PRINCIPIOS

DE

Aritmética y Geometría práctica

POR

EDUARDO MATEO DE IRAOLA

Profesor de la Escuela de Artes y Oficios de Segovia.

SEGOVIA:
IMPRENTA PROVINCIAL.
1883.

PRINCIPIOS

DE

ARITMÉTICA Y GEOMETRÍA PRÁCTICA

POR

EDUARDO MATEO DE IRAOLA

PROFESOR DE LA ESCUELA DE ARTES Y OFICIOS DE SEGOVIA.

SEGOVIA

IMPRENTA PROVINCIAL.

1883.

A LA JUNTA DIRECTIVA

de la Escuela provincial de Artes y Oficios.

Encargado por V. I. de escribir una obra de texto para los alumnos de la clase de Aritmética y Geometría, he procurado reducir aquella á sus más estrechos límites, si bien consignando los principios fundamentales que habrán de servir de sólida base para las enseñanzas ulteriores que en dia no lejano podrá comprender una Escuela con tal prediIeccion mirada y con tal inteligencia dirigida por las Corporaciones populares de esta Capital. Quizás aparezca la exposicion desprovista de rigor científico; tal vez se encuentren espuestos algunos principios con laconismo estremado; mas téngase en cuenta, de una parte, la naturaleza de estas enseñanzas y de otra, el natural deseo de concentrar en pocas páginas la parte sustancial del curso, al objeto de formar una obra de fácil adquisición.

De todas suertes, nuestro único propósito ha sido escribir unos principios de Aritmética y Geometría práctica, con el fin de popularizar estas enseñanzas. Si no lo hemos conseguido, nos quedará al ménos la satisfacción de haberlo intentado, sirviendo de disculpa á nuestro atrevimiento el haber obrado en cumplimiento de un mandato superior.

Eduardo Mateo de Iraola.

Segovia y Julio 1883.

[illegible]

PRINCIPIOS DE ARITMÉTICA.

Preliminares.

Cuando queremos formarnos idea de una magnitud la comparamos con otra de su misma naturaleza que elegimos como término ó tipo de comparación. Así, por ejemplo, para saber el peso de un cuerpo le comparamos con otro peso tipo (kilógramo) y el resultado de esta comparación lo expresamos diciendo que el cuerpo pesó tantos ó cuantos kilógramos.

Esta magnitud que tratamos de apreciar es una cantidad; la magnitud tipo recibe el nombre de unidad, y el resultado de la comparación es lo que llamamos número.

De suerte que *cantidad* es toda magnitud apreciable numéricamente.

Unidad es el tipo de comparación de la cantidad, y

Número es el resultado de comparar la cantidad con la unidad.

Al efectuar esta comparación puede suceder que la cantidad contenga un número exacto de veces á la unidad ó á alguna parte de la unidad; y que la cantidad no contenga exactamente ni á la unidad ni á ninguna de sus partes.

En el primer caso, el número se llama comensurable; en el segundo incomensurable.

Número entero es un conjunto de unidades iguales al tipo.

Número fraccionario es un conjunto de partes iguales de la unidad tipo.

Número incomensurable es el que no puede expresarse exactamente por ningun entero ni fraccionario.

El número puede ser tambien abstracto ó concreto.

Número abstracto es el que no determina la especie de la unidad á que se refiere; como seis, ocho, veinte.

Número concreto es el que determina la especie de la unidad á que se refiere; como seis métros, ocho litros, veinte gramos.

Tambien se distinguen los números en homogéneos y heterogéneos.

Números homogéneos son los de la misma especie: como cuatro litros y sesenta litros.

Números heterogéneos son los de distinta especie: como cuatro litros y sesenta gramos.

Aritmética es la ciencia de los números; es decir, la que nos enseña á expresarlos, componerlos y descomponerlos.

Primera parte.

NÚMEROS ABSTRACTOS.

CAPÍTULO PRIMERO.

Numeración de los enteros.

La numeración es la parte de la Aritmética que nos enseña á expresar los números.

Como los números, lo mismo que todas nuestras ideas, se pueden expresar de palabra y por escrito, de ahí la division de la numeración en verbal y escrita.

I.

Numeración verbal.

Numeración verbal es el medio adoptado para expresar los números con pocas palabras.

Su artificio es sumamente sencillo.

La unidad se designa con la palabra.......	uno.
La reunión de uno y uno con la palabra....	dos.
La de dos y uno..........................	tres.
La de tres y uno.........................	cuatro.
La de cuatro y uno.......................	cinco.
La de cinco y uno........................	seis.
La de seis y uno.........................	siete.
La de siete y uno........................	ocho.
La de ocho y uno.........................	nueve.
La de nueve y uno........................	diez.

La reunión de diez unidades se considera como una nueva unidad que se llama decena, y se cuenta por decenas lo mismo que por unidades; así se dice:

Una	decena	ó	diez.
Dos	decenas	ó	veinte.
Tres	decenas	ó	treinta.
Cuatro	decenas	ó	cuarenta.
Cinco	decenas	ó	cincuenta

Entre cada dos decenas consecutivas quedan nueve números, que se designan añadiendo al nombre de la primera los de las nueve primeras unidades.

Seis	decenas	ó	sesenta.	Así se dice: diez y uno, diez y dos, diez y tres, diez y cuatro, diez y cinco, diez y seis, diez y siete, diez y ocho, y diez y nueve.
Siete	decenas	ó	setenta.	
Ocho	decenas	ú	ochenta.	
Nueve	decenas	ó	noventa.	
Diez	decenas	ó	ciento.	

Y del mismo modo: veinte y uno, veinte y dos, veinte y tres... hasta veinte y nueve, etc. (*)

La reunión de diez decenas se considera como una nueva unidad llamada centena, y se cuenta por centenas como por decenas y unidades; así diremos:

Una	centena	ó	ciento.	Entre cada dos centenas consecutivas quedan noventa y nueve números que se expresan añadiendo al nombre de la primera los de las noventa y nueve primeras unidades.
Dos	centenas	ó	doscientos.	
Tres	centenas	ó	trescientos.	
Cuatro	centenas	ó	cuatrocientos	
Cinco	centenas	ó	quinientos.	
Seis	centenas	ó	seiscientos.	Así diremos: ciento uno, ciento dos, ciento tres, ciento cuatro... hasta ciento noventa y nueve.
Siete	centenas	ó	setecientos.	
Ocho	centenas	ú	ochocientos.	
Nueve	centenas	ó	nuevecientos.	
Y diez	centenas	ó	mil.	

Doscientos uno, doscientos dos, doscientos tres, doscientos cuatro... hasta doscientos noventa y nueve, etc.

La reunion de diez centenas se mira como una nueva unidad que se llama millar, y contamos por millares lo mismo que hemos contado por unidades, decenas y centenas.

Un	millar	ó	mil.	Entre cada dos millares consecutivos hay comprendidos nuevecientos noventa y nueve números que se indican con el nombre del primer millar y los de los nuevecientos noventa y nueve primeros números.
Dos	millares	ó	dos mil.	
Tres	millares	ó	tres mil.	
Cuatro	millares	ó	cuatro mil.	
Cinco	millares	ó	cinco mil.	
Seis	millares	ó	seis mil.	
Siete	millares	ó	siete mil.	
Ocho	millares	ú	ocho mil.	
Nueve	millares	ó	nueve mil.	Es decir, mil uno, mil dos, mil tres, mil cuatro, mil cinco... hasta mil nuevecientos noventa y nueve.
Diez	millares	ó	Diez mil.	

(*) Estas cinco primeras voces han sido sustituidas por las de once, doce, trece, catorce y quince.

Y lo mismo: dos mil uno, dos mil dos, dos mil tres... hasta dos mil nuevecientos noventa y nueve, etc.

El conjunto de diez millares se llama decena de millar; el de diez decenas de millar, centena de millar, y el de diez centenas de millar, millar de millar ó millon.

Y contaremos unidades de millón decenas de millón centenas de millón unidades de millar de millón decenas de millar de millón centenas de millar de millón y millar de millar de millón	Lo mismo que hemos contado por unidades sencillas.

El millar de millar de millón ó sea millón de millón se llama billón; un millón de billón, trillón, etc.

Todas estas unidades se clasifican también por órdenes como expresa el siguiente cuadro:

Unidad........................	primer órden ó simple.
Decena........................	segundo »
Centena........................	tercer »
Unidad de millar............	cuarto órden.
Decena de millar............	quinto »
Centena de millar............	sexto »
Unidad de millón..........	séptimo órden.
Decena de millón..........	octavo »
Centena de millón..........	noveno »
Unidad de millar de millón...	décimo órden.
Decena de millar de millón...	undécimo »
Centena de millar de millón...	duodécimo »

Con este sencillo artificio y con los solos nombres de los diez primeros números y los de ciento, mil y millón combinados convenientemente pueden expresarse, segun acabamos de ver, todos los números enteros.

II.

Numeración escrita.

La numeración escrita tiene por objeto representar todos los números con pocos caractéres ó cifras.

Toda vez que las unidades de un órden cualquiera no pueden llegar á diez, desde luego se observa que nueve serán los caractéres necesarios. Estas cifras ó caractéres son:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	y se llaman cifras
uno	dos	tres	cuatro	cinco	seis	siete	ocho	nueve	significativas.

Para distinguir si estas cifras representan unidades de uno ú otro órden se ha convenido que las colocadas en primer lugar á la derecha expresan unidades de primer órden y las colocadas en segundo, tercero, etc., contando de derecha á izquierda, expresarán unidades de segundo, tercer órden, etc.

En el caso que el número carezca de unidades de un órden determinado se expresará la carencia de estas unidades por la cifra 0
cero.

De suerte que para escribir un número bastará ir escribiendo de izquierda á derecha las cifras que representan las unidades de cada órden que el número contiene empezando por las de órden superior.

De aquí se deduce que toda cifra tiene dos valores; uno absoluto que es el que representa por su figura; y otro relativo, que es el que expresa por el lugar que ocupa.

Para leer un número se designan sucesivamente los valores relativos de cada una de sus cifras comenzando por las de órden superior.

Para mayor facilidad, puede en un principio dividirse el número en grupos de seis cifras, empezando por la derecha, y se pone un 1 en la parte superior izquierda del primer grupo, un 2 en el segundo, etc., y cada uno de estos grupos se divide en dos de á tres cifras por medio de una coma. Con este sencillo artificio puede leerse por grupos de tres cifras, añadiendo la palabra mil donde haya una coma, y leyendo millón, billón, etcétera, donde se encuentra el 1, 2, etc.

Ejemplos.

Escribir el número cuatro mil trillones seiscientos noventa y dos mil billones ochenta y cuatro mil siete millones doscientos mil nueve.

4.000.692.000.084.007.200.009.

Leer el número 325.607.008.120.034.007.

Trescientos veinticinco mil seiscientos siete billones ocho mil ciento veinte millones treinta y cuatro mil siete.

El sistema de numeracion que hemos explicado ligeramente se llama *decimal* porque obedece al principio de agrupar los números de diez en diez, como hemos visto, constituyendo con cada diez unidades de un órden cualquiera una unidad del órden inmediato superior.

CAPÍTULO II.

Operaciones con los números enteros.

Las principales operaciones que con los números se efectúan son la adición, sustracción, multiplicación y división que se conocen con el nombre de operaciones fundamentales.

De éstas, la adición y multiplicación son operaciones de composición, y la sustracción y división de descomposición.

I.

Adición.

Adición es la operacion de sumar.

Sumar es reunir varios números en uno solo.

Los números que se quieren sumar se llaman *sumandos*, y el resultado de la operación se llama *suma*.

El signo que se emplea para indicar esta operación es $+$ que se lee mas. Así $4 + 3 + 5$, quiere decir 4 mas 3 mas 5; y el resultado se escribe despues de este signo $=$ que se lee igual.

Así diremos: $4 + 3 + 5 = 12$, ó 4 mas 3 mas 5 igual á 12.

En la adición de enteros conviene distinguir dos casos: que los sumandos tengan una sola cifra, que tengan dos ó más.

Primer caso. Para sumar números de una cifra se agregan á uno de los sumandos una á una las unidades de todos los demás.

Así en el ejemplo anterior diremos: 4 mas 1 5, mas 1 6, mas 1 7, y añadiremos ahora al 7 las unidades del 5; 7 mas 1 8, 8 mas 1 9, 9 mas 1 10, 10 mas 1 11, 11 mas 1 12.

El resultado se abrevia sabiendo de memoria la tabla de sumar.

Tabla de sumar es un estado ó cuadro que contiene las sumas de todos los números de una cifra. Para construirla se colocan en línea horizontal el 0 y las nueve primeras cifras significativas, bastando luego colocar debajo de cada número el siguiente:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Para hallar la suma de dos enteros por medio de esta tabla, basta buscar el uno en la primera línea horizontal y el otro en la primera vertical, el número situado debajo del primero y enfrente del segundo indica la suma de ambos.

Así, para hallar la suma de 5 y 4, descenderemos por la línea que encabeza el 5 hasta encontrar la que empieza por 4; el número 9, que está en la unión de las dos, será la suma.

Segundo caso. Sumar enteros de varias cifras:

Para sumar enteros de varias cifras, se suman las unidades del mismo órden de todos los sumandos, empezando por la derecha, teniendo cuidado de agregar á la suma siguiente las decenas que resulten de cada suma parcial.

Para mayor comodidad pueden colocarse los sumandos unos debajo de otros, de modo que se correspondan las unidades del mismo órden, y convendrá también separar con una raya la suma de los sumandos, como se indica en el siguiente

Ejemplo.

Sumar 4576 + 15348 + 91314 + 8605

Sumandos.	4576
	15348
	91314
	8605
Suma	119843

Diremos: 6 mas 8 14, mas 4 18, mas 5 23; se escribe 3 debajo de las unidades, y las dos decenas se agregan á la suma siguiente: 2 mas 7 9, mas 4 13, mas 1 14; se escribe 4 debajo de las decenas, y la centena se reserva para la siguiente suma: 1 mas 5 6, mas 3 9, mas 3 12, mas 6 18; se escribe 8 debajo de las centenas, y agregando á los millares el que ha resultado, diremos: 1 mas 4 5, mas 5 10, mas 1 11, mas 8 19; escribimos 9, y añadimos 1 á la siguiente suma: 1 y 1 2, mas 9 11.

Luego 4576 + 15348 + 91314 + 8605 = 119843.

II.

Sustracción.

Sustracción es la operación de restar.

Restar es descomponer una suma en dos sumandos, conocido uno de éstos.

La suma dada toma el nombre de *minuendo*.

El sumando conocido el de *sustraendo*.

Y el sumando que se busca se llama *resto*, *exceso* ó *diferencia*.

El signo de esta operación es — que se lee menos.

Así 7 — 5 quiere decir 7 menos 5, y el resultado se escribe después del signo =

En la sustracción de enteros conviene distinguir dos casos: que el sustraendo tenga una sola cifra, que el sustraendo tenga dos ó más.

Primer caso. Para resolver este primer caso basta buscar, con ayuda de la tabla de sumar, el número que, agregado al sustraendo, dá el minuendo, ó bien quitar una á una del minuendo las unidades del sustraendo.

Asi por ejemplo; 12 — 8 = 4, porque 4 sumado con 8 nos dá 12; 39 — 7 = 32, porque 32 es el número que sumado con 7 dá 39.

Segundo caso. Para restar números de varias cifras basta restar sucesivamente de cada cifra del minuendo la del mismo órden del sustraendo.

Para mayor comodidad puede colocarse el sustraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan las cifras de igual órden, y convendrá tambien poner una raya debajo del sustraendo, como se expresa en el siguiente

Ejemplo.

34578 — 14346	Minuendo	34578
	Sustraendo	14346
	Resto	20232

La operacion se efectúa diciendo: 8 menos 6 2, 7 menos 4 3, 5 menos 3 2, 4 menos 4 0 y 3 menos 1 2. Luego 34578 — 14346 = 20232.

Puede suceder que alguna de las cifras del sustraendo sea mayor que la correspondiente del minuendo, y en este caso se añaden diez unidades á la cifra del minuendo, teniendo cuidado en la sustraccion siguiente de añadir una unidad de su órden á la del sustraendo.

Ejemplo.

453691 — 234578	453691
	234578
	219113

Diremos: 1 menor que 8; añado 10 al minuendo; 11 menos 8 3, y en compensacion añado ahora 1 al sustraendo, y digo: 9 menos 8 1, 6 menos 5 1, 3 menor que 4; añado 10 al 3; 13 menos 4 9, y añado 1 al siguiente sustraendo; 5 menos 4 1, 4 menos 2 2.

Luego 453691 — 234578 = 219113.

III.

Multiplicación.

Multiplicación es la operacion de multiplicar.

Multiplicar un número por un entero es hallar la suma de tantos sumandos iguales al primero como unidades tiene el segundo.

El número que se multiplica se llama *multiplicando*.

El número por quien se multiplica se denomina *multiplicador*.

El resultado ó suma que se busca recibe el nombre de *producto*.

El multiplicando y el multiplicador se designan tambien con el nombre de factores del producto.

La multiplicación se indica con el signo $\times$ (que se lee multiplicado por) ó bien con un punto.

Así 4×7 ó 4.7, quiere decir 4 multiplicado por 7.

En la multiplicación de enteros se pueden distinguir tres casos:

1.° Multiplicar dos números de una cifra.

2.° Multiplicar un número de varias cifras por otro de una, y

3.° Multiplicar dos números de varias cifras.

Primer caso. Para multiplicar dos números de una cifra basta tomar al primero como sumando tantas veces como unidades tiene el segundo.

Así, por ejemplo: 4×3 es lo mismo que $4 + 4 + 4 = 12$. Luego $4 \times 3 = 12$.

Se abrevia la operación sabiendo de memoria la tabla de multiplicar. Tabla de multiplicar es un estado ó cuadro que contiene los productos de los números de una cifra. Para construirla basta escribir en línea horizontal los nueve primeros números—debajo las sumas de cada uno consigo mismo—la 3.ª línea se forma sumando los números de la 1.ª con sus correspondientes de la 2.ª, la 4.ª sumando los de la 1.ª y 3.ª, y así sucesivamente, hasta sumar la 1.ª con la 8.ª

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Para hallar el producto de dos enteros, por medio de esta tabla, basta buscar el uno en la primera línea horizontal y el otro en la primera vertical, el número situado debajo del 1.° y enfrente del 2.° será el producto pedido.

Así para hallar el producto de 7 por 5 descendemos por la línea que encabeza el 7 hasta encontrar la que comienza por 5; el número 35 situado debajo del 1.° y enfrente del 2.° será el producto.

Segundo caso. Para multiplicar un número de varias cifras por otro de una basta multiplicar sucesivamente cada cifra del multiplicando por la del multiplicador, teniendo cuidado, si alguno de estos productos contuviera decenas, de agregarlas al producto siguiente.

Para mayor comodidad puede colocarse el multiplicador debajo del multiplicando, separando ambos del producto por una raya — como se indica en el siguiente

Ejemplo.

56476 × 8	56476	multiplicando
	8	multiplicador
	451808	producto.

Y se dice 6 por 8 48; se pone el 8 debajo del 6, y se reservan las cuatro decenas.

8 por 7 56, y 4 (decenas del producto anterior) 60, se pone cero y se reservan 6.

8 por 4 32, y 6 (decenas del producto anterior) 38, se escribe 8 y se reservan 3.

8 por 6 48 y 3 51; se escribe el 1 y se reservan 5, y 8 por 5 40 y 5 45.

De suerte que $56476 \times 8 = 451808$.

Tercer caso. Para multiplicar dos números de varias cifras se multiplica el multiplicando sucesivamente por cada cifra del multiplicador, y se suman estos productos.

Debe advertirse que cada uno de los productos parciales del multiplicando por cada cifra del multiplicador es del mismo órden que ésta, así que para mayor comodidad conviene escribir el multiplicando y multiplicador como en el caso anterior, y separar éstos por medio de una raya de los productos parciales que deberán escribirse debajo de la cifra que los produce y separados por otra raya del producto total, como puede observarse en el siguiente

Ejemplo.

32415 × 6781	Multiplicando	32415	
	Multiplicador	6781	
		32415	producto por 1
	Productos parciales	259320	producto por 8
		226905	producto por 7
		194490	producto por 6
	Producto total	219806115	

Se multiplica el multiplicando por 1, unidades del multiplicador, y la primera cifra del producto parcial se escribe debajo del 1. Despues se efectúa la multiplicacion del multiplicando por las 8 decenas del multiplicador y la primera cifra del producto se escribe debajo del 8; escribiendo del mismo modo debajo respectivamente de las 7 centenas y 6 millares del multiplicador los otros dos productos parciales. La suma de todos estos productos parciales constituye el producto total.

Así 32415 × 6781 = 219806115.

Casos particulares. 1.° Para multiplicar un número por la unidad seguida de ceros, basta agregar á su derecha tantos ceros como tenga la unidad.

Así 487 × 1000 = 487000; 325 × 10000 = 3250000.

2.° Si uno de los factores ó ambos terminan en ceros, se prescinde de ellos y se agregan á la derecha del producto de los números que quedaron.

Ejemplos.

3200 × 14	2156 × 24000	6700 × 850
3200	2156	6700
14	24000	850
128	8624	335
32	4312	536
44800	51744000	5695000

Se llama duplo de un número el producto que resulta de multiplicarle por 2. Así 12 es el duplo de 6; 10 es el duplo de 5.

Se llama triplo, cuádruplo, quíntuplo, etc., el producto de multiplicar un número por 3, 4, 5, etc. Así el triplo de 6 es 18; el cuádruplo de 3 es 12; el quíntuplo de 8 es 40.

Potencia de un número es un producto de factores iguales á dicho número. 7 × 7 × 7 es una potencia de 7.

La potencia se llama segunda, tercera, cuarta, etc., segun que el número de factores sea 2, 3, 4, etc.

Las potencias de un número se indican escribiendo el número y á la derecha y en la parte superior otro que indique el número de veces que está repetido el primero. Este otro número se llama exponente.

Así 4^3, que se lee 4 elevado á 3, = 4 × 4 × 4, y el exponente es 3.

7^5, que se lee 7 elevado á 5, = 7 × 7 × 7 × 7 × 7, el exponente es 5.

IV.

División.

División es la operación de dividir.

Dividir es descomponer un producto en dos factores, siendo uno de éstos conocido.

El producto dado toma el nombre de *dividendo*.

El factor conocido el de *divisor*, y el factor que se busca se llama *cociente*.

La división se indica con el signo : que se lee dividido por. Así 8:4 quiere decir 8 dividido por 4.

La división puede ser exacta ó completa é inexacta ó incompleta.

Se llama exacta cuando multiplicando el divisor por un entero reproduce el dividendo, é inexacta cuando no hay ningun entero que multiplicado por el divisor nos dé el dividendo.

Así $8:4 = 2$ es division exacta, porque $4 \times 2 = 8$, y $9:4$ es inexacta, porque el entero 2 es pequeño para cociente, toda vez que $4 \times 2 = 8$ menor que 9, y 3 es ya grande, porque $4 \times 3 = 12$ mayor que el dividendo 9.

En este caso el 2 se llama cociente entero, y la diferencia entre el dividendo 9 y el producto 4×2 del divisor por el cociente se llama *resíduo*.

De un modo análogo á lo dicho en la multiplicación, en la división de enteros conviene distinguir tres casos:

1.° El divisor y el cociente tienen una cifra.
2.° El divisor tiene varias, y el cociente una.
3.° El divisor y el cociente tienen varias cifras.

Primer caso. Se resuelve sabiendo la tabla de multiplicar. Basta buscar el número que multiplicado por el divisor reproduce el dividendo, ó bien el entero que multiplicado por el divisor nos dé el producto menor más próximo al dividendo.

Así, por ejemplo: $36:9 = 4$, porque $4 \times 9 = 36$, y $38:9$ dá de cociente entero 4, pues que $9 \times 4 = 36$ es producto menor más próximo á 38 y porque $9 \times 5 = 45$ es ya mayor que 38. El resto será $38 - 9 \times 4 = 2$.

Segundo caso. Puede suceder que el dividendo tenga igual número de cifras que el divisor ó una más; en el primer caso, se divide la primera cifra de la izquierda del dividendo por la primera de la izquierda del divisor; en el segundo, se dividen las dos primeras cifras de la izquierda del dividendo por la primera del divisor. En uno y otro caso, la cifra obtenida es el cociente.

Para comprobarle, se multiplica por el divisor, y el producto deberá ser igual ó menor que el dividendo; si fuere mayor se disminuye una unidad al cociente y se comprueba del mismo modo. La diferencia que resulte de restar del dividendo el producto del divisor por el cociente será el residuo.

Conviene separar por una línea vertical el dividendo del divisor y éste del cociente por otra horizontal, como se advierte en los siguientes

Ejemplos.

1.° 1238:206	Dividendo	1238	206 divisor
		1236	6 cociente
Diremos: 12 entre 2 á 6;		0002 resto	

multiplicaremos esta cifra 6 por el divisor 206, y el producto 1236 le restaremos del dividendo 1238. La diferencia 2 es el resto.

En la práctica acostumbra á efectuarse simultáneamente esta multiplicación y esta sustracción; para lo cual basta restar el producto del cociente por cada cifra del divisor de la del mismo órden del dividendo, cuidando de agregar á éste las decenas suficientes, si lo necesitare, para que la sustraccion sea posible y añadiendo el mismo número de unidades al producto del cociente por la siguiente cifra del divisor.

2.° 6535:3254	6535	3254
	0027	2

Diremos: 6 entre 3 á 2. Comprobacion: 2 × 4 8, á 15 7, y se reserva 1.

2 × 5 10 mas 1 11, á 13 2, y se reserva 1
2 × 2 4 y 1 5, á 5 0
2 × 3 6 á 6 0.

Tercer caso. Se separan de la izquierda del dividendo tantas cifras como tenga el divisor ó una más, si las primeras formaran un número menor que éste, y se dividen sucesivamente este dividendo parcial y los que resulten de agregar á los restos sucesivos las restantes cifras del dividendo una á una por el divisor.

La operacion se dispone como en los siguientes

Ejemplos.

219806115:32415

Primer dividendo parcial.	21980'6'1'1'5 Dividendo	32415	divisor
	194490	6781	cociente.
Segundo dividendo parcial	253161		
	226905		
Tercer dividendo parcial	262561		
	259320		
Cuarto dividendo parcial	32415		
	32415		
	0 Resto.		

El divisor tiene cinco cifras; deberán separarse cinco del dividendo; el número que resulta es menor que el divisor 32415; tomaremos, pues, una más, y dividiremos el número 219806, así formado, por el divisor, con arreglo á lo indicado en el caso anterior. Tendremos el cociente 6 y el resto 25316; á la derecha de este resto escribiremos la cifra 1 siguiente del dividendo, y el número 253161 que resulta le dividimos por el divisor, lo que nos dará el cociente 7 y el resto 26256; á su derecha agregamos la cifra siguiente del dividendo y el número 262561, así formado, se divide por el divisor; obtendremos el cociente 8 y el resto 3241 que, con la cifra 5 del dividendo, nos constituye el número 32415 que dividido por el divisor nos dará el cociente 1 y el resto cero.

La multiplicación de las cifras del cociente por las del divisor y su sustracción de las del mismo órden del dividendo se efectúa en la práctica al mismo tiempo, segun hemos expresado en el caso anterior.

3875432:5314	38754'3'2	5314
	15563	729
	49352	
	1526	

Casos particulares. 1.° Dividir un número de varias cifras por otro de una sola. La operacion se efectúa mentalmente como en el siguiente

Ejemplo.

32545:5	dividendo	32545	5 divisor.
	cociente	6509	

32 entre 5 á 6 y sobran 2
25 entre 5 á 5
4 entre 5 á 0 y sobran 4
45 entre 5 á 9.

2.° Dividir un número por la unidad seguida de ceros.

Basta separar de la derecha del número con una coma tantas cifras como ceros tenga la unidad. El número que queda á la izquierda de la coma es el cociente, y el que resulta á la derecha es el resto.

Ejemplos.

38456:100. Separando con una coma las dos primeras cifras de la derecha, el número 384 de la izquierda es el cociente y 56 será el resto.

38400:100. Aplicando la misma regla resulta de cociente completo el número 384.

3.° Dividir dos números terminados en cero.

Se efectúa la division despues de suprimir en dividendo y divisor tantos ceros como haya en el que tenga ménos.

Ejemplo.

580000:5000. Suprimiendo tres ceros en cada uno queda reducida la operacion á dividir 580 por 5 = 116.

V.

Pruebas de las cuatro operaciones.

Prueba de una operación, es otra operación que tiene por objeto asegurarnos de la exactitud de la primera.

No estando esta segunda operación exenta de equivocaciones, puede establecerse como regla general que el modo de efectuar la prueba de las operaciones es repetirlas hasta cerciorarnos de su exactitud por la constante conformidad de los resultados.

No obstante, indicaremos algunos otros procedimientos.

Adición.—La prueba de la adición puede hacerse sumando en órden inverso; es decir, si se ha sumado de arriba abajo, sumar ahora de abajo arriba.

Sustracción.—La prueba de la sustracción se efectúa sumando el sustraendo y el resto, cuya suma debe ser igual al minuendo.

Tambien puede efectuarse restando del minuendo el resto, y la diferencia deberá ser el sustraendo.

Multiplicación.—Se toma el multiplicando por multiplicador y éste por multiplicando, y debe resultar el mismo producto; ó bien se divide el producto por uno de los factores, y debe resultar el otro factor.

División.—Se efectúa la prueba, multiplicando el divisor por el cociente y añadiendo el resto, si lo hay; el resultado debe ser igual al dividendo.

Tambien puede efectuarse dividiendo el dividendo por el cociente, en cuyo caso debe resultar de cociente el divisor dado y de resto el mismo anterior.

VI.

Divisibilidad de los números.

Se dice que un número es divisible por otro ó múltiplo de otro cuando su división es exacta. Así 8 es divisible por 4, porque el cociente completo es 2.

Por el contrario, el 4 se llama factor ó divisor del 8.

Se llama número *par* el que es divisible por 2, y número *impar* al que no lo es.

Los números pares de una cifra son: 2, 4, 6 y 8, y los impares 1, 3, 5, 7 y 9.

Un número es divisible por 2 cuando termina en 0 ó cifra par, como 480 y 976.

Un número es divisible por 5 cuando termina en 0 ó 5, como 520 y 725.

Un número es divisible por 3 cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras es múltiplo de 3.

Así 5382 es divisible por 3, porque $5 + 3 + 8 + 2 = 18$, que es múltiplo de 3.

7856 no es divisible por 3, porque $7 + 8 + 5 + 6 = 26$, no es múltiplo de 3.

Un número es divisible por 9 cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras es múltiplo de 9.

Así 4851 es divisible por 9, porque $4 + 8 + 5 + 1 = 18$, es múltiplo de 9.

9785 no es divisible por 9, porque $9 + 7 + 8 + 5 = 29$, no es múltiplo de 9.

VII.

Factores simples de los enteros.

Se llama número primo ó simple el que no es divisible más que por sí mismo y por la unidad, como 1, 7, 13 ó 19.

Se llama número compuesto el que no es primo, como 8, 16 ó 25. Los números primos de una cifra son 1, 2, 3, 5, 7.

Para hallar los factores simples de un entero se divide el número dado y los cocientes sucesivos por su menor factor simple, excepto la unidad, hasta obtener el cociente 1.

La operación se dispone en esta forma: A la derecha del número dado 420 trazamos una línea vertical, y decimos: este número es divisible por 2, porque termina en 0; se escribe el 2 á la derecha y el cociente 210 debajo del dividendo; 210 es divisible por 2 por la misma razon; escribimos el 2 enfrente y el cociente 105 debajo; 105 no es divisible por 2, porque no termina en 0 ni cifra par. Es divisible por 3, porque la suma de sus cifras es múltiplo de 3; ponemos el divisor enfrente y debajo el cociente 35, que ya no es múltiplo de 3. Este número es divisible por 5, porque acaba en 5. Dividimos 35 por 5, y obtenemos el cociente 7, que es divisible por 7, y nos da el cociente 1.

420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	

El número $420 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$, producto de todos sus factores primos.

CAPÍTULO III.

NÚMEROS FRACCIONARIOS.

I.

Nociones preliminares.

Se llama fracción ó quebrado una de las partes iguales ó un conjunto de partes iguales de la unidad.

Es decir, que si la unidad se divide en varias partes iguales una de ellas ó la reunión de alguna de estas partes constituirá un número quebrado.

Para designar un número quebrado es preciso, pues, emplear dos enteros: uno que indique las partes iguales en que la unidad se divide; otro que exprese el número de estas partes que contiene el quebrado. El primero se llama *denominador*, y el segundo *numerador*. Ambos reciben la denominación común de *términos del quebrado*.

Si la unidad se divide en dos partes iguales, cada una se llama mitad ó medio; si en 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ó 10 se dicen tercios, cuartos, quintos, sextos, séptimos, octavos, novenos ó décimos. Si en 11, 12, 13, etc. partes iguales se llamarán *once avos, doce avos, trece avos*, etc.

Un quebrado se escribe separando con una raya el numerador del denominador. Así cuatro séptimos se escribirá $\frac{4}{7}$.

Los términos del quebrado pueden presentar tres diversos casos:

1.° Que el numerador sea menor que el denominador.
2.° Que el numerador sea igual al denominador, y
3.° Que el numerador sea mayor que el denominador.

En el primer caso el quebrado es menor que la unidad; en el segundo es igual, y en el tercero mayor que la unidad.

Quebrado propio es el menor que la unidad, como $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{11}{23}$.

Quebrado impropio es todo quebrado igual ó mayor que la unidad, como $\frac{7}{7}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{11}{4}$.

Se llama número mixto la reunión de un entero y un quebrado.

Así $4\ \frac{2}{7}$ es un número mixto.

Los números quebrados y mixtos se comprenden en la denominación común de numeros fraccionarios.

Un número mixto se reduce á quebrado, multiplicando el entero por el denominador del quebrado, añadiendo al producto el numerador, y poniendo á esta suma por denominador el denominador del quebrado.

$$\text{Así } 4\frac{5}{7} = \frac{4 \times 7 + 5}{7} = \frac{33}{7}.$$

Por el contrario, para extraer los enteros de un quebrado impropio basta dividir el numerador por el denominador.

$$\text{Así } \frac{8}{4} = 2; \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}; \frac{38}{6} = 6\frac{2}{6}.$$

Para poner un número entero en forma de quebrado se le pone por denominador 1.

Para poner un entero en forma de quebrado de denominación dada basta multiplicarle por dicho denominador y al producto ponerle por denominador el propuesto.

Si queremos expresar el entero 9 en quintos tendremos $9 = \frac{9 \times 5}{5} = \frac{45}{5}$.

II.

Propiedades de los quebrados.

De dos quebrados que tienen el mismo denominador es mayor el que tiene mayor numerador; $\frac{5}{7}$ es mayor que $\frac{3}{7}$.

De dos quebrados que tienen el mismo numerador es mayor el que tiene menor denominador; $\frac{5}{7}$ es mayor que $\frac{5}{9}$.

De donde se deduce que aumenta un quebrado cuando aumenta el numerador ó disminuye el denominador.

Que disminuye un quebrado cuando el numerador disminuye ó cuando el denominador aumenta.

Si el numerador de un quebrado se multiplica por un número, el quebrado queda multiplicado por dicho número.

Si el numerador de un quebrado se divide por un número el quebrado queda dividido por el mismo número.

Si el denominador de un quebrado se multiplica por un número, el quebrado queda dividido por dicho número.

Si el denominador de un quebrado se divide por un número, el quebrado queda multiplicado por el mismo número.

Un quebrado no varía si el numerador y denominador se multiplican por un mismo número.

El valor del quebrado no varía si numerador y denominador se dividen por un mismo número.

III.

Transformaciones de los quebrados.

Reducir quebrados á común denominador es transformarlos en otros equivalentes que tengan denominadores iguales.

Para reducir quebrados á comun denominador basta multiplicar los dos términos de cada quebrado por el producto de los denominadores de los demás.

Ejemplo.

Sean los quebrados $\frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{2}{5}$

Las operaciones se disponen en esta forma, multiplicando los dos términos del 1.° por el producto 7×5 de los denominadores de los otros dos; los dos del 2.° por el producto 4×5 de los denominadores del 1.° y 3.°; y los dos términos del 3.° por el producto 4×7 de los denominadores de los dos primeros.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 7 \times 5}{4 \times 7 \times 5} = \frac{105}{140}$$

$$\frac{5}{7} = \frac{5 \times 4 \times 5}{7 \times 4 \times 5} = \frac{100}{140}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 4 \times 7}{5 \times 4 \times 7} = \frac{56}{140}$$

Simplificar quebrados es transformarlos en otros equivalentes cuyos términos sean menores.

Para simplificar quebrados, se dividen sucesivamente numerador y denominador por todos sus factores comunes.

Sea el quebrado $\frac{240}{520}$, desde luego se observa que sus dos términos son divisibles por 10; suprimiendo este factor comun resulta $\frac{240}{520} = \frac{24}{52}$ y dividiendo por 2, factor comun á sus dos términos, $\frac{24}{52} = \frac{12}{26}$ y, repitiendo la misma operacion, resulta por fin $\frac{12}{26} = \frac{6}{13}$.

IV.

Adición de quebrados.

En la adición de quebrados pueden ocurrir tres casos:

1.° Sumar quebrados que tengan el mismo denominador.
2.° Sumar quebrados que tengan distinto denominador.
Y 3.° Sumar números mixtos.

Primer caso. Para sumar quebrados que tienen el mismo denominador basta partir la suma de los numeradores por el denominador común.

$$\text{Así } \frac{3}{5}+\frac{2}{5}+\frac{4}{5}=\frac{3+2+4}{5}=\frac{9}{5}=1\,\frac{4}{5}.$$

Segundo caso. Para sumar quebrados que tienen diferente denominador, se reducen al mismo denominador, y queda este caso reducido al anterior.

$$\text{Sea, por ejemplo, } \frac{4}{5}+\frac{2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{84}{105}+\frac{70}{105}+\frac{75}{105}=\frac{84+70+75}{105}=\frac{229}{105}=2\,\frac{19}{105}.$$

Tercer caso. Para sumar números mixtos se reducen á quebrados y se suman éstos.

También se puede hallar separadamente la suma de los quebrados y la de los enteros y reunir estas dos sumas.

Ejemplo.

Sean los números mixtos $4\,\frac{3}{5}$, $2\,\frac{5}{7}$, $7\,\frac{1}{2}$.

$$\text{Primer método. } 4\,\frac{3}{5}+2\,\frac{5}{7}+7\,\frac{1}{2}=\frac{23}{5}+\frac{19}{7}+\frac{15}{2}=\frac{322}{70}+\frac{190}{70}+\frac{525}{70}=\frac{322+190+525}{70}=\frac{1037}{70}=14\,\frac{57}{70}.$$

Segundo método.

$$\begin{array}{r|l} 4\,\frac{3}{5} & \frac{3}{5}+\frac{5}{7}+\frac{1}{2}=\frac{42}{70}+ \\ 2\,\frac{5}{7} & \frac{50}{70}+\frac{35}{70}=\frac{127}{70}=1\,\frac{57}{70} \\ 7\,\frac{1}{2} & \\ \hline 14\,\frac{57}{70} & \end{array}$$

Sumando los quebrados resulta $1\,\dfrac{57}{70}$, cuyo entero se añade á la suma de los enteros.

V.

Sustracción de quebrados.

En la sustracción de quebrados pueden distinguirse tres casos:

1.° Restar quebrados que tengan el mismo denominador.
2.° Restar quebrados que tengan diferente denominador.
Y 3.° Restar números mixtos.

Primer caso. Para restar quebrados que tengan el mismo denominador, se parte la diferencia de los numeradores por el denominador común.

$$\text{Así } \frac{9}{13}-\frac{7}{13}=\frac{9-7}{13}=\frac{2}{13}.$$

Segundo caso. Para restar quebrados que tengan diferente denominador se reducen á un común denominador, y queda este caso reducido al anterior.

Ejemplo.

$$\frac{2}{3}-\frac{4}{7}=\frac{14}{21}-\frac{12}{21}=\frac{14-12}{21}=\frac{2}{21}.$$

Tercer caso. Para restar números mixtos se reducen á quebrados y se restan como tales.

También se pueden restar separadamente los quebrados y los enteros, y reunir estos dos restos.

Ejemplo.

Primer método. $6\frac{3}{5} - 3\frac{2}{7} = \frac{33}{5} - \frac{23}{7} = \frac{231}{35} - \frac{115}{35} = \frac{231-115}{35} = \frac{116}{35} = 3\frac{11}{35}$.

Segundo método.

$$\begin{array}{r} 6\frac{3}{5} \\ 3\frac{2}{7} \\ \hline 3\frac{11}{35} \end{array}$$

Se restan separadamente los quebrados y su diferencia $\frac{11}{35}$ se agrega á la diferencia de los enteros.

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{7} = \frac{21}{35} - \frac{10}{35} = \frac{11}{35}$$

Puede suceder que el quebrado del sustraendo sea mayor que el del minuendo. Entonces se agrega una unidad al quebrado minuendo y en compensacion se agrega otra al entero del sustraendo.

Ejemplo.

$$7\frac{2}{5} - 5\frac{3}{4}.$$

Al restar los quebrados $\frac{2}{5} - \frac{3}{4} = \frac{8}{20} - \frac{15}{20}$ resulta que el quebrado del sustraendo es mayor que el del minuendo.

Añado al quebrado minuendo una unidad que tiene $\frac{20}{20}$ y digo: $\frac{20}{20} + \frac{8}{20}$ serán $\frac{28}{20} - \frac{15}{20} = \frac{13}{20}$; y ahora restaré los enteros, añadiendo uno al sustraendo; diré, pues, de 6 á 7, 1. La diferencia es, por tanto, $1\frac{13}{20}$.

Casos particulares.—1.° Restar un quebrado de un entero.

Se convierte el entero en mixto quitándole una unidad y reduciéndola á quebrado del mismo denominador que el sustraendo.

Así $4 - \frac{3}{5}$ Diré 4 es lo mismo que $3\ \frac{5}{5}$ y ahora ya

$$3\ \frac{5}{5} - \frac{3}{5} = 3\ \frac{2}{5}.$$

2.° Restar un mixto de un entero.—Se transforma el entero en mixto del mismo modo. $7 - 4\ \frac{2}{3} = 6\ \frac{3}{3} - 4\ \frac{2}{3} = 2\ \frac{1}{3}$

3.° Restar un entero de un mixto.—A la diferencia de los enteros se agrega el quebrado del mixto $8\ \frac{3}{5} - 7 = 1\ \frac{3}{5}$.

4.° Restar un quebrado de un mixto.—Se agrega al entero la diferencia de los quebrados. $8\ \frac{6}{7} - \frac{3}{4}$; $\frac{6}{7} - \frac{3}{4} =$ $\frac{24}{28} - \frac{21}{28} = \frac{3}{28}$ luego $8\ \frac{6}{7} - \frac{3}{4} = 8\ \frac{3}{28}$.

$$8\ \frac{3}{4} - \frac{6}{7} = 7\ \frac{25}{28}.$$

5.° Restar un entero ó mixto de un quebrado impropio. Se estraen los enteros del quebrado minuendo y quedará este caso reducido á uno de los anteriores.

$\frac{15}{4} - 2 = 3\ \frac{3}{4} - 2 = 1\ \frac{3}{4}$; $\frac{21}{5} - 3\ \frac{1}{7} = 4\ \frac{1}{5} - 3\ \frac{1}{7} = 1\ \frac{2}{35}$.

VI.

Multiplicación de quebrados.

En la multiplicación de quebrados pueden ocurrir tres casos:

1.° Multiplicar un quebrado ó un mixto por un entero.

2.° Multiplicar un entero, quebrado ó mixto por un quebrado; y

3.° Multiplicar un entero, quebrado ó mixto por un número mixto.

Primer caso. Para multiplicar un quebrado por un entero, se multiplica el numerador por el entero y el producto se parte por el denominador.

Así, $\frac{4}{7} \times 3 = \frac{4 \times 3}{7} = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$, $\frac{4}{9} \times 3 = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

Si el multiplicando fuera un número mixto se reduce á quebrado y se procede como en el ejemplo último.

$$3\frac{2}{5} \times 6 = \frac{17}{5} \times 6 = \frac{17 \times 6}{5} = \frac{102}{5} = 20\frac{2}{5}$$

Segundo caso. Para multiplicar un entero por un quebrado, se multiplica el entero por el numerador y el producto se parte por el denominador $3 \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$.

Para multiplicar un quebrado por otro quebrado se divide el producto de los numeradores por el de los denominadores.

$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}.$$

Para multiplicar un mixto por un quebrado se reduce el mixto á quebrado y queda reducida la cuestión á multiplicar dos quebrados.

$$4\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{23}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{23 \times 2}{5 \times 3} = \frac{46}{15} = 3\frac{1}{15}$$

Tercer caso. Para multiplicar un entero, un quebrado ó un mixto por un número mixto se reduce el multiplicador á quebrado y venimos á parar á uno de los casos anteriores.

Ejemplos.

$$4 \times 2\frac{3}{5} = 4 \times \frac{13}{5} = \frac{4 \times 13}{5} = \frac{52}{5} = 10\frac{2}{5};$$

$$\frac{2}{3} \times 3\frac{1}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{13}{4} = \frac{2 \times 13}{3 \times 4} = \frac{26}{12} = 2\frac{2}{12}; \text{ y}$$

$$3\frac{1}{2} \times 4\frac{5}{7} = \frac{7}{2} \times \frac{33}{7} = \frac{7 \times 33}{2 \times 7} = \frac{231}{14} = 16\frac{7}{14}.$$

VII.

División de quebrados.

En la division de quebrados pueden distinguirse tres casos:
1.° Dividir un quebrado ó mixto por un entero.
2.° Dividir un entero, quebrado ó mixto por un quebrado; y
3.° Dividir un entero, quebrado ó mixto por un número mixto.

Primer caso. Para dividir un quebrado por un entero se multiplica el denominador por el entero, dejando el mismo numerador.

$$\text{Así, } \frac{4}{5} : 3 = \frac{4}{5 \times 3} = \frac{4}{15}. \quad \frac{6}{7} : 3 = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}.$$

Para dividir un mixto por un entero se reduce el mixto á quebrado y se procede como acabamos de indicar.

$$7\,\frac{3}{5} : 4 = \frac{38}{5} : 4 = \frac{38}{5 \times 4} = \frac{38}{20} = 1\,\frac{18}{20}.$$

Segundo caso. Para dividir un entero por un quebrado se multiplica el entero por el quebrado invertido.

$$5 : \frac{3}{4} = 5 \times \frac{4}{3} = \frac{5 \times 4}{3} = \frac{20}{3} = 6\,\frac{2}{3}.$$

Para dividir dos quebrados se multiplica el primero por el segundo invertido.

$$\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{12}{10} = 1\,\frac{2}{10}.$$

Para dividir un mixto por un quebrado se reduce el mixto á quebrado y queda la cuestión reducida á dividir dos quebrados.

$$3\,\frac{2}{5} : \frac{6}{11} = \frac{17}{5} : \frac{6}{11} = \frac{17}{5} \times \frac{11}{6} = \frac{17 \times 11}{5 \times 6} =$$

$$\frac{187}{30} = 6\,\frac{7}{30}.$$

Tercer caso. Para dividir un entero, quebrado ó mixto por un número mixto se reduce el divisor á quebrado y estaremos en uno de los casos anteriores.

Ejemplos.

$$5 : 2\frac{1}{3} = 5 : \frac{7}{3} = 5 \times \frac{3}{7} = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7};$$

$$\frac{4}{13} : 3\frac{1}{5} = \frac{4}{13} : \frac{16}{5} = \frac{4}{13} \times \frac{5}{16} = \frac{20}{208}.$$

$$3\frac{2}{7} : 2\frac{3}{4} = \frac{23}{7} : \frac{11}{4} = \frac{23}{7} \times \frac{4}{11} = \frac{23 \times 4}{7 \times 11} = \frac{92}{77} = 1\frac{15}{77}.$$

Se llama *razon* de dos números el cociente de dichos números. Así la razon de 8 á 4 es 2; porque $8 : 4 = 2$ y se escribe $8 : 4$ ó bien $\frac{8}{4}$.

Proporcion es la igualdad de dos razones.

Los números 14, 7, 18 y 9 forman proporcion porque $\frac{14}{7} = \frac{18}{9}$.

Los números 14 y 9 se llaman *términos extremos*; y 7 y 18 *términos medios.*

En toda proporcion el producto de los términos estremos es igual al de los medios. Así, en la proporcion $\frac{14}{7} = \frac{18}{6}$ se verificará que $14 \times 9 = 18 \times 7$. Por medio de esta propiedad se reconoce fácilmente si hay ó nó proporcion entre cuatro números dados.

CAPÍTULO IV.

FRACCIONES DECIMALES.

I.

Nociones preliminares.

Se llaman *Cantidades ó quebrados decimales,* los quebrados que tienen por denominador la unidad seguida de ceros.

Si el denominador es 10, 100, 1.000, 10.000, etc., las partes que el quebrado contiene se llaman respectivamente décimas, centésimas, milésimas, diezmilésimas, etc. De donde se infiere que la unidad tiene diez décimas; la décima, diez centésimas; la centésima, diez milésimas, etc.

Los quebrados decimales pueden escribirse sin denominador, colocando las décimas á la derecha de las unidades y sucesivamente las centésimas, milésimas, etc., cuidando de separar con una coma la cifra de las unidades de la de las décimas.

Así el número cuatro enteros, siete décimas, ocho centésimas y nueve milésimas, se escribirá 4,789.

El quebrado $\frac{451}{10000}$ se escribirá 0,0451.

Para leer un número decimal se enuncia separadamente la parte entera y la parte decimal, indicando el órden de su última cifra.

Así 3,259 se leerá: tres enteros y doscientas cincuenta y nueve milésimas.

También se puede leer como si fuera un número entero, indicando al final el órden de su última cifra decimal.

Así 3,259 se puede leer también: tres mil doscientas cincuenta y nueve milésimas.

El valor de un número decimal no varía, añadiendo ó suprimiendo á su derecha uno ó más ceros.

Así 4,570000 = 4,57 y también 3,25 = 3,25000.

II.

Transformación de los quebrados en decimales.

Los quebrados ordinarios pueden reducirse á decimales, dividiendo el numerador por el denominador, lo que nos dará la parte entera (que será cero cuando el quebrado sea propio), que se separará con una coma, y continuando la división agregando un cero á cada resíduo.

Ejemplos.

1.° Trasformar en decimal el quebrado $\frac{8}{5}$.

8	5
30	1,6
0	

Dividido 8 por 5 y obtengo la parte entera 1, que separo con una coma, agrego cero al resíduo, le divido por 5 y obtengo 6 para parte decimal.

Luego $\frac{8}{5} = 1,6$.

2.° Reducir $\frac{2}{3}$ á decimal.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ \hline 20 & 0,666..... \\ 20 & \\ 0 & \end{array}$$

Divido 2 por 3, y obtengo 0 para parte entera, y continuando la división se repite indefinidamente la cifra 6 del cociente.

3.° Reducir $\frac{5}{6}$ á decimal.

$$\begin{array}{r|l} 50 & 6 \\ \hline 20 & 0,833..... \\ 20 & \\ 2 & \end{array}$$

Aplicando el mismo procedimiento obtengo 0 enteros, 8 décimas y la cifra 3 que se repite indefinidamente.

Así, pues, al reducir quebrados ordinarios á decimales, puede suceder que el cociente tenga un número limitado ó ilimitado de cifras.

Fracción decimal exacta es la que tiene un número limitado de cifras como 1,6.

Decimal inexacta ó periódica es la que consta de un número ilimitado de cifras en que un grupo se repite contínua é indefinidamente.

El grupo de cifras que se repite se llama *período*.

Puede suceder que el período empiece desde las décimas, como en 0,666..... y entonces la fracción se llama periódica, pura, ó que el período no empiece en las décimas, como en 0,8333..... y la fracción se dice entonces periódica mixta.

III.

Transformación de los decimales en quebrados.

Al reducir fracciones decimales á ordinarias pueden ocurrir tres casos:

1.° Que la fracción decimal sea exacta;
2.° Que sea periódica pura; y
3.° Que sea periódica mixta.

Primer caso. Para reducir una decimal exacta á fracción ordinaria se pone por numerador la fracción decimal, prescindiendo de la coma, y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga la fracción propuesta.

Así $4{,}7085 = \dfrac{47085}{10000}$; $0{,}00025 = \dfrac{25}{100000}$.

Segundo caso. Para reducir una decimal periódica pura á fracción ordinaria, se pone por numerador el período y por denominador un número compuesto de tantos 9 como tenga cifras el período.

Así $0{,}785\ 785\ldots\ldots = \dfrac{785}{999}$; $4{,}32\ 32\ldots\ldots = 4\ \dfrac{32}{99}$.

Tercer caso. Para reducir una decimal periódica mixta á fracción ordinaria se pone por numerador la diferencia entre la parte no periódica seguida del período y la parte no periódica, y por denominador un número compuesto de tantos 9 como cifras tenga el período seguidos de tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica.

Así $0{,}24777\ldots\ldots = \dfrac{247-24}{900} = \dfrac{223}{900}$; $4{,}52323\ldots\ldots =$
$4\ \dfrac{523-5}{990} = 4\ \dfrac{518}{990}$.

IV.

Adición de decimales.

Los números decimales se suman como los enteros, colocando la coma en el lugar correspondiente.

Para mayor comodidad conviene colocar los sumandos unos debajo de otros, de modo que se correspondan las comas.

Así para efectuar la suma $0{,}458 + 3{,}25 + 41{,}53281 + 0{,}7$, se dispone la operación en la siguiente forma:

$$\begin{array}{r} 0{,}458 \\ 3{,}25 \\ 41{,}53281 \\ 0{,}7 \\ \hline 45{,}94081 \end{array}$$

V.

Sustracción de decimales.

Los números decimales se restan como los enteros, cuidando tan solo de igualar con ceros sus cifras decimales y colocar la coma en el lugar correspondiente.

Ejemplos.

13,045 — 8,17489

13,04500	
8,17489	
4,87011	

Agregaremos dos ceros al minuendo para igualar sus cifras decimales y dispondremos la operacion en esta forma.

27,4568 — 11,05

27,4568	
11,0500	
16,4068	

En este caso, es indiferente agregar ó nó ceros al sustraendo, toda vez que estos no influyen en el resultado.

VI.

Multiplicación de decimales.

En la multiplicación de decimales pueden ocurrir tres casos:
1.° Multiplicar un decimal por la unidad seguida de ceros.
2.° Multiplicar un decimal por un entero; y
3.° Multiplicar dos decimales.

Primer caso. Para multiplicar un decimal por la unidad seguida de ceros se corre la coma hacia la derecha tantos lugares como ceros tenga la unidad.

Ejemplos.

$4,578 \times 100 = 457,8$; $0,00078 \times 1000 = 0,78$;
$3,5 \times 10000 = 35000$.

Segundo caso. Para multiplicar un decimal por un entero se multiplican como se multiplican los enteros, y de derecha á izquierda del producto se separan tantas cifras como decimales tenga el multiplicando.

Ejemplos.

$4,325 \times 8$

$4,325 \times 8 = 34,600$

4,325	
8	
34,600	

$0,325 \times 17$

$0,325 \times 17 = 5,525$

0,325	
17	
2275	
325	
5,525	

Tercer caso. Para multiplicar dos decimales se multiplican como los enteros y de derecha á izquierda del producto se separan tantas cifras como decimales haya en ambos factores.

Ejemplos.

$4,507 \times 32,5$	$\begin{array}{r} 4,507 \\ 32,5 \\ \hline 22535 \\ 9014 \\ 13521 \\ \hline 146,4775 \end{array}$	$0,00038 \times 0,05$
$4,507 \times 32,5 = 146,4775$		$\begin{array}{r} 0,00038 \\ 0,05 \\ \hline 0,0000190 \end{array}$

$0,00038 \times 0,05 = 0,0000190.$

VII.

División de decimales.

En la división de decimales pueden ocurrir tres casos:

1.° Dividir un decimal por la unidad seguida de ceros.
2.° Dividir un decimal por un entero.
3.° Dividir dos decimales.

Primer caso. Para dividir un decimal por la unidad seguida de ceros se corre la coma hácia la izquierda tantos lugares como ceros tenga la unidad.

Ejemplos.

$215,38 : 100 = 2,1538; \quad 4,715 : 10 = 0,4715;$

$0,424 : 1000 = 0,000424.$

Segundo caso. Para dividir un decimal por un entero se dividen como los enteros, y de derecha á izquierda del cociente se separan tantas cifras como decimales tenga el dividendo.

Ejemplos.

47,880:24

Luego $47,880:24 = 1,995$

$$\begin{array}{r|l} 47,880 & 24 \\ \cline{2-2} 238 & 1995 \\ 228 & \\ 120 & \\ 00 & \end{array}$$

0,0252:36

Luego $0,0252:36 = 0,0007$

$$\begin{array}{r|l} 252 & 36 \\ \cline{2-2} 00 & 7 \end{array}$$

Tercer caso. Para dividir dos decimales se igualan con ceros sus cifras decimales, si no tuvieren las mismas, y se dividen como los enteros.

Ejemplos.

$$42,325:28,5 = 42,325:28,500$$

$$\begin{array}{r|l} 42325 & 28500 \\ \cline{2-2} 13825 & 1 \end{array}$$

$$0,24:0,000075 = 0,240000:0,000075$$

Luego $0,24:0,000075 = 3200$

$$\begin{array}{r|l} 240000 & 75 \\ \cline{2-2} 150 & 3200 \\ 00 & \end{array}$$

Segunda parte.

NÚMEROS CONCRETOS.

CAPÍTULO PRIMERO.

SISTEMAS DE PESAS Y MEDIDAS.

I.

Preliminares.

Indicación del sistema antiguo de pesas y medidas.

Cuando se trata de medir una cantidad es necesario siempre tomar otra de su misma especie que sirva de unidad ó tipo; además esta unidad debe ser proporcionada á la cantidad que se trata de medir.

De donde se deduce, 1.° que necesitaremos tantas unidades concretas como especies de cantidades hayamos de apreciar;

2.° que para cada especie habremos menester unidades de diferente tamaño.

Las unidades concretas se dividen en seis grupos: lineales ó de longitud, de superficie, de volúmen, de peso, de dinero y de tiempo.

Las vigentes en España, al mandarse adoptar el nuevo sistema métrico decimal, aún no en uso generalizado á pesar de repetidas disposiciones, eran las siguientes:

Unidades lineales.—Patron ó modelo.—La vara de Búrgos.

		Para la marina.	
La legua tiene	20.000 piés.	Legua marina..	3 millas.
El estadal.....	12 »	Milla..........	10 cables.
La vara......	3 »	Cable..........	111 brazas.
El pié........	12 pulgadas	Braza.........	6 piés.
La pulgada...	12 líneas.		

Unidades de superficie.

La legua cuadrada tiene	400.000.000 piés cuadrados.
La vara cuadrada........	9 » »
El pié cuadrado.........	144 pulgadas cuadradas.
La pulgada cuadrada...	144 líneas »

Las medidas superficiales reciben el nombre de agrarias, cuando se usan para medir los campos; las principales son:

La fanega de tierra que tiene	576 estadales cuadrados.
La aranzada..............	400 » »
El estadal cuadrado........	144 piés »

Unidades de volúmen.

Las principales son la legua cúbica, la vara cúbica, el pié cúbico y la pulgada cúbica.

Para los granos, el patron es la media fanega de Avila.

El caiz que tiene........	12 fanegas.
La fanega...............	12 celemines.
El celemin..............	4 cuartillos.

Para los líquidos.—Patron.—La cántara de Toledo.

El Moyo que tiene.......	16 cántaras.
La cántara.............	8 azumbres.
El azumbre.............	4 cuartillos.
El cuartillo.............	4 copas.

Se exceptúa de los líquidos el aceite, que se vendia al peso.

La arroba de aceite tenia.. 25 libras.
Y la libra.............. 4 panillas.

Unidades de peso.-Patron ó modelo.-Marco del Consejo de Castilla.

		Para los metales finos.	
El quintal......	4 arrobas.	El marco........	3 onzas.
La arroba......	25 libras.	La onza.........	8 ochavas.
La libra.........	16 onzas.	La ochava.......	6 tomines.
La onza.........	16 adarmes.	El tomin........	3 quilates.
El adarme......	3 tomines.		

Unidades de dinero.—Unidad el real.

Monedas de oro.		**Monedas de plata.**	
La onza tiene...	320 reales.	El duro	20 reales.
La media onza..	160 „	El medio duro.....	10 „
El centin.......	100 „	La peseta.........	4 „
El ochentin.....	80 „	La media peseta...	2 „
El escudo.......	40 „	El real.........	8 1[2 cts. ó 34 maravs.
El escudito.....	20 „	La peseta columnaria......	5 reales
El escudito viejo.	21 1[4 „	La media idem....	2 1[2 „
		El real idem......	1 1[4 „

Monedas de cobre.

Dos cuartos....... 8 maravedises.
El cuarto......... 4 „
El ochavo......... 2 „

Unidades de tiempo.	El siglo tiene..	100 años.
	El lustro:.....	5 años.
	El año.........	12 meses ó 365 días.
	El mes comun .	30 días.
	El dia	24 horas.
	La hora.......	60 minutos.
	El minuto.....	60 segundos.

II.

Sistema métrico decimal.

El nuevo sistema de pesas y medidas es el métrico decimal.

La unidad fundamental es el metro.

El metro es la diez millonésima parte del cuarto del meridiano terrestre.

Las unidades principales son:

Para las unidades de longitud. el *metro*.
Para las de superficie........ el *metro cuadrado*.
Para las de volúmen......... el *metro cúbico*.
Para las de capacidad........ el *litro*.
Para las de peso............. el *gramo*.

Las unidades superiores ó múltiplos se forman anteponiendo á la unidad principal las palabras griegas *deca*, *hecto*, *kilo* y *miria* que significan respectivamente diez, ciento, mil y diez mil.

Para las unidades inferiores ó submúltiplos se anteponen á la unidad principal las voces latinas *deci*, *centi*, *mili*. que significan décima, centésima, milésima.

Unidades de longitud. La principal es el *metro*.

Múltiplos.	Miriámetro.............	10.0000 metros.
	Kilómetro..............	1.000 „
	Hectómetro............	100 „
	Decámetro.............	10 „
Submúltiplos.	Decímetro	0,1 de metro.
	Centímetro...........	0,01 „
	Milímetro	0,001 „

Unidades de superficie. La principal es el *metro cuadrado*.

El decámetro cuadrado se llama área y tiene 100 metros cuadrados.

Múltiplos. La hectárea tiene 100 áreas.

Submúltiplos. La centiárea, 0,01 de área = 1 metro cuadrado.

Unidades de volúmen. La principal es el *metro cúbico*.

El metro cúbico se conoce con el nombre de *tonelada de arqueo*.

Las unidades de capacidad para áridos y líquidos son:

El litro, unidad principal.

Múltiplos.	Kilólitro	1.000	litros.
	Hectólitro	100	"
	Decálitro	10	"
Submúltiplos.	Decilitro	0,1	de litro.
	Centilitro	0,01	"

Unidades de peso. La principal es el *gramo.*

Múltiplos.	Tonelada de peso	1000	kilógramos.
	Quintal métrico	100	"
	Kilógramo	1000	gramos.
	Hectógramo	100	"
	Decágramo	10	"
Submúltiplos.	Decígramo	0,1	de gramo.
	Centígramo	0,01	"
	Milígramo	0,001	"

Unidades de dinero. La actual unidad es la peseta.

Monedas de oro.	**Monedas de plata.**	**Monedas de bronce.**
—	—	—
De..... 25 pesetas.	De... 5 pesetas.	De.. 0,10 de peseta.
De..... 10 "	De... 2 "	De.. 0,5 "
De..... 5 "	De... 1 "	De.. 0,2 "
	De... 0,50 "	De.. 0,1 "

III.

Equivalencias aproximadas entre las unidades mas usuales de ambos sistemas.

Unidades de longitud. 1 metro = 1,196 varas; 1 vara = 0,836 metros; 1 legua = 5,573 kilómetros; 1 kilómetro = 0,179 leguas; 5 metros = 6 varas; 11 kilómetros = 2 leguas.

Unidades de superficie. 1 metro cuadrado = 13 piés cuadrados; 1 vara cuadrada = 0,699 metros cuadrados; 7 metros cuadrados = 10 varas cuadradas; 9 hectáreas = 14 fanegas superficiales.

Unidades de volúmen. 1 metro cúbico = 46 piés cúbicos; 1 vara cúbica = 0,584 metros cúbicos; 7 metros cúbicos = 12 varas cúbicas.

Para los áridos. 1 hectólitro = 1,802 fanegas; 1 fanega = 0,555 hectólitros; 5 hectólitros = 9 fanegas.

Para los líquidos. 1 litro = 1,984 cuartilos; 1 cuartillo =

0,504 litros; 1 litro = 1,990 libras; 1 libra = 0,503 litros; 1 litro de líquido = 2 cuartillos; 1 litro de aceite = 2 libras.

Unidades de peso. 1 kilógramo = 2,173 libras; 1 libra = 0,460 kilógramos; 6 kilógramos = 13 libras.

CAPÍTULO II.

NUMEROS COMPLEJOS.

I.

Preliminares.

Los números concretos pueden ser complejos ó incomplejos.

Número complejo es el concreto que consta de unidades de diferente magnitud pero de una misma especie, como 7 arrobas, 5 libras y 5 onzas.

Número incomplejo es el que consta de unidades de una sola magnitud y especie, como 9 litros.

Los números complejos pueden reducirse á incomplejos y vice-versa, lo que origina las siguientes cuestiones:

1.ª Reducir un incomplejo á otro de órden inferior.

Se multiplica el número dado por el número de veces que la unidad de su especie contiene á la de la especie á que se quiere reducir.

Ejemplo.

Reducir 8 fanegas á celemines.

Diremos: 1 fanega tiene 12 celemines; luego 8 fanegas = 12 celemines $\times$ 8 = 96 celemines.

2.ª Reducir un incomplejo á otro de órden superior.

Se divide el número dado por el número de veces que la unidad de su especie esté contenida en la del órden superior á que se quiera reducir.

Ejemplo.

Reducir 96 celemines á fanegas.

Como 1 celemin es $\frac{1}{12}$ de fanega los 96 celemines son $\frac{96}{12}$ de fanega = 8 fanegas.

3.ª Reducir un complejo á incomplejo de su última especie.

Redúzcanse sucesivamente las unidades de cada órden á las de la especie inmediata inferior agregando las que contenga el número dado de cada especie.

Ejemplo.

Reducir 4 arrobas 3 libras y 6 onzas á incomplejo de onzas.

La operacion se dispone en la siguiente forma:

4 arrobas 3 libras y 6 onzas.
25
―――
100
3
―――
103
16
―――
618
103
―――
1648
6
―――
1654 onzas

Reduzco primero las 4 arrobas á libras para lo que multiplico el 4 por 25 (número de libras que tiene la arroba) y al producto le añado las 3 libras dadas.

Reduzco las 103 libras á onzas para lo que las multiplico por 16 (número de onzas que tiene la libra) y al producto le añado las 6 onzas dadas.

Luego 4 arrobas 3 libras 6 onzas = 1654 onzas

4.ª Reducir un complejo á incomplejo de cualquier órden de su especie.

Se reduce primero á incomplejo de su especie inferior, y queda reducida la cuestión al caso 2.º

Ejemplo.

Reducir 4 años, 7 meses y 9 dias á incomplejo de meses.

4 años, 7 meses, 9 dias.
12
―――
48
7
―――
55
30
―――
1650
9
―――
1659 dias

Reduzco el complejo á incomplejo de dias, y tendré 4 años, 7 meses, 9 dias = 1659 dias.

Y queda reducida la cuestión á reducir 1659 dias á meses.

$$1659 \text{ dias} = \frac{1659}{30} \text{ meses} = 55 \text{ meses} + \frac{9}{30} = 55 \text{ meses} + \frac{3}{10}.$$

5.ª Reducir un incomplejo de especie inferior á complejo.

Se reducen el número dado y los cocientes sucesivos á incomplejos de la especie inmediata superior.

Ejemplo.

Reducir á complejo 2345 pulgadas.

La operación se dispone de este modo:

23'45 pulgadas	12	
114	195 piés	3
065	15	65 varas.
05 pulgadas	0	

Se reducen las 2345 pulgadas á piés, y los 195 piés á varas.

Luego 2345 pulgadas = 65 varas, 0 piés, 5 pulgadas.

6.ª Reducir á complejo un quebrado incomplejo de cualquier órden de su especie.

Se divide el numerador por el denominador; se reducen los restos sucesivos á la especie inmediata inferior, y se dividen por dicho denominador, como se puede observar en el siguiente

Ejemplo.

Reducir á complejo $\frac{17}{7}$ de cántara.

17 cántaras.	7
3	
8	2 cántaras 3 azumbres 1 cuartilo 2 copas $\frac{6}{7}$
24 azumbres.	
3	
4	
12 cuartillos.	
5	
4	
20 copas.	
6	

Divido 17 por 7 y tengo $\frac{17}{7}$ de cántara $= 2 + \frac{3}{7}$ cántara; pero $\frac{3}{7}$ de cántara $= \frac{3}{7} \times 8$ azumbres $= \frac{24}{7}$ de azumbre.

Divido 24 por 7 y tengo $\frac{24}{7}$ de azumbre $= 3 + \frac{3}{7}$ azumbres; pero $\frac{3}{7}$ de azumbre $= \frac{3}{7} \times 4$ cuartillos $= \frac{12}{7}$ de cuartillo.

Divido 12 por 7 y resulta $\frac{12}{7}$ de cuartillo $= 1 + \frac{5}{7}$ de cuartillo; pero $\frac{5}{7}$ de cuartillo $= \frac{5}{7} \times 4$ copas $= \frac{20}{7}$ de copa.

Divido 20 por 7 y nos dá $\frac{20}{7}$ de copa $= 2 + \frac{6}{7}$ de copa.

Luego $\frac{17}{7}$ de cántara = 2 cántaras 3 azumbres 1 cuartillo $2\frac{6}{7}$ copas.

II.

Adición de concretos.

En la adición de números concretos pueden ocurrir dos casos:

1.° Sumar números incomplejos.

2.° Sumar números complejos ó complejos con incomplejos.

Primer caso. Para sumar números incomplejos (suponiendo que estén referidos á la misma especie) se procede como para sumar los abstractos.

Ejemplo.

Segun la estadística de la enseñanza universitaria del curso de 1878 á 79 publicada por el Sr. Vallin, se han conferido 47 grados de Licenciado en la facultad de Filosofía y Letras, 820 en la de Derecho, 29 en la de Ciencias, 829 en la de Medicina, y 283 en Farmacia. ¿Cuántos grados de Licenciado se han conferido en todas las facultades?

Disposicion de la operacion.

47	Filosofría y Letras.
820	Derecho.
29	Ciencias.
829	Medicina.
283	Farmacia.
2.008	total en todas las facultades.

Segundo caso. Se suman las unidades de la misma especie de todos los sumandos agregando á las de cada órden superior las que resulten de la suma parcial inmediata inferior y poniendo los resíduos en su sitio.

Ejemplo.

Un fabricante ha recibido cuatro remesas de hierro; la primera de 27 quintales 2 arrobas y 13 libras; la segunda de 139 quintales 3 arrobas y 15 libras; la tercera de 84 quintales 1 arroba 18 libras; y la cuarta de 90 quintales 2 arrobas 20 libras, ¿qué cantidad de hierro ha recibido en total?

1.ª remesa.	27 quintales.	2 arrobas.	13 libras.
2.ª "	139	3	15
3.ª "	84	1	18
4.ª "	90	2	20
		10	66
	342 quintales.	2 arrobas.	16 libras.

Se suman las libras y obtenemos 66 que componen 2 arrobas y 16 libras. Escribo 16 libras debajo de las libras. Agregamos las 2 arrobas á la suma siguiente que nos dá 10 arrobas ó sean 2 quintales y 2 arrobas. Escribo 2 arrobas debajo de las arrobas y añadiendo los 2 quintales á la suma siguiente obtenemos, por fin, como suma total 342 quintales 2 arrobas 16 libras.

III.

Sustracción de concretos.

En la sustracción de números concretos pueden ocurrir dos casos:

1.° Restar números incomplejos.

2.° Restar números complejos ó complejos é incomplejos.

Primer caso. La sustracción de números incomplejos, referidos á la misma unidad, se verifica como la de los abstractos.

Ejemplo.

¿Qué distancia habrá de Valladolid á San Sebastian, sabiendo que de Madrid á San Sebastian hay 614 kilómetros y de Madrid á Valladolid hay 242 kilómetros?

Minuendo	614	kilómetros distancia de Madrid á San Sebastian.
Sustraendo	242	" " " á Valladolid.
Diferencia	372	" " de Valladolid á S. Sebastian.

Segundo caso. Se restan las unidades de la misma especie de minuendo y sustraendo, y si algun minuendo parcial es menor que el sustraendo correspondiente, se le agrega una unidad de la especie inmediata superior, teniendo cuidado de agregar otra al siguiente sustraendo.

Ejemplo.

¿Cuál es la diferencia de latitudes entre Marsella y Madrid, sabiendo que la de Marsella es de 43° 17'49'' N., y la de Madrid es 40° 24'29''7 N.?

Minuendo	43°	17'49''	latitud de Marsella.
Sustraendo	40°	24'29,7	id. de Madrid.
	2°	53'19'',3	

Restamos los segundos y encontramos 19'',3 de diferencia.

Al restar los minutos, como el minuendo es menor que el sustraendo, habrá que añadirle una unidad de la especie inmediata superior, ó sea un grado, que tiene 60', que añadidos á los 17 del minuendo dado, componen 77, y restándoles los 24 del sustraendo nos dán 53 de diferencia; añado un grado, en compensacion, á los 40 del sustraendo y tendré por fin la diferencia pedida 2°—53'19'',3.

IV.

Multiplicación de concretos.

En la multiplicación de números concretos pueden ocurrir los siguientes dos casos principales:

1.° Que el multiplicando, esto es, que el valor de una unidad, sea incomplejo, y el multiplicador entero, quebrado ó mixto.

2.° Que el multiplicando sea complejo, y el multiplicador entero, quebrado ó mixto.

Primer caso. Sea 12 pesetas el valor de un metro. Se quiere saber el valor de 15 metros de la misma especie de tela.

He de multiplicar 12 pesetas por 15 y resultan 180 pesetas que es el valor de los 15 metros.

$$\begin{array}{r} 12 \\ 15 \\ \hline 60 \\ 12 \\ \hline 180 \end{array}$$ pesetas.

II. Si una vara de tela vale 9,36 pesetas, ¿cuánto valdrán 8 pulgadas?

He de multiplicar 9,36 pesetas por el número fraccionario $\frac{8}{36}$ que representa las partes de vara que hay en 8 pulgadas.

Multiplico, pues, $9{,}36 \text{ pesetas} \times \frac{8}{36} = 9{,}36 \text{ pesetas} \times \frac{2}{9} = \frac{18{,}72}{9} = 2{,}08$ pesetas.

III. Si una fanega de trigo pesa 3 arrobas, cuánto pesarán 5 fanegas, 7 celemines y 3 cuartillos.

He de multidlicar 3 arrobas por el número mixto $5 + \frac{7}{12} + \frac{3}{36} = \frac{5 \times 36}{36} + \frac{7 \times 3}{36} + \frac{3}{36} = \frac{180 \times 21 + 3}{36} = \frac{204}{36} = \frac{51}{9} = \frac{17}{3}$. Multiplico, pues, 3 arrobas por $\frac{17}{3} = \frac{51}{3}$ arrobas $= 17$ arrobas, peso de las 5 fanegas 7 celemines y 3 cuartillos.

Segundo caso. Si una fanega de trigo pesa 2 arrobas 22 libras 14 onzas ¿cuánto pesarán 7 cahices y 9 fanegas?

He de multiplicar 2 arrobas 22 libras 14 onzas, peso de una fanega, por el número de fanegas que hay en 7 cahices 9 fanegas, esto es, por $12 \times 7 + 9 = 84 + 9 = 93$ fanegas.

Multiplico, pues, 2 arrobas 22 libras 14 onzas por 93, y resultarán 271 arrobas, 2 libras 6 onzas, peso que se quería hallar.

		93
186	66	42
	198	126
	2046	1302

271 arrobas 2 libras 6 onzas.

V.

División de concretos.

En la división de concretos pueden ocurrir los siguientes dos casos principales.

1.° Que el dividendo, esto es que el valor del divisor, sea incomplejo y el divisor entero, quebrado ó mixto.

2.° Que el dividendo, esto es, que el valor del divisor, sea complejo y el divisor entero, quebrado ó mixto.

Primer caso. I. 15 metros de tela han costado 180 pesetas. ¿A cómo sale el metro?

$$\begin{array}{r|l} \text{He de dividir } 180 \text{ pesetas por} & 15 \\ \cline{2-2} 30 & 12 \text{ pesetas.} \\ 0 & \end{array}$$

y resultan 12 pesetas para valor del metro.

II. Si 8 pulgadas de tela cuestan 2,08 pesetas ¿cuánto vale la vara?

He de dividir 2,08 pesetas por el número fraccionario $\frac{8}{36}$, que representa las partes de vara que hay en 8 pulgadas.

$2{,}08 : \frac{8}{36} = 2{,}08 : \frac{2}{9} = \frac{18{,}72}{2} = 9{,}36$ pesetas, valor de la vara.

III. Si 5 fanegas, 7 celemines y 3 cuartillos pesan 17 arrobas. ¿cuánto pesará una fanega?

Hay que dividir 17 arrobas por el número mixto $5 + \frac{7}{12} + \frac{3}{36} = \frac{5 \times 36}{36} + \frac{7 \times 3}{36} + \frac{3}{36} = \frac{180 + 21 + 3}{36} = \frac{204}{36} = \frac{51}{9} = \frac{17}{3}$. Divido, pues, 17 arrobas por $\frac{17}{3}$ $= \frac{17 \times 3}{17} = 3$ arrobas peso de una fanega.

Segundo caso. 7 cahices y 9 fanegas de trigo pesan 271 arrobas 2 libras y 6 onzas, ¿cuánto pesará una fanega?

Habrá que dividir las 271 arrobas, 2 libras y 6 onzas por $12 \times 7 + 9 = 84 + 9 = 93$, número que resulta de reducir el divisor á incomplejo de fanegas, y tendremos dividiendo las 271 arrobas por 93, que resultan 2 arrobas y sobran 85, que reducidas á libras y añadiendo las 2 del dividendo, nos dan 2127 libras, que se dividen por 93 y nos dan 22 libras de cociente y 81 de resto que, reducidas á onzas, con las 6 del dividendo, componen 1302 onzas que, divididas por 93, nos dan 14 onzas. El peso de la fanega es, pues, 2 arrobas, 22 libras y 14 onzas.

```
 271   arrobas, 2 libras, 6 onzas | 93
  85                              |------------------------------
  25                              | 2 arrobas, 22 libras, 14 onzas.
-----
 425
170
-----
2125
   2
-----
212,7  libras.
 267
  81
  16
-----
 486
  81
-----
1296
   6
-----
130,2  onzas.
 372
  00
-----
```

PRINCIPIOS DE GEOMETRÍA.

Preliminares.

Todo cuerpo ú objeto material tiene largo, ancho y grueso. El largo ó *longitud*, el ancho ó *latitud* y el grueso ó *profundidad* se llaman *dimensiones* de los cuerpos. Por esto se dice que todo cuerpo tiene tres dimensiones.

El límite que separa el cuerpo del espacio que le rodea se llama *superficie*. La superficie sólo tiene dos dimensiones: longitud y latitud.

El límite de la superficie se llama *línea*. La linea sólo tiene una dimensión: la longitud.

Se llama *punto* el límite de la línea, y se considera desprovisto de toda dimensión.

La línea se divide en *recta* ó *curva*. Línea recta es la más corta entre dos puntos. Si prescindimos del grueso, un hilo tirante nos ofrece ejemplo de la recta. Tal es A B.

Línea curva es la que no tiene parte alguna de recta, como C D.

La línea formada por varias rectas suele designarse con el nombre de línea quebrada. Como, por ejemplo, E F G H I.

También suele llamarse línea mixta la compuesta de recta y curva, como L M N.

Entre dos puntos sólo puede tirarse una recta. Esta recta se llama *distancia* entre esos puntos.

Las rectas se trazan con auxilio de la regla y del lapiz ó tiralíneas.

CAPÍTULO PRIMERO.

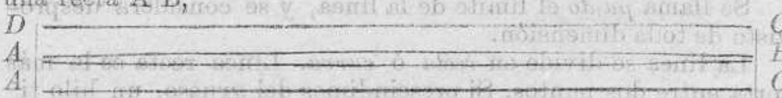
I.

Trazado de rectas.

En las artes y en los oficios, en las aplicaciones todas de la geometría es de uso frecuente el trazado de rectas.

Para trazar una recta entre dos puntos se aplica la regla sobre el papel, madera, etc., próxima á dichos puntos, de suerte que el lapiz ó tiralíneas ajustado á ella pase por esos puntos, y deslizándolo á lo largo del borde de la regla quedará trazada la recta.

Esta operación pudiera ser defectuosa si la regla no estuviera bien construida. De ahí la necesidad, antes de usarla, de asegurarnos de su buena construcción. Basta para esto trazar una recta A B;



invertir la regla y trazar otra recta A B por el mismo borde que antes; si las dos rectas trazadas coinciden, la regla está bien construida por el borde que la hemos ensayado, pues este medio presenta duplicada la curvatura que pudiera existir, y por tanto muy fácil de apreciar.

El trazado de rectas en paredes, entarimados, etc., se efectúa con el *reglon*, instrumento usado por los albañiles, carpinteros, etc., y que no es más que una regla de gran tamaño. Tanto éstos, como los jardineros, picapedreros, aserradores y otros muchos, emplean también la *cuerda* para el trazado de rectas, fijándola tirante entre dos clavos, estacas ó piquetes, y en virtud de su propia tensión tomará la dirección rectilínea.

Por más que en el fondo sea siempre el mismo, éste, como todos los procedimientos empleados en las artes y oficios, varía segun la profesión, de ahí que muchos impregnen la cuerda con una tintura colorante, y déspués de bien tensa, la separan por medio, y soltándola de repente, deja marcada su huella rectilínea, en virtud de su elasticidad.

También suele emplearse la cuerda para alinear objetos, como los ladrillos de una paréd ó muro, medio usual entre los albañiles.

Asimismo se trazan rectas con ayuda de *jalones*.

El jalón ó piquete es un palo terminado en punta forrada de hierro, para poderle clavar en la tierra, y una señal en la cabeza para poderle distinguir á largas distancias. Suele tener de uno á dos metros de alto.

Para efectuar una alineación se clavan dos jalones en los extremos de la línea y se colocan después otros en los puntos intermedios, corriéndoles á derecha ó izquierda, hasta que la visual que pasa por los primeros pase también por los segundos.

II.

Medida de líneas rectas.

Las líneas rectas se miden con el doble decímetro de madera ó marfil dividido en centímetros y milímetros, y algunas veces en semi-milímetros.

Para medir una recta, se coloca el instrumento de modo que el *cero* de la división coincida con una de las extremidades de la recta, y el trazo que coincida con el otro extremo marcará los centímetros y milímetros que tiene de largo, ó bien se toma su longitud con el compás, y se lleva sobre el borde del doble decímetro.

Para tomar sobre una recta una distancia dada, se coloca el cero del instrumento en un extremo de la recta y el trazo que indique la distancia dada nos indicará el punto que debemos señalar sobre la recta. ó se mide con el compás dicha distancia en el doble decímetro y se lleva sobre la recta dada.

Para longitudes mayores se emplean el metro ó el doble metro divididos en decímetros y centímetros. En este caso, como solamente acostumbra á dividirse un decímetro en centímetros y milímetros, convendrá colocar la recta de suerte que uno de sus extremos coincida con una división del metro y el otro extremo venga á caer en el decímetro dividido para poder apreciar inmediatamente su longitud. Si la longitud de la recta es mayor que el metro que hayamos de emplear para su medición, tomaremos primeramente sobre ella la longitud del metro, y mediremos después el resto como queda expresado.

También suele usarse la cinta métrica de cuero, seda ó algodón dividida en centímetros.

Por último, para mediciones en el terreno que contengan decenas ó centenas de metros, se emplea la *cadena métrica*.

La cadena métrica es de hierro, de diez metros de longitud, que se distinguen unos de otros por anillos de cobre. Cada metro á su vez se divide en cinco eslabones de alambre, correspondiendo, por tanto, á cada eslabón dos decímetros de largo.

Termina en ambos extremos por dos argollas, cuya longitud forma parte de la de la cadena. Suele dársela de cinco á diez milímetros más de largo, para compensar en las mediciones la falta de tensión exacta. Á cada cadena acompaña un juego de diez grandes agujas de hierro, de medio metro de largo, para poderlas clavar en tierra y señalar los puntos en que se fijan los extremos de la cadena.

La cadena puede reemplazarse por una cuerda ó cinta impregnada de barniz al objeto de hacerla inalterable á la humedad. También se emplea bastante el *decámetro de cinta de acero.*

Para medir con la cadena una línea recta horizontal se hace la alineación, y después se lleva la cadena tantas veces como sea posible. El número de agujas recogidas, nos indicará el número de decámetros que contiene la distancia de que nos ocupamos. Si esta distancia fuera mayor de diez decámetros, se anota en una cartera el hectómetro medido y se continúa de nuevo desde el último punto obtenido.

Si la distancia que se quiere medir no es precisamente un múltiplo del decámetro, se cuentan los anillos de cobre y eslabones comprendidos entre los extremos del resto que hubiere quedado, y se añadirá á la suma obtenida tantos metros como anillos de cobre y tantas veces dos decímetros como eslabones resultaren.

Si quedare aún algún resto, se apreciará bien á simple vista, bien por el doble decímetro dividido en centímetros de que anteriormente hemos hablado.

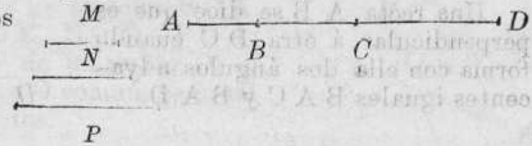
La cinta barnizada es bastante ménos exacta que la cadena, y se emplea del mismo modo.

Cuando la cadena se ha usado ya mucho, ó cuando ha de emplearse por vez primera, convendrá comprobarla midiendo con ella una distancia de antemano conocida.

Otro medio bastante común de medir distancias rectilíneas, cuando no se precisa una exactitud extremada, es el *paso del hombre.* Se calcula que de ordinario cada tres pasos equivalen á dos metros; no obstante, cuando haya de usarse este procedimiento, lo mejor será medir una distancia, primero con la cadena y después al paso; de este modo podrá cada operador encontrar la relación exacta entre el metro y su paso.

Las líneas rectas como cantidades que son pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse.

Para sumar varias rectas, M, N y P, basta llevar sobre una indefinida con el compás una distancia A B igual á la primera M, y á su continuación otra B C igual á la segunda N, y á continuacion otra C D igual á la tercera P; la distancia A D es la suma de las tres rectas dadas.



Para hallar la diferencia entre dos rectas A B y C D basta llevar sobre la mayor una parte A E igual á la menor C D, y el resto será la distancia E B.

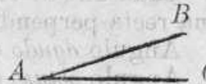
Para multiplicar una recta por un número entero bastará repetirla tantas veces por sumando como unidades tenga el entero. Esta operación es, por consiguiente, un caso particular de la adición.

Para dividir una recta por un entero, es decir, para dividirla en cierto número de partes iguales, indicaremos más adelante procedimientos teóricamente exactos. En las artes y oficios suele resolverse este problema con el compás, por medio de tanteos.

III.

Ángulos.

Se llama *ángulo* la separación ó abertura de dos rectas B A y C A que se encuentran en un punto A.



Estas rectas se llaman *lados*, y el punto común A, vértice del ángulo.

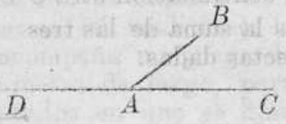
Un ángulo se lee con tres letras, una de cada lado y la del vértice, que se coloca en medio. Este ángulo se podrá leer, por tanto, B A C ó C A B. Si el ángulo está sólo puede leerse con la letra del vértice.

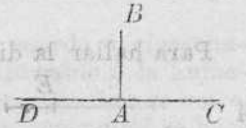
La magnitud de un ángulo no depende de la longitud de sus lados, sino de la mayor ó menor separación de éstos.

Dos ángulos son iguales cuando superpuestos convenientementemente coinciden; es decir, cuando coincidiendo los vértices y un lado, el otro lado coincide también.

Se llaman *ángulos adyacentes* los dos ángulos que forma una recta con otra, á la cual encuentra. Tales son el B A C y el B A D.

Una recta A B se dice que es perpendicular á otra D C cuando forma con ella dos ángulos adyacentes iguales B A C y B A D.



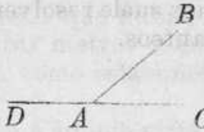


El punto A, en que la perpendicular B A encuentra á la D C se llama *pié* de la perpendicular.

Si la perpendicular á la recta D C se traza desde un punto B esterior se dice que se *baja* la perpendicular; y cuando se traza desde un punto A de la recta D C se dice que se *levanta* la perpendicular.

Si una recta B A es perpendicular á otra D C, también ésta D C será perpendicular á la primera B A.

Se dice que una recta A B es oblícua á otra D C cuando forma con ella dos ángulos adyacentes desiguales B A C y B A D.



El punto A se llama *pié* de oblícua.

Cada uno de los dos ángulos adyacentes iguales que forma una recta perpendicular á otra, se llama *ángulo recto.*

Angulo *agudo* es el menor que el recto, tal es el B A C.

Angulo *obtuso* es el mayor que el recto, como B A D.

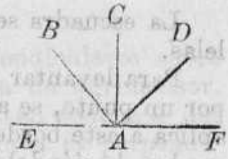
Cuando una recta es oblícua á otra, forma con ella dos ángulos, uno agudo y otro obtuso, cuya suma es igual á dos ángulos rectos.

Dos ángulos se llaman *complementarios* ó *complemento* uno de otro cuando su suma es igual á un ángulo recto.

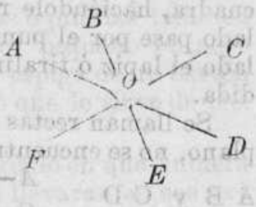
Dos ángulos se dicen *suplementarios* ó *suplemento* uno de otro cuando su suma es dos ángulos rectos.

De donde se deduce que los ángulos adyacentes son suplementarios.

La suma de los ángulos B A E, B A C, C A D, D A F formados á un mismo lado de una recta E F y que tienen un vértice A comun es igual á dos ángulos rectos.



La suma de todos los ángulos B O A, B O C, C O D, D O E, E O F, F O A, formados al rededor de un punto O, y que tienen un vértice O comun, es igual á cuatro ángulos rectos.



IV.

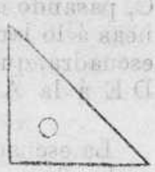
Trazado de perpendiculares y paralelas.

El trazado de perpendiculares es de uso comun en la mayor parte de las artes y oficios é indispensable en las mediciones geométricas.

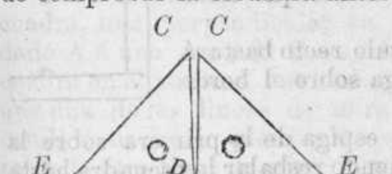
Las perpendiculares se trazan con el auxilio de la *escuadra*.

La escuadra es un instrumento de madera ó metal que se compone de dos reglas fijas formando ángulo recto.

La escuadra ordinaria de dibujo tiene la forma de esta figura.



Si la escuadra no estuviese bien construida, es claro que las operaciones efectuadas con ella adolecerian de un error de orígen; de ahí la necesidad de comprobar la escuadra antes de usarla.

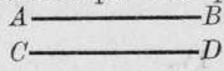


Para comprobar la escuadra se coloca de modo que uno de los lados E D del ángulo recto se apoye en una regla A B y por el otro lado C D se traza una recta; se invierte la escuadra, como indica la figura, y por el mismo lado C D se traza otra recta; se separa la escuadra, y si las dos rectas trazadas á lo largo del lado C D han coincidido, la escuadra estará bien construida. En el caso contrario, puede suceder ó bien que las dos rectas C D y C D se separen, como indica la figura, ó que se crucen; en el primer caso, el ángulo de la escuadra es agudo; en el segundo, obtuso, y en su virtud, el artista procede á su rectificación.

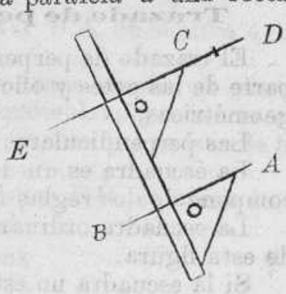
La escuadra se emplea para trazar perpendiculares y paralelas.

Para levantar ó bajar una perpendicular á una recta dada por un punto, se ajusta el borde de la regla á esta recta, y se aplica á este borde uno de los lados del ángulo recto de la escuadra, haciéndole resbalar sobre la regla hasta que el otro lado pase por el punto dado, y deslizando á lo largo de este lado el lapiz ó tiralíneas quedará trazada la perpendicular pedida.

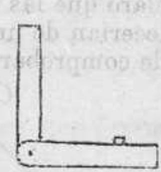
Se llaman rectas paralelas á las que, situadas en un mismo plano, no se encuentran por más que se prolonguen; tales son A B y C D



Para trazar por un punto dado C una paralela á una recta dada A B, se aplica uno de los bordes del ángulo recto de la escuadra sobre la recta y se ajusta al otro una regla, sobre la que haremos deslizar la escuadra, hasta que el borde que coincidia con A B pase por el punto C, pasando entonces el lapiz ó tiralíneas á lo largo de dicho borde de la escuadra, quedará trazada la paralela D E á la A B.



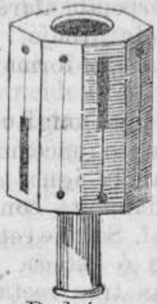
La escuadra de carpintero se compone de dos reglas fijas en ángulo recto, una de las que lleva una espiga saliente.



Para cortar una tabla en ángulo recto bastará aplicar la regla que tiene la espiga sobre el borde de la tabla, y la otra regla y la espiga de la primera sobre la superficie de la misma tabla, haciendo resbalar la escuadra hasta que esta segunda regla pase por el punto donde se quiera hacer la seccion. Se corre el lapiz por el borde de la regla y se serrará á lo largo del trazo hecho.

La comprobacion de esta escuadra se hace sobre una tabla del mismo modo que indicamos para la de dibujo.

Los albañiles, picapedreros, etc., suelen emplear escuadras grandes de hierro, cuyo empleo y comprobacion es análoga á las anteriores.



Para las alineaciones perpendiculares sobre el terreno se emplea la escuadra de agrimensor. Este instrumento está reducido en esencia á dos ranuras opuestas, y cuya direccion es perpendicular á la de otras dos ranuras ó pínulas tambien opuestas. En su base hay un pequeño cilindro hueco en que se introduce la espiga de un bastón graduado con punta de hierro que le sirve de pié.

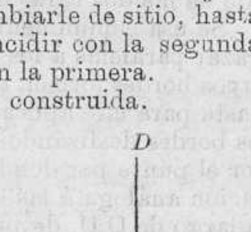
Podría emplearse del mismo modo un círculo en que hubiera trazados dos diámetros perpendiculares que llevaran en sus extremos cuatro pínulas perpendiculares al círculo, que servirían para dirigir las visuales.

La comprobación de la escuadra de agrimensor es bien sencilla.

Se fija verticalmente en el terreno por medio de la plomada (que más tarde describiremos) y se dirige una visual por una de las hendiduras y su opuesta haciendo plantar un jalón en la línea de mira. Se practica la misma operación en sentido inverso haciendo plantar otro jalón. Se dirigen después visuales por la hendidura perpendicular y su opuesta, plantando otros dos jalones. Se hace girar el instrumento, sin cambiarle de sitio, hasta que la primera línea de mira venga á coincidir con la segunda y entónces la segunda deberá coincidir con la primera.

Si así tiene lugar, la escuadra está bien construida.

Para levantar, por medio de esta escuadra, una perpendicular en un punto dado A á una recta B C, se coloca la escuadra en el punto A y se hace girar hasta que una de las líneas de mira coincida con B C, haciendo planten un jalón en D sobre la otra línea de mira; la recta determinada por D A será la perpendicular pedida.



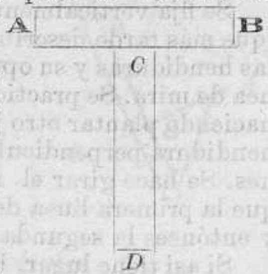
Para bajar una perpendicular á una recta B C desde un punto dado D, se coloca la escuadra en el punto que calculemos haya de venir el pié de la perpendicular, se hace coincidir la línea de mira con B C y se observa si la otra línea de mira pasa á derecha ó izquierda de *D*, en cuyo caso correremos la escuadra á izquierda ó derecha hasta que esta segunda línea de mira pase por D, y la D A será la perpendicular pedida.

También puede emplearse para el trazado de perpendiculares la escuadra de cuerda, de la misma forma que la de dibujo, y constituida, como su nombre indica por tres cuerdas que forman un ángulo recto.

Para construirla, tomamos sobre una cuerda una longitud igual á tres decímetros, por ejemplo, y en este punto hacemos una señal. A continuación tomamos otra distancia igual á cuatro decímetros, y hacemos otra señal; y seguidamente contamos cinco decímetros y hacemos una tercer señal. Se une esta última con la primera y se sujeta con un piquete ó estaca, y fijando la segunda señal en otro, de suerte que las tres rectas estén tensas, tendremos construida la escala de cuerda.

Estendida en tierra de esta suerte, siempre la dirección marcada por la longitud 3 será perpendicular á la 4; lo cual nos escusa de entrar en más detalles acerca del modo de trazar perpendiculares con este instrumento.

Por último, tambien puede emplearse para el trazado de perpendiculares y paralelas la doble escuadra ó T.



Se compone de dos reglas en ángulo recto como indica la figura, siendo la A B más gruesa que la C D, de modo que sobresale de las dos caras de esta.

Se usa comunmente cuando se quieren trazar paralelas á los lados de una tabla, cuyos bordes formen todos ángulos rectos. Basta para ello aplicar la A B á uno de los bordes deslizándola á lo largo de él hasta que la C D pase por el punto por donde se quiere trazar la paralela. Su comprobación análoga á las anteriores, consiste en trazar una recta á lo largo de C D, despues de apoyada la A B en el borde de la tabla, invertirla, y es claro que el mismo borde debe coincidir con la línea trazada.

Es de uso muy comun en el dibujo.

CAPÍTULO II.

I.

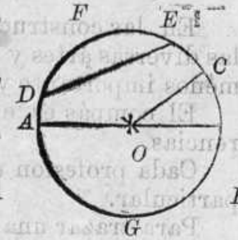
Circunferencias de círculo.

Circunferencia es una línea curva cerrada y plana y que tiene todos sus puntos á igual distancia de un punto interior llamado centro.

Círculo es la porción de plano limitado por la circunferencia.

Si hacemos deslizar una circunferencia al rededor de otra igual, de modo que sus centros coincidan, todos sus puntos coinciden también en todas las posiciones.

Esta propiedad la distingue de todas las demás curvas planas.



Se llama *radio* la recta que va del centro á un punto de la circunferencia, como O C.

Todos los radios de una circunferencia son iguales.

Cuerda es la recta que une dos puntos de la circunferencia, como D E.

Diámetro es la cuerda que pasa por el centro. Tal es, A B.

Todos los diámetros de un círculo son iguales entre sí.

Arco es una parte de la circunferencia, por ejemplo, D F E.

La cuerda D E se dice que *subtiende* al arco D F E; y el arco D F E se dice que está subtendido por la cuerda D E.

Cada arco está subtendido por una sola cuerda, pero cada cuerda subtiende dos arcos. Así, la cuerda D E subtiende los arcos D F E y D G E.

En general, se entiende por arco subtendido por una cuerda el menor de los dos.

El diámetro es la única cuerda que divide al círculo y á su circunferencia en dos partes iguales, llamadas semi-círculos y semi-circunferencias.

El diámetro de un círculo es la mayor de todas las cuerdas.

Se llama *segmento* circular la porción de círculo D F E comprendido entre un arco y su cuerda.

De los dos segmentos en que toda cuerda divide al círculo, uno es menor y otro mayor que el semi-círculo.

El diámetro, segun hemos visto, es la única cuerda que divide al círculo en dos segmentos iguales ó semi-círculos.

Sector circular es la porción de círculo comprendido entre un arco y los radios que terminan en sus extremos. Como C O B.

Dos radios cualesquiera dividen en general al círculo en dos sectores, uno menor y otro mayor que el semi-círculo.

Solo en el caso de estar en línea recta, es decir, cuando formen un diámetro, le dividirán en dos sectores iguales, ó sean semi-círculos.

II.

Trazado de circunferencias.

En las construcciones geométricas y en sus aplicaciones á las diversas artes y oficios, el trazado de circunferencias no es ménos importante y usual que el de líneas rectas.

El compás es el instrumento destinado á trazar circunferencias.

Cada profesion ú oficio puede decirse que tiene un compás particular.

Para trazar una circunferencia sobre el papel, se toma una abertura del compás igual al radio, se fija una de sus puntas en el centro y haciendo girar la otra apoyada constantemente en el papel, madera, etc., sin variar la abertura del compás, ni cambiar el centro, quedará trazada la circunferencia pedida.

Cuando el radio de la circunferencia que deba trazarse esceda de la abertura que puede darse al compás, se reemplaza este por una regla armada de dos puntas: una fija para colocarla en el centro y otra móvil á lo largo de la regla por medio de una abrazadera, quc sirve para tomar la longitud del radio sujetándole después por un tornillo de presión, y con la que se describe la circunferencia.

Se pueden también trazar circunferencias en el terreno por medio de una cuerda atada á una estaca ó piquete que se fija en el centro y colocando otro en el extremo de la cuerda, describirá la circunferencia al girar al rededor del primero.

En general, el procedimiento consiste en trazar la circunferencia sobre un plano por medio del giro del radio al rededor del centro; sin embargo, los alfareros, torneros y algunos otros emplean el procedimiento inverso, esto es, hacen girar el plano al rededor del centro, permaneciendo fijo el radio.

Medición de los arcos.—La operación de medir los arcos no puede efectuarse directamente como la de las rectas, pues como la unidad lineal es rectilínea no puede adaptarse á los arcos que son curvilíneos.

Para obviar esta dificultad se refiere la magnitud de los arcos á la de las circunferencias á que pertenecen, á cuyo objeto se toma como unidad la cuarta parte de la circunferencia, llamada *cuadrante*; el cuadrante se divide en 90 partes iguales, llamadas *grados;* el grado en 60 partes iguales, que llamamos *minutos*, y el minuto en otras 60 partes iguales que se llaman *segundos*.

La circunferencia tiene, pues, 90 × 4 = 360 grados.

Los grados, minutos y segundos de circunferencia se expresan con los signos °, ′, ″, colocados en la parte superior derecha de las cifras que los indican.

No hay que confundir los minutos y segundos horarios con los circulares. Téngase en cuenta que los unos expresan tiempo, mientras los otros miden distancias. Se distinguen en la escritura expresando los grados, minutos y segundos de tiempo por las iniciales respectivas g, m, s.

El instrumento más sencillo de todos los destinados á la medición de arcos es el *trasportador*, semi-círculo graduador de latón ó talco.

Como en los anteriormente descritos, lo primero que necesitamos es asegurarnos de su buena construcción, reducida en este caso á comprobar la graduación.

Esta comprobación comprende dos operaciones. Para efectuar la primera se coloca el instrumento de modo que un diámetro coincida con una recta y el centro caiga en un punto de antemano marcado en la recta. Se señala con el lapiz en el papel el sitio donde viene á caer una división cualquiera, la 46, por ejemplo. Se invierte el trasportador, colocando el centro y el diámetro en el mismo punto y sobre la misma recta, y se vé qué division corresponde ahora al trazo anteriormente señalado en el papel; supongamos es la 134; se suman las dos, 46 + 134 y debe resultar 180°. Esta comprobación se repite cuantas veces se considere precisa y sirve para probarnos que las divisiones de la izquierda del instrumento son iguales á las de la derecha.

Para llevar á efecto la segunda operación, que nos ha de hacer ver si todas las divisiones indistintamente son iguales, se coloca el instrumento de cualquiera modo y se señalan dos puntos que disten entre sí cierto número de grados, 17 por ejemplo. Se mueve el trasportador, sin variar el centro, y en cualquiera posición que se le coloque debe siempre marcar entre las dos señales hechas 17 grados.

IV.

Propiedades de la circunferencia.

El diámetro perpendicular á una cuerda divide á ésta y á los dos arcos que subtiende en partes iguales.

En una circunferencia ó en circunferencias iguales.

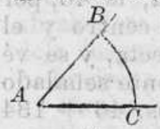
1.° Arcos iguales están subtendidos por cuerdas iguales.
2.° El mayor arco tiene mayor cuerda.
3.° Cuerdas iguales subtienden arcos iguales.
4.° La mayor cuerda subtiende mayor arco.

De donde se deduce que para tomar sobre una circunferencia un arco igual á otro, basta tomar la distancia de sus extremos y llevarla sobre la circunferencia.

V.

Medida de los ángulos.

Se llama *arco correspondiente á un ángulo*, el arco comprendido entre sus lados y descrito desde su vértice como centro con un radio cualquiera.



Así B C es el arco correspondiente al ángulo B A C.

Para trazar el arco correspondiente á un ángulo dado B A C, se hace centro en el vértice A y con un radio cualesquiera A B, se traza el arco B C comprendido entre los lados B A y C A.

Por el contrario, si tratáramos de construir el ángulo correspondiente al arco dado B C, uniríamos el centro A con los extremos B y C del arco por medio de las rectas A B y A C y tendríamos el ángulo pedido B A C.

La medida de los ángulos se reemplaza por la del arco correspondiente y en este sentido se dice que la medida de un ángulo es su arco correspondiente.

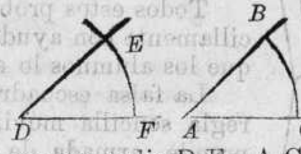
Por esta razón los ángulos se expresan en grados, minutos y segundos.

Así un ángulo de 15 grados quiere decir que intercepta entre sus lados un arco de 15 grados.

Para medir un ángulo con ayuda del trasportador, se coloca este de modo que su centro coincida con el vértice y el radio que marca O en su estremo con uno de los lados del ángulo; se observa la graduacion señalada en el estremo del radio que coincide con el otro lado y esta será la medida que buscábamos.

Para determinar la relación numérica de dos ángulos, se miden y el cociente de sus magnitudes respectivas será la razón pedida.

Problemas.—I.—Contruir un ángulo igual á otro dado.



Para construir un ángulo igual al B A C, trazaremos primeramente el arco B C correspondiente á este ángulo y despues, sobre una recta cualquiera D F, y desde uno de sus puntos D como centro, describiremos un arco con un radio D F=A C, tomaremos una parte F E=B C y uniendo los puntos D y E por medio de la recta D E, se tiene el ángulo pedido E D F.

Problema II.—Sumar dos ó más ángulos.

Basta formar sobre uno de los lados del primer sumando, y con el mismo vértice un ángulo igual al segundo y sobre el lado así construido igual al tercero, etc., el ángulo total que resulte será la suma pedida.

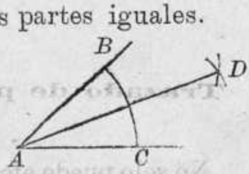
Problema III.—Restar dos ángulos.

Se construye dentro del mayor, sobre uno de sus lados y con el mismo vértice, un ángulo igual al menor, el otro ángulo resultante representa la diferencia entre los dos.

Problema IV.—Multiplicar un ángulo.

Se reduce á repetirle por sumando tantas veces como unidades tenga el multiplicador.

Problema V.—Dividir un ángulo en dos partes iguales.



Desde el vértice A como centro, con un radio cualquiera, se describe un arco B C; desde los puntos B y C como centros, con el mismo radio, se trazan dos arcos que se cortarán en un punto D, se une con A y la D A dividirá al arco y al ángulo en dos partes iguales.

Del mismo modo se podría dividir cada uno de estos ángulos D A B y D A C en dos partes iguales y resultaría descompuesto el ángulo dado B A C en cuatro ángulos iguales y repitiendo la construcción se conseguiría dividirle en 8, 16, 32, 64... partes iguales.

Problema VI.—Dividir un ángulo en cualquier número de partes iguales.

Se traza su arco correspondiente y se divide, por medio de tanteos con el compás, en tantas partes iguales como se quiera dividir el ángulo y uniendo los puntos de división con el vértice quedará resuelto el problema.

Todos estos problemas pueden resolverse también sencillamente con ayuda del trasportador, y será conveniente que los alumnos lo efectúen como ejercicio.

La falsa escuadra de los carpinteros se reduce á una regla sencilla móvil al rededor de otra doble que la comprende, armada de una espiga.

Sirve para resolver prácticamente el primero de los problemas anteriores. Si se quiere, en efecto, cortar una tabla segun un ángulo dado, tomaremos con la falsa escuadra la magnitud de este ángulo y llevándola sobre la tabla de modo que el borde de ésta se aplique contra la regla doble, haciéndola deslizar á lo largo del mismo hasta que la regla sencilla pase por el punto por donde se quiera cortar la tabla, el trazo marcado á lo largo de esta regla, nos indicará por dónde debemos serrarla para reselver el problema propuesto.

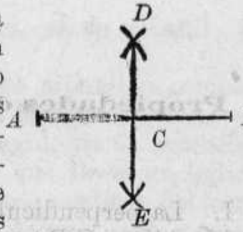
CAPÍTULO III.

I.

Trazado de perpendiculares por medio del compás.

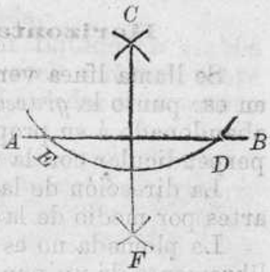
No solo puede efectuarse el trazado de perpendinculares con ayuda de la escuadra, como anteriormente hemos indicado, si que tambien puede llevarse á efecto con auxilio del compás.

El trazado de perpendiculares con ayuda del compás se funda en la propiedad notable que gozan todos los puntos de una recta perpendicular á otra en su punto medio de estar á igual distancia de los extremos de esta otra y de ser los únicos que gozan de esta propiedad.

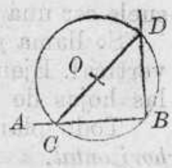


I. Para trazar una perpendicular á una recta A B en su punto medio, se describen desde A y B como centros, con el mismo radio que sea mayor que la mitad de A B dos arcos de círculo que se cortarán en un punto D; y con el mismo radio ó con otro cualquiera con tal que sea tambien mayor que la mitad de A B, se trazan otros dos arcos que se cortarán en un punto E; uniendo los dos puntos D y E la recta D E será perpendicular á la A B en su punto medio C.

II. Para trazar una perpendicular á una recta A B desde un punto C, se toman á derecha é izquierda de este punto distancias iguales C D y C E, y desde los puntos D y E, con un radio mayor que D C, se describen dos arcos que se cortarán en un punto F; uniendo el punto F con el C, la recta F C será la perpendicular pedida.



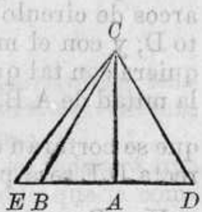
III. Para bajar una perpendicular á una recta A B desde un punto C se describe desde este punto como centro con un radio bastante grande para que corte á la recta, un arco E D y haciendo centro en E y en D, con el mismo radio, se trazan otros dos arcos que se cortarán en F, y la recta C F, será la perpendicular buscada.



IV. Si se tratara de trazar una perpendicular á una recta A B en su extremo B sin prolongarla se tomaria un punto O fuera de la recta A B y haciendo centro en él con un radio igual á la distancia O B se trazará una circunferencia que cortará á la recta dada en un punto C, tirando el diámetro C D y uniendo D con B, la D B será la perpendicular pedida.

II.

Propiedades de perpendiculares y oblícuas.



I. La perpendicular C A es menor que cualquier oblícua C B trazada á la misma recta A B desde el mismo punto C.

II. Las oblícuas C D y C B que se apartan igualmente (D A=D B) del pié A de la perpendicular C A, son iguales.

III. La oblícua C E que se aparta más que la C D del pié A de la perpendicular C A (A E>A D) es mayor que C D.

De donde se infiere que desde un punto exterior C solo pueden trazarse á una recta D E dos rectas iguales C D y C B, en el mismo plano.

III.

Horizontales, verticales y oblícuas.

Se llama línea vertical de un punto, la dirección que tiene en ese punto la *gravedad*. Es la dirección que sigue un cuerpo abandonado á su propio peso. Es indispensable no confundir la perpendicular con la vertical.

La dirección de la vertical de un punto, se determina en las artes por medio de la plomada.

La plomada no es otra cosa que un hilo flexible, suspendido libremente de un punto fijo, con un peso en su extremo, que suele ser una bola de plomo, de donde recibe su nombre.

Se llama *plano vertical* todo plano que pasa por una recta vertical. Ejemplos de planos verticales son los lienzos de pared, las hojas de ventanas y puertas.

Todo plano perpendicular á la vertical se llama *plano horizontal*.

Tales son los suelos y techos de nuestras habitaciones.

Se llama *recta horizontal* toda recta situada en un plano horizontal.

Los planos y rectas horizontales se determinan por medio del *nivel*; y se conocen en las artes con el nombre de *superficies y líneas de nivel*.

Los niveles más comunmente usados son, el de albañil, el de aire y el de agua.

I. El nivel de albañil se compone, como indica la figura, ó bien de dos reglas en ángulo recto, cruzadas por una tercera que lleva un índice ó señal en su punto medio y del vértice de cuyo ángulo pende la plomada; ó de tres reglas tambien en ángulos rectos, cruzadas por otra que lleva en su punto medio la señal ó índice, con más una plomada que pende del punto medio de la regla superior.

Para comprobarle basta colocarlo sobre una regla, elevando uno ú otro de los extremos de esta hasta que la plomada pase por el índice ó señal del travesaño. Se vuelve el nivel, sin mover la regla, y la plomada deberá pasar por el mismo punto. En caso contrario será necesario recortar el extremo opuesto al lado á que se aparte el hilo de la plomada, ó bien mudar el índice ó señal á la mitad de la distancia de separación del hilo.

II. El nivel de agua se compone de un tubo de laton con dos codillos en sus extremos en los que se fijan dos tubos de cristal de mayor anchura, con agua tinturada.

La visual rasante por la superficíe del líquido en ambos tubos será una línea horizontal ó de nivel; suele colocarse sobre un trípode, moviéndose horizontalmente al rededor de su punto medio.

III. El nivel de aire está formado por un tubo de cristal herméticamente cerrado lleno de espíritu de vino á excepción de un pequeño espacio ocupado por una burbuja de aire. Vá cubierto de latón á excepción de su parte media superior y fijo á una regla del mismo metal.

Cuando la burbuja de aire ocupa la parte media del tubo, la regla sobre que descansa está horizontal.

El hilo á plomo y el segundo de los dos niveles de albañil que hemos descrito se aplican á la determinación de verticales; los otros tres niveles á la de horizontales.

Así, por ejemplo, si quisiéramos saber si una pared es ó nó vertical le aplicaríamos la plomada, ó bien uno de los piés del nivel de albañil, y si el hilo se separa en el primer caso lo mismo por la parte superior que por la inferior de la pared, ó pasa, en el segundo, por el índice, la pared es vertical.

Si la parte inferior de la plomada se aproxima más á la pared ó ménos que la superior, esto nos indicará que ésta está en *talus*, y sí, por el contrario, la parte inferior se separa, la pared estará desplomada.

Para determinar por medio del nivel, si una superficie es horizontal se coloca el instrumento sobre el plano en dos direcciones sucesivas y el hilo de la plomada deberá pasar en ambas por el índice ó señal del travesaño. Si se empleara el nivel de agua, ésta debería estar á la misma altura en los dos tubos; y si el de aire, la burbuja deberá ocupar el punto medio del tubo.

También se puede determinar con estos instrumentos la diferencia de nivel de dos puntos del terreno. En este caso, es necesario hacer uso además de la *mira*, que es un jalón de más de dos metros de largo, dividido en decímetros y centímetros, que lleva una plancha cuadrada móvil á lo largo del jalón al cual se fija por medio de un tornillo, dividida en cuatro partes iguales, las dos opuestas pintadas de blanco y las otras dos de negro ó rojo. Para determinar la diferencia de nivel de dos puntos del terreno, se coloca el nivel de agua entre ambos y la mira en uno de los puntos moviendo la plancha hasta que la visual dirigida por el nivel pase por su centro; se mide entonces la altura en el jalón del centro de la plancha; se lleva enseguida la mira al otro punto y se practica igual operación. La diferencia de alturas observadas en los jalones, marcará la diferencia de nivel entre los dos puntos. Es indudable que el que acuse ménos altura del centro de la plancha estará más alto. Si los puntos dados estuvieran próximos podrá emplearse también el nivel de aire, colocándole sobre una regla que se apoyará en el punto más alto de los dos dados y en un pié ó sustentáculo situado en el más bajo. Cuando el nivel marcara la horizontal, la longitud de este pié nos dará la diferencia de nivel de los dos puntos dados.

Cuando tenemos que representar verticales en una hoja de papel, solo podemos trazarlas perpendiculares á la horizontal, suponiéndolas levantadas como si se hallaran en un plano vertical, por más que estando situadas en un plano horizontal sean realmente horizontales también.

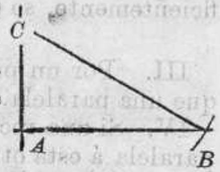
La cuestion, pues, de trazado de verticales y horizontales se reduce en el dibujo al trazado de perpendiculares de que ya nos hemos ocupado, teniendo solamente en cuenta que se considera horizontal la dirección del canto del papel ó tablero de dibujo y que, por tanto, las horizontales se trazan paralelas á esa dirección y las verticales perpendiculares á ella ó bien paralelas al otro canto del papel.

En cuanto al trazado de oblícuas las más comunes suelen ser las de 30, 45, 60 y 120 grados. Entiéndese por oblícua de 30° la que forme con la horizontal un ángulo de 30° y así de las demás.

Con ayuda del trasportador pueden trazarse esas como todas las oblícuas, toda vez que el problema esté reducido á trazar rectas que formen con la horizontal un ángulo dado, cuestion ya resuelta anteriormente.

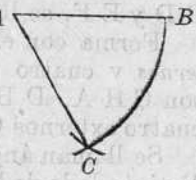
Pueden tambien con sencillez suma resolverse esos mismos problemas con ayuda del compás, como vamos á indicar:

I. Se traza la horizontal A B y la perpendicular A C á esta; y desde un punto *C* cualesquiera, con un radio doble de C A, se describe un arco que cortará en B á la A B; se une este punto con C y la B C es la oblícua de 30°



II. Se trazan como antes las perpendiculares A B y A C; se toma A C = A B, y uniendo C con B, la C B será la oblícua de 45°

III. Se traza la horizontal A B y desde el punto A como centro, con un radio cualquiera, se describe un arco B C y desde B como centro, con el mismo radio se traza otro arco que corte al anterior en C; se une A con C y la *A C* es la oblícua de 60°



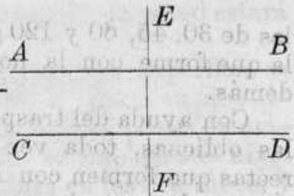
IV. Haciendo la misma construcción y tomando de nuevo desde *C* otro arco igual á B C y uniendo el punto que resulte con A, se tendrá una oblícua de 120°

IV.

Paralelas.

Ya hemos dicho que se llaman paralelas las restas situadas en un plano y que por más que se prolonguen no se encuentran.

Se denominan convergentes las que se aproximan á medida que se prolongan, y divergentes las que se alejan.



I. Dos rectas A B y C D perpendiculares á una tercera E F son paralelas.

II. Una perpendicular A B y una oblícua C D á una misma recta E F, prolongadas suficientemente, se encuentran

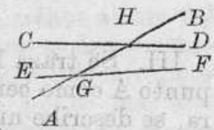
III. Por un punto dado no se puede trazar á una recta más que una paralela.

IV. Si una recta encuentra á otra, encuentra también á toda paralela á esta otra.

V. Si dos rectas son paralelas, toda perpendicular á la una lo es á la otra.

VI Si dos rectas son paralelas, sus perpendiculares respectivas, tambien serán paralelas.

VII. Si dos rectas se cortan, sus perpendiculares respectivas se cortan tambien.



VIII. Si una recta A B corta á otras dos C D y E F, se llama secante ó trasversal.

Forma con ellas ocho ángulos, cuatro *internos* y cuatro *externos*. Los cuatro internos son C H A, D H A, E G B y F G B; y los cuatro externos C H B, D H B, E G A y F G A.

Se llaman ángulos alternos internos, los internos situados á distinto lado de la secante y que tienen distinto vértice, como E G B y D H A; F G B y C H A.

Se denominan alternos externos, los externos de distinto lado de la secante y que tienen diferente vértice. Tales son C H B y F G A; B H D y E G A.

Se llaman correspondientes dos ángulos, uno interno y otro externo, del mismo lado de la secante y de distinto vértice; como B H C y B G E; C H A y E G A; B H D y B G F; D H A y F G A.

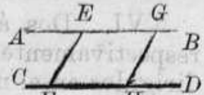
IX. Siempre que dos rectas cortadas por una secante son paralelas, se verifica:

1.° Que los ángulos alternos, tanto internos como externos, son iguales.

2.° Los ángulos correspondientes son iguales.

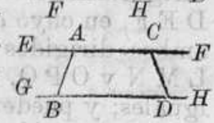
Por el contrario, cuando las rectas no son paralelas estos ángulos no son iguales.

X. Las paralelas comprendidas entre paralelas son iguales.



Tal sucede con E F y G H.

Sin embargo, dos rectas comprendidas entre paralelas pueden ser iguales sin ser paralelas. Tal sucede con A B y C D que son iguales y sin embargo no son paralelas.

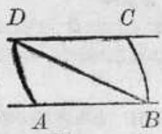


XI. Dos rectas paralelas son equidistantes.

De donde se deduce que siempre que una recta tenga dos puntos equidistantes y á un mismo lado de otra, será paralela á esta otra.

XII. Dos rectas paralelas á una tercera son paralelas entre sí.

XIII. Trazar por un punto dado una recta paralela á otra dada.

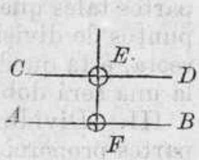


Este problema ya resuelto con ayuda de la escuadra, puede tambien resolverse con el auxilio del compás. Trácese desde el punto dado *C*, con un radio cualquiera C A, un arco A D y desde el punto A, con el mismo radio, otro C B; tómese A D = C B y uniendo D con C, la C D será la paralela pedida.

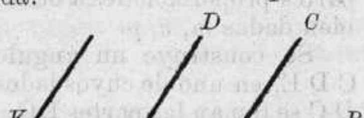
También se suele trazar en las artes la paralela á una recta dada haciendo resbalar á lo largo de ella una perpendicular de longitud constante, llamada *escantillon*, y marcando por un trazo contínuo los puntos equidistantes que determina.

XIV. Trazar una paralela sobre el terreno por medio de la escuadra de agrimensor.

Sea A B la recta y el punto E por donde queremos trazarla una paralela. Bajaremos, como ya sabemos, la perpendicular E F á la A B y por E trazaremos la C D perpendicular á la E F, que será la paralela pedida.



XV. Para trazar por un punto dado C una recta que forme con otra dada A B un ángulo igual á uno dado K, se construye en un punto cualquiera A de la A B un ángulo D A B = K, segun hemos explicado anteriormente, y



por el punto C se tira una paralela C E á la A D: el ángulo C E B es el pedido.

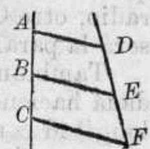
XVI. Dos ángulos que tengan sus lados respectivamente paralelos, pueden tener ambos dirigidos en el mismo sentido, como B A C y D E F, en cuyo caso son iguales; pueden tener ambos dirigidos en sentido contrario, como L M N y O P Q, y en este caso son tambien iguales; y pueden tener dos lados dirigidos en el mismo sentido y dos en sentido opuesto, como R S T y X Y Z, y entonces son suplementarios.

CAPÍTULO IV.

I.

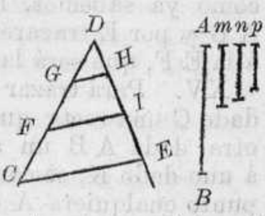
Rectas proporcionales.

La comparación de las magnitudes relativas de las rectas, origina la teoría de las rectas proporcionales.



I. Si una recta A C se divide en partes iguales A B=B C, por ejemplo, y por los puntos de division se trazan paralelas A D, B E, C F que encuentren á otra recta D F, esta quedará tambien dividida en partes iguales D E=E F.

II. De aquí se deduce, que si una recta se divide en dos partes tales que la una sea doble, triple, etc. de la otra y por los puntos de división se trazan paralelas que encuentren á otra recta, ésta quedará también dividida en dos partes, tales que la una será doble, triple, etc. que la otra.



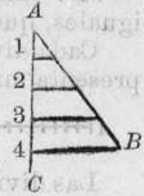
III. Dividir una recta dada A B en partes proporcionales á otras rectas tambien dadas m, n, p.

Se construye un ángulo cualquiera C D E, en uno de cuyos lados indefinidos D C se toman las partes D G$=m$; G F$=n$; F C$=p$; y en el otro una parte D E$=$A B; se unen los puntos E y C, y por los F y G se trazan paralelas á

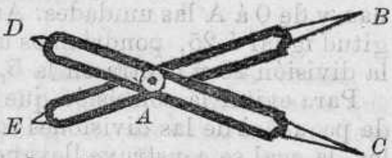
C E, y la D E=A B quedará dividida en los puntos H, I, E en partes proporcionales á las rectas dadas m, n, p.

IV. Dividir una recta dada A B en determinado número de partes iguales, cuatro por ejemplo.

Por uno de sus extremos A se traza una recta indefinida A C, sobre la cual llevaremos cuatro veces una magnitud arbitraria; se une el último punto de división con el otro extremo B de la recta dada, y se trazan paralelas por los otros puntos de división, que dejarán dividida á la recta A B en cuatro partes iguales.

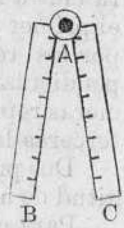


V. *Compás de reducción.* Se compone de dos ramas terminadas en puntas, con dos ranuras longitudinales por las que resbala un tornillo de presión, cuando el compás esté cerrado, lo que permite fijarle á distintas distancias de las puntas. Su uso general es la obtención de una parte alícuota de una recta dada.



Si queremos, por ejemplo, encontrar la cuarta parte de una recta dada M, cerraremos el compás y correremos el tornillo hasta que D A sea la cuarta parte de A C, lo que se consigue fácilmente por estar una de las ramas dividida en partes iguales debidamente numeradas; se oprime el tornillo de presión, se abre el compás y tomaremos con las puntas B C la distancia dada M; la distancia entre las puntas D y E será la cuarta parte buscada.

VI. *Compás de proporción.* Consta de dos reglas iguales movibles al rededor de un eje, en el que concurren los bordes interiores de las dos reglas, que están divididos en igual número de partes iguales.



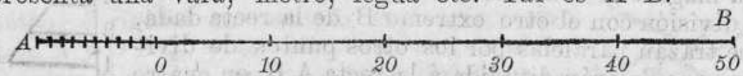
Su uso general es la división de una recta dada en partes proporcionales á varios números dados.

Si se quiere, por ejemplo, hallar una recta que esté con otra dada en la razon de los números 5 á 7, abriremos el compás hasta que la distancia entre las divisiones 7 de las reglas sea igual á la recta dada, y la comprendida entre las divisiones 5 será la recta pedida.

Del propio modo, si se quiere dividir una recta en partes proporcionales á los números 2, 3 y 5, por ejemplo, abriremos el compás hasta que las divisiones $2 + 3 + 5 = 10$ de los bordes interiores de las reglas estén á una distancia igual á la dada; y las distancias entre las divisiones 2, 3 y 5 respectivamente nos darán las partes que buscábamos.

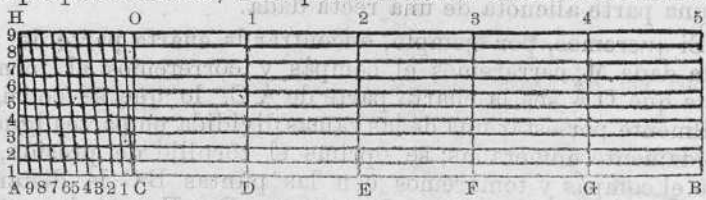
VII. *Escalas.* Escalas es una recta dividida en partes iguales, que sirve para medir las distancias sobre el papel.

Cada división de la escala sirve de unidad de medida y representa una vara, metro, legua etc. Tal es A B.



Las divisiones comprendidas de 0 á B representan las decenas y de 0 á A las unidades. Así, si quisiéramos tomar una longitud igual á 25, pondríamos una de las puntas del compás en la división 20 y la otra en la 5, á la izquierda de 0.

Para evitar la confusión que pudiera resultar de la extremada pequeñez de las divisiones se emplea la escala de transversales, la cual se construye llevando la unidad dada A C, por ejemplo, sobre una recta A B y levantando por los puntos de división perpendiculares, en la primera de las cuales A H se toman



diez partes iguales y por los puntos 1, 2, 3, etc. se trazan paralelas á la A B. Se divide A C en diez partes iguales y se une el primer punto de división con H por la oblícua 9 H, trazando por los restantes paralelas á ésta. Se numeran enseguida perpendiculares, oblícuas y paralelas, bien entendido que las primeras representan las unidades, las segundas las décimas y las terceras las centésimas.

Dos problemas se resuelven con la escala: 1.° Hallar la longitud de una recta dada; y 2.° Hallar una recta de longitud dada.

Para medir una distancia con la escala, se toma con el compás y se colocan sus puntos en una de las paralelas, de suerte que una punta del compás caiga sobre una perpendicular y otra sobre una oblícua. El número formado con el que lleve la perpendicular por unidades y los de las oblícua y paralela respectivamente por décimas y centésimas, nos dará la medida buscada.

Para resolver el problema inverso, esto es para tomar en la escala una recta de longitud dada, se colocan las puntas del compás en la paralela, cuyo número sea el de las centésimas dadas, una punta en la oblícua indicada por las décimas y otra en la perpendicular, cuyo número sea el de las unidades.

CAPITULO V.

I.

Polígonos.

I. Triángulos.

Se llama *polígono* la porción de plano limitado por rectas.

Estas rectas se llaman *lados* del polígono, y los ángulos que forman se llaman ángulos del polígono, así como los vértices de estos ángulos se designan también con el nombre de vértices del polígono.

Contorno ó perímetro del polígono en el conjunto de sus lados.

Diagonal de un polígono es la recta que une dos vértices no contiguos. Todo polígono tiene, pues, tantos ángulos como lados y tantos vértices como ángulos.

Triángulo es el polígono de tres lados, ó sea la porción de plano limitado, por tres rectas.

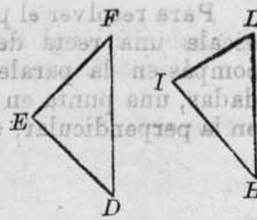
Cuadrilátero es el polígono de cuatro lados.

Los polígonos se clasifican segun el número de sus lados; así el polígono de cinco lados se denomina *pentágono*; el de seis, *exágono*; el de siete, eptágono; el de ocho, octógono; el de nueve, *encágono*; el de diez, *decágono;* el de once, *endecágono*; el de doce, dodecágono y el de quince, pentedecágono; y en general se dice simplemente polígono de 13, 14 ó 15 lados.

Con relación á sus lados, se dividen los triángulos en equiláteros, isósceles y escalenos.

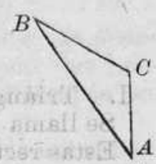
Triángulo equilátero es el que tiene sus tres lados iguales como A B C.

Isósceles el que solamente tiene dos iguales como D E F y escaleno el que tiene sus tres lados desiguales tal es, H I L.

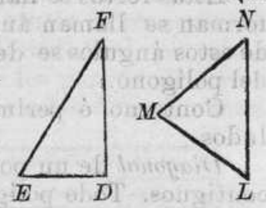


Con relación á sus ángulos, se dividen en rectángulos, acutángulos y obtusángulos.

Triángulo obtusángulo es el que tiene un ángulo obtuso, como A B C.



Rectángulo el que tiene un ángulo recto, como D E F y acutángulo el que tiene sus tres ángulos agudos, como L M N.



En el triángulo rectángulo se llama *hipotenusa* el lado E F opuesto al ángulo recto D.

Los lados E D y D F que forman este ángulo se llaman *catetos*.

La suma de los ángulos de un triángulo es siempre igual á dos ángulos rectos.

De donde se deduce: 1.ª que un triángulo no puede tener más que un ángulo obtuso ó uno recto; 2.º que entre los dos ángulos agudos de un triángulo, rectángulo valen un ángulo recto, ó lo que es lo mismo que estos dos ángulos son complementarios.

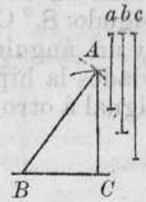
Altura de un triángulo es la perpendicular bajada desde uno de sus vértices al lado opuesto, que entónces toma el nombre de *base*.

Se puede, pues, tomar por base uno cualquiera de los tres lados del triángulo, siendo siempre la altura la perpendicular bajada desde el vértice opuesto.

Solo en el triángulo isósceles acostumbra á tomarse siempre como base el lado desigual.

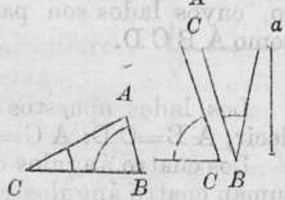
En todo triángulo se verifica que á lados iguales se oponen ángulos iguales. De donde se infiere que todo triángulo equilátero es tambien equiángulo, es decir tiene tambien iguales sus tres ángulos; y que todo triángulo isósceles es isoángulo, es decir, tiene iguales los dos ángulos en la base.

Problemas. I. Construir un triángulo, dados sus tres lados. Sean a, b, c los tres lados dados. Se toma sobre una recta cualquiera una parte BC$=a$; desde los puntos B y C como centros, con b y c por radios respectivamente, se describen dos arcos que se cortarán en un punto A, se une éste con B y C, por medio de las rectas AB y AC, y el triángulo ABC es el pedido.

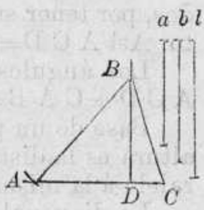


II. Construir un triángulo, dados dos de sus lados y el ángulo comprendido. Constrúyase un ángulo BCA$=$C; sobre uno de sus lados se toma una distancia C B$=a$, y sobre el otro la C A$=b$, trácese la recta BA, y el triángulo A B C es el pedido.

III. Construir un triángulo, dados uno de sus lados y los dos ángulos contíguos. Sobre una recta indefinida tómese una longitud BC$=a$; en los extremos B y C constrúyanse dos ángulos iguales respectivamente á los B y C dados, y el triángulo A C B que resulte será el pedido.



IV. Construir un triángulo, dadas la base, otro de los lados y la altura. Sobre una recta indefinida A C se levanta una perpendicular; se toma en ésta una parte D B $= a$, altura dada, y desde el punto B como centro, con un radio igual al lado l dado, se traza un arco que cortará en A á la recta A C; tómese A C$=b$ y el triángulo A B C es el pedido.



Como casos particulares de los tres primeros problemas los alumnos deberán resolver las siguientes: 1.° Sobre una recta dada construir un triángulo equilátero: 2.° Construir un triángulo isósceles, dadas la base y uno de los otros dos lados: 3.° Construir un triángulo isósceles, dado uno de los lados iguales y el ángulo en el vértice: 4.° Construir un triángulo rectángulo, dados los dos catetos: 5.° Construir un triángulo isósceles, dada la base y el ángulo en el vértice: 6.° Construir un triángulo isósceles, dada la base y uno de los ángulos contiguos: 7.° Construir un triángulo rectángulo, dados la hipotenusa y un ángulo agudo: 8.° Construir un triángulo rectángulo, dados un cateto y un ángulo agudo: 9.° Construir un triángulo rectángulo, dados la hipotenusa y un cateto: 10.° Construir un triángulo igual á otro.

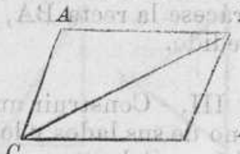
II.

Cuadriláteros.

Ya hemos dicho que cuadrilátero es el polígono de cuatro lados

Los cuadriláteros más importantes son: el paralelógramo y el trapecio.

El paralelógramo puede ser romboide, rectángulo, cuadrado ó rombo.



Se llama paralelógramo el cuadrilátero, cuyos lados son paralelos dos á dos, como A B C D.

Los lados opuestos de un paralelógramo son iguales; es decir, A B=C D; A C=B D.

Los cuatro ángulos de éste, como de todos los cuadriláteros, suman cuatro ángulos rectos.

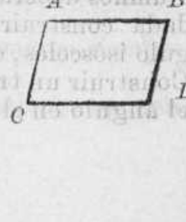
Los ángulos opuestos de un paralelógramo son iguales dos á dos, por tener sus lados paralelos y dirigidos en sentido opuesto. Así A C D=A B D y C A B=C D B.

Los ángulos contiguos son suplementarios. Es, decir que A C D+C A B=2 R y C D B+A B D=2 R.

Base de un paralelógramo es uno cualquiera de sus lados, y altura es la distancia entre la base y el lado opuesto, que es paralelo á la misma.

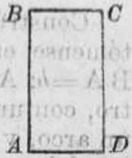
La diagonal del paralelógramo le divide en dos triángulos iguales A B C y C B D.

Todo cuadrilátero tiene dos diagonales.



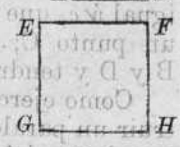
Romboide es el paralelógramo que tiene los ángulos contiguos á cada lado desiguales, así como los lados que forman cada ángulo. Como el A B C D.

Rectángulo es el paralelógramo, cuyos cuatro ángulos son rectos.



El rectángulo tiene, pues, sus cuatro ángulos iguales y los lados que forman cada ángulo desiguales. Tal es el A B C D.

Cuadrado es el paralelógramo que tiene sus cuatro ángulos iguales y sus cuatro lados también iguales. Como E F G H.



El cuadrado es, pues, un rectángulo de lados iguales.

Rombo es el paralelógramo que tiene sus cuatro lados iguales y los ángulos contiguos á cada lado desiguales. Como L M N P.

Trapecio es el cuadrilátero que tiene dos lados paralelos y los otros dos nó. Como Q R S T.

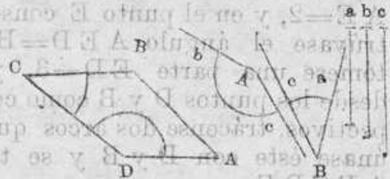
Las diagonales del paralelógramo son desiguales y oblícuas.

Las del rombo, desiguales y perpendiculares.

Las del rectángulo, iguales y oblícuas.

Las del cuadrado, iguales y perpendiculares.

Problemas. I.—Construir un cuadrilátero, conocidos tres lados y los dos ángulos que comprenden.



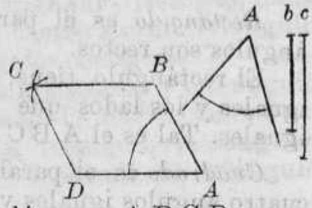
Sean a, b, c los lados, y A y B los ángulos comprendidos respectivamente entre b, c y a, c.

Sobre una recta indefinida tómese B C$=a$; constrúyase el ángulo C B A$=$B, y sobre B A tómese B A$=c$; en el punto A constrúyase B A D$=$A y sobre A D tómese A D$=b$; únase D con C y resultará el cuadrilátero pedido A B C D.

De modo análogo pueden resolverse los siguientes: 1.° Construir un cuadrilátero, dados sus cuatro lados y una diagonal; 2.° sus cuatro lados y un ángulo; 3.° dos lados y tres ángulos.

II. Construir un paralelógramo, dados dos lados y el ángulo que forman.

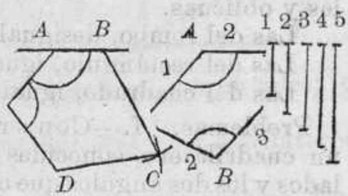
Construyase un ángulo B A D=A; tómense en sus lados las longitudes B A=b; A D=c; desde D como centro, con un rádio igual á b descríbase un arco, y otro desde B, con un rádio igual á c, que cortará al anterior en un punto C; únase este punto con B y D y tendremos construido el paralelógramo A B C D.



Como ejercicio pueden resolverse los siguientes: 1.° construir un paralelógramo dados uno de sus lados, una de sus diagonales y el ángulo que forman; 2.° las dos diagonales y el ángulo que forman; 3.° una diagonal y los ángulos que forme con los dos lados; 4.° construir un rombo, conocido su lado y uno de sus ángulos; ó su lado y una de las diagonales; 5.° construir un rectángulo, conocidos los dos lados; ó un lado y la diagonal; ó un lado y el ángulo que forma con la diagonal; y 6.° construir un cuadrado, dado el lado ó la diagonal.

III. Construir un pentágono, conocidos sus cinco lados y dos de sus ángulos.

Sobre una recta indefinida tómese A B=1, y en el punto A construyase un ángulo B A E=A; sobre el lado A E tómese A E=2, y en el punto E construyase el ángulo A E D=B; tómese una parte E D=3, y desde los puntos D y B como centros, con 4 y 5 por rádios respectivos, trácense dos arcos que se cortarán en un punto C; únase éste con D y B y se tendrá construido el pentágono A B C D E.



De un modo análogo podria construirse un pentágono dados: 1.° todos los lados y todas las diagonales que concurren en un vértice; 2.° uno de sus lados y todos los ángulos que forma este lado con los lados y diagonales que concurren en sus extremos.

IV. Construir un polígono igual á otro dado.

Constrúyanse sucesivamente lados y ángulos respectivamente iguales á los del polígono dado; ó bien descompóngase el polígono en triángulos y fórmense triángulos iguales y colocados del mismo modo.

III.

Semejanza de polígonos.

Llámanse en general figuras semejantes, dos figuras tales que la una es en grande lo que la otra es en pequeño. Las figuras semejantes tienen la misma forma pero distinta magnitud.

Polígonos semejantes son los que tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales.

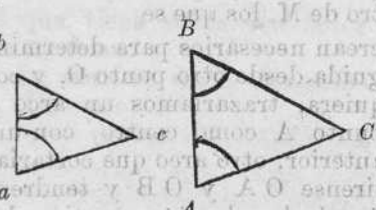
En dos polígonos semejantes se llaman lados homólogos los que forman ángulos iguales.

Dos triángulos que tienen sus tres ángulos respectivamente iguales, son semejantes. De donde se infiere que bastará hacer constar la igualdad de dos ángulos para estar ciertos de la semejanza de dos triángulos, pues, si tienen dos iguales respectivamente, los terceros tendrán que serlo.

Problemas. I. Construir un triángulo semejante á otro dado, conocido uno de sus lados.

Sea A B C el triángulo y ac al lado conocido.

Se construye en a un ángulo $b\,a\,c$=A; y en c otro $b\,c\,a$=C, y el triángulo abc que resulta es el pedido.



II. Construir un polígono semejante á otro dado, conocido uno de sus lados.

Descompóngase el polígono en triángulos y quedará la cuestión reducida á construir una série de triángulos semejantes á aquellos y dispuestos en el mismo órden.

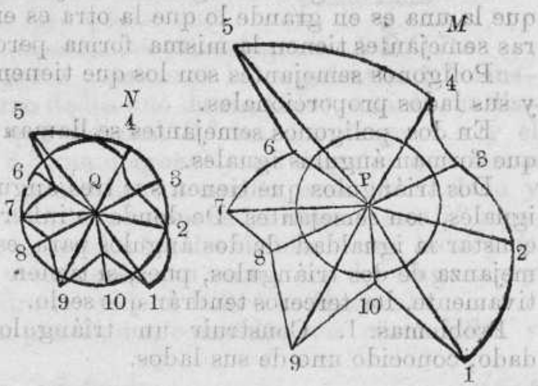
También puede construirse un polígono semejante á otro dado por medio del instrumento llamado pantógrafo.

Consiste en dos reglas A B y A C móviles al rededor de un eje A, y á las que ván unidas en b y c, por otros dos ejes, otras dos reglas $a\,b$ y $a\,c$ de modo que los puntos B, a y C estén en línea recta y que la figura A $b\,a\,c$ sea un paralelógramo.

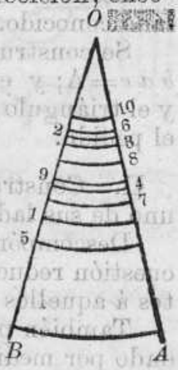
Si fijamos el extremo B y seguimos con el C el contorno de una figura cualquiera, el punto *a* irá señalando el contorno de otra figura semejante á la primera.

Las cuestiones usuales en las artes, de reduccion de figuras á otras de menor tamaño, no son más que problemas de semejanza de figuras.

Si quisiéramos, por ejemplo, reducir las dimensiones de una figura dada, M á la mitad, empezaríamos por describir una circunferencia P, interior á la figura dada, y trazar rectas desde su centro á diversos puntos del perímetro de M, los que se



crean necesarios para determinarla con alguna precisión; enseguida desde otro punto O, y con un rádio cualquiera, trazaríamos un arco A B, y desde el punto A como centro, con un rádio mitad del anterior, otro arco que cortaria en B al primero, tírense O A y O B y tendremos construido el *ángulo de reducción*, que tiene la propiedad de que las cuerdas de todos los arcos correspondientes son mitades del rádio respectivo, en virtud de la construcción empleada. Con rádios iguales respectivamente á P^1, P^2, P^3, ... P^{10}, se trazan arcos correspondientes al ángulo de reducción.



Enseguida construimos una circunferencia Q igual á P, sobre la que tomaremos arcos iguales á los en que esté dividida ésta, trazando los radios Q^1, Q^2, ...—Q^{10}, sobre los que llevaremos las distancias de las cuerdas correspondientes á los arcos señalados con los números 1, 2, ...—10 en el ángulo de reducción.

Unanse los puntos resultantes por un trazo continuo y resultará la figura N semejante á M y de un tamaño mitad.

Este mismo problema podrá resolverse tambien del propio modo reemplazando el ángulo de reducción por el compás de proporción ó el de reducción que sabemos nos facilitan el medio de encontrar la mitad, tercio, etc. de una distancia dada.

También habríamos podido resolver este mismo problema, trazando un rectángulo exterior á la figura dada, y bajando desde los diversos puntos tomados en ésta, perpendiculares á uno de los lados del rectángulo; construyendo otro cuya base y altura fueran la mitad, tercio, etc. de las del primero y trazando perpendiculares al lado homólogo á distancias iguales á la mitad, tercio, etc. de las determinadas por las primeras, y de longitud también precisada por la mitad, tercio, etc. de la longitud de aquéllas y uniendo los puntos así determinados por un trazo contínuo.

IV.

Polígonos regulares.

Se llama polígono regular el que tiene todos sus lados iguales y todos sus ángulos iguales tambien.

Un polígono que tiene todos sus vértices en la circunferencia se dice que está *inscrito* en el círculo.

Centro de un polígono regular es el centro del círculo en que está inscrito.

Rádio es la recta que une el centro con un vértice del polígono.

Apotema es la perpendicular trazada desde el centro á uno de los lados del polígono.

Todos los rádios de un polígono regular son iguales.

Todas las apotemas de un polígono regular son tambien iguales.

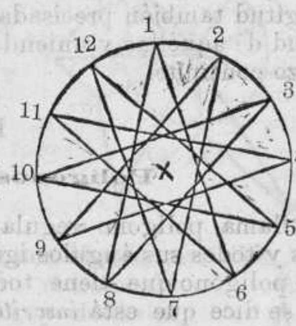
Problema I.—Inscribir en un círculo un triángulo, un exágono, un polígono de 12, 24, etc. lados regular.

Llévese el rádio sobre la circunferencia á partir de un punto cualquiera A, y quedará dividida en seis partes iguales. Uniendo los puntos de division por medio de cuerdas quedará construido el exágono regular ABCDEF.

Dodecágono regular ordinario.

Si unimos los puntos de division de dos en dos, quedará inscrito el triángulo equilátero A E C.

Para inscribir el dodecágono regular, llevo el rádio sobre la circunferencia, con lo que quedará dividida en seis partes iguales, y dividiendo cada uno de estos arcos en dos partes iguales, segun sabemos ya, y uniendo los puntos de division quedará trazado el dodecágono regular ordinario.



Dodecágono regular estrellado.

Si en vez de unir cada dos puntos consecutivos, los uniéramos de cinco en cinco, tendríamos el dodecágono regular estrellado.

Dividiendo de nuevo en dos partes iguales estos arcos quedará dividida la circunferencia en 24 partes iguales y trazando las cuerdas quedará construido el polígono de 24 lados regular.

Problema II.—Inscribir en un círculo un cuadrado, un octógono, un polígono de 16 lados regular.

Trazo dos diámetros perpendiculares y quedará dividida la circunferencia en cuatro partes iguales. Uno los puntos de división por medio de cuerdas y quedará construido el cuadrado inscrito.

Dividiendo cada uno de estos arcos en dos partes iguales, quedará la circunferencia dividida en ocho partes iguales, y trazando las cuerdas se tendrá el octógono regular ordinario.

Octógono regular ordinario

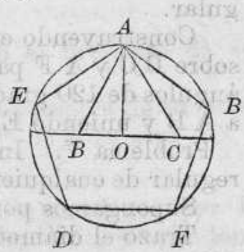
Octógono regular estrellado.

Si en lugar de unir cada punto de división con el siguiente, los unimos de tres en tres, resultará un octógono regular estrellado.

Si despues de dividida la circunferencia en ocho partes iguales, dividimos cada uno de estos arcos en dos partes iguales, la circunferencia quedará dividida en 16 partes iguales, y trazando las cuerdas, quedará construido el polígono regular de 16 lados.

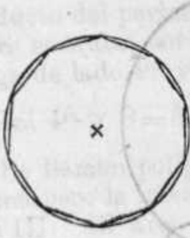
Problema III.—Inscribir en un círculo un pentágono, un decágono, un polígono regular de 20 lados etc.

Se trazan dos rádios perpendiculares; se toma sobre uno de ellos su mitad O B; y se lleva B A sobre B C; llevando A C sobre la circunferencia quedará dividida en cinco partes iguales; y trazando las cuerdas resultará el pentágono regular A B F D E.



Para trazar el decágono, podemos emplear la construcción anterior y, ó bien dividir cada arco en dos partes iguales, ó bien llevar directamente O C sobre la circunferencia y quedará dividida en diez partes iguales.

Uniendo los puntos de división consecutivos, resultará el decágono regular ordinario; uniéndolos de tres en tres, tendremos el decágono regular estrellado.



Decágono regular ordinario.

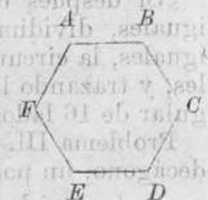
Decágono regular estrellado.

Si dividimos la circunferencia en diez partes iguales, y cada una de éstas en otras dos iguales, y unimos los puntos de division resultará un polígono regular de 20 lados.

Problema IV. Construir un polígono regular, dado su lado.

Se multiplica 180 grados por el número de lados del polígono ménos dos, se divide el producto por el número de lados; el cociente representa el valor del ángulo del mismo polígono. Bastará, pues, construir con ayuda del trasportador, en los estremos del lado conocido dos ángulos de ese número de grados, tomar sobre los nuevos lados partes iguales al lado dado y continuar la misma construccion hasta que quede cerrado el polígono.

Así, por ejemplo, si sobre la recta A B se nos pidiera construir un exágono regular, multiplicaríamos 180 grados $\times$ 4 (número de lados del exágono menos dos) el producto 720 grados lo dividiríamos por 6, y el cociente 120 grados es el valor del ángulo del exágono regular.

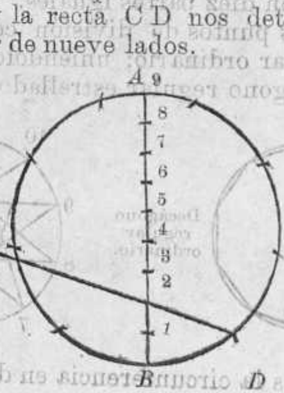


Construyendo en A y B ángulos de 120 grados, tomando sobre B C y A F partes iguales á A B; construyendo en C y F ángulos de 120 grados, tomando sobre C D y F E partes iguales á A B y uniendo E con D resultará el exágono regular pedido.

Problema V. Inscribir en un círculo dado un polígono regular de cualquier número de lados.

Supongamos por ejemplo, que el número de lados sea nueve.

Trazo el diámetro A B, le divido en nueve partes iguales, y desde los puntos A y B, con nn rádio igual á A B, describo dos arcos que se cortarán en un punto C; uno esté punto con la division 2 del diámetro y la recta C D nos determina el lado B D del polígono regular de nueve lados.



V.

Areas de los polígonos.

Area de una superficie es la medida de esta superficie.

La unidad para medir superficies es el cuadrado que tiene por lado la unidad lineal. Así, siendo la unidad lineal el metro, la unidad superficial será el cuadrado que tiene de lado un metro, y por eso se llama metro cuadrado.

Esta es la razon de llamar tambien unidades cuadradas á las unidades superficiales.

I. El área del triángulo es la mitad del producto de su base por su altura. Así, si la base tiene 8^m y la altura 5, el área será $\frac{8\times5}{2}=20^{\overset{2}{m}}$.

II. El área del paralelógramo es el producto de su base por su altura.

Si tiene, por tanto, 4^m de base y 3^m de altura; su medida será $4\times3=12^{\overset{2}{m}}$.

III. El área del rectángulo es también el producto de su base por su altura.

IV. El área del cuadrado es la segunda potencia de su lado.

El área de un cuadrado que tenga 4^m de lado será $4\times4=16^{\overset{2}{m}}$.

V. El área del trapecio es el producto de su altura por la semi-suma de sus bases. Si las bases tienen 4^m y 6^m de longitud y la altura 3^m, su área será $3\times\frac{4+6}{2}=2\times5=15^{\overset{2}{m}}$.

VI. El área de un polígono se halla descomponiéndole en triángulos, hallando las áreas de éstos y sumándolas.

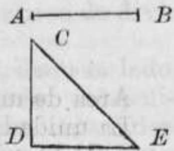
VII. El área de un polígono regular es igual á la mitad del producto del perímetro por la apotema.

Si se trata, por ejemplo, de medir un octógono regular que tenga de lado 4^m y de apotema 6^m, tendremos que el perímetro valdrá $4^m\times8=32^m$ y el área será, por tanto, $\frac{32\times6}{2}=96^{\overset{2}{m}}$.

Se llaman polígonos equivalentes los que tienen distinta forma pero la misma magnitud.

VIII. El área de un círculo se obtiene multiplicando la longitud de su circunferencia por la mitad del rádio.

I. Construir un círculo doble de otro dado.



Sea A B el rádio del círculo dado.

Construyo un ángulo recto C D E; tomo sobre sus lados partes C D = D E = A B y uno los puntos C y E; la C E será la longitud del rádio del círculo duplo del dado.

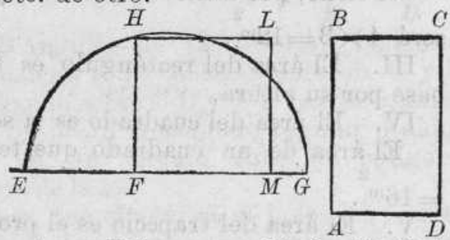
II. Construir un círculo triple de otro dado.

Si nos servimos de los mismos datos del problema anterior, bastará ahora construir el ángulo recto F G H; tomar F G = E C y G H = A B; unir F con H y la F H será el rádio del círculo triple del dado.

Para construir el círculo cuádruple de otro, tomaríamos sobre los lados del ángulo recto partes iguales respectivamente á F H y á A B y el tercer lado del triángulo nos daría el rádio del círculo pedido.

Continuando de análoga manera, podríamos contruir un círculo quíntuplo, séstuplo etc. de otro.

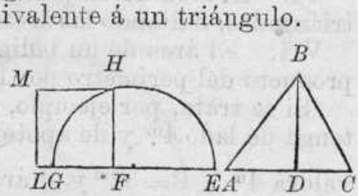
III. Construir un cuadrado equivalente á un rectángulo dado.



Sobre una recta indefinida se llevan E F = A D y F G = A B, base y altura del rectángulo, sobre E G como diámetro se describe media circunferencia, se levanta en F la perpendicular F H al diámetro y ésta será el lado del cuadrado pedido.

Construyendo, pues, el cuadrado cuyo lado es F H, resultará F H L M equivalente al rectángulo A B C D.

IV. Construir un cuadrado equivalente á un triángulo.



Llévese sobre una recta indefinida una parte E F = B D; y á continuación otra F G = $\frac{1}{2}$ A C, altura y mitad de base del triángulo respectivamente; sobre E G como diámetro descríbase una semi-circunferencia; levántase en F la F H perperdicular al diámetro, que será el lado del cuadrado pedido.

Constrúyase sobre F H el cuadrado F H M L y será equivalente al triángulo A B C.

V. Trasformar un polígono en otro equivalente que tenga un lado menos.

Sea el polígono A B C D E; trázase la diagonal B D; por el punto C la C F paralela á la B D hasta que encuentre á la prolongacion D F de la E D, únase B con F y el polígono A B F E, tiene un lado menos que el propuesto al cual es equivalente.

Repitiendo la misma construcción las veces que sea necesario se puede trasformar un polígono en triángulo equivalente

CAPÍTULO VI.

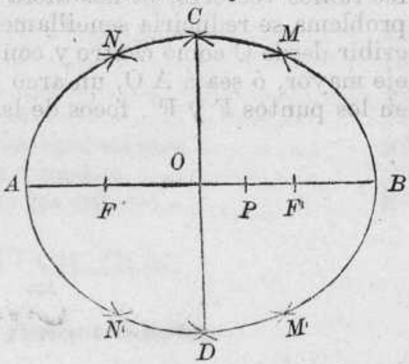
Elipse.

Se llama elipse una curva plana cerrada cuyos puntos gozan de la propiedad deque la suma de sus distancias á dos puntos fijos es siempre una longitud dada.

Los puntos fijos se llaman *focos* de la elipse.

Las distancias de un punto de la curva á los focos se llaman *rádios vectores.*

Para construir la curva, conocidos los focos y la suma de los rádios vectores, se traza la recta indefinida que pasa por los focos F y F' y haciendo centro en estos puntos, con un rádio igual á la mitad de la longitud dada, se describen arcos que se cortarán en dos puntos C y D, que pertenecerán á la curva y el punto O en que la recta C D corta á la F F' se llama *centro* de la elipse.



Tomando O A=O B, igual á la mitad de la distancia dada, los puntos A y B pertenecerán tambien á la curva.

Las rectas A B y C D se llaman *ejes* de la elipse, porque cada una divide á la curba en dos partes iguales. A B se llama *eje mayor*, y por la construccion empleada se vé desde luego que es igual á la suma de los rádios rectores, y C D se denomina *eje menor*.

Para obtener otros puntos de la curva, basta señalar un punto cualquiera P del eje mayor, comprendido entre los focos, y haciendo centro en F y F' con rádios iguales respectivamente á PA y P B se señalan arcos que se cortarán en M y M', puntos de la curva.

Si hacemos ahora centro en los mismos focos con los rádios invertidos, es decir, en F con el rádio P B y en F' con P A, obtendremos del propio modo otros dos puntos N y N' de la elipse.

Repitiendo la misma construcción para otros puntos tomados también en el eje mayor, marcaremos tantos puntos de la curva como juzguemos necesarios para poderlos unir con trazo contínuo y dejarla construida.

Puede construirse tambien la elipse de un modo muy sencillo por un movimiento contínuo.

Basta fijar en los focos los estremos de un hilo de longitud igual al eje mayor; ponerlo tirante por medio de una punta ó estilete y mover esta punta á lo largo del hilo, comenzando siempre éste tirante, para que la punta ó estilete describa la curva pedida.

Si, en vez de dársenos conocidos los dos focos y la suma de los rádios vectores, se nos diera la longitud de los dos ej s, el problema se reduciría sencillamente al anterior, con solo describir desde C como centro y con un rádio igual á la mitad del eje mayor, ó sea á A O, un arco de círculo que cortaría á A B en los puntos F y F', focos de la elipse.

ÍNDICE.

PRINCIPIOS DE ARITMÉTICA.

PÁGINAS.

PRIMERA PARTE.

NÚMEROS ABSTRACTOS.

CAPÍTULO PRIMERO.

Numeración de los enteros.

CAPÍTULO II.

Operaciones con los números enteros.

CAPÍTULO III.

Números fraccionarios.

PÁGINAS.

CAPÍTULO IV.

Fracciones decimales.

SEGUNDA PARTE.

NÚMEROS CONCRETOS.

CAPÍTULO PRIMERO.

Sistema de pesas y medidas.

CAPÍTULO II.

Números complejos.

Principios de Geometría.

PÁGINAS.