* En efecto, los ángulos A O C y D O B tienen el mismo suplemento C O B; luego son iguales.



Corolario. *Las bisectrices de dos ángulos opuestos por el vértice están en línea recta.* En efecto, según el (cor. 5.°) del número anterior, la bisectriz de C O B debe ser perpendicular en O á las bisectrices de A O C y D O B (núm. 18.)

22. *Un punto exterior á una recta determina una perpendicular á dicha recta.* Es decir, por un punto exterior á una recta puede trazarse una perpendicular á dicha recta, pero nunca dos ó más.



Sea el punto C exterior á la recta A B; doblando el plano de la figura por A B, el punto C tomará la posición C', y uniendo estos puntos por la recta C C', resultarán los ángulos adyacentes iguales C D B y C' D B, luego A B es perpendicular á C C'.

Además, otra cualquiera recta C E que pase por C, digo que será oblícua; pues, al doblar el plano de la figura, tomará la posición C' E y si la suponemos perpendicular á A B, C E y C' E formarán una sola recta, sin lo cual se tendrían dos perpendiculares á A B por el punto E; luego por C y C' pasarian dos rectas distintas, lo cual es absurdo.

IV.

PERPENDICULARES Y OBLÍCUAS.

23. El trazado de perpendiculares es de uso comun en la mayor parte de las artes y oficios é indispensable en las mediciones geométricas.

Las perpendiculares se trazan con el auxilio de la escuadra.

La escuadra es un instrumento de madera ó metal que se compone de dos reglas fijas formando ángulo recto.

Si la escuadra no estuviera bien construida, es claro que las operaciones con ella efectuadas adolecerían de un error de orígen. De ahí la necesidad de su comprobación.

Para comprobar la escuadra se coloca de modo que uno de los lados del ángulo recto se apoya en una regla y por el borde del otro se traza una recta; se invierte la escuadra y por el mismo borde se traza otra recta. Si las dos rectas trazadas coinciden, la escuadra estará bien construida En el caso contrario, procede su rectificación.

Para trazar una perpendicular á una recta dada por un punto, se ajusta á la recta el borde de la regla, y se aplica á este borde uno de los lados del ángulo recto de la escuadra, haciéndola resbalar sobre la regla hasta que el otro lado pase por el punto dado. La recta trazada por el borde de este lado será la perpendicular pedida.

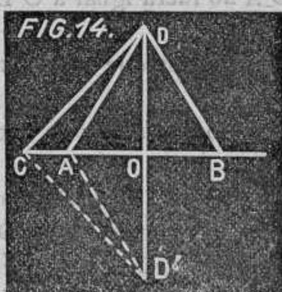
24. Si desde un punto exterior á una recta se trazan á esta una perpendicular y varias oblícuas:

1.° *La perpendicular es menor que todas las oblícuas.*

2.° *Las oblícuas que se aparten igualmente del pié de la perpendicular, son iguales.*

3.° *De dos oblícuas, la que se aparte más del pié de la perpendicular, es la mayor.*

1.° Sea la recta B C y el punto exterior D. Digo que D O < D A. En efecto, doblando el plano de la figura por B C, el punto D tomará la posición D' y las rectas D O y D A las D' O y D' A.



Ahora bien, D O D' < D A D'; luego D O < D A.

2.° Supongamos que O A = O B; digo que D A = = D B. En efecto, doblando el plano de la figura por la recta D O, el ángulo recto D O B coincidirá con el D O A, y como O B = O A el punto B caerá sobre el punto A; luego D B = D A.

3.° Sea O C > O B; digo que D C > D B.

Tomando O A = O B, resultará D A = D B y la cuestión estará reducida á demostrar que D C > D A.

Ahora bien, doblando la figura por C B, las rectas D A y D C tomarán las posiciones D' A y D' C y tendremos (n.º 15) D C + C D' > D A + A D', ó bien D C > D A.

Recíproco. Si desde un punto exterior á una recta se trazan á ésta una perpendicular y varias oblícuas:

1.º *La menor de todas ellas es la perpendicular.*

2.º *Las oblícuas iguales se apartan igualmente del pie de la perpendicular.*

3.º *La mayor oblicua se aparta más del pie de la perpendicular.*

1.º Digo que si D O es la menor de todas, D O será la perpendicular.

En efecto, si D O no fuera perpendicular á C B, lo sería otra y esta sería la menor, contra lo supuesto.

2.º Digo que si D A = D B, también O A = O B.

En efecto, si O A no fuera igual á O B, D A no podría ser igual á B D.

3.º Vamos á demostrar que si D C > D B, también O C > O B.

En efecto, si O C no fuera mayor que O B, sería igual ó menor.

Si O C = O B, sería D C = D B contra lo supuesto; y si O C < O B, tendríamos D C < D B, lo que también es contrario á la hipótesis.

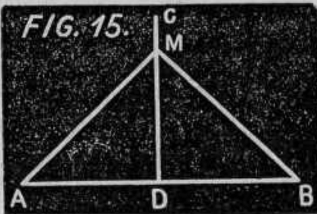
Escolio. Del propio modo que se llama distancia entre dos puntos á la recta que los une, que es su menor distancia; llamaremos *distancia* de un punto á una recta á la perpendicular trazada desde dicho punto á esa recta.

25. *Todo punto de la perpendicular á una recta en su punto medio, equidista de los extremos de esta recta.*

Digo que si M (fig. 15) es un punto de la perpendicular C D á la recta A B en su punto medio D, tendremos M A = M B.

En efecto, por ser D A = D B, será también M A = M B.

FIG. 15.



Recíproco. *Todo punto que equidiste de los extremos de una rectá, esta en la perpendicular levantada á esta recta en su punto medio.* En efecto, si M A = M B, también D A = D C; luego M D es la perpendicular á A B en su punto medio.

Corolario. *Si una recta tiene dos puntos equidistantes de los extremos de otra, es perpendicular á esta en su punto medio.* Pues la perpendicular á A B en su punto medio y la recta C D tendrían dos puntos comunes y, por tanto, coinciden.

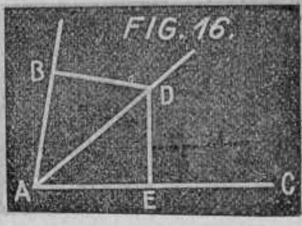
Escolio. Según este teorema, todos los puntos de la recta C D tienen la propiedad de equidistar de los extremos A y B de la recta A B y solo ellos gozan de esa propiedad en su plano.

En general llamaremos *lugar geométrico*, la reunión de todos los puntos que tienen una propiedad comun. Así diremos que *el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los extremos de una recta, es la perpendicular á esa recta en su punto medio.*

26. *Todo punto de la bisectriz de un ángulo, equidista de los lados de este ángulo* (fig. 16).

Si A D es la bisectriz del ángulo B A C, las perpendiculares D B y D E medirán las distancias del punto D á los lados A B y A C, y digo que D B = D E.

En efecto, doblando el plano de la figura por D A, A C coincidirá con A B por ser C A D = B A D, y como desde un punto D no puede trazarse más que una sola perpendicular á una recta A B, D E coincidirá con B D.



Recíproco. *Todo punto interior á un ángulo y equidistante de sus lados, está en la bisectriz de dicho ángulo.* Digo que si D E = D B, el punto D está en la bisectriz del ángulo A. En efecto, doblando la figura por la bisectriz del ángulo B D E, D E coincidirá con su igual D B; y E A caerá sobre B A por la igualdad de los ángulos rectos B y E; luego encontrarán en A á la bisectriz del ángulo B D E y, por tanto, esta bisectriz es la misma D A del ángulo B A C; por consigniente, el punto D está en dicha bisectriz.

Corolarios. *Si una recta tiene dos puntos equidistantes de los lados de un ángulo, dicha recta es la bisectriz de ese ángulo.*

2.º *El lugar geométrico de los puntos interiores equidistantes de los lados de un ángulo es la bisectriz de dicho ángulo.*

V.

RECTAS PARALELAS.

---

27. *Se llaman rectas paralelas las que situadas en el mismo plano, no se encuentran, por más que se prolonguen.*

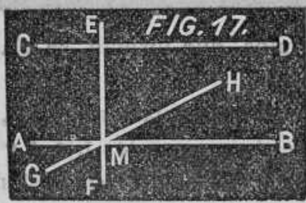
Se demuestra la existencia de estas rectas con la siguiente proposición.

Dos rectas perpendiculares á una tercera, son paralelas.

Pues si se encontrara, desde el punto de encuentro se podrían trazar dos perpendiculares á una recta, lo que es imposible. (22.)

28. Postulado de Euclides. *Una perpendicular y una oblícua á una recta, prolongadas suficientemente se encuentran.*

29. *Un punto exterior á una recta determina una paralela á dicha recta.* Es decir, que por un punto M, exterior á la recta C D, pasa una paralela á esta recta, pero solamente una.



En efecto, trazando por M, la M E perpendicular á C D, y la A B perpendicular á M E, las dos rectas A B y y C D serán paralelas (27.)

Además, otra cualquiera G H, que pase por M, será oblícua á M E y por tanto, encontrará á C D. (28.)

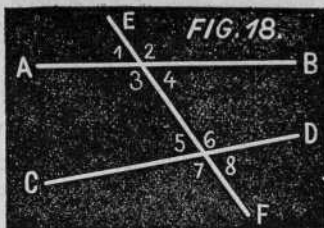
Corolarios. 1.º *Si dos rectas son paralelas, toda recta que encuentre á una de ellas, prolongada suficientemente, encontrará á la otra.* Pues de lo contrario, se tendrán trazadas por un punto dos paralelas á una misma recta.

2.º *Si dos rectas son paralelas, toda perpendicular á la una lo es á la otra.* Pues si fuera oblícua á la segunda, las dos rectas dadas se encontrarían. (28.)

3.º *Dos rectas paralelas á una tercera, son paralelas* *entre sí*. Pues toda perpendicular á esta, lo será á las primeras. (27.)

4.° *Si dos rectas se cortan, sus perpendiculares respectivas también se cortarán*. Pues si fueran paralelas, también lo serían las primeras.

30. Siempre que á dos rectas cualesquiera A B y C D corta otra tercera E F, esta toma el nombre de *secante* ó *transversal*.



Los ocho ángulos que forman, se clasifican de la siguiente manera:

1.° Se llaman *internos*, las ángulos 3, 4, 5 y 6.

2.° *Angulos externos* son los 1, 2, 7 y 8.

3.° *Angulos alternos* son los que están á distinto lado de la secante y no son adyacentes. Como 3 y 6, 4 y 5, 1 y 8 y 2 y 7. De estos, los dos primeros se denominan *alternos internos*, y los dos últimos *alternos externos*.

4.° *Angulos correspondientes*, son los situados á un mismo lado de la secante, uno interno y otro externo, y que no son adyacentes.

Los ángulos 1 y 5, 3 y 7, 2 y 6, 4 y 8 son correspondientes.

31. *Si á dos rectas paralelas corta una secante, los ángulos alternos son iguales* (fig. 19).

Vamos á demostrar que, si A B y C D son paralelas, los ángulos A H F y D G E son iguales.

En efecto, tomo el punto medio I de la recta G H, y trazo la L M perpendicular á C D y A B.

Hago ahora girar la figura I G M alrededor del punto

I hasta que la I G coincida con su igual I H. Entonces I M caerá sobre I L por ser iguales los ángulos G I M y L I H por opuestos por el vértice; y la G M tomará la dirección H L, porque desde un punto H solo puede trazarse una perpendicular á una recta I M. Luego los ángulos E G D y A H F que han coincidido son iguales.

FIG. 19.

De aquí se deduce inmediatamente que si dos rectas son paralelas.

1.° *Los ángulos correspondientes son iguales.*

2.° *Los ángulos internos del mismo lado de la secante son suplementarios.*

Pues en el primer caso, E H B = A H F (21) y como hemos demostrado que A H F = E G D, resulta E H B = E G D

En el segundo, A H F y B H F son suplementarios (20), y como A H F = E G D, resulta que B H F y E G D son suplementarios.

Recíprocos. 1.° *Si los ángulos alternos son iguales, las rectas son paralelas.*

FIG. 20.

Digo que si A H F = E G D, las rectas A B y C D son paralelas.

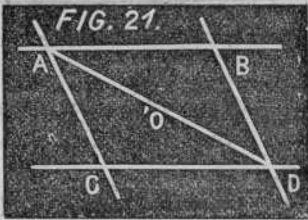
En efecto, si no lo fueran, podríamos trazar por G una paralela L M á la A B y, con arreglo al teorema directo, tendríamos: A H F = H G M; pero por hipótesis, A H F = E G D; luego H G M = E G D, lo que es imposible.

2.º *Si los ángulos correspondientes son iguales, las rectas son paralelas.*

3.º *Si los ángulos internos del mismo lado de la secante son suplementarios, las rectas son paralelas.*

Se demuestran de modo análogo.

32. *Dos rectas paralelas comprendidas por otras dos paralelas, son iguales.*



Digo que A C = B D. En efecto, uno los puntos A y D, y hago girar la figura A C D alrededor del punto medio O de la recta A D, hasta que el punto A caiga sobre el D. Entonces la recta A C tomará la dirección D B por ser C A D = A D B (31) y la D C tomará la dirección A B por ser A D C = B A D; luego el punto C, que tiene, que cae á la vez sobre la A B y sobre la D B, caerá en B; y por tanto, A C = B D; y A B = C D.

Corolarios. 1.º *Las rectas paralelas son equidistantes*, pues sus distancias respectivas son paralelas comprendidas entre paralelas.

2.º *Si una recta tiene dos puntos equidistantes de otra, y al mismo lado de ella, es paralela á esta otra*; pues la paralela á la segunda, trazada por uno de los puntos de la primera, pasaría por el otro, y se confundiría con ella.

Lo que nos dice que *el lugar geométrico de los puntos* *situados á la misma distancia de una recta, está constituido por las dos paralelas trazadas á uno y otro lado de esa recta, á la distancia dada.*

33. El trazado de paralelas, frecuente en todas las artes y oficios, como en todas las construcciones geométricas, se efectúa con el auxilio de la escuadra, y en virtud de los principios expuestos en esta lección.

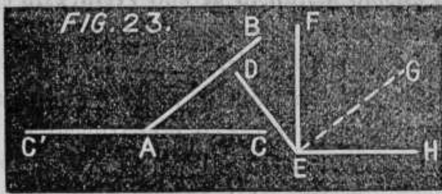
34. *Los ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos son iguales ó suplementarios.* Se verifica lo primero cuando tienen sus lados dirijidos ambos en el mismo sentido ó ambos en sentido contrario; y lo segundo, cuando tienen dos lados en el mismo y dos en opuesto sentido.

1.° Sean los dos ángulos B A C y D E F, que tienen sus lados paralelos y en la misma dirección; digo que son iguales. En efeeto, prolongando D E hasta que encuentre en G á A C, tendremos (31,; cor. 1.°) D E F = D G C y D G C = B A C; luego D E F = B A C.

2.° Digo que B A C = H E G, por tener sus lados paralelos y en opuesto sentido. En efecto: B A C = D E F; D E F = H E G (21) luego B A C = H E G.

3.° Digo que los ángulos B A C y F E G, que tienen sus lados paralelos, dos en la misma dirección y dos en direcciones contrarias, son suplementarios. En efecto, F E G tiene por suplemento á H E G (20) y, por tanto, á su igual B A C.

35. *Los ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son iguales ó suplementarios*, serán iguales cuando los dos sean agudos ó los dos obtusos; y suplementarios, cuando uno sea agudo y otro obtuso.



1.º Digo que B A C = D E F. En efecto, trazando por E las perpendiculares E G y E H á los lados D E y E F, serán paralelas á B A y B C (27); y tendremos, G E H = B A C (34) pero G E H = D E F (19) luego B A C = D E F.

2.º Si los ángulos son B A C' y D E F, digo que son suplementarios. En efecto, B A C' tiene por suplemento á B A C, ó á su igual D E F.

VI.

RECTAS PROPORCIONALES.

36. Se entiende por *rectas proporcionales*, aquellas cuyos *valores numéricos*, es decir, los números abstractos que expresan sus relaciones respectivas con la unidad son proporcionales.

En este mismo sentido se dice en geometría producto de rectas, razón de superficies, etc.

37. *Si se divide una recta en partes iguales y por los puntos de división, se trazan paralelas que encuentren á otra recta, ésta quedará dividida en partes iguales entre sí.*

Digo que si A C = E G; también B D = F H, (fig. 24).

En efecto, trazo las H I y D L paralelas á A G, y hago resbalar la figura I H F á lo largo de H B hasta que el punto H coincida con el D. Entonces H I caerá sobre D L, por ser I H F = L D B (31, cor. 1.º); y como además son iguales respectivamente á E G y A C (32), y por tanto iguales entre sí, el punto I coincidirá con el L; siendo, por otra parte, H I F = D L B (34), también I F coincidirá con L B y el punto F, que tiene que caer á la vez sobre D B y L B, coincidirá con B. Luego H F=B D

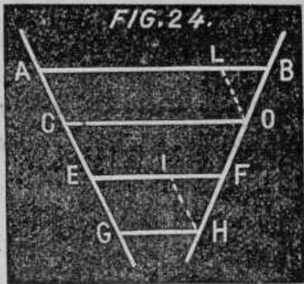


FIG. 24.

COROLARIOS. 1.º *Si varias paralelas cortan á dos rectas cualesquiera, las dividen en partes directamente proporcionales.* Pues del teorema anterior se deduce que si C G es doble de A C, también D H es doble de B D. (Arit. 258.)

2.º *Si dos rectas paralelas cortan á los lados de un ángulo, los dividen en partes directamente proporcionales.*

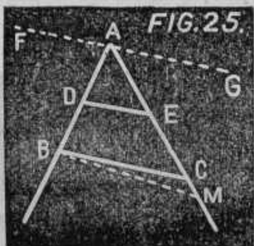


FIG. 25.

Pues trazando por el vértice A la F G paralela á las D E y B C, tendremos con arreglo al teorema,

$\frac{A\,D}{D\,B} = \frac{A\,E}{E\,C}$. De aquí se deduce, (Arit. 160)

$$\frac{AD + DB}{DB} = \frac{AE + EC}{EC}\text{; ó sea } \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$$

y también $\dfrac{AD + DB}{AD} = \dfrac{AC + EC}{AE}$, ó sea

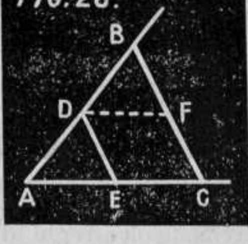
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

Recíproco. *Si dos rectas que cortan á los lados de un ángulo los dividen en partes directamente proporcionales, son paralelas.*

Digo que si $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$, D E y B C serán paralelas. En efecto, si no lo fueran trazaríamos por B la paralela B M á la D E y, con arreglo al principio anterior, tendríamos $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EM}$; y como por hipótesis $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AC}{EC}$, resultaría E M = E C lo que es absurdo,

38. *Si dos paralelas cortan á los lados de un ángulo, son directamente proporcionales á las distancias de sus intersecciones con un lado al vértice.*

FIG. 26.



Es decir, que $\dfrac{DE}{BC} = \dfrac{AD}{AB}$. En efecto, trazando por

D la D F paralela á A C, estas dos paralelas cortan á los lados del ángulo B, y tendremos, (37, cor. s.º)

$$\frac{FC}{BC} = \frac{AD}{AB} \text{ ó sea } \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}.$$

39. *Si varias rectas que concurren en un punto, cortan á dos paralelas, las dividen en partes directamente proporcionales.*

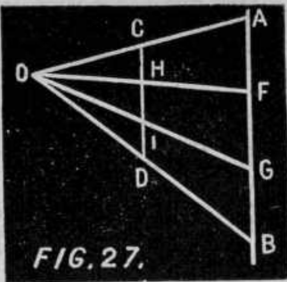


FIG. 27.

Es decir, que $\frac{CH}{AF} = \frac{HI}{FG} = \frac{ID}{GB}$.

En efecto, segun acabamos de ver, $\frac{CH}{AF} = \frac{OH}{OF}$, y

$\frac{OH}{OF} = \frac{HI}{FG}$; de donde $\frac{CH}{AF} = \frac{HI}{FG}$.

Y también $\frac{HI}{FG} = \frac{OI}{OG}$ y $\frac{OI}{OG} = \frac{ID}{GB}$; de donde

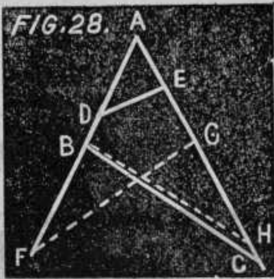
$\frac{HI}{FG} = \frac{ID}{GB}$. Luego $\frac{CH}{AF} = \frac{HI}{FG} = \frac{ID}{GB}$.

40. Se llaman *antiparalelas* dos rectas que forman ángulos iguales con distintos lados de un ángulo.

Así, si A D E = A C B; D E y B C serán antiparalelas. (fig. 28).

Es evidente, que si invertimos A B C, de modo que A C se coloque en A F y A B en A G, las dos rectas D E y

F G serán paralelas, por la igualdad de los ángulos A D E y A F G (31, cor. 2.º)



41. *Dos rectas antiparalelas cortan á los lados de un ángulo en partes inversamente proporcionales.* Vamos á demostrar que $\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AB}$.

En efecto, invirtiendo A B C de modo que B C tome la posición F G, resultará $\frac{AD}{AE} = \frac{AF}{AG}$ (37, 2.º) ó bien $\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AF}$.

Recíproco. *Si dos rectas dividen á los lados de un ángulo en partes inversamente proporcionales, son antiparalelas.*

Digo que si $\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB}$, D E y B C son antiparalelas.

En efecto, si no lo fueran trazaria por B la antiparalela á D E, que cortaría en H á la A C, y tendríamos, con arreglo al teorema directo, $\frac{AD}{AE} = \frac{AH}{AB}$; pero, por hipótesis, tenemos, $\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB}$, luego A H = A C, lo que es imposible.

VII.

PROBLEMAS SOBRE EL CÁLCULO DE LAS RECTAS.

42. Los problemas geométricos se distinguen en *gráficos* y *numéricos*.

Se denominan *gráficos* los que, por versar principalmente sobre las propiedades de las figuras, están reducidos á construir alguna de éstas, mediante la regla y el compás.

Dícense *numéricos* los que, por tratar de la extensión geométrica, se ocupan de determinar valores numéricos para las incógnitas, conocidas ciertas relaciones de magnitud entre los datos.

Dicho se está que la *resolución* del problema consistirá en la determinación gráfica ó numérica, según los casos, de las incógnitas.

43. En la resolución de los problemas geométricos puede emplearse el procedimiento *analítico* ó el *sintético*.

Se emplea el analítico cuando, dando por resuelto el problema, construimos una figura que suponemos satisface á las condiciones del enunciado y tratamos de deducir del estudio de las relaciones que ligan á los datos y á las incógnitas, la *solución* apetecida.

Se usa el sintético, cuando comenzamos por expresar las construcciones precisas para obtener la solución y demostramos luego la legitimidad de ésta.

44. Los problemas geométricos son en número indefinido. Nosotros solo vamos á ocuparnos de algunos de los más usuales y sencillos, como aplicación de los principios expuestos.

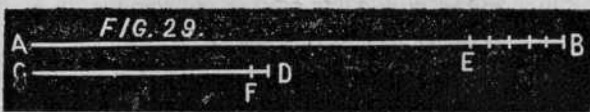
45. I. *Sumar dos ó más rectas.* Basta llevar sucesivamente sobre una recta indefinida las longitudes respeccvas de los sumandos.

II. *Hallar la diferencia entre dos rectas.* Llevando sobre la mayor y á partir de uno de sus extremos, una longitud igual á la menor, nos resultará evidentemente la diferencia entre ambas.

III. *Hallar una recta múltiple de otra.* Basta llevar la primera sobre una recta indefinida, tantas veces como indique el multiplicador.

IV. *Hallar una parte alícuota de una recta dada*, Este problema puede resolverse por tanteos sucesivos con el compás. Más adelante veremos los procedimientos propios de la geometría para la resolución de este problema.

V. *Hallar la mayor medida común de dos rectas, y la razón numérica de sus magnitudes.*



Sean las dos rectas A B y C D.

Aplicando el razonamiento expuesto (Arit núm. 90). veremos que si llevamos C D sobre A B todas las veces posibles, y el resíduo E B sobre C D, y el resto F D sobre E B, en el que suponemos esté contenido exactamente, F D será la máxima medida comun de A B y C D.

Para hallar la razón numérica de sus magnitudes, basta observar que

$$AB = 2\,CD + EB$$
$$CD = 2\,EB + FD$$
$$EB = 5\,FD;$$

de donde $CD = 2 \times 5\,FD + FD = 11\,FD$

y $AB = 2 \times 11\,FD + 5\,FD = 27\,FD$

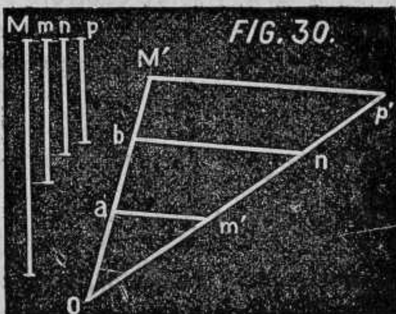
y dividiendo ordenadamente estas dos igualdades:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{27\,FD}{11\,FD} = \frac{27}{11}.$$

VIII.

PROBLEMAS DE RECTAS PROPORCIONALES.

46. *Dividir una recta dada en partes proporcionales á otras rectas también dadas.*



Sea M la recta que queremos dividir en partes proporcionales á las rectas m, n y p.

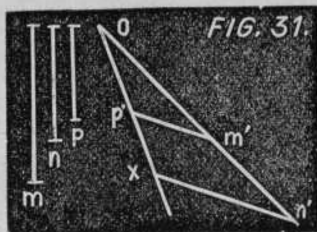
Tracemos un ángulo cualquiera O, y en uno de sus lados indefinidos tomemos $OM' = M$, y en el otro $Om' = m$; $m'n' = n$; $n'p' = p$. Uno el punto p' con el M', y por los puntos n' y m' tracemos las $n'b$ y $m'a$ paralelas á $M'p'$. Tendremos (37, cor. 1.º)

$$\frac{Oa}{Om'} = \frac{ab}{m'n'} = \frac{bM'}{n'p}, \text{ ó sea, } \frac{Oa}{m} = \frac{ab}{n} = \frac{bM'}{p}.$$

II. *Dividir una recta dada en un número cualquiera de partes iguales.*

Es un caso particular del anterior. Se resuelve del mismo modo, llevando sobre uno de los lados del ángulo cierto número de veces una misma distancia.

III. *Hallar la cuarta proporcional á tres rectas dadas.*



Sobre uno de los lados indefinidos de un ángulo O, llevo $o\,m' = m$; $m'\,n' = n$; y sobre el otro, $o\,p' = p$; uno los puntos p' y m', y por el punto n' trazo $n'\,x$ paralela á $p'\,m'$ y la $p'\,x$ es la cuarta proporcional pedida, pues tendremos (37, cor. 2.º);

$$\frac{o\,m'}{m'\,n'} = \frac{o\,p'}{p'\,x}, \text{ ó sea } \frac{m}{n} = \frac{p}{p'\,x}.$$

IV. *Hallar la tercera proporcional á dos rectas dadas.*

Es un caso particular del anterior, y se resuelve del mismo modo, teniendo en cuenta que $p = n$.

IX.

PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA.

47. Se llama *circunferencia una línea curva, cerrada, que tiene todos sus puntos á igual distancia de uno interior, llamado centro.*

Círculo es la porción de plano limitado por la circunferencia.

Radio es la recta que une un punto de la circunferencia con el centro.

De la definición se deduce que *todos los radios de una circunferencia, son iguales.*

Cuerda es la recta que une dos puntos de la circunferencia.

Diámetro es la cuerda que pasa por el centro.

De donde se infiere que cada diámetro se compone de dos radios y, por consiguiente, *todos los diámetros de una circunferencia son iguales.*

Arco es una porción de la circunterencia.

El arco igual á la mitad de la circunterencia se llama *semicircunferencia*; *cuadrante* es el arco que mide la cuarta parte de la circunferencia. Dos arcos se llaman *complementarios* cuando su suma es un cuadrante, y *suplementarios* cuando su suma es media circunferencia.

Las circunferencias se designan por la letra del centro, cuando están solas, ó por su radio.

De las definiciones expuestas se deduce:

1.º Que todas las circunferencias de igual radio son iguales: pues superpuestas coincidirán.

2.º Que una circunferencia queda determinada de posición por su centro; y de magnitud por su radio.

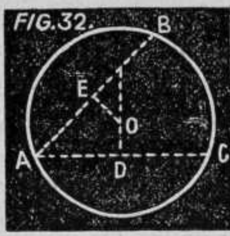
3.º Que un punto será exterior ó interior á la circunferencia segun que diste del centro más ó menos de un radio.

48. El trazado de circunferencias se efectúa con auxilio del compás.

En el terreno se efectúa con auxilio de la cinta, cadena ó cuerda fija por uno de sus extremos y cuyo otro extremo gira alrededor del primero.

49. *Tres puntos que no están en línea recta determinan una circunferencia*; es decir, que por tres puntos, no en línea recta, puede pasar una circunferencia, pero nunca dos ó más.

Sean A, B y C los tres puntos. (fig. 32.) Los uno por las rectas B A y A C; y en los puntos medios de estas rectas levanto las perpendiculares E O y D O que se encontrarán en un punto O (29, cor 4.º). Ahora bien, el punto O; por estar en la perpendicular E O (25), equidista de A y de B; y, por pertenecer á la D O, equidista de A y de C; luego el punto O equidista de los tres puntos A, B y C; y es, por tanto, el centro de la circunferencia que tiene por radio O A = O B = O C y pasa por los tres puntos dados. Además, toda circunferencia que pase por estos tres puntos, tiene que tener el centro en las perpendiculares E O y D O (25, recíp.) y teniendo el mismo centro y el mismo radio, se confunde con la primera.



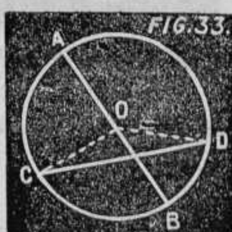
Corolarios. 1.º *La circunferencia no puede tener tres puntos en línea recta.*

Pues si A, B y C estuvieran en línea recta, E O y D O serían paralelas.

2.º *Una recta y una circunferencia no pueden tener más de dos puntos comunes*; pues la circunferencia no puede tener tres puntos en línea recta.

3.º *Dos circunferencias no pueden cortarse más que en dos puntos.* Pues si se cortaran en tres se confundirían.

50. *El diámetro es mayor que cualquier otra cuerda, y divide á la circunferencia y al círculo en dos partes iguales.*



1.° Digo que A B > C D. En efecto, uno los extremos de C D con el centro, y resultará

C O + O D > C D, ó bien, A B > C D.

2.° Doblando el plano de la figura por A B, las dos partes en que esta divide al círculo y la circunferencia coincidirán, pues de lo contrario, habría dos puntos de la circunferencia no equidistantes del centro.

Escolio. De aquí se sigue que la cuerda divide á la circunferencia y al círculo en dos partes desiguales; la cuerda C D se dice que *subtiende* al arco C B D; y el arco se dice que está subtendido por la cuerda. Cada arco está subtendido por una solá cuerda, pero cada cuerda subtiende dos arcos. Así la cuerda C D subtiende los arcos C B D y C A D.

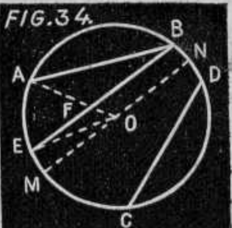
En general, entenderemos por arco subtendido por una cuerda el menor de los dos.

51. En un mismo círculo ó en círculos iguales:

1.° *Arcos iguales están subtendidos por cuerdas iguales.*

2.° *El mayor de dos arcos está subtendido por mayor cuerda.*

FIG. 34.



1.° Si el arco A B = C D, tomo el punto medio M del arco A C, trazo el diámetro M N y doblo por este diámetro el plano de la figura. Segun la construcción, el punto A coincidirá con el punto C y, segun la hipótesis, el punto B coincidirá con el punto D; luego A B = C D.

2.° Si el arco B E > C D, tomaremos B A = C D, y como la cuerda A B será igual á C D, solo resta demostrar que la B E > A B.

Uno los puntos A y E con el centro, y tendremos;

$$A F + F B > A B; \quad E F + F O > E O;$$

y sumando ordenadamente estas desigualdades,

$$A F + F B + E F + F O > A B + E O, \text{ ó bien}$$

$$A O + E B > A B + E O, \text{ ó sea } E B > A B.$$

Recíproco. En un mismo circulo ó en círculos iguales:

1.° *Cuerdas iguales subtienden arcos iguales.*

2.° *La mayor cuerda subtiende mayor arco.*

En efecto, en el primer caso, si los arcos no fueran iguales, las cuerdas tampoco lo serian, segun el teorema directo.

En el segundo caso, si el arco no fuera mayor, será igual ó menor, y, con arreglo al teorema directo, la cuerda será igual ó menor, lo que es contra la hipótesis.

52.—Escolio. La demostración de este recíproco es idéntica á la que hemos dado de los anteriormente enunciados. En su consecuencia, omitiremos en lo sucesivo la demostración de los recíprocos que se hallen en el mismo caso, admitiendo como regla general: *que, siempre que sobre un mismo sujeto se hayan hecho todas las hipótesis posibles, deduciendo consecuencias distintas, las proposiciones recíprocas son ciertas.*

53. Cuando se trata de medir los arcos, hay que tener presente que la unidad debe ser de la misma naturaleza que la cantidad que se quiere medir, y siendo esta por su naturaleza curvilínea, análoga deberá ser la de la unidad elegida.

Por esta razón, se aprecian las magnitudes relativas de los arcos del misma radio, tomando como unidad el *cuadrante.*

El cuadrante se divide en noventa partes iguales que se llaman grados; cada grado en sesenta partes iguales llamadas *minutos*, y cada minuto en sesenta partes iguales llamadas *segundos*. La circunferencia tendrá, pues, $90 \times 4 = 360$ grados.

Los grados, minutos y segundos se designan con los índices o, ′, ″.

54. De aqui se deduce que medir un arco es averiguar los grados, minutos y segundos que contiene, lo que se consigue con ayuda del *trasportador*, que es un semicírculo graduado.

X.

TANGENCIAS DE RECTAS Y CIRCUNFERENCIAS.

55. Una recta y una circunferencia no pueden tener más que tres posiciones relativas (49 cor. 2.º): ó tienen dos puntos comunes, en cuyo caso se llaman *secantes*; ó uno solo, y se dicen *tangentes*, ó no tienen punto alguno común y son exteriores una á otra.

Cuando la recta es tangente á la circunferencia, el punto comun se llama *punto de contacto*.

La tangente puede considerarse como el límite de las posiciones de una secante que gira alrededor de uno de los puntos de intersección, hasta que el segundo se confunda con él.

56. *Si la distancia de una recta al centro de una circunferencia es mayor que el radio, la primera es exterior á la segunda.*

Si su distancia al centro es igual al radio, es tangente á la circunferencia; y

Si su distancia al centro es menor que el radio, es secante á la circunferencia.

En efecto, en el primer caso todos sus puntos son exteriores á la circunferencia (47, 3.º); en el segundo, solo tiene con ella un punto comun, que es el pie de la perpendicular trazada desde el centro á la recta, pues los demás distarán más del centro y serán exteriores; y en el 3.º, puesto que la recta tiene puntos interiores á la circunferencia, será secante á esta.

RECÍPROCO. *Si una recta es exterior á la circunferencia, su distancia al centro será mayor que el radio.*

Si una recta es tangente á la circunferencia, su distancia al centro es igual al radio; y

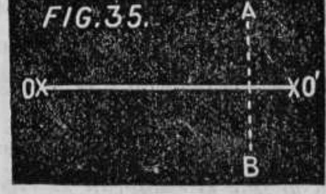
Si una recta es secante á la circunferencia, su distancia al centro es menor que el radio.

57. Dos circunferencias pueden tener cinco posiciones relativas: si tienen dos puntos comunes, se llaman *secantes*; si tienen uno solo, se dicen *tangentes*, y pueden serlo exterior ó interiormente; y si no tienen punto alguno comun, pueden ser exteriores ó interiores una á otra.

58. Se llama *línea de los centros*, la recta que une los centros de dos circunferencias, ó sea la distancia enlre ambos.

59. *Si dos circunferencias son tangentes, el punto de contacto está en la línea de los centros.*

FIG. 35.

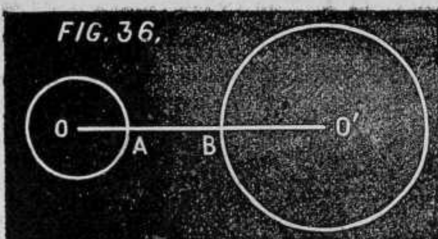


Pues si representamos por O y O' los centros de dos circunferencias tangentes y suponemos que el punto de contacto no estuviera en O O' y fuera A, por ejemplo; trazando A B perpendicular á O O' y tomando C B = = A C, resultaría que O' equidistaría de A y B; luego B será un punto de la circunferencia O'; y como O equidistaría también de A y B, también B pertenecería á la circunferencia O. Luego las dos circunferencias tendrían dos puntos comunes ó serían secantes, contra lo supuesto.

Escolio. Esta demostración patentiza que en las circunferencias secantes la distancia de los centros es perpendicular á la cuerda comun y la divide en dos partes iguales.

60. *Si dos circunferencias son exteriores la una á la otra. la distancia de los centros es mayor que la suma de los radios.*

FIG. 36.

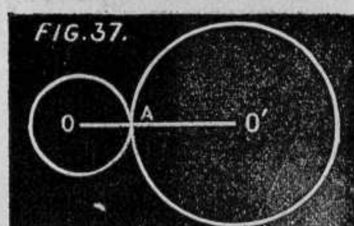


Pues de $O O' = O A + A B + B O'$, resulta evidentemente $O O' > O A + B O'$.

61. *Si dos circunferencias son tangentes exteriormente la distancia de los centros es igual á la suma de los radios.*

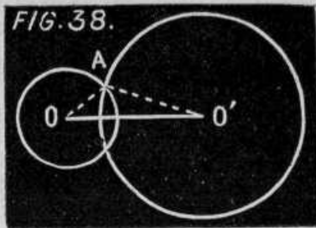
Pues evidentemente, $O O' = O A + A O'$.

FIG. 37.



62. *Si dos circunferencias son secantes, la distancia de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia.*

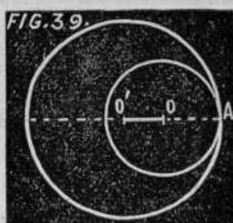
FIG. 38.



Pues trazando los radios O A y O′ A, tendremos
O O′ < O A + O′ A. Pero también
O O′ + O A > O′ A, de donde
O O′ > O′ A — O A.

63. *Si dos circunferencias son tangentes interiormente, la distancia de los centros es igual á la diferencia de los radios.*

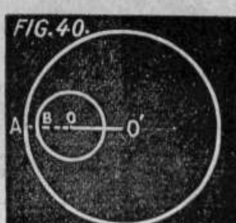
FIG. 39.



Pues evidentemente O O′ = O′ A — O A.

64. *Si dos circunferencias son interiores una á otra, la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios.*

FIG. 40.



Pues O O′ = O′ A — O A = O′ A — O B — B A,
de donde O O′ < O′ A — O B.

RECÍPROCOS. 1.º *Si la distancia de los centros es mayor que la suma de los radios, las circunferencias son exteriores una á otra.*

2.º *Si la distancia de los centros es igual á la suma de los radios, las circunferencias son tangentes exteriormente.*

3.º *Si la distancia de los centros es menor que la suma y mayor que la diferencia de los radios, las circunferencias son secantes.*

4.º *Si la distancia de los centros es igual á la diferencia de los radios, las circunferencias son tangentes interiormente.*

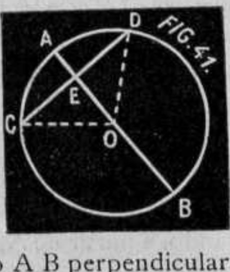
5.º *Si la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios, las circunferencias son interiores una á otra.*

XI.

PERPENDICULARES, OBLÍCUAS Y PARALELAS EN LA CIRCUNFERENCIA.

---

64. *El diámetro perpendicular á una cuerda divide á ésta y á los dos arcos que subtiende en partes iguales.*



Sea el diámetro A B perpendicular á la cuerda C D, digo que C E = E D; arc. A C = arc. A D y arc. B C = = arc. B D.

En efecto, por ser O C = O D (24, Recíp. 2.º), se tiene E C = E D.

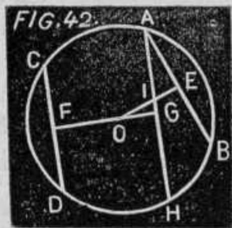
Además, siendo C E = E D (24, 2,º), se tiene A C = A D y B C = B D; por consiguiente (151, recip. 1.º), arco A C = arc. A D y arc. B C = arc. B D.

Escolio. La recta A B satisface á las cinco condiciones siguientes:

1.ª Es perpendicular á C D. 2.º Pasa por el centro. 3.ª Divide á la cuerda C D en dos partes iguales. 4.ª Divide al arco C A D en dos partes iguales. 5.ª Divide en dos partes iguales al arco C B D.

Con dos de estas condiciones queda determinada la posición de A B.

65. En el mismo círculo, ó en círculos iguales: 1.º *Cuerdas iguales equidistan del centro.* 2.º *La mayor de dos cuerdas dista menos del centro que la menor.*



1.º Sean las cuerdas A B=C D, digo que O E=O F.

En efecto, haciendo girar la cuerda C D y su arco alrededor del centro, hasta que el punto C coincida con A, el punto D coincidirá con B, y sus puntos medios F y E también coincidirán; luego las perpendiculares O E y O F, cuyos extremos han coincidido, son iguales.

2.º Sea el arco A H > C D; digo que O G < O F.

En efecto, tomando, á partir de A, un arco A B = C D, y trazando la cuerda A B; con arreglo al principio anterior O E = O F, y la cuestión queda reducida á demostrar que O G < O E.

Ahora bien, evidentemente O E > O I y como (24. 1.º) O I > O G, resulta con mayor razón O E > O G.

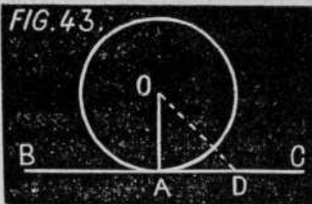
RECÍPROCOS. En el mismo círculo ó en círculos iguales:

1.º *Dos cuerdas equidistantes del centro son iguales.*

2.º *La cuerda que dista menos del centro, es la mayor.*

66. *La perpendicular á un radio en su extremo exterior, es tangente á la circunferencia.*

FIG. 43.

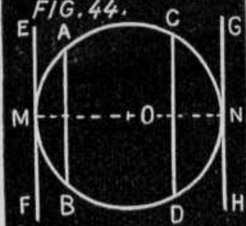


Sea la recta B C perpendicular al radio O A en el punto A; digo que es tangente á la circunferencia en este punto. En efecto, uno el centro con un punto cualquiera de la B C, y tendremos O D > O A; luego el punto D es exterior á la circunferencia. Es decir, que B C no tiene más punto que el A en la circunferencia, ó es tangente á esta en el punto A.

RECÍPROCO. *La tangente á la circunferencia, es perpendicular al radio trazado al punto de contacto.* Pues no teniendo B C más punto en la circunferencia que A, O A será la menor distancia de O á B C (24. recip. 1.º).

67. *Los arcos de la misma circunferencia comprendidos entre rectas paralelas, son iguales.*

FIG. 44.



Pueden ocurrir tres casos: 1.º Que las paralelas sean dos cuerdas. 2.º Que sean una cuerda y una tangente. 3.º Que sean dos tangentes.

1.º Trazando el diámetro M N perpendicular á A B, lo será á C D, y tendremos (64) arc. A N = arc. B N y arc. C N = arc. D N; de donde, restando ordenadamente estas igualdades, resulta arc. A C = arc. B D.

2.º Si las paralelas son A B y G H, el diametro perpendicular á ambas nos da (64) arc. A N = arc B N.

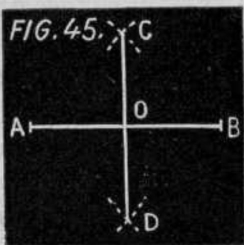
3.º Si son las dos tangentes, tendremos por la misma razón, arc. M A N = arc. M B N.

XII.

PROBLEMAS SOBRE PERPENDICULARES, OBLÍCUAS Y PARALELAS.

68. I. *Dividir una recta dada en dos partes iguales*

FIG. 45.

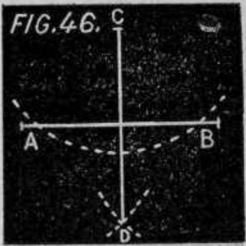


Desde los extremos A y B de la recta dada, con un radio mayor que la mitad de A B, se trazan arcos de circunferencia que se cortarán (62, recíp 3.º); uno los puntos de encuentro C y D, y la C D divide en O á la A B en dos partes iguales (25, cor.)

II. *Levantar una perpendicular á una recta, en uno de sus puntos.*

Desde el punto dado O tomemos á derecha é izquierda distancias O A y O B iguales. Haciendo centro en A y B, con un radio mayor que O A, tracemos dos arcos que se cortarán (62, recíp. 3.º). uno el punto de encuentro C con el O, y la C O será la perpendicular pedida. (25, cor.)

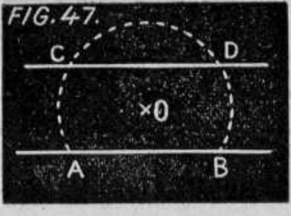
III. *Desde un punto exterior á una recta, bajar una perpendicular á dicha recta.*



Desde el punto dado C, trazo un arco de circunferencia que corte á la recta A B. Desde los puntos A y B, con el mismo radio, describo dos arcos que se cortarán en D; uno C con D, y la C D será la perpendicular pedida (25 cor.).

IV. *Trazar la perpendicular á una recta, en su punto medio.* Se resuelve como el problema 1.º

V. *Por un punto dado fuera de una recta, trazar una paralela á esta recta.*



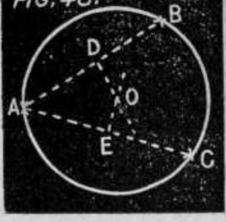
Haciendo centro en un punto O, más próximo á la recta que al punto dado C, describo el arca A C B; tomo B D = A C, uno los puntos C y D, y la C D será la paralela pedida. Pues la paralela á A B, trazada por C, pasaría por D (67) y, por tanto, se confunde con C D.

XIII.

PROBLEMAS SOBRE LA CIRCUNFERENCIA.

69. I. *Trazar la circunferencia que pasa por tres puntos dados.*

FIG. 48.



Unánse los tres puntos por las rectas A B y CA, en cuyos puntos medios se levantan las perpendiculares D O y E O; desde el punto de encuentro O, con un radio O A, se traza la circunferencia que pasará por los tres puntos dados (49).

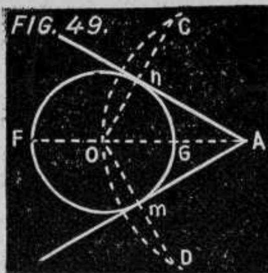
II. *Hallar el centro de una circunferencia ó de un arco.*

Se reduce al problema anterior con solo tomar tres puntos en la circunferencia ó en el arco propuesto.

III. *Dividir un arco en dos partes iguales.* Se traza la cuerda de este arco, y la perpendicular á esta cuerda en su punto medio (64) dividirá al arco en dos partes iguales.

IV. *Trazar por un punto dado una tangente á una circunferencia.*

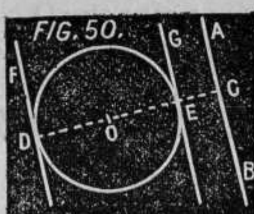
Si el punto dado está en la circunferencia, la perpendicular al radio en este punto resuelve el problema.



Si el punto dado A es exterior á la circunferencia, se une con O y haciendo centro en A, con el radio A O, se traza el arco C D.

A partir de O, tómese O C = O D = F G; tírense las cuerdas O C y O D, que cortarán en *m* y *n* á la circunferencia, y las A *m* y A *n* serán las tangentes pedidas; puesto que son perpendiculares á los radios O *m* y O *n* (25, cor.)

V. *Trazar una tangente á una circunferencia que sea paralela á una recta dada.*



Desde el centro, trácese la D C perpendicular á la recta dada A B; y en los puntos D y E las D F y E G perpendiculares á D C, que serán las tangentes pedidas.

XIV.

MEDIDA DE LOS ÁNGULOS.

70. Se llama *arco correspondiente* á un ángulo, el arco comprendido entre sus lados, trazado desde su vértice como centro, con un radio arbitrario.

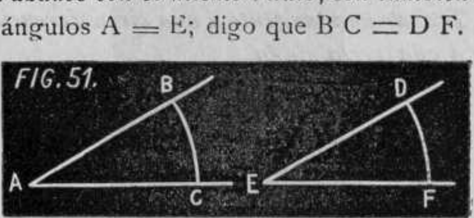
El ángulo, en este caso, toma el nombre de *central ó ángulo en el centro*, por la posición de su vértice.

Por el contrario, se denominan *excéntricos*, los ángulos que no tienen su vértice en el centro.

Entre los ángulos excéntricos, el más notable es el *ángulo inscripto*, que es el que tiene el vértice en la circunferencia y cuyos lados son dos cuerdas.

71. *Si dos ángulos son iguales, sus arcos correspondientes, trazados con el mismo radio, son también iguales.* Sean los ángulos A = E; digo que B C = D F.

FIG. 51.



En efecto, coloco el ángulo E sobre su igual A de modo que coincidan, como A B = E D y A C = E F, resultará que los arcos B C y D F; coincidirán luego son iguales.

Corolario. *Dos ángulos cualesquiera son directamente proporcionales á sus arcos correspondientes descritos con el mismo radio.* Pues del teorema anterior se deduce que si un ángulo es duplo de otro, su arco correspondiente será duplo del de este otro. (Arit. 258.)

72. *La medida del ángulo central, es su arco correspondiente.*

Sea A un ángulo cualquiera y a su arco correspondiente.

Representemos por A' el ángulo unidad y por a' su arco.

Tendremos, con arreglo al corolario anterior, $\frac{A}{A'} = \frac{a}{a'}$

El primer miembro de esta igualdad es la razón del ángulo A que se quiere medir al ángulo unidad, ó sea la medida del ángulo A; luego *la medida de un ángulo es la razón de su arco correspondiente al arco del ángulo que se toma por unidad.*

Si, pues, tomamos por unidad de ángulos, el ángulo cuyo arco correspondiente es la unidad de arcos, ó sea el cuadrante, será $a' = 1$; y la igualdad anterior nos dice que la medida de un ángulo es su arco correspondiente.

73. *La medida del ángulo inscripto es la mitad del arco comprendido entre sus lados.*

FIG. 52.

Pueden ocurrir tres casos: 1.° Que el centro esté en uno de los lados del ángulo. 2.° Que el centro esté entre los lados del ángulo, y 3.° Que el centro esté fuera de los lados del ángulo.

1.° Sea el ángulo C A B; tracemos por O la paralela K H al lado A B. Tendremos, medida del áng. C O H = = C H (1)

Pero siendo K O A = C O H, el arco K A = C H; y como K A = H B (67); resulta C H = H B ó C H = $= \frac{1}{2}$ C B.

Pero C O H = C A B (31, cor. 1.º); luego sustituyendo en (1), medida de C A B $= \frac{1}{2}$ C B.

2.º Sea el ángulo D A B. Trazo el diámetro A C, y tendremos:

medida de D A C $= \frac{1}{2}$ D C; medida de C A B $= \frac{1}{2}$ C B;

y sumando ordenadamente estas dos igualdades:

$$\text{medida de } DAB = \frac{1}{2} DB.$$

3.º Sea el ángulo E A D. Trazo el diámetro A C, y resultará:

$$\left.\begin{array}{l}\text{medida de } EAC = \frac{1}{2} EC \\ \text{medida de } DAC = \frac{1}{2} DC\end{array}\right\} \text{luego, medida de } EAD = \frac{1}{2} ED.$$

Corolarios. 1.º *Todos los ángulos inscriptos en el mismo segmento son iguales.*

Por tener la misma medida.

2.º *Todos los ángulos inscriptos en un semi-círculo son rectos.*

Pues su medida es el cuadrante.

3.º *La medida del ángulo formado por una cuerda y la prolongación de otra, es la semisuma de los arcos subtendidos por dichas cuerdas.*

Pues es suplemento del ángulo que forman las cuerdas.

74. *La medida del ángulo formado por una tangente y una cuerda es la mitad del arco comprendido entre sus lados.*

Sea el ángulo B A C (fig. 53); digo que su medida es la mitad de A C.

En efecto, trazo C D paralela á A B, y resulta B A C = = A C D (31); pero la medida de A C D $= \frac{1}{2}$ A D, y como A D = A C (67) tendremos B A C = A C D =

$= \frac{1}{2}$ A C.

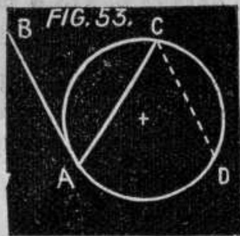


FIG. 53.

75. *La medida del ángulo cuyo vértice es interior á la circunferencia es la semisuma de los arcos comprendidos entre sus lados y las prolongaciones de éstos.*

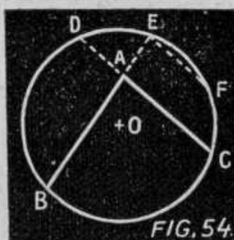


FIG. 54.

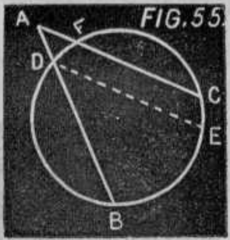
Digo que la medida de B A C $= \frac{BC + DE}{2}$.

En efecto, trazo E F paralela á D C, y resultará B A C = B E F; pero medida de

$$BEF = \frac{BF}{2} = \frac{BC + CF}{2} = \frac{BC + DE}{2},$$

luego la medida de B A C $= \frac{BC + DE}{2}$.

76. *La medida del ángulo cuyo vértice es exterior á la circunferencia, es la semi-diferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.*



Pueden ocurrir tres casos: 1.° que los lados sean dos secantes; 2.° que sean una secante y una tangente; y 3.° que sean dos tangentes.

Digo que la medida de $BAC = \frac{BC - DF}{2}$.

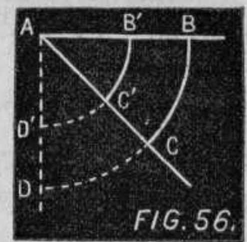
En efecto, trazo DE paralela á AC, y tendremos $BAC = BDE$; y como la medida de

$$BDE = \frac{BC - CE}{2} = \frac{BC - DF}{2},$$

$$\text{resulta } BAC = \frac{BC - DF}{2}.$$

Los otros dos casos se demuestran del mismo modo.

77. *Todos los arcos correspondientes á un mismo ángulo tienen igual graduación.*



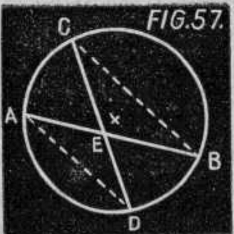
En efecto, trazo AD perpendicular á AB y tendremos (71, cor.) $\frac{BAC}{BAD} = \frac{BC}{BD}$; y $\frac{BAC}{BAD} = \frac{B'C'}{B'D'}$; luego $\frac{BC}{BD} = \frac{B'C'}{B'D'}$; pero DB y $B'D'$ valen 90 grados de sus circunferencias respectivas, por consiguiente, también B C y B' C' tendrán igual graduación.

78. La medición de los ángulos, en virtud de los principios expuestos, queda reducida á la de sus arcos correspondientes. Así diremos en lo sucesivo ángulos de 15°, 20°, etc., para indicar que sus arcos correspondientes tienen 15°, 20°, etc.

XV.

RECTAS PROPORCIONALES EN LA CIRCUNFERENCIA.

79. *Si dos cuerdas de la misma circunferencia se cortan, sus segmentos son inversamente proporcionales.*



Digo que $\frac{AE}{CE} = \frac{ED}{EB}$.

En efecto, trazo las A D y C B, y como los ángulos A y C son iguales (73, cor. 1.°), estas rectas serán antiparalelas con respecto al ángulo A E D y, por tanto, (41)

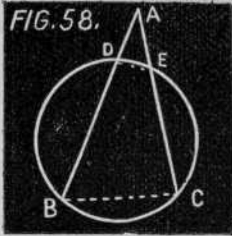
$$\frac{AE}{CE} = \frac{ED}{EB}.$$

Corolario. *La distancia de un punto de la circunferencia al diámetro es media proporcional entre los segmentos del diámetro.*

Pues si A B fuera un diámetro y C D perpendicular á A B, sería C E = E D (64).

80. *Dos secantes que concurren en un punto exterior al círculo, son inversamente proporcionales á sus segmentos externos.*

FIG. 58.

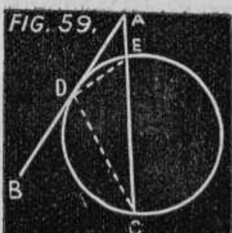


Digo que $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$.

En efecto, trazando las B C y D E, se forman los ángulos B y A E D, iguales por tener la misma medida, lo que nos indica que D E y B C son antiparalelas con respecto al ángulo A, luego $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$.

81. *Si desde un punto exterior á la circunferencia se trazan una tangente y una secante, la tangente es media proporcional entre la secante y su segmento externo.*

FIG. 59.



Digo que $\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$.

En efecto, trazo las D E y D C y resultan los ángulos

C y A D E, iguales por tener la misma medida; luego D E y D C son antiparalelas con respecto al ángulo A y nos darán $\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$.

Escolio. Si la secante pasara por el centro y la tangente fuera igual al diámetro, es decir, A D = E C, la proporción anterior se convertiría en $\frac{AC}{EC} = \frac{EC}{AE}$ y entonces diríamos que A C estaba dividida en *media y extrema razón*. En general se dice que una recta está dividida en *media y extrema razón*, cuando se la divide en dos partes, tales que la mayor sea media proporcional entre la menor y la recta entera.

XVI.

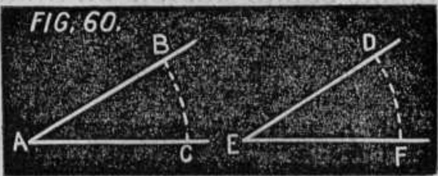
PROBLEMAS SOBRE ÁNGULOS.

82. I. *Trazar el arco correspondiente á un ángulo dado*. Basta hacer centro en el vértice, con un radio cualquiera.

II. *Construir el ángulo correspondiente á un arco dado*.

Unánse los extremos del arco con el centro.

III. *Construir un ángulo igual á otro dado.*



Trácese el arco B C correspondiente al ángulo dado A. Desde un punto cualquiera E, de una recta indefinida

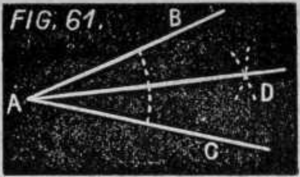
E F, como centro, y con el mismo radio, descríbase el arco D F; tómese D F = B C, y la D E nos dará el ángulo E pedido. (71.)

IV. *Sumar dos ó más ángulos.* En la construcción anterior, se llevan sobre D F sucesivamente los arcos correspondientes de los ángulos que se han de sumar.

V. *Restar un ángulo de otro.* Llévese el arco menor sobre el mayor, y nos resultará la diferencia buscada.

VI. *Dividir un ángulo en dos partes iguales, ó sea trazar su bisectriz.*

FIG. 61.



Trácese el arco correspondiente al ángulo A; divídase en dos partes iguales (69, 3.°), y la A D es la bisectriz pedida.

VII. *Hallar la máxima medida comun de dos ángulos y la razón numérica de sus magnitudes.* Se resuelve como su análogo (45, 5.°) llevando el arco del ángulo menor sobre el del mayor, etc.

XVII.

PROBLEMAS SOBRE MEDIDA DE ÁNGULOS.

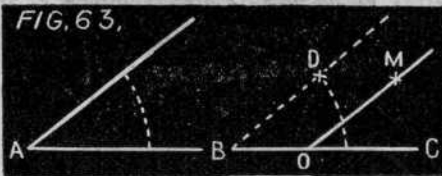
83. I. *Trazar por un punto dado la paralela á una recta dada.*

FIG. 62.

Se hace centro en el punto dado M y se traza un arco A C, que corte á A B. Desde el punto A, con el mismo radio, se traza el arco M B, se toma A C = M B, y la C M es la paralela pedida. Pues resulta M A B = A M C.

II. *Por un punto dado fuera de una recta, trazar otra que forme con ella un ángulo dado.*

FIG. 63.



En un punto cualquiera B de la B C, se construye el ángulo B = A; por el punto dado M se traza una paralela á la B D, y el ángulo M O C será el pedido.

Pues se tiene M O C = B = A.

III. *En el extremo de una recta que no se puede prolongar, levantar una perpendicular.*

FIG. 64.

Se traza una circunferencia que pase por el extremo A y corte á la recta A B; se traza el diámetro B D, y la A D es la perpendicular pedida. (73, cor. 2.º)

IV. *Trazar por un punto dado la tangente á una circunferencia.*

Unase el punto dado A con el centro O de la circunferencia. Sobre A O como diámetro, descríbase una circunferencia que cortará á la O en dos puntos *m* y *n*; y las A *m* y A *n* serán las tangentes pedidas.

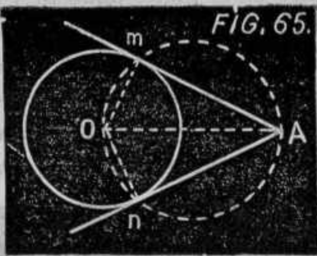


FIG. 65.

En efecto, trazando los radios O *m* y O *n*, resultan los ángulos rectos O *m* A y O *n* A.

V. *Sobre una recta dada, construir un arco capaz de un ángulo dado.* Se entiende por *arco capaz* de un ángulo dado, el que goza de la propiedad de que todos los ángulos que tienen en él su vértice y sus lados pasen por los extremos del arco, sean iguales al ángulo dado.

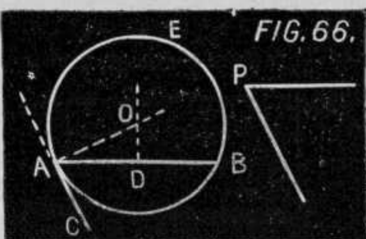


FIG. 66.

Sean A B la recta y P el ángulo dado.

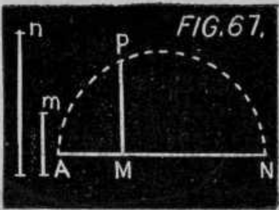
Construyo en el extremo A de A B un ángulo B A C = P; levanto A O perpendicular á A C, y D O perpendicular á A B en su punto medio; y desde O como centro, con el radio O A, trazo una circunferencia. El arco A E B será el pedido.

Pues todos los ángulos que tengan su vértice en el arco A E B, y cuyos lados pasen por A y B, serán iguales á B A C = P.

XVIII.

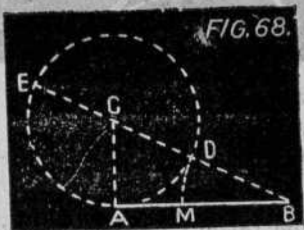
PROBLEMAS SOBRE RECTAS PROPORCIONALES EN LA CIRCUNFERENCIA.

84. I. *Hallar la media proporcional entre dos rectas dadas.*



Llevemos sobre una recta indefinida, A M = *m*, y M N = *n*; sobre A N como diámetro describamos una circunferencia, y la perpendicular M P á la A N será la media proporcional pedida (79, cor.)

II. *Dividir una recta en media y extrema razón.*



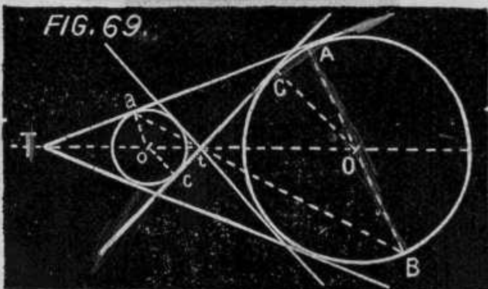
Sobre uno de los extremos A de la recta A B, se traza la perpendicular A C $= \frac{1}{2}$ A B; se describe desde C con el radio C A, una circunferencia; se une B con C, y llevando B D sobre B A, quedará dividida esta, en el punto M, en media y extrema razón.

Pues tendremos (81) $\frac{BE}{BA} = \frac{BA}{BD}$; de donde

$\frac{BE - BA}{BA} = \frac{BA - BD}{BD}$, ó bien $\frac{BD}{BA} = \frac{AM}{BD}$

y por último, $\frac{BA}{BM} = \frac{BM}{AM}$.

III. *Trazar la tangente comun á dos circunferencias.* Tracemos un radio cualquiera *o a* y el diámetro paralelo A B, unamos los extremos A y B de este con el punto *a*, y las rectas A *a* y B *a* cortarán á la línea de los centros en los puntos T y *t*; desde estos puntos tracemos tangentes á la circunferencia *o*, y vamos á demostrar que estas tangentes lo serán también á la circunferencia O.



En efecto, trazando los radios *o c* y O C, perpendiculares á la tangente *t c* tendremos (38) $\frac{oc}{OC} = \frac{ot}{Ot}$ y

por la misma razón $\frac{oa}{OA} = \frac{ot}{Ot}$; de donde

$\frac{oc}{OC} = \frac{oa}{OA}$; y como $oc = oa$, también O C = O A;

y como el punto A está en la circunferencia O, el punto C también lo estará. Luego la tangente *t c* á la circunferencia *o*, lo es también á la circunferencia O.

Escolio. Cuando, como en el caso actual, las tangentes son exteriores una á otra, el problema tiene cuatro soluciones. Si las circunferencias son tangentes exteriormente, resultarán tres soluciones. Si son secantes, quedarán reducidas á dos; y si las circunferencias son tangentes interiormente, solo resultará una tangente comun.

IV. *Trazar una circunferencia que pase por dos puntos dados y sea tangente á una recta dada.*

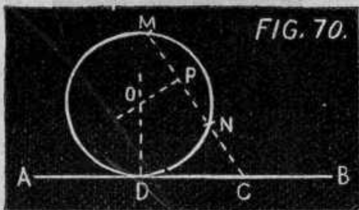


FIG. 70.

Unánse los dos puntos dados M y N, y hállese la media proporcional entre C M y C N, que llevaremos sobre A B á partir de C. Sea C D.

Levántese D O perpendicular á A B en D y P O perpendicular á M N en su punto medio. Desde el punto de encuentro O de ambas perpendiculares, con O D por radio, trácese una circunferencia que pasará por M y N (25) y será tangente á A B (81.)

XIX.

TRIÁNGULOS.

83. *Se llama triángulo la porcion de plano limitado por tres rectas que se cortan dos á dos.*

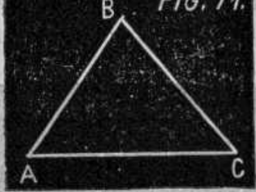
Estas rectas se llaman *lados del triángulo*, los ángulos que estas rectas forman se llaman *ángulos del triángulo*, y sus vértices, *vértices del triángulo*.

Base de un triángulo es uno cualquiera de sus lados.

Altura de un triángulo es la distancia de la base á su vértice opuesto.

86. *Un lado cualquiera de un triángulo, es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.*

FIG. 71.



Sea el triángulo A B C. Evidentemente,

$$AC < AB + CB;$$

y restando A B de los dos miembros de esta desigualdad,

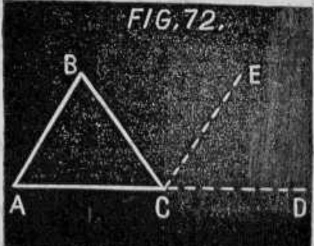
$$AC - AB < BC.$$

87. Los triángulos, con relación á sus lados se dividen en *equiláteros*, *isósceles* y *escalenos*, segun que tienen sus tres lados iguales, solamente dos, ó los tres desiguales.

En el triángulo isósceles acostumbra á tomarse por base el lado desigual; el vértice opuesto se llama vértice del triángulo.

88. *La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual á dos ángulos rectos.*

FIG. 72.



Sea el triángulo A B C, digo que $A + B + C = 2$ R.

En efecto, prolongo uno de sus lados A C, y por el vértice C tiro C E paralela á A B.

Tendremos (20, cor. 1.°)

$$ACB + BCE + ECD = 2R.$$

Ahora bien, (31) B C E = B y (31, cor. 1.°) E C D = A; luego A C B + B + A = 2 R.

Corolarios. 1.° *Un ángulo cualquiera de un triángulo es suplemento de la suma de los otros dos*. Pues entre los tres valen dos ángulos rectos.

2.° *El ángulo exterior que resulta prolongando un lado cualquiera de un triángulo, es igual á la suma de los otros dos ángulos no adyacentes*. Pues B C D y A + B, tienen el mismo suplemento A C B.

3.° *Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales, los terceros ángulos también lo serán*. Por ser suplementos de la suma de los otros dos.

4.° *Si un triángulo tiene un ángulo recto, los otros dos son complementarios*. Pues su suma ha de ser igual á un ángulo recto.

89. De lo expuesto se deduce que un triángulo no puede tener dos ángulos rectos, ni dos obtusos, ni uno recto y otro obtuso.

El triángulo que tiene un ángulo recto, se llama *rectángulo*.

El que tiene uno obtuso, se denomina *obtusángulo* y *acutángulo*, el que tiene sus tres ángulos agudos.

Los triángulos acutángulos y obtusángulos se comprenden en la denominación comun de *triángulos oblicuángulos*.

En el triángulo rectángulo, se llaman *catetos* los lados que forman el ángulo recto; é *hipotenusa* el opuesto al ángulo recto.

90. *En todo triángulo, á lados iguales se oponen ángulos iguales*.

Sea el triángulo A B C; digo que si A B = B C; también A C B = B A C.

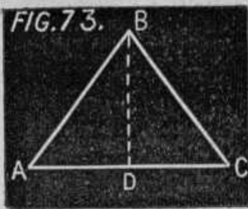


FIG. 73.

En efecto, uno el punto B con el medio de A C y la B D (25, cor.) será perpendicular á la A C. Doblando el plano de la figura por B D, D C caerá sobre D A, por ser rectos los ángulos en D; y el punto C caerá en el A por ser D C = D A; luego B C coincide con B A, y por tanto los ángulos C y A son iguales.

Corolarios. 1.° *La altura del triángulo isósceles divide á la base y al ángulo en el vértice en dos partes iguales.* Pues B D es la altura, y los ángulos en B son iguales, puesto que han coincidido al doblar la figura.

2.° *Todo triángulo equilátero es también equiángulo*

91. *En todo triángulo á mayor lado se opone mayor ángulo.*

Sea el triángulo A B C; digo que si B C > A B, también A > C.

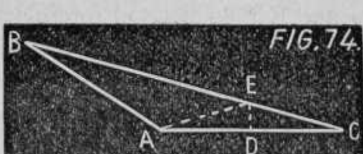


FIG. 74.

En efecto, trazando la perpendicular D E en el punto medio de A C, el punto B quedará del mismo lado de la perpendicular que el A, puesto que B C > B A; y uniendo A y E. tendremos el triángulo isósceles A E C, en que E A C = C; y como B A C > E A C también B A C > C.

RECÍPROCOS. 1.º *En todo triángulo, á ángulos iguales se oponen lados iguales.*

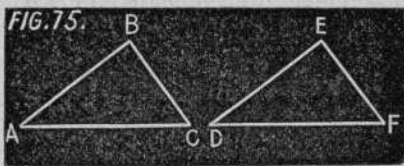
2.º *En todo triángulo á mayor ángulo se opone mayor lado.*

XX.

IGUALDAD DE TRIÁNGULOS.

92. *Dos triángulos son iguales, cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales.*

Digo que si A B = D E; B C = E F y A C = D F los dos triángulos A B C y D E F son iguales.



En efecto, coloco el triángulo D E F sobre el A B C, de modo que el lado D F coincida con su igual A C, y que el punto E caiga del mismo lado de A C que el punto B

Por ser D E = A B; el punto E caerá en un punto de la circunferencia trazada desde A como centro con A B por radio; y por ser E F = B C, el punto E deberá caer también en un punto de la circunferencia trazada desde C con el radio B C. Luego el punto E caerá en la intersección B de las dos circunferencias.

93. *Dos triángulos son iguales, cuando tienen dos lados iguales é igual el ángulo comprendido.* Digo que A B C = D E F, siempre que D E = A B, E F = B C y E = B.

En efecto, coloco el triángulo D E F sobre el A B C de modo que coincidan los ángulos iguales E y B. Entonces el punto D caerá en A, por ser E D = B A; y el F caerá en C, por ser E F = B C. Han coincidido los tres vértices, luego los triángulos son iguales.

94. *Dos triángulos son iguales, cuando tienen un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales.*

Digo que si D F=A C y D=A; F=C, los triángulos propuestos son iguales. Coloco D E F sobre el A B C, de modo que los lados iguales D E y A C coincidan. Por ser D = A, el lado D E tomará la dirección A B y por ser F = C, el lado F E tomará la dirección C B; luego el punto E que tiene que caer á la vez en A B y en C B, caerá sobre el punto B. Han coincidido los tres vértices, luego los tres ángulos son iguales.

95. *Dos triángulos rectángulos son iguales:*

1.° *Cuando tienen iguales la hipotenusa y un cateto.*

2.° *Los dos catetos.*

3.° *La hipotenusa y un ángulo agudo.*

4.° *Un cateto y un ángulo agudo.*

La demostración de estos casos se reduce á la de los casos anteriores.

96. *Dos triángulos isósceles son iguales,*

1.° *Cuando tienen la base y un lado respectivamente iguales.*

2.° *Un lado y un ángulo.*

97. *Dos triángulos equiláteros son iguales, cuando tienen un lado igual.*

XXI.

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS.

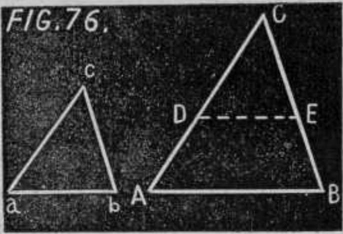
98. Se llaman *triángulos semejantes*, los que tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales. La razón constante de sus lados se llama *razón de semejanza. Lados homólogos,* en dos triángulos semejantes, son los opuestos á ángulos iguales.

Vértices homólogos, son los vértices de los ángulos iguales.

99. *Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus tres ángulos respectivamente iguales.*

Sean los triángulos A B C y *a b c*. Digo que si A $=$ *a*, B $=$ *b* y C $=$ *c*, los dos triángulos son semejantes.

FIG. 76.



En efecto, tomo sobre C B una parte C E $=$ *c b*, y por el punto E trazo E D paralela á A B. Los dos triángulos C A B y C D E tendrán sus tres ángulos respectivamente iguales (31, cor. 1.º). Además (37, cor. 2.º)

$$\frac{A\,C}{C\,D} = \frac{C\,B}{C\,E} \text{ y (38) } \frac{A\,B}{D\,E} = \frac{A\,C}{C\,D};$$

$$\text{luego } \frac{A\,C}{C\,D} = \frac{C\,B}{C\,E} = \frac{A\,B}{D\,E}.$$

Por consiguiente los dos triángulos A C B y C D E son semejantes; y como C D E $=$ *a c b* (94), también A C B será semejante á *a c b*.

Corolario. *Dos triángulos son semejantes, cuando tienen dos ángulos respectivamente iguales.* (88, cor. 3.º).

100. *Dos triángulos son semejantes, cuando tienen un ángulo igual y los lados que le forman proporcionales.*

Digo que si C $=$ *c*, y $\frac{C\,A}{c\,a} = \frac{C\,A}{c\,b}$, los dos triángulos son semejantes.

En efecto, tomo sobre C B una parte C E $=$ *c b*, y por el punto E trazo E D paralela á A B. Los ángulos E y D serán respectivamente iguales á B y A. Además, (31, cor. 1.º) $\frac{AC}{CD} = \frac{CB}{CE} = \frac{AB}{DE}$; luego los triángulos CAB y CDE son semejantes; y como CDE = acb también ACB será semejante á acb;

101. *Dos triángulos son semejantes, cuando tienen sus lados directamente proporcionales.* Digo que si $\frac{AC}{ac} = \frac{CB}{cb} = \frac{AB}{ab}$, los triángulos son semejantes.

En efecto, tomando CE = cb, y tirando ED paralela á AB, sabemos que los triángulos CAB y CDE son semejantes, luego nos darán $\frac{AC}{CD} = \frac{CB}{CE} = \frac{AB}{DE}$; y comparando estas proporciones con las dadas resulta CD = ac y DE = ab, lo que nos dice que los triángulos CDE y acb son iguales; y como el primero es semejante al ACB, el segundo también lo será.

102. *Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus lados respectivamente paralelos ó perpendiculares.* Pues sus ángulos tendrán que ser iguales ó suplementarios (34 y 35). No pueden ser suplementarios (88); luego serán iguales; y los triángulos serán semejantes (99).

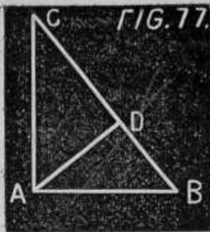
103. *Dos triángulos rectángulos son semejantes, cuando tienen proporcionales la hipotenusa y un cateto.* Se demuestra como el 101.

XXII.

CONSECUENCIAS DE LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS.

104. *La perpendicular á la hipotenusa, desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo, es media proporcional entre los segmentos de la hipotenusa.*

Es decir que $\frac{CD}{AD} = \frac{AD}{BD}$.



En efecto, los triángulos A C D y A B D (102) son semejantes, y por tanto $\frac{CD}{AD} = \frac{AD}{DB}$.

105. *Si desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo, se traza una perpendicular á la hipotenusa: 1.° Cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y el segmento adyacente á dicho cateto. 2.° Los cuadrados de los catetos son directamente proporcionales á los segmentos de la hipotenusa.*

1.° Los triángulos A B C y A C D son semejantes, por tener el ángulo C comun y ser rectángulos, luego tendremos $\frac{CB}{AC} = \frac{AC}{CD}$. Por la misma razón los triángulos A C B y A D B nos darán $\frac{CB}{AB} = \frac{AB}{BD}$.

2.° Las dos proporciones anteriores nos dan:

$$\overline{AC}^2 = CB \times CD$$
$$\overline{AB}^2 = CB \times DB$$

y dividiendo ordenadamente estas igualdades, resulta

$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{CD}{DB}$$

106. *En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos.*

En efecto, acabamos de ver que

$$\overline{AC}^2 = CB \times CD$$
$$\overline{AB}^2 = CB \times DB$$

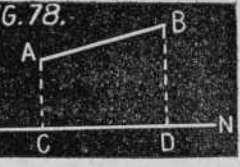
y sumando ordenadamente estas dos igualdades, tendremos

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = CB\,(CD + DB) = \overline{CB}^2$$

Escolio. Este principio conocido con el nombre de *teorema de Pitágoras*, nos da el valor numérico de un lado de un triángulo rectángulo, cuando se conocen los de los otros dos; pues nos indica que la hipotenusa es igual á la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos; y que cada cateto es igual á la raíz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado del otro cateto.

107. Se llama *proyección* de un punto A sobre una recta M N, el pié C de la perpendicular A C á la recta M N desde dicho punto A.

FIG. 78.



Proyección de una línea cualquiera sobre una recta, es la parte de esta recta comprendida entre las proyecciones de los extremos de la línea. Así C D es la proyección de A B sobre M N.

Así en la figura 77, los segmentos de la hipotenusa son las proyecciones de los catetos; así como cada cateto es la proyección de la hipotenusa sobre dicho cateto.

La proyección de una línea recta sobre otra á la que es perpendicular, es un punto.

108. Aplicando los principios expuestos en los números 104 y 105 á las rectas consideradas en la circunferencia, tendremos los siguientes enunciados:

1.° *La perpendicular á un diámetro desde un punto de la circunferencia, es media proporcional entre los segmentos del diámetro.*

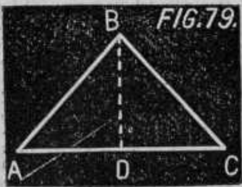
2.° Si se trazan las cuerdas que unen ese punto con los extremos del diámetro, *cada cuerda es media proporcional entre el diámetro y el segmento adyacente á la cuerda.*

3.° *Los cuadrados de las cuerdas son directamente proporcionales á los segmentos del diámetro.*

109. *En todo triángulo, el cuadrado de un lado opuesto á un ángulo agudo, es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo del producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.*

Vamos á demostrar que

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,AC \times AD.$$



En efecto, el triángulo rectángulo B C D, nos dá (106) $\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2$; pero $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2$ y de $DC = AC - AD$, resulta $\overline{DC}^2 = \overline{AC}^2 - 2\,AC \times AD + \overline{AD}^2$; luego

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2AC \times AD + \overline{AD}^2;$$

ó sea, por fin,

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,AC \times AD,$$

que es lo que queríamos demostrar,

110. *En todo triángulo, el cuadrado de un lado opuesto á un ángulo obtuso, es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, mas el duplo del producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.*

Digo que $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2\,AC \times AD$.

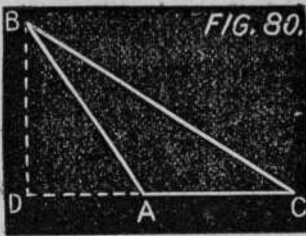


FIG. 80.

En efecto, el triángulo rectángulo B D C, nos dá (106),

$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2$; pero $\overline{BD}^2 = \overline{BA}^2 - \overline{DA}^2$,

y de $DC = DA + AC$,

resulta $\overline{DC}^2 = \overline{DA}^2 + 2\,DA \times AC + \overline{AC}^2$;

luego

$$\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 - \overline{DA}^2 + \overline{DA}^2 + 2\,DA \times AC + \overline{AC}^2;$$

ó bien $\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 + 2\,AC \times AD$,

que es lo que queríamos demostrar.

Escolio. De aquí se infiere que un ángulo de un triángulo será recto, agudo ú obtuso, según que el cuadrado de su lado opuesto sea igual, menor ó mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos.

III. *La bisectriz del ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en partes directamente proporcionales á los lados adyacentes.*

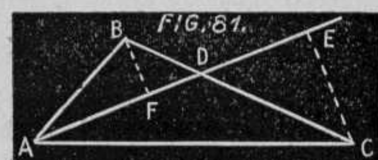


FIG. 81.

En efecto, los triángulos rectángulos D E C y B D F, que resultan de trazar B F y C E perpendiculares á la bisectriz A D, tienen los ángulos en D iguales, luego son semejantes y, por tanto,

$\frac{CE}{BF} = \frac{CD}{BD}$; pero los triángulos rectángulos A E C y A B D, que tienen los ángulos en A iguales, son también semejantes y nos dán $\frac{CE}{BF} = \frac{AC}{AB}$.

De estas dos proporciones resulta, $\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB}$, que es lo que queríamos demostrar.

XXIII.

CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS IGUALES.

112. I. Construir un triángulo.

1.° *Dados sus tres lados.*

Tómese sobre una recta indefinida una longitud igual á uno de los lados dados y haciendo centro en sus extremos, con un radio igual á cada uno de los otros dos lados, trácense dos arcos cuya intersección determinará el tercer vértice del triángulo.

El problema es posible siempre que los datos satisfagan á la condición (86.)

2.° *Dados dos lados y el ángulo comprendido.*

Se construye un ángulo igual al dado y en sus lados se toman distancias iguales á los lados propuestos, que determinarán el tercer lado del triángulo.

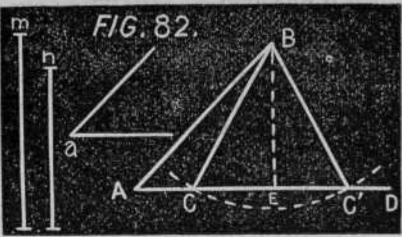
El problema es siempre posible.

3.° *Dado un lado y los dos ángulos contiguos.*

Tomando el lado dado sobre una recta indefinida y construyendo en sus extremos dos ángulos iguales á los dados, resultará el triángulo pedido.

4.° *Dados dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.*

Construyamos el ángulo A igual al dado; tomemos en uno de sus lados A B igual al lado *m* contiguo, y desde B como centro con un radio igual al lado opuesto n, tracemos un arco, que, en general, cortará á A D en dos puntos C y C' que determinan los triángulos A B C y A B C' que satisfacen ambos al enunciado del problema.



En este problema conviene distinguir tres casos:

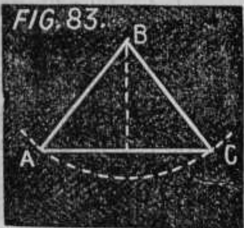
$$1.^{\circ} \quad m > n \begin{cases} n > BE \\ n = BE \\ n < BE \end{cases}$$

Si $m > n$ y $n > BE$, el arco descrito desde B cortará á A D en los dos puntos C y C', segun hemos visto, y el problema tendrá dos soluciones.

Si $m > n$ y $n = BE$, resulta una sola solución que es A B E.

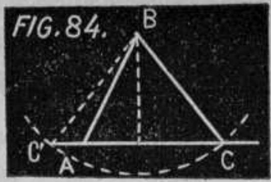
Si $m > n$ y $n < BE$, el arco descrito desde B no encuentra á A D y el problema es imposible.

2.° Si $m = n$, el arco descrito desde B cortará al lado A D en los puntos A y C; y el problema tiene una solución, que es el triángulo isósceles A B C.



3.° Si $m < n$, la circunferencia descrita desde B origina los dos triángulos A B C y A B C', de los que solo el primero es solución del problema; pues B C' no se opone al ángulo dado A.

FIG. 84.



II. *Construir un triángulo igual á otro dado.*

Basta tomar como datos tres de los elementos indicados en los problemas anteriores, y la cuestión quedará reducida á uno de los casos ya resueltos.

XXIV.

CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS SEMEJANTES.

113. I. *Construir un triángulo semejante á otro dado, conociendo un lado.*

En los extremos del lado dado, constrúyanse dos ángulos iguales á los contiguos de su lado homólogo y resultará el triángulo pedido.

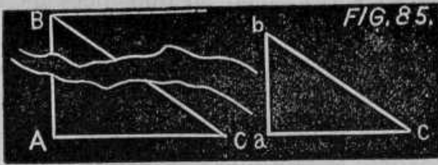
II. *Construir un triángulo semejante á otro dado, conociendo la razón de semejanza.*

Si la razón dada es $\frac{m}{n}$, hállese la cuarta proporcional á m, n y uno de los lados del triángulo dado.

La cuarta proporcional será el lado homólogo del empleado y la cuestión quedará reducida al caso anterior.

III. *Calcular una distancia inaccesible por uno de sus extremos.*

Sea A B la distancia, inaccesible por B, que queremos calcular.



Tomemos un punto C accesible; midamos A C y llevemos sobre una línea indefinida tantas partes de la escala como unidades tenga A C, sobre *a* y *c* constrúyanse ángulos iguales á A y C, y el triángulo *a b c*; nos dará la longitud *a b* que nos dará á conocer A B. Pues de $\frac{A\,C}{A\,B} = \frac{a\,c}{a\,b}$, resulta que siendo *a c* la medida en la escala de A C, también *a b* lo será de A B.

IV. *Calcular una distancia totalmente inaccesible.*

Se resuelve de modo análogo al anterior, calculando primero la distancia inaccesible á uno de sus extremos, después la del otro, y deduciendo de ambas y el ángulo que forman, la longitud pedida.

XXV.

CUADRILÁTEROS.

114. Se llama *cuadrilátero* la porción de plano limitada por cuatro rectas.

Estas rectas se llaman *lados* del cuadrilátero. *Angulos* del cuadrilátero son los formados por sus lados, y los vértices de estos ángulos se llaman *vértices* del cuadrilátero.

Diagonal es la recta que une dos vértices no contíguos.

Los cuadriláteros pueden ser convexos y no convexos.

Los primeros tienen sus ángulos salientes, sus diagonales interiores y una recta no puede contar más que á dos de sus lados.

Los segundos tienen un ángulo entrante, una diagonal exterior y puede una recta cortar á todos sus lados.

La geometría elemental solo se ocupa de los cuadriláteros convexos.

115. *La suma de los ángulos de un cuadrilátero es igual á cuatro ángulos rectos.* Pues trazando una de sus diagonales, quedará descompuesto en dos triángulos. Los seis ángulos de estos, componen los cuatro del cuadrilátero; y como los primeros valen cuatro ángulos rectos, éste será el valor de los ángulos del cuadrilátero.

116. *Dos cuadriláteros son iguales, siempre que lo sean los triángulos que los forman.* Pues superponiendo estos de modo que coincidan, los cuadriláteros coincidirán.

Lo cual origina los siguientes casos de igualdad:

1.° Cuando tengan sus cuatro lados iguales respectivamente y uno de los ángulos.

2.° Tres de sus lados y los dos ángulos que forman.

3.° Dos lados consecutivos y los tres ángulos contiguos á estos lados.

4.° Un lado y los ángulos que este lado forme con los dos contíguos y las dos diagonales.

5.° Sus cuatro lados y una diagonal.

Cuya demostración está reducida á la de la igualdad de los triángulos que los formen.

117. Los cuadriláteros se dividen en *trapezóides*, *paralelógramos* y *trapecios*, segun que tengan sus lados no paralelos; paralelos dos á dos, ó dos lados paralelos y otros dos no.

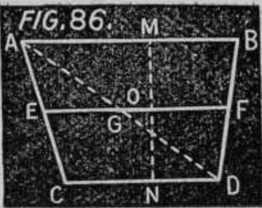
Los lados paralelos del trapecio reciben el nombre de *bases*.

Altura del trapecio es la distancia entre las bases.

Paralela media de un trapecio, es la paralela á las bases tirada por el punto medio de la altura.

118. *En todo trapecio la paralela media divide á los lados no paralelos en partes iguales y es igual á la semisuma de las bases.*

Sea E F la paralela á las bases trazada por O, punto medio de la altura M N del trapecio; digo que A E = E G, $BF = FD$ y $EF = \frac{AB + CD}{2}$.



En efecto, tenemos (37, cor. 1.°) $\frac{AE}{EC} = \frac{MO}{ON} = \frac{BF}{FD}$ y como $MO = NO$, resulta $AE = EC$ y $BF = FD$.

Pero también tenemos (38) $\frac{EG}{CD} = \frac{AE}{AC}$; y como $AE = \frac{1}{2} AC$, resulta $EG = \frac{1}{2} CD$. Por la misma razón $GF = \frac{1}{2} AB$; luego $EF = \frac{1}{2} (AB + CD.)$

119. *Si un cuadrilátero tiene sus lados opuestos iguales, es un paralelógramo.*

En efecto, trazando la diagonal B D, los triángulos A B D y B D C iguales (92) nos darán A B D = B D C y C B D = A D B, luego (31, recíp. 1.°) A B es paralela á D C y B C á A D.

120. *Si un cuadrilátero tiene dos lados opuestos iguales y paralelos, es un paralelógramo.*

En efecto, si A B es paralela é igual á C D, los dos triángulos A B D y C B D serán iguales (93), y por tanto A D = B C y A D B = C B D, lo que demuestra que también A D es paralela á B C, (31, recíp. 1.°).

121. *Las diagonales del paralelógramo se cortan mútuamente en partes iguales.*

La igualdad de los triángulos C O D y A O B (94) nos da: C O = O B y D O = O A, conforme al enunciado.

FIG. 88.

Recíproco. *Si las diagonales de un cuadrilátero se cortan mútuamente en partes iguales, el cuadrilátero será paralelógramo.*

Pues de C O = O B y D O = O A se deduce la igualdad de los triángulos C O D y A O B (93) y, por tanto, la de los ángulos C O D y O B A, que nos demuestra el paralelismo de A B y C D, (31, recíp. 1.°); luego el cuadrilátero A B C D es un paralelógramo.

122. Los paralelógramos se dividen en *romboides*, *rombos*, *rectángulos y cuadrados.*

Romboide es el paralelógramo de lados contíguos desiguales y de ángulos, adyacentes á cada lado, también desiguales, como A B C D.

Rombo es el paralelógramo de lados iguales, pero de ángulos adyacentes á cada lado desiguales.

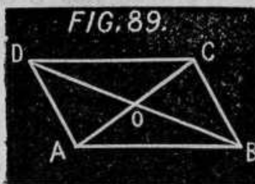
Rectángulo es el paralelógramo de ángulos rectos y lados contíguos desiguales; y

Cuadrado es el paralelógramo de ángulos rectos y lados iguales.

123. *Las diagonales del paralelógramo son: desiguales y oblícuas en el romboide; desiguales y perpendiculares*

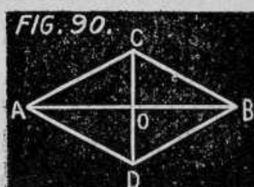
en el rombo; iguales y oblícuas en el rectángulo y en el cuadrado, iguales y perpendiculares.

1.° En efecto, los triángulos A B C y A B D, tienen el lado A B comun, los lados A D y B C iguales, pero los ángulos comprendidos entre sus lados D A B y C B A son desiguales, luego los terceros lados D B y A C son desiguales.



Además A O = O C, segun hemos demostrado, pero como D A y D C son desiguales, resulta que D B es oblícua á A C. (25)

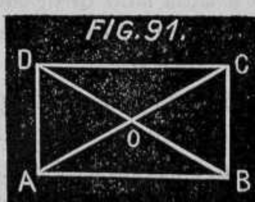
2.° Sea el rombo A B C D.



Los triángulos A C D y A C B, que tienen A C comun, C D = A D, pero A C B y C A D desiguales, tendrán también desiguales A B y C D.

Además, A O = O B y C A = C B nos dicen (25) que C D es perpenpicular á A B.

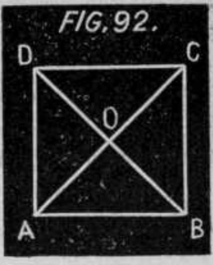
3.° En el rectángulo, los triángulos A B C y A B D



son iguales por tener el cateto A B comun y los A D y C B iguales, luego las hipotenusas A C y B D son iguales.

Además, como A O = O C y D A y D C son desiguales, D B es oblícua á A C.

4.° En el cuadrado, los triángulos A B C y A B D son iguales por tener los dos catetos iguales, luego A C = B D.



Además de A O = O C y de D A = D C, resulta que D B es perpendicular á A C.

XXVI.

CONSTRUCCIÓN DE CUADRILÁTEROS.

124. I. *Construir un cuadrilátero, dados los cuatro lados y una diagonal.*

Se reduce á la construcción de dos triángulos, dados los tres lados.

II. *Construir un cuadrilátero, dados los cuatro lados y un ángulo.*

Se reduce á construir un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido; y el otro, conocidos los tres lados.

III. *Dos de sus lados consecutivos y tres ángulos.*

Se resuelve de modo análogo, así como el

IV. *Dados un lado y los ángulos que forman con sus contiguos y con las diagonales.*

V. *Construir un paralelógramo, dado uno de sus ángulos y los lados que le forman.*

Se construye el triángulo determinado por los datos y por sus vértices se trazan paralelas á los lados opuestos.

VI. *Construir un rombo, dado un lado y uno de sus ángulos.*

Es el mismo problema anterior, puesto que los lados son iguales.

VII. *Construir un rombo, dado un lado y una diagonal.*

Se conocen los tres lados que forman uno de los triángulos, lo que resuelve el problema.

VIII. *Construir un rombo, dada una diagonal y el ángulo opuesto.*

Se conoce un lado y los ángulos contíguos de cada uno de los triángulos que le forman.

IX. *Construir un rectángulo, dado un lado y la diagonal.*

Es construir un triángulo rectángulo dados un cateto y la hipotenusa.

X. *Dado un lado y el ángulo que forma con la diagonal.*

Se conoce un cateto y un ángulo agudo.

XI. *La longitud de las diagonales y el ángulo que forman.*

Se conocen dos lados y el ángulo comprendido en cada triángulo.

XII. *Construir un cuadrado dada la diagonal.*

Se trazan dos perpendiculares y se toma la mitad de la longitud dada sobre las cuatro rectas, á partir del punto de intersección.

XXVII.

POLÍGONOS.

125. Se llama *polígono* la porción de plano limitado por rectas.

Lados del polígono son las rectas limitadas que le forman.

Vértices y *ángulos* del polígono, son los formados por estas rectas.

Diagonales son las rectas que unen dos vértices no contíguos al mismo lado.

Contorno de un polígono, es la línea quebrada que forman sus lados.

Perímetro es el valor numérico del contorno.

126. Los polígonos se clasifican por el número de sus lados. El que tiene tres lados, se llama *triángulo*, el de cuatro, *cuadrilátero*; el de cinco, *pentágono*; el de seis, *exágono*; el de siete, *eptágono*; el de ocho, *octógono*; el de nueve, *eneágono*; el de diez, *decágono*; el de once, *endecágono*; el de doce, *dodecágono*; el de quince, *pentedecágono*; y, en general, polígono de trece, de diez y seis, etc., lados.

127. Desde cada vértice de un polígono pueden trazarse tantas diagonales como vértices tenga el polígono menos tres.

De suerte que si el polígono tiene n lados, desde cada vértice se podrán trazar $n - 3$ diagonales; luego los n vértices darán $n\ (n - 3)$ diagonales y, teniendo en cuenta que cada diagonal corresponde á dos vértices, resultará que el número de diagonales de un polígono es $\frac{n\ (n-3)}{2}$.

128. Los polígonos se dividen en *convexos* y *no con-*

vexos, segun que su perímetro puede ser cortado por una recta en dos ó más puntos.

Los polígonos convexos tienen sus ángulos salientes y sus diagonales interiores al polígono.

Los no convexos tienen algun ángulo entrante y alguna diagonal exterior al polígono.

Nosotros solo nos ocuparemos de los polígonos convexos.

129. Los polígonos pueden ser *equiláteros*, cuando todos sus lados son iguales; *equiángulos*, si todos sus ángulos son iguales y *regulares*, cuando son equiláteros y equiángulos á la vez.

130. *La suma de los ángulos de un polígono es igual á tantas veces dos ángulos rectos, como lados tenga el polígono menos dos.*

En efecto, trazando diagonales desde un vértice á todos los demás, el polígono quedará descompuesto en triángulos que tendrán un solo lado del polígono, excepto los dos extremos que tendrán dos. Sí, pues, el polígono tiene n lados, resultarán $n-2$ triángulos. La suma de los ángulos de los triángulos es la suma de los ángulos del polígono, y como aquella vale $2\,R\,(n-2)$, ésta será también la suma de los ángulos del polígono.

Corolario. *La suma de los ángulos exteriores que resultan de prolongar en un mismo sentido todos los lados de un polígono, es igual á cuatro ángulos rectos.*

En efecto, al prolongar los lados, se forman en cada vértice dos ángulos adyacentes, uno interno y otro externo al polígono, que valen dos ángulos rectos. Llamando S á la suma de unos y otros, E á la de los exteriores é I á la de los interiores, tendremos:

$$S = 2\,R\,n \quad \text{pero} \quad I = 2\,R\,(n-2) = 2\,R\,n - 4\,R$$

y restando ordenadamente estas igualdades, tendremos:

$$S - I, \text{ ó sea } E = 2\,R\,n - 2\,R\,n + 4\,R = 4\,R.$$

131. *Dos polígonos son iguales, siempre que se compongan del mismo número de triángulos iguales é igualmente dispuestos.*

Pues haciendo coincidir los triángulos que los componen, los polígonos evidentemente coincidirán.

132. *Construir un polígono igual á otro dado.*

1.ª *Solución.* Se descompone el polígono en triángulos, trazando diagonales desde uno de sus vértices á todos los demás, y el problema queda reducido á la construcción de triángulos iguales.

2.ª *Solución.* Constrúyanse lados y ángulos respectivamente iguales á los del polígono dado.

XXVIII.

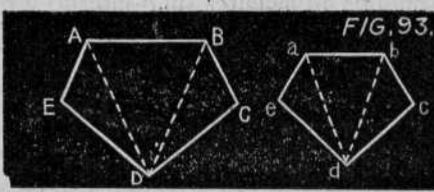
SEMEJANZA DE POLÍGONOS.

133. *Se llaman polígonos semejantes los que tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales.*

Los vértices, lados y ángulos de estos polígonos se llaman *homólogos.*

La razón consistente de sus lados se llama *razón de semejanza.*

134. *Dos polígonos compuestos del mismo número de triángulos respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos, son semejantes.*



La semejanza de los triángulos nos indica la igualdad de sus ángulos y, por tanto, la de los ángulos del polígono.

Además, la semejanza de los mismos triángulos, demuestra la proporcionalidad de los lados de los polígonos, como consecuencia de la de sus lados respectivos.

RECÍPROCO. *Dos polígonos semejantes pueden descomponerse en el mismo número de triángulos respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos.*

En efecto, trazando diagonales desde un vértice á los demás, quedan descompuestos los polígonos en triángulos. Los dos exteriores serán semejantes (100) y de la semejanza de estos dos se deduce la de los demás.

135. *Sobre una recta dada, construir un polígono semejante á otro dado.*

Si la recta dada es A B (fig. 93) y el polígono dado *a b c d e*, trazando las diagonales *d a* y *d b* y construyendo los triángulos A B D, B D C y A D E semejantes á los *a b d*, *b d c* y *a d e*, quedará resuelto el problema.

136. *Construir un polígono semejante á otro dado, conocida la razón de semejanza.*

Si la razón es $\frac{m}{n}$, hallaremos la cuarta proporcional á *m*, *n* y *a b* (suponiendo que *a b c d e* es el polígono dado) y quedará la cuestión reducida al problema anterior.

137. *Los perímetros de dos polígonos semejantes son directamente proporcionales á sus lados homólogos.*

En efecto, (fig. 93) de $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \ldots\ldots;$ resulta (Arit. 65) $\frac{AB + BC + CD + \ldots\ldots}{ab + bc + cd + \ldots\ldots} = \frac{AB}{ab}.$

XXIX.

POLÍGONOS REGULARES.

138. *Dos polígonos regulares son iguales siempre que*

tengan el mismo número de lados é igual uno de ellos.

Pues teniendo un lado igual, todos los lados son iguales; y teniendo el mismo número de lados, todos los ángulos son también iguales. (Escolio, núm. 130.)

139. *Dos polígonos regulares son iguales cuando tienen igual un lado y un ángulo.*

Pues tendrán iguales todos sus lados y ángulos.

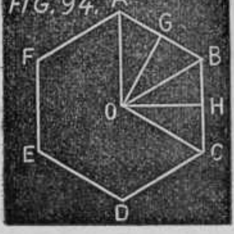
140. *Dos polígonos regulares del mismo número de lados son semejantes.*

Pues todos sus ángulos serán iguales (Escolio número 130) y sus lados son evidentemente proporcionales.

141. *Las bisectrices de los ángulos de un polígono regular concurren en un punto.*

Sea el polígono regular A B C D E F; BO y C O las bisectrices de los ángulos B y C; vamos á demostrar que las bisectrices de los demás ángulos pasan por O.

FIG. 94.



En efecto, trazo O A, y los triángulos A O B y B O C tendrán O B comun, A B = B C é iguales los ángulos comprendidos; luego son iguales y, por tanto,
O A B = O C B; pero como O C B es mitad del ángulo C, también O A B será mitad de su igual A. Es decir, que O A es la bisectriz de F A B.

142. El punto O, en que se cortan las bisectrices, se llama *centro* del polígono; y las distancias del centro á los vértices se llaman *radios*.

Apotema de un polígono regular, es la distancia del centro á uno de los lados.

Todos los radios de un polígono regular son iguales. Pues la igualdad de los triángulos O A B, O B C, etc, nos da O A = O B = O C.....

Las apotemas de un polígono regular son iguales. Pues de O G B = O B H, resulta O G = O H.

143. *Las apotemas de un polígono regular son las bisectrices de los ángulos que forman los radios; y los radios son bisectrices de los ángulos que forman las apotemas.*

Pues la igualdad de los triángulos O A G y O G B, nos da A O G = G O B, y la de los triángulos O B G y O B H, nos da G O B = B O H.

144. Se llama *ángulo en el centro* de un polígono regular el ángulo formado por dos radios contíguos.

Como todos los ángulos en O, A O B, B O C etc. valen 4 R, siendo todos iguales, uno de ellos valdrá $\frac{4\,R}{n}$.

Por la misma razón el ángulo del polígono regular valdrá $\frac{2\,R\,n - 4\,R}{n} = 2\,R - \frac{4\,R}{n}$. Lo que nos dice que el ángulo en el centro y el del polígono son suplementarios.

XXX.

ÁREAS DE LOS POLÍGONOS.

145. Se llama *área* la medida de una superficie.

Las superficies, como todas las cantidades, se miden comparándolas con otra de su misma naturaleza que se toma por unidad.

La unidad para medir superficies es el cuadrado cuyo lado es la unidad lineal. Por esta razón hemos llamado también en Aritmética unidades cuadradas á las superficiales.

146. *Dos rectángulos de iguales bases y alturas son iguales.*

Pues colocándolos de suerte que las bases coincidan, los rectángulos coincidirán.

Corolarios. 1.º *Dos rectángulos de iguales bases son directamente proporcionales á sus alturas.*

Pues del teorema anterior se deduce que si la altura del uno es doble de la altura del otro, el primer rectángulo es doble del segundo (Arit. 258.)

2.º *Dos rectángulos de igual altura son directamente proporcionales á sus bases.*

Pues tomando las alturas por bases, estaremos en el caso anterior.

3.º *Dos rectángulos cualesquiera son directamente proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas.*

En efecto, sean a y b la altura y base del primero R; a' y b' las del segundo R' digo que $\frac{R}{R'} = \frac{a \times b}{a' \times b'}$.

En efecto, construyo un tercer rectángulo R'' con la base b del primero y la altura a' del segundo.

Los dos rectángulos R y R'', que tienen la misma base, nos dán $\frac{R}{R''} = \frac{a}{a'}$ y los R'' y R', que tienen la misma altura, $\frac{R''}{R'} = \frac{b}{b'}$; y multiplicando estas dos igualdades tendremos, $\frac{R \times R''}{R' \times R''} = \frac{a \times b}{a' \times b'}$ ó sea $\frac{R}{R'} = \frac{a \times b}{a' \times b'}$.

147. *El área del rectángulo es igual al producto de su base por su altura.*

Sea R un rectángulo, b su base y a su altura. Sea C un cuadrado de lado l. Tendremos, con arreglo al principio anterior, $\frac{R}{C} = \frac{a \times b}{l^2}$.

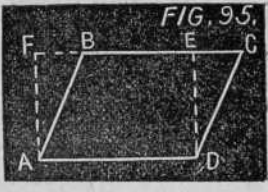
Ahora bien, si C es el cuadrado unidad, el primer miembro representa la razón del rectángulo que se quiere medir al cuadrado que se toma por unidad, ó sea el área del rectángulo, y como $l = 1$ en este caso, resulta que el área del rectángulo es igual al producto de su base por su altura.

COROLARIO. *El área del cuadrado es la segunda potencia de su lado.*

Puesto que el cuadrado es un rectángulo de igual base y altura.

ESCOLIO. Por esta razón se llama *cuadrado* á la segunda potencia.

148. *El área del paralelógramo es igual al producto de su base por su altura.*



Sea el paralelógramo A B C D. Por los vértices A y D levanto perpendiculares á su base A D y prolongo C B hasta que encuentre á A F. Los dos triángulos A F B y D E C son iguales (93). Ahora bien, si del trapecio total resto el triángulo A F B, queda el paralelógramo ABCD; y si del mismo trapecio resto el triángulo D E C, queda el rectángulo A D E F; luego el paralelógramo y el rectángulo son equivalentes, y como el área del rectángulo es el producto de su base por su altura, y los dos tienen las mismas bases y alturas, esa será también el área del paralelógramo.

Escolio. La equivalencia del paralelógramo y el rectángulo permite extender al primero los principios (146) demostrados para el segundo.

149. *El área del triángulo es la mitad del producto de su base por su altura.*

Pues un triángulo es mitad de un paralelógramo de su misma base y altura.

Escolio. Por esta razón son también aplicables al triángulo los principios demostrados en el num. 146.

150. *El área del trapecio es igual al producto de la altura por la semi-suma de sus bases.*

Pues trazando una diagonal queda descompuesto en dos triángulos que tienen la misma altura que el trapecio, y por bases las del mismo trapecio.

Escolio. *El área del trapecio es igual á la altura por la paralela media* (118).

151. *El área de un polígono regular es igual á la mitad del producto del perímetro por la apotema.*

En efecto, trazando los radios, quedará descompuesto el polígono en triángulos iguales. El área de uno de estos triángulos es $\frac{1}{2} l\, a$, llamando l al lado del polígono y a á la apotema; luego el area del polígono será:

$$\frac{1}{2} l\, a \times n = \frac{1}{2} l\, n \times a,$$

conforme al enunciado.

152. El área de un polígono cualquiera se obtiene descomponiéndole en triángulos, hallando sus áreas y sumándolas.

XXXI.

PROBLEMAS RELATIVOS Á LAS ÁREAS DE LOS POLÍGONOS.

---

153. I. *Dado un rectángulo, construir otro equivalen-*

te sobre una recta dada como lado. Hállese la cuarta proporcional á la recta dada y á la base y altura del rectángulo, y será el otro lado del pedido.

II. *Construir el cuadrado equivalente á un rectángulo dado.*

El lado del cuadrado que se pide será la media proporcional entre la base y altura del rectángulo.

III. *Construir un rectángulo equivalente á un cuadrado dado, y tal que la suma de sus dos lados sea igual á una recta dada.*

FIG. 96.

Sea A B la recta dada. Considerándola como diámetro, tracemos una semi-circunferencia; en su extremo B, levanto la perpendicular B C igual al lado del cuadrado dado, tiro C D paralela á A B y por el punto E, la E F perpendicular á A B. Los dos segmentos A F y F B serán los lados del rectángulo. Pues su suma es igual á A B y su producto al cuadrado de E F (79, cor.)

IV. *Hallar el cuadrado equivalente á un paralelógramo.*

Hállese la media proporcional entre la base y altura del paralelógramo.

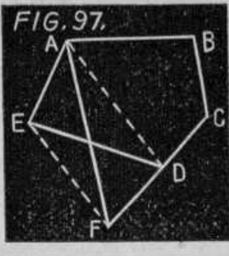
V. *Hallar el cuadrado equivalente á un triángulo.*

Basta hallar la media proporcional entre la base y la mitad de la altura ó viceversa.

VI. *Convertir un polígono en otro equivalente que tenga un lado menos.*

Sea el polígono A B C D E. Trazo la diagonal A D que forma uno de los triángulos exteriores A E D del polígono. Por el punto E trazo E F paralela á la diagonal, hasta que encuentre á la prolongación de C D, uno F con A y el polígono A B C F es el pedido.

FIG. 97.



En efecto, los triangulos E A D y F A D tienen la misma base A D; y los vértices E y F en una paralela á la base, es decir, la misma altura, luego son equivalentes,

Añadiéndoles A B C D, resulta que A B C D E es equivalente á A B C F.

VII. *Convertir un polígono en cuadrado equivalente.* Se reduce á otro de un lado menor las veces necesarias para convertirle en triángulo y se cuadra éste.

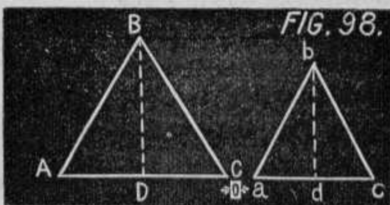
XXXII.

COMPARACIÓN DE LAS AREAS DE LOS POLÍGONOS.

154. *Las áreas de dos triángulos semejantes son directamente proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos.*

Sean los triángulos semejantes A B C y *a b c*.

FIG. 98.



Tendremos $ABC = \frac{1}{2} AC \times BD$ y

$abc = \frac{1}{2} ac \times bd$; luego $\frac{ABC}{abc} = \frac{AC \times BD}{ac \times bd}$.

Pero los triángulos BDC y bdc son también semejantes y, por tanto, $\frac{BD}{bd} = \frac{BC}{bc}$ y como, por hipótesis, $\frac{BC}{bc} = \frac{AC}{ac}$ resulta $\frac{BD}{bd} = \frac{AC}{ac}$; de donde

$$\frac{ABC}{abc} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{ac}^2}$$

155. *Las áreas de dos polígonos semejantes son directamente proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos.*

Sean P y p los polígonos dados, que descompondremos en triángulos semejantes y semejantemente dispuestos, que llamaremos $T, T', T''.....$ y $t, t', t''.....$; sean L y l dos lados homólogos cualesquiera, tendremos (154)

$$\frac{T}{t} = \frac{L^2}{l^2}; \quad \frac{T'}{t'} = \frac{L^2}{l^2}; \quad \frac{T''}{t''} = \frac{L^2}{l^2}; \;.....;$$

de donde (Arit. 165)

$$\frac{T + T' + T'' + ...}{t + t' + t'' + ...} = \frac{L^2}{l^2}; \text{ ó sea } \frac{P}{p} = \frac{L^2}{l^2}.$$

COROLARIO. *Las áreas de dos polígonos regulares semejantes son directamente proporcionales á los cuadrados de sus radios y de sus apotemas.*

Pues los radios y las apotemas son directamente proporcionales á los lados de sus polígonos.

156. *Dos triángulos que tengan un ángulo igual ó suplementario, son directamente proporcionales á los productos de los lados que forman dicho ángulo.*

Sean los triángulos ABC y EBD, (fig. 99) que tienen el ángulo B comun, digo que $\frac{ABC}{EBD} = \frac{AB \times BC}{EB \times BD}$.

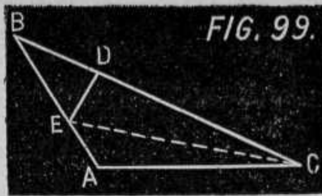


FIG. 99.

En efecto, tracemos la E C. Los triángulos A B C y E B C que tienen las bases A B y B E en línea recta, y el vértice C común, tienen la misma altura, luego serán proporcionales á sus bases y nos darán $\frac{A\,B\,C}{E\,B\,C} = \frac{A\,B}{E\,B}$.

Los triángulos E B C y E B D, por la misma razón, nos dán $\frac{E\,B\,C}{E\,B\,D} = \frac{B\,C}{B\,D}$ y multiplicando estas dos igualdades, y simplificando,

$$\frac{A\,B\,C}{E\,B\,D} = \frac{A\,B \times B\,C}{E\,B \times B\,D}.$$

157. *El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual á la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.*

Digo que B C D E = A C H I + A B L M.

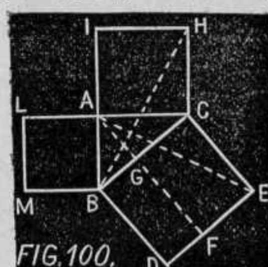


FIG. 100.

En efecto, trazo A G perpendicular á la hipotenusa y la prolongo hasta F; uno A con E y B con H.

El triángulo B C H es mitad de! cuadrado A C H I por tener igual base C H é igual altura.

El triángulo A C E es mitad del rectángulo G C E F por idéntica razón; y como los dos triángulos B C H y

A C E son iguales (93), resulta que el cuadrado A C H I es equivalente al rectángulo G C E F.

Del mismo modo demostraríamos que el cuadrado A B L M es equivalente al rectángulo B G F D; y como entre los dos rectángulos componen el cuadrado B C E D, resulta demostrado el teorema.

Corolario. *Si sobre los tres lados de un triángulo rectángulo, considerados como lados homólogos, se construyen polígonos semejantes, el polígono construído sobre la hipotenusa es equivalente á la suma de los construídos sobre los catetos.*

En efecto, si representamos estos polígonos por M, N, P, tendremos $\frac{M}{\overline{BC}^2} = \frac{N}{\overline{AC}^2} = \frac{P}{\overline{AB}^2}$, de donde

$\frac{N + P}{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2} = \frac{M}{\overline{BC}^2}$; y como (106)

$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$, resultará $M = N + P$.

XXXIII.

PROBLEMAS RELATIVOS Á LA COMPARACIÓN DE LAS ÁREAS DE LOS POLÍGONOS.

158. I. *Construir un polígono semejante á otro dado y equivalente á otro también dado.*

Supongamos que queremos construir un polígono semejante á P y equivalente á Q.

Hallaremos los lados c y q de los cuadrados equivalentes á P y Q.

Enseguida la cuarta proporcional á c, q y un lado p del polígono P. El polígono construído sobre esta cuarta proporcional, considerada como lado homólogo de p, semejante á P, será el pedido.

Pues tenemos $\frac{c}{q} = \frac{p}{x}$; de donde $\frac{c^2}{q^2} = \frac{p^2}{x^2}$ y también $\frac{P}{X} = \frac{p^2}{x^2}$; luego tendremos $\frac{P}{X} = \frac{c^2}{q^2}$ y como $P = c^2$, también $X = q^2$.

II. *Construir un polígono semejante á otros dos dados y equivalente á su suma.*

Sobre dos lados homólogos de los propuestos, considerados como catetos, se construye un triángulo rectángulo, y la hipotenusa será el lado homólogo del polígono buscado.

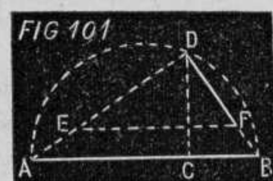
De modo análogo se hallará el polígono semejante y equivalente á la diferencia de los propuestos.

III. *Construir un polígono doble de otro.*

Se resuelve como el anterior, tomando los dos catetos iguales á un lado cualquiera del polígono dado.

IV. *Construir un polígono semejante á otro dado, y tal que sus áreas estén en la relación* m : n.

FIG 101



Sobre una recta indefinida tomo $AC = m$ y $CB = n$ y sobre AB como diámetro describo una circunferencia. Levanto en C, la CD perpendicular al diámetro y uno D con *A* y *B*. Tomo sobre DA, prolongada si fuera preciso, una parte DE igual á un lado del polígono dado; trazo EF paralela á AB, y DF será el lado homólogo del polígono pedido. En efecto, tenemos por construcción,

$\frac{P}{X} = \frac{\overline{DE}^2}{\overline{DF}^2}$ y también (99) $\frac{DE}{DF} = \frac{DA}{DB}$, de donde $\frac{\overline{DE}^2}{\overline{DF}^2} = \frac{\overline{DA}^2}{\overline{DB}^2}$; pero (108, 3.º) $\frac{\overline{DA}^2}{\overline{BB}^2} = \frac{m}{n}$, luego

$\frac{\overline{DE}^2}{\overline{DF}^2} = \frac{m}{n}$; y comparando esta proporción con la primera, $\frac{P}{X} = \frac{m}{n}$.

XXXIV.

POLÍGONOS INSCRIPTOS Y CIRCUNSCRIPTOS.

159. Se dice que un polígono está *inscripto* en un círculo, ó que el círculo está *circunscripto* al polígono, cuando todos los lados del polígono son cuerdas de la circunferencia.

Se dice que un polígono está *circunscripto* á un círculo, ó que el círculo está *inscripto* en el polígono, cuando todos sus lados son tangentes á la circunferencia.

160. *Todo triángulo puede inscribirse y circunscribirse al círculo.*

En efecto, hemos demostrado (49) que los tres vértices del triángulo determinan una circunferencia.

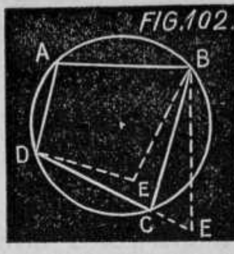
Y también (26, cor. 2.º) que la intersección de las bisectrices de los tres ángulos de un triángulo equidista de los tres lados.

Corolarios. 1.º *Las perpendiculares en los puntos medios de los lados de un triángulo, concurren en un punto, que es el centro del círculo circunscripto.*

2.º *Las bisectrices de los ángulos de un triángulo, concurren en un punto, que es el centro del círculo inscripto.*

161. *Para que un cuadrilátero pueda inscribirse en un círculo, es necesario y suficiente que sus ángulos opuestos sean suplementarios.*

En efecto, (fig. 102) si el cuadrilátero A B C D está inscripto en el círculo, sus ángulos A y C, inscriptos y que comprenden toda la circunferencia entre sus lados, serán suplementarios.

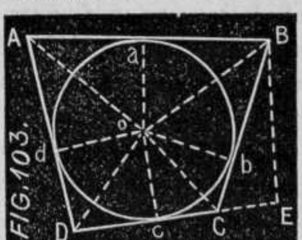


Además, otro cuadrilátero A B E D, que tuviera su vértice dentro ó fuera de la circunferencia, tendría el ángulo E mayor ó menor que C (73, 75 y 76). luego no sería suplemento de A.

Corolarios. *Para que un paralelógramo pueda inscribirse en un círculo, es necesario y suficiente que sea rectángulo.*

Sin lo cual no cumplirían la condición anterior, puesto que sus ángulos opuestos son iguales.

162. *Para que un cuadrilátero pueda circunscribirse al círculo, es necesario y suficiente que las sumas de sus lados opuestos sean iguales.*



Sea el cuadrilátero A B C D circunscripto á un círculo, digo que A B + D C = A D + B C.

En efecto, los triángulos iguales A *o a* y A *o d* nos dán, A *a* = A *d*; y por la misma razón, B *a* = B *b*, C *c* = C *b*, *c* D = D *d*; y sumando ordenadamente, resulta: A B + C D = B C + A D.

Por el contrario, el cuadrilátero A B E D, que tiene un lado B E exterior á la circunferencia, nos daría, trazando B C, $AB + CD = AD + BC$ y añadiendo á los dos miembros C E, $AB + DE = AD + BC + CE$; pero $BC + CE > BE$, luego $AB + DE > AD + BE$.

COROLARIO. 1.º *Para que un paralelógramo pueda circunscribirse al círculo, es necesario y suficiente que sea rombo.*

Pues no satisfaría la condición anterior si sus lados no fueran iguales.

2.º *El único cuadrilátero que puede inscribirse y circunscribirse al círculo, es el cuadrado.*

Pues es el único que satisface á las dos condiciones.

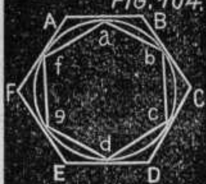
163. *Todo polígono regular puede inscribirse y circunscribirse al círculo.*

Pues el centro del polígono regular (142) equidista de los vértices y de los lados.

COROLARIO. *El radio y la apotema de un polígono regular son los radios respectivos de su círculo circunscripto é inscripto.*

164. *Si se divide una circunferencia en tres ó más arcos iguales: 1.º Las cuerdas de estos arcos formarán un polígono regular inscripto. 2.º Las tangentes en los puntos de división, formarán un polígono regular circunscripto.*

FIG. 104.



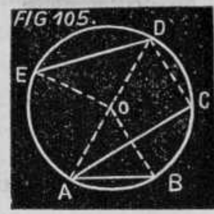
En efecto, el polígono inscripto que resulta en el primer caso, tiene todos sus lados iguales (51, 1.º) y todos sus ángulos iguales (73, cor. 1.º); y en el segundo, evidentemente circunscripto, la igualdad de los triángulos B a b, C b c, D d c, etc., nos dá B = C = D = ...; y además, B b + b C = C c + c D = D d + d E = ... ; ó sea, B C = C D = D E = ...

XXXV.

VALORES DE LOS LADOS DE ALGUNOS POLÍGONOS REGULARES.

El lado del exágono regular inscripto en un círculo, es igual al radio.

FIG 105.



Pues si suponemos que A B es un lado del exágono regular inscripto, trazando los radios o A y o B, el triángulo A o B es evidentemente isósceles, luego A = B. Pero (144) $A\,o\,B = \frac{4\,R}{6} = \frac{2}{3}\,R$, luego $A + B =$ $= \frac{4}{3}\,R$, y como son iguales, $A = B = \frac{2}{3}\,R$. Luego el triángulo A o B es equilátero.

166. *El lado del triángulo equilátero es igual á $R\sqrt{3}$.*

En efecto, siendo A C el lado del triángulo equilátero y trazando D C, resulta el triángulo A C D rectángulo en C, que nos dá:

$$AC = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{DC}^2} = \sqrt{4\,R^2 - R^2} = \sqrt{3\,R^2} = R\sqrt{3}.$$

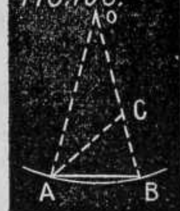
167. *El lado del cuadrado es igual á* R $\sqrt{2}$.

En efecto, (fig. 105) si D E es el lado del cuadrado, el triángulo E *o* D será rectángulo en *o*, y nos dará,

$$ED = \sqrt{\overline{Eo}^2 + \overline{oD}^2} = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}.$$

168. *El lado del decágono regular es igual á la parte mayor del radio dividido en med-a y extrema razón.*

FIG. 106.



Supongamos que A D es el lado del decágono regular.

Trazo los radios O A y O B y la bisectriz A C del ángulo A.

En el triángulo A O B (111) tendremos $\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CB}$.

$$\text{Pero } AOB = \frac{4R}{10} = \frac{2}{5}R,$$

$$\text{luego } OAB + OBA = \frac{8}{5}R,$$

$$\text{de donde } OAB = OBA = \frac{4}{5}R.$$

$$\text{Por consiguiente, } OAC = CAB = \frac{2}{5}R.$$

Luego el triángulo A O C es isósceles, y, por tanto, O C = C A.

Pero en el triángulo A C B, hemos visto que

$CAB = \frac{2}{5}R$ y $ABC = \frac{4}{5}R$; luego $ACB = \frac{4}{5}R$, es decir que es isósceles también, y nos dá, C A = A B; y, por tanto, O C = C A = A B.

Luego, sustituyendo en la proporción en vez de A B, su valor O C, y en vez de A O su igual O B, resultará: $\frac{OB}{OC} = \frac{OC}{CB}$. Lo que nos dice que el radio está dividido en C en media y extrema razón y que su parte mayor O C es igual al lado del decágono.

XXXVI.

PROBLEMAS RELATIVOS Á LOS POLÍGONOS INSCRIPTOS Y CIRCUNSCRIPTOS.

169. I. *Inscribir y circunscribir un cuadrado en un círculo.*

Trácense dos diámetros perpendiculares y únanse sus extremos, y se tendrá el cuadrado inscripto.

En los extremos de los dos diámetros trácense tangentes, y resultará el cuadrado circunscripto.

II. *Inscribir y circunscribir un exágono regular.*

Llévese el radio sobre la circunferencia seis veces, y uniendo los puntos de división (165) resultará el exágono inscripto.

Las tangentes en los mismos puntos formarán el exágono circunscripto.

III. *Inscribir y circunscribir un triángulo equilátero.*

Llévese el radio sobre la circunferencia, únanse cada dos puntos de división, y se tendrá el triángulo inscripto.

Las tangentes en los mismos tres puntos formarán el triángulo equilátero circunscripto.

IV. *Inscribir y circunscribir á un círculo un decágono regular.*

Llévese la parte mayor del radio dividido en media y extrema razón (84, 2.°) sobre la circunferencia y quedará dividida en diez arcos iguales. Las cuerdas de estos arcos formarán el decágono regular inscripto (168), y las tangentes en sus vértices el decágono regular circunscripto.

V. *Inscribir y circunscribir á un círculo un pentágono regular.*

Hecha la construcción del problema anterior, es evidente que uniendo cada dos vértices resultará el pentágono regular inscripto.

Las tangentes en sus vértices formarán el circunscripto.

VI. *Inscribir y circunscribir á un círculo un pentedecágono regular.*

Observando que $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$, se deduce que bastará llevar sobre la circunferencia la diferencia entre el arco del exágono y el del decágono regular, para que quede dividida en 15 partes iguales.

Las cuerdas de estos arcos, y las tangentes en estos puntos, formarán respectivamente el pentedecágono regular inscripto y el circunscripto.

VII. *Inscribir y circunscribir un círculo á un polígono regular.*

Desde el centro del polígono, con un radio igual á la apotema ó al radio del mismo, (142) descríbase una circunferencia, y quedará resuelto el problema.

VIII. *Construir un exágono regular, dada la longitud de su lado.*

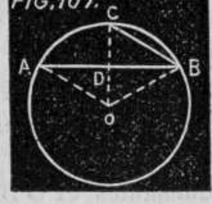
Con esa longitud por radio se describe una circunferencia y el exágono en ella inscripto será el pedido. (165)

XXXVII.

RELACIONES ENTRE LADOS Y PERÍMETROS DE POLÍGONOS REGULARES INSCRIPTOS Y CIRCUNSCRIPTOS.

170. *Conocido el valor del lado del polígono regular inscripto en un círculo, hallar el valor del lado del polígono regular inscripto de doble número de lados.*

FIG. 107.



Sea $AB = l$, el valor del lado conocido, y $BC = x$ el del lado que se busca. El ángulo COB será agudo, como mitad del AOB, y el triángulo COB (109) nos dará,

$$\overline{CB}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{OB}^2 - 2\,OC \times OD,$$
$$\text{ó sea } x^2 = 2\,r^2 - 2\,r \times OD.$$

Pero en el triangulo ODB,

$$OD = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{DB}^2} = \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}};$$

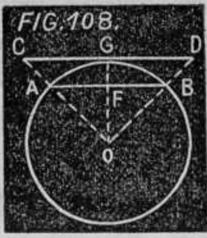
por consiguiente,

$$x^2 = 2\,r^2 - 2\,r\sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}};$$

y, por último,

$$x = \sqrt{2\,r^2 - 2\,r\sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}}\,.$$

171. *Conocido el lado del polígono regular inscripto en un círculo, hallar el lado del polígono semejante circunscripto.*



Sea $AB = l$, el lado conocido del polígono inscripto.

Trazo el radio O G perpendicular á A B, la tangente C D en el punto G, y los radios O A y O B prolongados hasta que encuentren á la tangente. $CD = x$, será el lado pedido.

Los triángulos semejantes A O B y C O D (149, escolio), nos dán,

$$CD : AB :: OG : OF; \text{ ó sea } x : l :: r : OF.$$

Y en el triángulo O F B,

$$OF = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{FB}^2} = \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}};$$

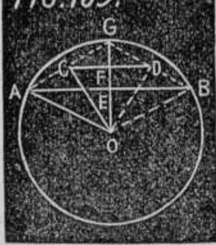
por consiguiente,

$$x : l :: r : \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}};$$

$$\text{de donde } x = \frac{l\,r}{\sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}}.$$

172. *Conocido el radio y la apotema de un polígono regular, hallar el radio y la apotema del polígono isoperímetro de doble número de lados.*

FIG. 109.



Sea A B el lado del primer polígono, O A $= r$, y O E $= a$, su radio y apotema conocidos.

Trazando O G perpendicular á A B, las cuerdas A G y B G, y uniendo los puntos medios de estas cuerdas, C D será el lado del polígono isoperímetro de doble número de lados y O C $= r'$ y O F $= a'$, el radio y apotema pedidos.

Tenemos evidentemente O F $=$ O G $-$ F G y O F $=$ O E $+$ F E. Sumando ordenadamente estas dos igualdades, y observando que por construcción F G$=$F E, resulta 2 O F $=$ O G $+$ O E; ó sea

$$2\,a' = r + a;\ \text{de donde } a' = \frac{r + a}{2}.$$

Además, el triángulo rectángulo O C G nos dá (105) $\overline{OC}^2 = OG \times OF$; ó sea $r'^2 = r \times a'$; de donde $r' = \sqrt{r\,a'}$.

XXXVIII.

MEDIDA DE LA CIRCUNFERENCIA.

173. Siendo la unidad lineal rectilínea no es posible aplicarla directamente á la medición de la circunferencia, pero podremos obviar esta dificultad hallando su relación con una recta de longitud conocida.

De esta suerte se consigue medir la circunferencia, fundados en los siguientes principios.

174. *La circunferencia es mayor que el perímetro de cualquier polígono inscripto, y menor que el de cualquier polígono circunscripto.*

Con arreglo á lo demostrado en el núm. 15.

175. *La circunferencia es el límite superior de los perímetros de los polígonos regulares inscriptos, y el límite inferior de los perímetros de los circunscriptos.*

En efecto, á medida que el número de lados de un polígono regular inscripto aumenta, su perímetro se aproxima á la circunferencia; y cuando el número de sus lados sea infinitamente grande se confunde con ella.

Por análogas consideraciones, podemos considerar la circunferencia como el límite de los perímetros de los polígonos regulares circunscriptos, cuando el número de sus lados aumenta indefinidamente.

176. *Dos circunferencias cualesquiera son directamente proporcionales á sus radios.*

En efecto, sean C y C′ dos circunferencias; R y R′ sus radios, P y P′ los perímetros de dos polígonos regulares inscriptos del mismo número de lados, tendremos (140)

$\frac{P}{R} = \frac{P'}{R'}$; ó pasando á los límites (Arit. 197) $\frac{C}{R} = \frac{C'}{R'}$.

Corolario. *La razón de la circunferencia al diámetro es un número constante.*

Pues dividiendo los dos miembros de la igualdad anterior por 2, resulta $\frac{C}{2R} = \frac{C}{2R'}$, que nos prueba que esa razon es la misma para todas las circunferencias.

Escolio. Esta razón constante de la circunferencia al diámetro se expresa por la letra griega π; es un número incomensurable, pero se puede obtener su valor con la aproximación que se necesite.

La igualdad $\frac{C}{2R} = \pi$; nos dá $C = 2\pi R$, fórmula importante y de uso contínuo en Geometría, por expresar la longitud de la circunferencia.

177. *Calcular la razón π de la circunferencia al diámetro.*

La fórmula $\pi = \frac{C}{2R}$, nos indica los dos caminos que podemos seguir para hallar dicha razón; ó suponer conocido el valor del radio, y deducir de él el de la circunferencia; ó suponer conocida la circunferencia, y deducir el valor del radio.

El primer procedimiento se conoce con el nombre de *método de los perímetros*; el segundo, *con el de método de los isoperímetros.*

178. *Método de los perímetros.*

Si en la fórmula anterior hacemos $R = 1$, resulta $\pi = \frac{C}{2}$. Es decir que el valor de π, en la circunferencia cuyo radio es uno, es la longitud de la semi-circunferencia, que sabemos (175) es el límite superior del semi-perímetro de los polígonos regulares inscriptos, y el inferior del de los circunscriptos.

Como en la circunferencia de que se trata conocemos el lado del exágono igual á uno, deduciremos (170) de ahí los valores de los lados de los polígonos de 12, 24, 48, 96..... lados; y de estos (171) los valores de los lados de los polígonos correspondientes circunscriptos. Luego conoceremos los semi-perímetros de todos los polígonos, y como la longitud de la semi-circunferencia está comprendida entre el valor del semi-perímetro inscripto y el del circunscripto, tomando las cifras comunes á estos dos valores, tendremos el valor de π.

De esta suerte halló Arquímedes $\pi = \frac{22}{7}$; y posteriormente Mecio $\pi = \frac{355}{113}$, con un error menor que media millonésima.

179. *Método de los isoperímetros.*

Si en la fórmula $\pi = \frac{C}{2R}$, hacemos $C = 2$, resulta $\pi = \frac{1}{R}$, de donde $R = \frac{1}{\pi}$, que nos indica que el valor de $\frac{1}{\pi}$ es igual al radio de la circunferencia cuya longitud es 2.

Si pues calculamos el valor del radio y de la apotema del cuadrado cuyo lado es $\frac{1}{2}$, ó sea su perímetro igual á 2, y seguimos calculando (172) los radios y apotemas de los polígonos isoperímetros de 4, 8, 16..... lados, tendremos dos valores aproximados, uno por exceso y otro por defecto del radio buscado, puesto que las dos circunferencias inscriptas y circunscriptas á dichos polígonos son una mayor y otra menor que 2.

Siguiendo este procedimiento se obtiene $\pi = 3{,}141592$ con un error menor que una millonésima.

180. *Las longitudes de los arcos de la misma graduación en circunferencias diferentes, son directamente proporcionales á los radios.*

Sea l la longitud del arco de n^0 en la circunferencia de radio r.

Sea l' la longitud del arco de n^0 en la circunferencia de radio l'; digo que $\frac{l}{l'} = \frac{r}{r'}$.

En efecto, la longitud del arco de $180^0 = \pi r$; luego la del arco de $1^0 = \frac{\pi r}{180}$; y la del arco de n grados será $l = \frac{\pi r n}{180}$. Por la misma razón, tendremos $l' = \frac{\pi r' n}{180}$; y dividiendo estas dos igualdades, $\frac{l}{l'} = \frac{r}{r'}$.

XXXIX.

ÁREAS CIRCULARES.

181. Se llama *sector circular ó sector de círculo* la porción de círculo comprendido entre dos radios y el arco.

De modo análogo al empleado (71), demostraríamos que en el mismo círculo ó en círculos iguales:

1.º *Si dos sectores tienen arcos iguales, son iguales.*

2.º *Dos sectores cualesquiera son directamente proporcionales á sus arcos correspondientes.*

182. Se llama *sector poligonal regular* la porción de polígono regular comprendido entre dos radios y la línea quebrada regular.

El área de un *sector poligonal regular es igual á la mitad del producto de su apotema por la línea quebrada regular.*

Pues es la suma de varios triángulos que tienen por altura comun la apotema y por bases los lados de la línea quebrada.

183. *El área de un sector circular es igual á la mitad del producto de su arco por el radio.*

Pues el sector circular puede mirarse como un sector polígonal, cuya línea quebrada tiene infinitos lados.

184. *El área del círculo es igual á la mitad del producto de la circunferencia por el radio.*

Pues el círculo (175) puede considerarse como un polígono regular de infinito número de lados.

Corolario. *Las áreas de dos círculos son directamente proporcionales á los cuadrados de sus radios.*

Pues llamando A y A' á las áreas de dos círculos; C y C' á sus circunferencias, y R y R' á los radios respectivos, tendremos $A = \frac{1}{2} C R$; $A' = \frac{1}{2} C' R'$; de donde

$\frac{A}{A'} = \frac{C\,R}{C'\,R'}$. Pero $\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'}$ (176); luego $\frac{A}{A'} = \frac{R^2}{R'^2}$

185. Se llama *segmento circular* ó *segmento de círculo* la porción de círculo comprendido entre un arco y su cuerda correspondiente.

Como el segmento circular es la diferencia entre el sector y el triángulo formado por los radios y la cuerda, se hallará su área restando las áreas del sector y del triángulo.

186. Se llama *corona* la porción de círculo comprendido entre dos circunferencias concéntricas

Su área será la diferencia de las áreas de los dos círculos.

187. *Trapecio circular*, es la porción de corona comprendida entre dos radios.

Su área será la diferencia de las áreas de los dos sectores, cuyos arcos son las bases del trapecio.

Geometrìa del Espacio.

XL.

PROPIEDADES DE LA RECTA Y EL PLANO EN EL ESPACIO.

188. Hemos dicho que (8) *superficie plana* ó *plano* es la superficie á que se adapta perfectamente una recta en cualquier sentido que se coloque.

De aquí se infiere:

1.° *Que una recta y un plano que tienen dos puntos comunes, coinciden en toda su extensión.*

Puesto que dos puntos determinan la posición de una recta.

2.° *Una recta exterior á un plano solo puede tener un punto comun con el plano.*

Pues si tuviera dos, estaría en el plano.

3.° *La intersección de una recta y un plano es un punto.*

Único que puede tener comun.

Cuando la recta corta al plano, el punto de intersección se llama *pié* de la recta sobre el plano.

Cuando no tienen punto alguno comun, la recta y el plano se llaman *paralelos*.

189. *Tres puntos que no están en línea recta determinan la posición de un plano*; es decir, que por tres puntos no en línea recta, puede pasar un plano, pero nada más que uno.

Sean A, B y C los tres puntos.

Los dos puntos A y B determinan la línea recta A B, y por esta recta siempre puede pasar un plano, que girando alrededor de A B, pasará por todos los puntos del espacio, y, por consiguiente, llegará un momento en que pase por C. Luego por los tres puntos pasa un plano.

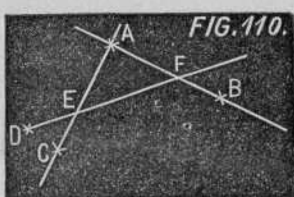


FIG. 110.

Además, si pasara otro plano por estos tres puntos, las dos rectas A B y A C estarían también en él (188, 1.º); y suponiendo que D fuera un punto del segundo plano, trazando la D F que corte á las dos A B y A C, este punto estaría también en el primer plano, puesto que la D F lo estaría, por tener en él los puntos E y F. Luego si todo punto del segundo plano lo es también del primero, los dos planos no forman más que uno solo.

Corolarios. 1.º *Por un punto pueden pasar infinitos planos.*

Pues este punto y otros dos cualesquiera del espacio determinan un plano.

2.º *Por una recta pasan infinitos planos.*

Pues la recta y cada punto del espacio determinan un plano.

3.º *Un plano queda determinado*: 1.º *por una recta y un punto exterior*; 2.º *por dos rectas que se cortan*; 3.º *por dos rectas paralelas*; 4.º *por un arco de círculo.*

Pues siempre resulta determinado por tres puntos no en línea recta.

4.° *La intersección de dos planos es una línea recta.* Sin lo cual tendrían comunes tres puntos no en línea recta.

190. De estos principios se deduce que un plano puede considerarse engendrado: 1.° por una recta móvil que pasando siempre por un punto fijo, recorra todos los puntos de otra recta fija; 2.° por una recta móvil que recorra constantemente todos los puntos de dos rectas fijas; 3.° por una recta móvil que recorra todos los puntos de dos rectas paralelas; 4.° por una recta que se mueva paralelamente á sí misma, recorriendo todos los puntos de una recta fija ó de un arco de círculo. En todos los casos, la recta móvil se llama *generatriz,* y las rectas ó puntos fijos, se llaman *directrices.*

191. El plano por su naturaleza es ilimitado, como lo es la línea recta que contiene en toda su extensión. Se diferencian, pues, tan solo por su posición en el espacio.

En geometría, y en la necesidad de representarlo, se indica por un paralelógramo y se lee con dos letras de vértices opuestos.

192. Dos rectas en el espacio pueden estar situadas en el mismo plano ó en planos distintos. En el primer caso, se cortan ó son paralelas; en el segundo, se dice que se *cruzan.*

El ángulo de dos rectas que se cruzan, se apreeia por el formado por una de ellas y una paralela á la otra por uno de sus puntos.

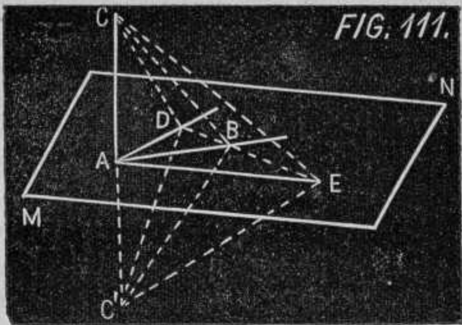
XLI.

RECTAS PERPENDICULARES Y OBLÍCUAS AL PLANO.

193. Una recta y un plano se encuentran ó no se en-

cuentran. En el primer caso, la recta puede ser *perpendicular* ú *oblícua* al plano.

En el segundo, es *paralela* al plano.



Se dice que una recta es perpendicular á un plano, cuando lo es á todas las rectas situadas en el plano.

En el caso contrario, se dice que la recta es *oblícua al plano.*

194. *Si una recta es perpendicular á otras dos que pasan por su pié en un plano, es también perpendicular á todas las que pasan por su pié en dicho plano.*

Digo que si C A es perpendicular á A D y A E, lo será también á cualquier otra A B que pase por A, en el plano M N.

En efecto, trazo una secante D E que corte á las tres A D, A E y A B; prolongo C A, tomo C' A = C A, y uno los puntos C y C' con los D, B y E.

Los triángulos rectángulos C A D y C' A D, C A E y C' A E iguales, nos dan C D = C' D; C E = C' E. Luego los triángulos C D E y C' D E son iguales, y por tanto los ángulos C D B y C' D B también lo serán, de donde se deduce que los triángulos C D B y C' D B son iguales; por consiguiente, C B = C' B. La recta A B, tiene, pues, dos puntos A y B equidistantes de C y C', luego es perpendicular á C C'.

COROLARIO. *Todas las perpendiculares á una recta en uno de sus puntos, están en un mismo plano.*

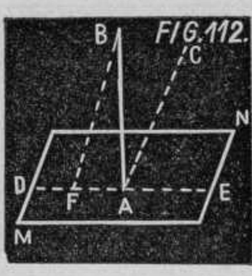
Pues haciendo pasar por dos de ellas A D y A E un plano M N, el plano C A B cortará á este plano segun una perpendicular á C A, puesto que ésta lo es á las A D y A E, luego esa intersección será A B (18).

194. *Un punto determina la recta perpendicular al plano.*

Es decir, por un punto puede trazarse una recta perpendicular á un plano, pero solamente una.

Distinguiremos dos casos: 1.º que el punto esté en el plano; 2.º que sea exterior al plano.

1.º En efecto, siempre podremos trazar por el punto A, una perpendicular A B á dos rectas situadas en el plano M N que, segun hemos visto, será perpendicular al plano.



Además, otra cualquiera A C determinará con la A B un plano, que cortará al M N segun una recta D E; y como A B es perpendicular al plano, lo será á D E y, por tanto, (18) A C será oblicua á D E, y por consiguiente al plano M N.

2.º Si el punto B es exterior al plano, siempre podremos bajar desde él una perpendicular B A á dos rectas situadas en el plano, y, por tanto, será perpendicular al plano.

Además, otra cualquiera B F determinaría con la B A un plano que cortará al M N segun una recta F A. Por ser la B A perpendicular al plano, lo será á la recta F A;

luego la B F será oblícua á esta recta (22) y, por tanto, oblícua al plano.

195. *Si desde un punto exterior á un plano se trazan una perpendicular y varias oblícuas.*

1.º *La perpendicular es menor que cualquier oblícua.*

2.º *Las oblícuas que se apartan igualmente del pié de la perpendicular son iguales.*

3.º *De dos oblícuas, la que se aparte más del pié de la perpendicular es la mayor.*

En efecto: 1.º Siendo A B perpendicular al plano, lo será á la B C, luego A C es oblícua á B C y por consiguiente mayor que A B.

2.º Si B C = B D, los triángulos rectángulos A B C y A B D iguales, nos dan A C = A D.

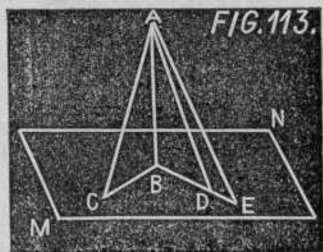


FIG. 113.

3.º Si B E > B C, tomaré B D = B C y tiraré A D. Tendremos A E > A D (24) ó sea A E > A C.

Recíprocos. 1.º *La recta más corta que se puede trazar desde un punto á un plano es la perpendicular al plano.*

2.º *Las oblícuas iguales, se apartan igualmente del pié de la perpendicular al plano.*

3.º *La mayor de dos oblícuas se aparta más del pié de la perpendicular al plano.*

166. Se llama *distancia* de un punto á un plano la perpendicular bajada desde dicho punto al plano.

De lo expuesto se deduce que *el lugar geométrico de* *los piés de las oblícuas iguales, trazadas desde un punto exterior al plano, es la circunferencia situada en dicho plano, y cuyo centro es el pié de la perpendicular bajada desde dicho punto al plano.*

197. *Un punto de una recta determina el plano perpendicular á dicha recta.*

Es decir, que por un punto pasa un plano perpendicular á la recta, pero nada más que uno.

Pueden ocurrir dos casos: 1.º Que el punto esté en la recta. 2.º Que sea exterior á la recta.

1.º Si el punto A está en la recta, siempre podremos trazar por A dos rectas perpendiculares á A B, y el plano M N de estas dos rectas será perpendicular á la recta A B.

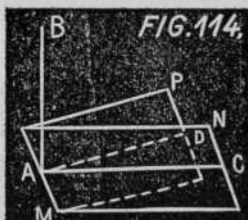


FIG. 114.

Supongamos ahora que por el punto A pasara otro plano M P. Trazando por A B un plano cualquiera, cortará á los dos planos M N y M P, segun las rectas A C y A D. Pero por ser A B perpendicular al plano M N, lo será á la recta A C, luego será oblícua á la A D y por tanto al plano A P.

2.º Si el punto A es exterior á la recta B C, trazan-

FIG. 115.

do por A dos perpendiculares á B C, el plano de estas dos perpendiculares será perpendicular á B C.

Supongamos ahora que por A, trazamos otro plano P Q que corte á B C. Haciendo pasar por B C un plano cualquiera, cortará á los planos M N y P Q segun las rectas A B y A C. Pero por ser M N perpendicular á B C, A B será perpendicular á esta recta B C, luego A C será oblícua y, por tanto, el plano P Q también lo es.

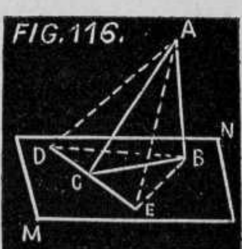
COROLARIOS. 1.º *El lugar geométrico de todas las perpendiculares á una recta, desde un punto cualquiera, es el plano trazado por este punto perpendicular á la recta.*

Pues lo mismo si el punto está en la recta, que si es exterior, toda perpendicular á dicha recta, desde ese punto, está contenida en el plano, segun lo expuesto.

2.º *El lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los extremos de una recta, es el plano perpendicular á esa recta en su punto medio.*

Pues las distancias de cualquier punto del plano á los extremos de la recta son dos oblícuas equidistantes del pié de la perpendicular.

198. *Si desde el pié de una perpendicular á un plano se traza una perpendicular á una recta situada en dicho plano, la recta que une el pié de esta segunda perpendicular con un punto cualquiera de la primera, es también perpendicular á la situada en el plano.*



Sea A B perpendicular al plano M N, y B C perpendicular á la D E situada en el plano M N, digo que A C será perpendicular á D E.

En efecto, tomando C D = C E, y uniendo los puntos A y B con los D y E, tendremos B D = B E (195, 2.º) y por lo tanto, A D = A E luego la recta A C, que tiene los puntos A y C equidistantes de los D y E será perpendicular á D E.

Recíproco. *Si desde un punto exterior á un plano se trazan una perpendicular al plano y una oblicua al mismo, que sea perpendicular á una recta situada en el plano, esta recta será perpendicular á la que une los piés de las dos primeras.*

Pues de A D = A E, se deduce (195. recíp. 2.º) B D = B E; luego B C tiene los dos puntos B y C equidistantes de D E, y por tanto, es perpendicular á D E.

XLII.

RECTAS PARALELAS ENTRE SÍ Y AL PLANO.

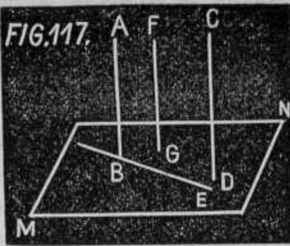
199. *Un punto exterior á una recta, determina una paralela á dicha recta*; es decir, que por ese punto pasa una paralela, pero nada más que una.

En efecto, el punto y la recta determinan un plano y ya sabemos (29) que en dicho plano el punto exterior determina la paralela. Además, otra recta no situada en ese plano no podría ser paralela á la propuesta.

200. *Si dos rectas son paralelas y una de ellas es perpendicular á un plano, la otra también lo será.*

Digo que si A B es perpendicular al plano M N, su paralela C D también lo será.

En efeoto, trazando una recta cualquiera B E en el plano M N, la A B será perpendicular á B E, por serlo al plano, luego su paralela C D también lo será. Y como lo



mismo diríamos de otra cualquiera situada en el plano, resulta que C D es perpendicular á dicho plano.

RECÍPROCO. *Dos rectas perpendiculares á un mismo plano, son paralelas.*

Pues si no lo fueran, por el punto C podríamos trazar una paralela á A B, que sería perpendicular al plano M N, lo que es imposible (194).

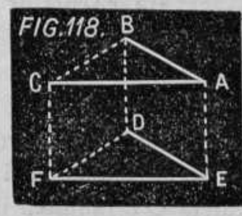
201. *Dos rectas paralelas á una tercera en el espacio, son paralelas entre sí.*

Digo que si A B y C D son paralelas á F G, son paralelas entre sí. Trazo el plano M N perpendicular á A B, y por tanto á su paralela F G; y siéndolo á F G, lo será á su paralela C D.

Siendo A B y C D perpendiculares el plano M N, son paralelas.

202. *Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos son iguales ó suplementos.*

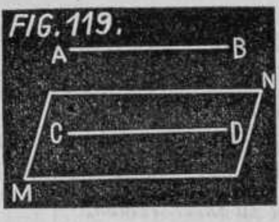
Sean los dos ángulos B A C y D E F, cuyos lados son respectivamente paralelos, y están dirigidos en el mismo sentido; digo que son iguales.



En efecto, tomo A B = E D y A C = E F, y trazo las rectas B C, F D, A E, B D y C F. Por ser A B igual y paralela á E D, A E será igual y paralela á B D (120). Por la misma razón, A E es igual y paralela á C F; luego B D y C F son iguales y paralelas, de donde se deduce que B C y F D también lo serán, luego los triángulos A B C y D F E son iguales (92), y por tanto, los ángulos B A C y D E F también lo serán.

Los otros dos casos se demostrarán como sus análogos del número 34.

203. *Si una recta es paralela á otra situada en un plano, es paralela á este plano, ó está situada en él.*



En efecto, el plano de las dos paralelas A B y C D, ó no tiene con el M N más puntos comunes que los de la recta C D, ó se confunde con él. En el primer caso, la recta A B, no encuentra al plano M N, puesto que es paralela á C D, y por tanto es paralela al plano.

En el segundo caso, A B está en el plano M N.

COROLARIOS. 1.º *Si dos rectas son paralelas, todo plano que pase por una de ellas es paralelo á la otra, ó pasa por esta otra.*

Puesto que ésta es paralela á la primera, situada en el plano.

2.º *Si una recta es paralela á un plano, todo plano que pase por ella corta al primero según una paralela á dicha recta.*

Pues las dos rectas no pueden encontrarse y están en un mismo plano.

204. *Si una recta es paralela á un plano, y por un punto de este plano se traza una paralela á dicha recta, esta paralela estará contenida en ese plano.*

Digo que si A B (fig. 119) es paralela al plano M N, y por el punto C del plano se traza C D paralela á A B, la C D estará en el plano M N.

En efecto, la intersección de los dos planos M N y A B C D tiene que ser paralela á A B; y como un punto C determina la paralela á una recta A B, dicha intersección será C D.

Corolarios. 1.° *Toda paralela á una recta que es paralela á un plano, está en el plano, ó es paralela al plano.*

Pues dicha paralela (201) será paralela á la C D. (203)

2.° *Si dos rectas son paralelas, todo plano paralelo á la una lo será á la otra.*

Puesto que la recta es paralela al plano.

3.° *Si una recta es paralela á dos planos que se cortan, es paralela á su intersección.*

Pues trazando por un punto de la intersección de los dos planos un paralela á esa recta, deberá estar en los dos planos.

205. *Las rectas paralelas comprendidas entre una recta y un plano paralelos, son iguales.*

Pues estas tres rectas forman con la intersección del plano dado y el determinado por las paralelas un paralelógramo.

Corolario. *Una recta y un plano paralelos son equidistantes.*

Pues en este caso, el paralelógramo anterior se convierte en rectángulo.

XLIII.

PLANOS PARALELOS.

206. *Se llaman planos paralelos los que, prolongados indefinidamente, nunca se encuentran.*

Evidentemente, las rectas situadas en uno de estos planos son paralelas al otro.

207. *Dos planos perpendiculares á una recta son paralelos.*

En efecto, si estos planos tuvieran algun punto comun, resultarían trazados dos planos perpendiculares desde dicho punto á la recta, contra lo demostrado (197).

208. *Un punto determina el plano paralelo á otro.*

Es decir, que por un punto, exterior á un plano, pasa un plano paralelo al primero, pero solamente uno.

En efecto, ese punto determina la perpendicular al plano dado, y determina también el plano perpendicular á esta recta, que será paralelo al primero.

209. *Las intersecciones de dos planos paralelos con un tercer plano son paralelas.*

Pues están en el plano secante y no pueden encontrarse por estar situadas en planos paralelos.

COROLARIOS. 1.º *Dos rectas situadas en planos paralelos, serán paralelas siempre que estén en el mismo plano.*

Pues esta es la condición necesaria y suficiente para que sean paralelas.

2.º *Si una recta es perpendicular á un plano, también lo es á todos los planos paralelos al primero.*

Pues siéndolo al primer plano lo será á dos rectas cualesquiera trazadas en él; y también lo será á sus paralelas en esos planos y, por tanto, á esos mismos planos.

3.° *Dos planos paralelos á un tercer plano son paralelos entre sí.*

Pues toda perpendicular al tercer plano, lo será á los dos primeros.

210. *Si dos planos son paralelos, toda recta paralela al uno es paralela al otro, ó está situada en este otro.*

Pues todo plano que pase por esa recta cortará al primer plano segun una recta que será paralela al segundo y también á la recta dada (203, cor. 2.°); por consiguiente, esta recta será paralela al otro plano ó estará situada en él (204, cor. 1.°).

COROLARIOS. 1.° *Si dos rectas que se cortan son paralelas á otras dos que también se cortan, el plano de las dos primeras es paralelo al de las dos segundas.*

Pues cada una de las primeras es paralela al plano de las dos segundas (203).

2.° *El lugar geométrico de todas las paralelas á un plano trazadas por un punto exterior, es el plano paralelo al primero trazado por ese punto.*

211. *Las rectas paralelas comprendidas entre planos paralelos son iguales.*

Pues el plano de las dos paralelas corta á los dos planos dados segun rectas paralelas (209); luego el cuadrilátero formado por las cuatro rectas es un paralelógramo.

COROLARIO. *Dos planos paralelos son equidistantes.*

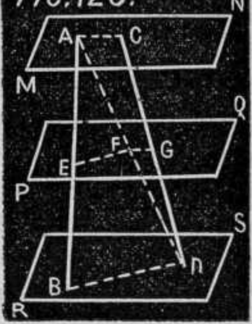
Pues todas las perpendiculares á un plano desde los puntos del otro, son paralelas.

211. *Si tres planos paralelos cortan á dos rectas cualesquiera, las dividen en partes directamente proporcionales.*

Sean las dos rectas A B y C D (fig. 120) cortadas por los tres planos paralelos M N, P Q y R S; digo que $\frac{AE}{EB} = \frac{CG}{GD}$

En efecto, uno los puntos A y D. El plano B A D cortará á los planos paralelos P Q y R S, según las rectas paralelas E F y B D (209). Por la misma razón las intersecciones A C y E G del plano A D C con los planos paralelos M N y P Q serán paralelas.

FIG. 120.



Ahora bien, el ángulo B A D (37, cor. 2.º) nos dá,

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FD} \text{ y por la misma razón } \frac{AF}{FD} = \frac{CG}{GD};$$

de donde, $\frac{AE}{EB} = \frac{EG}{GD}$.

XLIV.

PROYECCIONES.

212. Se llama *proyección* de un punto sobre un plano el pié de la perpendicular bajada desde este punto al plano.

Proyección de una línea cualquiera sobre un plano, es la línea formada por las proyecciones de sus diversos puntos sobre el plano.

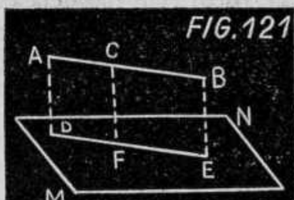
Estas perpendiculares reciben el nombre de *líneas proyectantes*, y el plano sobre que se proyecta *plano de proyección*.

Cuando las *líneas proyectantes* son perpendiculares al *plano de proyección*, las proyecciones se llaman *ortogonales.*

Nosotros solo nos ocuparemos de las proyecciones ortogonales.

213. *La proyección de una recta sobre un plano, es otra recta.*

En efecto, las líneas proyectantes A D, C F, B E, etc., son paralelas (200, recíp.) y están todas en un mismo plano, pues los planos determinados por cada dos paralelas A D C F y C F B E tienen los tres puntos C, B y F comunes. La intersección del plano proyectante A B D E con el plano M N de proyección es la proyección de la recta A B sobre el plano, luego esta proyección es una recta (189, cor. 4.º).



Corolario. *Las proyecciones de rectas paralelas sobre un mismo plano, son también paralelas.*

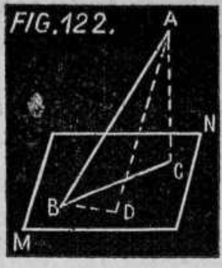
Pues son intersecciones de planos paralelos con un mismo plano.

Escolio. Si la recta es perpendicular al plano, su proyección será el pié de la misma recta sobre el plano.

214. Se llama ángulo *de una recta y un plano*, el que forma dicha recta con su proyección sobre el plano.

215 *El ángulo de una recta y un plano, es menor que el que dicha recta forma con otra cualquiera que pase por su pié en dicho plano.*

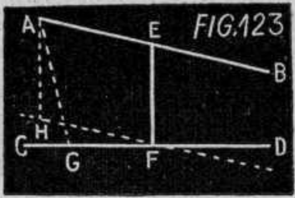
Sea A B una recta, (fig. 122) B C su proyección sobre el plano M N; digo que A B C < A B D.



Tomo B C = B D y uno A con los puntos D y C. Los dos triángulos A B C y A B D tienen A B comun, el lado B C = B D, y el lado A C < A D, por ser A C perpendicular al plano; luego A B C < A B D.

216. *Dos rectas que se cruzan tienen siempre una perpendicular comun, que es la menor distancia entre ambas.*

Sean las dos rectas A B y C D que se cruzan. Por un punto F de la C D, trazo H F paralela á A B.



La perpendicular E F al plano determinado por las rectas C D y H F, será perpendicular á ambas y, por tanto, á C D y A B.

Además, es menor que otra cualquiera A G comprendida entre las dos rectas dadas, pues trazando la perpendicular A H al plano, resulta A H < A G; ó lo que es igual E F < A G.

XLV.

ÁNGULOS DIEDROS.

217. Se llama *ángulo diedro* la separación ó abertura de dos planos que se cortan.

Caras de un diedro son los dos planos que le forman.

Arista es la intersección de las dos caras.

Un ángulo diedro se designa con cuatro letras, una de cada cara y las dos de la arista, que se colocan enmedio.

Si el diedro está solo puede leerse con las dos letras de su arista.

Un ángulo diedro puede considerarse engendrado por el movimiento de un plano que, adaptado primero sobre otro, gira alrededor de una recta común á ambos. De aquí se deduce que la magnitud del ángulo diedro no depende de la de sus caras, sinó de la mayor ó menor separación de éstas.

Dos ángulos diedros se dicen iguales cuando, coincidiendo la arista, y una de las caras, coinciden también las otras dos caras.

Las definiciones de diedros adyacentes, consecutivos, opuestos por la arista, rectos, etc., son análogas á las correspondientes de geometría plana.

218. *Una recta situada en un plano determina el plano perpendicular al primero.* Se demuestra como su análogo (18).

Corolario. *Dos ángulos diedros rectos son iguales, aunque no sean adyacentes.* Como su análogo.

219. *La suma de dos ángulos diedros adyacentes es igual á dos ángulos diedros rectos.* Como su análogo (20).

Recíproco. *Si la suma de dos ángulos diedros consecutivos es igual á dos ángulos diedros rectos, estos diedros serán adyacentes.*

Corolarios. 1.° *La suma de todos los ángulos diedros consecutivos que se pueden formar á un mismo lado de un plano, es igual á dos ángulos diedros rectos.*

2.° *La suma de todos los ángulos diedros consecutivos formados alrededor de una recta, es igual á cuatro ángulos diedros rectos.*

3.° *Los cuatro ángulos que forma un plano con otro al cual es perpendicular, son rectos.*

4.° *Todo ángulo diedro es menor que dos ángulos diedros rectos.*

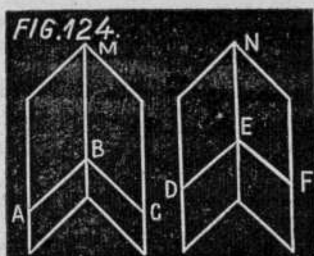
5.° *Los planos bisectores de dos ángulos diedros adyacentes son perpendiculares.* Se demuestran como sus análogos.

220. *Los ángulos diedros opuestos por la arista son iguales.* (Véase el núm, 21).

Corolario. *Los planos bisectores de dos diedros opuestos por la arista forman un solo plano.*

221. *Ángulo plano correspondiente á un diedro* es el formado por dos perpendiculares á la arista en uno de sus puntos, una en cada cara.

222. *Si dos ángulos diedros son iguales, sus ángulos planos correspondientes también lo son.*



Pues colocando el diedro D N E F sobre el A M B C de modo que coincidan, y que el punto E caiga sobre B, E F y D E coincidirán con B A y B C.

Corolarios. 1.° *Dos ángulos diedros son directamente proporcionales á sus ángulos planos correspondientes.*

Pues del teorema anterior se deduce que, si un diedro es doble de otro, su ángulo plano correspondiente será doble del de este otro.

2.° *Un ángulo diedro tiene por medida su ángulo plano correspondiente.*

Pues si llamamos D á un diedro, A á su ángulo plano correspondiente, d al diedro unidad y a á su ángulo plano correspondiente, tendremos $\frac{D}{d} = \frac{A}{a}$. Es decir, la medida del diedro es la razón de los ángulos planos A y a; pero si convenimos en tomar como unidad de diedros el diedro, cuyo ángulo plano es la unidad, resultará $\frac{D}{d} = A$, conforme al enunciado.

223. *El plano bisector de un ángulo diedro es el lugar geométrico de los puntos interiores al ángulo y equidistantes de sus caras.* Como su análogo (26, cor. 2.°)

224. *Si á dos planos paralelos corta un plano secante: 1.° Los ángulos diedros alternos son iguales. 2.° Los ángulos diedros correspondientes son iguales. 3.° Los ángulos diedros internos del mismo lado del plano secante son suplementarios.* Por razones análogas á las del núm. 31 y siguientes.

225. *Si por un punto de la arista de un diedro se trazan perpendiculares á sus caras, situadas respectivamente del lado de la cara opuesta, el ángulo de estas perpendiculares es suplemento del ángulo plano del diedro.*

En efecto, las perpendiculares A E, A C, A D y A F á la arista A B están en un plano (193, cor.), luego

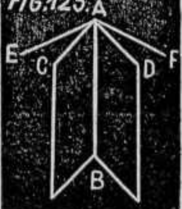
$$EAF = EAC + CAD + DAF;$$

pero $EAD + CAF = 2R$ ó sea

$$EAC + CAD + CAD + DAF = 2R,$$

por consiguiente, $EAF + CAD = 2R$.

FIG. 125.

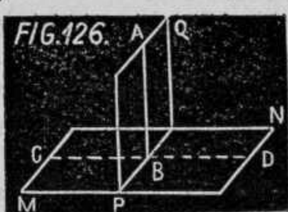


Corolario. *Si desde el interior de un ángulo diedro se bajan perpendiculares á sus caras, el ángulo de dichas perpendiculares es suplemento del diedro.* Pues ese ángulo será igual al E A F (34).

XLVI.

PLANOS PERPENDICULARES.

226. *Si dos planos son perpendiculares y en uno de ellos se traza una perpendicular á la intersección de ambos, será también perpendicular al otro plano.*



En efecto, trazando en B la C D perpendicular á P B, el ángulo A B C = A B D por correspondientes de diedros rectos; luego A B es perpendicular á C D, y como lo era ya á P B, lo será al plano M N.

Recíproco. *Si dos planos son perpendiculares y en un punto de la intersección se levanta una perpendicular al uno, esta perpendicular estará contenida en el otro.*

En efecto, si por el punto B levanto una perpendicular en el plano Q, á la P B, será perpendicular al plano M N, según el teorema directo; y como en el punto B no hay más que una perpendicular al plano M N, esta perpendicular y la primera son una sola.

Corolario. *El lugar geométrico de todas las perpendiculares á un plano levantadas por los puntos de una recta situada en él, es el plano perpendicular al primero que pasa por esta recta.*

227. *Si una recta es perpendicular á un plano, todo*

plano que pase por esta recta, es perpendicular al primero.

En efecto, trazando (fig. 126) en el plano M N la C B perpendicular á P B, el ángulo A B C será recto y por tanto el diedro M P B Q también lo será.

228. *Si dos planos son perpendiculares á un tercero, la intersección de los dos primeros será perpendicular también al tercero.*

En efecto, si por un punto de esa intersección trazo una perpendicular al tercer plano, esa perpendicular tendrá que estar contenida en los dos primeros (226 recíp.), luego es su intersección.

229. *Una recta oblicua ó paralela á un plano determina otro plano perpendicular al primero.*

En efecto, trazando por uno de sus puntos una perpendicular al plano, el plano de esas dos rectas será perpendicular á dicho plano (227).

Además, no puede pasar otro, porque la intersección de los dos sería perpendicular al plano (228), contra lo supuesto.

230. *Vertical* de un punto, es la dirección que tiene en ese punto la gravedad. Los puntos en que la vertical, prolongada en ambos sentidos, encuentra á la esfera celeste se llaman *zénit* y *nadir* de ese punto.

Plano vertical, es todo plano que pasa por una vertical.

Plano horizontal es el plano perpendicular á la vertical.

De donde se infiere que por un punto puedan pasar infinitos planos verticales, pero solamente uno horizontal.

Como se admite que las verticales son paralelas, los planos horizontales también lo serán.

Se llama *recta horizontal*, toda recta situada en un plano horizontal.

Luego por un punto solo pasa una vertical, pero pueden pasar infinitas horizontales.

Toda vertical es perpendicular á la horizontal; pero la perpendicular á la horizontal puede muy bien no ser vertical.

Los planos y líneas horizontales se determinan por medio de *niveles*.

231. Las rectas y planos no horizontales ni verticales, se dicen inclinados al horizonte.

La inclinación de una recta al horizonte es el ángulo que forma con el plano horizontal, que viene medido por el que forma dicha recta con su proyección horizontal.

La inclinación de un plano al horizonte es el ángulo diedro que forma con el plano horizontal.

Todas las rectas horizontales de un plano inclinado son paralelas, pues son intersecciones de dicho plano con planos horizontales.

232. *Línea de máxima pendiente* de un plano inclinado, es la recta situada en ese plano y perpendicular á una horizontal del mismo.

De donde se deduce que, en el mismo plano, todas las líneas de máxima pendiente son paralelas.

Un plano queda determinado por su línea de máxima pendiente. Pues conocida esta, se conoce la horizontal perpendicular á la misma.

XLVII.

ANGULOS POLIEDROS.

233. Se llama *ángulo poliedro* ó *ángulo sólido* la reunión de tres ó más ángulos planos que tienen un vértice comun y cada dos de ellos un lado comun.

Estos ángulos planos se llaman *caras* del poliedro; sus lados *aristas* y el vértice comun *vértice* del poliedro.

Se llama *ángulo triedro* el poliedro que consta de tres caras.

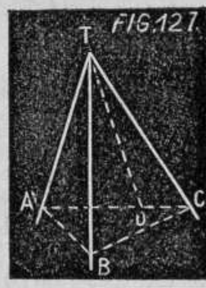
Un ángulo poliedro se designa con la letra del vértice seguida de una de cada arista. Si está, solo puede designarse con la del vértice.

Angulo poliedro convexo es el que, cortando sus caras por un plano, nos dá de intersección un polígono convexo.

Aquí solo se trata de ángulos poliedros convexos.

234. *Una cara cualquiera de un ángulo triedro, es menor que la suma de las otras dos, y mayor que su diferencia.*

Digo que $ATC < ATB + BTC$.



Trazo T D, en el plano A T C, que forme con A T $ATD = ATB$, y la recta A C; tomo $TB = TD$ y uno los puntos A, B y C. El triángulo $ATD = ATB$, nos dá $AB = AD$; y como $AB + BC > AC$, tendremos $BC > DC$.

Los triángulos B T C y D T C, que tienen dos lados respectivamente iguales y el tercero $DC < BC$, nos dan $DTC < BTC$. Añadiendo á ambos miembros los ángulos iguales A T D y A T B resulta por fin, $ATD + DTC$ ó sea $ATC < BTC + ATB$.

De esta propiedad se deduce inmediatamente
$ATC - BTC < ATB$.

Corolario. *Una cara de un ángulo poliedro es menor que la suma de todas las demás.*

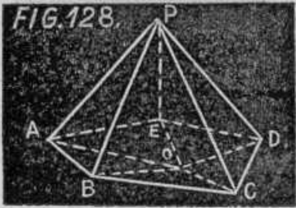
Se demostraría descomponiéndole en triedros.

235. *La suma de todas las caras de un ángulo poliedro es menor que cuatro rectos.*

Sea P el ángulo poliedro: digo que

A P B + B P C + C P D + D P E + E P A < 4 R.

FIG. 128.



Tracemos un plano que corte á todas las aristas y nos resultará el polígono A B C D E.

Uniendo los vértices del polígono con un punto interior O, resultarán tantos triángulos con vértice en O, como con vértice en P.

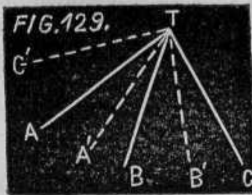
Pero sabemos que P B A + P B C > A B C (234); y lo mismo sucede en los demás triedros formados en los vértices del polígono, luego la suma de los ángulos en la base de los triángulos en P es mayor que la suma de los ángulos en la base de los triangulos en O, por consiguiente, la suma de los ángulos en P es menor que la de los ángulos en O, que es cuatro rectos.

236. *Se llaman triedros suplementarios aquellos que tienen los diedros del uno, suplementos de los ángulos planos del otro.*

Dicho se está, que un diedro es suplemento de un ángulo plano, cuando lo es de su ángulo plano correspondiente.

237. *A todo ángulo triedro corresponde otro ángulo triedro suplementario.*

Sea T A B C un triedro. Trazo por T las perpendiculares T A', T B', T C' á las caras T B C, T A C y T A B. Los ángulos planos A' T B', B' T C' y C' T A' serán suplementos (225) de los diedros T C, T A y T B.



Además, por ser T A' perpendicular al plano T B C será perpendicular á T B y T C, y por la misma razón T B' será perpendicular á T A y T C, y T C' á T A y T B.

Luego T A es perpendicular á T B' y T C' y, por tanto, á T B' C'; T B lo será á T A' C' por serlo á T A' y T C'; y T C á T A' B', por serlo á T A' y T B'; por consiguiente los ángulos planos del triedro T A B C serán también (225) suplementos de los diedros del triedro T A' B' C'.

Es decir, que los dos triedros son suplementarios.

238. *La suma de los ángulos diedros de un triedro es mayor que dos rectas y menor que seis.*

Sea T un ángulo triedro y llamemos A, B y C á sus ángulos diedros.

Sea t el triedro suplementario y a, b y c sus ángulos planos.

Tendremos,

$$A + a = 2\,R;\ B + b = 2\,R;\ C + c = 2\,R;$$

de donde

$$A+B+C+a+b+c=6\,R \text{ ó } A+B+C=6\,R-(a+b+c)$$

pero como $a + b + c < 4\,R$ (235), resultará:

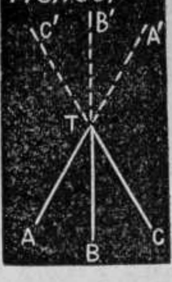
$$A + B + C \begin{matrix} < 6\,R \\ > 2\,R \end{matrix}$$

239. *Si un ángulo triedro tiene dos ángulos diedros iguales, sus caras opuestas son también iguales.*

Sea el triedro T A B C (fig. 130) en que suponemos T A = T C, digo que B T C = B T A.

En efecto, prolongo las aristas en sentido contrario al suyo y resultará el triedro T A' B' C'.

FIG. 130.



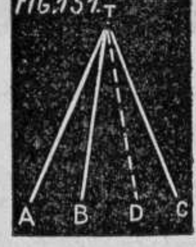
Tendremos T A = T A' (220) y como, por hipótesis, T A = T C, resulta T C = T A'. Por la misma razón T A = T C'.

Doblando la figura de modo que T A' y T C' coincidan con T A y T C, puesto que A T C = A' T C', tendremos que, por ser iguales los diedros T A' y T C' á los T A y T C, la arista T B' caerá sobre T B, luego los dos triedros son iguales, y por tanto, A T B = C' T B', pero C' T B' = B T C, por consiguiente A T B = B T C.

240. *Si un ángulo triedro tiene dos ángulos diedros desiguales, al mayor diedro se opone mayor ángulo plano.*

Digo que si T A > T C, también B T C > B T A.

FIG. 131.



En efecto, por la arista T A hago pasar un plano que forme con el A T C un diedro C T A D igual al diedro T C.

Sea T D la intersección de este plano con el B T C.

El triedro T A D C nos dá (239), A T D = D T C.

Pero en el T A B D tenemos

$$A T D + B T D > A T B \text{ (234)};$$

de donde D T C + B T D ó sea B T C + A T B.

Recíprocos. 1.º *Si un ángulo triedro tiene dos caras iguales, sus ángulos diedros opuestos son iguales.*

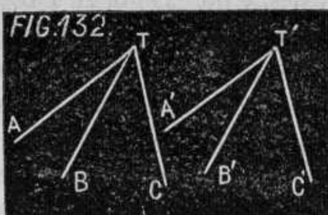
2.º *Si un ángulo triedro tiene dos caras desiguales, á la mayor se opone mayor ángulo diedro.*

XLVIII.

IGUALDAD Y SIMETRÍA DE TRIEDROS.

241. *Dos ángulos triedros son iguales, cuando tienen un ángulo plano, y los dos diedros adyacentes respectivamente iguales é igualmente dispuestos.*

Digo que si T A = T′ A′; T C = T′ C′; y A T C = = A′ T′ C′; los triedros T y T′ serán iguales.



En efecto, coloco el T′ sobre el T, de modo que las caras iguales A T C y A′ T′ C′ coincidan.

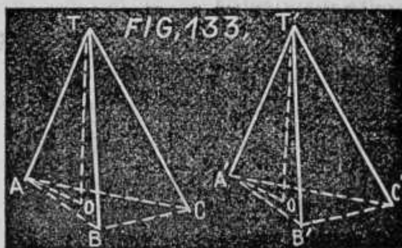
Por ser el diedro T A = T′ A′, el plano T′ A′ B′ caerá sobre el T A B, y por ser T C = T′ C′, el plano B′ T′ C′ caerá sobre el B T C; luego la arista T′ B′ intersección de los dos primeros tendrá que caer sobre la T B intersección de los otros dos.

242. *Dos ángulos triedros son iguales, cuando tienen dos ángulos planos respectivamente iguales é igualmente dispuestos, y el ángulo diedro comprendido igual.*

Digo que si A T B = A′ T′ B′, B T C = B′ T′ C′, y el diedro B T = B′ T′, los dos ángulos triedros T y T′ son iguales.

En efecto, coloco el triedro T′ sobre T, de modo que coincidan las aristas T′ B′ y T B. La igualdad de los diedros B T y B′ T′ hará que tengan que coincidir las caras T′ A′ B′ y T′ B′ C′ con las T A B y T B C, y como los ángulos planos son iguales, las aristas T′ A′ y T′ C′ coincidirán con las T A y T C. Los dos triedros han coincidido, luego son iguales.

243. *Dos ángulos triedros son iguales, cuando tienen sus tres ángulos planos respectivamente iguales é igualmente dispuestos.*



Para demostrarlo tomemos en las aristas de los dos ángulos triedros distancias iguales T A = T B = T C = T′ A′ = T′ B′ = T′ C′, y unamos los puntos A, B y C y los A′, B′ y C′. Tracemos finalmente, las perpendiculares T O y T′ O′ á los planos A B C y A′ B′ C′.

Los puntos O y O′ equidistarán de A, B, C y de A′, B′, C′, (195, rec. 2.º).

Los triángulos T A B y A′ B′ T′, T B C y T′ B′ C′, T A C y T′ A′ C′, son iguales (93); luego los A B C y A′ B′ C′ también lo serán (92).

Si, pues, colocamos el triedro T′ A′ B′ C′ sobre el T A B C de modo que coincidan A′ B′ C′ y A B C, el punto O′ caerá en O y O′ T′ en O T (194), y como la igualdad de los triángulos rectángulos (95, 1.º) A T O y A′ T′ O′ nos dá T O = T′ O′, el punto T′ caerá en T.

Han coincidido los puntos T', A', B' y C' con las T, A, B y C; luego han coincidido todas las aristas, y por tanto, los dos triedros, que son por consiguiente iguales.

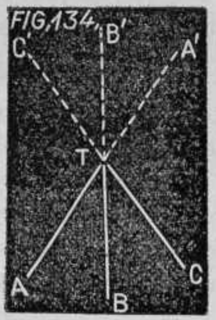
244. *Dos ángulos triedros son iguales cuando tienen iguales sus tres ángulos diedros é igualmente dispuestos.*

Pues en este caso, trazando sus triedros suplementarios, tendrán sus tres caras iguales y, por tanto, serán iguales. Siendo iguales, tendrán sus ángulos diedros iguales, luego los ángulos planos de los triedos propuestos son iguales.

245. A estos cuatro casos de igualdad, corresponden otros cuatro casos de simetría, cuando los elementos están diversamente dispuestos.

La demostración queda reducida á trazar el triedro simétrico de uno de ellos, que resultará igual al otro.

246. *Dos ángulos triedros simétricos tienen iguales todos sus elementos, pero no pueden coincidir en general.*



En efecto, los dos triedros T A B C y T' A' B' C' tienen sus ángulos planos iguales por opuestos por el vértice, y sus diedros también iguales por opuestos por la arista.

Para ver que no pueden coincidir, coloquemos el triedro T A' B' C' sobre T A B C, de modo que la arista T C' caiga sobre T A, en cuyo caso T A' caerá sobre T C, por la igualdad de los ángulos A' T C' y A T C. En este caso la arista T B' caerá del mismo lado del plano T A C que la T B, pero los diedros T A' y T C no coincidirán, puesto que T A' = T A, y T A y T C, serán desiguales en general.

Por razón idéntica no pueden coincidir T C' y T A; luego los triedros no coinciden.

Si ahora colocamos el triedro T A' B' C' sobre T A B C de modo que la arista T C' caiga sobre T C, y la T A' sobre T A, la arista T B' caerá á distinto lado del plano T A C que la T B, luego tampoco pueden coincidir los dos triedros.

247. En el caso en que el diedro T C = T A, el triedro simétrico T A' B' C' coincidirá con el T A B C, según hemos visto (239).

XLIX.

PROBLEMAS SOBRE RECTAS Y PLANOS.

248. I. *Por un punto dado en un plano, trazar la perpendicular á este plano.*

Colóquense dos escuadras unidas por uno de los catetos, de modo que el vértice del ángulo recto coincida con el punto dado, y que los otros dos catetos se apoyen en el plano. El cateto común será la perpendicular pedida (194).

II. *Por un punto dado fuera de un plano, trazar la perpendicular á este plano.*

Desde el punto dado y con una distancia fija, márquense tres puntos en el plano, hállese el centro de la circunferencia que pasa por esos tres puntos, y ese será el pie de la perpendicular pedida (196).

III. *Por un punto dado en una recta, trazar el plano perpendicular á esta recta.*

Trácense en ese punto, en dos planos distintos que pasen por la recta, dos perpendiculares á la misma recta. El plano de estas dos perpendiculares es el pedido (194).

IV. *Por un punto dado fuera de una recta, trazar el plano perpendicular á esta recta.*

En el plano determinado por la recta y el punto, y desde ese punto, se traza una perpendicular á la recta dada. Desde el pie de esta perpendicular, se traza otra á la misma recta, y el plano de las dos perpendiculares es el pedido.

V. *Por un punto cualquiera del espacio, trazar la paralela á una recta dada.*

En el plano determinado por la recta y el punto, y por el punto dado, se traza la paralela pedida.

VI. *Por un punto dado fuera de un plano, trazar una paralela al plano.*

Bajando desde ese punto una perpendicular al plano, y por el mismo una perpendicular á la primera, tendremos la paralela pedida.

VII. *Por un punto exterior á un plano, trazar otro plano paralelo al primero.*

Se resuelve por una construcción análoga á la anrior.

VIII. *Medir el ángulo de una recta con un plano.*

Basta proyectar la recta sobre el plano, y medir el ángulo de las dos rectas.

IX. *Por una recta cualquiera hacer pasar un plano perpendicular á otro dado.*

Por un punto de esa recta se traza una perpendicular al plano, y el plano determinado por las dos rectas será el pedido.

I.

SUPERFICIES CÓNICAS DE REVOLUCIÓN.

249. Entre las diversas superficies curvas, las únicas de cuyo estudio hemos de ocuparnos, son las de revolución.

Superficie de revolución es la engendrada por la rotación de una línea alrededor de una recta fija, que toma el nombre de *eje*, á la que está invariablemente unida.

Su carácter distintivo es el que todo plano perpendicular al eje dá por intersección una circunferencia, que se llama *paralelo*; así como todos los planos que pasan por el eje dan intersecciones iguales, que se llaman *meridianos*.

Las primeras se llaman *secciones rectas*; las segundas *secciones meridianas* de la superficie de revolución.

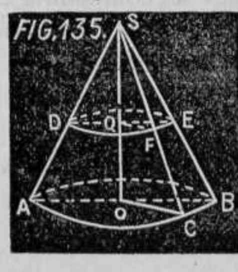
Las superficies de revolución se dividen en *cónicas*, *cilíndricas* y *esféricas*, según que el meridiano es una recta que corta al eje, es paralela al eje, ó es una circunferencia de círculo cuyo centro está en el eje.

250. Según lo expuesto, *superficie cónica de revolución* es la engendrada por una recta que gira alrededor de un eje fijo, al que encuentra en un punto.

Ángulo cónico es el ángulo constante que forma la generatriz con el eje.

251. *Toda sección recta de la superficie cónica es una circunferencia de círculo cuyo centro está en el eje.*

FIG. 135.



Sea A C B la sección recta; tomemos en ella varios puntos A, C, B, por ejemplo; unamos estos puntos con O. Las rectas O A, O C y O B serán perpendiculares al eje, por estar en el p'ano A C B; y los triángulos rectángulos S O A, S O B y S O C son iguales, luego O A = = O B = O C, conforme al enunciado.

Corolario. *Las secciones rectas de una superficie cónica son proporcionales á sus distancias al vértice.*

Pues sabemos que las circunferencias son proporcionales á sus radios

$$\text{y} \quad \frac{O\,B}{Q\,E} = \frac{S\,O}{S\,Q}.$$

252. *Dos superficies cónicas de revolución, cuyos ángulos cónicos son iguales, son superponibles.*

Pues colocando una sobre otra de modo que coincidan sus ejes y vértices, las generatrices coincidirán también, luego las dos superficies coinciden.

Corolario. *El lugar geométrico de las rectas que pasan por un punto de una recta, y forman con ella un ángulo constante, es la superficie cónica que tiene por vértice, eje y ángulo cónico el punto, la recta y el ángulo dados.*

253. *Todo plano secante á una superficie cónica de revolución que pasa por el vértice, la corta en dos generatrices.*

Pues ese plano cortará á la sección recta, sin lo que no cortaría á la superficie cónica. No la puede cortar en tres puntos, pues se confundiría con ella, luego la corta en dos; y trazando las generatrices que pasan por estos dos puntos, estarán en la superficie cónica y en el plano secante, por tener cada una dos puntos en él, luego son las intersecciones de ambas superficies.

Corolario. *La sección meridiana de una superficie cónica está constituida por dos generatrices opuestas, cuyo ángulo es duplo del ángulo cónico.*

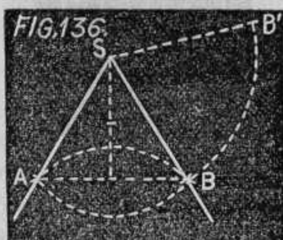
254. Se llama *plano tangente* á la superficie cónica de revolución, el que solo tiene una generatriz comun con la superficie cónica.

255. *El plano tangente á la superficie cónica en uno de sus puntos, está determinado por la generatriz que pasa por dicho punto, y por la tangente á la sección recta trazada por el mismo punto.*

Pues esta tangente no tiene comun con la superficie cónica más que el punto de contacto, luego el plano no tendrá con la superficie cónica más que la generatriz que pasa por dicho punto.

256. *El desarrollo sobre un plano de la superficie cónica de revolución comprendida entre el vértice y una sección recta, es un sector circular, cuyo radio es la longitud de la generatriz comprendida entre el vértice y dicha sección, y cuyo arco es igual en longitud á la misma sección.*

FIG. 136.



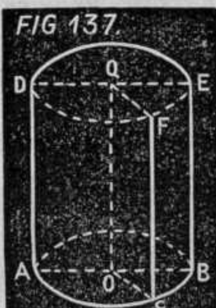
En efecto, colocando la superficie cónica de modo que su generatriz S B se apoye en el plano y haciéndola rodar hasta que la misma generatriz vuelva á colocarse en el plano, como todos los puntos de la sección recta equidistan del vértice, irán constituyendo un arco de círculo B B', que será igual en longitud á la circunferencia de la sección recta, y cuyo radio es evidentemente S B.

LI.

SUPERFICIES CILÍNDRICAS DE REVOLUCIÓN.

257. *Superficie cilíndrica de revolución* es la engendrada por una recta que gira alrededor de un eje fijo paralelo á la misma.

258. *Toda sección recta de la superficie cilíndrica es una circunferencia de círculo, cuyo centro está en el eje.*



Sea A C B una sección recta; tomemos en ella tres puntos cualesquiera A, B, C; unamos estos puntos con O. Las rectas O A, O B, O C, serán perpendiculares al eje O Q, por estar en el plano de la sección recta; por la misma razón son perpendiculares á las generatrices D A, F C y E B; y como estas equidistan del eje, resulta

$$OA = OB = OC.$$

Luego A C B es una curva plana, cuyos puntos equidistan de O, conforme al enunciado.

Corolario. *En la superficie cilíndrica de revolución, todas las secciones rectas son iguales.*

Pues son circunferencias de igual radio.

259. *Dos superficies cilíndricas de revolución de igual radio son superponibles.*

En efecto, colocándolas de modo que sus ejes coincidan, todas las generatrices coincidirán, puesto que equidistan del eje, luego las superficies coinciden.

Corolario. *El lugar geométrico de los puntos del espacio equidistantes de una recta fija, es la superficie cilíndrica de revolución, cuyo eje es la recta fija, y cuyo radio es esa distancia.*

260. *Todo plano secante á una superficie cilíndrica de revolución, paralelo al eje, le corta en dos generatrices.*

Pues ese plano cortará á la sección recta, sin lo que no cortaría á la superficie cilíndrica. No le puede cortar en tres puntos, pues se confundiría con ella, luego la corta en dos; y si por esos dos puntos se trazan paralelas al eje, estarán en la superficie cilíndrica y en el plano secante (204), luego son las intersecciones de ambas superficies.

Corolario. *La sección meridiana de una superficie cilíndrica de revolución está constituida por dos generatrices opuestas.*

261. Se llama *plano tangente* á la superficie cilíndrica de revolución, el que solo tiene una generatriz comun con la superficie cilíndrica.

262. *El plano tangente á la superficie cilíndrica de revolución en uno de sus puntos, está determinado por la generatriz que pasa por dicho punto, y por la tangente á la sección recta trazada por el mismo punto.*

Pues esta tangente no tiene comun con la superficie cilíndrica más que el punto de contacto, luego el plano no tendrá comun con la superficie cilíndrica más que la generatriz que pasa por dicho punto.

263. *El desarrollo sobre un plano de la superficie cilíndrica de revolución, comprendida entre dos secciones rectas, es un rectángulo, cuya altura es la distancia entre las dos secciones, y la base es igual en longitud á la circunferencia de la sección recta.*

Pues colocando la superficie cilíndrica de modo que una de sus generatrices se apoye en el plano, y haciéndola rodar sobre el plano, hasta que la misma generatriz vuelva á colocarse sobre dicho plano, como todas las generatrices son perpendiculares á la sección recta é iguales en longitud, sus extremos formarán dos rectas perpendiculares á dichas generatrices, é iguales en longitud á la circunferencia de la sección recta.

LII.

SUPERFICIE ESFÉRICA.

264. *Superficie esférica es la engendrada por una semi-circunferencia que gira alrededor de su diámetro.*

El cuerpo limitado por la superficie esférica, recibe el nombre de *esfera.*

Centro de la superficie esférica, es el centro de la semi-circunferencia generatriz.

Radio es la recta que une el centro con un punto de la superficie esférica.

Diámetro, es la recta que, pasando por el centro, termina en la superficie esférica.

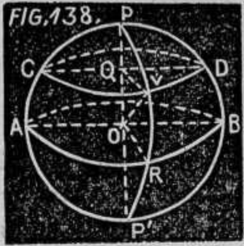
De aquí se infiere que los radios y diámetros de la superficie esférica, son los mismos radios y diámetros de la semi-circunferencia generatriz en sus distintas posiciones, y les son aplicables cuanto hemos dicho (47).

265. *Toda sección plana de la superficie esférica es una circunferencia de círculo.*

En efecto, la sección es una curva plana por estar situada en el plano secante, y como todos sus puntos son puntos de la superficie esférica equidistan del centro de esta superficie, luego (196) dicha sección es una circunferencia de círculo.

ESCOLIO. Si el plano secante pasa por el centro de la esfera, la sección plana será una circunferencia cuyo centro será el de la esfera, y su radio el de ésta y recibe el nombre de *circunferencia máxima.*

FIG. 138.



Si el plano secante no pasa por el centro de la esfera, la sección plana será una circunferencia, cuyo centro Q será la proyección del centro O de la esfera sobre el plano secante y se llama *circunferencia menor.*

Trazando los radios Q r y O r, se formará el triángulo rectángulo O Q r, cuya hipotenusa $o\ r$ es el radio de la superficie esférica, el cateto Q r el radio de la sección plana, y el otro cateto O Q es la distancia al centro del plano secante. Si pues los representamos respectivamente por R, r y d, tendremos $R^2 = r^2 + d^2$. Igualdad que nos dice:

1.º *Que dos círculos menores equidistantes del centro de la esfera, son iguales.*

Pues de $R^2 = r^2 + d^2$ y $R^2 = r'^2 + d^2$; se deduce $r = r'$.

2.º *De dos círculos menores desiguales, el mayor dista menos del centro de la superficie esférica.*

Pues de $R^2 = r^2 + d^2$ y $R^2 = r'^2 + d'^2$; se deduce $r^2 + d^2 = r'^2 + d'^2$; y si $r > r'$, será $d < d'$.

COROLARIOS. 1.º *Dos puntos de la superficie esférica determinan una circunferencia máxima.*

Pues la circunferencia ha de pasar además por el centro de la superficie esférica.

2.º *Dos circunferencias máximas se cortan mútuamente en partes iguales.*

Pues la intersección de sus planos es una recta que pasa por el centro de la superficie esférica.

3.° *Una recta no puede cortar á una superficie esférica más que en dos puntos.*

Pues el plano que pasa por la recta y el centro de la superficie esférica, corta á ésta según una circunferencia máxima, que no puede ser cortado por la recta más que en dos puntos.

4.° *Las circunferencias máximas dividen á la esfera en dos partes iguales, llamadas hemisferios.*

Pues superpuestas coincidirán forzosamente.

266. *Polos* de una circunferencia son los extremos del diámetro perpendicular á su plano.

De donde se infiere que los centros de la esfera y de la circunferencia y los polos de ésta, estarán todos en el mismo diámetro perpendicular.

267. *En la superficie esférica, todos los puntos de una circunferencia equidistan de sus polos.*

Pues las distancias de P ó P' á los puntos de la circunferencia C D, son oblicuas que se apartan igualmente del pie de la perpendicular.

COROLARIO. *En la circunferencia máxima, todos sus puntos equidistan de los dos polos.* (197, cor. 2.°)

ESCOLIO. Se llama *distancia polar* la distancia rectilínea de los puntos de una circunferencia á su polo.

Radio esférico de una circunferencia es la longitud del arco de circunferencia máxima comprendido entre la misma circunferencia y su polo.

268. Se llama *ángulo de dos curvas* que se cortan el ángulo formado por las tangentes á dichas curvas en dicho punto.

Ángulo esférico es el ángulo de dos arcos de circunferencia máxima de la misma esfera. Este ángulo, el de sus tangentes y el ángulo diedro que forman los planos de los dos arcos, son iguales.

269. *El ángulo de dos arcos de circunferencia máxima tiene por medida el arco de circunferencia máxima comprendido entre sus lados y descripto desde su polo como vértice.*

Pues el ángulo R P B tiene la misma medida que el diedro formado por los planos O P R y O P B, y este diedro viene medido por su ángulo correspondiente R O B.

270. *Todo plano perpendicular al radio de la superficie esférica en su extremo, es tangente á la superficie.*

Se demuestra como su análogo (66).

Recíproco. *El plano tangente á la superficie esférica es perpendicular al radio trazado al punto de contacto.* (66, recíp.)

271. *Cuatro puntos no situados en un plano determinan una superficie esférica.*

Es decir, que por cuatro puntos no situados en un plano, puede pasar una superficie esférica, pero solamente una.

FIG. 139.

Sean los cuatro puntos A, B, C y D, que no están situados en el mismo plano.

El lugar geométrico de los puntos equidistantes de A B y D (196) es la perpendicular levantada al plano A B D, en el centro del círculo circunscripto al triángulo A B D., Por idéntica razón, la perpendicular q O levantada al plano B C D, en el centro del círculo circunscripto al triángulo B C D, es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de B, C y D. Pero por equidistar ambas perpendiculares de B y D, tendrán que hallarse en el plano perpendicular á D E en su punto medio E (179, cor. 2.º); luego las dos perpendiculares están en un mismo plano, y como además este plano corte al plano A B D segun E *p* y al plano B C D segun E *q*, que se cortan en E, sus perpendiculares respectivas también se cortarán; y el punto O de encuentro equidistará de A, B, C, D.

Además otra superficie esférica tendrá que tener, segun lo expuesto, su centro en O; y teniendo el mismo centro y el mismo radio se confunde con la primera.

LIII.

TRIÁNGULOS ESFÉRICOS.

272. Se llama *polígono esférico* la porción de superficie esférica comprendida entre varios arcos de círculo máximo.

Las definiciones de lados, ángulos, vértices, diagonales, contorno y perímetro, son análogas á las ya conocidas (125).

Uniendo los vértices de un polígono esférico con el centro de la esfera, se formará en este un ángulo sólido, que se llama *correspondiente* al polígono esférico, porque sus ángulos planos, tienen por medidas los lados de dicho polígono, y sus ángulos diedros los ángulos esféricos del mismo.

De aquí que todas las propiedades demostradas para los ángulos poliedros sean aplicables á los triángulos esféricos, con solo reemplazar las palabras *cara* y *ángulo diedro*, por *lado* y *ángulo esférico*.

273. El polígono esférico más sencillo es el *triángulo esférico*, que es la porción de superficie esférica comprendida por tres arcos de circunferencia máxima, que deberán

ser menores que media circunferencia para que el triángulo sea convexo.

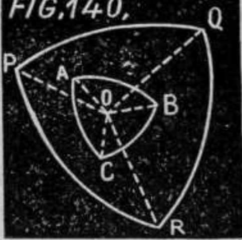
Los triángulos esféricos se clasifican lo mismo que los rectilíneos.

Uniendo los tres vértices del triángulo esférico con el centro de la esfera, resultará el *triedro* correspondiente al triángulo.

Las propiedades demostradas para los triedros son aplicables á los triángulos esféricos, con las solas variaciones ya indicadas para los polígonos.

274. *Triángulo polar* de un triángulo esférico es aquél cuyos vértices son los polos respectivos de los lados de este triángulo, situados del mismo lado que sus vértices opuestos.

FIG. 140.



De suerte que si P Q R es el triángulo polar de A B C P será el polo de B C situado del mismo lado que su vértice opuesto A, Q será el polo de A C, etc.

275. *Si un triángulo esférico es el triángulo polar, de otro, el segundo será á su vez el polar del primero.*

Digo que si P Q R es polar de A B C, también A B C será polar de P Q R.

En efecto, por ser P Q R el triángulo polar de A B C, las distancias P B y P C, serán cuadrantes, así como Q A y Q C, y R B y R A. Pero siendo cuadrantes P B y R B, resulta que B es el polo de P R; por serlo P C y Q C, resulta que C lo es de P Q; y siéndolo Q A y

R A, resulta A polo de Q R. Luego también los vértices del triángulo A B C son polos de los lados del P Q R. Además por ser P el polo de B C situado del lado del vértice A, la distancia P A es menor que un cuadrante, luego A es el polo de Q R situado del lado del vértice P. Como lo mismo diríamos de los otros dos, resulta que con efecto A B C es el triángulo polar de P Q R.

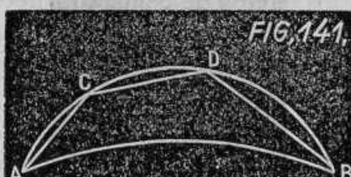
Corolarios. 1.° *Los triedros correspondientes á triángulos polares son suplementarios.*

Pues resulta P O perpendicular á O B y O C, y por consiguiente al plano O B C; Q O perpendicular, por lo mismo, al plano O A C; y R O al O A B.

2.° *Los triángulos esféricos polares son suplementarios*, puesto que lo son sus triedros correspondientes.

276. *La línea más corta que se puede trazar entre dos puntos de la superficie esférica es el arco de círculo máximo que los une, menor que media circunferencia.*

FIG. 141.



Digo que A B < A C B.

Tomo en la curva A C B, varios puntos y los uno por medio de arcos de circunferencia máxima. Como un lado de un polígono es menor que la suma de todos los demás, (234, cor.) resultará A B < A C + C D + D B. Y tomando los puntos en la curva bastante próximos para que las partes de curva A C, C D, etc. se confundan con los arcos de circunferencia máxima A C, C D, etc., resultará, por fin, A B < A C B.

LIV.

PROBLEMAS RELATIVOS Á LAS SUPERFICIES CURVAS.

277. I. *Trazar un plano tangente á una superficie cónica de revolución por un punto dado.*

Pueden suceder dos casos: 1.° Que el punto dado esté en la superficie cónica. 2.° Que sea exterior á la superficie.

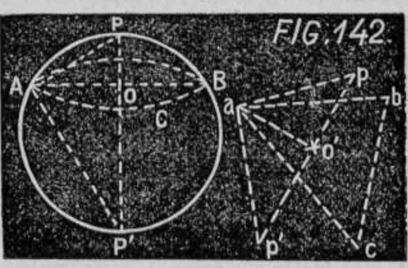
En el primer caso, basta trazar la tangente á la sección recta en el punto dado que, con la generatriz que pasa por el mismo punto, determinan el plano tangente (255).

En el segundo caso, se traza desde dicho punto la sección recta, y las dos tangentes á la misma, que con las generatrices á los puntos de contacto, determinarán dos planos tangentes.

II. *Trazar un plano tangente á una superficie cilíndrica de revolución por un punto dado.*

Pueden ocurrir los mismos dos casos que en el problema anterior y se resuelven de modo análogo.

III. *Hallar el centro de una esfera impenetrable.*



Si con una distancia polar cualquiera trazo en la esfera dada la circunferencia A B, y señalando en ella tres puntos

A, B, C, construyo el triángulo *a b c*, con los tres lados A B, A C y B C, el centro *o'* de la circunferencia circunscripta al triángulo *a b c* nos dará á conocer el centro *o* de la A B C; y la perpendicular *p p'* al radio *a o'* nos representará en dirección el diámetro P P'; cuya magnitud quedará determinada, describiendo desde *a*, con el radio A P, un arco que cortará en *p* á la *p p'*, y trazando *a p'* perpendicular á *a p*.

IV. *Trazar la circunferencia máxima que pasa por dos puntos dados en la supercie esférica.*

Si obtenemos el polo de esta circunferencia, el problema estará resuelto; pero la distancia polar ha de ser la cuerda del cuadrante; luego bastará desde los puntos dados, con un radio igual á la diagonal del cuadrado construído sobre el radio de la esfera (167), trazar dos arcos cuyo punto de encuentro será el polo buscado.

V. *Trazar por un punto dado en una superficie esférica, una circunferencia máxima que sea perpendicular á otra circunferencia máxima dada.*

Si desde el punto dado como polo; con un radio igual á la cuerda del cuadrante, se describe un arco, es evidente que el punto en que corte á la circunferencia dada será el polo de la pedida.

VI. *Hallar el polo de la circunferencia menor que pasa por tres puntos dados en una superficie esférica.*

Basta unir estos tres puntos por dos arcos de circunferencia máxima y trazar los arcos de circunferencia máxima perpendiculares en sus puntos medios. El punto de encuentro de estas últimas será el polo buscado.

LV.

PIRÁMIDES.

278. Se llama *poliedro* el cuerpo terminado por planos.

Estos planos se llaman *caras* del poliedro. *Vértices*, *aristas*, *ángulos diedros* y *ángulos planos* de un poliedro son los determinados por sus caras. *Diagonal* de un poliedro es la recta que une dos vértices no situados en la misma cara. *Plano diagonal* es el que pasa por tres vértices no situados en la misma cara.

Los poliedros se clasifican por el número de sus caras en *tetraedros*, *pentaedros*, *exaedros*, *octaedros*, *dodecaedros* é *icosaedros*, según tienen 4, 5, 6, 8, 12 ó 20 caras.

279. Los poliedros se dividen en *convexos* y *no convexos*, según que su superficie puede ser cortada por una recta en dos ó más puntos.

Los poliedros convexos tienen todos sus ángulos diedros salientes y todas sus diagonales interiores.

Los no convexos tienen algun ángulo diedro entrante y alguna diagonal interior.

La Geometría elemental solo estudia los poliedros convexos.

280. Se llama *pirámide* el poliedro cuyas caras son un polígono cualquiera y varios triángulos que tienen un vértice común.

La cara poligonal se llama *base*; las caras triangulares, *caras laterales*, y el vértice comun á las caras laterales, *vértice* ó *cúspide* de la pirámide. *Altura* es la distancia de la base al vértice.

Las pirámides se clasifican por el número de lados de su base, que es el de sus caras laterales, y se dicen *triangulares*, *cuadrangulares*, *pentagonales*, etc.

Los planos diagonales de la pirámide estarán determinados por el vértice y cada diagonal de la base, ó por dos aristas laterales de distinta cara.

281. *Pirámide regular* es la que tiene por base un polígono regular y el pie de la altura en el centro de su base.

En la pirámide regular la altura toma el nombre de *eje*.

Las caras laterales son triángulos isósceles iguales; pues las bases son iguales por lados de polígono regular, y los otros dos lados por oblícuas que se apartan igualmente del pie de la perpendicular.

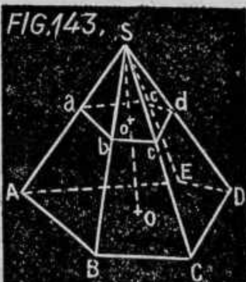
La altura de las caras laterales se llama *apotema* de la pirámide regular.

282. *Pirámide truncada* ó *tronco de pirámide*, es la porción de pirámide comprendida entre la base y un plano que corte á todas las aristas laterales. Se llaman *bases* los dos polígonos que la limitan.

La porción comprendida entre el vértice y el plano secante, se llama *pirámide deficiente*.

283. *Si una pirámide se corta por un plano paralelo á la base*: 1.º *Divide á las aristas laterales y á la altura en partes proporcionales y* 2.º *La sección resultante es semejante á la base.*

FIG. 143.



1.º Si por el vértice S suponemos trazado un plano paralelo á la base de la pirámide (211) tendremos,

$$\frac{SA}{Sa} = \frac{SB}{Sb} = \frac{SC}{Sc} = \frac{SD}{Sd} = \frac{SE}{Se} = \frac{SO}{So}$$

2.º Siendo paralelos los dos planos A B C D E y *a b c d e* (209), los dos polígonos tendrán sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido, luego sus ángulos son respectivamente iguales.

Además, la semejanza de los triángulos S A B y S *a b*, S B C y S *b c*, etc., nos dá:

$$\frac{SA}{Sa} = \frac{AB}{ab}; \ \frac{SA}{Sa} = \frac{AE}{ae}; \text{ de donde } \frac{AB}{ab} = \frac{AE}{ae}$$

Lo mismo se demostraría la proporcionalidad de los demás lados, luego los dos polígonos son semejantes.

Corolarios. 1.° *En toda pirámide, la base y toda sección paralela á ella son directamente proporcionales á los cuadrados de sus distancias al vértice.*

La semejanza de los polígonos nos dá (155),

$$\frac{ABCDE}{abcde} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2};$$

pero también $\frac{AB}{ab} = \frac{SB}{Sb} = \frac{SO}{So}$; de donde

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2} = \frac{\overline{SO}^2}{\overline{So}^2}; \text{ luego } \frac{ABCDE}{abcde} = \frac{\overline{SO}^2}{\overline{So}^2}.$$

2.° *Si dos pirámides de la misma altura se cortan por planos paralelos á sus bases y equidistantes de ellas, las secciones que resultan son directamente proporcionales á las bases.*

Pues llamando B y B′ á las bases de las dos pirámides; *b* y *b′* á sus secciones paralelas; A y *d* á las distancias respectivas á los vértices de las pirámides, tendremos

$$\frac{B}{b} = \frac{A^2}{d^2} \text{ y } \frac{B'}{b'} = \frac{A^2}{a^2} \text{ de donde } \frac{B}{b} = \frac{B'}{b'}.$$

3.° *Si dos pirámides de bases equivalentes é igual altura se cortan por planos paralelos á las bases y equidistantes de ellas, las secciones que resultan son equiva lentes.*

Pues en la igualdad anterior, si B = B′; *b* = *b′*.

LVI.

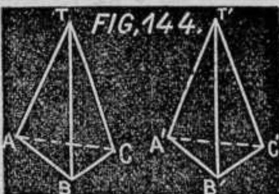
IGUALDAD DE TETRAEDROS.

284. De las definiciones expuestas (278) se deduce que el tetraedro es una pirámide triangular, en la que puede tomarse una cara cualquiera como base, en cuyo caso la altura será la perpendicular bajada desde el vértice opuesto.

Es, por tanto, el poliedro más sencillo, asi como el triángulo lo es respecto de los polígonos.

285. *Dos tetraedros son iguales cuando tienen tres caras respectivamente iguales é igualmente dispuestas.*

FIG. 144.



Digo que si T A B = T' B' A'; T A C = T' A' C'; y T B C = T' B' C', los dos tetraedros son iguales.

En efecto, los triedros T y T' son iguales (243), luego colocándolos de modo que coincidan, los vértices A', B' y C' coincidirán con los A, B y C por la igualdad de las caras; luego los dos tetraedros, cuyos cuatro vértices han coincidido, son iguales.

286. *Dos tetraedros son iguales cuando tienen dos caras iguales é igualmente dispuestas é igual el ángulo diedro comprendido,*

Digo que si A T B = A' T' B'; A T C = A' T' C', y A T = A' T', los tetraedros son iguales.

En efecto, coloco el diedro T' A' sobre el T A, de modo que T' y A' coincidan con T y A. Los puntos B' y C' caerán sobre B y C, en virtud de la hipótesis, y por consiguiente los tetraedros son iguales.

287. *Dos tetraedros son iguales cuando tienen una cara igual adyacente á tres diedros iguales é igualmente dispuestos.*

Digo que si A T B = A' T' B', y los diedros A T = A' T'; T B = T' B', y A B = A' B', los tetraedros son iguales.

En efecto, colocando la cara A' T' B' sobre su igual A T B, las tres caras adyacentes coincidirán, por la igualdad de los tres diedros, y por tanto el cuarto vértice C' caerá en C.

LVII.

SEMEJANZA DE TETRAEDROS.

288. Se dice que dos poliedros son *semejantes*, cuando tienen sus ángulos diedros respectivamente iguales é igualmente dispuestos y sus caras semejantes.

Las caras, vértices y aristas de los diedros iguales en dos poliedros semejantes, se llaman *caras, vértices y aristas homólogas*.

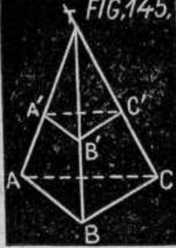
La semejanza de las caras, lleva consigo la proporcionalidad entre las aristas homólogas, que se llama *razón de semejanza*.

289. Los poliedros regulares del mismo número de caras son evidentemente semejantes.

290. *Si un tetraedro se corta por un plano paralelo á una de sus caras, el tetraedro parcial que resulta es semejante al propuesto.*

Digo que los tetraedros T A B C y T A' B' C' son semejantes.

FIG. 145.



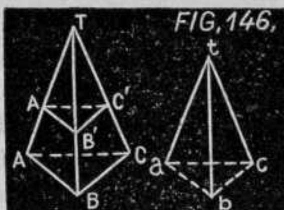
Los diedros laterales T A y T A' son uno mismo, lo propio que T B y T B', T C y T C'.

Los diedros de las bases son también iguales (224, 2.°); luego los dos tetraedros tienen iguales todos sus ángulos diedros.

Las caras laterales son semejantes (99), lo mismo que las bases (283) luego los tetraedros son semejantes.

291. *Dos tetraedros son semejantes cuando tienen sus caras respectivamente semejantes y semejantemente dispuestas.*

FIG. 146.



Sean los dos tetraedros T A B C y *t a b c*, cuyas caras suponemos semejantes; digo que los dos tetraedros son semejantes.

En efecto, tomando T A' = *t a*, y trazando el plano A' B' C' paralelo al A B C, resultará el tetraedro T A' B' C' semejante al T A B C. Pero los dos tetraedros T A' B' C' y *t a b c* son iguales (285), luego también el *t a b c* será semejante al T A B C.

292. *Dos tetraedros son semejantes cuando tienen dos*

caras respectivamente semejantes y semejantemente dispuestas, é igual el ángulo diedro comprendido.

Se demuestra de modo análogo al anterior.

293. *Dos tetraedros son semejantes cuando tienen una cara semejante adyacente á tres ángulos diedros iguales é igualmente dispuestos.*

Se demuestra como los dos anteriores.

LVIII.

PRISMAS.

294. Se llama *prisma* un poliedro cuyas caras son dos polígonos paralelos é iguales y paralelógramos todas las demás.

Los dos polígonos paralelos é iguales se llaman *bases* del prisma y los paralelógramos que forman las demás caras, *caras laterales*.

Altura del prisma es la distancia entre sus bases.

Los prismas se clasifican por los polígonos de sus bases en *triangulares*, *cuadrangulares*, *pentagonales*, etc.

295. *Prisma recto* es el que tiene las aristas laterales perpendiculares á las bases. Las caras laterales son, por tanto, rectángulos y la arista lateral es igual á la altura.

296. *Paralelepípedo* es el prisma cuya base es un paralelógramo.

Paralelepípedo recto es el que tiene las aristas laterales perpendiculares á las bases.

El paralelepípedo se llama *rectángulo* cuando, además de ser recto, tiene por base un rectángulo.

Cubo es el paralelepípedo rectángulo cuyas seis caras son cuadrados, necesariamente iguales.

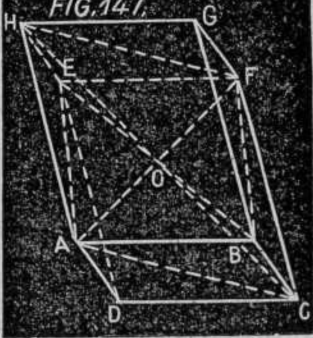
297. *Dos prismas rectos de igual base y altura son iguales.*

Pues colocándolos de modo que coincidan sus bases inferiores, las aristas laterales coincidirán (194), y como tienen igual altura, coincidirán también sus extremos, que son los vértices de las bases superiores.

298. *Las caras opuestas del paralelepípedo son iguales y paralelas.*

Voy á demostrar que A B G H = C D E F.

FIG. 147.



En efecto, A B = H G, y A H = E D; y H A B = E D C (202); por consiguiente los paralelógramos A B G H y C D E F, son iguales y paralelos.

Escolio. De aquí se deduce que pueden tomarse por bases del paralelepípedo dos caras opuestas cualesquiera.

299. *Las diagonales del paralelepípedo se cortan mútuamente en partes iguales.*

Las diagonales del paralelepípedo son A F, C H, D G y B E. Ahora bien, siendo A B y E F iguales y paralelas, el cuadrilátero A E F B será un paralelógramo y sus diagonales A F y B E se cortarán mútuamente en partes iguales,

Pero por ser A H y C F paralelas é iguales, A H C F es otro paralelógramo, luego también A F y C H se cortan en partes iguales; de donde se infiere que A F, B E y C H cumplen las condiciones del enunciado; y lo mismo se demuestra respecto de D G.

Corolario. *En todo paralelepípedo rectángulo, el cuadrado de una diagonal es igual á la suma de los cuadrados de las tres aristas concurrentes en un vértice.*

Pues si el paralelepípedo considerado en el caso anterior fuera rectángulo, el triángulo A E B nos daría (106)

$$\overline{EB}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{AB}^2;$$

pero, por la misma razón, $\overline{EA}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{DA}^2$;
luego

$$\overline{EB}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{DA}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{DA}^2 + \overline{DE}^2.$$

Escolio. El punto donde se encuentran las cuatro diagonales del paralelepípedo se llama *centro*. Se demuestra fácilmente que toda recta que pasa por el centro, y termina en la superficie del paralelepípedo, queda dividida en dicho punto en dos partes iguales.

299. *Las secciones planas paralelas de un prisma son polígonos iguales.*

Pues sus lados son iguales por paralelas comprendidas entre paralelas, y de esta propiedad se deduce que sus ángulos también son iguales.

300. Se llama *seccion recta* de un prisma oblícuo la que determina un plano perpendicular á las aristas laterales.

Del principio anterior se deduce que todas las secciones rectas de un prisma son iguales.

Prisma truncado ó *tronco de prisma* es la porción de prisma comprendida entre una base y una sección plana no paralela á la base.

LIX.

ÁREAS DE LAS PIRÁMIDES.

301. Ya hemos dicho (145) lo que se entiende por área de una superficie y cual es la unidad superficial. Se

comprende fácilmente que el área de la superficie de un poliedro se obtendrá sumando las áreas de sus caras; lo que nos indica que este es un problema ya resuelto en geometría plana.

Unicamente, pues, nos ocuparemos ahora de determinar las áreas en algunos casos particulares que conducen á fórmulas sencillas que abrevian el procedimiento ordinario.

Área lateral de una pirámide ó prisma es la suma de las áreas de sus caras laterales. Por consiguiente, el área total se obtendrá añadiendo al área lateral el área de las bases.

302. *El área lateral de una pirámide regular es igual á la mitad del producto de la apotema por el perímetro de la base.*

Pues si llamamos b á la base y a á la altura de uno de los triángulos laterales, su área será $\frac{1}{2}\ b\ a$; y como todas las caras laterales son iguales, el área lateral de la pirámide será

$$\frac{1}{2}\ b\,a \times n = \frac{1}{2}\ a \times b\,n = \frac{1}{2}\ a \times p,$$

llamando p al perímetro de la base.

Corolario. *El área total de una pirámide regular es igual á la mitad del producto del perímetro de su base por la suma de las apotemas de la pirámide y de su base.*

Pues hemos visto que el área lateral es $\frac{1}{2}\ p \times a$; y el área de la base es (151) $\frac{1}{2}\ p \times a'$, llamando a' á su apotema; luego el área total será $\frac{1}{2}\ p\ (a + a')$.

303. *El área lateral de una pirámide regular truncada de bases paralelas es igual al producto de la apotema por la semi-suma de los perímetros de las bases.*

En efecto, llamando b y b' á las bases de uno de los trapecios laterales y a á su altura, su área será (150)

$a \times \frac{b+b'}{2}$ y como todas las caras laterales son iguales, por ser regular el tronco, el área de éste será:

$$a \times \frac{b+b'}{2} \times n = a \times \frac{bn+b'n}{2} = a \times \frac{p+p'}{2},$$

llamando p y p' á los perímetros de sus bases.

304. *La razón de las áreas de dos poliedros semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza de sus caras homólogas.*

En efecto, llamando C, C', C''....... á las caras de un poliedro, y c, c', c'' las homólogas del otro, y L y l á dos lados homólogos, tendremos,

$$\frac{C}{c} = \frac{L^2}{l^2};\ \frac{C'}{c'} = \frac{L^2}{l^2};\ \frac{C''}{c''} = \frac{L^2}{l^2};$$

de donde $\frac{C}{c} = \frac{C'}{c'} = \frac{C''}{c''} = \ldots\ldots$

y, por último, (Arit. 165)

$$\frac{C + C' + C'' + \ldots\ldots}{c + c' + c'' + \ldots\ldots} = \frac{C}{c} = \frac{L^2}{l^2}.$$

Corolario. *La razón de las áreas de dos pirámides, ó de dos troncos de pirámide semejantes, es el cuadrado de la razón de semejanza.*

LX.

ÁREAS DE LOS PRISMAS.

305. *El área lateral de un prisma es igual al producto del perímetro de su sección recta por su arista lateral.*

En efecto, las alturas de las caras de un prisma son los lados de la sección recta, de suerte que si los llamamos a, a', a''....., y representamos por b, la arista lateral del prisma, tendremos que las áreas de sus caras serán $a \times b$, $a' \times b$, $a'' \times b$.....; luego el área del prisma será $b\,(a + a' + a'' + \ldots\ldots)$, conforme al enunciado.

COROLARIOS. 1.º *El área lateral del prisma recto es igual al producto del perímetro de su base por su altura.*

Pues la base es la sección recta, y la altura es la arista lateral.

2.º *El área total del prisma recto es igual al perímetro de su base por la suma de su altura y la apotema de la base.*

Pues sumando el área lateral y la de la base obtendremos este resultado.

306. *La razón de las áreas laterales de dos prismas semejantes es el cuadrado de la razón de semejanza.*

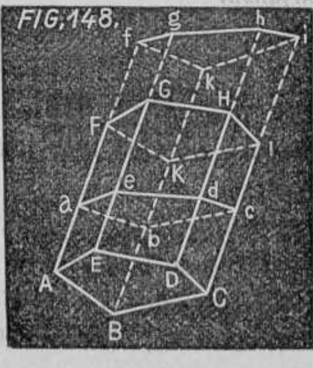
Pues hemos demostrado que es la razón de las áreas de dos poliedros semejantes.

LXI.

EQUIVALENCIA DE LOS POLIEDROS.

307. *Todo prisma oblicuo es equivalente á un prisma recto que tenga por base la sección recta del primero y por altura su arista lateral.*

FIG. 148.



En efecto, sea el prisma oblícuo A I y *a c* su sección recta. Prolongo las aristas laterales del prisma y tomo en su prolongación *a f* = A F. Hago ahora resbalar el tronco de prisma A *c* á lo largo de la arista A F hasta que la base A C del prisma propuesto coincida con la otra base F I; entonces, y en virtud de la construcción, la sección *a c* coincidirá con *f i*, lo que nos demuestra que el tronco A *c* = F *i*.

Añadiendo á los dos miembros de esta igualdad *a* I, resultará A I = *a i*, que es lo que queríamos demostrar.

308. *El plano diagonal de un paralelepípedo divide á este en dos prismas triangulares equivalentes.*

Pues trazando en la sección recta del paralelepípedo una diagonal, quedará descompuesta en dos triángulos iguales, que serán á su vez las secciones rectas de los dos prismas triangulares. Pero como cada uno de estos, segun el principio anterior, equivale á un prisma recto que tenga por base la sección recta y por altura su arista lateral, y estos dos prismas rectos son iguales (297), los dos prismas triangulares propuestos serán equivalentes.

Corolarios 1.º *Todo prisma triangular es mitad de un paralelepípedo de doble base é igual altura*, segun hemos visto.

2.º *Dos prismas triangulares de igual base y altura son equivalentes.*

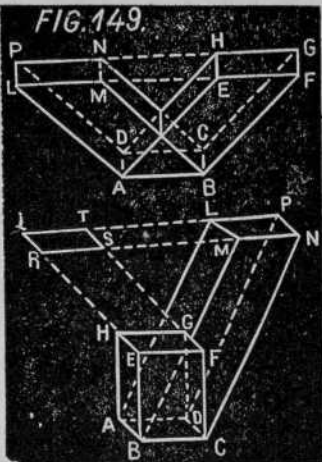
Pues cada uno es mitad del paralelepípedo de doble base y de la misma altura.

3.º *Dos prismas cualesquiera de igual base y altura son equivalentes.*

Pues descompuestos en prismas triangulares, estos prismas serán equivalentes, luego sus sumas, que son los prismas propuestos, también lo serán.

309. *Los paralelepípedos de igual base y altura, son equivalentes.*

Puesto que los dos paralelepípedos tienen igual base los podremos colocar de modo que coincidan las inferiores; y como tienen igual altura, las bases superiores quedarán en un plano.



Entonces puede suceder que tengan además dos caras laterales en el mismo plano, ó que estén todas en planos distintos.

En el primer caso, si las caras A M y B E están en un plano, sus opuestas D N y C H también lo estarán; por consiguiente E F y L M estarán en línea recta, así como H G y P N.

Ahora bien, los dos prismas triangulares A L E D P H y B M F C N G son iguales (308, cor. 2.º). Pero si del poliedro total se resta el primer prisma triangular queda el paralelepípedo A G; y si se resta el segundo, queda el B P. Por consiguiente, estos dos paralelepípedos son equivalentes.

En el segundo caso, si los paralelepípedos son A F y A N, prolongando las bases M P y E G, resultará un tercer paralelepípedo A S que se halla con los dos propuestos en el caso anterior. Así, pues, siendo A F y A N equivalentes á A S, serán equivalentes entre sí.

COROLÁRIOS. 1.° *Todo paralelepípedo oblicuo es equivalente á otro recto de la misma base y altura.*

2.° *Todo paralelepípedo recto, es equivalente á otro rectángulo de base equivalente y de la misma altura.*

Pues trazando por los vértices de la base planos perpendiculares á la misma, resultará un paralelepípedo rectángulo, que se encontrará con el propuesto en el caso primero del teorema que se acaba de demostrar.

3.° *Un paralelepípedo oblicuo cualquiera es equivalente á otro rectángulo de base equivalente é igual altura.*

Se deduce de los dos anteriores.

310. *Dos tetraedros de igual altura y bases equivalentes son equivalentes.*

En efecto, dividiendo la altura común en cualquier número de partes iguales y trazando planos por los puntos de división, las secciones resultantes son equivalentes (283, cor. 3.°). Si tomando estas secciones como bases construímos prismas internos en los dos tetraedros, estos prismas serán equivalentes (308, cor. 3.°), luego sus sumas también lo serán.

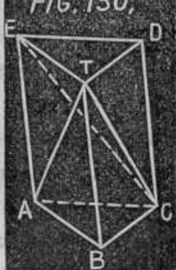
Si dividimos la altura comun en mayor número de partes, las sumas de los prismas se aproximan á los tetraedros propuestos, con los que se confundirán en el límite; y como son constantemente equivalentes, los tetraedros también lo serán.

311. *Todo tetraedro es equivalente á la tercera parte de un prisma de su misma base y altura.*

Sea el tetraedro (fig. 150) T A B C; trazo por los vértices A y C las paralelas A E y C D á la arista T B, y por el punto T un plano paralelo á la base, y resultará el prisma E T D A B C que tiene la misma base y altura que el tetraedro propuesto.

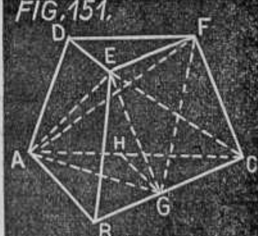
Ahora bien, si del prisma quitamos el tetraedro propuesto, queda la pirámide cuadrangular T A E D C, y trazando el plano diagonal T E C, quedará descompuesta en los tetraedros T E D C y T E A C. El tetraedro T E D C ó C E T D tiene la misma altura que el tetraedro propuesto é igual base. El T E A C es equivalente al B E A C, por tener la misma base é igual altura, puesto que sus vértices T y B están en una paralela á la base; y el B E A C ó E A B C tiene igual base y altura que el propuesto. Por consiguiente, los tres tetraedros que componen el prisma son equivalentes; luego el propuesto es la tercera parte del prisma.

FIG. 150.



312. *Un tronco de tetraedro de bases paralelas es equivalente á la suma de tres tetraedros que tengan por altura comun la del tronco, y por bases las dos del tronco y una media proporcional entre ellas.*

FIG. 151.



Sea el tronco A B C D E F. Hago pasar un plano por los puntos E, A y C, y el tronco quedará descompuesto en la pirámide cuadrangular E A D F C y el tetraedro E A B C, que tiene la altura del tronco y por base la mayor del tronco. Si ahora trazo el plano diagonal E A F, la pirámide cuadrangular quedará descompuesta en los dos tetraedros E A D F y E A F C. El primero E A D F ó A D E F tiene la altura del tronco y por base la menor del tronco. Solo nos resta, pues, demostrar que el tetraedro E A F C cumple con la tercera condición del enunciado.

Para esto, tiremos E G paralela á la base A F C del tetraedro, y resultará el tetraedro G A F C equivalente al E A F C por tener la misma base é igual altura, puesto que los vértices E y G están en una paralela á la base. Ahora bien, el tetraedro G A F C ó F A G C, tiene la misma altura del tronco, si pues demostramos que su base A G C es media proporcional entre las bases del tronco, el teorema quedará demostrado. Trazo para esto la G H paralela á A B, y los triángulos D E F y H G C serán iguales (94); pero los triángulos A B C y A G C, que tienen comun el ángulo C, nos dan (156)

$$\frac{ABC}{AGC} = \frac{AC \times BC}{AC \times GC} = \frac{BC}{GC};$$

y los triángulos A G C y H G C, que tienen el ángulo C comun, nos dan por la misma razón,

$$\frac{AGC}{HGC} = \frac{AC \times CG}{HC \times GC} = \frac{AC}{HC};$$

pero los triángulos A B C y H G C semejantes, nos dan:

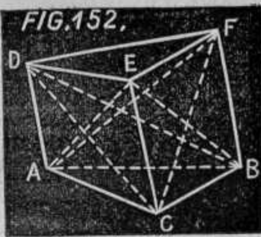
$$\frac{BC}{GC} = \frac{AC}{HC}; \text{ luego } \frac{ABC}{AGC} = \frac{AGC}{HGC},$$

que es lo que queríamos demostrar.

313. *Todo tronco de prisma triangular equivale á la suma de tres tetraedros, que tienen por base una de las bases del tronco y por alturas las distancias á esta base de los tres vértices de la otra.*

Sea el tronco de prisma A B C D E F. Trazo el plano A E B y quedará descompuesto el tronco en el tetraedro E A C B y la pirámide cuadrangular E A D F B. El tetraedro E A C B tiene por base la base A C B del tronco y por altura la distancia del vértice E á esta base.

FIG. 152.



La pirámide cuadrangular E A D F B puede descomponerse por el plano diagonal E D B en los dos tetraedros E A D B y E D F B. El E A D B es equivalente al C A D B por tener la misma base y los vértices E y C en una paralela á la base; y el C A D B ó D A B C tiene por base la base A C B del tronco y por altura la distancia del vértice D á esta base.

El tercer tetraedro E D F B es equivalente al C A F B por tener bases equivalentes D F B y A F B (pues tienen la misma base F B é igual altura) é igual altura, por tener los vértices E y C en una paralela á la base; y el C A F B ó F A C B tiene por base la base A C B del tronco y su altura es la distancia del tercer vértice F á esta base; conforme á lo que se quería demostrar.

LXII.

VOLÚMEN DEL PRISMA.

314. Se llama *volúmen* de un cuerpo la medida del espacio ocupado por esta cuerpo.

La unidad de volúmen es el cubo cuya arista es la unidad lineal. Por esta razón las unidades de volúmen se llaman también unidades cúbicas.

La determinación de los volúmenes de los poliedros se funda en el siguiente principio.

315. *Dos paralelepípedos rectángulos de igual base y altura son iguales.*

Pues hemos demostrado (297) que los prismas rectos de igual base y altura son iguales.

Corolarios. 1.° *Dos paralelepípedos rectángulos de igual base son directamente proporcionales á sus alturas.*

Pues del principio anterior se deduce que si la altura del uno es doble de la del otro, el primer paralelepípedo será doble del segundo (Arit. 258).

2.° *Dos paralelepípedos rectángulos de igual altura son directamente proporcionales á sus bases.*

Sea P un paralelepípedo y a, b y c sus tres dimensiones; P′ el otro, y a, b' y c', sus dimensiones. Llamemos P″ á un tercer paralelepípedo cuyas dimensiones sean a, b y c'. Los dos paralelepípedos P y P″ que tienen dos dimensiones iguales a y b, es decir igual base, nos dán

$$\frac{P}{P''} = \frac{c}{c'};$$

los paralelepípedos P″ y P′, que tienen iguales las dimensiones a y c' nos darán, por igual razón,

$$\frac{P''}{P'} = \frac{b}{b'};$$

y multiplicando estas dos proporciones, y suprimiendo el factor común P″, resulta $\frac{P}{P'} = \frac{b \times c}{b' \times c'}$,

que es lo que queríamos demostrar.

3.° *Dos paralelepípedos rectángulos cualesquiera son directamente proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas.*

Se demuestra de modo análogo al anterior.

316. *El volúmen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de su base por su altura.*

Sea P el paralelepípedo, a su altura y b y c las dimensiones de la base; sea C un cubo y l su arista; tendremos

$$\frac{P}{C} = \frac{a \times b \times c}{l^3}.$$

El primer miembro representa la medida del paralelepípedo, suponiendo que C sea la unidad de volúmen, en cuyo caso $l = 1$; luego $\frac{P}{C} = a \times b \times c$, conforme al enunciado.

Corolarios. 1.° *El volúmen del cubo es la tercera potencia de su lado.*

Puesto que las tres dimensiones son iguales.

Por esta se llama *cubo* á la tercera potencia.

2.° *El volúmen de un paralelepipedo cualquiera es igual al producto de su base por su altura.*

Pues equivale á otro rectángulo de base equivalente é igual altura (309, cor. 3.°).

317. *El volúmen de un prisma triangular es igual al producto de su base por su altura.*

Pues segun hemos visto (308, cor. 1.°) será la mitad del volúmen del paralelepípedo de doble base é igual altura.

318. *El volúmen de un prisma cualquiera es igual al producto de su base por su altura.*

Pues descomponiéndole en prismas triangulares, el volúmen del prisma propuesto será la suma de los volúmenes de los prismas triangulares; es decir, el producto de la altura por la suma de los triángulos que les sirven de base, que es el polígono base del prisma propuesto.

319. *El volúmen de un prisma triangular truncado es igual al tercio del producto de su base por la suma de las distancias á esta base de los tres vértices de la otra.*

Pues hemos visto (313) que equivale á la suma de tres tetraedros de igual base que el tronco y cuyas alturas son las distancias indicadas.

LXIII.

VOLÚMEN DE LA PIRÁMIDE.

320. *El volúmen de un tetraedro es igual al tercio del producto de su base por su altura.*

Pues hemos visto (311) que es la tercera parte de un prisma de su misma base y altura.

321. *El volúmen de una pirámide cualquiera es igual al tercio del producto de su base por su altura.*

Pues descomponiéndola en tetraedros, el volúmen de la pirámide será la suma de los volúmenes de los tetraedros; es decir, el tercio de su altura multiplicado por la suma de los triángulos que les sirven de base, que es el polígono base de la pirámide.

322. *El volúmen de un tronco de tetraedro de bases paralelas es igual al tercio del producto de su altura por la suma de las bases y de una media proporcional entre ellas.*

Puesto que es la suma de tres tetraedros de igual altura y cuyas bases son las enunciadas (312).

223. *El volúmen de un tronco de pirámide de bases paralelas es igual al tercio del producto de su altura por la suma de las bases y de una media proporcional entre ellas.*

Pues si imaginamos construída la pirámide total á que pertenece el tronco, y construímos un tetraedro de igual altura y base equivalente, trazando la sección paralela á su base y á igual distancia del vértice que la de la base menor del tronco de pirámide, la sección y esta base menor serán equivalentes (283, cor. 3.º). Luego el tronco de pirámide y el de tetraedro serán equivalentes, como diferencias respectivas de cantidades equivalentes, y por tanto el volúmen del tronco de pirámide será el mismo que el del tronco de tetraedro.

324. El volúmen de un poliedro cualquiera se obtiene descomponiéndole en pirámides, que tengan por vértice común un punto interior del poliedro, y cuyas bases sean las caras de éste. La suma de estos volúmenes, ya conocidos, será el volúmen pedido.

LXIV.

POLIEDROS REGULARES.

325. Se llama *poliedro regular* al que tiene todas sus caras regulares é iguales y todos sus ángulos diedros también iguales.

236. *No hay más que cinco poliedros regulares.*

En efecto, sabemos que se necesitan tres ángulos planos para formar ángulo poliedro; y que la suma de aquellos ha de ser menor que cuatro ángulos rectos (235). Sabido esto, solo nos resta examinar sucesivamente los ángulos de polígono regular con que podemos formar ángulos poliedros, para deducir el número de los poliedros regulares.

Con tres ángulos de triángulo equilátero, que es el polígono regular más sencillo, cuya suma es dos ángulos rectos, puede formarse ángulo sólido. El poliedro regular constituído de este modo se llama *tetraedro regular* y tiene por caras cuatro triángulos equiláteros.

Con cuatro ángulos de triángulo equilátero, cuya suma es $\frac{8}{3}$ de recto < 4 R, puede formarse ángulo sólido. El poliedro regular que resulta, se llama *octaedro regular* y tiene por caras ocho triángulos equiláteros.

Con cinco ángulos de triángulo equilátero, cuya suma es $\frac{10}{3}$ de recto < 4 R, puede formarse ángulo poliedro.

El poliedro resultante se llama *icosaedro regular* y está constituído por veinte triángulos.

Con seis ángulos de triángulo equilátero, cuya suma es 4 R no puede ya formarse ángulo poliedro; y con más razón con más ángulos. Luego con ángulos de triángulo equilátero no pueden formarse más poliedros regulares.

Con tres ángulos de cuadrado, cuya suma es tres rectos, puede formarse ángulo sólido. El poliedro que resulta se llama *exaedro regular* ó *cubo*, y consta de seis cuadrados.

Pero con cuatro ángulos de cuadrado, que valen cuatro rectos, ya no es posible formar ángulo sólido, y menos con más.

Con tres ángulos de pentágono regular cuya suma es $\frac{18}{5}$ de recto < 4 R, puede formarse ángulo poliedro y el poliedro que resulta se llama *dodecaedro regular*, y tiene por caras doce pentágonos.

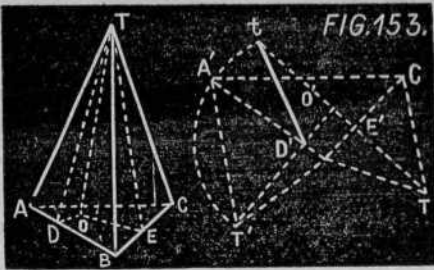
Pero con cuatro ángulos de pentágono, cuya suma es $\frac{24}{5}$ de recto > 4 R, no es ya posible formar ángulo poliedro.

Con tres ángulos de exágono, cuya suma es cuatro rectos, no es posible formar ángulo sólido. Pero á medida que el número de lados de un polígono regular aumenta (144) el valor del ángulo aumenta también, luego no será ya posible formar más ángulos poliedros regulares. Es decir, que no existen más que cinco poliedros regulares.

LXV.

PROBLEMAS RELATIVOS Á LOS POLIEDROS.

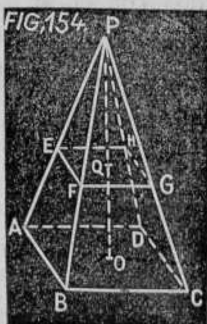
327. *Determinar la altura de un tetraedro.*



Sea T A B C el tetraedro cuya altura T O queremos calcular. Tracemos O D y O E perpendiculares á A B y B C, y unamos T con D y E.

Si construímos un triángulo A' B' C' = A B C; y sobre A' B' el A' B' T' = A B T, y sobre B' C' el B' C' T'' = B C T; y desde T' y T'' bajamos las perpendiculares T' O' y T'' O' á los lados A' B' y B' C', es indudable que estas perpendiculares representan las T D y O D y las T E y O E (198) del tetraedro, cuyo pie O de la altura determinan, y la cuestión queda reducida á construir el triángulo rectángulo T O D, del que conocemos la hipotenusa T D = T' D' y el cateto O D = O' D'. El otro cateto O' *t* representará, pues, la altura pedida.

328. *Dado un tronco de pirámide de bases paralelas, hallar su altura, la de la pirámide total y la de la deficiente.*



La altura del tronco puede calcularse por la del tetraedro E A B D, según hemos visto.

La de la pirámide total y la de la deficiente se obtienen inmediatamente observando que (283)

$$\frac{PA}{PE} = \frac{PO}{PQ} \text{ y } \frac{PA}{PE} = \frac{AB}{EF},$$

$$\text{de donde } \frac{AB}{EF} = \frac{PO}{PQ},$$

$$\text{que nos dá (Arit. 160 y 161) } \frac{AB - EF}{AB} = \frac{PO - PQ}{PO};$$

$$PO = \frac{AB \times QO}{AB - EF}$$

$$\text{y } \frac{AB - EF}{EF} = \frac{PO - PQ}{PQ};\ PQ = \frac{EF \times QO}{AB - EF}.$$

LXVI.

CONO.

329. Los cuerpos limitados por una superficie cónica, cilíndrica ó esférica se llaman *cuerpos redondos.*

Los cuerpos redondos son el *cono*, *cilindro* y *esfera*

330. Se llama *cono* el cuerpo limitado por una superficie cónica y un plano que corta á todas sus generatrices.

La porción de este plano limitado por las generatrices de la superficie cónica se llama *base* del cono. *Vértice* del cono es el de su superficie cónica. *Altura* es la distancia del vértice al plano de la base.

El cono se llama *circular*, si su base es un círculo, en cuyo caso se llama *eje* la recta que une el vértice con el centro de la base.

Cono recto es el que tiene el eje perpendicular á la base; y en el caso contrario se dice *oblícuo*.

El cono recto puede considerarse engendrado por un triángulo rectángulo que gira alrededor de uno de los catetos. El cateto fijo es el eje del cono; el cateto móvil engendra la base, cuyo radio es; y la hipotenusa, que toma el nombre de *lado*, la superficie cónica.

De aqui se deduce: 1.° *Que la sección recta de un cono de revolución es un círculo paralelo á su base* (251). 2.° *Que la sección de un cono de revolución por un plano que pase por el eje, es un triángulo isósceles doble del triángulo generador* (253, cor.)

331. *Dos conos de revolución de iguales bases y alturas, son iguales.*

Pues colocándolos de modo que coincidan sus bases, coincidirán también sus alturas y sus vértices, y por tanto, sus superficies cónicas.

Corolario. *Dos conos de revolución son iguales, siempre que lo sean sus triángulos generadores.*

Pues tendrán iguales bases y alturas.

332. Se llaman *conos de revolución semejantes* los que tienen sus triángulos generadores semejantes.

Corolarios. 1.° *Si un cono de revolución se corta por un plano paralelo á su base, el cono deficiente es semejante al total.*

Pues los triángulos generadores serán semejantes.

2.° *Dos conos de revolución semejantes tienen proporcionales sus líneas homólogas.*

Por lados de triángulos semejantes.

3.° *Las bases de dos conos semejantes son directamente proporcionales á los cuadrados de sus lados y á los cuadrados de sus alturas.*

Pues son proporcionales á los cuadrados de sus radios (184, cor.)

333. *Dado un cono de revolución hallar su altura.*

Hallando el centro de la base (69, 2.º) para determinar el radio, la cuestión queda reducida á construir un triángulo rectángulo dada la hipotenusa y un cateto.

334. Se llama *tronco de cono de bases paralelas* la parte de cono comprendido entre la base y un plano paralelo á la base.

Lado del tronco es la porción de lado del cono comprendido entre las bases.

335. *Dado un tronco de cono de revolución de bases paralelas, hallar su altura, la del cono total y la del deficiente.*

FIG.155.

Hállese el centro de las bases (69, 2.º) para determinar los radios, y construyendo un triángulo rectángulo con la hipotenusa (lado del tronco) y un cateto (diferencia de los radios), tendremos la altura del tronco.

La del cono total y el deficiente, la obtendremos por la proporción (332, 2.º) $\frac{SO}{SQ} = \frac{OA}{QC}$; que nos dá (Aritmética 160 y 161).

$$\frac{SO - SQ}{SO} = \frac{OA - QC}{OA} \text{ y}$$

$$\frac{SO - SQ}{SQ} = \frac{OA - QC}{QC};$$

de donde,

$$SO = \frac{OQ \times OA}{OA - QC}; \text{y } SQ = \frac{OQ \times QC}{OA - QC}.$$

LXVII.

CILINDRO.

336. Se llama *cilindro* el cuerpo limitado por una superficie cilíndrica y dos planos que cortan á todas sus generatrices.

Las porciones de estos planos limitadas por las generatrices de la superficie cilíndrica se llaman *bases* del cilindro.

Altura es la distancia entre las bases.

El cilindro se llama *circular*, si sus bases son dos círculos, en cuyo caso se llama *eje* la recta que une los centros de las bases.

Cilindro recto es el que tiene el eje perpendicular á las bases; en el caso contrario se dice *oblicuo*.

El cilindro recto puede considerarse engendrado por un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados. El lado fijo es el eje del cilindro; el lado opuesto, que toma el nombre de *lado*, engendra la superficie cilíndrica; y los otros dos lados engendran las bases, cuyos radios son.

De aquí se deduce: 1.º *Que la sección recta de un cilindro de revolución es un círculo* (258). 2.º *Que la sección de un cilindro de revolución por un plano que pase por el eje, es un rectángulo duplo del rectángulo generador* (260, cor.)

337. *Dos cilindros de revolución de iguales bases y alturas son iguales.*

Pues colocándolos de modo que coincidan las bases inferiores, coincidirán también las alturas ó ejes; y, por consiguiente, las bases superiores y las superficies cilíndricas.

COROLARIO. *Dos cilindros de revolución son iguales, siempre que lo sean sus rectángulos generadores.*

Pues tendrán iguales bases y alturas.

338. Se llaman *cilindros de revolución semejantes* los que tienen semejantes sus rectángulos generadores.

COROLARIOS. 1.º *Si un cilindro de revolución se corta por un plano paralelo á su base, los cilindros parciales no son semejantes al total.*

Pues los rectángulos generadores no son semejantes.

2.º *Dos cilindros de revolución semejantes tienen proporcionales sus líneas homólogas.*

Por lados de rectángulos semejantes.

3.º *Las bases de dos cilindros semejantes son directamente proporcionales á los cuadrados de sus lados y á los cuadrados de sus alturas.*

Pues son proporcionales á los cuadrados de sus radios (184, cor.)

LXVIII.

ÁREA DEL CONO.

339. *El área lateral de un cono de revolución es igual á la mitad del producto de su lado por la circunferencia de su base.*

Pues hemos visto (256) que su desarrollo es un sector circular, luego su área lateral será la de este (183).

Si llamamos l al lado del cono y r al radio de la base, el área vendrá expresada por $\pi\, r\, l$.

COROLARIO. *La razón de las áreas laterales de dos conos de revolución semejantes es el cuadrado de la razón de semejanza.*

Pues de $A = \pi\, r\, l$; y $A' = \pi\, r'\, l'$; resulta

$$\frac{A}{A'} = \frac{r\, l}{r'\, l'}\ ;\ \text{y como}\ \frac{r}{r'} = \frac{l}{l'}\ (332,\ \text{cor. } 2.^{\circ}),$$

tendremos $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{r^2}{r'^2} = \dfrac{l^2}{l'^2}$.

340. *El área total del cono de revolución es igual al producto de la semi-circunferencia de su base por la suma del lado y el radio de la base.*

Pues el área lateral es $A = \pi r l$; y la de la base es πr^2; luego el área total será $\pi r l + \pi r^2 = \pi r (l + r)$.

Corolario. *La razón de las áreas totales de dos conos de revolución semejantes es el cuadrado de la razón de semejanza.*

Pues llamando A y A' á las áreas laterales y B y B' á las bases; tendremos $\frac{A}{A'} = \frac{r^2}{r'^2}$ (339, cor.);

$$\text{y } \frac{B}{B'} = \frac{r^2}{r'^2} \text{ (184, cor.)}$$

$$\text{de donde } \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'};$$

que dá (Arit. 162, 4.ª) $\frac{A + B}{A' + B'} = \frac{A}{A'} = \frac{r^2}{r'^2}$.

341. El cono de revolución se llama *equilátero* cuando su lado es igual al diámetro de su base.

El área lateral del cono equilátero es los dos tercios del área total y doble del área de su base.

Pues su área total es $\pi r (2 r + r) = 3 \pi r^2$ y el área lateral es $2 \pi r^2$.

342. *El área lateral del tronco de cono de revolución de bases paralelas es igual al producto de su lado por la semi-suma de las circunferencias de sus bases.*

Pues el desarrollo del tronco de cono de revolución de bases paralelas es la diferencia de los desarrollos del cono total y del cono deficiente, ó sea un trapecio circular, cuya altura es el lado del tronco, y cuyas bases tienen la misma longitud que las circunferencias bases del tronco.

Llamando, pues, l al lado del tronco y R y r á los radios de sus bases; el área del trapecio circular, ó sea el área del tronco será $l \times (\pi R + \pi r)$.

LXIX.

ÁREA DEL CILINDRO.

343. *El área lateral de un cilindro de revolución es igual al producto de su lado por la circunferencia de su base.*

Pues hemos visto (263) que su desarrollo sobre un plano es un rectángulo, luego su área lateral será la de esta (147).

Si llamamos l al lado del cilindro y r al radio de la base, el área vendrá expresada por $2\pi r l$.

Corolario. *La razón de las áreas laterales de dos cilindros de revolución semejantes es el cuadrado de la razón de semejanza.*

Pues de $A = 2\pi r l$; y $A' = 2\pi r' l'$;

resulta $\frac{A}{A'} = \frac{r l}{r' l'}$; y como $\frac{r}{r'} = \frac{l}{l'}$ (338, cor. 2.º),

tendremos, por fin, $\frac{A}{A'} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{l^2}{l'^2}$.

344. *El área total del cilindro de revolución es igual al producto de la circunferencia de su base por la suma del lado y el radio de la base.*

Pues el área lateral es $2\pi r l$, y la de las bases es $2\pi r^2$; luego el área total será $2\pi r l + 2\pi r^2 = 2\pi r (l + r)$.

Corolario. *La razón de las áreas totales de dos cilindros de revolución semejantes, es el cuadrado de la razón de semejanza.*

Pues llamando A y A' á las áreas laterales, y B y B' á las bases;

tendremos $\frac{A}{A'} = \frac{r^2}{r'^2}$ (343, cor.);

y $\frac{B}{B'} = \frac{r^2}{r'^2}$ (184, cor.),

de donde $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$;

que dá (Arit. 162, 4.ª) $\frac{A+B}{A'+B'} = \frac{A}{A'} = \frac{r^2}{r'^2}$.

LXX.

VOLÚMEN DEL CONO

345. Se dice que una pirámide está *inscripta* á un cono, ó que el cono está *circunscripto* á la pirámide, cuando el vértice del cono es el mismo que el de la pirámide y la base de la pirámide está inscripta en la base del cono.

Si la pirámide y el cono tienen el mismo vértice y la base de la pirámide está circunscripta á la base del cono, la pirámide se llama *circunscripta* al cono, ó el cono *inscripto* en la pirámide.

346. De aqui se deduce: 1.º *Que toda pirámide regular puede inscribirse y circunscribirse á un cono de revolución.*

Pues su base puede inscribirse y circunscribirse á un círculo (163); y

2.º *Que el cono de revolución es el límite superior de las pirámides regulares inscriptas y el límite inferior de las circunscriptas, cuyo número de caras aumenta indefinidamente*, pues la circunferencia de su base (175) es el límite superior de los perímetros de los polígonos regulares inscriptos y el inferior de los circunscriptos.

347. *El volúmen de un cono de revolución es el tercio del producto de su base por su altura.*

Pues acabamos de ver que el cono es el límite superior de las pirámides regulares inscriptas, y el volúmen de la pirámide (321) es el tercio del producto de su base por su altura.

Si llamamos a á la altura del cono y r al radio de su base, el volúmen vendrá expresado por $V = \frac{1}{3} \pi r^2 a$.

Corolario. *La razón de los volúmenes de dos conos de revolución semejantes es el cubo de la razón de semejanza.*

Pues de $V = \frac{1}{3} \pi r^2 a$; y $V' = \frac{1}{3} \pi r'^2 a'$;

resulta $\frac{V}{V'} = \frac{r^2 a}{r'^2 a'}$; pero $\frac{r}{r'} = \frac{a}{a'}$ (332, cor. 2.°);

luego $\frac{V}{V'} = \frac{r^3}{r'^3} = \frac{a^3}{a'^3}$.

348. *El volúmen de un tronco de cono de revolución de bases paralelas es igual al tercio del producto de su altura por la suma de sus bases y de una media proporcional entre ellas.*

Pues el tronco de cono de revolución, diferencia entre el cono total y el deficiente, es el límite superior de los troncos de pirámides regulares inscriptas, cuyo número de caras aumenta indefinidamente; y el volúmen de éstas (323) es el tercio del producto de su altura por la suma de las bases y una media proporcional entre ellas.

Si llamamos a á la altura; y R y r á los radios de las bases del tronco de cono, el volúmen vendrá expresado por $V = \frac{1}{3} a (\pi R^2 + \pi r^2 + \pi R r)$.

LXXI.

VOLÚMEN DEL CILINDRO.

349. Se dice que un prisma está *inscripto* á un cilindro, ó un cilindro está *circunscripto* al prisma, cuando las bases del prisma están inscriptas en las bases del cilindro.

Se dice que un prisma está *circunscripto* á un cilindro, ó que el cilindro está *inscripto* en el prisma, cuando las bases del prisma están circunscriptas á las del cilindro.

350. De aquí se deduce: 1.º *Que todo prisma regular puede inscribirse y circunscribirse á un cilindro de revolución.*

Pues sus bases pueden inscribirse y circunscribirse al círculo (163); y 2.º *Que el cilindro de revolución es el límite superior de los prismas regulares inscriptos y el límite inferior de los circunscriptos, cuyo número de caras aumenta indefinidamente.*

Pues las circunferencias de sus bases son el límite superior (175) de los perímetros de los polígonos regulares inscriptos y el inferior de los circunscriptos.

351. *El volúmen de un cilindro de revolución es el producto de su base por su altura.*

Pues acabamos de ver que el cilindro es el límite superior de los prismas regulares inscriptos, y el volúmen del prisma (318) es el producto de su base por su altura.

Si llamamos a á la altura del cilindro, y r al radio de su base, el volúmen del cilindro vendrá expresado por $V = \pi r^2 a$.

352. *La razón de los volúmenes de dos cilindros de revolución semejantes es el cubo de la razón de semejanza.*

Pues de $V = \pi r^2 a$ y $V' = \pi r'^2 a'$; resulta

$\frac{V}{V'} = \frac{r^2 a}{r'^2 a'}$; pero $\frac{r}{r'} = \frac{a}{a'}$ (338, cor. 2.º); luego

$$\frac{V}{V'} = \frac{r^3}{r'^3} = \frac{a^3}{a'^3}.$$

LXXII.

ESFERA.

353. Se llama *esfera* el cuerpo limitado por una superficie esférica.

La esfera puede considerarse engendrada por la revolución de un semi-círculo que gira alrededor de su diámetro.

354. Se llama *zona esférica*, la superficie engendrada por un arco de sector circular que gira alrededor de uno de sus diámetros.

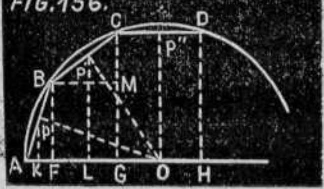
Las circunferencias descritas por los extremos del arco generador se llaman *bases* de la zona.

Si el arco generador tiene uno de sus extremos en el eje, la zona solo tendrá una *base*, y se designa también con el nombre de *casquete esférico*.

Altura de la zona es la proyección del arco generador sobre el eje.

355. *Si un sector poligonal regular gira alrededor de uno de sus radios, el área de la superficie engendrada por la línea quebrada, es igual á su proyección sobre el eje multiplicada por la circunferencia cuyo radio es la apotema*

FIG. 156.



En efecto, el sector poligonal solo puede tener tres clases de lados; unos, como A B, que tengan uno de sus extremos en el eje; otros, como B C, oblícuos al eje y otros, como C D, paralelos al eje.

Ahora bien, el lado A B, hipotenusa del triángulo rectángulo A B F, engendra la superficie lateral de un cono de revolución, cuya área será (339),

$$\pi\, B F \times A B = 2\, \pi\, p K \times A B;$$

pero los triángulos A B F y K p O son semejantes (102), y nos dán

$$A B : p O :: A F : p K;$$

de donde

$$A B \times p K = p O \times A F$$

que nos convierte el área engendrada por A B en

$$2\, \pi\, p O \times A F.$$

El lado B C, del trapecio B C F G, engendra la superficie lateral de un tronco de cono de bases paralelas, cuya área es (342)

$$B C \times (\pi\, B F + \pi\, C G) = B C \times \pi\, (B F + C G);$$

y como (118) $p' L = \dfrac{B F + C G}{2}$; tendremos,

área engendrada por B C $= B C \times 2\, \pi\, p' L$;

pero los triángulos B C M y p' L O semejantes (102) nos dan,

$$B C : p' O :: B M = F G : p' L;$$

de donde

$$B C \times p' L = p' O \times F G;$$

por consiguiente,

área engendrada por B C $= 2\, \pi\, p' O \times F G$.

Por último, el lado C D del rectángulo C D G H, engendra la superficie lateral de un cilindro de revolución, cuya área es (343).

$$C D \times 2\, \pi\, G C = 2\, \pi\, p' O \times G H.$$

El área engendrada por A B C D será, pues,

$$2\pi p O \times AF + 2\pi p' O \times FG + 2\pi p'' O \times GH =$$
$$= 2\pi p O \times (AF + FG + GH) = 2\pi p O \times AH.$$

356. *El área de una zona esférica es igual al producto de su altura por la circunferencia máxima.*

Pues el área engendrada por el arco A D (fig. 256) es el límite del área engendrada por la línea quebrada A B C D, que hemos visto es igual á $2\pi p O \times AH$; y como el límite de la apotema es el radio, el área de la zona será $2\pi r \times AH$, conforme al enunciado.

COROLARIO. *Las áreas de dos zonas de la misma esfera son directamente proporcionales á sus alturas.*

Pues de $Z = 2\pi r a$ y $Z' = 2\pi r a'$ se deduce evidentemente $\frac{Z}{Z'} = \frac{a}{a'}$.

357. *El área de la esfera es igual al producto de su diámetro por la circunferencia máxima.*

Pues la superficie de la esfera es una zona cuya altura es el diámetro.

El área de la esfera vendrá expresada por

$$2\pi r \times 2r = 4\pi r^2.$$

COROLARIOS. 1.° *El área de la esfera es cuádruple de la de su círculo máximo.*

2.° *Las áreas de dos esferas son directamente proporcionales á los cuadrados de sus radios.*

Pues de $E = 4\pi r^2$ y $E' = 4\pi r'^2$; resulta $\frac{E}{E'} = \frac{r^2}{r'^2}$.

358. Se llama *huso esférico* la parte de superficie esférica comprendida entre dos semi-circunferencias máximas.

El ángulo de estas dos semi-circunferencias se llama *ángulo del huso.*

De aquí su deduce: 1.° *Que en la misma esfera ó en* *esferas iguales, dos husos esféricos son iguales cuando sus ángulos son iguales*; y

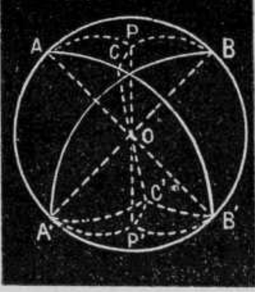
2.º *Que dos husos esféricos, de la misma esfera ó esferas iguales, son directamente proporcionales á sus ángulos esféricos.*

Es indudable que dos circunferencias máximas perpendiculares entre sí, dividen á la superficie esférica en cuatro husos iguales, cuyos ángulos esféricos son rectos.

Siendo el área de la esfera $4 \pi r^2$, el área de uno de estos husos será πr^2, es decir, la del círculo máximo de la esfera.

359. *Dos triángulos esféricos simétricos son equivalentes.*

FIG. 157.



Sea P A B y P' A' B' los dos triángulos. Sea P el polo de la circunferencia que pasa por A, B y C. Los tres arcos de círculo máximo P A, P B y P C serán iguales (267).

Tracemos el diámetro P P' y los arcos P' A', P' B' y P' C', que serán iguales á los anteriores por medidas de ángulos opuestos por el vértice. Los triángulos P A B y P' A' B', P A C y P' B' C', P B C y P' A' C', que son simétricos é isósceles, serán iguales; por consiguiente, sus sumas A B C y A' B' C' serán también equivalentes.

360. *El área del huso esférico es el doble de la medida de su ángulo esférico, siempre que se tome por unidad*

de ángulos el ángulo recto, y por unidad de áreas la del triángulo trirectángulo.

Pues siendo (358, 2.º), $\frac{H}{H'} = \frac{A}{A'}$, tomando $A' = 1$, H' será la cuarta parte de la esfera ó sea el duplo del triángulo trirectángulo, es decir, $H' = 2$, por consiguiente, tendremos $\frac{H}{2} = \frac{A}{1}$ ó $H = 2\,A$.

361. *El área de un triángulo esférico es la suma de las medidas de sus tres ángulos menos dos, siempre que se tome por unidad de ángulos el ángulo recto, y por unidad de áreas la del triángulo trirectángulo.*

En efecto, (fig. 257),

$$A\,B\,C + B\,C\,B' = \text{huso } A;$$
$$A\,B\,C + A\,C\,A' = \text{huso } B;$$
$$A\,B\,C + A'\,C\,B' = A'\,B'\,C' + A'\,C\,B' = \text{huso } C.$$

Sumando ordenadamente estas igualdades, y llamando E á la superficie esférica, resulta:

$$\frac{E}{2} + 2\,A\,B\,C = \text{huso } A + \text{huso } B + \text{huso } C;$$

de donde, despejando $2\,A\,B\,C$ y reemplazando la semiesfera y los husos por sus áreas respectivas,

$$2\,A\,B\,C = 2\,A + 2\,B + 2\,C - 4;$$
$$\text{ó sea } A\,B\,C = A + B + C - 2.$$

LXXIII.

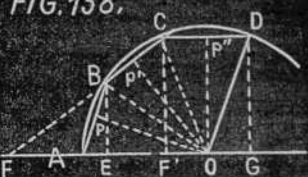
VOLÚMEN DE LA ESFERA.

362. *Sector esférico* es la parte de esfera engendrada por un sector circular que gira alrededor del diámetro del semicírculo generador de la esfera.

El arco del sector engendrará en su movimiento una zona esférica que será la correspondiente al sector esférico y que suele llamarse *base del sector*.

363. *Si un sector poligonal regular gira alrededor de uno de sus radios, el volúmen que engendra es igual al área descrita por la línea poligonal multiplicada por el tercio de la apotema.*

FIG. 158.



Sea O A B C D el sector poligonal, que podemos descomponer en los triángulos O A B, O B C y O C D que segun hemos visto (355) representan las diversas posiciones que puede tener la base con relación al eje.

El volúmen engendrado por el triángulo O A B será la suma de los volúmenes engendrados por los triángulos rectángulos A B E y B E O, que es

$$\frac{1}{3}(\mathrm{A\,E} + \mathrm{E\,O})\,\pi\,\overline{\mathrm{B\,E}}^2 = \frac{1}{3}\,\mathrm{A\,O} \times \pi\,\overline{\mathrm{B\,E}}^2 .$$

$$\text{Pero } \mathrm{A\,O} \times \mathrm{B\,E} = \mathrm{A\,B} \times p\,\mathrm{O},$$

pues cada uno representa el doble del área del triángulo, y sustituyendo en la igualdad anterior, resulta

$\frac{1}{3}\,p\,\mathrm{O} \times \pi\,\mathrm{B\,E} \times \mathrm{A\,B} = \frac{1}{3}\,p\,\mathrm{O} \times$ área descrita por A B.

El volúmen engendrado por el triángulo B C O, se obtiene fácilmente, prolongando la base B C hasta que encuentra al eje, como diferencia de los volúmenes engendrados por F C O y F B O, comprendidos en el caso anterior, que nos dán

$\frac{1}{3}\,p'\,\mathrm{O} \times$ área descrita por F C $- \frac{1}{3}\,p'\,\mathrm{O} \times$ área descrita por F' B $= \frac{1}{3} p'O \times$ área descrita por B C.

Por último, el volúmen engendrado por C D O es la diferencia entre el volúmen del cilindro que engendra el rectángulo F' C D G y la suma de los volúmenes de los conos engendrados por los triángulos C F' O y D O G, que es

$$\pi \overline{p''O}^2 \times F'G - \pi \overline{P''O}^2 \times \left(\frac{1}{3} F'O + \frac{1}{3} OG\right) =$$

$$= \pi \overline{p''O}^2 \times \frac{2}{3} F'G = \frac{1}{3} p''O \times 2\pi p''O \times$$

$$F'G = \frac{1}{3} p''O \times \text{area descrita por C D.}$$

De donde resulta, por fin, que el volúmen engendrado por el sector será, llamando a á la apotema,

$$\frac{1}{3} a \times \text{área descrita por } (A\,B + B\,C + C\,D).$$

364. *El volúmen del sector esférico es igual al tercio del producto del radio por el área de la zona correspondiente.*

Pues el volúmen engendrado por el sector circular O A D (fig. 258) es el límite del volúmen engendrado por el sector poligonal O A B C D, que hemos visto es $\frac{1}{3} a \times$ área descrita por A B C D; y como el límite de la apotema es el radio y el de la línea quebrada A B C D es el arco A D, el volúmen del sector esférico será

$$\frac{1}{3} r \times Z.$$

Corolario. *La razón de dos sectores esféricos de la misma esfera, ó de esferas iguales, es la de sus zonas correspondientes.*

Pues de $S = \frac{1}{3} r \times Z$; y $S' = \frac{1}{3} r \times Z'$;

$$\text{resulta } \frac{S}{S'} = \frac{Z}{Z'}.$$

365. *El volúmen de la esfera es igual al tercio del producto del radio por el área.*

Pues la esfera es un sector esférico cuya zona correspondiente es la superficie esférica.

Su volúmen vendrá expresado por

$$\frac{1}{3} r \times 4 \pi r^2 = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

COROLARIO. *Los volúmenes de dos esferas son directamente proporcionales á los cubos de sus radios.*

Pues de $V = \frac{4}{3} \pi r^3$; $V' = \frac{4}{3} \pi r'^3$;

$$\text{resulta } \frac{V}{V'} = \frac{r^3}{r'^3}.$$

366. Se llama *segmento esférico* la parte de esfera comprendida entre una zona y la base ó bases que la limitan.

De donde se deduce que el segmento esférico tendrá una ó dos bases, segun las que tenga la zona correspondiente.

El volúmen de un segmento esférico de una base es la diferencia ó la suma del volúmen de un sector esférico y del de un cono, según que el segmento sea menor ó mayor que media esfera.

Si el segmento esférico tiene dos bases será la diferencia de dos segmentos de una base.

Trigonometría.

LXXIV.

NOCIONES PRELIMINARES.

1. *Trigonometría es la ciencia que trata de la resolución de los triángulos por medio del cálculo.*

Hemos visto ya en Geometría como pueden resolverse los triángulos por medio de construcciones gráficas; pero como estas adolecen siempre del error que lleva consigo la imperfección de los instrumentos, de ahí la necesidad de la resolución numérica de los mismos. Para esto es preciso establecer relaciones que liguen directamente á los lados con los ángulos de los triángulos; pero la dificultad de establecer estas relaciones directas, ha hecho precisa la introducción de otras líneas que sirvan de intermediarias entre ellos.

Las fórmulas que establecen esas relaciones se deducen de la consideración del círculo y reciben por esa razón el nombre de *funciones circulares*.

2. Las líneas que relacionan los lados con los arcos de los ángulos de los triángulos se llaman *líneas trigonométricas*.

Estas líneas son el *seno*, *tangente*, *secante y seno-verso*.

Seno de un arco es la perpendicular trazada desde uno de los extremos del arco al radio ó diámetro que pasa por el otro extremo.

Tangente es la parte de tangente en uno de los extremos del arco hasta su encuentro con el radio ó diámetro que pasa por el otro extremo.

Seno-verso es la parte de radio comprendido entre el pie del seno y el extremo de dicho radio.

Secante es la distancia del centro al extremo de la tangente.

3. Se llaman *coseno*, *cotangente*, *coseno verso* y *cosecante* de un arco, el seno, tangente, seno-verso y secante del arco complementario.

De donde se infiere que el seno, tangente, seno-verso y secante de un arco serán á su vez el coseno, cotangente, coseno-verso y cosecante de su complemento.

De estas líneas las más importantes, y únicas que habremos de necesitar para la resolución de los triángulos, son el seno y la tangente y sus colíneas, el coseno y la cotangente.

4. Segun estas definiciones, el seno del arco A C, (fig. 1.ª) será C D ó bien A H La tangente A F ó C K. El seno-verso, A D ó C H y la secante O F ú O K. El coseno, C P ó B I. La cotangente, B G ó C L. El coseno-verso, C I ó B *p*; y la cosecante O G ú O L.

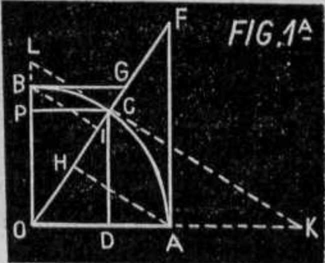


FIG. 1ª

Obsérvese que *el coseno es siempre la distancia entre el centro y el pie del seno.*

5. Conocido el arco quedan determinadas sus líneas trigonométricas, pues, aunque aparece de lo expuesto, que cada arco tiene dos senos, dos tangentes, etc., se demuestra fácilmente que son respectivamente iguales. Queda tan solo la indeterminación de su posición que se hace cesar mediante el siguiente convenio:

1.° Consideraremos como orígen comun de todos los arcos el extremo derecho del diámetro horizontal, es decir el punto A. Todos los arcos contados en el sentido A C B serán positivos, y negativos, los contados en sentido opuesto.

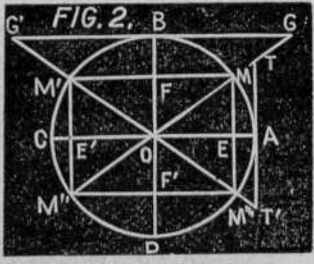
2.° Consideraremos como orígen de los complementos el extremo superior B del diámetro vertical, siendo positivos los contados en el sentido B C A y negativos los contados en el sentido opuesto.

3.° Consideraremos siempre los senos y tangentes perpendiculares al radio que pasa por el orígen; y los cosenos y cotangentes perpendiculares á los senos y tangentes.

Por último, miraremos como positivas las líneas trigonométricas de arcos menores que 90 grados, y como negativas las que tengan opuesta dirección.

6. Falta ahora resolver el problema inverso, es decir, conocida una línea trigonométrica hallar su arco.

FIG. 2.



1.° Si se nos dá el seno, basta llevar sobre el radio O B, á partir de O, una distancia O F igual á la magnitud del seno dado; trazar por F la M M′ paralela á A C y resultarán los arcos A M y A M′ suplementarios, que tienen el seno dado, pues O F = M E = M′ E′.

Si el seno dado fuera negativo lo llevaríamos sobre O D, y obtendríamos del propio modo otras dos soluciones.

2.° Si se conoce el coseno, llevándolo sobre O A desde O hasta E, y trazando M M‴, obtendremos los dos arcos A M y A M‴.

Si el coseno fuere negativo lo llevaríamos de O hasta E′, sobre el radio O C, y obtendríamos análogo resultado.

3.° Si conocemos la tangente, llevada desde A hasta T, y uniendo T con el centro, determina los arcos A M y A M″ que tienen la misma tangente.

Si fuese negativa, la llevaríamos desde A á T′ y vendríamos á parar á solución análoga.

4.° Conocida la cotangente, basta llevarla de B á G, si es positiva, y de B á G′ si es negativa, y unir estos puntos con el centro, para hallar los arcos correspondientes.

Vemos, pues, que en todos los casos á cada línea trigonométrica corresponden dos arcos, uno menor y otro mayor que media circunferencia, excepto el seno que determina dos arcos suplementarios; y como todo ángulo es menor de 180°, resulta que todas las líneas trigonométricas sirven para determinar el ángulo, á excepción del seno.

7. Pudiendo los triángulos ser rectilíneos ó esféricos la Trigonometría se divide también en rectilínea y esférica, segun que trate de la resolución de los primeros ó de los segundos.

Aquí solo trataremos de la resolucíón de los triángulos rectilíneos, ó sea de la Trigonometría rectilínea.

LXXV.

REPRESENTACIÓN ALGEBRÁICA DE LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS.

8. Las líneas trigonométricas se representan abreviadamente por sen., tg., cos., y cot.

9. Vamos á examinar las variaciones que experimentan estas líneas segun las que sufre el arco.

Si suponemos que un arco A M vaya disminuyendo sucesivamente hasta que el punto M coincida con A, es decir, hasta que se reduzca á cero, el seno disminuye hasta cero; la tangente llega también á reducirse á cero; el coseno vá aumentando hasta que llega á igualarse al radio y la cotangente, por último, aumenta indefinidamente y se convierte en infinito, puesto que el radio O A es paralelo á B G y solo en el infinito la encuentra.

Tenemos, pues,

$$\text{sen. } 0^{\circ} = 0; \ \text{tg. } 0^{\circ} = 0; \ \text{cos. } 0^{\circ} = r; \ \text{cot. } 0^{\circ} = \infty.$$

Si el arco aumenta, el seno aumenta, la tangente aumenta, y el coseno y la cotangente disminuyen; y cuando el punto M llegue á B, tendremos:

$$\text{sen. } 90^{\circ} = r; \ \text{tg. } 90^{\circ} = \infty; \ \text{cos. } 90^{\circ} = 0; \ \text{cot. } 90^{\circ} = 0.$$

Cuando el extremo del arco pase de B, el seno disminuye, la tangente negativa disminuye, el coseno negativo aumenta y la cotangente aumenta también negativamente, hasta que al llegar á C, nos dán:

$$\text{sen. } 180^{\circ} = 0; \quad \text{tg. } 180^{\circ} = 0;$$
$$\text{cos. } 180^{\circ} = -r; \quad \text{cot. } 180^{\circ} = -\infty.$$

Si el arco sigue aumentando, el seno vuelve á aumentar negativamente, la tangente aumenta, el coseno disminuye negativamente y la cotangente disminuye. Y al llegar el extremo del arco á D tenemos

$$\text{sen } 270^{\circ} = -r; \text{ tg. } 270^{\circ} = \infty;$$
$$\cos 270^{\circ} = 0; \quad \cot 270^{\circ} = 0.$$

Sigue aumentando el arco, y el seno vuelve á disminuir negativamente, la tangente también disminuye negativamente, y el coseno y la cotangente aumentan, la primera positiva y la segunda negativamente; hasta que el extremo del arco llega á A, en cuyo caso

$$\text{sen. } 360^{\circ} = 0; \text{ tg. } 360^{\circ} = 0;$$
$$\cos. 360^{\circ} = r; \text{ cot. } 360^{\circ} = -\infty.$$

Es indudable que á seguir creciendo el arco se irían reproduciendo los valores de las líneas trigonométricas ya examinados.

10. Vemos, pues, que el seno y coseno varían de $+r$ á $-r$; y que la tangente y cotangente varían de $+\infty$ á $-\infty$. Lo que nos dice qne toda cantidad puede representar una tangente ó una cotangente; pero no puede ser representación de un seno ó de un coseno, si su valor absoluto es mayor que el radio.

Que las líneas trigonométricas del primer cuadrante son todas positivas, las del segundo, tienen el seno positivo y todas las demás líneas negativas; las del tercero, el seno y coseno negativos, y la tangente y la cotangente positivas; y las del cuarto, todas negativas á excepción del coseno.

11. En cuanto á los arcos negativos es indudable que tienen las mismas líneas trigonométricas que los positivos que tienen los mismos extremos.

Así, pues, llamando a á un arco cualquiera, 2π á la circunferencia y K á un número entero cualquiera, que puede ser positivo ó negativo, tendremos

$$\text{sen. } a = \text{sen. } (2K\pi + a); \text{ tg. } a = \text{tg. } (2K\pi + a);$$
$$\cos. a = \cos. (2K\pi + a); \text{ cot. } a = \text{cot. } (2K\pi + a)$$

12. *Determinar las líneas trigonométricas de un arco negativo en función de las del arco igual positivo.*

Sea A M''' $= -a$ (fig. 2) un arco negativo cualquiera; tracemos sus líneas trigonométricas M''' E, A T', O E y B G'. Prolonguemos M''' E hasta que encuentre en M á la circunferencia y tendremos A M $= a$; y E M = E M''' (Geom. 64). La igualdad delos triángulos O A T y O A T', O B G y O B G', nos dá también A T = A T' y B G = B G'.

Luego tendremos,

$$\text{sen.} -a = -\text{sen.}\ a;\quad \text{tg.} -a = -\text{tg.}\ a;$$

$$\cos. -a = \cos.\ a;\ \text{cot.} -a = -\text{cot.}\ a.$$

lo que nos dice, que *los cosenos de dos arcos iguales y de signos contrarios son iguales y del mismo signo, y los senos, tangentes y cotangentes son iguales y de signos contrarios.*

13. *Determinar las líneas trigonométricas de un arco en función de las de su arco complementario ó suplementario.*

De las definiciones de las líneas trigonométricas del arco complementario (3) se deduce, inmediatamente

$$\text{sen.}\ (90^\circ - a) = \cos.\ a;\ \text{tg.}\ (90^\circ - a) = \text{cot.}\ a;$$

$$\cos.\ (90^\circ - a) = \text{sen.}\ a;\ \text{cot.}\ (90^\circ - a) = \text{tg.}\ a;$$

$$\text{sen.}\ (90^\circ + a) = \cos. -a = \cos.\ a;$$

$$\text{tg.}\ (90^\circ + a) = \text{cot.} -a = -\text{cot.}\ a;$$

$$\cos.\ (90^\circ + a) = \text{sen.} -a = -\text{sen.}\ a;$$

$$\text{cot.}\ (90^\circ + a) = \text{tg.} -a = -\text{tg.}\ a.$$

Del propio modo, observando que el suplemento de a es $180^\circ - a = 90^\circ + (90^\circ - a)$ resultará

$$\text{sen.}\ (180^\circ - a) = \text{sen.}\ (90^\circ + (90^\circ - a)) =$$
$$\cos\ (-(90^\circ - a) = \cos.\ (90^\circ - a) = \text{sen.}\ a.$$

$$\text{tg.}(180^\circ - a) = \text{tg}\ (90^\circ + (90^\circ - a)) = \text{cot.}\ (-(90^\circ - a)) =$$
$$-\text{cot.}\ (90^\circ - a) = -\text{tg.}\ a$$

$$\cos.(180^\circ - a) = \cos.(90^\circ + (90^\circ - a)) =$$
$$\text{sen}.(-(90^\circ - a)) = -\text{sen}.(90^\circ - a) = -\cos.a$$

$$\cot.(180^\circ - a) = \cot.(90^\circ + (90^\circ - a)) =$$
$$\text{tg}.(-(90^\circ - a)) = -\text{tg}.(90^\circ - a) = -\cot.a$$

Que nos dice que *los senos de dos arcos suplementarios son iguales y del mismo signo, y las tangentes, los cosenos y las cotangentes son iguales y de signo contrario.*

Lo que nos comprueba lo manifestado (6): que todas las líneas trigonométricas determinan el ángulo, á excepción del seno.

LXXVI.

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES.

14. Vamos á determinar las fórmulas que establecen las relaciones que ligan á las líneas trigonométricas de un arco, y que se denominan fundamentales por deducirse de ellas todas las demás.

Sea A M $= a$, (fig. 2) un arco positivo y menor que un cuadrante, llamemos r al radio del círculo; el triángulo rectángulo O E M nos dá (Geom. 106),

$$\overline{\text{M E}}^2 + \overline{\text{O E}}^2 = \overline{\text{O M}}^2 \text{ ó sea } \text{sen}^2 a + \cos^2 a = r^2.$$

Los triángulos semejantes O M E y O A T nos darán la relación,

$$\frac{\text{M E}}{\text{A T}} = \frac{\text{O E}}{\text{O A}}, \text{ ó sea } \frac{\text{sen}.a}{\text{tg}.a} = \frac{\cos.a}{r}, \text{ de donde}$$

$$\text{tg}.a = \frac{r \,\text{sen}\, a}{\cos a}.$$

Del mismo modo los triángulos O M F y O G B nos dán $\frac{\text{M F}}{\text{B G}} = \frac{\text{O F}}{\text{O B}}$, ó sea $\frac{\cos.a}{\cot.a} = \frac{\text{sen}\, a}{r}$, de donde

$$\cot. a = \frac{r \cos. a}{\text{sen}. a}.$$

15. Aunque estas fórmulas se hayan obtenido en la hipótesis de ser el arco positivo y menor que un cuadrante, es fácil demostrar que son generales, pues cualquiera que sea la posición del punto M las líneas trigonométricas formarán siempre triángulos semejantes; luego, por lo que respecta á los valores absolutos, no cabe duda de su generalidad; y en cuanto á los signos, nada más fácil que comprobar su conformidad con lo establecido (9).

16. Las relaciones que hemos determinado nos permiten hallar el valor de las líneas trigonométricas en función de una de ellas, siempre que se conozca el radio. Ahora bien, es indudable que estas fórmulas se simplificarán haciendo el radio igual á la unidad, lo que las convierte en

$$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \qquad (1);$$

$$\text{tg}. a = \frac{\text{sen}. a}{\cos. a} \qquad (2)$$

$$\cot. a = \frac{\cos. a}{\text{sen}. a} \qquad (3).$$

Resta solo ver el modo de restablecer el radio en una fórmula obtenida en la hipótesis $r = 1$, cuando tenga distinto valor.

Ahora bien, observando que la relación entre las líneas trigonométricas y el radio será siempre constante, si llamamos a y a' á dos arcos de igual graduación en las circunferencias cuyos radios sean 1 y r, tendremos

$$\frac{\text{sen}. a}{1} = \frac{\text{sen}. a'}{r}, \text{ de donde } \text{sen}. a = \frac{\text{sen}. a'}{r};$$

lo que nos dice *que para restablecer el radio basta reemplazar cada línea trigonométrica por su razón al radio.*

17. *Conocido el seno de un arco, determinar las demás líneas trigonométricas.*

La fórmula (1) nos dá

$$\cos. a = \pm \sqrt{1 - \text{sen}^2 a},$$

y sustituyendo este valor en las otras dos, tendremos

$$\text{tg}. a = \pm \frac{\text{sen}. a}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 a}}; \quad \cot. a = \pm \frac{\sqrt{1 - \text{sen}^2 a}}{\text{sen}. a}.$$

18. *Dado el coseno de un arco, determinar las demás líneas trigonométricas.*

Se resuelve como el anterior.

19. *Conocida la tangente de un arco, determinar el seno, coseno y cotangente.*

La fórmula (2) nos dá

$$\text{tg}^2 a = \frac{\text{sen}^2 a}{\cos^2 a} \quad \text{ó} \quad \frac{\text{tg}^2 a}{1} = \frac{\text{sen}^2 a}{\cos^2 a},$$

de donde (Arit. 160 y 161)

$$\frac{1 + \text{tg}^2 a}{1} = \frac{\text{sen}^2 a + \cos^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a}$$

$$\text{y} \quad \frac{1 + \text{tg}^2 a}{\text{tg}^2 a} = \frac{\text{sen}^2 a + \cos^2 a}{\text{sen}^2 a} = \frac{1}{\text{sen}^2 a},$$

de donde

$$\cos. a = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \text{tg}^2 a}}; \quad \text{y} \quad \text{sen}. a = \frac{\text{tg}. a}{\pm \sqrt{1 + \text{tg}^2 a}};$$

$$\text{que nos dán} \quad \cot. a = \frac{1}{\text{tg}. a}.$$

que nos dice que *la tangente y la cotangente son recíprocas*, conforme á lo que indican las fórmulas (2) y (3).

Lo mismo determinaríamos las otras tres líneas trigonométricas, dada la cotangente.

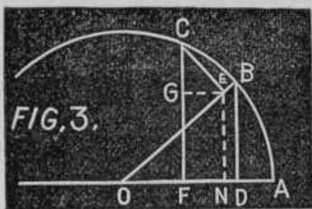
LXXVII.

RELACIONES ENTRE LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS DE DOS ARCOS Y LAS DE LA SUMA Ó DIFERENCIA DE LOS MISMOS ARCOS.

20. *Dados los senos y cosenos de dos arcos, hallar el seno y el coseno de la suma de los mismos arcos.*

Sean A B $= a$ y B C $= b$ los dos arcos, cuya suma es A C $= a + b$ (fig. 3).

Se nos dan B D $=$ sen. a; O D $=$ cos. a; C E $=$ sen. b y O E $=$ cos b; y se nos pide C F $=$ sen. $(a + b)$ y O F $=$ cos $(a + b)$.



Tracemos las perpendiculares E G y E H á C F y O A y supongamos el radio igual á la unidad.

Tendremos;

$$\text{sen.}\,(a+b) = CF = FG + GC = EH + GC \quad (a)$$

y
$$\cos.\,(a+b) = OF = OH - FH = OH - GE \quad (b)$$

Ahora bien, los triángulos semejantes O B D y O E H, C G E y O D B, nos dan

$$\frac{EH}{BD} = \frac{OE}{OB}, \text{ ó sea } \frac{EH}{\text{sen. } a} = \frac{\cos.\, b}{1}$$

de donde
$$EH = \text{sen } a \cos.\, b$$

$$\frac{OH}{OD} = \frac{OE}{OB}, \text{ ó sea } \frac{OH}{\cos.\, a} = \frac{\cos\, b}{1};$$

de donde
$$OH = \cos.\, a \cos.\, b,$$

$$\frac{C\,G}{O\,D} = \frac{C\,E}{O\,B}, \text{ ó sea } \frac{C\,G}{\cos.\,a} = \frac{\text{sen.}\,b}{1},$$

de donde $\qquad C\,G = \cos.\,a\ \text{sen.}\,b;$

$$\frac{G\,E}{B\,D} = \frac{C\,E}{O\,B}, \text{ ó sea } \frac{G\,E}{\text{sen.}\,a} = \frac{\text{sen.}\,b}{1},$$

de donde $\qquad G\,E = \text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,b.$

Reemplazando estos valores en (a) y (b), resultará:

$$\text{sen.}\,(a+b) = \text{sen.}\,a\cos.\,b + \cos.\,a\ \text{sen.}\,b \qquad (4)$$

$$\cos.\,(a+b) = \cos.\,a\cos.\,b - \text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,b. \qquad (5)$$

21. Si en estas fórmulas hacemos $b = -b$, resultará:

$$\text{sen}\,(a-b) = \text{sen}\,a\cos - b + \cos a\ \text{sen} - b = \\ \text{sen}\,a\cos b - \cos a\ \text{sen}\,b \qquad (6)$$

$$\cos\,(a-b) = \cos a\cos - b - \text{sen}\,a\ \text{sen} - b = \\ \cos a\cos b + \text{sen}\,a\ \text{sen}\,b \qquad (7)$$

que nos dan los senos y cosenos de la diferencia de dos arcos en función de los senos y cosenos de estos arcos.

Estas fórmulas pueden deducirse directamente de modo análogo á las anteriores.

22. *Dadas las tangentes de dos arcos, hallar las tangentes de la suma y de la diferencia de los mismos arcos.*

La fórmula (2) nos dá

$$\text{tg.}\,(a+b) = \frac{\text{sen.}\,(a+b)}{\cos.\,(a+b)} = \frac{\text{sen}\,a\cos b + \cos a\ \text{sen}\,b}{\cos a\cos b - \text{sen}\,a\ \text{sen}\,b};$$

y dividiendo ambos términos por $\cos.\,a\cos.\,b$,

$$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\dfrac{\text{sen.}\,a\cos.\,b}{\cos.\,a\cos.\,b} + \dfrac{\cos.\,a\ \text{sen.}\,b}{\cos.\,a\cos.\,b}}{\dfrac{\cos.\,a\cos.\,b}{\cos.\,a\cos.\,b} - \dfrac{\text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,b}{\cos.\,a\cos.\,b}} =$$

$$= \frac{\text{tg.}\,a + \text{tg.}\,b}{1 - \text{tg.}\,a\ \text{tg.}\,b} \qquad (8)$$

Del mismo modo se obtiene

$$\text{tg.}\,(a-b) = \frac{\text{tg.}\,a - \text{tg.}\,b}{1 + \text{tg.}\,a\ \text{tg.}\,b} \qquad (9)$$

23. *Dadas las cotangentes de dos arcos, hallar las cotangentes de la suma y de la diferencia de los mismos arcos.*

La fórmula (3) nos dá

$$\text{cot.}\,(a+b) = \frac{\text{cos.}\,(a+b)}{\text{sen.}\,(a+b)} = \frac{\text{cos.}\,a\ \text{cos.}\,b - \text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,b}{\text{sen.}\,a\ \text{cos.}\,b + \text{cos.}\,a\ \text{sen.}\,b}$$

y dividiendo ambos miembros por sen. a sen. b,

$$\text{cot.}\,(a+b) = \frac{\text{cot.}\,a\ \text{cot.}\,b - 1}{\text{cot.}\,b + \text{cot.}\,a}. \qquad (10)$$

Y del propio modo

$$\text{cot.}\,(a-b) = \frac{\text{cot.}\,a\ \text{cot.}\,b + 1}{\text{cot.}\,b - \text{cot.}\,a}. \qquad (11)$$

LXXVIII.

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS DERIVADAS.

24. *Hallar las líneas trigonométricas del duplo de un arco, en función de las de este arco.*

Si en las fórmulas (4), (5), (8) y (10) hacemos $a = b$, resultará:

$$\text{sen.}\,2\,a = 2\ \text{sen.}\,a\ \text{cos.}\,a$$

$$\text{cos.}\,2\,a = \text{cos}^2\,a - \text{sen}^2\,a$$

$$\text{tg.}\,2\,a = \frac{2\ \text{tg.}\,a}{1 - \text{tg}^2\,a}$$

$$\text{cot.}\,2\,a = \frac{\text{cot}^2\,a - 1}{2\ \text{cot.}\,a}$$

25. *Hallar las líneas trigonométricas del triplo de un arco, en función de las de este arco.*

Haciendo $b = 2\,a$, en las mismas fórmulas, resulta,

$$\text{sen. } 3\,a = \text{sen. } a \cos. 2\,a + \cos. a \text{ sen. } 2\,a$$

$$\cos. 3\,a = \cos. a \cos. 2\,a - \text{sen. } a \text{ sen. } 2\,a$$

$$\text{tg. } 3\,a = \frac{\text{tg. } a + \text{tg. } 2\,a}{1 - \text{tg. } a \text{ tg. } 2\,a}$$

$$\cot. 3\,a = \frac{\cot. a \cot. 2\,a - 1}{\cot. 2\,a + \cot a}$$

y reemplazando sen. $2\,a$, cos. $2\,a$, tg. $2\,a$ y cot. $2\,a$ por sus valores anteriores,

$$\text{sen. } 3\,a = 3 \text{ sen. } a - 4 \text{ sen}^3 a$$

$$\cos. 3\,a = 4 \cos.^3 a - 3 \cos a$$

$$\text{tg. } 3\,a = \frac{3 \text{ tg. } a - \text{tg}^3 a}{1 - 3 \text{ tg}^2 a}$$

$$\cot. 3\,a = \frac{\cot^3 a - 3 \cot. a}{3 \cot^2 a - 1}$$

Del mismo modo obtendríamos las líneas trigonométricas del arco cuádruplo, en función de las de este arco.

26. *Dado el seno de un arco, hallar el seno y coseno de su mitad.*

Haciendo $a = \dfrac{A}{2}$ en la fórmula sen. $2\,a$,

tendremos

$$\text{sen. } A = 2 \text{ sen. } \frac{A}{2} \cos. \frac{A}{2};$$

la fórmula (1) nos dá

$$1 = \text{sen}^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2}$$

que sumadas y restadas nos dán,

$$1 + \text{sen. } A = \left(\cos.\frac{A}{2} + \text{sen. }\frac{A}{2}\right)^2$$

$$1 - \text{sen. } A = \left(\cos.\frac{A}{2} - \text{sen. }\frac{A}{2}\right)^2$$

de donde

$$\cos.\frac{A}{2} + \text{sen. }\frac{A}{2} = \pm\sqrt{1 + \text{sen. } A}$$

$$\cos.\frac{A}{2} - \text{sen. }\frac{A}{2} = \pm\sqrt{1 - \text{sen. } A}$$

que nos dán (Alg. 2);

$$\cos.\frac{A}{2} = \pm\frac{\sqrt{1 + \text{sen. } A}}{2} \pm \frac{\sqrt{1 - \text{sen. } A}}{2}$$

$$\text{sen.}\frac{A}{2} = \pm\frac{\sqrt{1 + \text{sen. } A}}{2} \pm \frac{\sqrt{1 - \text{sen. } A}}{2}.$$

27. *Dado el coseno de un arco, hallar el seno y coseno de su mitad.*

Haciendo $a = \frac{A}{2}$ en la fórmula cos. 2 a, tendremos

$$\cos. A = \cos^2\frac{A}{2} - \text{sen}^2\frac{A}{2}$$

y la fórmula (1) nos dará

$$1 = \cos^2\frac{A}{2} + \text{sen}^2\frac{A}{2}$$

de donde (Alg. 2);

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1 + \cos. A}{2}$$

$$\text{sen}^2\frac{A}{2} = \frac{1 - \cos. A}{2}$$

de donde

$$\cos.\frac{A}{2} = \pm\frac{\sqrt{1+\cos.A}}{2}$$

$$\operatorname{sen}.\frac{A}{2} = \pm\frac{\sqrt{1-\cos.A}}{2}.$$

LXXIX.

TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS.

28. *Convertir la suma ó la diferencia de dos senos ó de dos cosenos, en productos.*

Sumando y restando las fórmulas (4) y (6) y las (5) y (7), tendremos

$$\operatorname{sen}.(a+b) + \operatorname{sen}.(a-b) = 2\operatorname{sen}.a\cos.b$$

$$\operatorname{sen}.(a+b) - \operatorname{sen}.(a-b) = 2\cos.a\operatorname{sen}.b$$

$$\cos.(a+b) + \cos.(a-b) = 2\cos.a\cos.b$$

$$\cos.(a+b) - \cos.(a-b) = -2\operatorname{sen}.a\operatorname{sen}.b$$

Fórmulas que resuelven el problema, pero á las que puede dársele forma más conveniente, haciendo

$$a+b=A;\quad a-b=B;$$

de donde

$$a=\frac{A+B}{2}\ \text{y}\ b=\frac{A-B}{2};$$

y se convertirán en

$$\operatorname{sen}.A+\operatorname{sen}.B = 2\operatorname{sen}.\frac{A+B}{2}\cos.\frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{sen}.A-\operatorname{sen}.B = 2\cos.\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}.\frac{A-B}{2}$$

$$\cos.A+\cos.B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos. A - \cos. B = -2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \operatorname{sen}. \frac{A-B}{2}$$

que pueden traducirse al lenguaje vulgar para su más fácil recordación.

29. *Razón de la suma de los senos de dos arcos á la diferencia de los mismos senos.*

Si dividimos ordenadamente las dos primeras fórmulas últimamente obtenidas, tendremos:

$$\frac{\operatorname{sen}. A + \operatorname{sen}. B}{\operatorname{sen}. A - \operatorname{sen}. B} = \frac{\operatorname{sen}. \frac{A+B}{2} \cos. \frac{A-B}{2}}{\cos. \frac{A+B}{2} \operatorname{sen}. \frac{A-B}{2}} =$$

$$\operatorname{tg}. \frac{A+B}{2} \cot. \frac{A-B}{2} = \frac{\operatorname{tg}. \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}. \frac{A-B}{2}}$$

lo que nos dice *que la razón de la suma de los senos de dos arcos á la diferencia de los mismos senos, es igual á la razón de la tangente de la semi-suma de dichos arcos á la tangente de la semi-diferencia de los mismos.*

30. *Convertir en producto la suma de las tangentes de los tres ángulos de un triángulo.*

Si llamamos A, B y C á los tres ángulos del triángulo, siendo C suplemento de A + B, será (13)

$$\operatorname{tg}. (A + B) = -\operatorname{tg}. C;$$

de donde (22)

$$\frac{\operatorname{tg}. A + \operatorname{tg}. B}{1 - \operatorname{tg}. A \operatorname{tg}. B} = -\operatorname{tg}. C, \quad ó$$

$$\operatorname{tg}. A + \operatorname{tg}. B + \operatorname{tg}. C = \operatorname{tg}. A \operatorname{tg}. B \operatorname{tg}. C.$$

31. *Disponer para el cálculo logaritmico el binomio*

$$m \operatorname{sen} a + n \cos a.$$

Tenemos que

$$m \operatorname{sen} a + n \cos a = m \left(\operatorname{sen} a + \frac{n}{m} \cos a\right);$$

y haciendo (10) $\frac{n}{m} = \operatorname{tg.} \alpha$, resultará:

$$m \operatorname{sen.} a + n \cos. a = m (\operatorname{sen.} a + \operatorname{tg.} \alpha \cos. a) =$$

$$m \left(\operatorname{sen.} a + \frac{\operatorname{sen.} \alpha \cos. a}{\cos. \alpha}\right)$$

ó sea

$$m \operatorname{sen.} a + n \cos. a = m \left(\frac{\operatorname{sen.} (a + \alpha)}{\cos. \alpha}\right) =$$

$$\frac{m}{\cos. \alpha} \operatorname{sen} (a + \alpha).$$

LXXX.

CONSTRUCCIÓN DE LAS TABLAS TRIGONOMÉTRICAS.

32. Las tablas trigonométricas son unos estados ordenados por columnas que contienen los arcos de 9 á 90°, de 1' en 1', ó de 10″ en 10″, etc., y enfrente los logaritmos de sus líneas trigonométricas.

Como las líneas trigonométricas del primer cuadrante comprenden todos los valores absolutos de que son susceptibles las líneas trigonométricas, dicho se está que bastará que las tablas contengan todos los arcos de 0 á 90°; y si se tiene en cuenta que las líneas de un arco son las colíneas de su complemento, bastará calcular las de los arcos de 9 á 45°.

33. Los valores de las líneas trigonométricas pueden calcularse sencillamente para algunos arcos particulares, mediante el siguiente principio.

El seno de un arco menor de 180^0 *es mitad de la cuerda del arco duplo.*

Pues hemos visto (12) que E M era mitad de M M''' y A M mitad de M A M''' (fig. 2).

Así pues, para el arco de 30^0,

$$\text{sen. } 30^0 = \frac{1}{2} \text{ cuerda } 60^0 = \frac{1}{2}$$

$$\cos. 30^0 = \text{sen. } 60^0 = \frac{1}{2} \text{ cuerda } 120^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

y por tanto,

$$\text{tg. } 30^0 = \frac{\text{sen. } 30^0}{\cos. 30^0} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\text{y } \cot. 30^0 = \frac{\cos. 30^0}{\text{sen. } 30^0} = \sqrt{3}$$

Si el arco es de 45^0, $\text{sen. } 45^0 = \frac{1}{2} \text{ cuerda } 90^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\cos. 45^0 = \text{sen. } 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{tg. } 45^0 = 1 \text{ y } \cot. 45^0 = 1.$$

Si el arco es de 60^0, $\text{sen. } 60^0 = \cos. 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$\cos. 60^0 = \text{sen. } 30^0 = \frac{1}{2};$$

$$\text{tg. } 60^0 = \cot. 30^0 = \sqrt{3}; \text{ y } \cot. 60^0 = \text{tg. } 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Si el arco es de 120^0, $\text{sen. } 120^0 = \text{sen. } 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$\cos. 120^0 = -\cos. 60^0 = -\frac{1}{2};$$

$$\text{tg. } 120^0 = -\text{tg. } 60^0 = -\sqrt{3};$$

$$y \ \cot. 120^\circ = -\cot. 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Del mismo modo, $\text{sen.}\ 135^\circ = \text{sen.}\ 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$

$$\cos. 135^\circ = -\cos. 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{tg.}\ 135^\circ = -\text{tg.}\ 45^\circ = -1;$$

$$y \ \cot. 135^\circ = -\cot. 45^\circ = -1.$$

Por último, $\text{sen.}\ 150^\circ = \text{sen.}\ 30^\circ = \frac{1}{2};$

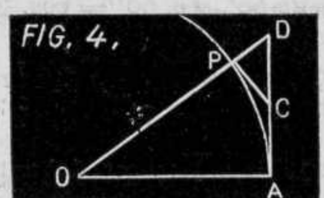
$$\cos. 150^\circ = -\cos. 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\text{tg.}\ 150^\circ = -\text{tg.}\ 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$y \ \cot. 150^\circ = -\cot. 30^\circ = -\sqrt{3}.$$

34. La determinación de los valores de las líneas trigonométricas se funda en los dos principios siguientes:

1.° *Todo arco menor que un cuadrante, es mayor que su seno y menor que su tangente.*



En efecto, el arco es mayor que la cuerda, y como la cuerda es mayor qne el seno, con más razón será el arco; mayor que el seno.

Además, sabemos (Geom. 15) que arc. $AB < BC + CA$ pero $BC < CD$; luego con más razón arc. $AB < CD + CA = AD$.

2.° *El seno de un arco menor que un cuadrante, es mayor que la diferencia entre el arco y la cuarta parte del cubo del arco.*

En efecto, acabamos de demostrar que

$$\text{tg.}\,\frac{1}{2}a > \frac{1}{2}a, \text{ ó sea } \frac{\text{sen.}\,\frac{1}{2}a}{\cos.\,\frac{1}{2}a} > \frac{1}{2}a,$$

$$\text{ó sen.}\,\frac{1}{2}a > \frac{1}{2}a\cos.\,\frac{1}{2}a.$$

Multiplicando los dos miembros por $2\cos.\,\frac{1}{2}a$,

$$2\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}a\cos.\,\frac{1}{2}a > a\cos^2\frac{1}{2}a;$$

ó bien (24),

$$\text{sen.}\,a > a\left(1 - \text{sen}^2\frac{1}{2}a;\right)$$

$$\text{pero } 1 - \text{sen}^2\frac{1}{2}a > 1 - \frac{a^2}{4};$$

$$\text{luego } \text{sen}\,a > a\left(1 - \frac{a^2}{4}\right) = a - \frac{a^3}{4}.$$

35. Esta propiedad nos permite tomar el arco en vez del seno, con un error menor que la cuarta parte del cubo del arco.

Pero de $180° = \pi = 3{,}141592653589\ldots$ se deduce, arco de $10'' = 0{,}000048481368\ldots$; luego el cubo de 10'' tendrá ceros para sus doce primeras cifras decimales, y por tanto, para el tercio de su cubo; lo que nos indica que el arco de 10'' y su seno tienen al menos comunes sus doce primeras cifras decimales.

Por consiguiente,

$$\text{sen.}\,10'' = 0{,}000048481368\ldots..$$

Conocido el sen. de 10", conoceremos el

$$\text{coseno } 10'' = \sqrt{1 - \text{sen}^2 10''},$$

y conocidos el seno y el coseno de 10", conocemos (24) los de 20", 30" etc.

Determinados los senos y cosenos, determinaremos las tangentes y cotangentes mediante las fórmulas (2) y (3).

Como las tablas están calculadas, unas en la hipótesis del radio igual á la unidad, y otras con el radio igual á 10^{10} cuyo logaritmo es 10, bastará para pasar de unas á otras, añadir 10 unidades á los logaritmos de las líneas calculadas en el supuesto de ser el radio igual á la unidad.

LXXXI.

DISPOSICIÓN Y USO DE LAS TABLAS.

36. Indicada la forma de obtener las líneas trigonométricas de los arcos de 0 á 45°, que las tablas deben contener, su ordenación, para la constitución de las mismas es por demás sencilla.

Omitiendo detalles que se encuentran precisados en las tablas, cuya disposición suele variar según el autor, nos limitaremos á indicar que acostumbran á marcarse los grados en la parte superior de cada página y los minutos en la primera columna; y los grados del arco complementario en la parte inferior y los minutos en la última columna; y en otras cuatro, los logaritmos de los senos, tangentes, cotangentes y cosenos de los arcos respectivos, con una columna intermedia que sirve para las diferencias de cada dos logaritmos consecutivos, ó bien para su parte proporcional.

Las correspondientes á las tangentes y cotangentes son comunes en virtud de su propiedad (19).

37. Dos problemas pueden ocurrir en el uso de las tablas trigonométricas.

1.° *Dado un ángulo, hallar los logaritmos de sus líneas trigonométricas.*

2.° *Dado el logaritmo de una línea trigonométrica, hallar su ángulo.*

Prescindiremos, desde luego, del caso en que el ángulo ó la línea trigonométrica dada, estén en las tablas, pues á la simple vista se encontrará la línea ó ángulo pedido.

Supongamos, para fijar las ideas, que deseamos hallar el log. sen. 37°, 45', 24".

Este ángulo no está en las tablas, pero se encuentra comprendido entre el ángulo 37° 45' y el de 37° 46'; luego su log. sen. estará comprendido entre los log. senos de estos dos ángulos.

Hallando, pues, el log. sen. 37° 45' y determinando la diferencia entre este log. sen. y el de 37°, 45', 24", añadida al logaritmo hallado, nos dará el log. seno pedido.

Pero se admite que *las diferencias de los arcos son directamente proporcionales á las diferencias de los logaritmos de sus líneas trigonométricas*, luego tendremos,

$$\frac{37^\circ\,46' - 37^\circ\,45'}{37^\circ\,45'\,24'' - 37^\circ\,45'} =$$

$$\frac{\text{log. sen. } 37^\circ\,46' - \text{log. sen. } 37^\circ\,45' \text{ (diferencia tabular)}}{\text{log. sen. } 37^\circ\,45'\,24'' - \text{log. sen. } 37^\circ\,45' \text{ (incóg.}^{a}\text{ del probl.}^{o})}$$

$$\text{ó sea} \quad \frac{60''}{24''} = \frac{163}{x}; \text{ de donde}$$

$$x = 24 \times \frac{163}{60} = 24 \times 2{,}71,$$

que es la parte proporcional, = 65.

Luego para determinar la diferencia buscada, *se multiplica el número de segundos por la parte proporcional.*

Ahora bien,

$$\log.\ \text{sen.}\ 37^\circ\ 45' = \bar{1}{,}78\ 6906,$$

luego

$$\log.\ \text{sen.}\ 37^\circ\ 45'\ 24'' = \bar{1}{,}786971.$$

Del propio modo obtendríamos el log. tg., log. cos. ó log. cot., teniendo únicamente en cuenta que para los cosenos y cotangentes, en lugar de añadir la diferencia, debe restarse; puesto que *los cosenos y cotangentes disminuyen á medida que el arco aumenta.*

2.º Determinar el ángulo cuyo log. sen. $= \bar{1}{,}786971$.

Buscaremos en la columna de los senos este logaritmo y veremos que se encuentra comprendido entre

$$\bar{1}{,}786906 \text{ y } \bar{1}{,}787069;$$

que corresponden respectivamente á los arcos $37^\circ\ 45'$ y $37^\circ\ 46'$; luego el ángulo que se busca será mayor que $37^\circ\ 45'$ y menor que $37^\circ\ 46'$.

Sea x la diferencia entre el ángulo que se pide y el de $37^\circ\ 45'$ la proporción ya dicha será en este caso,

$$\frac{60}{x} = \frac{163}{65}$$

de donde

$$x = 65 \times \frac{60}{163} = 65 : \frac{163}{60} = 65 : 2,71,$$

que es la parte proporcional, $= 24$.

Luego el ángulo pedido es $37^\circ\ 45'\ 24''$.

Lo mismo se determinaría el ángulo, conocido el log. cos., log. tg. ó log. cot., teniendo tan solo en cuenta lo advertido anteriormente, en cuya virtud, si se nos diera el log. cos. ó el log. cot., deberíamos buscar en las tablas el inmediato mayor, en lugar del menor.

Por último, si el ángulo dado fuera mayor de 90°, tomaríamos la línea trigonométrica del ángulo suplementario con el signo que la correspondiera (13).

LXXXII.

RELACIONES ENTRE LOS ELEMENTOS DE LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

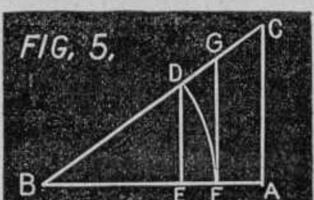
38. Vamos á establecer finalmente las relaciones que ligan á los lados y ángulos de los triángulos, comenzando por los rectángulos.

Para mayor claridad y precisión se ha convenido en representar por A, B, C, las ángulos de todo triángulo y por *a*, *b*, *c*, los lados opuestos.

Cuando el triángulo es rectángulo, A representa siempre el ángulo recto, y, por consiguiente, *a* la hipotenusa.

La resolución de los triángulos rectángulos se funda en los dos principios siguientes.

39. *En todo triángulo rectángulo, un cateto cualquiera es igual á la hipotenusa multiplicada por el seno del ángulo opuesto.*



Sea el triángulo A B C; trazo desde el vértice B, con un radio igual á la unidad, el arco D F y su seno D E, que será el seno del ángulo B.

Los triángulos semejantes A B C y B D E nos dán:

$$\frac{A\,C}{D\,E} = \frac{B\,C}{B\,D}, \text{ ó sea } \frac{b}{\text{sen. B}} = \frac{a}{1};$$

de donde $b = a$ sen. B.

Corolario. *En todo triángulo rectángulo, un cateto cualquiera es igual á la hipotenusa multiplicada por el coseno del ángulo comprendido.*

Pues sabemos que sen. B = cos. C; lo que convierte la fórmula anterior en $b = a$ cos. C.

También puede demostrarse directamente, como el principio anterior.

40. *En todo triángulo rectángulo, un cateto cualquiero es igual al otro cateto multiplicado por la tangente del ángulo opuesto al primero.*

Tracemos la tangente F G del arco D F, que será la tangente del ángulo B. Los triángulos semejantes A B C y F B G nos dán:

$$\frac{\text{A C}}{\text{F G}} = \frac{\text{A B}}{\text{B F}} \text{ ó sea } \frac{b}{\text{tg. B}} = \frac{c}{1};$$

de donde $b = c$ tg. B.

Corolario. *En todo triángulo rectángulo, un cateto cualquiera es igual al otro cateto multiplicado por la cotangente del ángulo opuesto al segundo.*

Pues de tg. B = cot. C, resulta $b = c$ cot. C.

Estos principios se deducen también del primero; pues de $b = a$ sen. B; y $c = a$ cos. B; resulta

$$\frac{b}{c} = \text{tg. B, ó } b = c \text{ tg B;}$$

$$\text{y también } \frac{c}{b} = \text{cot. B, ó } c = b \text{ cot. B.}$$

Estos principios y el teorema de Pitágoras bastan para los cuatro casos que pueden ocurrir en la resolución de los triángulos rectángulos.

LXXXIII.

RESOLUCIÓN DEL PRIMER CASO DE LOS TRIÁNGULOS RECTANGULÓS.

41. *Resolver un triángulo rectángulo dados los dos catetos.*

Se conocen b y c; y se pide hallar a, B y C.

El ángulo B le deduciremos de la fórmula $b = c \operatorname{tg.} B$; que nos dá $\operatorname{tg.} B = \frac{b}{c}$; de donde

$$\log. \operatorname{tg.} B = \log. b + \operatorname{cto.} \log. c$$

El ángulo $C = 90^\circ - B$.

Por último, la hipotenusa la obtendremos por la fórmula $b = a \operatorname{sen.} B$; de donde

$$a = \frac{b}{\operatorname{sen.} B}; \text{ y}$$

$$\log. a = \log. b + \operatorname{cto.} \log. \operatorname{sen.} B.$$

Aplicación de las fórmulas halladas al caso en que:

$$b = 153^{m}, 85; \text{ y } c = 534^{m}, 17.$$

LXXXIV

RESOLUCIÓN DEL SEGUNDO CASO DE LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

42. *Resolver un triángulo rectángulo dados la hipotenusa y un cateto.*

Se nos dá a y b; y se nos pide hallar c, B y C.

El ángulo B le obtendremos por la fórmula $b = a \operatorname{sen} B$, que nos dá $\operatorname{sen} B = \frac{b}{a}$; de donde,

$$\log.\ \text{sen.}\ B = \log.\ b + \text{cto.}\ \log.\ a.$$

El ángulo $C = 90^{\circ} - B$.

El cateto c se puede deducir de la fórmula $c = a \text{ sen } C$, de donde,

$$\log.\ c = \log.\ a + \log.\ \text{sen.}\ C.$$

Aplicación al caso en que:

$$a = 328^{m}, 64;\ \text{y}\ b = 175^{m}, 39.$$

LXXXV.

RESOLUCIÓN DEL TERCER CASO DE LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

43. *Resolver un triángulo rectángulo, dados la hipotenusa y un ángulo agudo.*

Se conocen a y B; se quiere obtener b, c y C.

Desde luego $C = 90^{\circ} - B$.

El cateto b se deduce de la formula $b = a \text{ sen } B$; que nos dá:

$$\log.\ b = \log.\ a + \log.\ \text{sen.}\ B.$$

El cateto c se puede obtener por la fórmula $c = a \cos.\ B$; de donde,

$$\log.\ c = \log.\ a + \log.\ \cos.\ B.$$

Aplicación de estas fórmulas al caso en que:

$$a = 2721^{m}, 39;\quad \text{y}\quad B = 43^{\circ}\ 5'\ 42'', 34.$$

LXXXVI.

RESOLUCIÓN DEL CUARTO CASO DE LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

44. *Resolver un triángulo rectángulo dados un cateto y un ángulo agudo.*

Conocidos b y B, determinar a, c y C.

La hipotenusa nos la dará la fórmula $b = a$ sen B; de donde $a = \frac{b}{\text{sen. B}}$; y

$$\log. a = \log. b + \text{cto. log. sen. B.}$$

El cateto c, lo hallaremos por la fórmula $b = c$ tg. B; de donde, $c = \frac{b}{\text{tg. B}}$; y

$$\log. c = \log. b + \text{cto. log. tg. B.}$$

El ángulo C $= 90^\circ -$ B.

Aplicación de estas fórmulas al caso de

$$b = 4354^{\text{m}}, 59; \quad \text{y} \quad B = 19^\circ\, 15'\, 46'', 15.$$

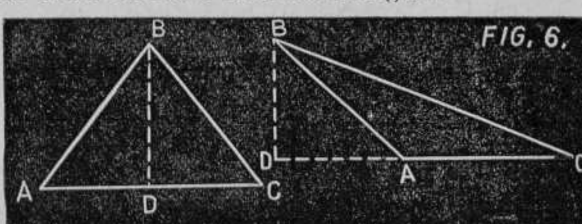
LXXXVII.

RELACIONES ENTRE LOS ELEMENTOS DE LOS TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.

45. La resolución de los triángulos oblicuángulos ó generales se funda en los siguientes principios.

En todo triángulo, los lados son directamente proporcionales á los senos de los ángulos opuestos.

Sea A B C el triángulo, bajemos la perpendicular á uno de los lados desde el vértice opuesto. Esta perpendicular caerá dentro ó fuera del triángulo.



En el primer caso, tenemos que los triángulos rectángulos B D A y B D C nos dán (39),

$$\left.\begin{array}{l} B\,D = c \text{ sen. } A \\ B\,D = a \text{ sen. } C \end{array}\right\} c \text{ sen. } A = a \text{ sen. } C, \quad \text{ó sea}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\text{sen. } C}{\text{sen. } A}.$$

En el segundo, los triángulos B D A y B D C nos darán, por la misma razón,

$$\left.\begin{array}{l} B\,D = c \text{ sen. } B\,A\,D = c \text{ sen. } A \\ B\,D = a \text{ sen. } C \end{array}\right\} c \text{ sen. } A = a \text{ sen. } C;$$

$$\text{ó sea } \frac{c}{a} = \frac{\text{sen. } C}{\text{sen. } A}.$$

Corolario. *En todo triángulo, la suma y la diferencia de dos lados son directamente proporcionales á las tangentes de la semi-suma y de la semi-diferencia de sus ángulos opuestos.*

Pues de la proporción $\frac{c}{a} = \frac{\text{sen. } C}{\text{sen. } A}$

resulta (162, Arit.)

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{\text{sen. } C + \text{sen. } A}{\text{sen. } C - \text{sen. } A}$$

pero (29)

$$\frac{\text{sen. } C + \text{sen. } A}{\text{sen. } C - \text{sen. } A} = \frac{\text{tg. } \frac{C+A}{2}}{\text{tg. } \frac{C-A}{2}};$$

luego

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{\text{tg. } \frac{C+A}{2}}{\text{tg. } \frac{C+A}{2}}.$$

46. *En todo triángulo, el cuadrado de un lado es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el duplo de su producto por el coseno del ángulo comprendido.*

Pueden ocurrir los dos casos ya expresados (fig. 6).

En el primero, tenemos (Geom. 109),

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b \times \mathrm{A\,D};$$

pero el triángulo rectángulo A B D nos dá (39, cor.),

$$\mathrm{A\,D} = c \cos.\ \mathrm{A};\quad \text{luego}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos.\ \mathrm{A}.$$

En el segundo caso, tenemos (Geom. 110),

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,b \times \mathrm{A\,D};$$

pero (39, cor.) en el triángulo A B D,

$$\mathrm{A\,D} = c \cos.\ \mathrm{B\,A\,D} = -\ c \cos.\ \mathrm{A} \qquad (13)$$

luego

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos.\ \mathrm{A}.$$

47. De lo expuesto se deduce que cada una de las propiedades anteriores establece las relaciones que ligan á los seis elementos del triangulo, y basta, por tanto, para la resolución del problema general de la trigonometría rectilínea; por lo que pueden deducirse unas de otras; así como de estas resultan también las de los triángulos rectángulos, que no son más que un caso particular de aquel.

Nota. En la resolución de los triángulos hemos empleado y seguiremos empleando el *complemento logarítmico*, ó *complemento á cero*, en vez del complemento aritmético, por la mayor sencillez y comodidad que en los cálculos se obtiene.

LXXXVIII.

RESOLUCIÓN DEL PRIMER CASO DE LOS TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.

48. *Resolver un triángulo, dados un lado y dos ángulos.*

Se nos dá a, B y C, y se desea hallar b, c y A.

Desde luego $A = 180^\circ - (B + C)$.

El lado b lo obtendremos de la ecuación

$$\frac{b}{a} = \frac{\text{sen. B}}{\text{sen. A}}, \text{ que nos dá, } b = \frac{a \times \text{sen. B}}{\text{sen. A}};$$

de donde

$$\log. b = \log. a + \log. \text{sen. B} + \text{cto. log. sen. A}$$

Del mismo modo deduciremos c de la relación

$$\frac{c}{a} = \frac{\text{sen. C}}{\text{sen. A}}; \text{ que nos dá } c = \frac{a \text{ sen. C}}{\text{sen. A}};$$

de donde

$$\log. c = \log. a + \log. \text{sen. C} + \text{cto. log. sen. A}$$

Aplicación de estas fórmulas al caso en que:

$a = 5467^{\text{m}}, 48$; $B = 75^\circ, 39', 47'' 6$; $C = 38^\circ, 1', 30'', 4$.

LXXXIX.

RESOLUCIÓN DEL SEGUNDO CASO DE LOS TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.

49. *Resolver un triángulo, dados dos lados y el ángulo comprendido.*

Conocidos a, b y C, hallar c, A y B.

Desde luego se tiene $A + B = 180^\circ - C$.

Y podremos deducir el valor de $A - B$, de la fórmula

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\text{tg. } \frac{A + B}{2}}{\text{tg. } \frac{A - B}{2}}$$

ó sea,

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{tg.}\left(90^{\circ} - \frac{\text{C}}{2}\right)}{\text{tg.}\ \frac{\text{A}-\text{B}}{2}}$$

de donde

$$\text{tg.}\ \frac{\text{A}-\text{B}}{2} = \frac{(a-b)\ \text{tg.}\left(90^{\circ} - \frac{\text{C}}{2}\right)}{a+b}$$

que nos dá

$$\text{log. tg.}\ \frac{\text{A}-\text{B}}{2} = \text{log.}(a-b) + \text{log. tg.}\left(90^{\circ} - \frac{\text{C}}{2}\right) + \text{cto. log.}\ (a+b)$$

Conocidos A + B y A — B, se conocerán A y B, (Alg. 2).

En cuanto al lado c se puede deducir de la fórmula

$$\frac{a}{c} = \frac{\text{sen. A}}{\text{sen. C}};$$ que nos dá

$$c = \frac{a\ \text{sen. C}}{\text{sen. A}};$$ de donde

$$\text{log.}\ c = \text{log.}\ a + \text{log. sen. C} + \text{cto. log. sen. A}$$

Aplicación de estas fórmulas al caso en que:

$a = 324^{m}, 58$; $b = 215^{m}, 47$, y $\text{C} = 47^{\circ}, 34', 23'' 56$.

XC.

RESOLUCIÓN DEL TERCER CASO DE LOS TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.

50. *Resolver un triángulo, dados dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.*

Dados a, b y A, determinar c, B y C.

El ángulo B lo obtendremos de la proporción

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen. A}}{\text{sen. B}} \text{ que nos dá}$$

$$\log. \text{sen. B} = \log. b + \log. \text{sen. A} + \text{cto. log } a$$

El ángulo $C = 180^\circ - (A + B)$; y el lado c, se puede deducir de la fórmula $\frac{a}{c} = \frac{\text{sen. A}}{\text{sen. C}}$; que dá

$$\log. c = \log. a + \log. \text{sen. C} + \text{cto. log. sen. A}$$

Como el ángulo B viene determinado por su seno, obtendremos para B dos valores correspondientes á los dos ángulos suplementarios; á estos dos valores de B, corresponderán otros dos de C y de c. Es, pues, preciso examinar cuál de estos valores es el que debe aceptarse en cada caso.

Pueden ocurrir tres;

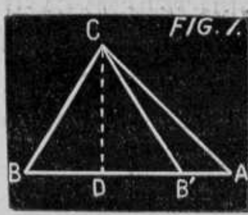
1.° $a > b$. En este caso, siendo $A > B$, el ángulo B es agudo y, por tanto, el problema solo tiene una solución.

2.° $a = b$. En este caso, $A = B$; y, por tanto, tampoco puede tener B más que un solo valor.

3.° $a < b$. En este caso, siendo $B > A$, los dos valores que corresponden á sen. B, satisfacen el problema y este tiene dos soluciones.

Siendo $\text{sen. B} = \frac{b \text{ sen. A}}{a}$ podrán suceder tres casos:

1.° b sen. $A < a$; de donde sen. $B < 1$; y observando que la perpendicular $CD = b$ sen. A; resultan, en efecto, los triángulos A C B y A C B′ que satisfacen á la cuestión propuesta.



2.º b sen. $A = a$; de donde sen. $B = 1$ ó $B = 90^{\circ}$, y el triángulo A C D es la única solución del problema.

3.º b sen $a > a$; de donde sen. $B > 1$; y el problema, por tanto, es imposible. (10)

Resultados idénticos á los de la discusión geométrica de este mismo problema.

Aplicación de estas fórmulas al caso en que:

$$a = 5467^{m}, 48;\quad b = 3677^{m}, 88;\quad A = 68^{\circ}, 1', 30'', 4.$$

XCI.

RESOLUCIÓN DEL CUARTO CASO DE LOS TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.

51. *Resolver un triángulo dados los tres lados.*

Se nos dán a, b y c; se buscan los valores de A, B y C.

El ángulo A lo determinaremos por la fórmula

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos. A;$$

que nos dá:

$$\cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c};$$

pero como esta fórmula no es aplicable al cálculo logarítmico, es preciso transformarla en otra que lo sea.

Para ello restemos sus dos miembros de la unidad, y tendremos:

$$1 - \cos. A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c};$$

ó sea (27)

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2\,b\,c};$$

de donde (Alg. 26, 5.ª)

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = \frac{(a + b - c)\,(a - b + c)}{2\,b\,c};$$

y llamando $2\,p$ al perímetro del triángulo, tendremos:

$$a + b - c = 2\,(p - c);\ \text{y}\ \ a - b + c = 2\,(p - b);$$

y sustituyendo

$$2\,\text{sen}^2\,\frac{A}{2} = \frac{4\,(p - c)\,(p - b)}{2\,b\,c};\ \text{ó bien}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{sen}\,\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{(p - c)\,(p - b)}{b\,c}}\\
&\text{del mismo modo hallaríamos}\\
&\text{sen}\,\frac{B}{2} = \pm\sqrt{\frac{(p - a)\,(p - c)}{a\,c}}\\
&\text{sen}\,\frac{C}{2} = \pm\sqrt{\frac{(p - a)\,(p - b)}{a\,b}}
\end{aligned}\right\}\ (1)$$

Si en lugar de restar los dos miembros de la ecuación propuesta de la unidad, hubiéramos añadido la unidad, hallaríamos de modo análogo

$$\left.\begin{aligned}
&\cos.\,\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{p\,(p - a)}{b\,c}}\\
&\cos.\,\frac{B}{2} = \pm\sqrt{\frac{p\,(p - b)}{a\,c}}\\
&\cos.\,\frac{C}{2} = \pm\sqrt{\frac{p\,(p - c)}{a\,b}}
\end{aligned}\right\}\ (2)$$

Por último, dividiendo ordenadamente las fórmulas anteriores por estas, resultará

$$\left.\begin{aligned}
&\text{tg.}\,\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{(p - b)\,(p - c)}{p\,(p - a)}}\\
&\text{tg.}\,\frac{B}{2} = \pm\sqrt{\frac{(p - a)\,(p - c)}{p\,(p - b)}}\\
&\text{tg.}\,\frac{C}{2} = \pm\sqrt{\frac{(p - a)\,(p - b)}{p\,(p - c)}}
\end{aligned}\right\}\ (3)$$

Siendo todo ángulo menor de 180° su mitad será menor de 90°, y, por tanto, puede prescindirse del doble signo en las anteriores fórmulas. (5, 3.°)

Cualquiera de los tres sistemas de ecuaciones (1), (2) ó (3) sirve para resolver el problema; pero el (1) exige la obtención de seis logaritmos; el (2) la de siete; y el (3) solamente la de cuatro. Es, por consiguiente, el más sencillo.

Aunque bastaría en rigor determinar los valores de dos ángulos; conviene hallar directamente los tres como medio de comprobación.

Aplicación al caso en que:

$$a = 3467^{m},48;\ b = 5784{,}59;\ y\ c = 3677{,}88.$$

ERRATAS DEL TEXTO.

Páginas.	Líneas.	DICE.	DEBE DECIR.
16	26	apoya	apoye
21	5	encontrara	encontraran
30	5	$\frac{A\,D}{A\,B}$	$\frac{A\,D}{A\,E}$
30	8	$\frac{A\,C}{A\,F}$	$\frac{A\,C}{A\,B}$
32	2	respecvas	respectivas
44	4	151	51
46	17	(62, recíp. 3.º)	(64, recíp. 3.º)
47	4	(62, recíp. 3.º)	(64, recíp. 3.º)
68	7	D E	D F
70	1	Además (31, cor. 1.º)	(31, cor. 1.º) Además
75	2	A B D	A B F
79	1	contar	cortar
81	14	C O D	O C D
82	13	$CD = AD$	$CB = AD$
87	18	consistente	constante
88	25	(Arit. 65)	(Arit. 165)
89	4	(Escolio, núm. 130)	(130)
101	10	cumplirían	cumpliría
103	7	El lado del exágono etc.	165. El lado etc.
108	10	(149, escolio)	154
112	24	radio l'	radio r'
115	16	único que puede	que pueden
120	24	166	196
129	3	E G	F G
129	7	$\frac{A\,E}{E\,B} = \frac{E\,G}{G\,D}$	$\frac{A\,E}{E\,B} = \frac{C\,G}{G\,D}$
134	21	(193 cor.)	(194, cor.)
141	4	$T\,A'$ y $T\,C'$	$T\,C'$ y $T\,A'$
142	2	$B\,T\,C + A\,T\,B$	$B\,T\,C > A\,T\,B$
156	2	(179, cor. 2.º)	(197, cor. 2.º)
161	16	interior	exterior
163	4	$S\,B\,C$ y $S\,b\,c$	$S\,A\,E$ y $S\,a\,e$

Páginas.	Líneas.	DICE.	DEBE DECIR.
163	22	$\frac{B'}{b'} = \frac{A^2}{a^2}$	$\frac{B'}{b'} = \frac{A^2}{d^2}$
168	8	$AB = HG$	$AB = CD$
169	9	$\overline{ED}^2 + \overline{DA}^2 + \overline{DE}^2$	$\overline{ED}^2 + \overline{DA}^2 + \overline{DC}^2$
180	11	esta	esto
181	18	223	323
182	10	236	326
184	12	$o'\,t$	$D'\,t$
197	6	(fig. 256)	(fig. 156)
198	14	P A B y P' A' B'	A B C y A' B' C'
199	11	(fig. 257)	(fig. 157)
217	8	$\frac{\sqrt{1+\text{sen}\,A}}{2} \pm \frac{\sqrt{1-\text{sen}\,A}}{2}$	$\pm \frac{\sqrt{1+\text{sen}\,A}}{2} \mp \frac{\sqrt{1-\text{sen}\,A}}{2}$
220	20	9 á 45°	0° á 45°
222	7	$\cos. 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cos. 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
223	19	tercio de su cubo	cuarto de su cubo
232	21	$\dfrac{\text{tg.}\,\frac{C+A}{2}}{\text{tg.}\,\frac{C+A}{2}}$	$\dfrac{\text{tg.}\,\frac{C+A}{2}}{\text{tg.}\,\frac{C-A}{2}}$

Además están repetidos el núm. 64 (las citas de las páginas 46 y 48 se refieren al 2.º) y los 194 y 211.

ERRATAS DE LAS FIGURAS.

Figura 30, *b n* por *b n'*.

Figura 35, falta una C en la intersección de A B con *o o'*.

Figura 153, falta B'; C y T en vez de C' y T'; O' debe estar en la recta T' D'.

Figura 3 de Trigonometría, N en vez de H.

Figura 4 de Trigonometría, P en vez de B.