ASOCIACIÓN ESPAÑOLA

PARA EL

PROGRESO DE LAS CIENCIAS

ASOCIACIÓN ESPAÑOLA

PARA EL

PROGRESO DE LAS CIENCIAS

CONGRESO DE VALLADOLID

TOMO III

Sección 1.ª: Ciencias Matemáticas

MADRID
IMPRENTA DE FORTANET
Libertad, 29.—Teléf.º 991.

1916

SOBRE OS ARCOS DAS ESPIRAES SINUSOIDES

PELO

DR. F. GOMES TEIXEIRA

REITOR DA UNIVERSIDADE DO PORTO

Sesión del 20 de Octubre de 1915.

A theoria dos integraes ellipticas foi aberta em 1698 por João Bernoulli em um artigo publicado nas *Acta eruditorum (Opera*, t. I, página 252). Os arcos da parabola cubica, representada pela equação $y = ax^3$, dependem de um integral elliptico (*), e demonstron o eminente geometra que, se forem dados dois pontos A e B d'esta curva, podemos determinar algebricamente dois outres pontos A' e B' taes que a differençe dos arcos $A'B'$ e AB seja exprimivel algebricamente em funcção das coordenadas dos pontos A e B. Mostrou mesmo que as construcções a fazer para determinar os pontos A' e B' e para determinar a differença entre os arcos $A'B'$ e AB podem ser feitas com regoa e compasso.

Este resultado extremamente notavel suggeriu as indagações mais geraes de Fagnano, relativas aos arcos de certas parabolas e hyperboles de ordem superior a terceira, expostos em uma memoria publicada em 1714 no *Giornale di litterati d'Italia* e reproducida no t. II das suas *Opere matematiche* (1750), indagações ás quaes se seguiram outras da mesma natureza relativas aos arcos da ellipse e da lemniscata de Bernoulli, que sa tornaram classicas e foram o punto de partida da theoria dos integraes ellipticos, que João Bernoulli, Fagnano e Euler abriram e depois Legendre organisou.

O fim que temos em vista na presente communicação é mostrar que os theoremas de Fagnano podem ser extendidos a alguns grupos de espiraes sinusoides. Fagnano consagrou a estas ultimas curvas al-

---

(*) Gomes Teixeira: *Traite des courbes spéciales remarquables*, t. I, pág. 252.

guns escriptos publicados nas *Oposculi Cologierà (Opere matematiche*, tomo II, págs. 319-353), onde as definiu pela propriedade de ser constante a razão do angulo formado pela normal em um ponto qualquer com o eixo das coordenadas polares e do angulo formado pelo vector d'este ponto como o mesmo eixo, e onde deu a expressão do comprimento dos seus arcos; mas o illustre geometra não notou que, em muitas d'estas curvas, os arcos gozam da propiedade que tinha obtido anteriormente para certas parabolas e hyperboles, a enpressão dos arcos que elle encontrou não sendo propria para o ver.

A rectificação dos arcos da spirale sinusoide defenida pela equação

[I] $$\rho^n = a^n \operatorname{sen} n\theta,$$

pode ser obtida por meio da formula (*)

$$s = \frac{a}{n} \int t^{\frac{1}{n}-1} (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} dt,$$

onde $t = \operatorname{sen} V$, V designando o angulo que a tangente em um ponto qualquer (θ, ρ) far com o vector do mesmo ponto, e temos, applicando as formulas de reducção dos integraes binòmios

$$s = F(t) + A \int t^{\frac{1}{n}-1+2c} (1 + t^2)^{-\frac{1}{2}+\lambda} dt,$$

onde $F(t)$ representa uma funcção algebrica de t, c e λ dois numeros inteiros positivos ou negativos, A uma constante.

Temos pois, s_1 e s_2 representando os comprimentos dos arcos comprehendidos entre os pontos onde t toma o valor t_0 e respectivamente os valores t_1 e t_2,

$$s_1 = F(t_1) - F(t_0) + A \int_{t_0}^{t_1} t^{\frac{1}{n}-1+2c} (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}+\lambda} dt,$$

$$s_2 = F(t_2) - F(t_0) + A \int_{t_0}^{t_2} t^{\frac{1}{n}-1+2c} (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}+\lambda} dt,$$

e por tanto

$$s_1 + s_2 = F(t_1) + F(t_2) - 2F(t_0) + AC,$$

(*) *Traite des courbes spéciales remarquables*, t. II, pág. 267.

C designando uma constante arbitraria, quando t_1 e t_2 verificam a equação diferencial

$$[\mathrm{II}] \quad t_1^{\frac{1}{n}-1+2c}(1-t_1^2)^{-\frac{1}{2}+\lambda}dt_1 + t_2^{\frac{1}{n}-1+2c}(1-t_2)^{-\frac{1}{2}+\lambda}dt_2 = 0.$$

visto que esta equação dá

$$\int_{t_0}^{t_1} t^{\frac{1}{n}-1+2c}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}+\lambda}dt + \int_{t_0}^{t_2} t^{\frac{1}{n}-1+2c}(1-t_2)^{-\frac{1}{2}+\lambda}dt = C.$$

Do mesmo modo se acha, representando por s'_1 e s'_2 os arcos da mesma curva comprehendidos entre o ponto onde t toma o valor t_0 e os pontos onde toma respectivamente os valores t'_1 e t'_2,

$$s'_1 + s'_2 = F(t'_1) + F(t'_2) - 2F(t_0) + AC.$$

Logo

$$s_1 - s'_1 - (s'_2 - s_2) = F(t_1) + F(t_2) - F(t'_1) - F(t'_2).$$

Portanto, se existir uma funcção algebrica $t_2 = \rho(t_1)$ que satisfaça a equação [II], podemos determinar algebricamente dois pontos A' e B' correspondentes a dois pontos dados A e B, taes que a differença dos arcos $s_1 - s'_1$ e $s'_2 - s_2$ reja rectificavel algebricamente.

Appliquemos agora a transformação de Fagnano:

$$\frac{t_2^{k-1}(t_2^k+p)^{h-1}dt_2}{(t_2^{2k}+\alpha t_2^k+\beta)^h} = -\frac{t_1^{k-1}(t_1^k+p)^{h-1}dt_1}{(t_1^{2k}+\alpha t_1^k+\beta)^h},$$

quando

$$t_2^k = \frac{\beta - \alpha\beta - pt_1^k}{t_1^k+p},$$

transformação que se verifica facilmente por substituição directa.

Para fazer esta applicação, procuremos as condições para que tenhamos

$$\frac{t^{k-1}(t^k+h)^{h-1}}{(t^{2k}+\alpha t^k+\beta)^h} = Kt^{\frac{1}{n}-1+2c}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}+\lambda},$$

K representando uma constante.

Não consideraremos todos os casos em que esta identidade é satisfeita; vamos sómente ver aquelles que offerecem algum interesse.

1.° A identidade precedente é satisfeita quando

$$p = 0,\ \alpha = 0,\ \beta = -1,\ hk - 1 = \frac{1}{n} - 1 + 2c,\ h = \frac{1}{2} - \lambda,$$

e temos então

$$n = -\frac{2}{4c + 2\lambda - 1},\quad t_2 = -\frac{1}{t_1}.$$

Os valores que dá para n a primeira d'estas igualdades são identicos aos valores de n dados pelas egualdades

$$n = \frac{2}{1 - 4c},\quad n = \frac{2}{3 - 4c},$$

correspondentes a $\lambda = 0$, $a = -1$.

2.° A egualdade considerada e tambem satisfeita quando se faz

$$p = -1,\ h = \frac{1}{2},\ \alpha = 1,\ \beta = 1,\ k - 1 = \frac{1}{n} - 1 + 2c,$$

$$3k = 2,\ \lambda = 0,$$

e temos

$$n = \frac{3}{2 - 6c},\quad t_2^{\frac{2}{3}} = \frac{2 + t_1^{\frac{2}{3}}}{t^{\frac{2}{3}} - 1}.$$

3.° Se
$$p = -1,\ h = \frac{1}{2},\ \alpha = 1,$$

$$\beta = 1,\ \lambda = 0,\ k - 1 - 3hk = \frac{1}{n} - 1 + 2c,$$

a identidade é satisfeita, e temos

$$n = \frac{3}{1 - 6c},\quad t_2^{\frac{2}{3}} = \frac{1 - t_1^{\frac{2}{3}}}{2t_1^{\frac{2}{3}} + 1}.$$

Em resumo, podemos enunciar o theorema seguinte:

Se forem dados dois pontos de uma espiral sinusoide representada pela equação [I], *onde* n *tenha os valores*

$$n = \frac{2}{1 - 4c}, \quad n = \frac{2}{3 - 4c}, \quad n = \frac{3}{2 - 6c}, \quad n = \frac{3}{1 - 6c},$$

e sendo un numero inteiro arbitrario, pode-se determinar algebricamente dois outros pontos taes que a defferença entre o arco comprehendido entre os pontos dados e o arco comprehendido entre dois outros reja rectificavel algebricamente.

Algumas palavras sobre Pedro Nunes.

PELO

Sr. RODOLPHO GUIMARAẼS

CAPITAO DO EXERCITO PORTUGUEZ

(Sesión del 20 de Octubre de 1915.)

O sr. D. Julio Rey Pastor, refirindo-se a Pedro Nunes no seu *Discurso leído en la solemne apertura del curso académico de la Universidad de Oviedo de 1913 á 1914*, diz a pag. 44: «Para poder iluminar con un rayo de luz el sombrío cuadro de nuestra Historia matemática, nos ocuparemos con alguna extensión de este hombre nacido en Portugal y residente en España mucho tiempo, pero el cual, en rigor, no podemos disputarnos, porque fuera de una y otra nación vivió espiritualmente, y sobre el nivel cultural de ambas supo elevarse por su propio esfuerzo.»

Elle occupou-se, de facto, d'este portuguez illustre, a pag. 43-47 e já antes d'elle e nos tempos modernos, noto que tambem se occuparam de Nunes, certamente pelas mesmas razões, notaveis homens de sciencia hespanhoes, como: D. Martín Fernández Navarrete, na sua *Disertación sobre la historia de la náutica y de las ciencias matemáticas*, Madrid, 1846 (pp. 170-175, 260-261, 272, 278, 285, 296, 337), D. Felipe Picatoste y Rodríguez nos seus *Apuntes para una Biblioteca científica española del siglo XVI*, Madrid, 1891, (pp. 218-222) e D. Acisclo Fernández Vallín, no seu discurso lido em 1893 ante a Real Academia de Ciencias exactas na sua recepção publice, intitulado *Cultura científica en España en el siglo XVI* (pp. 31-35, 52, 90).

Tambem algumas alusões fizerem a Nunes: o grande D. Jōsé Echegaray no seu discurso de entrada em 1866 ne Real Academia de Ciencias Exactas, intitulado *De las Matemáticas Puras en España;* D. Marcelino Menéndez y Pelayo, nos tomos II-III da sua obra *La Ciencia Española;* D. Gumersindo Vicuña, na sua obra *Cultivo de las ciencias* *fisico-matemáticas en España*, e outros em diversas obras dadas a lume pela Academia real das sciencias de Madrid.

Recentemente (1911), tambem o meu querido amigo e illustre catedratico da Universidade de Madrid sr. D. Cecilio Jiménez Rueda, ao sa fundader a *Sociedad Matemática Española*, entendeu dever logo no n.º 2 do tomo I (pp. 41-43) da «Revista» da mesma Sociedade dedicar algumas palavras ao famoso cosmographo do seculo XVI.

Não me proponho, por isso, biographar agora Pedro Nunes, não só por este celebre mathematico ser conhecido da maior parte dos membros de *Asociación Española para el Progreso de las Ciencias*, que concorrem ao congresso de Valladolid, mas sobretudo porque, se tal fizesse, iria sem duvida repetir, ou pelo menos resumir, o que escrevi no meu folleto publicado este anno sob o titulo: *Sur la vie et l'œuvre de Pedro Nunes*, é que e'ume separata dos artigos que inseri nos *Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto* (t. IX, pp. 54-64, 96-117, 152-167, 210-217; t. X, pp. 20-36).

Ha um facto, porém, da vida de Pedro Nunes que está ainda rodeado de muita obscuridade, e que não posso deixar de apontar, qual é o da sua *permanencia en Espanha*, e que, por isso, é de manifesto interesse para os hespanhoes.

Tendo P. Nunes frequentado a Universidade de Lisboa, onde estudou linguas, philosophia e medicina, sendo encarregado em 4 de dezembro de 1529, quando ainda bacherel n'esta ultima Faculdade, com 27 annos de edade, da regencia d'uma cadeira de philosophia moral n'aquella Universidade, e pouco antes, a 16 de novembro do mesmo anno, nomeado *cosmographo;* tendo pouco depois, a 15 de janeiro de 1530, tomado a regencia da cadeira de logica e nos dois annos immediatos (1531 e 1532) a de metaphisica na mesma Universidade; tendo feito acto de licenceado em medicina a 16 de fevereiro de 1522 (*); tendo em 1533 estado em Evora (**); tendo a 16 de novembro de 1535 tomado ainde parte como examinador, no exame privado de Luiz Nunes de Santarem, e a 21 de janeiro de 1537 (anno em que publicou o *Tratado de sphera)*, no de Manoel de Loronha, não voltando a fallar-se de Pedro Nunes até 1542, em que publicou em Lisboa o seu tratado *De*

(*) *Revista da Universidade de Coimbra*, Coimbra, t. III, 1914, p. 780.

(**) Idem; t. II, 1913, p. 140.

Crepusculis, e depois em 1544, que a 16 de outubro lhe era passada *provisão* para ler a cadeira de mathematica na Universidade já então installada em Coimbra, justo era suppor que foi de 1537 a 1542 ou 1544 que frequentou as Universidades de Salamanca e Alcalá de Henares.

Admittimos, pois, naturalmente essa hypothese, a pag. 4-5 do nosso estudo sobre P. Nunes, visto que o unico obice a ella era o ser Pedro Nunes *cosmographo* do reino (não cosmographo-mór ainda, pois d'esse alto cargo foi investido sómente em 2 de dezembro de 1547), mas podia bem ter D. João III (visto tratar Nunes de augmentar o seu cabedal de conhecimentos), conceder-lhe licença para se ausentar de Portugal durante alguns annos.

Succede, porém, que o sr. Dr. Antonio Baião, director da Torre do Tombo *(Archivo nacional)*, publicou no *Boletim de segunda classe de Academia das sciencias de Lisboa*, Coimbra (t. IX, 1914, pp. 82-121), um interessante artigo sob o titulo *O mathematico Pedro Nunes e sua familia á luz de documentos ineditos*, ao qual eu fiz diversas consideracãos no mesmo *Boletin*, a pag. 122-141, e n'esse artigo mostro, entre outras coisas, que dois netos de Pedro Nunes foram perseguidos pela Inquisição, sendo deveras curioso o depoimento de um d'elles—Pedro Nunes Pereira—feito pezante o terrivel Tribunal, pelos factos concretos que encerra a respeito de seu avô o grande Pedro Nunes. Transcrevemol-o na integra: «... seu avô Dr. Pedro Nunes, foi natural de Alcácer do Sal, como elle declara nos livros que compoz, da qual villa, sendo de pouca edade se foi estudar á Universidade de Salamanca onde, no anno 1523, casou com a dita D. Guiomar de Areas, sua mulher, filha de Pedro Fernandez de Areas, cavalleiro castelhano, cristão velho, visinho da dita cidade de Salamanca.

Estando o dito Pedro Nunes lendo uma cadeira na dita Universidade de Salamanca o mandon chamar por cartas el-rei D. João III de este reino, para vir ler a cadeira de Matematica na Universidade de Coimbra que então o dito Senhor Rei queria reedificar, instituir, fundar na dita cidade e com estas cartas e mandado de El-Rei se veio com a dita sua mulher D. Guiomar para este reino 4 ou 5 annos antes da fundação da Universidade de Coimbra, no principio da fundação dela, a ler a dita cadeira de Matematica, na qual cidade o Dr. Pedro Nunes viveu com toda a sua casa, mulher e filhos, até o tempo do seu falecimento com muita satisfacção e cristandade».

Por estas declarações, ás quaes todavia não se deve ligar absoluto credito, pois contem algumas inexactidões, como fiz ver (*), conclue-se que o cosmographo-mór casara em Salamanca en 1523, e estudare, e lera depois, mathematica na Universidade d'aquella cidade (**).

A estada de Nunes em Salamanca seria talvez de 1521 ou 1522, em que tinha 20 annos de edade, até 1524 ou 1525 (***), para vir depois frequentar o curso de medicina na Universidade de Lisboa, de modo que em 1529, como disse, era bacharel n'essa Faculdade, e assim fiz, no meu aludido estudo sobre P. Nunes, a devida rectificação a pag. 79.

E quando estaria o cosmographo em Alcalá? A seguir á sua estada em Salamanca, e antes do regresso á Portugal? ou mais tarde, depois de 1537 até 1542? Tudo se ignora a este respeito.

Conhece-se menos mal (sobretudo depois das investigações feitas pelo Dr. Joaquim Martins Teixeira de Carvalho, as quaes constam de artigos prestes a serem publicados na *Revista da Universidade de Coimbra)*, a vida do cosmographo-mór, desde que elle entrou para professor da Universidade de Coimbra até á sua morte, mas envolta em un mysterio se encontra ainda a sua permanencia, longa sem duvida, en terras de Espanha, onde para mais constituiu familia.

Algumas tentativas tenho feito para conseguir desvendar este mysterio, até agora infelizmente infructiferas.

No archivo de antiga Universidade d'Alcalá, hoja reunida ao da Universidade Central de Madrid, nenhuns vestigios se encontram a respeito da passagem de Nunes por ella, segundo me affirmou o meu querido collega e amigo sr. D. Cecilio Rueda. No propria cidade de Alcalá, onde ha pouco tempo ainde residia outro meu collega e amigo o sr. D. Nicolás de Ugarte, e não obstante os bons esforços d'este, nada se apurou tampouco.

Em Salamanca, por varias vezes, e ultimamente, devido á interfe-

(*) *Boletin da 2ª classe da Academia das Sciencias de Lisboa*, Coimbra t. XI 1914, pág. 122-141.

(**) Segun do me informa o sr. D. Emilio Román Retuerto, «el catedrático de astrología de 1520 á 1544 tuvo frecuentes licencias, y es muy posible que Núñez le sustituyera».

(***) Ou mesmo até 1526, que fois quando García d'Orta, companheiro de Nunes en Salamanca, regressou a Portugal.

rencia do meu illustre collega e amigo sr. D. Luis Octavio de Toledo, junto dos seus collegas n'aquella Universidade srs. D. Emilio Román Retuerto e D. Guilhermo Sáez; nenhum dado respeitante a Nunes se encontrou, nem no «libro de cuentas de la Universidad, correspondiente á los años de 1518-19 á 1523-24, en donde constan los salarios de los catedráticos y sustitutos», nem nos «libros de claustros» correspondentes aos mesmos annos, nem tampouco nada relativo á «partida de casamiento de Núñez».

En vista do que resumidamente acabo de expor, dada a importancia do assumpto, venho exortar os illustres membros da *Asociación Española para el progreso de las ciencias*, quaes saudo enthusiasticamente, e que de certo perfilharão a supracitada opinião do joven, mas distincto catedratico da Universidade de Madrid, Sr. Rey Pastor, para que envidem todos os seus esforços para nos diversos archivos de Espanha, em documentos do seculo XVI e em outros posteriores, ver se conseguirá obter: 1º Registo do casamento de Pedro Nunes com D. Guiomar de Areas, en 1523, en Salamanca, ou proximidades d'aquella cidade, em cujo registo, sem duvida; deve ser feita menção do nome do pae do Cosmographo, que até hoje se desconhoce; 2º Registo do nascimento de algum dos filhos de Nunes que tenha nascido em Espanha, pois presumo que lá tivesse nascido sua filha D. Briolanja; 3º Epoca e duração das estadas do cosmographo em Salamanca e Alcalá, factos succedidos durante a sua passagem por essas celebres Universidades, taes como cadeiras que frequentou, aquella ou aquellas em que leu materias, nome dos professores cujos cursos seguin, etcétera.

Comprehende-se bem a importancia dos dados ainda desconhecidos, que deixo apontados para se poder completar a biographia d'aquelle que foi uma figura de destaque na Penisula no seculo XVI.

Lisboa, 29 de Junho de 1915.

CÓNICAS ANALAGMÁTICAS EN LA INVERSIÓN
RESPECTO DE UN TRIÁNGULO

POR

D. ROBERTO ARAUJO

DOCTOR EN CIENCIAS EXACTAS

(Sesión del 21 de Octubre de 1915.)

1. Recibe el nombre de analagmática toda curva ó superficie tal que, en una transformación cualquiera, es ella misma su transformada; es decir, un punto cualquiera de ella, tiene como homólogo otro de la misma.

En las figuras inversas respecto de un triángulo consideradas como conjuntos de puntos, ó sea en la transformación inversa puntual, las rectas analagmáticas son únicamente los rayos dobles de las involuciones fundamentales, cuando estos existen; pues cualquiera recta que no pase por ninguno de los vértices del triángulo fundamental, tiene por inversa una cónica que pasa por ellos, y cada recta que pasa por un vértice es inversa del rayo conjugado en la involución fundamental respectiva.

2. Se demuestra en esta transformación en que nos ocupamos, que toda cónica que pasa por dos vértices del triángulo fundamental tiene por inversa otra cónica que contiene los mismos vértices; y que toda cónica que pasa por los tres vértices, por uno ó por ninguno, tiene por inversa, en el primer caso, una recta; en el segundo, una curva de tercer orden; y en el tercero, una curva de cuarto orden (*). Así, pues, solamente entre las cónicas que pasan por dos vértices del triángulo fundamental, habrá que buscar las cónicas analagmáticas.

3. *La condición necesaria y suficiente para la existencia de cónicas*

(*) Véase E. Torroja: *Geometría de la posición*, pág. 371, núm. 562.

analagmáticas es que exista, por lo menos, una involución de rectas fundamental que tenga rayos dobles.

En efecto; sea φ una cónica analagmática engendrada por dos haces proyectivos de vértices B y C; si á cada par de rayos homólogos que determinan un punto P de la cónica φ, le hallamos sus conjugados en las involuciones fundamentales respectivas, éstos se cortarán en otro punto P', inverso de P, de la φ. Á la serie de puntos PQR ..... que constituye la cónica φ, le hacemos corresponder en la inversión otra serie $P'Q'R'$ ..... situada sobre la misma cónica, verificándose PQR ..... $\barwedge$ $P'Q'R'$ ..... (1). El centro O de esta involución está dentro ó fuera de la cónica; en el primer caso, la recta AO corta a la cónica en dos puntos M y M' inversos, y es AO rayo doble de la involución fundamental de vértice A; en el segundo, la involución (1) tiene puntos dobles, que son los de la inversión respecto del triángulo; y tanto en un caso como en otro, la involución fundamental de vértice A tiene rayos dobles.

Para probar ahora que la condición es suficiente, supondremos que el vértice A es base de una involución fundamental que tiene rayos dobles.

Sea φ una cónica que pasa por los vértices B y C del triángulo fundamental y tiene por conjugados respecto de ella, los pares de puntos inversos situados sobre uno m de los rayos dobles de la involución fundamental de vértice A; el otro rayo doble n es conjugado del m respecto de φ, porque el punto de intersección A' de este con el lado BC, tiene por polar respecto de ella el rayo doble n, por pasar éste por A, conjugado de A' y cortar al lado BC en un punto A, armónicamente separado de A' por los puntos B y C.

La tangente p á φ en el vértice B corta al rayo doble m en un punto P, cuya polar, respecto de φ, pasa por B y P', inverso de P, y corta al lado AC en B' inverso de B, y á la recta n en M, polo de m respecto de φ; la tangente p y la recta BB', son rectas inversas.

Ahora bien; como la serie $BP'B'M$ es armónica y M y P' son conjugados respecto de φ, ésta pasará por B' y será analagmática; porque su inversa es una cónica que pasa por B, C, B', es tangente en B á la recta p, y pasa por los puntos dobles de la involución de puntos inversos de base m, cuando éstos son reales, y en el caso de que sean imaginarios, siempre tendrán las cónicas φ y φ' un par de puntos conjugados comunes que son inversos, y se confunde, pues, con la φ.

4. De aquí se deduce que todas las cónicas que pasan por los puntos B, C, M y N, siendo estos dos últimos los dobles situados en uno de los rayos dobles de la involución de rectas fundamental de vértice A, son analagmáticas, y forman, por pasar por cuatro puntos, un haz de cónicas. Lo mismo se puede decir de todas las cónicas que pasan por los cuatro puntos B, C, P y Q, siendo estos dos últimos los dobles reales ó imaginarios conjugados situados en el otro rayo doble de la involución fundamental de rectas de vértice A.

Tanto los puntos M y N como los P y Q, son todos reales ó todos imaginarios conjugados dos á dos, los que están sobre un mismo rayo doble.

Además, como los puntos M y N cuando son reales son puntos diagonales del cuadrivértice $BCPQ$, y los P y Q lo son del cuadrivértice $BCMN$, se deduce que aquéllos son conjugados respecto de todas las cónicas del segundo haz, y estos últimos lo son respecto de todas las cónicas del primer haz.

Si las tres involuciones de rectas fundamentales tienen rayos dobles, de lo dicho anteriormente se desprende que existen seis haces de cónicas analagmáticas; y que, por lo tanto, por cada punto del plano pasan seis cónicas analagmáticas pertenecientes una á cada haz de cónicas, todas las cuales contienen el punto inverso de aquél.

Como, por lo menos, una de las tres involuciones de rectas fundamentales tiene rayos dobles, existen siempre, por lo menos, dos haces de cónicas analagmáticas.

Como es evidente que si dos de las tres involuciones de rectas fundamentales tienen rayos dobles, también los tiene la tercera, no puede haber más que estos dos casos: 1.°, que existan seis haces de cónicas analagmáticas, pasando las de dos de estos seis haces por cada dos vértices del triángulo fundamental; 2.°, que existan dos haces de cónicas analagmáticas que pasan por los dos vértices distintos de aquel que es base de la involución de rectas fundamentales que tiene rayos dobles.

Proposiciones correlativas con éstas hay en la inversión respecto de un triángulo, en el que cada lado es base de una involución de puntos en la que son conjugados los dos vértices situados en el mismo.

5. Si observamos ahora que, por ser las polares de dos puntos inversos, respecto del triángulo fundamental, rectas inversas respecto de las involuciones de puntos, secciones de las de rectas de los vértices del mismo por los lados opuestos (*), la figura polar de una curva analagmática respecto del triángulo fundamental tiene que ser inversa de sí misma ó analagmática en la inversión deducida de la puntual; cortando sus involuciones de rectas fundamentales por los lados opuestos, se ve fácilmente que la existencia de cónicas analagmáticas en la inversión puntual implica la de haces de rectas de segundo orden analagmáticos en la inversión de rectas deducida de la puntual del modo ya indicado, polares de aquéllas respecto del triángulo fundamental.

6. Ahora cabe preguntarse: ¿Podrán existir cónicas que sean simultáneamente analagmáticas en la inversión puntual y en la inversión de rectas correspondientes?.

Demos por supuesto la existencia de ellas, y deduzcamos luego el absurdo que se seguiría de ello. Sea φ una tal cónica que deberá pasar por dos vértices B y C del triángulo y ser tangente á los lados AB y AC; uno de los rayos dobles m de la involución fundamental del vértice A cortará á φ en dos puntos P y Q, que son dobles ó inversos respecto del triángulo; las tangentes á la cónica φ en estos puntos pasan por el punto O de intersección del rayo doble n con el lado BC, y son, por lo tanto, dobles ó inversas en la inversión de rectas correspondiente á la puntual. Ahora cabe distinguir cuatro casos: 1.°, que P y Q y las tangentes p y q sean dobles; 2.°, que P y Q sean inversos y las tangentes p y q dobles ó viceversa, y 3.°, que P y Q sean inversos y las tangentes p y q también lo sean.

En el primer caso la recta que une las proyecciones del punto P desde los puntos B y C sobre los lados b y c es doble y está armónicamente separado de OB respecto del par de rectas OP y OA y no puede coincidir con OP ni con OQ, pues no estaría separado OB respecto del mismo par. Lo mismo se diría de la otra recta doble que une las proyecciones del punto Q desde los B y C sobre los lados

(*) El lector fácilmente podrá verlo, partiendo de este teorema: Los conjugados armónicos de dos puntos conjugados de una involución respecto de otro par de puntos conjugados, son también conjugados en la misma involución.

b y c, respectivamente; luego las tangentes p y q no pueden ser rectas dobles.

En el segundo caso, el rayo doble m contiene la serie armónica $APA'Q$, en la que A' es el punto en que corta al lado BC; si la proyectamos sobre el lado AC desde los puntos B y O, se obtienen respectivamente las series armónicas $ASCS'$ y $AMCN$, en donde S y S' son inversos y M y N los dobles de la involución fundamental del lado AC. Ellas nos dicen que el par de puntos inversos S y S, no puede estar separado por el par de puntos dobles M y N, lo cual es imposible.

El mismo razonamiento se haría si P y Q fuesen dobles y las tangentes p y q inversas.

En el tercer caso, las series armónicas $ASCS'$ y $AMCM'$, proyecciones de la serie armónica $APA'Q$ desde los puntos B y O, respectivamente, sobre el lado AC, prueban que A y C son puntos dobles de la involución $SS' . MM'$....., que es la fundamental, lo cual es absurdo.

Del examen de todos estos casos, los únicos que pueden considerarse, se deduce, pues, la imposibilidad de que existan tales cónicas.

7. Una consecuencia notable de lo expuesto es que en la transformación polar respecto de un triángulo no puede haber cónicas analagmáticas, es decir, envolventes del haz de polares de todos sus puntos.

En efecto; de existir tales cónicas, tendrían que pasar por dos vértices y ser tangentes á los lados que concurren en el tercero del triángulo fundamental, y como se puede, en este caso, determinar una inversión en la cual dicha cónica fuera analagmática, su figura polar como constituída por rectas que, á pares, son polares de puntos inversos y, por lo tanto, inversas, sería analagmática en la inversión tangencial deducida de la puntual, cortando las involuciones de rectas fundamentales por los lados opuestos á sus bases, y si fuera envolvente de la cónica dada, ésta sería analagmática en las dos inversiones, lo cual es imposible.

8. Para terminar, vamos á considerar brevemente un grupo de curvas, llamadas W de primera clase, que tienen por ecuación $y = cx^k$ (2) donde k es un número real cualquiera; grupo en el que están comprendidas las cónicas como caso particular.

Por la forma misma de la ecuación, se demuestra muy fácilmente que estas curvas W de primera clase, son analagmáticas en una determinada inversión respecto del triángulo de coordenadas como fundamental. En efecto, la curva inversa de la (2) en la inversión

$$x = \frac{a}{x'}, \qquad y = \frac{b}{y'} \ (3),$$

tiene por ecuación $y' = \dfrac{b}{ca^k} x'^k$ (4), resultante de reemplazar en la (2) x é y por los valores dados por las (3), y si los parámetros a y b satisfacen á la ecuación $c^2a^k = b$ (5) que resulta de identificar las ecuaciones (2) y (4), esta curva inversa coincide con la dada, y ésta será, por lo tanto, analagmática; y como la (5) tiene infinitas soluciones reales para a y b, síguese que habrá infinitas inversiones, para las cuales la curva (2) es analagmática.

9. Estas curvas tienen la notable propiedad de ser directrices en una transformación correlativa de segundo orden definida por las fórmulas

$$x = \frac{p}{u}, \qquad y = \frac{q}{v} \ (6),$$

que deja invariante al triángulo de coordenadas, pues las relaciones que existen entre las coordenadas de un punto cualquiera de la curva (2), y las coordenadas tangenciales de su tangente vienen dadas por las fórmulas

$$x = \frac{k}{(1-k)u}, \qquad y = \frac{1}{(k-1)v} \ (7)$$

que son de la forma (6).

Estas mismas relaciones, cuya obtención dejamos al cuidado del lector, nos prueban que la ecuación tangencial de la curva (2) será de la forma $v = c'u^k$, y que, por lo tanto, la curva (2) será analagmática en una inversión tangencial respecto del triángulo, que será la homóloga de la inversión puntual, para la cual era analagmática dicha curva en la transformación correlativa de segundo orden definida por las fórmulas (7).

10. Si designamos por x' é y' las coordenadas de los puntos de intersección de la tangente m en el punto $M(x, y)$ á la curva (2), con los ejes X é Y, respectivamente, las fórmulas (7) se podrán escribir, dadas las relaciones $u = -\frac{1}{x'}$, $v = -\frac{1}{y'}$ que existen entre estas coordenadas y las tangenciales de la recta m, de este modo:

$$x = \frac{k}{k-1} x', \quad y = \frac{1}{1-k} y',$$

que expresan que sobre los ejes coordenados hay dos series proyectivas constituídas por las proyecciones de los puntos de la curva (2) desde el vértice opuesto y las intersecciones del haz de las tangentes respectivas con dichos ejes; series que tienen como puntos dobles los vértices del triángulo situados sobre su base.

Esta notable propiedad puede servir de definición de las curvas W, no sólo para las de primera clase, sino también para las de las otras dos clases, sin más que modificarla ligeramente para darle una mayor amplitud que le haga susceptible de comprender á todas las curvas W; y esta definición es la siguiente: Se denominan curvas W respecto del punto O y de una recta a, aquéllas en que el haz proyectante de todos sus puntos, desde el punto O, es proyectivo con la sección del haz de sus tangentes por la recta a. Si hay dos puntos sobre sus rayos homólogos, uno ó ninguno, la curva W será de primera, segunda ó tercera clase respectivamente.

11. Como el estudio de estas curvas va á ser objeto de una memoria en la que estamos trabajando, terminaremos con una de las propiedades más importantes de las curvas W de primera clase, que dice así: Si en un punto cualquiera de una de ellas se traza la tangente, ésta corta á los tres ejes coordenados en tres puntos, que con el de contacto forman una figura simple de razón doble constante.

En efecto, si proyectamos desde el vértice O_1 del triángulo de coordenadas sobre la tangente m en el punto M, la figura simple $OO_2x'x$, constituída por los puntos dobles O y O_2 y un par de puntos homólogos de las dos series proyectivas de base m ya mencionadas, se obtiene la figura simple del teorema, y como aquélla es constante, también lo será ésta.

(Instituto Nacional de Ciencias.—
Laboratorio y Seminario Matemático.)

CUÁDRICAS ANALAGMÁTICAS EN LA INVERSIÓN RESPECTO DE UN TETRAEDRO

POR

DON ROBERTO ARAUJO

DOCTOR EN CIENCIAS EXACTAS

(Sesión del 21 de Octubre de 1915.)

1. En las figuras inversas respecto de un tetraedro, consideradas como conjunto de puntos, los planos dobles de las involuciones fundamentales, cuando estos existen, son los únicos planos analagmáticos.

En cuanto á las superficies cónicas de segundo orden analagmáticas, se deduce de lo ya expuesto:

1.° Que si la inversión no tiene puntos dobles, como existen tres aristas de un triedro A del tetraedro fundamental, cuyas involuciones de planos tienen planos dobles, ó hay dos aristas opuestas del mismo, cuyas involuciones tienen planos dobles; existirán, pues, en el primer caso tres pares de haces de conos analagmáticos de vértice A y un par de haces de conos analagmáticos de vértices B, C y D; y en el segundo caso, hay cuatro pares de haces de conos analagmáticos, uno para cada vértice del tetraedro $ABCD$.

2.° Cuando la inversión tiene puntos dobles, entonces todas las involuciones de planos fundamentales tienen planos dobles, y cada uno de los vértices del tetraedro es vértice de tres pares de haces de conos de segundo orden analagmáticos; estando los puntos dobles de la inversión, cuatro en todos los conos analagmáticos de tres haces, cuyo vértice común es uno de los del tetraedro, y los otros cuatro son comunes á los que constituyen los otros tres haces del mismo vértice.

2. Para que una cuádrica sea analagmática ó inversa de sí misma, es preciso que esté circunscrita al tetraedro fundamental.

En efecto, supongamos que la cuádrica no pase por su vértice D

del tetraedro fundamental. Si cortamos la cuádrica por un plano p que pase por la arista AD; esta sección φ, que es una cónica, tiene por inversa la línea de intersección del plano p', conjugado del p en la involución de planos de arista AD con el cono inverso del que proyecta la cónica φ desde el vértice B; pero este cono es de tercero ó de cuarto orden, luego dicha línea inversa de la φ es de tercero ó de cuarto orden, y no puede, por tanto, la superficie inversa de esta cuádrica ser otra cuádrica.

Por otra parte, se demuestra muy fácilmente que la superficie inversa de una cuádrica circunscrita al tetraedro fundamental es otra cuádrica que también es circunscrita á dicho tetraedro.

3. La condición necesaria y suficiente para que existan cuádricas analagmáticas es que la inversión tenga puntos dobles reales.

En efecto; cortemos la cuádrica φ, que suponemos analagmática, por dos planos conjugados en la involución fundamental de la arista BC; las secciones son cónicas inversas, y los conos que las proyectan desde el vértice A del tetraedro, son también inversos. Estos conos tienen comunes dos generatrices reales AB y AC, y no pueden cortarse en otras dos reales ó ser tangentes á lo largo de una generatriz real, porque entonces estas cortarían á la cuádrica φ en más de dos puntos, el A y los dos en que encontrarían á las cónicas inversas mencionadas; luego se cortan según dos generatrices imaginarias conjugadas, que son inversas una de otra ó son dobles.

En el primer caso, como son dichas rectas imaginarias conjugadas comunes á las involuciones de rectas que resultan de cortar dos cualesquiera de planos, cuyas aristas son dos de las del triedro de vértice A, por el plano real que las contiene, se deduce que las involuciones fundamentales de las tres aristas del triedro A tienen planos dobles.

En el segundo caso, las involuciones de planos de aristas AB y AC cortan al plano determinado por dichas generatrices, que es siempre real, según dos involuciones que se confunden en una, por tener dos rayos dobles comunes, y á la recta de intersección de este plano con el ABC le corresponde como inversa la arista AD; pues en esta involución cada par de rectas conjugadas son inversas respecto del tetraedro $ABCD$; luego pasa el plano por la arista AD, siendo uno de los dos planos dobles de la involución fundamental de la misma.

Cortando la cuádrica por planos inversos que pasen por las aristas BD y CD, se obtienen, procediendo del mismo modo, conos inversos que se cortan según dos rectas imaginarias conjugadas, que son inversas ó dobles; y tanto en un caso como en otro, las involuciones de planos de aristas AC y AB tendrán planos dobles, así como hemos visto que los tenía la involución fundamental de arista AD; luego las involuciones de planos de las seis aristas del tetraedro fundamental tienen planos dobles, y la involución respecto del mismo, puntos dobles.

Queda demostrado con lo que acabamos de exponer, que la condición es necesaria; para demostrar que es suficiente, bastará investigar por medio de ella las condiciones que determinan una cuádrica analagmática, y si éstas sólo dependen de la existencia de los puntos dobles, es evidente que habrá cuádricas analagmáticas cuando la inversión los tenga.

Supongamos una cuádrica analagmática φ y cortémosla por uno de los planos dobles de la involución fundamental de arista BC; la sección es evidentemente analagmática respecto del tetraedro $ABCD$ y también respecto del triángulo BCM, sección del tetraedro por el plano doble de la cónica, siendo las involuciones de rectas de los vértices de este triángulo, secciones de las de planos, cuyas aristas son las del triedro de vértice A.

En este plano existen cuatro puntos dobles respecto del tetraedro fundamental $ABCD$, dos que pertenecen al tetraedro $KLJI$ y otros dos al tetraedro $EFGH$, ambos autopolares respecto del fundamental, estando cada dos pertenecientes al mismo tetraedro en línea recta con el vértice M del triángulo. Aquella cónica analagmática tiene que pasar por los puntos K y L ó por G y H, siendo los K, L, G y M los puntos dobles que están en el plano doble de la cónica.

Del mismo modo, el otro plano doble corta á la cuádrica φ, según una cónica analagmática respecto del tetraedro $ABCD$, y también respecto del triángulo BCN, sección de este tetraedro con aquel plano; y como los otros cuatro puntos dobles están situados en él, encontrándose cada dos $J-I$ y $E-F$ pertenecientes al mismo tetraedro autopolar respecto del fundamental en línea recta con el vértice N del triángulo BCN, esta cónica tiene que pasar, por ser analagmática respecto de este triángulo, por los puntos J é I, si pasa la cuádrica por los puntos dobles K y L, ó por los E y F, si pasa por los puntos dobles G y H; porque, en el primer caso, por ejemplo, los puntos dobles E y F están en línea recta con los A y K, y A y L, respectivamente, como armónicamente separados de los K y L por el vértice A y el plano BCD, y si pasara por éstos, las rectas AK y AL cortarían á la cuádrica en más de dos puntos, lo que es imposible.

Resulta, pues, que toda cuádrica analagmática está circunscrita al tetraedro $ABCD$ y pasa por los cuatro puntos dobles K, L, J é I, ó por los otros cuatro puntos dobles EFG y H, es decir, está circunscrita, además, al tetraedro $KLJI$ ó al tetraedro $EFGM$.

De aquí se deduce que toda cuádrica circunscrita al tetraedro fundamental, y á uno de estos dos tetraedros autopolares respecto de él (cumpliendo con estas dos condiciones todas las cuádricas que pasan por un vértice del tetraedro fundamental, y que tienen por tetraedro autopolar respecto de ellas, el otro por cuyos vértices no pasan), es analagmática; por contener dos cónicas analagmáticas situadas en los planos dobles de una cualquiera de las involuciones fundamentales y estar circunscrita al tetraedro fundamental.

4. Ya sabemos que todas las cuádricas que pasan por un punto A y tienen un tetraedro autopolar común $EFGH$ forman una red de cuádricas; pero todas ellas pasan por los vértices del tetraedro fundamental $ABCD$ y por los del otro tetraedro autopolar $KLJI$ respecto de éste; porque estos siete vértices están armónicamente asociados al vértice A respecto del tetraedro $EFGH$, que es autopolar respecto de todas estas cuádricas; luego éstas pasan por estos vértices y, por lo tanto, son analagmáticas.

Recíprocamente: Todas las cuádricas analagmáticas que están circunscritas á los tetraedros $ABCD$ y $KLJI$, por pasar por los puntos K y L tienen como tetraedro autopolar común el $EFGH$, respecto del cual, aquel grupo de puntos están armónicamente asociados, perteneciendo aquéllas á la red de cuádricas definidas por el punto A, por el que pasan, y por el tetraedro $EFGH$ autopolar respecto de todas ellas.

Del mismo modo, las cuádricas analagmáticas circunscritas á los tetraedros $ABCD$ y $EFGH$, pertenecen á la red de cuádricas que pasan por el punto A y respecto de las cuales el tetraedro $KLJI$ es autopolar común.

Las cuádricas analagmáticas forman dos redes de cuádricas, pasando todas las de una red por cuatro puntos dobles, vértices de un tetraedro autopolar respecto del tetraedro fundamental; y todas las de la otra red por los otros cuatro puntos dobles, vértices del otro tetraedro autopolar respecto del fundamental, siendo dos de estos tres armónicamente asociados al tercero.

Proposiciones correlativas con estas hay en la inversión respecto de un tetraedro, en el que cada arista es base de una involución de puntos en la que son conjugados los dos vértices situados en ella.

5. Es fácil ver que los planos polares de dos puntos inversos respecto del tetraedro fundamental, son planos inversos respecto de las involuciones de puntos, secciones de las de planos de las aristas, por las aristas opuestas; y, por lo tanto, la figura polar de una superficie analagmática será también analagmática, en la inversión deducida de la puntual, cortando sus involuciones de planos fundamentales por las aristas opuestas á sus bases. De aquí se desprende que si en la inversión puntual existen cuádricas analagmáticas, tendrá que haber radiaciones de planos de segundo orden analagmáticos en la inversión que pudiéramos llamar tangencial derivada de la puntual del modo ya mencionado, que son las radiaciones de planos de segundo orden polares de aquéllas respecto del tetraedro fundamental.

(Instituto Nacional de Ciencias. —
Laboratorio y Seminario Matemático.)

UN ÁBACO PARA EL CÁLCULO DE LA REFRACCIÓN

POR

D. ANGEL SALDAÑA

LICENCIADO EN CIENCIAS EXACTAS

(Sesión del 21 de Octubre de 1915.)

Comenzaremos dando una ligera idea de los ábacos en Z.

Si tenemos tres variables α, β, γ, enlazadas de la manera siguiente:

$$f(\alpha) = \varphi(\beta)\psi(\gamma)$$

y construímos en dos rectas paralelas m y n las escalas

$$x = lf(\alpha), \qquad x' = l'\varphi(\beta)$$

como para todo valor particular $\gamma = \gamma_n$, es $\psi(\gamma_n)$ un número K, y además

$$f(\alpha) = \frac{x}{l}, \qquad \varphi(\beta) = \frac{x'}{l'}$$

la expresión dada tomará la forma:

$$\frac{x}{l} = \frac{x'}{l'} \times K$$

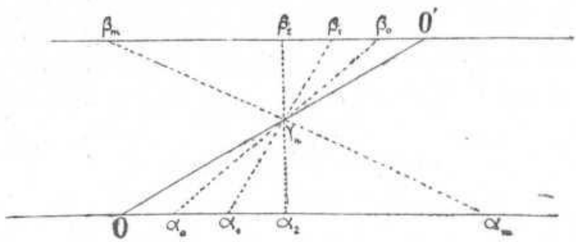
lo que nos dice que las dos series son perspectivas, ó sea que las rectas que unen los puntos $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots..$ con sus homólogos $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots..$ pasan por un punto, al cual le asignaremos el número γ_n; estos puntos están situados en la recta OO', puesto que los puntos O y O' son homólogos en todas las perspectividades correspondientes á cada valor de γ. Tenemos, pues, tres escalas: las dos anteriores, situadas en m, n, y la correspondiente á los valores de γ, situada en OO'; para calcular ésta, tomando como origen el punto O, en los triángulos $O\gamma_n\alpha_n$ y $O'\gamma_n\beta_n$, se tiene:

$$\frac{O\alpha_n}{O'\beta_n} = \frac{x}{x'} = \frac{O\gamma_n}{OO' - O\gamma_n};$$

$$O\gamma_n = \frac{OO' \,.\, x}{x + x'} = \frac{OO' \,.\, lf(\alpha)}{lf(\alpha) + l'\varphi(\beta)} = \frac{OO' \,.\, l\varphi(\beta)\psi(\gamma)}{l\varphi(\beta) \,.\, \psi(\gamma) + l'\varphi(\beta)} =$$

$$= \frac{OO' \,.\, \psi(\gamma)}{\psi(\gamma) + \dfrac{l'}{l}}.$$

Dados dos valores correspondientes á dos de estas variables, por ejemplo, $\alpha = \alpha_p$, $\beta = \beta_q$, fácilmente se halla el correspondiente á la



tercera γ; basta unir los puntos α_p y β_q por una recta, y ésta cortará á la tercera escala en un punto, el cual tendrá por cota el valor $\gamma = \gamma_h$, que junto con los α_p y β_q satisface á

$$f(\alpha_p) = \varphi(\beta_q)\psi(\gamma_h)$$

pues esto equivale á hallar el centro perspectivo de las series *m* y *n*, en las que son homólogos α_p y β_q.

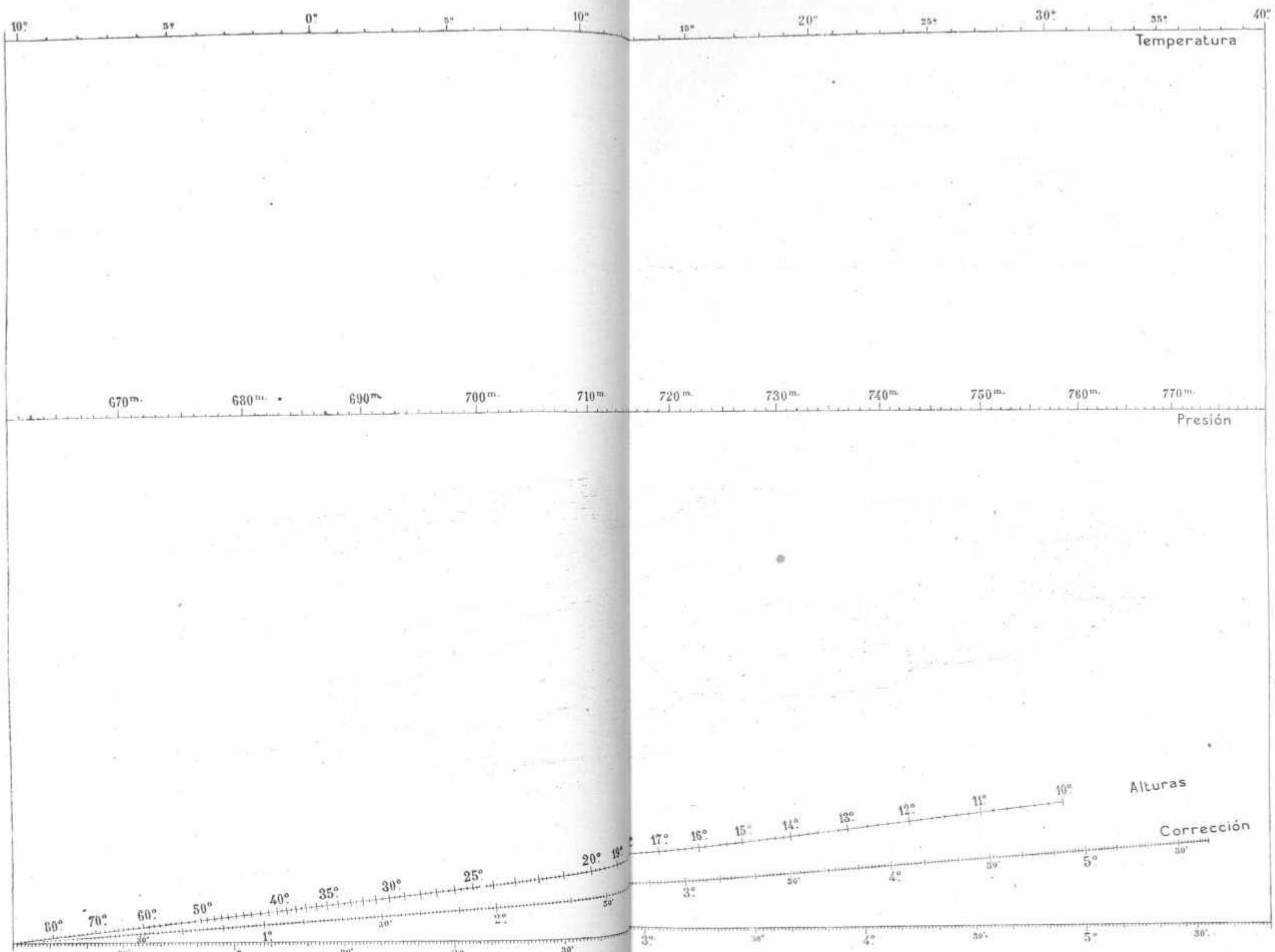
***

Como aplicación, hemos construído un ábaco para facilitar el cálculo de la refracción, de la manera siguiente:

Las fórmulas para hallar la refracción verdadera, es decir, corregida de temperatura y de presión, prescindiendo de la humedad del aire, toda vez que ésta apenas influye, son:

$$R' = R + RA\alpha \frac{1 + 0{,}00367}{1 + Kt}$$

$$R'' = R' + R'B\beta \frac{1 + 0{,}00367}{1 + Kt}$$


10° 5° 0° 5° 10° 15° 20° 25° 30° 35° 40°
Temperatura
670m. 680m. 690m. 700m. 710m. 720m. 730m. 740m. 750m. 760m. 770m.
Presión
80° 70° 60° 50° 40° 35° 30° 25° 20° 19° 17° 16° 15° 14° 13° 12° 11° 10°
Alturas
Corrección
1° 2° 3° 4° 5°

siendo R la refracción normal, R' la refracción corregida de temperatura y R'' la refracción verdadera; A y B son los siguientes factores:

$$A = -\frac{0{,}00383}{1 + 0{,}00367t}; \quad B = \frac{H}{760} - 1,$$

siendo H la altura barométrica.

Los factores

$$\alpha\frac{1 + 0.00367t}{1 + Kt}, \quad \beta\frac{1 + 0.00367t}{1 + Kt}$$

apenas difieren de la unidad para alturas superiores á 10°, luego las fórmulas [1] pueden escribirse así:

$$R' = R + R\,A = R(1 + A)$$
$$R'' = R' + R'B = R(1 + B).$$

Tanto una como otra son del tipo de las de los ábacos en Z. Con objeto de que la escala correspondiente á R' valga para los dos ábacos, las fórmulas que han servido para la construcción son:

$$R' = R(1 + A); \quad R''\frac{1}{1 + B} = R'.$$

La primera relación viene expresada por un ábaco cuyas escalas extremas son:

$$x = l\,.\,R' \quad x' = l_1(1 + A) \text{ (función de la temperatura)}$$

y la intermedia representa R, función de la altura. Conocida ésta y la temperatura, apoyando en los dos puntos correspondientes un hilo tirante ó el borde de una regla, obtenemos R' en la escala inferior. Este punto, unido con el que representa la escala barométrica en la escala media, nos da sobre la escala restante la corrección total.

Ejemplo:

Altura observada: 66° 32′4, $t = 12°\,6$, $H = 756^{mm}$, el primer ábaco nos da: $R' = 24''$, 88 y para la corrección verdadera obtendremos: $R'' = 24''$, 76.

De este modo, mediante una operación sencillísima, que no exige cálculo ninguno, se evita totalmente el uso de las tablas.

(Instituto Nacional de Ciencias.—
Laboratorio y Seminario Matemático.)

SUSTITUCIONES EN EL CUERPO ALGÉBRICO NORMAL DE GALOIS

POR

D. SIXTO CÁMARA TECEDOR

PROFESOR AUXILIAR EN LA FACULTAD DE CIENCIAS DE MADRID

(Sesión del 21 de Octubre de 1915.)

1. Nos proponemos en estas páginas exponer, en forma hasta cierto punto intuitiva, las principales propiedades del cuerpo algébrico normal de Galois, deducidas de las sustituciones que automáticamente se realizan entre los elementos de este cuerpo algébrico cuando se sustituye un elemento primitivo por otro.

Partiendo de la conocida propiedad de expresarse racionalmente los elementos primitivos en función de uno de ellos y de la propiedad fundamental relativa á la divisibilidad de las funciones en Ω por una irreducible dada en este mismo cuerpo, deducimos el grupo de sustituciones entre elementos primitivos y el carácter abeliano de este grupo; el estudio de los ciclos, con elementos comunes ó no, y de las sustituciones cíclicas ó no cíclicas, conduce, naturalmente, á los conjuntos de elementos imprimitivos, y podría servir de base para una clasificación de los citados grupos; las sustituciones entre elementos imprimitivos y sistemas de imprimitividad aparecen automáticamente, llegándose á la reducción de la resolvente de Galois por adjunción de un cuerpo $\Omega(\theta)$; y, finalmente, como aplicación de lo anterior, viene la descomposición de las raíces de una ecuación en sistemas imprimitivos de transitividad y el grupo de Galois de la ecuación algébrica.

Este es, en resumen, el contenido del presente trabajo, hecho en el Laboratorio y Seminario Matemático dirigido por nuestro querido amigo D. Julio Rey Pastor, y que presentamos al Congreso de Valladolid sólo con el deseo de aportar un grano de arena al progreso científico de nuestra Patria.

Muy conocida es entre los congresistas la teoría de Galois para encontrar propiedades desconocidas en este trabajo. No pretendemos haber descubierto nada nuevo. Nuestra labor se reduce á tomar un punto de vista de carácter hasta cierto punto intuitivo, repetimos, y de dar cierto aspecto de juego matemático con el empleo de cuadros y gráficos al estudio de estas bellas y curiosísimas propiedades de la teoría de las ecuaciones algébricas que inmortalizaron el nombre de Galois.

Supone lo expuesto á continuación el conocimiento de la teoría de los grupos de sustituciones discretas y las primeras nociones de cuerpos algébricos. No obstante ser éstas muy conocidas para la generalidad de los lectores, damos á continuación las definiciones principales para los no iniciados, extractadas del Álgebra de Weber.

2. Definiciones.—Cuando un conjunto de números forma un sistema completo cerrado tal que ejecutadas sobre números cualesquiera del sistema, las cuatro operaciones [(+) (—) (.) (:) (divisor no nulo)], los números resultantes de estas operaciones forman parte del sistema, se dice que el conjunto constituye un *cuerpo de números* Ω.

Los principales cuerpos de números, son: El de los números racionales, el de los números reales y el de los números complejos.

Es claro que dado un cuerpo Ω, se forma otro más amplio por adjunción de un nuevo número α no contenido en Ω, y el cuerpo resultante es $\Omega(\alpha)$.

Si los coeficientes de una función algébrica entera

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

son elementos (números) del cuerpo Ω, se dice que la función $f(x)$ está *dada* en Ω ó está *contenida* en Ω.

Y si esta función $f(x)$ no puede descomponerse en factores de grado inferior á n contenidos en Ω, es *irreducible* en este cuerpo; por el contrario, es *reducible* en Ω cuando se descompone en factores dados en dicho cuerpo de grado inferior á n.

El teorema fundamental en la teoría de Galois y en que apoyamos las demostraciones contenidas en el presente trabajo es el siguiente:

«*Si los coeficientes de una función irreducible* $\mathrm{f(x)}$ *y de otra* $\mathrm{F(x)}$ *(ambas polinomios enteros) pertenecen á un mismo cuerpo* Ω, $\mathrm{f(x)}$ *y* $\mathrm{F(x)}$ *no pueden tener divisor común á menos que* $\mathrm{F(x)}$ *sea divisible por* $\mathrm{f(x)}$; ó de otro modo: *Si la función* $\mathrm{F(x)}$ *admite una raíz de* $\mathrm{f(x)}$, *y* $\mathrm{f(x)}$ *es irreducible en* Ω, *las admite todas.*

En efecto, el m. c. d. de $F(x)$ y $f(x)$ se determina por operaciones $[(+), (-), (\cdot), (:)]$; está, pues, contenido en Ω. Por otra parte, $f(x)$ no puede contener otro divisor perteneciente á Ω que la misma $f(x)$ ó una constante perteneciente á Ω; luego este m. c. d. no es otro que la función $f(x)$ misma ó una constante.»

Es consecuencia de este teorema el no poder tener una función irreducible $f(x)$ factores múltiples, porque en este caso tendría un m. c. d. con su derivada, y por este hecho $f(x)$ sería un divisor de su derivada $f'(x)$.

Si $F(x) = 0$ tiene las raíces $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{m-1}$, los cuerpos *conjugados* del $\Omega(\alpha)$ son $\Omega(\alpha_1), \Omega(\alpha_2), \ldots\ldots \Omega(\alpha_{m-1})$ y el cuerpo de Galois es $\Omega(\alpha\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_{m-1})$.

Un cuerpo algébrico es *normal*, ó de *Galois*, cuando coincide con todos sus conjugados.

Una ecuación dada en Ω es *normal* si cumple las dos condiciones siguientes:

1.ª *Es irreducible;*

2.ª *Todas sus raíces se expresan racionalmente en* Ω *en función de una de ellas.*

Sea, pues,

$$g(t) = (t - \rho)(t - \rho_1)(t - \rho_2) \ldots\ldots (t - \rho_{\mu-1})$$

una ecuación normal.

Por definición tendremos

$$[\mathrm{I}] \qquad \rho_1 = \theta_1(\rho), \quad \rho_2 = \theta_2(\rho), \quad \rho_3 = \theta_3(\rho), \quad \ldots\ldots \; \rho_{\mu-1} = \theta_{\mu-1}(\rho),$$

siendo los operadores $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots\ldots \theta_{\mu-1}$ símbolos de funciones racionales.

En este caso el cuerpo $\Omega(\rho)$ es normal, pues coincide con

$$\Omega(\theta_1\rho), \quad \Omega(\theta_2\rho), \quad \ldots\ldots \; \Omega(\theta_{\mu-1}\rho)$$

y los elementos $\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots\ldots \rho_{\mu-1}$ son *elementos primitivos* de este cuerpo.

Dada una función racional φ en Ω define un sistema de *elementos conjugados*

$$\varphi(\rho), \quad \varphi(\rho_1), \quad \varphi(\rho_2), \quad \ldots\ldots \; \varphi(\rho_{\mu-1}).$$

Si todos estos son distintos constituyen un conjunto de elementos primitivos de $\Omega(\rho)$; si no son distintos se llaman *imprimitivos.*

3. Propiedad de los elementos primitivos.—Formemos el siguiente cuadro con los elementos primitivos ρ:

$$[\mathrm{II}] \left\{ \begin{array}{llllllll}
\rho & \rho_1 = \theta_1\rho, & \rho_2 = \theta_2\rho, & \ldots & \rho_i = \theta_i\rho, & \ldots & \rho_{\mu-1} = \theta_{\mu-1}\rho \\
\rho_1 & \theta_1\rho_1 & \theta_2\rho_1 & \ldots & \theta_i\rho_1 & \ldots & \theta_{\mu-1}\rho_1 \\
\rho_2 & \theta_1\rho_2 & \theta_2\rho_2 & \ldots & \theta_i\rho_2 & \ldots & \theta_{\mu-1}\rho_2 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\
\rho_h & \theta_1\rho_h & \theta_2\rho_h & \ldots & \theta_i\rho_h & \ldots & \theta_{\mu-1}\rho_h \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\
\rho_{\mu-1} & \theta_1\rho_{\mu-1} & \theta_2\rho_{\mu-1} & \ldots & \theta_i\rho_{\mu-1} & \ldots & \theta_{\mu-1}\rho_{\mu-1}
\end{array} \right.$$

Los elementos de una fila son todos distintos y coinciden con los de la primera escritos en otro orden. Pues uno de la primera, el $\theta_i\rho = \rho_i$ satisface la ecuación $g(t) = 0$; luego es $g(\theta_i\rho) = 0$; de donde $g(\theta_i\rho_h) = 0$ y $\theta_i\rho_h$ será, por tanto, uno de los elementos conjugados $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \ldots\ldots \rho_{\mu-1}$.

Son todos distintos, pues si $\theta_2\rho_h = \theta_i\rho_h$, la ecuación $\theta_2 t = \theta_i t$ se satisface por $\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots\ldots \rho_{\mu-1}$; luego $\theta_2\rho = \theta_i\rho$, y esto no es cierto, por hipótesis.

Dos elementos de una columna son también distintos. Si nos fijamos, por ejemplo, en la columna θ_2 y observamos que en la fila ρ_2 existe un elemento igual á ρ, si este es $\rho = \theta_h \rho_2$ y sustituímos en lugar de ρ_2, $\theta_2 \rho$ tendremos $\rho = \theta_h \theta_2 \rho$ y por la irreductibilidad de $g(t) = 0$, será análogamente

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = \theta_h \theta_2 \rho_1 \\ \rho_2 = \theta_h \theta_2 \rho_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \rho_{-1\mu} = \theta_h \theta_2 \rho_{\mu-1} \end{array} \right\}.$$

Dedúcese de estas fórmulas que si dos elementos de la columna θ_2 fueran iguales, dos elementos de los $\rho, \rho_1, \rho_2, \dots\dots \rho_{\mu-1}$ también lo serían.

4. Sustituciones entre elementos primitivos definidas con líneas del cuadro [II].—I) *La sustitución que tiene por numerador una fila* ρ_h *y por denominador la primera fila, es idéntica á la que tiene por numerador otra fila cualquiera* ρ_i *y por denominador aquella en que al elemento* ρ_h *contenido en la fila* ρ_i *corresponde el* ρ.

En efecto; al sustituir en la primera sustitución ρ por ρ_h un elemento cualquiera ρ_i de la primera fila se cambia por otro ρ_j de la fila ρ_h y de la columna θ_i, es decir, que $\rho_i = \theta_i \rho$, $\rho_j = \theta_i \rho_h$.

Pero si nos fijamos ahora en la fila ρ_i y en ella en el elemento $\rho = \theta' \rho_i$ al poner en lugar de ρ_i, ρ_j obtendremos $\rho_h = \theta' \rho_j$; pues de la fórmula anterior deducimos $\rho = \theta' \theta_i \rho$, y, por lo tanto, $\rho_h = \theta' \theta_i \rho_h$, de donde $\rho_h = \theta' \rho_j$.

La primera sustitución puede escribirse

$$\begin{pmatrix} \rho_h & \theta_1 \rho_h & \theta_2 \rho_h & \theta_3 \rho_h & \dots\dots & \theta_i \rho_h = \rho_j & \dots\dots & \theta_k \rho_h & \dots\dots \\ \rho & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \dots\dots & \rho_i & \dots\dots & \rho_k & \dots\dots \end{pmatrix}$$

y la segunda

$$\begin{pmatrix} \rho_j & \theta_1 \rho_j & \theta_2 \rho_j & \dots\dots & \theta'' \rho_j & \dots\dots & \theta' \rho_j = \rho_h & \dots\dots \\ \rho_i & \theta_1 \rho_i & \theta_2 \rho_i & \dots\dots & \theta'' \rho_i & \dots\dots & \theta' \rho_i = \rho & \dots\dots \end{pmatrix}$$

Si en ambos denominadores $\rho_k = \theta'' \rho_i$, $\theta_k \rho_h$ deberá ser igual á $\theta'' \rho_j$. Y, en efecto, $\theta_k \rho = \theta'' \theta_i \rho$; luego $\theta_k \rho_h = \theta'' \theta_i \rho_h$, y como $\theta_1 \rho_h = \theta_j$, deducimos que $\theta_k \rho_h = \theta'' \rho_j$ y las dos sustituciones son idénticas.

II) *La sustitución que tiene por denominador la primera columna y por numerador la columna* θ_h *es idéntica á la que tiene por denominador otra columna cualquiera, la* i, *por ejemplo, y por numerador la columna que pasa por el elemento* ρ_h *contenido en la misma fila que el* ρ.

Sean las dos sustituciones indicadas

$$\begin{pmatrix} \theta_h\rho & \theta_h\rho_1 & \theta_h\rho_2 & \ldots\ldots & \theta_h\rho_s = \rho_l & \ldots\ldots & \theta_h\rho_i & \ldots\ldots \\ \rho & \rho_1 & \rho_2 & \ldots\ldots & \rho_s & \ldots\ldots & \rho_i & \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} \theta_j\rho & \theta_j\rho_1 & \theta_j\rho_2 & \ldots\ldots & \theta_j\rho_t & \ldots\ldots & \theta_j\rho_k & \ldots\ldots \\ \theta_i\rho & \theta_i\rho_1 & \theta_i\rho_2 & \ldots\ldots & \theta_i\rho_t & \ldots\ldots & \theta_i\rho_k & \ldots\ldots \end{pmatrix}.$$

Supongamos $\theta_h\rho_i = \rho_j$, ó sea $\theta_h\theta_i\rho = \theta_j\rho$; entonces $\theta_h\theta_i\rho_k = \theta_j\rho_k$, y si $\theta_i\rho_k = \rho$, como $\theta_h\rho = \rho_h$, será $\theta_j\rho_k = \rho_h$.

Si en la primera se cambia ρ_s en $\rho_l = \theta_h\rho_s$ y en la segunda $\rho_s = \theta_i\rho_t$, tendremos $\theta_h\theta_i\rho_t = \theta_j\rho_t$, como acabamos de ver, ó sea $\theta_h\rho_s = \theta_j\rho_t$; lo cual nos dice que también son idénticas estas dos sustituciones.

III) *Las sustituciones formadas por dos* $\left\{ \begin{smallmatrix} filas \\ columnas \end{smallmatrix} \right\}$ *son* μ *distintas y forman un grupo;* pues el producto de dos conduce á una tercera formada también por dos $\left\{ \begin{smallmatrix} filas \\ columnas \end{smallmatrix} \right\}$. En efecto; supongamos que la S^i cambia ρ por ρ_i y la S_h, ρ_i por ρ_j. La S_iS_h cambiará ρ por ρ_j, y como dado el elemento que sustituye á otro está dada ya la sustitución de las dos filas que tienen en la misma columna estos dos elementos, la S_iS_h es otra sustitución de dos filas. Lo mismo diríamos de las columnas.

El carácter distintivo de este grupo es el siguiente: **dado un elemento que sigue á otro está dada la sustitución correspondiente de filas y la de columnas,** aunque hasta ahora no es evidente que las de filas sean idénticas á las de columnas.

IV) *El grupo anterior es transitivo;* porque dado un elemento cualquiera existe una sustitución que lo cambia por otro de los μ.

V) *En una misma sustitución no puede haber dos ciclos de distinto número de elementos.* Porque si en S hay dos ciclos con μ_1 y μ_2 elementos, si es $\mu_1 < \mu_2 < \mu$, el grupo debe contener la potencia S^{μ_2} y en el conjunto $S, S^2, S^3, \ldots\ldots S^{\mu_1}, S^{\mu_1+1}, \ldots\ldots S^{\mu_2}$, los elementos del ciclo μ_1 se permutarán entre sí; luego existirán dos elementos iguales en una misma columna del cuadro.

VI) *Las sustituciones de filas son idénticas á las de columnas y el grupo es abeliano.*—Sea

$$S = (\rho\rho_h\rho_p\rho_q\rho_r\rho_n\rho_m \ldots\ldots)(\rho_i\rho_j\rho_k\rho_t\rho_s \ldots\ldots)(\ldots\ldots) \ldots\ldots$$

una de las sustituciones de filas descompuesta en ciclos. Bastará demostrar que la sustitución de columnas que cambia ρ en ρ_n consta de los mismos ciclos que la S. Formemos, al efecto, el siguiente cuadro:

$$[\mathrm{III}]\left\{\begin{array}{l}
\rho\ \ \rho_1\rho_2\cdots\rho_r\cdot\rho_i\cdot\rho_t\cdots\rho_p\cdot\rho_h\cdots\rho_q\cdots\rho_j\cdots\rho_m\cdot\rho_n\cdots\rho_k\cdot\rho_s\cdots \\
\rho_1 \qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot \\
\rho_2 \qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \qquad\ \ \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \qquad\ \ \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot \\
\rho_r\cdots\quad\cdot\rho_s\cdots\rho_m\cdot\rho_n\cdots\quad\cdots\quad\cdot\quad\cdots \\
\cdot \qquad\ \ \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot \\
\rho_i \qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \qquad\ \ \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot \\
\rho_t \qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \qquad\ \ \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \qquad\ \ \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \qquad\ \ \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot \\
\rho_p\cdots\rho_m\cdot\rho_k\cdots\rho_r\cdot\rho_q\cdots\rho_n\cdots\rho_t\cdots\quad\cdot\quad\cdots\rho_s\cdots \\
\cdot \qquad\ \ \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot \\
\rho_h\cdots\rho_n\cdot\rho_j\cdot\rho_s\cdots\rho_q\cdot\rho_p\cdots\rho_r\cdots\rho_k\cdots\quad\cdot\rho_m\cdots\rho_t\cdots \\
\cdot \qquad\ \ \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \qquad\ \ \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \qquad\ \ \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \qquad\ \ \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot \\
\rho_q\cdots\quad\cdot\rho_t\cdots\rho_u\cdot\rho_r\cdots\rho_m\cdots\rho_s\cdots\quad\cdot\quad\cdots \\
\cdot \qquad\ \ \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \qquad\ \ \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot \\
\rho_j \qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \qquad\ \ \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \qquad\ \ \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot \\
\rho_m\cdots\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\cdots \\
\cdot \qquad\ \ \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot \\
\rho_n\cdots\cdots\quad\cdot\rho_m\cdots\quad\cdots\quad\cdots\cdots \\
\cdot \qquad\ \ \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \qquad\ \ \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \qquad\ \ \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot \\
\rho_k \qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \qquad\ \ \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot \\
\rho_s \qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \rho_t \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \qquad\ \ \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \qquad\ \ \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \qquad\quad \cdot \quad \cdot
\end{array}\right.$$

Se obtienen fácilmente las filas ρ_h, ρ_p, ρ_q, ρ_r ..... por la propiedad característica, ya señalada, de existir una sola sustitución en el grupo de filas que cambia un cierto elemento ρ_h en otro ρ_p, por ejemplo. Así, escrita la fila h, de ella puede deducirse la fila p y de ésta la q, etc., todo lo cual no es otra cosa que formar las distintas potencias de la sustitución S y escribir los numeradores en la fila correspondiente. Ahora bien; es evidente en el cuadro formado por los puntos intersección de las líneas y columnas punteadas encabezadas con los elementos del ciclo ($\rho\rho_h\rho_p\rho_q$ .....), que la fila ρ_h y la columna ρ_h son idénticas. En efecto, las filas primera y h son:

1.ª $\rho\ \rho_h\ \rho_p\ \rho_q\ \rho_r\ \rho_n\ \rho_m \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$

h.ª $\rho_h\ \rho_p\ \rho_q\ \rho_r\ \rho_n\ \rho_m \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$

La primera columna es

$$\rho\ \rho_h\ \rho_p\ \rho_q\ \rho_r\ \rho_n\ \rho_m \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

y la columna h se forma con los siguientes elementos: 1.°, el ρ_h, al que debe seguir en la fila h el ρ_p; á éste en la fila p el ρ_q, á este en la q el ρ_r, etcétera. Es, pues, evidente que la sustitución que ponga en lugar de ρ, ρ_q (la S^3) pondrá también en lugar de ρ_h, ρ_r, y el elemento que esté en la fila q y columna h (el ρ_r) también está (por efecto de la sustitución S) en la columna q y fila h. Si en lugar de la sustitución S partimos de una de sus potencias, obtendremos el mismo resultado para una fila y una columna encabezados con el mismo elemento ρ_q. La fila h y columna h son, pues, iguales en el cuadro punteado, luego la sustitución de filas que cambia ρ en ρ_h, es decir, la primera fila por la fila h, tiene común el ciclo ($\rho\rho_h\rho_p\rho_q\rho_r\rho_n\rho_m$ .....) con la sustitución de columnas que cambia la primera por la columna h.

Pero es indiferente el que las filas estén en el orden natural ó en otro orden cualquiera, por lo cual podremos ordenarlas de modo que los elementos del segundo ciclo ($\rho_i\rho_j\rho_k\rho_t\rho_s$ . . .) aparezcan en la columna ρ_i en el orden ρ_i, ρ_t, ρ_j, ρ_k, ρ_s . . . en que están en la primera fila. Y en el cuadro

$$
[\mathrm{IV}] \qquad \left|\begin{array}{llllll}
\rho_i \cdot\cdot & \rho_t \cdots\cdots\cdots & \rho_j \cdots\cdots & \rho_k \cdot\cdot & \rho_s \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\rho_t \cdots & \cdots\cdots\cdots & \rho_s \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\rho_j \cdot\cdot & \rho_s \cdots\cdots\cdots & \rho_k \cdots\cdots & \rho_t \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\rho_k \cdots & \cdots\cdots\cdots & \rho_t \cdots\cdots & \rho_s \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\rho_s & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}\right.
$$

por la misma razón dada, la columna ρ_j debe ser igual á la fila ρ_j, y como esta alteración de filas no ha producido cambio alguno en las sustituciones de columnas, dedúcese de aquí que la sustitución de filas que cambia ρ_i en ρ_j tiene común con la sustitución de columnas que cambia ρ_i en ρ_j el segundo ciclo $(\rho_i \rho_j \rho_k \rho_r \,.....)$; otro tanto podríamos repetir para los demás ciclos; luego las sustituciones de filas son idénticas á las de columnas.

Según el teorema anterior podremos escribir

$$
\begin{aligned}
S &= (\rho\, \rho_h\, \rho_p\, \rho_q \,.....)(\rho_i\, \rho_j\, \rho_k\, \rho_t\, \rho_s \,.....)(.....) \,..... \\
[\mathrm{V}] \qquad &= \begin{pmatrix} \theta\rho_h & \theta_1\rho_h & ..... & \theta_r\rho_h & ..... & \theta_i\rho_h & ..... & \theta_t\rho_h & ..... & \theta_p\rho_h & ..... \\ \rho & \rho_1 & ..... & \rho_r & ..... & \rho_i & ..... & \rho_t & ..... & \rho_p & ..... \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \theta_h\rho & \theta_h\rho_1 & ..... & \theta_h\rho_r & ..... & \theta_h\rho_i & ..... & \theta_h\rho_t & ..... & \theta_h\rho_r & ..... \\ \rho & \rho_1 & ..... & \rho_r & ..... & \rho_i & ..... & \rho_t & ..... & \rho_r & ..... \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

de donde

$$
\theta_i\rho_h = \theta_h\rho_i \quad \text{ó} \quad \theta_i\theta_h = \theta_h\theta_i \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, 3 \,.....\, \mu - 1 \\ h = 1, 2, 3 \,.....\, \mu - 1 \end{array} \right\}
$$

es decir, *que las operaciones* θ *son permutables*, ó en otros términos, *las sustituciones del grupo* Σ *son permutables y el grupo es abeliano.*

VII) *Toda sustitución del grupo Σ sólo puede cambiar entre sí elementos de un mismo ciclo ó permutar ciclos entre sí.*—Formemos, en efecto, con los ciclos de S un rectángulo

$$[VI] \qquad \left\{ \begin{array}{llllllll} \rho & \rho_h & \rho_p & \rho_q & \rho_r & \rho_m & \rho_n & \dots \\ \rho' & \rho'_h & \rho'_p & . & . & . & . & \dots \\ \rho_i & \rho_j & \rho_k & \rho_t & \rho_s & . & . & \dots \\ . & . & . & . & . & . & . & \dots \\ . & . & . & . & . & . & . & \dots \end{array} \right.$$

Si la sustitución dada es una potencia de la S sólo produce una alteración entre los elementos de una misma fila del cuadro anterior, ó, lo que es lo mismo, de un ciclo. Pero si es otra sustitución distinta de ésta y nos cambia un elemento ρ por el ρ_k, por ejemplo, cambiará toda la columna ρ del cuadro [III] con la ρ_k, y como en las filas ρ, ρ_h, ρ_p, ρ_q, ρ_r, ρ_n, ρ_m, ... y columna ρ_k están todos los elementos del segundo ciclo ρ_k, ρ_i, ρ_j, ρ_t, ρ_s ....., de aquí que los elementos que sustituyen á los del primer ciclo son todos los de segundo ciclo.

Además, como al sustituir ρ por ρ_h se cambia ρ_k por ρ_t en filas y columnas

$$\begin{array}{llll} \rho \;\dots & \rho_k \dots & \rho_h \dots & \rho_t \dots \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \rho_k \dots & \dots & \rho_t \dots & \dots \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \rho_h \dots & \rho_t \dots & \dots & \dots \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{array}$$

resulta también que al cambiarse ρ por ρ_k se cambia ρ_h por ρ_t; luego el ciclo $(\rho\rho_h\rho_p \,.....)$ se sustituye por el $(\rho_k\rho_t \,.....\, \rho_i\rho_j)$.

5. Sustituciones distintas S y S_1 compuestas de ciclos con elementos comunes.—Al grupo á que pertenece la sustitución

$$S = (\rho\ \rho_h\ \rho_p\ \rho_q \,.....)(\rho_i\ \rho_j\ \rho_k \,.....)(\rho_r\ \rho_s\ \rho_t \,.....)(\rho_x\ \rho_y \,.....) \,.....$$

también pertenecerán los del subgrupo

$$\sigma = (S, S^2, S^3, S_1^4 \ldots\ldots S^{\mu_1 - 1}),$$

si μ_1 es el número de elementos de cada ciclo de S.

Suponiendo $\mu_1 = \lambda r$, los ciclos de S^λ contendrán r elementos, puesto que existen λ grupos de r elementos cada uno en cada ciclo de S.

Sea

$$S_1 = (\rho\, \rho'_h\, \rho'_p\, \rho'_q \ldots\ldots)(\rho'_i\, \rho'_j \ldots\ldots)(\ldots\ldots)$$

una nueva sustitución del grupo Σ distinta de las del subgrupo σ, y supongamos que en un ciclo de S_1 existen dos ó más elementos que figuren en uno mismo de los ciclos de S. En esta hipótesis:

Los elementos comunes á un ciclo de S *y otro de* S_1 *deben estar separados entre sí, en el ciclo que los contenga de* S *(ó de* S_1*), por un mismo número de elementos.*

En otros términos: la estructura de los ciclos de S y de S_1 debe ser como se indica en el siguiente esquema, en el que los puntos son elementos no comunes y los circulitos elementos comunes.

Ciclos de S (......... o .... o .... o .... o .... o)
Ciclos de S_1 (..... o ..... o ..... o ..... o ..... o).

Esto, que es una consecuencia del teorema VII, puede demostrarse del modo siguiente: Si no estuviesen equidistantes y tomásemos la potencia de S, que hiciera suceder los dos más próximos de los comunes, tendríamos una sustitución que no podría ser igual á ninguna potencia de S_1 por contener en sus ciclos elementos que no pueden figurar en un mismo ciclo de las potencias de S_1. Ahora bien; entre las potencias de S_1 habrá una que haga suceder los dos elementos antedichos; luego tendríamos dos sustituciones distintas que harían suceder á un mismo elemento otro, el mismo en las dos, y esto no es posible.

Una cierta potencia de S, S^u, que haga suceder dos elementos, de los comunes, de estos ciclos, será igual á otra potencia de S_1, S_1^v, que haga suceder estos dos mismos elementos, y en particular la potencia de S que haga suceder dos elementos sucesivos, de los comunes, tendrá sus ciclos formados por los elementos comunes, y será igual á la potencia de S_1 que también haga suceder dos elementos sucesivos, pues ambas potencias de S y S_1 sólo tendrán en sus ciclos todos los elementos comunes.

El número μ_1 de elementos de los ciclos de S y el λ_1 de los de S_1 no pueden ser primos entre sí ya que han de existir potencias $S^u = S_1^v \mp 1$, cuyos ciclos deben ser iguales, y el número de sus elementos divisor de λ_1 y μ_1. Cuando λ_1 y μ_1 son primos entre sí no puede haber elementos comunes.

Si t es el número de elementos comunes á un ciclo de S y otro de S_1, los λ_1 elementos de cada ciclo de S_1 se distribuyen en α grupos (de t elementos de un mismo ciclo de S en cada grupo), correspondientes á otros α ciclos distintos de S_1 y será $\lambda_1 = t\alpha$; análogamente, los μ_1 elementos de un ciclo de S en β grupos, tales que $\mu_1 = \beta t$. La distribución en un mismo ciclo, es como se indica en este esquema:

Ciclos de S (. ∘ o O × . ∘ o O × . ∘ o O × . ∘ o O ×)
Ciclos de S_1 (**1** + ı **o1** + ı **o1** + ı **o1** + ı o).

En el subgrupo $\sigma = (S, S^2, S^3, \ldots\ldots S^{\mu_1 - 1})$ hay t sustituciones que coinciden con otra, t del $\sigma_1 = (S_1, S_1^2, S_1^3 \ldots\ldots S_1^{\lambda_1 - 1})$. Son éstas las que hacen seguir á uno de los t elementos comunes, cada uno de ellos sucesivamente.

6. Producto de dos sustituciones S y S_1.—Escribamos los elementos ρ en filas y columnas, de modo que en la primera fila esté el ciclo de S que empieza por ρ; en la segunda fila, el ciclo que contiene ρ'_h, escribiéndolo de modo que esté ρ'_h en primer lugar; en la tercera fila el que contiene el ρ'_p, poniendo éste en primer lugar, etc.

$$\lambda_1 \left\{ \begin{array}{lllll} \multicolumn{5}{c}{\overbrace{\rho \quad \rho_h \quad \rho_p \quad \rho_q \quad \cdots}^{\mu_1}} \\ \rho'_h \cdot & \cdot & \cdot & & \cdots \\ \rho'_p \cdot & \cdot & \cdot & & \cdots \\ \rho'_q \cdot & \cdot & \cdot & & \cdots \end{array} \right.$$

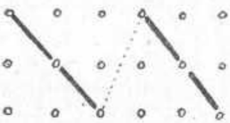
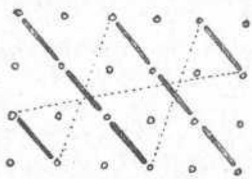
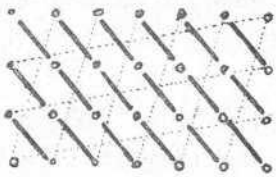
Las filas son ciclos de la sustitución S y las columnas lo son de la S_1 por la propiedad conocida.

Si en los elementos del ciclo $(\rho\, \rho'_h \rho'_p \rho'_q \ldots\ldots)$ (primera columna) hay, además del ρ, otro ú otros del ciclo $(\rho \rho_h \rho_p \rho_q \ldots\ldots)$ (primera fila) en número $(t - 1)$, el primer ciclo de S estará repetido en t filas, y el primer ciclo de S_1 lo estará, á su vez, en otras t columnas.

Si en las filas escritas no estuviesen todos los ciclos de S, existirá á la derecha del rectángulo anterior otro rectángulo semejante, y á la derecha de éste, otro y así sucesivamente hasta agotar todos los ciclos de S y todos los de S_1.

Las dos sustituciones S y S_1 estarán escritas t veces.

Para formar el producto S_1S ó el SS_1 observemos que, dado un elemento de S (en una fila) ó de S_1 (en una columna), le sigue otro elemento de la misma $\left\{\begin{smallmatrix}\text{fila}\\ \text{columna}\end{smallmatrix}\right\}$ y á éste, en la $\left\{\begin{smallmatrix}\text{columna}\\ \text{fila}\end{smallmatrix}\right\}$ correspondiente, uno en la sustitución $\left\{\begin{smallmatrix}S_1\\ S\end{smallmatrix}\right\}$; así que, el elemento que sigue á otro en el producto S_1S es el de la diagonal (un puesto á la derecha y abajo); y el que le sigue en el producto SS_1 es el de la misma diagonal (un puesto abajo y á la derecha). Según esto, la obtención de los ciclos de S_1S ó de SS_1 (que son iguales) es muy clara, como se indica en los siguientes gráficos.

De la simple inspección de estos gráficos se deduce que, si los ciclos de S son de μ_1 elementos, y los de S_1 de λ_1, y μ_1 es un múltiplo de λ_1 (gráfico 1.°), $\mu_1 = \lambda_1 r$; el rectángulo se descompone en r cuadrados de λ_1 elementos por cada lado; luego partiendo del vértice superior izquierdo se llegará al vértice inferior derecho, tomando las r diagonales, y el ciclo obtenido para el producto tendrá por elementos los de estas r diagonales (gráfico 1.°); es decir, $\lambda_1 r = \mu_1$ elementos.

En general, *el número de elementos de los ciclos de* SS_1 *es el m. c. m. de los números* μ_1 *y* λ_1, puesto que si δ es el m. c. d. de estos dos números (2.° gráfico) $\mu_1 = \delta\mu'_2$ y $\lambda_1 = \delta\lambda'_2$. Suponiendo μ_1 no divisible por λ_1 se tiene

$$\lambda'_2\mu_1 = \lambda'_2\delta\mu'_2 = \mu'_2\lambda_1.$$

Repitiendo á la derecha del rectángulo construído otros λ'_2 rectángulos análogos, tendremos un total de μ'_2 cuadrados con λ_1 elementos por lado; el ciclo obtenido constará de μ'_2 diagonales con λ_1 elementos en cada una, ó sea $\lambda_1\mu'_2$ elementos en total, es decir, el m .c. m. de λ_1 y μ_1.

Si estos mismos números son primos entre sí (gráfico 3.°), el número de elementos de cada ciclo de SS_1 es igual á su producto.

EJEMPLOS.—1.° Sea

$$S = (1\ 5\ 4\ 3\ 9\ 13)(15\ 18\ 17\ 16\ 2\ 6)(11\ 10\ 8\ 12\ 14\ 7).$$

Si el primer ciclo de la S_1 es $(1\ 15\ 11)$ se deducirán inmediatamente los otros por lo dicho en párrafos anteriores. Escribiendo la S por filas y la S_1 por columnas, será:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 5 & 4 & 3 & 9 & 13 \\ 15 & 18 & 17 & 16 & 2 & 6 \\ 11 & 10 & 8 & 12 & 14 & 7 \end{array}$$

El m. c. m. de los números de elementos de cada fila (ciclos de S) y del número de elementos de cada columna (ciclos de S_1), es 6 (*).

2.° Sea

$$S = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)(8\ 7\ 9\ 10\ 11\ 12).$$

Si el primer ciclo de S_1 es $(1\ 7\ 4\ 11)$, los otros ciclos están determinados. Para obtenerlos basta escribir los dos ciclos de S en cuatro filas que empiecen, respectivamente, con los números 1, 7, 4 y 11 como se indica en la siguiente:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 10 & 11 & 12 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 11 & 12 & 8 & 7 & 9 & 10 \end{array}$$

La primera y tercera fila no son otra cosa que el primer ciclo de S, empezado en 1 y en 4; la segunda y cuarta están formadas por el segundo ciclo.

Las columnas primera y cuarta, segunda y quinta, y, tercera y sexta, son los tres ciclos distintos de que se componen la S_1. El m. c. m. de 6 y 4 es 12. Este será, pues, el número de elementos de los ciclos de S_1S.

(*) A la derecha de los tres ciclos de S podríamos haber escrito otros grupos de á tres, con números nuevos; pero en este caso hubiéramos tenido que dar un segundo ciclo de S_1 ó dos nuevos ciclos, ó tres, etc.; es decir, tantos ciclos como nuevos grupos.

$$S_1 S = (1\ 9\ 6\ 7\ 5\ 8\ 4\ 12\ 3\ 11\ 2\ 10).$$

3.° Sea

$$S = (1\ 2\ 5)\ (4\ 3\ 7)\ (6\ 9\ 8).$$

Supongamos el primer ciclo de S_1 (1 3 6). Siendo $\mu_1 = 3$ y $\lambda_1 = 3$ el m. c. m. es 3; luego el producto $S_1 S$ es otra sustitución análoga á la S y á la S_1 y el cuadro cuyas filas son ciclos de S y sus columnas las de S_1 es:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{array}$$

Consecuencia del teorema anterior son los siguientes:

1.° *Si el número λ_1 de elementos que figuran en los ciclos de* S_1 *es igual al número de los ciclos de* S *y* λ_1 *y* μ_1 *son primos entre sí, el grupo de sustituciones es cíclico;* pues hay una sustitución que no se descompone en ciclos.

2.° *Si son* $\lambda_1 = \mu_1$ *y* $\mu = \lambda_1 \mu_1 = \mu^2$, *siendo además* μ_1 *número primo las sustituciones del grupo sólo tienen ciclos de* μ_1 *elementos.*

7. Elementos comunes á un ciclo de S ó de S_1 y otro de SS_1.—Hemos indicado que si un ciclo de S_1 y otro de S tenían t elementos comunes, en el rectángulo de elementos estaban repetidos t veces los ciclos de S en las filas y otros t veces los de S_1 en las columnas. Pues bien; toda diagonal contendrá t elementos comunes con un ciclo de S, puesto que cortará á t horizontales en t elementos. Como el número total de diagonales es igual al número de cuadrados, es decir, $\mu_2 = \frac{\mu_1}{\delta}$, el número total de elementos de este nuevo ciclo comunes con el ciclo considerado de S es $\tau' = \mu_2 t$. Y si en lugar de partir de la sustitución S partimos de la S_1 sería $\tau'' = \lambda_2 t$. En el segundo ejemplo anterior es

$$t = 2,\quad \lambda_1 = 4,\quad \mu_1 = 6,\quad \delta = 2,\quad \lambda_2 = 2,\quad \mu_2 = 3,$$
$$\tau' = 6,\quad \tau'' = 4.$$

En el primer ejemplo

$$t = 1,\quad \lambda_1 = 3,\quad \mu_1 = 6,\quad \delta = 3,\quad \lambda_2 = 1,\quad \mu_2 = 2,$$
$$\tau' = 2,\quad \tau'' = 1.$$

8. Subgrupo $[S, S_1]$.—Al grupo de sustituciones del cuerpo algébrico normal pertenecerán también las

$$S_1, S_1^2, S_1^3, \ldots\ldots S_1^{\lambda_1 - 1}$$

y el número total de las obtenidas con S y S_1 será:

$$[\mathrm{VII}] \left\{ \begin{array}{lllll} 1 & S & S^2 & S^3 & \ldots\ldots S^{\mu_1 - 1} \\ S_1 & S_1 S & S_1 S^2 & S_1 S^3 & \ldots\ldots S_1 S^{\mu_1 - 1} \\ S_1^2 & S_1^2 S & S_1^2 S^2 & S_1^2 S^3 & \ldots\ldots S_1^2 S^{\mu_1 - 1} \\ . & . & . & . & \ldots\ldots . \\ . & . & . & . & \ldots\ldots . \\ S_1^{\lambda_1 - 1} & S_1^{\lambda_1 - 1} S & S_1^{\lambda_1 - 1} S^2 & S_1^{\lambda_1 - 1} S^3 & \ldots\ldots S_1^{\lambda_1 - 1} S^{\mu_1 - 1} \end{array} \right.$$

Todas las sustituciones de este cuadro forman un grupo. En efecto; el producto de dos cualesquiera es de la forma

$$S_1^{\lambda_1 s + q}\, S^{\mu_1 t + v} = S_1^q S^v \begin{cases} q < \lambda_1 \\ v < \mu_1 \end{cases}$$

y esta sustitución estará en la fila $q + 1$ y columna $v + 1$.

Pero si en un ciclo de S hay t elementos comunes con los de un ciclo de S_1 no son todas distintas, sino que hay en la primera fila t sustituciones que coinciden con otras t de la primera columna, como ya se ha demostrado.

Si es $S^u = S_1^v \mp 1$ todas las de la fila $v + 1$ coincidirán con las de la primera fila, escritas en otro orden, naturalmente.

En la hipótesis de ser S_1 distinta de todas las de la primera fila (para lo cual es suficiente que el elemento que sigue al ρ sea distinto de los que hacen suceder las μ_1 de la primera fila) todas las de la segunda fila serán distintas entre sí y harán suceder al elemento ρ todos los μ_1 elementos del ciclo de S que contiene el segundo elemento de S_1. Se ve de otro modo que son distintas entre sí y distintas de la primera fila, observando que si $S_1 S^p = S_1 S^r$ deberá ser $S^p = S^r$, y si $S_1 S^p = S^q$ será $S_1 = S^{q-p}$; lo que no es posible por la hipótesis de ser

$$S_1 \mp S^v \qquad\qquad v = 1, 2, 3 \ldots\ldots \mu_1.$$

Y existiendo en la primera columna t sustituciones idénticas á t de la primera fila, tendremos t filas idénticas á la segunda.

Las de la fila $v + 2$ son

$$S_1^v S_1,\ S_1^v S_1 S,\ S_1^v S_1 S^2, \ldots\ S_1^v S_1 S^{\mu_1 - 1}$$

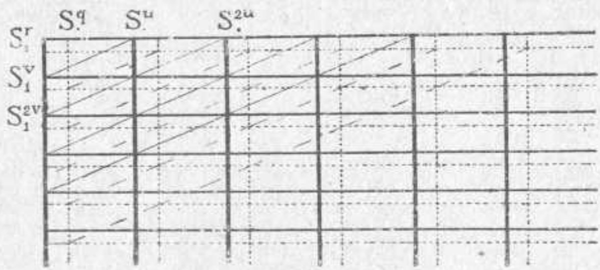
ó sea

$$S_1 S^u,\ S_1 S^{u+1}\ S_1 S^{u+2} \ldots\ S_1 S^{u+\mu_2 - 1}$$

y coincidirán con las de la segunda fila; las de la fila j coincidirán con las de la fila $v + j$.

Existen, pues, t filas idénticas á la primera, otras t idénticas á la segunda, tercera, cuarta, etc., y, por el mismo razonamiento, t columnas iguales á la primera, otras t iguales á la segunda, etc.

De aquí que señalando con líneas gruesas las t líneas de sustituciones iguales á la primera se tiene el siguiente esquema, en el que las



filas y columnas intermedias finas, que representan lugares equidistantes, dan las mismas sustituciones, prescindiendo del orden, naturalmente.

El número total de filas distintas es $\frac{\lambda_1}{t}$, y como en una fila hay μ_1 sustituciones, tendremos un total de $\frac{\mu_1 \lambda_1}{t}$. Y el mismo resultado se obtiene con las columnas.

Si S^u y S_1^v son las primeras potencias de S y S_1 que coinciden, también coincidirán las segundas

$$S^{2u} = S_1^{2v} = S_1^v S^u$$

que aparecen en una diagonal, y otro tanto puede decirse de las relativas á otra diagonal. Por otra parte, las identidades

$$S^{q+nu} S_1^r = S^{q+(n-1)u} S^{v+r} = S_1^{q+(n-2)u} S_1^{2v+r} = \ldots = S^q S_1^{nv+r}$$

nos indican que todos los elementos de una diagonal en el rectángulo secundario de filas y columnas punteadas son también iguales, dando ésto una idea gráfica de la estructura del grupo $[S, S_1]$, el cual aparece dividido en subgrupos de t sustituciones cada una.

Perteneciendo los $\frac{\lambda_1}{t}$ elementos no comunes contenidos en un ciclo de S_1 á $\frac{\lambda_1}{t}$ ciclos distintos de S, las $\frac{\mu_1\lambda_1}{t}$ sustituciones del cuadro harán suceder al elemento ρ todos los $\frac{\lambda_1\mu_1}{t}$ elementos de dichos ciclos.

El subgrupo obtenido ha de ser un divisor del grupo que se estudia, luego $\mu_1\nu_1$ debe ser múltiplo de $\mu_1\frac{\lambda_1}{t}$; ó sea ν_1 múltiplo de $\frac{\lambda_1}{t}$.

9. Elementos imprimitivos del cuerpo $\Omega(\rho)$.

Sea $\psi(\rho, \rho_h, \rho_p, \rho_q \ldots\ldots)$ una función simétrica de los elementos ρ que entran en un ciclo de la sustitución S. Sabemos que toda sustitución del grupo Σ sólo puede permutar entre sí los elementos de un ciclo de S, ó bien producir una sustitución entre los ciclos de S. Según esto, la función $\psi(\rho, \rho_h, \rho_p, \rho_q \ldots\ldots)$ se cambiará en $\psi(\rho_i, \rho_j, \rho_k, \ldots\ldots)$ si el elemento ρ se cambia por uno de los que figuran en el ciclo $(\rho_i\rho_j\rho_k \ldots\ldots)$, etc. Ahora bien; siendo simétrica respecto de los elementos $(\rho\rho_h\rho_p \ldots\ldots)$ unas sustituciones de Σ dejarán esta función invariable, mientras que otras harán que cambie su valor. Las sustituciones á que pertenece ψ, ó sea, las que no la alteran, son las del subgrupo $\sigma = (S, S^2, S^3, \ldots\ldots S^{\mu_1-1})$. Designando por S_1 una distinta de todas estas, las del período $(S_1S, S_1S^2, S_1S^3, \ldots\ldots S_1S^{\mu_1-1})$ producirán el cambio de ψ en ψ_1 y en el conjunto $\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots\ldots \psi_{\nu_1-1}$ efectuarán una cierta sustitución entre estos elementos ψ_i. Los grupos á que pertenecen las $\psi_1, \psi_2, \ldots\ldots$ son los transformados del σ mediante las ν_1 sustituciones

$$S, S_1, S_2, S_3, \ldots\ldots S_{\nu_1-1}, \text{ es decir,}$$

$$\sigma_1 = S_1^{-1}\sigma S_1 \quad \sigma_2 = S_2^{-1}\sigma S_2 \ldots\ldots \sigma_{\nu_1-1} = S_{\nu_1-1}^{-1}\sigma S_{\nu_1-1},$$

pero siendo permutables las sustituciones del grupo Σ [teorema V] es $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \ldots\ldots = \sigma$; luego toda sustitución del subgrupo invariante σ, deja invariables las funciones ψ_i; $i = 1, 2, 3 \ldots\ldots (\nu_1 - 1)$.

I) *Los elementos conjugados de ψ en Ω, ó elementos imprimitivos de grado ν_1 en $\Omega(\rho)$, son $\psi, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots\ldots \psi_{\nu_1-1}$.* En efecto; todos los elementos ρ pueden expresarse racionalmente en Ω en función de uno de ellos, el ρ, por ejemplo de donde

$$\psi(\rho, \rho_h, \rho_p, \rho_q \ldots\ldots) = \psi(\rho, \theta_h(\rho), \theta_p(\rho) \ldots\ldots) = \lambda(\rho).$$

El cambio de ρ en ρ_h produce una sustitución entre los ρ que deja invariables los ciclos, luego la ψ no altera.

El cambio de ρ en ρ_i cambia el primer ciclo por el i; ψ se convertirá en ψ_i y $\lambda(\rho)$ en $\lambda(\rho_i)$ que es uno de los conjugados del $\lambda(\rho)$ distinto de éste.

II) *Los elementos imprimitivos de $\Omega(\rho)$ se distribuyen en μ' sistemas de ν elementos iguales entre sí, en cada sistema.*

Sea, en efecto, $\omega = \varphi(\rho)$ un elemento imprimitivo del cuerpo $\Omega(\rho)$. Ordenemos sus conjugados

$$\omega = \varphi(\rho),\ \omega_1 = \varphi(\rho_1),\ \omega_2 = \varphi(\rho_2),\ \ldots\ldots\ \omega_{\mu_1-1} = \varphi(\rho_{\mu_1-1})$$

(que no podrán ser todos distintos entre sí por ser imprimitivo ω) en el siguiente rectángulo, escribiendo los iguales en una misma fila.

$$[\mathrm{IX}] \quad \left\{\begin{array}{lllll}
\omega & = \omega' & = \omega'' & = \ldots\ldots & = \omega^{(\nu'-1)} \\
\omega_1 & = \omega'_1 & = \omega''_1 & = \ldots\ldots & = \omega_1^{(\nu''-1)} \\
\omega_2 & = \omega'_2 & = \omega''_2 & = \ldots\ldots & = \omega_2^{(\nu'''-1)} \\
. & . & . & . & = . \\
\omega_{\mu'-1} & = \omega'_{\mu'-1} & = & = \ldots\ldots & = \omega_{\mu'-1}^{(\nu^{\mu'}-1)}
\end{array}\right.$$

ó sea

$$[\mathrm{X}] \quad \left\{\begin{array}{l}
\omega = \varphi(\rho) = \varphi(\rho') = \varphi(\rho'') = \ldots\ldots = \varphi(\rho^{\nu'-1}) \\
\omega_1 = \varphi(\rho_1) = \varphi(\rho'_1) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\omega_2 = \varphi(\rho_2) = \varphi(\rho'_2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

y expresados en función de ρ,

$$[\mathrm{XI}] \left\{\begin{array}{l}
\qquad\qquad \omega = \varphi(\rho) = \varphi(\theta'\rho) = \varphi(\theta''\rho) = \ldots\ldots = \varphi(\theta^{\nu'-1}\rho) \\
\varphi(\rho_1) = \omega_1 = \varphi(\theta_1\rho) = \varphi(\theta'_1\rho) = \varphi(\theta''_1\rho) = \ldots\ldots = \varphi(\theta_1^{\nu''-1}\rho) \\
\varphi(\rho_2) = \omega = \varphi(\theta_2\rho) = \varphi(\theta'_2\rho) = \varphi(\theta''_2\rho) = \ldots\ldots = \varphi(\theta_2^{\nu'''-1}\rho) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

Si una sustitución S cambia ρ en ρ_i, por ser

$$\varphi(\theta_j\rho) = \varphi(\theta'_j\rho) = \varphi(\theta''_j\rho) = ... = \varphi\left(\theta_j^{\nu^{j+1}-1}\rho\right)$$

también será

$$\varphi(\theta_j\rho_i) = \varphi(\theta'_j\rho_i) = \varphi(\theta''_j\rho_i) = ... = \varphi\left(\theta_j^{\nu^{j+1}-1}\rho_i\right);$$

lo que nos indica que toda sustitución S que ponga en lugar de ρ, ρ_i, conservará iguales los elementos de una misma fila en los cuadros anteriores. Ahora bien: 1.°, si ρ y ρ_i son de la primera fila en [X] será al mismo tiempo,

$$\varphi(\rho) = \varphi(\rho_i) = \omega$$

y

$$\varphi(\theta_j\rho) = \varphi(\theta_j\rho_i) = \varphi(\rho_j) = \omega_j, j = 1, 2, 3 ..... \mu' - 1,$$

y esta sustitución producirá otra entre los elementos ρ de una misma fila del cuadro [X] sin alterar el orden de estas filas; en otros términos, dicha sustitución dejará invariantes los elementos ω;

2.° Si ρ y ρ_i son de distinta fila, por ser

$$\varphi(\rho) = \varphi(\theta'\rho) = ... = \varphi(\theta^{\nu'-1}\rho)$$

será al mismo tiempo

$$\varphi(\rho_i) = \varphi(\theta'\rho_i) = ... = \varphi(\theta^{\nu'-1}\rho_i)$$

y como $\varphi(\rho_i) = \omega_i$ hay por lo menos ν' elementos iguales al ω_i; luego $\nu' \overline{\gtrless} \nu^{(i)}$. Análogamente, partiendo de la fila

$$\omega_i = \varphi(\rho_i) = \varphi(\rho'_i) = \varphi(\rho''_i) = ... = \varphi(\rho_i^{\nu^i-1})$$

expresando las ρ en función de ρ_i y comparando con la primera fila, demostraríamos que $\nu^i \overline{\gtrless} \nu'$, sacando la consecuencia de ser $\nu' = \nu^{(i)}$. Además, el cambio de ρ en ρ_i realiza la sustitución de toda la primera fila por la fila i. Queda con esto demostrado que todas las filas del cuadro [XI] constan de igual número de elementos conforme al enunciado del teorema.

III) *Todo elemento imprimitivo del cuerpo $\Omega(\rho)$ es una función simétrica de los elementos ρ que figuran en un ciclo de una de las sustituciones del grupo Σ.*

En efecto; si este elemento ω es imprimitivo, sus conjugados se distribuirán en μ' sistemas de ν' elementos en cada uno, y toda sustitución de Σ producirá una entre los elementos ρ correspondientes á elementos ω iguales entre sí, ó cambiará las ρ relativas á uno de los ω por otro de los ω distintos, y observando que

$$\omega = \frac{1}{n}[\varphi(\rho) + \varphi(\rho') + \varphi(\rho'') + \ldots + \varphi(\rho^{\nu'-1})],$$

es una función simétrica de $\rho, \rho', \rho'' \ldots \rho^{\nu'-1}$, que se cambia en

$$\omega_1\ \omega_2 \ldots \omega_{\mu'-1}$$

cuando en lugar de ρ se pone una cualquiera de los ρ^i relativos á estos últimos, queda demostrado el teorema.

10. Sistemas de elementos primitivos é imprimitivos contenidos en $\Omega(\rho)$.—Si es $\mu = \mu_1\nu_1$ y existen ciclos de μ_1 elementos, en el grupo Σ hay elementos imprimitivos del grado ν_1, y estos son los valores de las funciones simétricas racionales en Ω de μ_1 variables cuando se sustituyen en lugar de dichas μ_1 variables los μ_1 elementos de cada uno de los ν_1 ciclos de la sustitución considerada. Y como todo grupo contiene la sustitución idéntica, hay en todo cuerpo $\Omega(\rho)$ de grado μ, infinitos sistemas de elementos primitivos.

Si el grupo Σ es cíclico hay elementos imprimitivos, cuyos grados son todos los divisores de μ (cuando μ no es primo), y si es primo no hay otros elementos imprimitivos que los de Ω, y entonces las funciones racionales simétricas de los ρ son elementos de Ω. En este caso el cuerpo $\Omega(\rho)$ es primitivo.

Sirvan de aclaración á lo expuesto los ejemplos siguientes:

Sea la sustitución dada $S = (1\ 4\ 5\ 7\ 9\ 2\ 3\ 8\ 11\ 6\ 10\ 12)$, en la que sólo escribimos los subíndices de los elementos ρ. El grupo es en este caso cíclico. Formando el cuadrado de que se habló en los números 3, 4 y 8, se tiene:

$S^0 =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S	4	3	8	5	7	10	9	11	2	12	6	1
S^2	5	8	11	7	9	12	2	6	3	1	10	4
S^3	7	11	6	9	2	1	3	10	8	4	12	5
S^4	9	6	10	2	3	4	8	12	11	5	1	7
S^5	2	10	12	3	8	5	11	1	9	7	4	9
S	3	12	1	8	11	7	6	4	10	9	5	2
S^7	8	1	4	11	6	9	10	5	12	2	7	3
S^8	11	4	5	6	10	2	12	7	1	3	9	8
S^9	6	5	7	10	12	3	1	9	4	8	2	11
S^{10}	10	7	9	12	1	8	4	2	5	11	3	6
S^{11}	12	9	2	1	4	11	5	3	7	6	8	10

y ordenando las filas de modo que en la primera columna estén los números en orden natural

$S_1 =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S_2	2	10	12	3	8	5	11	1	6	7	4	9
S_3	3	12	1	8	11	7	6	4	10	9	5	2
S_4	4	3	8	5	7	10	9	11	2	12	6	1
S_5	5	8	11	7	9	12	2	6	3	1	10	4
S_6	6	5	7	10	12	3	1	9	4	8	2	11
S_7	7	11	6	9	2	1	3	10	8	4	12	5
S_8	8	1	4	11	6	9	10	5	12	2	7	3
S_9	9	6	10	2	3	4	8	12	11	5	1	7
S_{0}	10	7	9	12	1	8	4	2	5	11	3	6
S_{11}	11	4	5	6	10	2	12	7	1	3	9	8
S_{12}	12	9	2	1	4	11	5	3	7	6	8	10

Las sustituciones del grupo, cuyo denominador común es la primera fila y sus numeradores las distintas filas en su orden natural, son:

$$
\begin{array}{lll}
S_1 = S & = & (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12) \\
S_4 = S & = & (1\ 4\ 5\ 7\ 9\ 2\ 3\ 8\ 11\ 6\ 10\ 12) \\
S_5 = S^2 & = & (1\ 5\ 9\ 3\ 11\ 10)(4\ 7\ 2\ 8\ 6\ 12) \\
S_7 = S^3 & = & (1\ 7\ 3\ 6)(4\ 9\ 8\ 10)(5\ 2\ 11\ 12) \\
S_9 = S^4 & = & (1\ 9\ 11)(4\ 2\ 6)(5\ 3\ 10)(4\ 8\ 12) \\
S_2 = S^5 & = & (1\ 2\ 10\ 4\ 11\ 4\ 3\ 12\ 9\ 6\ 5\ 8) \\
S_3 = S^6 & = & (1\ 3)(4\ 8)(5\ 11)(7\ 6)(9\ 10)(2\ 12) \\
S_8 = S^7 & = & (1\ 8\ 5\ 6\ 9\ 12\ 3\ 4\ 11\ 7\ 10\ 2) \\
S_7 = S^8 & = & (1\ 11\ 9)(2\ 4\ 6)(3\ 5\ 10)(7\ 12\ 8) \\
S_6 = S^9 & = & (1\ 6\ 3\ 7)(2\ 5\ 12\ 11)(4\ 10\ 8\ 9) \\
S_{10} = S^{10} & = & (1\ 10\ 11\ 3\ 9\ 5)(2\ 7\ 4\ 12\ 6\ 8) \\
S_{12} = S^{11} & = & (1\ 12\ 10\ 6\ 11\ 8\ 3\ 2\ 9\ 7\ 5\ 4)
\end{array}
$$

Los sistemas imprimitivos de elementos conjugados corresponden á los divisores de 12, que son: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Designando dichos sistemas por A_1, A_2, A_3 ....., tendremos la siguiente descomposición de los elementos primitivos ρ, de que partimos, correspondientes á todos los sistemas imprimitivos posibles.

$$
\left.\begin{array}{ll}
A_1 \ldots & 1 \\
A_2 & 2 \\
A_3 & 3 \\
A_4 & 4 \\
A_5 & 5 \\
A_6 & 6 \\
A_7 & 7 \\
A_8 & 8 \\
A_9 & 9 \\
A_{10} & 10 \\
A_{11} & 11 \\
A_{12} & 12
\end{array}\right\}
\quad
\left.\begin{array}{ll}
A_1 \ldots & 1\ 3 \\
A_2 & 4\ 8 \\
A_3 & 5\ 11 \\
A_4 & 7\ 6 \\
A_5 & 9\ 10 \\
A_6 & 2\ 12
\end{array}\right\}
\quad
\left.\begin{array}{ll}
A_1 \ldots & 1\ 9\ 11 \\
A_2 & 4\ 2\ 6 \\
A_3 & 5\ 3\ 10 \\
A_4 & 7\ 8\ 12
\end{array}\right\}
\quad
\left.\begin{array}{ll}
A_1 \ldots & 1\ 7\ 3\ 6 \\
A_2 & 4\ 9\ 8\ 10 \\
A_3 & 5\ 2\ 11\ 12
\end{array}\right\}
$$

$$
\left.\begin{array}{ll}
A_1 \ldots & 1\ 5\ 9\ 3\ 11\ 10 \\
A_2 & 4\ 7\ 2\ 8\ 6\ 12
\end{array}\right\}
$$

$$
A_1 \ldots\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12
$$

2.° Sean ahora

$$S = (1\,2\,4\,5)(3\,8\,6\,7) \quad \text{y} \quad S_1 = (1\,8)(2\,6)(4\,7)(5\,3)$$

las dos substituciones que nos definen el siguiente grupo, no cíclico:

$$\begin{array}{cccccccc}
S\,1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
2 & 4 & 8 & 5 & 1 & 7 & 3 & 6 \\
3 & 8 & 4 & 6 & 7 & 1 & 2 & 5 \\
4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 8 & 7 \\
5 & 1 & 7 & 2 & 4 & 8 & 6 & 3 \\
6 & 7 & 1 & 3 & 8 & 4 & 5 & 2 \\
7 & 3 & 2 & 8 & 6 & 5 & 1 & 4 \\
8 & 6 & 5 & 7 & 3 & 2 & 4 & 1
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
S &= (1)\,(2)\,(3)\,(4)\,(5)\,(6)\,(7)\,(8) \\
S &= (1\;\;2\;\;4\;\;5)\,(3\;\;8\;\;6\;\;7) \\
&= (1\;\;3\;\;4\;\;6)\,(2\;\;8\;\;5\;\;7) \\
&= (1\;\;4)\,(2\;\;5)\,(3\;\;6)\,(7\;\;8) \\
&= (1\;\;5\;\;4\;\;2)\,(3\;\;7\;\;6\;\;8) \\
&= (1\;\;6\;\;4\;\;3)\,(2\;\;7\;\;5\;\;8) \\
&= (1\;\;7)\,(2\;\;3)\,(4\;\;8)\,(5\;\;6) \\
&= (1\;\;8)\,(2\;\;6)\,(3\;\;5)\,(4\;\;7)
\end{aligned}$$

La descomposición en sistemas A es, en este ejemplo, la siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} A_1\;1 \\ A_2\;2 \\ A_3\;3 \\ A_4\;4 \\ A_5\;5 \\ A_6\;6 \\ A_7\;7 \\ A_8\;8 \end{array}\right\} \quad
\left.\begin{array}{l} A_1\;1\,4 \\ A_2\;2\,5 \\ A_3\;3\,6 \\ A_4\;7\,8 \end{array}\right\} \quad
\left.\begin{array}{l} A_1\;1\,7 \\ A_2\;2\,3 \\ A_3\;4\,8 \\ A_4\;5\,6 \end{array}\right\} \quad
\left.\begin{array}{l} A_1\;1\,8 \\ A_2\;2\,6 \\ A_3\;3\,5 \\ A_4\;4\,7 \end{array}\right\} \quad
\left.\begin{array}{l} A_1\;1\,2\,4\,5 \\ A_2\;3\,8\,6\,7 \end{array}\right\} \quad
\left.\begin{array}{l} A_1\;1\,6\,4\,3 \\ A_2\;2\,7\,5\,8 \end{array}\right\}$$

3.° Sea la substitución

$$S = (1\;4\;3)(2\;7\;9)(5\;6\;8) \quad \text{y la} \quad S_1 = (1\;2\;5)(4\;7\;6)(3\;9\;8)$$

El cuadro es

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	5	9	7	1	4	6	3	8
3	9	4	1	8	5	2	6	7
4	7	1	3	6	8	9	5	2
5	1	8	6	2	7	4	9	3
6	4	5	8	7	9	3	2	1
7	6	2	9	4	3	8	1	5
8	3	6	5	9	2	1	7	4
9	8	7	2	3	1	5	4	6

$$
\begin{array}{ll}
S & = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9) \\
S_1 & (1\ 2\ 5)(3\ 9\ 8)(4\ 7\ 6) \\
S_2 & (1\ 3\ 4)(2\ 9\ 7)(5\ 8\ 6) \\
S_3 & (1\ 4\ 3)(2\ 7\ 9)(5\ 6\ 8) \\
S_4 & (1\ 5\ 2)(3\ 8\ 9)(4\ 6\ 7) \\
S_5 & (1\ 6\ 9)(2\ 4\ 8)(5\ 7\ 3) \\
S_6 & (1\ 7\ 8)(2\ 6\ 3)(4\ 9\ 5) \\
S_7 & (1\ 8\ 7)(2\ 3\ 6)(4\ 5\ 9) \\
S_8 & (1\ 9\ 6)(2\ 8\ 4)(3\ 7\ 5)
\end{array}
$$

Todos los sistemas imprimitivos son de tercer grado y constan de igual número de elementos.

4.° Sea, por último, el grupo alternado, definido por las sustituciones

$$S = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8) \quad \text{y} \quad S_1 = (1\ 3)(2\ 4)(5\ 4)(6\ 8)$$

1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	4	3	6	5	8	7
3	4	1	2	7	8	5	6
4	3	2	1	8	7	6	5
5	6	7	8	1	2	3	4
6	5	8	7	2	1	4	3
7	8	5	6	3	4	1	2
8	7	6	5	4	3	2	1

$$
\begin{aligned}
S^0 &= (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)\\
S_1 &= (1\ \ 2)(3\ \ 4)(5\ \ 6)(7\ \ 8)\\
S_2 &= (1\ \ 3)(2\ \ 4)(5\ \ 7)(6\ \ 8)\\
S_3 &= (1\ \ 4)(2\ \ 3)(5\ \ 8)(6\ \ 7)\\
S_4 &= (1\ \ 5)(2\ \ 6)(3\ \ 7)(4\ \ 8)\\
S_5 &= (1\ \ 6)(2\ \ 5)(3\ \ 8)(4\ \ 7)\\
S_6 &= (1\ \ 7)(2\ \ 8)(3\ \ 5)(4\ \ 6)\\
S_7 &= (1\ \ 8)(2\ \ 7)(3\ \ 6)(4\ \ 5)
\end{aligned}
$$

Los sistemas imprimitivos de cuarto grado constan de cuatro elementos, y son los siguientes:

$$
\left.\begin{matrix} A_1\ 1\\ A_2\ 2\\ A_3\ 3\\ A_4\ 4\\ A_5\ 5\\ A_6\ 6\\ A_7\ 7\\ A_8\ 8 \end{matrix}\right\}
\left.\begin{matrix} A_1\ 1\ 2\\ A_2\ 3\ 4\\ A_3\ 5\ 6\\ A_4\ 7\ 8 \end{matrix}\right\}
\left.\begin{matrix} A_1\ 1\ 3\\ A_2\ 2\ 4\\ A_3\ 5\ 7\\ A_4\ 6\ 8 \end{matrix}\right\}
\left.\begin{matrix} A_1\ 1\ 4\\ A_2\ 2\ 3\\ A_3\ 5\ 8\\ A_4\ 6\ 7 \end{matrix}\right\}
\left.\begin{matrix} A_1\ 1\ 5\\ A_2\ 2\ 6\\ A_3\ 3\ 7\\ A_4\ 4\ 8 \end{matrix}\right\}
\left.\begin{matrix} A_1\ 1\ 6\\ A_2\ 2\ 5\\ A_3\ 3\ 8\\ A_4\ 4\ 7 \end{matrix}\right\}
\left.\begin{matrix} A_1\ 1\ 7\\ A_2\ 2\ 8\\ A_3\ 3\ 5\\ A_4\ 4\ 6 \end{matrix}\right\}
\left.\begin{matrix} A_1\ 1\ 8\\ A_2\ 2\ 7\\ A_3\ 3\ 6\\ A_4\ 4\ 5 \end{matrix}\right\}
$$

Cuando hay varios sistemas imprimitivos del mismo grado, cabe distinguir unos de otros y estudiar las diferencias entre los elementos imprimitivos que engendran, pertenecientes al cuerpo $\Omega(\rho)$. En este caso se distinguirán los elementos imprimitivos del mismo grado, según que pertenezcan á un sistema ó á otro.

El grupo de sustituciones Σ es, pues, de varias clases, según sea cíclico ó no, y si es cíclico, según que sea primitivo ó imprimitivo, y vemos que el conocimiento de este grupo Σ equivale al del cuerpo normal $\Omega(\rho)$, pues la clasificación de todos los elementos de este cuerpo $\Omega(\rho)$ se hace por medio de las sustituciones de Σ y de los sistemas imprimitivos.

11. Sustituciones entre elementos imprimitivos y entre sistemas de imprimitividad.—Toda sustitución de Σ realiza otra entre los elementos de un sistema imprimitivo ó primitivo, así que por el hecho de hacerse la primera sustitución entre los elementos ρ se hace simultáneamente otra entre los elementos de cada sistema conjugado. Los únicos elementos que no se cambian por otros son los del cuerpo Ω. A cada sustitución de Σ corresponde una entre los sistemas A ó entre los elementos ω. Ahora bien; sean ν_1 los sistemas A (ó elementos ω conjugados distintos) y μ_1 los elementos ρ que entran en cada sistema. Toda sustitución de Σ que haga suceder al elemento ρ un elemento del sistema A_i (ó ciclo A_i) producirá otra entre los ω que haga suceder al ω el ω_i; luego hay μ_1 sustituciones de Σ que producen este cambio.

Dos sustituciones, entre los ω, *que hagan suceder al* ω *el* ω_i *son idénticas.*

Sabemos, en efecto, que si $(\rho\rho_h\rho_p\rho_q \,.....)$ y $(\rho_i\rho_j\rho_k \,.....)$ son dos ciclos de una sustitución de Σ, y otra (también de Σ) hace suceder al ρ el ρ_i, forzosamente al elemento ρ_h debe suceder el ρ_j, etc. De aquí deducimos que dicha sustitución hace suceder al ciclo A el ciclo A_i. Si suponemos á continuación que la misma hace suceder á un elemento de A_i otro de A_r esta hará suceder al ciclo A_i todo el ciclo Ar, y así sucesivamente. Despréndese de esto que los μ_1 sustituciones correspondientes entre las ω son idénticas.

El grupo de sustituciones Σ *y el de sustituciones* ω *son isomorfos con isomorfismo* $(\mu_1\, 1)$.

En los anteriores ejemplos el isomorfismo es, en los sucesivos grupos, respectivamente:

1.° (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1),(6, 1), (12, 1);
2.° (1, 1), (2, 1), (2, 1), (2, 1), (4, 1) (4, 1);
3.° (1, 1), (3, 1); y
4.° (1, 1), (2, 1).

14. Subcuerpos del $\Omega(\rho)$.—Consideremos ahora dos elementos imprimitivos ω y θ del mismo grado ν_1 y del mismo sistema. Vamos á demostrar que ω es un elemento primitivo del cuerpo $\Omega(\theta)$; pero si fuesen de distinto sistema podría no pertenecer ω al cuerpo $\omega(\theta)$.

En efecto; toda sustitucion S de Σ produce una misma sustitución entre los elementos $\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \,.....\, \omega_{\nu_1-1}$ y entre los $\theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \,.....\, \theta_{\nu_1-1}$. Si es $\varphi(t) = (t-\theta)(t-\theta_1) \,.....\, (t-\theta_{\nu_1-1})$, la función

$$[XII] \qquad \Phi(t) = \varphi(t)\left(\frac{\omega}{t-\theta} + \frac{\omega_1}{t-\theta_1} + \frac{\omega_2}{t-\theta_2} + \,.....\, + \frac{\omega_{\nu_1-1}}{t-\theta_{\nu_1-1}}\right)$$

que tiene por coeficientes funciones simétricas de θ, y, por tanto, de ρ, no se alterará al aplicarle una de las sustituciones de Σ, y sus coeficientes serán funciones racionales en Ω.

Ahora bien; haciendo $t = \theta, \theta_1, \theta_2$ ..... es

$$\omega = \frac{\Phi(\theta)}{\varphi'(\theta)}, \quad \omega_1 = \frac{\Phi(\theta_1)}{\varphi'(\theta_1)} \ .....$$

y siendo, por otra parte, φ' primo con φ, por hipótesis, puede determinarse una función racional $\chi(t)$ tal que

$$Q(t)\varphi(t) + \varphi'(t)\chi(t) = \Phi(t),$$

en la que haciendo $t = \theta, \theta_1, \theta_2 \ ..... \ \theta_{\nu_1 - 1}$ resulta

$$\omega = \frac{\Phi(\theta)}{\varphi'(\theta)} = \chi(\theta), \quad \omega_1 = \chi(\theta_1) \ ..... \ \omega_{\nu_1 - 1} = \chi(\theta_{\nu_1 - 1}),$$

es decir, que $\omega, \omega_1, \omega_2 \ ..... \ \omega_{\nu_1 - 1}$ son elementos conjugados primitivos del cuerpo $\Omega(\theta)$.

Si suponemos ahora que los elementos ω proceden de distinto sistema que los θ al aplicarles simultáneamente una sustitución de S de Σ se obtendrán distintas sustituciones entre los θ y en los ω, pudiendo ocurrir que unos permanezcan invariantes y los otros se permuten entre sí, no pudiéndoseles aplicar, entonces, el razonamiento anterior.

Por otra parte, si los ω perteneciesen en este caso al subcuerpo $\Omega(\theta)$, serían

$$\text{[XIII]} \quad \omega = \chi_1(\theta) \quad \omega_1 = \chi_1(\theta_1) \quad \omega_2 = \chi_1(\theta_2) \ ..... \ \omega_{\nu_1 - 1} = \chi_1(\theta_{\nu_1 - 1})$$

y toda sustitución entre ρ produciría una entre θ y otra análoga entre ω, permaneciendo unos y otros elementos invariantes para las mismas sustituciones de Σ; lo que prueba que corresponderían al mismo sistema.

Consecuencia de este teorema es el siguiente:

En el cuerpo $\Omega(\rho)$ hay tantos subcuerpos como sistemas de imprimitividad hay en el grupo Σ.

15. Reducción de la resolvente de Galois por adjunción de un cuerpo $\Omega(\theta)$.— La resolvente de Galois de la ecuación $F(x) = 0$ es

$$g(t) = (t - \rho)(t - \rho_1)(t - \rho_2) \ ..... \ (t - \rho_{\mu - 1}).$$

Sea $\quad S = (\rho\rho_h\rho_p\rho_q \ldots\ldots \rho_t)(\rho_i\rho_j\rho_k \ldots\ldots \rho_s)(\ldots\ldots) \ldots\ldots$

una sustitución de Σ que define uno de los sistemas de imprimitividad $(A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots A_{\nu_1})$. Formemos con los elementos del primer ciclo A_1, la ecuación

[XIV] $\quad (t-\rho)(t-\rho_h)(t-\rho_p)(t-\rho_q) \ldots\ldots (t-\rho_t) = 0,$

cuyos coeficientes son funciones simétricas de los elementos ρ del primer ciclo, ó sea, estos coeficientes son elementos imprimitivos de grado ν_1, pertenecientes, por hipótesis, al subcuerpo $\Omega(\theta)$.

Hemos obtenido una ecuación irreducible de grado μ_1 cuyas raíces son elementos ρ de un ciclo correspondiente á un sistema de elementos imprimitivos $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_{\nu_1 - 1}$ y los coeficientes elementos del cuerpo $\Omega(\theta)$.

A cada uno de los ciclos $A_2, A_3 \ldots\ldots A_{\nu_1 - 1}$ corresponderá una ecuación irreducible en $\Omega(\theta)$ de grado μ_1 y $g(t)$ aparecerá descompuesta en un producto de ν_1 factores de grado μ_1.

La adjunción del cuerpo $\Omega(\theta)$ al Ω ha reducido la resolvente de Galois del grado μ al μ_1.

16. Cuerpo y ecuación normal.—Sean $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{m-1}$ las m raíces de $F(x) = 0$. Formemos el cuerpo $\Omega(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{m-1})$ que es algébrico y de un cierto grado μ. *Si ρ es un elemento primitivo de este cuerpo y $\rho_1, \rho_2, \ldots\ldots \rho_{\mu-1}$ sus conjugados, la ecuación*

$$g(t) = (t-\rho)\,(t-\rho_1)\,(t-\rho_2) \ldots\ldots (t-\rho_{\mu-1}) = 0$$

es normal. En efecto; por ser ρ elemento de

$$\Omega(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{m-1}) \quad \text{es} \quad \rho = \psi(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{m-1})$$

siendo ψ una función racional. Y si H (*) es el subgrupo de sustituciones entre las α, y ν es su índice, los valores algébricamente distintos de ψ serán:

$$\rho, \rho', \rho'', \ldots\ldots \rho^{\nu-1}.$$

La ecuación

$$G(t) = (t-\rho)(t-\rho')(t-\rho'') \ldots\ldots (t-\rho^{\nu-1})$$

(*) Capelli: *Istituzioni di Analisi Algebrica.* Nápoles, 1909, págs. 308 á 316.

se anula para $t = \rho$, como la irreductible $g(t) = 0$; luego admite todas las raíces de esta última; es decir que $\rho, \rho_1, \rho_2 \ldots\ldots \rho_{\mu-1}$, están entre los ν elementos $\rho, \rho', \rho'' \ldots\ldots \rho^{\nu-1}$, y serán, por lo tanto, funciones racionales de $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{m-1}$, ó sean elementos del cuerpo $\Omega(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{m-1})$. Ello nos dice que este cuerpo es normal y la ecuación $g(t) = 0$ también lo es.

Esta es una de las resolventes de Galois de la ecuación $F(x) = 0$.

17. Descomposición de las raíces de una ecuación $F(x) = 0$ en sistemas imprimitivos de transitividad.—Siendo, por otra parte,

$$\Omega(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{m-1}) = \Omega(\rho)$$

se verifica

$$\alpha = \chi(\rho), \quad \alpha_1 = \chi_1(\rho), \quad \alpha_2 = \chi_2(\rho), \quad \alpha_3 = \chi_3(\rho) \ldots\ldots \alpha_{m-1} = \chi_{m-1}(\rho)$$

Sustituyamos, en lugar de ρ los elementos $\rho_1, \rho_2 \ldots\ldots \rho_{\mu-1}$ y formemos el siguiente rectángulo:

$$[XV] \quad \left\{ \begin{array}{llll} \chi\rho & \chi_1\rho & \chi_2\rho & \ldots \chi_{m-1}\rho \\ \chi\rho_1 & \chi_1\rho_1 & \chi_2\rho_1 & \ldots \chi_{m-1}\rho_1 \\ \chi\rho_2 & \chi_1\rho_2 & \chi_2\rho_2 & \ldots \chi_{m-1}\rho_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots\ . \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots\ . \\ \chi\rho_{\mu-1} & \chi_1\rho_{\mu-1} & \chi_2\rho_{\mu-1} & \ldots \chi_{m-1}\rho_{\mu-1} \end{array} \right.$$

En una misma fila de este rectángulo no puede haber dos elementos iguales; porque si $\chi_i\rho_p = \chi_j\rho_p$ será también $\chi_i\rho = \chi_j\rho$ y dos de las raíces α de $F(x)$ serían iguales contra la hipótesis.

Si $\chi\rho = \chi\rho_h$ no pueden ser al mismo tiempo

$$\chi_i\rho = \chi_i\rho_h \quad i = 1, 2, 3 \ldots\ldots m - 1;$$

porque si todas estas igualdades se verificasen, la función

$$\rho = \psi(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{m-1}) = \psi(\chi\rho, \chi_1\rho, \chi_2\rho \ldots\ldots \chi_{m-1}\rho)$$

se transformaría por el cambio de ρ en ρ_h en la

$$\rho_h = \qquad\qquad = \psi(\chi\rho_h, \chi_1\rho_h, \chi_2\rho_h \ldots\ldots \chi_{m-1}\rho_h)$$

y sería $\rho = \rho_h$, lo cual es imposible.

Todos los elementos de una columna son conjugados de uno cualquiera de la misma, y en particular del primero. Si dichos elementos (los de la columna) son imprimitivos y ν_1 es el grado de imprimitividad y es $\mu = \mu_1\nu_1$, se distribuyen en ν_1 grupos de μ_1 elementos iguales ó en μ_1 grupos iguales unos á otros de ν_1 elementos distintos entre sí en un grupo. Estos ν_1 elementos distintos son otras tantas raíces de la ecuación $F(x) = 0$; es decir, raíces $\alpha, \alpha', \alpha'', ... \alpha^{\nu_1 - 1}$. En efecto, por ser $F(\chi\rho) = 0$ es $F(\chi\rho_i) = 0$.

Existen, pues, ν_1 columnas encabezadas con las ν_1 raíces anteriores y como sus elementos conjugados son ellas mismas, en las columnas correspondientes aparecerán repetidas μ_1 veces lo mismo que en la primera columna de que hemos partido.

Las ν_1 raíces $\alpha, \alpha', \alpha'', ... \alpha^{\nu' - 1}$ forman un sistema imprimitivo del cuerpo $\Omega(\rho)$ y satisfacen, por tanto, una ecuación irreducible de grado ν_1, racional en Ω. Si $\nu_1 < m$ y α_1 es otra raíz distinta de las anteriores, la columna encabezada con $\alpha_1 = \chi_1\rho$ es también distinta de las ν_1 citadas. Si también suponemos es α_1 elemento imprimitivo de grado ν_2 y $\mu = \mu_2\nu_2$ los elementos de la segunda columna, se distribuirán en ν_2 grupos distintos de μ_2 elementos iguales en cada uno ó μ_2 grupos iguales de ν_1 elementos distintos en cada uno; existiendo en el cuadro ν_2 columnas iguales, prescindiendo del orden dentro de cada una. Si ya no se han agotado todas las raíces de $F(x)$, es decir, si $\nu_1 + \nu_2 < m$, determinaremos otro nuevo de grado ν_3, y luego otro, etc.

Queda así descompuesto el conjunto de las raíces α en sistemas imprimitivos, de transitividad (como veremos).

La suma del número de sus elementos es

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + ... + \nu_i = m.$$

18. El grupo de Galois de la ecuación $F(x) = 0$. — La $F(x) = 0$ se descompone en un producto de funciones irreducibles de grados $\nu_1, \nu_2, \nu_3, ... \nu_i$.

El cambio de ρ en ρ_h realiza entre las α la sustitución

$$P_h = \begin{pmatrix} \chi\rho_h & \chi_1\rho_h & \chi_2\rho_h & ..... & \chi_{m-1}\rho_h \\ \chi\rho & \chi_1\rho & \chi_2\rho & ..... & \chi_{m-1}\rho \end{pmatrix},$$

y si el cambio de ρ en ρ_h efectúa la

$$S_h = \begin{pmatrix} \rho_h \, \rho_p \, \rho_q \, ... \, \rho_j \, ... \, \rho_\lambda \\ \rho \;\; \rho_1 \, \rho_2 \, ... \, \rho_i \, ... \, \rho_{\mu-1} \end{pmatrix};$$

la P_h es idéntica á la

$$P'_h = \begin{pmatrix} \chi\rho_j \chi_1\rho_j \chi_2\rho_j \, ... \, \chi_k\rho_j \, ... \, \chi_{m-1}\rho_j \\ \chi\rho_i \chi_1\rho_i \chi_2\rho_i \, ... \, \chi_k\rho_i \, ... \, \chi_{m-1}\rho_i \end{pmatrix}$$

siempre que ρ_j suceda á ρ_i en la S_h.

En efecto; si en P_h es $\chi\rho = \alpha$ y $\chi\rho_h = \alpha_h$ y en P'_h es $\chi_k\rho_i = \alpha$ se tiene $\chi_k\rho_i = \chi\rho = \chi_k\theta_i\rho$, y por la irreductibilidad de $g(t) = 0$, $\chi\rho_h = \chi_k\theta_i\rho_h$; y siendo $\rho_i = \theta_i\rho_h$ será $\chi\rho_h = \chi_k\rho_j$; luego las dos sustituciones P_h y P'_h son idénticas.

Dedúcese de este teorema que á toda sustitución S_h corresponde una P_h entre las raíces de $F(x)$ y sólo una.

Recíprocamente á toda sustitución P_h corresponderá una sola S_h; porque siendo

$$\rho = \psi(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_{m-1}) = \psi(\chi\rho, \chi_1\rho, \chi_2\rho, \quad ..... \chi_{m-1}\rho)$$

será también

$$\rho_h = \qquad\qquad = \psi(\chi\rho_h \chi_1\rho_h \chi_2\rho_h \, ... \, \chi_{m-1}\rho_h)$$
$$\rho_j = \qquad\qquad = \psi(\chi\rho_j \chi_1\rho_j \chi_2\rho_j \, ... \, \chi_{m-1}\rho_j)$$

y si á la sustitución P_h corresponden dos S_h y S_j que hagan suceder al ρ el ρ_h y el ρ_j, se verificará simultáneamente

$$\psi(\chi\rho_h, \chi_1\rho_h, ... \chi_{m-1}\rho_h) = \rho_h = \rho_j = \psi(\chi\rho_j, \chi_1\rho_j, ... \chi_{m-1}\rho_j),$$

de donde $\rho_h = \rho_j$ y $P_h = P_j$, y esto es imposible.

Las sustituciones P_h formarán un grupo Π isomorfo oloédricamente con el Σ.

Este grupo Π es el grupo de Galois de la ecuación $F(x) = 0$, ó también el grupo de Galois de cada uno de los cuerpos

$$\Omega(\alpha), \; \Omega(\alpha_1), \; ..... \; \Omega(\alpha_{m-1}).$$

Si el cuerpo $\Omega(\rho)$ es imprimitivo al subgrupo invariante σ de grado ν corresponderá otro subgrupo π, invariante del Π, en virtud del isomorfismo.

Estando distribuídas las raíces de $F(x) = 0$ en varios sistemas imprimitivos, por hipótesis, toda sustitución del grupo Σ producirá una permutación entre los elementos de un sistema ó dejará este invariable. De aquí que sólo puedan cambiarse entre sí las raíces de una de las ecuaciones irreducibles en que se descompone $F(x) = 0$, mientras que no podrán cambiarse las de uno de sus factores en las de otro.

El grupo de Galois es entonces intransitivo y los diversos sistemas de transitividad están constituídos por los sistemas imprimitivos de que hemos hablado. El número de elementos de un sistema de transitividad debe ser un divisor de μ.

Para que el grupo de Galois sea transitivo es necesario que todos los elementos de una columna sean distintos, ó lo que es lo mismo, que sean elementos primitivos del cuerpo $\Omega(\rho)$. Entonces $m \leq \mu$. En efecto; si $m > \mu$ habría μ columnas iguales (prescindiendo del orden dentro de cada una) y quedarían aún columnas distintas. Partiendo de un nuevo elemento se obtendrían otros μ con otras μ columnas, etcétera; luego $m = \mu\nu$, y al aplicar una sustitución Σ, las α de un grupo se permutarían entre sí, pero no los de un grupo con los de otro; es decir, que, contra la hipótesis, el grupo es intransitivo.

Es, pues, necesario que $m \lesseqgtr \mu$ si ha de ser transitivo.

Cuando $\mu = m$ y el grupo es transitivo la ecuación es *abeliana* y las raíces son elementos primitivos del cuerpo $\Omega(\rho)$.

El grado máximo de μ es, ó puede ser, $m!$, porque siendo

$$\rho = \psi(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{m-1}),$$

y el grado μ el del grupo á que pertenece esta función, si esta función pertenece al grupo simétrico, el grado del mismo, ó sea $m!$, será el de la resolvente de Galois de la $F(x) = 0$.

La ecuación $F(x) = 0$ será reducible ó irreducible, según que su grupo de Galois sea intransitivo ó transitivo.

Instituto Nacional de Ciencias.—
Laboratorio y Seminario Matemático.

SOBRE ALGUNAS FUNCIONES CONTINUAS
CON INFINITAS SINGULARIDADES EN EL MENOR INTERVALO

POR

D. PEDRO M. GONZÁLEZ QUIJANO

INGENIERO DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

(Sesión del 19 de Octubre de 1915.)

Lo continuo y lo discontinuo constituyen dos dominios distintos en el inmenso campo de las Matemáticas. Éstas, al menos en su forma científica, han debutado por el estudio de lo discontinuo. Ha sido, sin duda, la noción de número entero la que primero se ha precisado, y por eso es ella la que aún hoy aparece la más clara y definida, justificando así la tendencia de la mayor parte de los matemáticos modernos que aspiran á reducir á ese concepto todos los demás.

Pero cuando se ha querido aplicar á la realidad la pura y abstracta investigación científica, el número entero no ha bastado, y no tal vez porque no sean esencialmente discontinuas nuestras sensaciones elementales, sino porque cualquiera que sea la solución de ese problema psicológico, el análisis completo del fenómeno observado exigiría un tal número de sutiles distinciones que harían la operación prácticamente inabordable.

Ha sido preciso reducir las comparaciones, efectuándolas tan sólo entre conjuntos *suficientemente* definidos para ser con facilidad distinguidos ó realizados. Estos conjuntos, organizados sobre intuiciones cuya elaboración se pierde en los orígenes de la evolución mental de la especie, planteando por ello su explicación todos los problemas del innatismo, han solido revestir forma extensiva y se los ha podido, por consiguiente, suponer compuestos de partes exteriores una á otra y, a su vez, comparables entre sí. De estas comparaciones ha nacido, en una segunda etapa del progreso del pensamiento matemático, la noción de número fraccionario.

Esta noción pareció que debía ya bastar para todas las necesidades. Cuando el denominador crece, sin crecer el numerador, la fracción acaba por ser inferior á toda cantidad *apreciable;* las fracciones permitían, pues, expresar con toda la aproximación *posible* cualquiera *cantidad* dada por la experiencia. Con la nueva adquisición el campo de estudio se imaginó ya completo y, por completo, limitado.

El pensamiento matemático tardó bastante en franquear estos límites, y no lo logró sin hacer antes frente á contradicciones al parecer formidables. Paralelamente al proceso aritmético, las nociones geométricas habían ido desarrollándose y concretándose y aspiraban ya á revestir forma científica precisa y á constituirse en dominio autónomo. La autonomía, sin embargo, no podía ser completa: la medida de las magnitudes geométricas exigía el empleo de los números; esta misma medida había tomado á su vez parte, y no pequeña, en la noción del número fraccionario. El paralelismo hubo de ser notado y las analogías aprovechadas.

Pero al extender las analogías, se tropezó con profundas diferencias. Las operaciones numéricas encontraban siempre operaciones geométricas en que *realizarse,* pero no á toda operación geométrica correspondía igualmente una operación numérica correlativa.

La diagonal del cuadrado fué el caso típico: ningún número podía medirla si el lado se tomaba por unidad. Al intentarlo, la razón descubría un proceso infinito, oculto en la práctica tras los inevitables errores de observación.

La correlación se presentaba, sin embargo, tan hermosa, se la adivinaba tan fecunda, que costaba trabajo renunciar á ella y, para salvar el obstáculo, se imaginaron los números inconmensurables. La idea era atrevida y genial, pero al mismo tiempo hondamente revolucionaria. No podía prosperar sin resistencias y las tuvo obstinadísimas. Los ecos de la lucha han llegado á nosotros bajo la sugestiva forma que diera á su oposición Zenón de Elea en sus famosos sofismas sobre la imposibilidad del movimiento, los cuales, en definitiva, no son otra cosa sino la expresión de la repugnancia á admitir, entre términos finitos, una serie infinita de determinaciones. La victoria quedó por los inconmensurables, pero no sin que hayan conservado hasta nuestros días, como título de gloria, el estigma con que intentaron afrentarles sus adversarios, la denominación de números *irracionales*.

La admisión de los inconmensurables ensanchó considerablemente los horizontes de la ciencia. Gracias á ella, lo continuo pudo ser ya estudiado de un modo preciso y sistemático; excepciones enfadosas desaparecían de los cálculos; pudo llegar á vislumbrarse la idea de función en sus formas más elementales, y las leyes algorítmicas alcanzaban una generalidad no conseguida antes.

Tales resultados no se obtuvieron, sin embargo, inmediatamente y sin esfuerzo, y aun parece que la antigüedad clásica, fuera de algunos geniales atisbos, entre los que habría que contar principalmente las intuiciones maravillosas de personalidad científica tan saliente como la de Arquímedes, no desarrolló las nuevas orientaciones en la medida que hubiera podido esperarse. Detenida en los primeros pasos, á causa de la general decadencia de todos los estudios, el germen quedó latente, sin embargo, y pudo desarrollarse siglos más tarde en ambiente más libre de embarazosas tradiciones, preparado por la coincidencia feliz de asombrosos descubrimientos á dar al pensamiento rienda suelta y á confiar en su poder y en su fuerza para aceptar, sin grandes reservas, las más atrevidas concepciones.

Es entonces cuando la Aritmética y la Geometría hacen alianza más estrecha, cuando el Álgebra se constituye, cuando la noción de función aparece y se afirma, cuando el Cálculo infinitesimal se presenta avasallador y dominante, abarcando con sus aplicaciones toda la ciencia, prometiendo el descubrimiento del secreto del mundo, incapaz ya de ocultarse por más tiempo á las inquisidoras investigaciones de la razón.

En ese juvenil período de irreflexivo entusiasmo, es la intuición principalmente la que guía los pasos del matemático. ¿Cómo desconfiar de ella cuando tantos dones prodiga y tantas esperanzas despierta? La noción de espacio es elevada á la misma categoría abstracta que la de número; bórranse en éste diferencias y cualidades, quedando sólo los enteros á manera de jalones, que no tienen otra misión que la de marcar la alineación indefinida y homogénea, siempre igual á sí misma: hasta se la llega á dar forma sensible, asimilándola y aun confundiéndola con el tiempo. Y las nociones de tiempo y espacio son admitidas como nociones absolutas y sus leyes como necesarias, hasta el punto de que no sólo obligarían á nuestra razón sino que llegarían á imponerse á la Suprema inteligencia de Dios mismo, para la que toda contradicción es imposible.

Y sobre las puras y absolutas nociones de espacio y tiempo se intenta construir la Mecánica, llamando en auxilio al principio de razón suficiente, con el que se trata de purgar de su materialidad grosera los postulados fundamentales producto de la experiencia. Y la Mecánica se erige en ciencia universal que á las demás cobija, mediante la reducción de todos los fenómenos á fenómenos de movimiento. Y el universo entero quiere convertirse en pedestal inmenso que sostenga el soberbio trono de la razón soberana.

Al entusiasmo sucedió la crítica. En los fundamentos mismos de la Geometría existía desde la antigüedad un punto oscuro. Al desarrollar la teoría de las paralelas, Euclides se había visto obligado á aceptar un postulado que había resistido durante siglos los conatos de demostración intentados por numerosos matemáticos, muchos de ellos eminentes. Tal falta de rigor en ciencia esencialmente racional era motivo de escándalo que había que suprimir á todo trance. Quizás influía en ello, más que otra cosa, el lugar ocupado por el postulado en la obra de Euclides, pues iguales reproches hubieran podido hacerse á otras proposiciones enunciadas al principio de los «Elementos», y que eran admitidas, no obstante, como axiomas evidentes: pero en ello habrá de verse una nueva prueba del peso enorme de la tradición, aun sobre los espíritus más selectos, y en materia tan ajena al parecer á las imposiciones de la costumbre, como es la ciencia.

Toda obstinación era ineficaz, sin embargo, y los intentos fracasaban; pero tanto trabajo no fué del todo estéril. Á fuerza de iluminar el camino, se llegó á descubrir al fin que la vía estaba cerrada. El postulado de Euclides no era forzosa consecuencia de los demás postulados, no era siquiera una verdad necesaria; el mundo podría estar organizado de manera perfectamente *inteligible*, sin que en él se verificase el pretendido inexcusable principio.

Los nombres de Gauss, de Bolyai, de Lobachefski sobre todo, van unidos á este descubrimiento que forma época en la historia de la Geometría. Fué la primera formidable derrota de la intuición, y precisamente en la rama de las Matemáticas que mejor podía recabar para sí el carácter de intuitiva.

La crítica había penetrado también en la ciencia de los números. Abel y Cauchy habían llamado la atención sobre los peligros á que exponía el empleo inconsiderado de las series divergentes. Cauchy mismo trataba de introducir el rigor en el Cálculo infinitesimal, cuyos fundamentos aparecían envueltos en nebulosidades metafísicas; se percibió que aquella primitiva concepción de la función continua, encerrando en el menor intervalo la ley entera de sus variaciones, que brotaba como del germen, merced á misteriosa virtud formativa del desarrollo de Taylor, sufría excepciones numerosas, aun en funciones relativamente sencillas, combinaciones en número finito de operaciones elementales del análisis.

Todo ello levantaba dudas que apenas si eran confesadas y que se pretendía ahogar, ocultando las excepciones tras las leyes *generales*, re sucitando así la antigua máxima de que la excepción confirma la regla. Todo ocurría *en general*, y las singularidades eran algo así como infinitamente pequeños, cuyo desprecio era permitido. Tal posición, sin embargo, era eminentemente inestable. Se imponía en las demostraciones un rigor creciente, y al fin se quiso deslindar de una manera precisa los campos de lo continuo y de lo discontinuo; pero entonces surgieron en la frontera conflictos inesperados. Las concepciones tradicionales se presentaban al fin en quiebra, víctimas de su desmedida ambición. La continuidad se escapaba de la estrecha cárcel en que el cálculo infinitesimal había intentado encerrarla, poniéndole por guardias derivadas y diferenciales, y la discontinuidad, á su vez, tomaba por asalto el edificio, ocultando su bastardía bajo el manto de la integración. Riemann y Weierstrass fueron los principales portavoces de la ola revolucionaria, y la intuición fué de nuevo vencida y derrotada.

Tan trascendental cambio de valores no podía menos de herir intereses cuantiosos nacidos al amparo del derrocado régimen. No en balde era la antigua noción de la continuidad la que había dado vida á toda la ciencia aplicada, demostrando con ella su fecundidad prodigiosa y aun no agotada, y así como en los pasados siglos, en aquel pleito de los irracionales, que hoy puede parecer mezquino á nuestros estudiantes de Instituto, la voz del sedicente sentido práctico pudo preguntar ¿á qué bueno, si con los números fraccionarios habrá siempre bastante?, así también en nuestros días, espíritus cultivados, aun conociendo á fondo estas cuestiones, y sin llegar á negar las conclusiones rigurosas de la teoría, pretenden ser lo prudente desentenderse del fallo y mantener el estado posesorio, sólo atacado por meros entes de razón, sin realidad acreditada ni aun posible.

No parece que las enseñanzas de la historia autoricen una, con apariencia de juiciosa, tan radical manera de pensar. Ciertamente que los nuevos conceptos no son por el momento de inmediata y general aplicación; pero, aunque no otra cosa, siempre será el vulgarizarlos de la mayor importancia, porque las limitaciones que suponen deben ejercer poderosa influencia sobre la manera como hayamos de representarnos el mundo y emprender su estudio.

En las aplicaciones, en efecto, la continuidad se postula, aun á conciencia á veces de que es sólo aproximada y aun ficticia, y es preciso no olvidar nunca el punto de partida, para no dar valor excesivo á las conclusiones, y no considerar como leyes matemáticamente demostradas lo que es sólo consecuencia de hipótesis muy naturales, muy sugestivas, que casi se imponen á nuestros hábitos de pensar, pero que podrían fallar en la práctica, al desarrollarse en un doble proceso de descenso á lo infinitamente pequeño, para ascender después mediante la integración al plano de las cosas reales.

Y es la ilusión tanto más temible, cuanto que puede sugestionar, pasajeramente al menos, hasta á los maestros. Poincaré mismo, que de modo tan admirable ha sabido precisar el alcance de las concepciones matemáticas aplicadas al mundo real, y que ha puesto de manifiesto cómo los principios fundamentales de la ciencia son más bien cómodos ó infecundos que verdaderos ó falsos, admite, sin embargo, en alguna ocasión que, cualesquiera que sean los futuros descubrimientos de fenómenos ignorados, será la Geometría euclídea *siempre* la más cómoda, que una Mecánica de cuatro dimensiones no puede ser *en ningún caso* objeto de estudios fecundos, que la continuidad de la función de probabilidad es hipótesis que se impone con tal fuerza al espíritu que parece imposible prescindir de ella, proposiciones todas que, aun siendo verdaderas, pugnarían evidentemente con las conclusiones con tanta brillantez por él sustentadas.

Son estas consideraciones las que principalmente me han decidido á dedicar á estos asuntos la siguiente nota, en la que he de presentar algunos ejemplos de funciones continuas con infinitas singularidades en el menor intervalo. El tema no es nuevo; numerosos ejemplos de esta especie se han dado con anterioridad, y á algunos aludiremos en la continuación; pero los que he de señalar tienen la particularidad de ofrecerse naturalmente á la consideración del matemático, sin necesidad de recurrir á rebuscados artificios; alguno de ellos se refiere á líneas empleadas por el más rutinario empirismo, que no ha podido sospechar que tenía entre sus manos un objeto de estudio digno de las miradas de las Matemáticas superiores. Es un nuevo testimonio de la frecuencia con que pasamos al lado de curiosas verdades, sin que la atención se fije en ellas, por impedirlo hábitos arraigados ó el peso de la tradición; es también una prueba, aunque sea sólo indiciaria, de que no se está tan lejos de la realidad y de las aplicaciones al estudiar estas teorías, no por extrañas, menos interesantes.

I

Creyóse por mucho tiempo que toda función continua poseía, en general, para cada valor de la variable, una derivada determinada, finita y continua. La representación de las funciones por medio de curvas había ayudado, sin duda, á arraigar la creencia. Función sin derivada parecía equivaler á curva sin tangente, á móvil sin velocidad, á un absurdo, en fin, irrealizable.

La claridad de esta intuición no bastaba para declarar el enunciado del todo evidente. Se intentó demostrarlo y algunos de estos ensayos fueron autorizados con los nombres de Ampère, de Lamarle, de Gilbert. Duhamel, en su notable tratado de Cálculo, que tanta boga tuvo en su tiempo (1), admite el teorema, aunque con algunas limitaciones, y lo enuncia en esta forma:

«**Teorema general.**—Sea y una función cualquiera de una variable x, sujeta tan sólo á las condiciones siguientes:

»1.ª Que cuando á partir de un valor cualquiera se da un incremento h á x, resulta un incremento único k de y, que tiende hacia cero, si se hace tender h hacia cero, y

»2.ª Que á partir de todo valor de x se pueda tomar otro que difiera de él en una cantidad finita determinada, tal que si x varía en el

(1) *Elements de Calcul infinitesimal*, Paris, 1856, tomo I, pág. 94

mismo sentido en todo el intervalo comprendido entre ellos, y varíe constantemente en un mismo sentido, es decir, siempre aumentando ó siempre disminuyendo.

»Esto supuesto, es fácil demostrar que, bajo estas condiciones, para todo valor de x existe un límite finito para la relación de los incrementos infinitamente pequeños correspondientes h y k; es decir, que no puede haber más que valores excepcionales de x para los cuales esta relación crezca ó decrezca indefinidamente.»

La demostración se reducía á lo siguiente:

«En efecto, sean x_0, X dos valores de x que satisfacen á las condiciones arriba indicadas; y_0, Y los valores correspondientes de y; dividamos el intervalo $X - x_0$ en n partes iguales, que designaremos por h y sean $k_1, k_2, k_3, \ldots\ldots k_n$ los valores correspondientes de los incrementos positivos de y; se tendrá

$$X - x_0 = nh \qquad Y - y_0 = k_1 + k_2 + \ldots\ldots + k_n$$

de donde resulta

$$\frac{Y - y_0}{X - x_0} = \frac{\frac{k_1}{h} + \frac{k_2}{h} + \ldots\ldots + \frac{k_n}{h}}{n}$$

es decir, que la relación invariable de los incrementos finitos de x y de y, cuando se pasa de x_0 á X, es la media aritmética de las relaciones $\frac{k_1}{h}, \frac{k_2}{h} \ldots\ldots \frac{k_n}{h}$, cualquiera que sea el número entero n.

»Si ahora se hace creer á n indefinidamente, los términos de estas relaciones tenderán hacia cero, y siendo su media aritmética siempre igual á la cantidad finita $\frac{Y - y_0}{X - x_0}$, es imposible que tiendan *todos* hacia cero ó que crezcan *todos* indefinidamente.

»Como esta conclusión, relativa al intervalo $X - x_0$, puede ser aplicada á cualquier parte de este intervalo, se sigue que es imposible que, en ningún intervalo finito, el valor de $\frac{k}{h}$ tienda hacia cero ó crezca indefinidamente para *todos* los valores de x. Sólo, pues, para valores excepcionales, y *en número limitado*, podrá $\frac{k}{h}$ dejar de tener un valor finito, y eso es lo que queríamos establecer.»

Lo que primero salta á la vista en esta pretendida demostración es que se presupone la existencia del límite, y que la única preocupación es probar que este límite no puede ser ni cero ni infinito. Parece no sospecharse que el límite puede quedar indeterminado. Es lo que en realidad ocurre en la función de Weiertrass:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b^n \cos \pi a^n x$$

en la que b es una constante positiva menor que la unidad y a un número entero impar con la condición

$$ab > 1 + \frac{3\pi}{2}.$$

Tal función, sin embargo, queda en realidad excluída del enunciado de Duhamel. Si se quisiera representarla geométricamente, se vería, en efecto, que su ordenada es la suma finita de las de una infinidad de sinusoides, las cuales, aunque tienden á confundirse con el eje de las x, introducen una creciente variabilidad en la dirección de la tangente. Dedúcese de aquí que la función llega á ser creciente y decreciente en el menor intervalo y deja de cumplir, por consiguiente, la segunda de las condiciones por Duhamel impuestas; pero aun cumpliendo esta condición, el límite podría no existir y, en todo caso, nada se intenta para asegurarse de su existencia.

En segundo lugar, es excesivo concluir de que todos los valores de la relación no pueden ser ni nulos ni infinitos el que hayan de ser en número limitado los que alcancen alguno de estos extremos. No es extraño, pues, que pocos años más tarde, en 1873, Schwarz presentara un ejemplo de función continua y creciente cuya derivada se hacía infinita para todo valor racional de la variable (1).

Un ejemplo análogo es el primero de que vamos á ocuparnos con

(1) Haciendo

$$\varphi(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$$

y representando por a_1, a_2 ..... constantemente positivas cuya suma sea convergente, la función de Schwarz puede representarse por

$$f(x) = \Sigma\, a_n \varphi(nx).$$

algún detalle (1). Me lo inspiró el estudio de las series de Brocot. Fué éste un relojero francés, que publicó en París en 1862 un folleto titulado *Calcul des rouages par approximation*, en el que empleaba las fracciones de que vamos á hacer uso, por ser las que con términos más sencillos podían con mayor aproximación representar una relación dada, y deberían ser, por lo tanto, las que determinaran el número de dientes de un tren de engranajes que hubiera de realizar lo mejor posible una determinada relación de velocidades. Surgen, pues, como se ve, de un problema eminentemenie práctico. Estas series, cuyo estudio sumario puede verse en la teoría de los números de Lucas (2), donde se las considera tan sólo desde el punto de vista aritmético, pueden definirse del siguiente modo. Sean en primer término las dos fracciones

$$\frac{0}{1} \quad \text{y} \quad \frac{1}{1}.$$

Si se suman separadamente sus numeradores y sus denominadores y se forma con estas sumas la nueva fracción $\frac{1}{2}$, se tendrá ya la serie de tres términos:

$$\frac{0}{1}\ ,\quad \frac{1}{2}\ ,\quad \frac{1}{1}.$$

Si entre los dos primeros terminos, y lo mismo entre los dos últimos, se intercalan por el mismo procedimiento otros dos nuevos términos, se tendría la serie siguiente de cinco términos:

(1) En el número de Septiembre de 1908, pág. 194, presenté este ejemplo en *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, preguntando si había sido antes estudiado ó examinado, desde el punto de vista de la teoría de las funciones. No tuve más respuesta que una del Sr. Escott, publicada en Septiembre de 1909 (pág. 212), en la que, sin dar indicaciones de trabajos sobre el particular anteriores á los míos, se exponían dos propiedades de la función, una de ellas precisamente la que yo había utilizado para la demostración de las propiedades que en mi pregunta anunciaba.

(2) *Théorie des nombres*, París, 1891, pág. 469. Para las aplicaciones de las series y tablas de Brocot, además del folleto original, pueden verse los apuntes autografiados de Mecanismos de la Escuela de Caminos para el curso de 1892-93, redactados por el entonces profesor de la asignatura D. Recaredo Uhagón (páginas 53 á 56).

$$\frac{0}{1}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{1},$$

y por intercalaciones sucesivas, aplicando siempre la misma regla, se obtendrían, sucesivamente, series de 9, de 17 ....., y, en general, de $2^k + 1$ términos, cada una de las cuales contiene á la anterior y todas ellas las fracciones $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{1}$, que son la primera y la última de cada una de las series.

Si ahora hacemos corresponder con 0 la fracción $\frac{0}{1}$ y con 1 la fracción $\frac{1}{1}$, podremos dividir el intervalo (0,1) en 2^k partes iguales y hacer corresponder con los puntos de división las $2^k - 1$, fracciones restantes de la serie de Brocot de $2^k + 1$ términos. Si se hace crecer á k indefinidamente, á todo valor x comprendido en el intervalo, acabará por corresponder una cierta fracción, si x es de la forma $\frac{h}{2^k}$, ó un cierto valor límite en caso contrario.

En el primer caso, la demostración se deduce fácilmente del hecho de que cada serie de Brocot contiene todas las anteriores y que lo mismo ocurre con las divisiones correspondientes del intervalo (0,1). La existencia del límite en el segundo caso no es más difícil de demostrar. Por la ley misma de su formación, en toda serie de Brocot cada fracción es una mediana entre las dos inmediatas, y la serie es, por consiguiente, creciente. Además, entre dos fracciones consecutivas, la diferencia es un quebrado cuyo numerador es la unidad y el denominador el producto de los denominadores; es propiedad que se comprueba inmediatamente en las primeras fracciones y se generaliza con facilidad en seguida por vía de recurrencia.

Resulta, pues, que cuando k crece, el valor de x quedará siempre comprendido entre dos valores de la forma

$$\frac{h}{2^k} \quad \text{y} \quad \frac{h+1}{2^k}$$

á los cuales corresponderán fracciones cuya diferencia decrecerá indefinidamente, tendiendo, por consiguiente, á un límite común. Este límite es el valor que se hará corresponder con x. Tendremos así definida en el intervalo (0,1) una cierta función continua y creciente que representaremos por $f(x)$.

Se demuestra fácilmente que esta función tiene una derivada infinita para todo valor de x de la forma $\frac{h}{2^k}$.

En efecto, sea $\frac{m}{n}$ la fracción correspondiente, y $\frac{p}{q}$ la que corresponda á $\frac{h+1}{2^k}$. Aplicando la ley de determinación de la función, se tendrá

$$f\left(\frac{2^i \cdot h + 1}{2^{k+i}}\right) = f\left(x + \frac{1}{2^{k+i}}\right) = \frac{im + p}{in + q},$$

de donde

$$f\left(x + \frac{1}{2^{k+i}}\right) - f(x) = \frac{im+p}{in+q} - \frac{m}{n} = \frac{1}{n(in+q)}$$

y por consiguiente

$$\frac{f\left(x + \frac{1}{2^{k+i}}\right) - f(x)}{\frac{1}{2^{k+i}}} = \frac{2^{k+i}}{n(in+q)}$$

ó pasando al límite ($i = \infty$),

$$f'(x+0) = \infty.$$

De una manera análoga se demostraría que $f'(x-0)$ es también infinita.

La misma demostración no es ya aplicable si x es de forma distinta que la indicada. Sean en este caso $\frac{m}{n}$ y $\frac{p}{q}$ los valores de la función para los valores de la variable

$$a = \frac{h}{2^k} \quad \text{y} \quad b = \frac{h+1}{2^k}$$

que supondremos comprenden al valor de x en una primera aproximación.

Dividiendo este intervalo en dos partes iguales, para obtener una aproximación creciente, x deberá quedar forzosamente *dentro* de uno de los dos intervalos parciales. Supongamos, para fijar las ideas, que es en el primero. Dividiendo ahora este intervalo en otros dos, x podrá quedar comprendido en el primero ó en el segundo de ellos; pero si estuviera todavía en el primero, no siendo igual a a, se podrá al cabo de r_1 divisiones dejarlo contenido en un segundo intervalo.

Dentro de este segundo intervalo x quedará también más cerca de un extremo que del otro y pertenecerá, por consiguiente, al primero ó al segundo de los intervalos que se formen á la primera nueva división. En las divisiones sucesivas x podrá seguir ocupando intervalo del mismo nombre, pero sólo durante un número r_2, finito de divisiones.

Si la aproximación se prolonga indefinidamente, repitiendo las mismas consideraciones, llegaremos á obtener una serie infinita de valores enteros

$$r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots r_n, \ldots\ldots$$

divisible en dos clases, según que correspondieran á casos en los que x permaneciera en primeros intervalos ó á los casos contrarios. La serie clasificada de los r y los valores iniciales a y b determinarían por completo al número x.

Estudiemos ahora los valores sucesivos de la función para los valores aproximados de la variable, y fijémonos con especialidad en los denominadores de las fracciones correspondientes. Los numeradores son menos interesantes y podrían en todo caso ser tratados del mismo modo. Hagamos, para generalidad de las fórmulas

$$u_0 = q \qquad u_1 = n;$$

al cabo de las r_1 primeras divisiones, se tendrá para el denominador irreducible de la expresión

$$f\left(a + \frac{1}{2^{k+r_1}}\right)$$

el número u_2 dado por la igualdad

$$u_2 = r_1 u_1 + u_0.$$

Si x perteneciera originariamente á un segundo intervalo, se tendría para denominador de la expresión

$$f\left(b - \frac{1}{2^{k+r_1}}\right)$$

el número

$$u_2 = u_1 + r_1 u_0$$

que designaremos con la misma letra, por ser, en uno y otro caso, el primer denominador que viene á sustituir á uno de los primitivos en el cálculo sucesivo de los denominadores correspondientes á las crecientes aproximaciones.

Las dos fórmulas se reducirían á una misma, si conviniéramos en hacer para este caso

$$u_0 = n \qquad u_1 = q.$$

Esto supuesto, á la división inmediata, el denominador correspondiente sería $2u_2 - u_1$; pero, según que r_2 pertenezca á una ú otra clase, se tendrá para denominador del valor aproximado de la función, al cabo de las r_2 segundas divisiones,

$$u_2 = r_2 u_2 + (u_2 - u_1) \quad \text{ó} \quad u_3 = u_2 + r_2 (u_2 - u_1).$$

Si convenimos en que, en uno ú otro caso, se tenga, respectivamente,

$$u'_2 = u_2,\ u'_1 = u_2 - u_1 \quad \text{ó} \quad u'_2 = u_2 - u_1,\ u'_1 = u_2,$$

las dos fórmulas se podrán reducir á la fórmula única

$$u_3 = r_2 u'_2 + u'_1,$$

y los r_3 siguientes denominadores podrán calcularse en función de u_3 y de $u_3 - u'_2$, que representados, según la clase de r_3 por

$$u''_3 = u_3,\ u''_2 = u_3 - u'_2 \quad \text{ó por} \quad u''_3 = u_3 - u'_2,\ u''_2 = u_3,$$

darían para el último de dichos denominadores la fórmula

$$u_4 = r_3 u''_3 + u''_2.$$

Procediendo del mismo modo en lo sucesivo, se tendría en general para el denominador que ocupara el lugar $r_1 + r_2 + r_3 + \ldots\ldots + r_s$, después de los dos primitivos, la expresión

$$u_{s+1} = r_s u_s^{(s-1)} + u_{s-1}^{(s-1)} \qquad [I]$$

con

$$u_s^{(s-1)} = u_s,\ u_{s-1}^{(s-1)} = u_s - u_{s-1}^{(s-2)}$$

ó

$$u_s^{(s-1)} = u_s - u_{s-1}^{(s-2)},\ u_{s-1}^{(s-1)} = u_s,$$

según que r_s pertenezca á la primera ó á la segunda clase. Los denominadores intermedios entre u_s y u_{s-1} se calcularían sustituyendo en la fórmula 1), en vez de r_s los valores

$$1, 2, 3, \ldots\ldots r_s$$

y podrán representarse por la notación

$$u_{s_1 1},\ u_{s_1 2},\ u_{s_1 3},\ \ldots\ldots\ u_{s_1 r s} = u_{s+1}.$$

Esto supuesto, $f(x)$ quedará siempre comprendida en un intervalo, en el cual, dado el carácter creciente de la función, la oscilación será igual á la diferencia entre los valores extremos, al mismo tiempo que esta diferencia, en virtud de una de las propiedades enunciadas más atrás, será igual á la unidad dividida por el producto de los denominadores extremos. La relación entre este producto y el intervalo que contiene á x será, si tiende hacia un límite, la derivada de $f(x)$.

Sin entrar en el estudio del caso general, bastará el examen de algunos casos particulares para comprobar la existencia de derivadas no infinitas. Observemos en primer lugar que, si todos los valores r pertenecen á la primera clase, las ecuaciones determinantes de la u se reducen ya, sin ambigüedades, á la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
u_2 &= r_1 u_1 + u_0 \\
u_3 &= r_2 u_2 + u_1 \\
u_4 &= r_3 u_3 + u_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_{s+1} &= r_s u_s + u_{s-1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

y si, además, suponemos iguales á los r, los u formarán una serie recurrente, cuya relación de recurrencia será

$$u_{s+1} = r_s u_s + u_{s-1}$$

con lo cual se tendrá

$$u_s = Aw_1^s + Bw_2^s$$

siendo w_1 y w_2 las raíces de la ecuación de segundo grado

3) $$z^2 - rz - 1 = 0$$

y A y B dos constantes que quedarían determinadas por los valores iniciales.

Al mismo tiempo se tendría

$$u_{s,1} = A(w_1 + 1) w_1^{s-1} + B(w_2 + 1) w_2^{s-1}$$

y el producto de los dos denominadores consecutivos será

4) $$u_s \cdot u_{s,1} = A^2 (w_1 + 1) w_1^{2s-1} +$$
$$+ AB(w_1 + 2 w_1 w_2 + w_2) w_1^{s-2} w_2^{s-1} + B^2 (w_2 + 1) w_2^{2s-1},$$

mientras que el intervalo correspondiente de la variable será igual á $1 : 2^{k+rs+1}$.

Cuando s crece indefinidamente, si $w_1 > w_2$, los dos últimos términos del segundo miembro de la ecuación 4) son infinitamente pequeños con relación al primero, y la relación cuyo límite habría que investigar sería en resumen

$$\frac{2^{k+rs+1}}{A^2 (w_1 + 1) w_1^{2s-1}} = \frac{2^{k+1} w_1}{A^2 (w_1 + 1)} \left(\frac{2^r}{w_1^2}\right)^s.$$

Esta relación tenderá hacia cero o hacia infinito, según que

$$2^r < w_1^2 = \frac{2 + r\left(r + \sqrt{4 + r^2}\right)}{2} \quad \text{ó} \quad 2^r > w_1^2$$

ó bien según que r sea ó no menor que 3 (1).

(1) Cuando $r = 1$ se deduce fácilmente de las consideraciones anteriores la fórmula

$$f\left(\frac{2^n . k - \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)}{2^{r+n-1}}\right) = \frac{p_n}{q_n}$$

con $$p_n = p_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{y} \quad q_n = q_{n-1} + q_{n-2}$$

dada por el Sr. Escott en el *Intermediario*, en su respuesta de Septiembre de 1909 (pág. 212).

Vemos, pues, que si la derivada es infinita en el intervalo (0, 1) para infinitos valores de la variable, hay también otros valores en número infinito para los cuales la derivada es nula. La demostración de Duhamel subsiste en lo que tiene de esencial, pero sus conclusiones abusivas quedan desmentidas.

Parando la atención en las fórmulas 2), se observa que, si uno de los r, r_2, por ejemplo, se anula, el valor de u_4 tendría una expresión análoga á la que hubiera de tener u_3 si r_2, sin ser nulo, perteneciera á la segunda clase. Síguese de aquí que podrían adoptarse las ecuaciones 2) para el caso general, sin más que intercalar en la serie de los r tantos ceros cuantos sean precisos, para tener en cuenta las diferencias de clase que se produzcan entre los r sucesivos no nulos.

De las consideraciones anteriores se deduce también una consecuencia importante. Supongamos escrito el valor de x en el sistema binario de numeración. Sean n_1 el número de ceros que siguen inmediatamente á la coma (podrá ocurrir que $n_1 = 0$), n_2 el de unos que siguen inmediatamente después, n_3 el de los ceros que siguen á los primeros unos, y así sucesivamente. El número x, podrá representarse sin ambigüedad por la serie

$$n_1, n_2, n_3, \ldots..$$

Pues bien, $f(x)$ viene dado en todos los casos por la fracción continua

$$f(x) = \cfrac{1}{1 + n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{n_4 + \cdots}}}}$$

En gracia á la brevedad, omitimos la demostración, que podrá ser hecha fácilmente por el lector.

Consecuencias inmediatas de esta expresión son:

1.° Que sólo para los valores de x de la forma $h : 2^k$ es comensurable $f(x)$.

2.° Que para los restantes valores racionales de x, $f(x)$ es inconmensurable algébrico de segundo orden, y

3.° Que para x inconmensurable, $f(x)$ es también inconmesurable trascendente ó algébrico de orden superior al segundo.

Todas las mencionadas propiedades de la función en estudio demuestran claramente que no se trata de una función analítica, pero pueden, sin embargo, en la proximidad de determinados valores de la variable, determinarse funciones analíticas que tengan con ella una infinidad de valores comunes. Sean, en efecto, como atrás,

$$a = \frac{h}{2^k} \qquad \text{y} \qquad b = \frac{h+1}{2^k}$$

dos valores de la variable correspondientes á los valores

$$\frac{m}{n} \qquad \text{y} \qquad \frac{p}{q}$$

de la función, siendo, por supuesto, estas dos últimas fracciones irreductibles.

Para todos los valores de la variable de la forma

$$x = a + \frac{1}{2^{k+\lambda}},$$

en la que λ representa un entero cualquiera, se tendrá

$$f(x) = \frac{p + \lambda m}{q + \lambda n}$$

pero de la primera de estas expresiones se deduce

$$-\lambda = k + \frac{\log(x - a)}{\log 2}$$

y, por consiguiente, para todos los valores de x de la forma expresada, la función podrá calcurse por la fórmula

$$5) \qquad f(x) = \varphi(x) = \frac{(p - km)\log 2 - m \log(x - a)}{(q - kn)\log 2 - n \log(x - a)}.$$

Las funciones representadas por esta fórmula para los distintos valores de a y de k (m, n, p, q son funciones de a y de k, las cuales deben también satisfacer ciertas limitaciones fácilmente determinables con lo que antecede), presentan caracteres comunes que conviene conocer. Para $x = a$ la función, de forma indeterminada, tiene como valor límite $\frac{m}{n}$. La derivada para este valor es infinita y la función, siempre creciente, se hace infinita para

$$x = a + 2^{\frac{q - kn}{n}},$$

cambia de signo al pasar por infinito, pero sigue siendo creciente y tiende de nuevo hacia $\frac{m}{n}$ cuando x crece indefinidamente. Para valores de x menores que a, $x - a$ se hace negativa, y su logaritmo imaginario tomaría los infinitos valores comprendidos en la fórmula

$$\log(x - a) = \log(a - x) + (2k + 1)\pi\sqrt{-1}$$

en la que k representaría un número entero cualquiera. No es posible aprovechar la arbitrariedad de k para hacer real la fracción que expresa á $\varphi(x)$, ni aun para valores particulares de m, n, p y q. Si multiplicamos, en efecto, el numerador por la conjugada del denominador é igualamos á cero la parte imaginaria del producto esta parte imaginaria, que consta, á su vez, de una parte constante y de otra variable con log $(a - x)$, da lugar á dos ecuaciones, una de ellas idéntica, pero reducible la otra á

$$(p - km)n = (q - kn)m$$

ó, lo que es lo mismo, á

$$pn - mq = 0,$$

cuando se sabe que se tiene

$$pn - mq = 1.$$

La curva real representativa de la función analítica tiene, pues, un punto de parada para $x = a$, es decir, precisamente para el punto en que tiene un contacto de orden infinito con la línea que representa la función singular objeto de este estudio.

En el caso particular en que se tenga

$$k = m = 0 \qquad n = p = q = 1$$

la expresión 5) se reduce á

$$\varphi(x) = \frac{\log 2}{\log 2 - \log x},$$

la cual es igual á $f(x)$ para los extremos del intervalo (0, 1), en el que dicha función ha quedado definida, y en general para todo número de la forma $1 : 2^k$, siendo k un entero positivo: $\varphi(x)$ se hace infinita, fuera ya de ese intervalo, para $x = 2$, y se podrían prolongar hasta este valor las concordancias entre $\varphi(x)$ y $f(x)$, generalizando la ley de formación de esta última función, mediante la asignación al valor 2 de la variable de la fracción $\frac{1}{0}$. Se ve sin dificultad que los valores de la función en los intervalos (0, 1) y (1, 2) están entonces ligados por la relación

$$f(1-x)f(1+x) = 1,$$

y como, además, se tiene

$$f(x) + f(1-x) = 1$$

se deduce

$$f(1+x) = \frac{1}{f(1-x)} = \frac{1}{1-f(x)}$$

lo que reduce la determinación de la función, en todo el intervalo hasta ahora considerado, al cálculo de los valores del intervalo $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, al cual podríamos llamar intervalo fundamental.

Todavía podría extenderse la generalización para valores de la variable mayores que 2; $\varphi(x)$ se hace entonces negativa y da para las distintas potencias de 2

$$\varphi(4) = -1, \quad \varphi(8) = -\frac{1}{2}, \ldots\ldots \quad \varphi(2^k) = -\frac{1}{k-1}, \ldots\ldots$$

y podrían mantenerse las igualdades para esos valores haciendo

$$f(4) = \frac{1}{-1}, \quad f(8) = \frac{1}{-2}, \ldots\ldots \quad f(2^k) = \frac{1}{1-k}, \ldots\ldots$$

y entonces los valores intermedios de la función podrían reducirse á los del intervalo fundamental mediante la fórmula

$$f[2^k(1+x)] = -f\left(\frac{1}{2^{k-2}} - \frac{x}{2^{k-1}}\right) \quad (0 < x < 1).$$

Para valores negativos de x, la función φ no puede servir de punto inmediato de apoyo para la generalización, porque hemos visto ya que se hace imaginaria é infinitiforme. Veamos cómo se distribuyen sus valores. Si suponemos los logaritmos neperianos, lo que podrá siempre hacerse porque la elección de sistema no varía el valor de φ, se ve inmediatamente que el denominador se reduce á

$$\log 2 - \log(-x) = \log 2 - \log x + (2k+1)\pi\sqrt{-1}.$$

En la representación geométrica admitida para las imaginarias, estos infinitos valores corresponderán á una serie de puntos situados á distancias iguales á 2π sobre una recta paralela al eje imaginario, que corta al eje de las reales en el punto correspondiente á $\log 2 - \log x$, el cual punto divide en dos partes iguales uno de los intervalos determinados por los infinitos puntos representativos de los valores del denominador.

A cada uno de estos valores corresponde para $\varphi(x)$ otro valor, cuya construcción geométrica sería muy sencilla. Bastaría unir el origen con el punto representativo del denominador mediante un radio vector, cuya longitud designaremos para abreviar por ρ, trazar la recta simétrica á ésta con relación al eje real y tomar sobre ella una longitud igual á

$$\frac{\log 2}{\rho}.$$

La teoría de la transformación por radios vectores recíprocos demostraría inmediatamente que los puntos así determinados están sobre una circunferencia tangente en el origen al eje imaginario y cuyo diámetro es igual á

$$\frac{\log 2}{\log 2 - \log x}.$$

Sobre esta circunferencia, los puntos formarían un conjunto infinito con un solo derivado en el origen. Para todos los valores negativos de x habría, pues, un valor asintótico del eje de las reales, que podría representarse por $\pm 0 \cdot \sqrt{-1}$; pero de aquí no podríamos deducir con lógica la anulación de la función, porque ese valor existe igualmente para x positiva, aunque haya allí otro valor real que aquí falta.

Procede la diferencia de que entonces la recta que contiene los puntos representativos del denominador es cortada por el eje de las reales en uno de los puntos de división, mientras que en el caso actual lo es en la mitad de uno de los intervalos. Allí el diámetro de la circunferencia era en cierto modo *realizado* por un valor efectivo sobre el eje real; aquí es tan sólo una cantidad *ideal* que no viene determinada sino por el conjunto de valores. La completa realización en el primer caso determina la magnitud y el signo; en el segundo, es el valor absoluto el único conocido, quedando el signo y aun la dirección indeterminados; pero en los dos casos los valores absolutos son idénticos.

Estas consideraciones y las analogías anteriormente comprobadas inducen á generalizar la función f para los valores negativos de x asignándole un valor absoluto igual al de $f(-x)$; y en tal caso, si no se ha de salir del campo de las cantidades reales, como parece exigirlo el carácter aritmético de la función, sólo faltará escoger el signo. Dar el mismo signo á $f(x)$ y á $f(-x)$ no estaría justificado por ninguna asimilación; supondría, además, una identidad que en la función analítica correlativa no existe entre los valores situados á derecha é izquierda del origen; el signo $-$ parece preferible y entonces se tendría

$$f(x) = -f(-x).$$

La función sería entonces creciente en todo intervalo, como lo era ya para los valores positivos de la variable.

Fácilmente se ve, sin embargo, que esta generalización no es la única posible; siempre en toda generalización ocurre lo mismo; es un paso de lo definido á lo indefinido, y en el campo de la posibilidad los caminos son infinitos; pero hay soluciones más ó menos naturales que parecen venir impuestas por un proceso de evolución mental, cuyo valor será ó no confirmado por la futura fecundidad de los supuestos y por la sencillez ó comodidad de las notaciones. Otra generalización podría aceptarse, que tendría la ventaja de abarcar toda la funcion en una definición única, y es la siguiente: dadas las fracciones originales

$$\frac{-1}{k+1} \quad \text{y} \quad \frac{1}{-k},$$

y asignando la primera al valor -2^{k+1} de la variable y la segunda al valor 2^{k+1}, los valores restantes de la función serían los obtenidos por mediación en la forma explicada con todo detalle en lo que antecede.

Esta generalización, sin embargo, no diferirá esencialmente de la anterior en lo que se refiere á la sucesión de valores de la función y á la distribución de las derivadas infinitas y nulas, objeto principal de nuestro estudio. Todo se reduciría á un cambio de escala para las variables negativas y á una variación de signo al paso por el valor que hace á la función infinita.

Podría, por último, prescindirse de los valores negativos de la variable, aceptando para ellos el imaginarismo ó la indefinición de la función, limitando el estudio á los valores positivos que son las más interesantes. En esta parte hemos visto que las funciones f y φ tienen infinitos valores comunes que corresponden á la fórmula

$$a = \frac{1}{2^r}$$

en la que r es un entero cualquiera positivo ó negativo. Estos valores no son, sin embargo, los únicos, y la razón es obvia: para todos estos valores de x, la derivada de $f(x)$ se hace infinita, mientras que la de $\varphi(x)$ lo es sólo para $x = 0$ y para $x = 2$; y como f y φ son ambas crecientes y continuas, será forzoso que, entre cada dos de los valores definidos haya, por lo menos, uno para el cual vuelvan á igualarse f y φ. Esta consideración demuestra una vez más la existencia de valores de x en número infinito para los cuales $f'(x)$ no es infinita.

Lo que acabamos de decir respecto á la función φ más sencilla es igualmente aplicable á las más complicadas definidas por expresión 5), aunque en éstas la comunidad de valores con f no se extiende sino al intervalo (a, b), pues sólo para

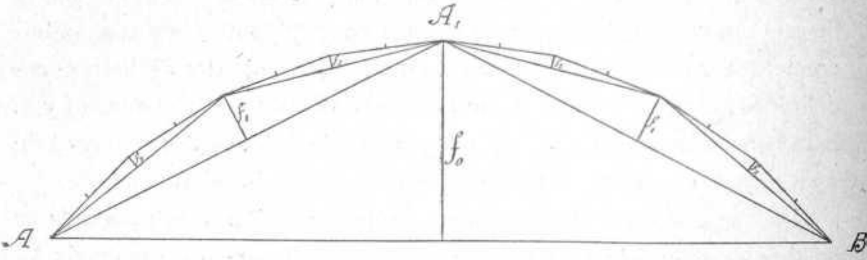
$$\varphi(x) = \frac{\log 2}{\log 2 - \log x}$$

van las analogías más adelante, precisamente por haber servido esta función para la generalización aceptada de f.

II

El otro ejemplo que tratábamos de presentar es el de una construcción aproximada muy usada en la práctica y que conduciría, rigurosamente aplicada, á una curva con infinitas singularidades en el menor intervalo: la construcción es la que se deduce de la llamada *regla del cuarto*. Para trazar sobre el terreno curvas circulares de gran radio y no mucha longitud, suelen darse los dos puntos extremos, que reciben los nombres impropios de *tangente de entrada* y *tangente de salida*, y el punto medio de la curva. De este modo quedan inmediatamente determinadas la cuerda y la flecha del arco.

A partir de estos datos se intercalan nuevos puntos, procediendo del modo siguiente: se une el punto medio con los extremos y se tienen así las cuerdas de los arcos mitades; en la mitad de estas cuerdas se elevan perpendiculares, sobre las cuales se toman longitudes iguales á la cuarta parte de la flecha del arco primitivo; los puntos determinados de este modo son aproximadamente los que, con los tres dados, dividirían el arco en cuatro partes iguales. Sobre cada una de estas partes y las que sucesivamente se obtuvieran, se podría proceder igualmente, dividiendo siempre por 4 la flecha del arco doble y determinando de este modo puntos cada vez más numerosos de la curva.



La justificación de la regla es muy sencilla. Sean f y $2a$ la flecha y la cuerda del arco, y 2α el ángulo en el centro. Se tendrá, para la flecha del arco mitad, la expresión

$$\frac{\alpha \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \alpha},$$

la cual, si α es muy pequeño, puede sustituirse prácticamente por

$$\frac{a\alpha}{4},$$

y como además

$$f = a \operatorname{tang} \alpha,$$

y, en la misma hipótesis, podrá sustituirse por $a\,\alpha$, se tendrá en definiva, aproximadamente,

$$\frac{a \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \alpha} = \frac{f}{4},$$

y con tanta mayor aproximación cuanto más pequeño sea f con releción á a.

Siendo el trazado aproximado, claro es que la línea á que se llegue aplicándole no puede ser un arco de círculo; pero si tratáramos de representar por una ecuación la línea de referencia, fácilmente advertiríamos que tal ecuación no podría ser expresada por funciones analíticas. En efecto, por la misma naturaleza de la construcción, la línea en tal caso debería ser simétrica con relación á su normal, por lo menos para un conjunto de puntos infinito y denso y en una extensión limitada, pero finita, á uno y otro lado de cada uno de esos puntos. Se seguiría de aquí que, para todos ellos, la derivada del radio de curvatura, con relación á la longitud de la curva, sería nula. El radio de curvatura sería, pues, constante, y la curva una circunferencia, lo que hemos visto ya que es imposible.

Lo que ocurre es que el eje de simetría no es normal á la curva, la cual tiene dos tangentes en cada uno de los puntos de la serie enumerable que se deduce inmediatamente de la definición. La tangente no es única sino en los puntos límites que acaban de establecer la continuidad de la curva.

La existencia de tangente, simple ó doble, es fácil de demostrar para todos los casos.

Bastará comprobarla para uno de los puntos extremos, y para ello estudiemos el ángulo que con la cuerda primitiva forman las distintas secantes que unen dicho extremo con el más próximo de los puntos sucesivamente intercalados. Ese ángulo vendrá expresado por las sumas parciales de la serie

$$\alpha = \operatorname{arc\ tang} \frac{f}{a} + \operatorname{arc\ tang} \frac{f}{2\sqrt{a^2 + f}} +$$

$$+ \operatorname{arc\ tang} \frac{f}{4\sqrt{a^2 + f^2 + \frac{f^2}{4}}} + \ldots + $$

$$\text{6)} \qquad + \operatorname{arc\ tang} \frac{f}{2^k\sqrt{a^2 + f^2 + \ldots + \frac{f^2}{4^{k-1}}}} + \ldots$$

la cual es, evidentemente, convergente porque la relación de un término al anterior tiene por límite $\frac{1}{2}$. En el límite será, pues, el ángulo perfectamente determinado x el que forme la tangente con la cuerda.

Este ángulo es un poco inferior al que formaría la tangente á la circunferencia que pasa por los tres puntos, y que sería igual á

$$2 \operatorname{arc tang} \frac{f}{a};$$

los ángulos de las dos tangentes que existen en cada punto serán, pues, salientes y la curva convexa.

También se ve fácilmente que la diferencia entre los dos ángulos es tanto más pequeña cuanto menor sea f con relación á a, y que se anula con esta relación.

Del conocido desarrollo

$$\operatorname{arc tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots..,$$

convergente para x no superior á la unidad, se deduce el nuevo desarrollo, también convergente para x y ε menores que uno,

$$\operatorname{arc tang} x(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} = x(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} - \frac{x^3}{3}(1+\varepsilon)^{-\frac{3}{2}} + \ldots..$$

Si x y ε son menores que la unidad, los términos del segundo miembro son decrecientes en valor absoluto, y el segundo representará un límite del error que se cometa cuando se tome el primero por valor de la serie. Este error sería *a fortiori* menor que x^3.

También se tendría

$$x(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} = x\left(1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{2^2} - \ldots..\right) =$$

$$= x\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) + R,$$

y, como anteriormente, se puede demostrar que

$$R < x\varepsilon^2,$$

luego, en definitiva, se tendrá

$$\text{arc tang}\, x(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} = x\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

con un error menor que $x\varepsilon^2$ ó que x^3 (*).

Esto supuesto, el término general del desarrollo 6) será

$$\text{arc tang}\, \frac{f}{2^k\sqrt{a^2+f^2+\frac{f^2}{4}+\ldots\ldots+\frac{f^2}{4^{k-1}}}} =$$

$$= \text{arc tang}\, \frac{f}{2^k a}\left[1+\frac{f^2}{a^2}\left(1+\frac{1}{4}+\ldots\ldots+\frac{1}{4^{k-1}}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{f}{2^k a}\left[1-\frac{f^2}{2a^2}\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3\cdot 4^{k-1}}\right)\right] \pm \delta$$

$$\delta < \frac{4}{3}\cdot\frac{f^3}{2^k\cdot a^3}.$$

Sustituyendo en el mismo desarrollo 6) los distintos términos por sus valores aproximados que acabamos de determinar, tendremos, pues,

$$\alpha = \frac{2f}{a} - \frac{f^3}{a^3}\sum_1^\infty \frac{1}{2^k}\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3\cdot 4^{k-1}}\right)$$

con un error menor que

$$\frac{8}{3}\cdot\frac{f^3}{a^3}$$

y como

$$2\ \text{arc tang}\, \frac{f}{a} = \frac{2f}{a} - \frac{2f^3}{3a^3} + \ldots\ldots$$

se deduce inmediatamente que

$$\alpha = 2\ \text{arc tang}\, \frac{f}{a}$$

con un error, á lo sumo, del orden del cubo de $\frac{f}{a}$.

Se ve, pues, que en el límite las irregularidades desaparecen y que la línea está, por consiguiente, formada por un conjunto de arcos de círculo infinitamente pequeños, cuyos centros no coinciden, y, lo que

(*) Los dos errores no podrán sumarse, porque son evidentemente de signos contrarios.

es más, forman un conjunto discontinuo. La discontinuidad de las tangentes no es óbice para la existencia de círculo osculador; éste, sin embargo, es doble donde es doble la tangente.

Todos estos círculos osculadores son, sin embargo, iguales. Para determinar su radio bastará hallar el límite de la relación entre el cuadrado de la semicuerda y el doble de la flecha, y se tendrá así después de suprimir los factores comunes

$$\rho = \frac{a^2 + \frac{4f^2}{3}}{2f} = \frac{a^2 + f^2}{2f} + \frac{f}{6} = R + \frac{f}{6},$$

fórmulas en las que ρ representa el radio que buscábamos y R el de la circunferencia que pasa por los tres puntos primitivos. La diferencia entre los dos radios disminuye, pues, indefinidamente con f.

La línea es rectificable. La aplicación reiterada del teorema de Pitágoras conduce á la fórmula sencilla

$$7) \qquad L = 2\sqrt{a^2 + \frac{4f^2}{3}}$$

Esta longitud es algo inferior á la del arco de círculo correspondiente. Así debía resultar, porque la línea es convexa y queda envuelta por el arco. Sin embargo, cuando la relación de f á a es muy pequeña, la diferencia entre las dos longitudes es completamente despreciable en la práctica. Para tener una idea del grado de aproximación, representemos por $2x$ la longitud del arco de círculo medido con el radio; la longitud dada por la fórmula 7) se reduciría entonces á

$$\sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \frac{4(1 - \cos x)^2}{3}} = \sqrt{1 + \frac{4 - 8\cos x + \cos^2 x}{3}}$$

y para x suficientemente pequeños, y despreciando infinitamente pequeños de orden igual ó superior al séptimo, esta expresión será equivalente á

$$x\left(1 - \frac{x^4}{180}\right),$$

lo que se demuestra por desarrollos fáciles, aunque un poco largos, que omitimos en gracia á la brevedad.

El área comprendida entre la curva y la cuerda está dada por la serie

$$S = af + \frac{f}{4}\sqrt{a^2+f^2} + \frac{f}{4^2}\sqrt{a^2+f^2+\frac{f^2}{4}} + \ldots + $$

$$+ \frac{f}{4^k}\sqrt{a^2+f^2\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3\cdot 4^{k-1}}\right)} + \ldots,$$

que se reduce para f muy pequeño, y despreciando términos de orden superior al de f^3, á

$$\frac{4af}{3} + \frac{8f^3}{45a}.$$

Con el mismo grado de aproximación, el área del segmento circular correspondiente sería

$$2\left(\frac{a^2+f^2}{2f}\right)^2 \operatorname{arc\,tang} \frac{f}{a} - a\,\frac{a^2-f^2}{2f} = \frac{4af}{3} + \frac{4f^3}{15a}.$$

Es un poco mayor, como debía ocurrir, pero la diferencia es de orden de f^3 y aproximadamente igual á

$$\frac{4f^3}{45a}.$$

Cuando la relación de f á a no es tan pequeña como hemos supuesto al calcular las fórmulas aproximadas que acabamos de determinar, la curva se aparta ya bastante del círculo. Si se hace en el caso extremo

$$a = 0 \qquad f = D$$

se deducirá

$$L = \frac{4D}{\sqrt{3}}$$

$$S = \frac{D^2}{4}\left(1 + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{4}} + \frac{1}{4^2}\sqrt{\frac{21}{4^2}} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4^k}\sqrt{\frac{4^{k+1}-1}{3\cdot 4^k}} + \ldots\right) = 0{,}3436 \ldots D^2,$$

valores que se separan ya considerablemente de la longitud de la circunferencia y del área del círculo.

Aunque la línea que estudiamos no es analítica, se podría definir, para cada uno de los puntos definidos, una curva analítica que tenga común con ella un conjunto infinito de puntos en la proximidad del dado.

Al efecto, podemos limitarnos á uno de los extremos, pues otro punto cualquiera podría ser siempre considerado como el extremo de un arco más pequeño, al que se podrían aplicar las mismas consideraciones.

Representemos, pues, por r_k y θ_k las coordenadas polares, con relación al punto y á la cuerda, tomadas como polo y como eje, del extremo del arco de longitud igual á

$$\frac{L}{2^k}.$$

Hagamos para abreviar

$$b_0 = a,\ b_1 = 2\sqrt{a^2 + f^2},\ .....$$

$$b_k = 2^k \sqrt{a^2 + f^2 \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^{k-1}}\right)}$$

se deduce

$$r_k = \frac{2 b_k}{4^k}$$

$$\theta_k = \text{arc tang}\,\frac{f}{b_0} + \text{arc tang}\,\frac{f}{b_1} + \,.....\, + \text{arc tang}\,\frac{f}{b_k}$$

y si entre estas dos ecuaciones eliminàramos á k, se tendría una relación entre r y θ que sería la representativa de la curva buscada. Para ello será preciso que tanto r_k como θ_k, que hasta ahora sólo están definidos para valores enteros de k, se interpreten también para valores fraccionarios é inconmensurables del mismo parámetro y que la interpretación sea tal que una y otra resulten funciones analíticas en k.

Para r_k la cosa no ofrece dificultades; en cuanto á θ_k podrá aplicarse la conocida fórmula de Euler

$$8)\qquad \Sigma_0^k f(x) = \int_0^k f(x)\,dx - \frac{1}{2}\,[f(x)]_0^k + \\ + \frac{B_2}{2!}\,[f'(x)]_0^k - \frac{B_4}{4!}\,[f''(x)]_0^k + \,.....$$

La función $f(x)$ sería en este caso

$$f(x) = \text{arc tang} \frac{f}{2^x \sqrt{a^2 + f^2\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^{x-1}}\right)}}.$$

Definida así la función continua en k, que toma los valores θ_k, habría que sustituir en ella, en vez de k, su valor deducido de la ecuación

$$r_k = \frac{1}{2^{k-1}} \sqrt{a^2 + f^2\left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3 \cdot 4^k}\right)}$$

ó sea

$$9) \qquad k = \frac{\log \frac{2}{3}\left[3a^2 + 4f^2 \pm \sqrt{(3a^2 + 4f^2)^2 - 48f^2 r_k^2}\right] - 2\log r_k}{\log 4}$$

Tendríamos así una expresión de la forma

$$\theta = \varphi(r^2),$$

de la que inmediatamente se deduce que el origen es un centro de la curva.

La relación 9) demuestra también que k se hace imaginario para

$$r > \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3a^2 + 4f^2}{2f}.$$

Este límite es el que hace máximo á r_k é iguales las dos raíces de la ecuación cuyos logaritmos entran en la expresión de k. Como r entra por su cuadrado, el valor mínimo que habrá que considerar en el cálculo de θ será $r = 0$ y, en este caso, las raíces de la ecuación en 4^k son

$$4^k = \infty \quad \text{y} \quad 4^k = \frac{4f^2}{3a^2 + 4f^2}.$$

Para el primero de estos valores, k se hace también infinito y, como en la expresión 8), en nuestro caso, tanto $f(x)$ como sus derivadas son infinitamente decrecientes, se tendrá

$$\theta_\infty = \int_0^\infty f(x)dx + \frac{1}{2} f(0) - \frac{B_2}{2!} f'(0) +$$
$$+ \frac{B_4}{4!} f''(0) + \ldots\ldots = \alpha.$$

Para el segundo, que es evidentemente menor que la unidad, k será negativo y, como á $k = 0$ corresponde $\theta = 0$, es claro que θ deberá pasar por valores negativos. Sólo se exceptuará el caso en que a sea nulo, para el cual k y θ serán iguales á cero, y la segunda tangente del punto doble se confundirá con la cuerda.

De la discusión de las fórmulas resulta, pues, que la curva analítica tiene figura de lazo con un punto doble, por el cual pasa la cuerda primitivamente dada, la cual corta en general á la curva en otros dos puntos. Habrá que observar, sin embargo, que el punto doble no es propiamente un punto analítico; si así fuera, el radio de curvatura debería para él ser infinito. El radio de curvatura, sin embargo, es en este punto, por lo menos para una de las ramas, igual á ρ. Vemos, pues, que la curva pierde su regularidad analítica precisamente en el punto en el que la curva irregular á quien oscula adquiere esa regularidad para el intervalo infinitamente pequeño.

Huelga decir que a cada punto definido en el trazado aproximado corresponde una curva analítica distinta.

Generalizando la construcción de la línea singular cuyo estudio sumario acabamos de hacer, pueden definirse otras líneas en las cuales la relación de dos flechas sucesivas fuera un número cualquiera, r, en vez de ser $\frac{1}{4}$. Estudiemos primero el caso en el que

$$r < \frac{1}{4}.$$

Se vería sin dificultad, por los mismos métodos anteriormente empleados, que la tangente es doble en cada uno de los puntos definidos y que los ángulos son todos salientes y la curva convexa. Su longitud total vendrá dada por

$$L = 2\sqrt{a^2 + \frac{f^2}{1 - 4r^2}}.$$

No existirá ya propiamente círculo osculador. Su radio habría de ser el límite para $n = \infty$ de la expresión

$$\frac{L^2}{4^{n+1} \cdot 2r^n f},$$

que crece indefinidamente. La curvatura, pues, es nula, pero se podría apreciar un ángulo de contingençia aplicando en vez del círculo una curva de la forma

$$\text{10)} \qquad \rho = 2b\,\text{sen}^k(\alpha - \omega),$$

que degeneraría en círculo para $k = 1$.

En las proximidades del límite se tiene, en efecto, despreciando infinitamente pequeños de orden cada vez más elevado

$$\rho = \frac{L}{2^{k+1}} \qquad \alpha - \omega = \frac{(2r)^k \cdot 2f}{(1 - 2r)L},$$

siendo ρ y ω las coordenadas polares referidas al extremo de la línea como polo y á la cuerda primitiva como eje polar, y α el ángulo que forma con el eje la tangente en el origen.

Dedúcese de aquí

$$\rho(\alpha - \omega) = \frac{f}{1 - 2r}\left(\frac{L}{2\rho}\right)^{\frac{\log r}{\log 2}},$$

y después de fáciles transformaciones de cálculo

$$\rho = \left[\frac{L}{2}\left(\frac{1 - 2r}{f}\right)^{-\frac{\log 2}{\log r}}\right]^{\frac{\log r}{\log r + \log 2}} \cdot (\alpha - \omega)^{-\frac{\log 2}{\log 2 + \log r}}$$

ó haciendo

$$k = -\frac{\log 2}{\log 2 + \log r},$$

$$\rho = \left(\frac{L}{2}\right)^{1+k} \cdot \left(\frac{1 - 2r}{f}\right)^k (\alpha - \omega)^k;$$

y sustituyendo $\alpha - \omega$ por sen $(\alpha - \omega)$, lo que es permitido en el límite, se llegará al fin á la ecuación 10) con sólo hacer

$$b = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^{1+k} \cdot \left(\frac{1 - 2r}{f}\right)^k.$$

Además de estas curvas osculadoras, podrían también determinarse, como en el caso anterior, curvas de contacto más íntimo que tuvieran con la línea estudiada un número infinito de puntos comunes, en el menor intervalo conteniendo al punto de contacto.

Consideremos ahora el caso en que

$$\frac{1}{2} > r > \frac{1}{4}.$$

La tangente sigue siendo doble, pero aquí los ángulos son entrantes, y si r es suficientemente grande, las dos tangentes pueden llegar á cruzarse. Se tendría entonces una línea con lazos; pero estos lazos serían siempre en número finito, en tanto que r quede incluído dentro del intervalo considerado. La longitud de la línea vendrá expresada por igual fórmula que en el caso anterior, y las curvas osculadoras tendrán ecuaciones de la misma forma 10), con la única diferencia de que k será en este caso mayor que 1.

Si

$$r = \frac{1}{2}$$

el exponente k se hace infinito, la curva osculadora se reduce al origen, la longitud de la línea se hace también infinita, y los puntos definidos son todos puntos de lazo, desapareciendo la tangente, aunque conservándose la continuidad de la curva. Si quisiéramos estudiarla en la proximidad infinitesimal de uno de sus puntos, habría que partir de las ecuaciones

$$\rho_k = \frac{\sqrt{a^2 + kf^2}}{2^k}$$

$$\theta_k = \Sigma_0^k \operatorname{arc\,tang} \frac{f}{\sqrt{a^2 + kf^2}},$$

entre las cuales debería eliminarse á k; pero se podrían sustituir estas ecuaciones por otras más sencillas, porque para k suficientemente grande, se tendría, despreciando infinitamente pequeños de orden superior,

$$11) \quad \begin{cases} \rho = \dfrac{f\sqrt{k}}{2^k} \\ \theta = \Theta + 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dots\dots + \dfrac{1}{\sqrt{k}}, \end{cases}$$

donde Θ representa una constante dada por la expresión

$$\Theta = \Sigma_1^\infty \left(\operatorname{arc\,tang} \frac{f}{\sqrt{a^2 + f^2}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

Esta última serie es, en efecto, convergente, porque sus términos acaban por ser del orden de

$$\frac{1}{k\sqrt{k}}.$$

En cambio, la serie que representa á θ es conocidamente divergente y, por lo tanto, el radio vector evanescente gira sin límite alrededor del origen, describiendo su extremo una espiral asintótica con él, y cuya orientación quedaría indeterminada, si se tratara de hacerla osculadora. En los puntos intermedios, esta espiral no representaría sino una de las ramas del lazo, pues la otra rama sería otra espiral igual, que se desarrollaría en sentido inverso continuando el trazado.

Prescindiendo de la orientación, las ecuaciones II) podrán reducirse á

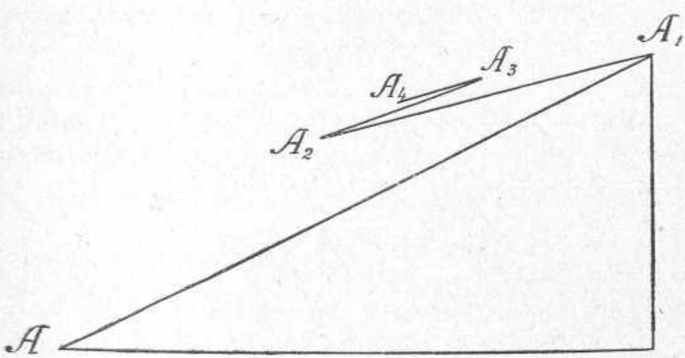
$$\rho = \frac{f\sqrt{k}}{2^k}, \qquad \theta = 2\sqrt{k}$$

de donde

$$\rho = \frac{f\theta}{2^{1+\frac{\theta^2}{4}}},$$

ecuación de la espiral que define la naturaleza de la línea en el punto asintótico.

Aunque la tangente hemos visto que desaparece ya para este caso



en los puntos determinados por un número finito de intercalaciones, puntos que constituyen un conjunto infinito y denso en todo intervalo, no hay que deducir de aquí que ha de ocurrir lo mismo para los puntos límites, á los que la definición no llega sino al través de un número infinito de operaciones. Fácilmente se puede ver que hay puntos con tangente determinada. Sea, en efecto, uno de los que dividen en tres partes iguales la línea infinita: para llegar á él se podrá partir del extremo más próximo hasta llegar al punto medio, retroceder en seguida describiendo un arco igual á la cuarta parte, volver á avanzar un octavo de curva y así sucesiva, alternativa é indefinidamente

La dirección última de esta línea en ziszás vendrá determinada por el ángulo β que forma con la cuerda inicial, el cual estará expresado por la serie

$$\beta = \operatorname{arc\,tang} \frac{f}{a} - \operatorname{arc\,tang} \frac{f}{\sqrt{a^2 + f^2}} +$$

$$+ \operatorname{arc\,tang} \frac{f}{\sqrt{a^2 + 2f^2}} - \ldots\ldots,$$

serie convergente por tender hacia cero sus términos y ser éstos alternativamente de signos contrarios.

Cuando se tenga

$$1 > r > \frac{1}{2},$$

la continuidad de la línea persiste todavía, porque la distancia entre sus puntos disminuye sin límite; la tangente sigue siendo indeterminada en los puntos de división binaria; pero desaparece además de los restantes puntos. Se tendrá, en efecto,

$$\rho_k = \frac{\sqrt{a^2 + f^2 + 4\,r^2 f^2 + 16\,r^4 f^4 + \ldots\ldots + 4^k\,r^{2k} f^2}}{2^k} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + f^2\,\dfrac{(4r^2)^{k+1} - 1}{4r^2 - 1}}}{2^k}$$

$$\theta_k = \operatorname{arc\,tang} \frac{f}{a} + \operatorname{arc\,tang} \frac{2rf}{\sqrt{a^2 + f^2}} + \ldots\ldots +$$

$$+ \operatorname{arc\,tang} \frac{(2r)^k f}{2^k \rho_k}$$

y cuando k sea muy grande, aproximadamente

$$\rho_k = r^k f \qquad \theta_k = \Theta_1 + \frac{k\pi}{4},$$

representando Θ_1 una constante, que se determinaría como en el caso anterior.

Si pues se prescinde de la orientación, la naturaleza de los puntos definidos por un número finito de intercalaciones vendrá representada por un punto asintótico de la espiral logarítmica

$$\rho = f r^{\frac{4\theta}{\pi}}$$

en la cual el valor de a ha perdido toda influencia.

En los puntos definidos por un número infinito de operaciones no podrá haber tampoco tangentes únicas en ningún sentido, porque de cualquier modo que se recorran los arcos infinitamente pequeños que conducen al límite, como los términos positivos ó negativos de la serie representativa de θ tienen valores absolutos que se acercan indefinidamente á $\frac{\pi}{4}$, la serie será divergente en todos los casos.

Preséntase, sin embargo, en este caso una particularidad curiosa. Tales pudieran ser las sucesiones de los signos en la serie que da el valor de θ, que la tangente del punto en estudio, aun siendo indeterminada, no pudiera tomar más que dos, tres ó cuatro valores (*), hecho que caracterizaremos diciendo que en ese punto la tangente es *múltiple*, para distinguirlo del caso en que sólo varía en cada sentido entre dos límites, pero tomando entre ellos todas las posiciones intermedias.

Si llegamos al límite

$$r = 1,$$

la continuidad de la línea queda ya rota, porque los puntos que habrían de ser contiguos quedan á distancia finita. En las primeras intercalaciones se manifiesta aún la influencia de a; pero, á medida que su

(*) No podrían ser más en este caso por ser $\frac{\pi}{4}$ el límite del incremento de θ.

número aumenta, esta influencia tiende a desvanecerse y queda sólo la de f, al cual ρ se acerca indefinidamente. Los puntos sucesivamente intercalados en la aproximación de uno de los ya definidos tienden entonces á agruparse sobre una circunferencia, cuyo radio se deducirá de la ecuación

$$\frac{R^2}{4} + f^2 = R^2$$

de donde

$$R = \frac{2f}{\sqrt{3}}.$$

El incremento de θ, á cada nueva intercalación, sería también entonces constante en el límite é igual á

$$\text{arc tang} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Si se tuviera desde el principio

$$a = R = \frac{2f}{\sqrt{3}},$$

la constitución final del conjunto empezaría á realizarse desde el primer momento, y se ve inmediatamente que habría de reducirse á una red triangular equilátera formada á partir de los tres puntos que son datos iniciales del sistema. Fuera de este caso, la acción perturbadora de a introduce en el límite infinitas redes, todas iguales, pero con distintas situación y orientaciones, aunque todas estas redes están ligadas entre sí por los triángulos construíbles mediante un número finito de operaciones.

Finalmente, si $r > 1$, la discontinuidad va en aumento. Los puntos que según la definición deberían limitar los segmentos de curva de longitud

$$\frac{L}{2^k}$$

tienden á formar también aquí una espiral logarítmica, pero la tendencia sólo se revela en el sentido divergente de la espiral. La espiral, sin embargo, se realizaría desde el primer momento, si se tuviera

$$a = \frac{f}{\sqrt{4r^2 - 1}}.$$

Entonces los triángulos correspondientes á cada intercalación serían semejantes.

Hubiéramos podido considerar también valores negativos de r. Su interpretación hubiera sido muy fácil. En todas las construcciones anteriores, la determinación de un nuevo punto ha partido de un triángulo isósceles de base y altura conocidas, y sobre los lados laterales de este triángulo se han levantado en sus puntos medios, y *hacia el exterior*, las perpendiculares, sobre las cuales se han tomado las nuevas alturas multiplicando por r las anteriores. Ahora bien, cambiar el signo de r podría significar cambiar el sentido de la perpendicular. Esta habría, pues, de ser en tal caso alternativamente exterior é interior al triángulo que sirve de apoyo.

En estos casos, sin embargo, y después de lo dicho, el estudio de las propiedades de las curvas resultantes es muy sencillo y no hemos de entrar en él en detalle. Sólo haremos observar que, no dependiendo los valores de ρ sino del valor absoluto de r, las fórmulas anteriores, en las que r entra por su cuadrado, son perfectamente aplicables. No así las fórmulas que dan θ, pues aquí los ángulos deberían ser alternativamente sumados y restados, y esta particularidad hace que las series sean convergentes, con la sola condición de que sus términos tiendan hacia cero á medida que aumenta su número de orden. Por esta razón, la tangente, doble ó sencilla, existirá todavía para el caso en que

$$r = -\frac{1}{2},$$

y hasta cuando

$$-\frac{1}{2} > r > -1,$$

la tangente no pasará de ser cuádruple en los puntos de división binaria.

Como en la función estudiada en el capítulo anterior, se hubiera podido también investigar la extensión más natural de la curva por fuera de los extremos primitivamente dados. Como conocido un segmento de longitud

$$\frac{L}{2^k},$$

contado á partir de uno de los extremos, todos los demás segmentos son iguales, el único interés de esta investigación parece que deba residir en la definición del segmento doble de uno dado. Esta definición podría quedar perfecta si se diera el medio de determinar un tercer punto que, con los extremos del primer intervalo, formara un nuevo triángulo isóscele cuya altura fuera igual á $\frac{f}{r}$; porque entonces, con rebatir simétricamente á esta altura la curva anteriormente definida, tendríamos el trazado doble que respondería en todas sus partes á la misma construcción general. Todo se reduce, pues, á estudiar una construcción inversa de la que figura en la primera definición.

La construcción no puede ser más sencilla. Si llamamos

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \dots$$

á las bases de los nuevos triángulos, el teorema de Pitágoras dará

$$a_1^2 = 4\left(4a^2 - \frac{f^2}{r^2}\right)$$

$$a_1^2 = 4\left(4a^2 - \frac{f^2}{r^4}\right) \dots\dots a_n^2 = 4\left(4a_{n-1}^2 - \frac{f^2}{r^{2n}}\right),$$

de donde se deduce

$$a_n^2 = 4^{n+1}a^2 - f^2\left(\frac{4^n}{r^2} + \frac{4^{n-1}}{r^4} + \frac{4^{n-2}}{r^6} + \dots\dots + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{r^{2n}}\right) = 4^{n+1}a^2 - f^2 \cdot \frac{4^n r^{2n} - 1}{r^{2n+2}(4r^2 - 1)} =$$

$$= 4^n\left(4a^2 - f^2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{4^n r^{2n}}}{r^2(4r^2 - 1)}\right).$$

Cuando n aumenta, el factor entre paréntesis disminuye evidentemente, al aumentar la fracción que encierra, pero ésta no puede ser mayor que

$$\frac{f^2}{r^2(4r^2 - 1)},$$

luego si se tiene

12) $$4a^2 > \frac{f^2}{r^2(4r^2 - 1},$$

la diferencia será siempre positiva y a_n tendrá un valor real, cualquiera que sea n. Para ello será preciso que

$$r > \frac{1}{2};$$

pero esto no basta; será preciso, además, que quede satisfecha la desigualdad 12).

Si así no ocurre, llegará un momento en que a_n se haga imaginario y al triángulo imposible.

Cuando la desigualdad quede satisfecha, se tendrá, aproximadamente, si n es muy grande,

$$a_n = 2^n \sqrt{4a^2 - \frac{f^2}{r^2(4r^2 - 1)}},$$

y en todo caso,

$$\theta_n = \text{arc tang} \frac{f}{r\sqrt{4a^2 - \frac{f^2}{r^2}}} +$$

$$+ \text{arc tang} \frac{f}{r^2\sqrt{16a^2 - \frac{f^2}{r^2} - \frac{4f^2}{r^4}}} + \ldots\ldots + \text{arc tang} \frac{2f}{r^n a_n},$$

llamando θ al ángulo que forma la base variable del triángulo con la del triángulo primitivo.

Es evidente que θ_n tiende, en nuestro caso, hacia un límite cuando n crece indefinidamente, y, por lo tanto, el extremo libre de a_n describirá una curva que tendrá por asíntota una recta que pasa por el polo.

Esta curva será la prolongación de la curva analítica que tiene con la línea irregular un conjunto infinito de puntos comunes con el origen por derivado, y que tiende á confundirse en dicho origen con una espiral logarítmica.

Cuando para los mismos valores de r se tuviera

$$4a^2 = \frac{f^2}{r^2(4r^2 - 1)}$$

a_n quedaría reducido á

$$a_n = \frac{f}{r^{\ +1}\sqrt{4r^2 - 1}}$$

y crecería todavía indefinidamente mientras $r < 1$. También entonces θ crecería sin límite y por incrementos que tenderían á ser iguales, y el extremo de a_n describiría, por consiguiente, una espiral que tendería á ser logarítmica en sentido divergente.

Para $r = 1$ se recaería en la red triangular, y para $r > 1$, a_n tiende hacia cero, y los incrementos de θ son, desde luego, rigurosamente iguales. El extremo de a_n recorre una espiral logarítmica, prolongación de la que, en este caso, forman los extremos de ρ_n.

Si r es igual ó menor que $\frac{1}{2}$, la serie de los triángulos ha de interrumpirse forzosamente. La interrupción, tanto en este caso como en el de no verificarse la desigualdad 12), puede ocurrir en el preciso momento en que se anule alguna a_n. Se tendría entonces una línea cerrada como la que hemos señalado para el caso

$$r = \frac{1}{4}.$$

Para que así ocurra, será preciso que entre a y f exista una relación de la forma

$$a^2 = f^2\left(\frac{1}{4r^2} + \frac{1}{16r^4} + \dots + \frac{1}{(2r^2)^n}\right).$$

Todas estas relaciones serán realizadas en los distintos arcos de la línea definida por $a = 0$ y una flecha inicial arbitraria.

* * *

Entre la función y las líneas estudiadas no habrán dejado de observarse ciertas notables analogías. Ellas conducen á referir una y otras á un hecho de análisis más general expresable por la siguiente proposición:

Si tenemos las dos series de valores crecientes ó decrecientes

$$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad v_3 \dots u_n$$
$$v_0 \quad v_1 \quad v_2 \quad u_3 \dots v_n$$

que se corresponden término á término, y por procedimientos cualesquie-

ra, pero bien definidos, se intercalan entre cada dos términos consecutivos de una de ellas y entre los dos correspondientes de la otra un número de términos mayor ó menor, pero el mismo en ambas series, y si entre los nuevos se intercalan otros, y se procede así sucesiva é indefinidamente, hasta que los intervalos entre los términos definidos queden inferiores á cualquier cantidad dada, la correspondencia definirá funciones en u *ó en* v *continuas en los intervalos* (u_0, u_n) *ó* (v_0, v_n), *pero que no tendrán, en general, una derivada finita y determinada para cada valor de la variable independiente.*

Bastará, para hacerlo ver, considerar dos valores iniciales en cada serie y proceder en las intercalaciones sucesivas á interpolar un solo término en cada intervalo, como ha sido el caso en los ejemplos anteriores, aunque conservando en el presente una mayor libertad en el procedimiento de interpolación. No será preciso, sin embargo, que esta libertad sea muy grande para que el hecho quede de relieve. Nada tendría de extraño que las singularidades se hicieran patentes cuando empezáramos por emplear funciones singulares. Por eso no consideraremos en nuestras definiciones sino funciones analíticas. Sea, en efecto,

$$M(x, y)$$

una tal función, que cumple además con la condición única de que su valor esté siempre comprendido entre los de x é y. Se tendrá, según esto,

$$M(x, x) = x$$

y, como, por otra parte, la serie de Maclaurin, daría

$$M(x, y) = A_{0,0} + (A_{1,0} + A_{0,1} y) + \\ + (A_{2,0}\, x^2 + A_{1,1}\, xy + A_{0,2}\, y^2) + \dots..$$

se deducirá

$$\begin{aligned} &A_{0,0} = 0 \\ &A_{1,0} + A_{0,1} = 1 \\ &A_{2,0} + A_{1,1} + A_{0,2} = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

lo que nos dice que $M(x, y)$ puede ponerse bajo la forma

$$M(x, y) = F(x, y) - F(x, x) + ax + (1 - a) y,$$

siendo F una función analítica de dos variables, cuyos coeficientes no deben satisfacer ya sino á condiciones limitantes, de donde se sigue que $M(x, v)$ tiene el mismo grado de generalidad que la función más general de dos variables.

Supongamos ahora que entre los valores u_0, u_1 intercalamos, sirviéndonos de esta mediana y en las condiciones enunciadas, una serie indefinida de valores. Demostremos, en primer lugar, que esta serie tiende á ser continua. Para que así no fuera, sería preciso que hubiera un cierto intervalo á partir de un determinado valor u_k de u que no llegara á decrecer de un modo indefinido. Si representamos por u_h el otro extremo del intervalo después de una cualquiera de las intercalaciones, se tendrá

$$M\,(u_k,\,u_h) - u_k > \delta \ (*)$$

y $M(u_k, u_h)$ tendrá, pues, un límite con las intercalaciones crecientes que designaremos por l.

La función, por hipótesis continua y analítica, $M(u_k, a)$ daría entonces

$$M\,(u_k,\,l) = l$$

y dejaría de realizarse la condición fundamental.

Paralelamente con estas intercalaciones, podremos intercalar medias aritméticas en el intervalo (0, 1) y los que de él deriven en las intercalaciones sucesivas, y haciendo corresponder los términos de las dos series continuas así formadas, tendremos asignado un número á cada uno de los números u, y esos dos números cubrirán por completo el intervalo (0, 1), como los números u el intervalo (u_0, u_1). Quedará así definida en esos intervalos una función continua que representaremos por

$$u = \varphi\,(x).$$

Vamos á ver que esta función no puede ser analítica en general. Esta función, en efecto, por su definición misma, debe satisfacer la condición

(*) Se supone para fijar las ideas que u_k sea un menor valor: de ser mayor valor, no habría más que cambiar los signos en el primer miembro de la desigualdad.

13) $$M\left[\varphi\left(\frac{h}{2^n}\right), \varphi\left(\frac{2h+1}{2^{n+1}}\right)\right] = \varphi\left(\frac{4h+1}{2^{n+2}}\right).$$

Esta ecuación basta para determinar á M, una vez que φ sea conocida, porque si se hace

14) $$x_0 = \varphi\left(\frac{h}{2^n}\right) \qquad y = \varphi\left(\frac{2^k \cdot h + 1}{2^{n+k}}\right),$$

tendremos definida una serie infinita de valores que tienen por límite x_0 cuando k crece indefinidamente, y como $M(x_0, y)$ es por hipótesis una función analítica en y, y la expresión 13) da su valor para todos los valores definidos por la segunda de las expresiones 14), $M(x_0, y)$ quedará por este hecho completamente determinada. Lo mismo podrá decirse cuando x_0 tome uno cualquiera de los infinitos valores que corresponden á los valores enteros que h y n pueden tomar en su expresión; mas como este conjunto de valores de x_0 es un con junto denso que cubre todo el intervalo (u_0, u_1), se sigue que $M(x, y)$ quedaría determinada para todos los valores de x, y comprendidos dentro de ese intervalo.

Y si la función M de dos variables puede determinarse por una función φ de una sola, su arbitrariedad quedará reducida entre límites mucho más estrechos que los supuestos, ó dicho de otro modo, la funciún M no se podrá elegir arbitrariamente, porque φ no sería analítica si M no cumpliera las condiciones que la constituyen en función de φ.

Lo demostrado para la función u podría demostrarse igualmente para la función v que se formara por otro procedimiento cualquiera de mediación caracterizado por otra mediana M_1, partiendo de los valores v_0, v_1, y es claro que siendo así, sólo en casos particulares podrán resultar analíticas, aun siéndolo M y M_1, las funciones que expresaran u en v ó v en u. Entre estos casos particulares se encuentran, por ejemplo, las funciones exponencial y logarítmica deducidas de la correspondencia entre dos progresiones aritmética y geométrica, su existencia analítica procede únicamente de la posibilidad de satisfacer, de esta suerte, á las ecuaciones funcionales

$$f(xy) = f(x) + f(y) \qquad f(x+y) = f(x) \cdot f(y).$$

Con lo expuesto queda bien patente que las singularidades de la función particular á la que hemos dedicado gran parte de este estudio, no son debidas, como pudiera creerse, á ser la mediana armónica (no expresable analíticamente) una de las empleadas en su definición. Con medianas analíticas muy sencillas puede llegarse á los mismos resultados, como ocurriría, por ejemplo, si se hiciera

$$\left.\begin{array}{l} M_1(x, y) = x + \theta_1 (y - x) \\ M_2(x, y) = x + \theta_2 (y - x) \end{array}\right\} 0 < \theta < 1.$$

Resultaría, en efecto, que si representáramos por u_k y v_k dos valores correspondientes, y por

$$\begin{array}{llll} u_{h,0} & u_{h,1} & u_{h,2} & \ldots\ldots \\ v_{h,0} & v_{h,1} & v_{h,2} & \ldots\ldots \end{array}$$

las series de u y v que se obtuvieran por intercalaciones correlativas, sucesivas y convergentes hacia u_k y v_k, se deducirá

$$\begin{array}{l} M_1(u_k, u_{h,i}) - u_k = \theta_1^{i+1} (u_{h,0} - u_k) \\ M_2(v_k, v_{h,i}) - v_k = \theta_2^{i+1} (v_{h,0} - v_k), \end{array}$$

y la relación de los dos incrementos sería en el límite nula ó infinita desde que θ_1 sea diferente de θ_2,

En el caso particular en que se tuviera

$$\theta_1 = \frac{1}{2}, \quad \theta_2 = \frac{1}{3}, \quad u_0 = v_0 = 0, \quad u_1 = v_1 = 1,$$

se llegaría fácilmente á la siguiente relación:

$$f\left(\frac{2^k + 2^h + 2^i + \ldots\ldots + 2^l}{2^H}\right) =$$
$$= \frac{3^k + 2 \cdot 3^h + 2^2 \cdot 3^i + \ldots\ldots + 2^m \cdot 3^l}{3^H}$$

en la que k, h, i, ... l, H representan números enteros.

Cuanto hemos dicho de las funciones definidas por interpolación entre valores dados, es aplicable también á curvas determinadas por interpolación entre puntos. En definitiva, las coordenadas de los puntos interpolados según una ley bien definida, funciones serán de las de los puntos entre los cuales se efectúa la interpolación, y, al aumentar el número de variables, aumenta con él la indeterminación del trazado, quedando más campo abierto á todas las singularidades.

Fácilmente se comprende cuánta extensión puede darse á las consideraciones precedentes y cuánto campo dejan abierto á lo arbitrario. Hemos estudiado en concreto sólo funciones relativamente sencillas, de un limitado número de parámetros; pero bien se ve cómo, por los mismos análogos procedimientos, sería posible introducir en funciones y en curvas un número indefinido de variables *independientes*.

Tan enorme complicación no sería, sin embargo, una simple invención del espíritu. La realidad suele ser más rica que todas las invenciones y en el más insignificante fenómeno nos ofrece á menudo combinaciones complejísimas de las más variadas influencias, de tal suerte que, si hubieran de traducirse en números exactos los incesantes é infinitos cambios que tienen lugar en plena naturaleza, libres del aislamiento del laboratorio, y sin las simplificaciones que nuestra limitación reclama de hipótesis y teorías, los más comprensivos moldes matemáticos y otros más amplios que pudieran imaginarse caerían al fin en defecto, impotentes ante el infinito, bajo el influjo del cual las discontinuidades se sueldan ó se desvanecen unas veces y otras brotan de la misma entraña de lo continuo.

Al mismo tiempo, no es menos cierto que un conjunto infinito de variables *realmente independientes* es por completo inabordable para el pensamiento humano, y que esas infinitas variaciones sólo podrán ser abarcadas cuando queden ligadas entre sí por alguna ley sencilla ó cuando sus influencias tiendan á extinguirse con su número, dejando sólo preponderantes las de un conjunto limitado. Sólo reduciéndose así á estudiar aspectos parciales puede llegar el mundo á ser comprensible.

Y de esta misma consideración puede surgir una duda. Mientras más complicada supongamos la realidad, más improbable será que podamos encontrar en ella, entre tantas funciones singulares, las individuales que hubiéramos hecho objeto de nuestro estudio. Este sería, á la postre, completamente estéril. Ciertamente que, desde este punto de vista, sólo habrá que esperar resultados importantes del estudio general de tales funciones y de las condiciones restrictivas que hicieran posible la existencia de límites, que se impusieran á la arbitrariedad de las variables; más el estudio particular de ejemplos aislados no por eso carecerá en absoluto de importancia. Familiarizará al menos con ciertos caracteres especiales del nuevo campo de investigación, hará surgir con más claridad las analogías, dará punto de apoyo á las generalizaciones, y preparará, en fin, la labor constructiva de las más completas teorías del porvenir. Sin el estudio de las progresiones geométricas decrecientes, tal vez no se hubiera abordado nunca el de la convergencia de las series, y el conocimiento profundo de todo conjunto complejo exigirá siempre, en mayor ó menor medida, el examen atento y detenido de alguno de sus elementos, y muy especialmente cuando estos elementos pudieran ser considerados como elementos representativos.

Y esto es lo que habrá que tener siempre en cuenta ante ciertos reproches más ó menos velados que se han dirigido alguna vez á esta dirección crítica de las modernas Matemáticas. En una notable conferencia dada en Cambridge con motivo del último Congreso internacional de Matemáticos, Federico Enriques, al llamar la atención sobre este punto, se expresaba en los siguientes términos:

«Se ha destronado á los axiomas; roto el encanto de su investidura por derecho divino, esto es, su fundamento en una evidencia ó necesidad natural del espíritu humano, se los ha convertido en simples postulados; no son ya príncipes ó miembros de una aristocracia hereditaria, sino funcionarios electivos de una república democrática, que pueden ser revocados ó sustituídos por motivos de economía ó simplemente de reforma.»

Y agregaba, que un Aristófanes podría también encontrar que el arbitrio ilimitado de elección amenaza con convertir esta democracia en una verdadera demagogia, donde funciones advenedizas usurparan el puesto *á las funciones sencillas, pero honradas, que satisfacían á los teoremas del Cálculo infinitesimal.*

No hay que temer, sin embargo, que así ocurra. La utilidad y la fecundidad de los resultados impondrán siempre un límite á lo arbitrario en la elaboración de los conceptos matemáticos, como ya lo reconocía el mismo ilustre Profesor de la Universidad de Bolonia, al recoger más tarde las enseñanzas de la historia de la ciencia, y si algunas nuevas funciones llegaran á conquistar algún día puesto preeminente, no lo sería sino tras un juicio severo en el que hubiera llegado á aquilatarse su mérito. En vez de caminar á la anarquía, la ciencia tiende, al parecer, siguiendo el símil, hacia una organización social más compleja, pero más impersonal, donde las reuniones de notables sean sustituídas por masas conscientes, y las individualidades se confundan en el conjunto. Rota en la base, la continuidad escalará la cima para dominar el campo con fórmula más comprensiva y fecunda.

De todos modos, el objeto de estos ligeros apuntes es mucho más modesto. Sólo aspiran á vulgarizar entre nosotros ideas y conceptos que han llegado á ser fundamentales en las Matemáticas modernas.

REPRESENTACIONES REALES DE LOS ESPACIOS COMPLEJOS

DE

n DIMENSIONES

POR

DON OLEGARIO FERNÁNDEZ BAÑOS

DOCTOR EN CIENCIAS EXACTAS

(Sesión del 21 de Octubre de 1915.)

PRELIMINARES

Supuesto el estudio de los espacios complejos de cualquier especie y número de dimensiones, vamos á exponer algunos conceptos relativos á sus representaciones reales, á fin de que el estudio de las figuras complejas pueda reducirse al de figuras reales, y se facilite el estudio sintético de las funciones de variable compleja.

Suponemos también conocidas las representaciones reales del punto imaginario y de la recta compleja, especialmente cuanto se refiere á las representaciones de Gauss, de Riemann, de Staudt y Circular, ya que sólo tratamos de generalizar las tres primeras para espacios complejos de más de una dimensión.

Por último, suponemos conocido el siguiente teorema: «Dos espacios complejos $A_{n'}^{h'}$ y $A_{n''}^{h''}$ contenidos en un espacio mínimo A_n^h tienen común un espacio $A_{n'+n''-n}^{h'+h''-h} = A_{n_1}^{h_1}$, y recíprocamente dos espacios $A_{n'}^{h'}$ y $A_{n''}^{h''}$ con un espacio máximo común $A_{n_1}^{h_1}$ determinan un espacio A_n^h.

CAPÍTULO PRIMERO

Representaciones reales de los espacios complejos de dos dimensiones.

1. Representación puntual.—Proyectando los puntos de un plano complejo desde una recta compleja de segunda especie A_2^1, contenida con el plano dado en un espacio real mínimo de cuatro dimensiones E_4, pueden ocurrir los casos siguientes:

1.° *Que el plano complejo sea de especie cero*, A_2^0.

El espacio E_3, en que la recta A_1^2 está contenida, corta al plano A_2^0 en una recta A_1^0. Cualquier punto de A_2^0 no situado en A_1^0 determina con A_1^2 un plano complejo de segunda especie A_2^2, cuya base real A_0^0 puede tomarse como representante del punto proyectado.

Todos los puntos B_0 complejos de una recta compleja B_1^0 de A_2^0 distinta de A_1^0, tienen como correspondientes los puntos reales de un plano de E_4, apoyado en las rectas A_1^2, $\overline{A}_1^2$; porque las rectas A_1^2 y B_1^0 determinan en E_4 un espacio complejo A_3^1, cuya base real es el plano pedido que cumple la condición de contener la recta B_1^0 (*). Si se consideran todos los puntos B_0 de una recta compleja B_1^1; como está también determinada con A_2^1 un espacio B_3^1, cuya base real es un plano, resulta que lo dicho para los puntos de B_1^0 es aplicable á los de la recta B_1^1.

Cada punto real de A_1^0 determina con A_1^2 un plano A_2^1 de primera especie, cuya base real es una recta que pasa por dicho punto y se apoya en A_1^2 y $\overline{A}_1^2$. Cada punto imaginario de A_1^0 también determina con A_1^2 un plano complejo de primera especie, cuya arista real se apoya también sobre A_1^2 y $\overline{A}_1^2$. Resulta, pues, que los puntos de A_1^0 tienen como representantes las rectas de una congruencia lineal elíptica que tiene por directrices las rectas A_1^2, $\overline{A}_1^2$. Esta representación es la de Staudt, mientras que la obtenida para las demás rectas de A_2^0, es la de Gauss en cada plano. Resumiendo lo dicho, tenemos la representación puntual biunívoca de los puntos de A_2^0 por los puntos reales de E_4, exceptuando los puntos de la recta $A_1^0 = \mathcal{J}$, los cuales tienen como representantes las rectas de la congruencia lineal elíptica constituída por las secantes de las rectas A_1^2, $\overline{A}_1^2$.

2.° *Que el plano sea complejo de primera especie*, A_2^1.

Los espacios reales de tres dimensiones que contienen respectiva-

(*) Esto se ve también muy sencillamente considerando que B_1^0 y E_3 se cortan en un punto real, por el cual pasa una secante de A_1^2, base de un punto imaginario, que, con todos los de B_1^0, da rectas complejas de primera especie, situadas en un plano real, y cuyos vértices se toman como representantes de los puntos de la recta B_1^0.

mente las figuras A_1^2 y A_2^1, se cortan en un plano E_2. Un punto cualquiera de A_2^1, no situado en E_2, determina con A_1^2 un plano complejo de segunda especie, cuya base real E_0 tomaremos como representante de dicho punto. Los puntos de una recta de A_2^1 no situado en E_2, vienen representados por los puntos reales de un plano real de E_4, que se apoya en A_1^2, $\overline{A}_1^2$. Un punto cualquiera de A_2^1 situado en E_2 determina con A_1^2 un plano complejo de primera especie y, por consiguiente, vendrá representado por la arista de dicho plano, la cual también se apoya en las rectas A_1^2, $\overline{A}_1^2$. El plano E_2 corta al A_2^1 en una recta que puede ser la arista de A_2^1 ó una recta compleja de primera especie, B_1^1. Si es la arista, en virtud de lo expuesto en el caso primero, resulta que á sus puntos corresponden las rectas de la congruencia lineal elíptica definida por A_1^2, $\overline{A}_1^2$. Si es una recta B_1^1, su vértice determina con A_1^2 un plano complejo de primera especie, cuya arista es una secante de A_1^2, $\overline{A}_1^2$. Los demás puntos de B_1^1 pertenecientes á A_1^2 son imaginarios, y, como están con A_1^2 en un mismo espacio real E_3, cada uno de ellos determina con A_1^2 un plano complejo de primera especie, cuya arista es una secante de A_1^2, $\overline{A}_1^2$. Resulta, pues, que á los puntos de B_1^1 corresponden igualmente las rectas de una congruencia lineal elíptica que tiene por directrices las rectas A_1^2, $\overline{A}_1^2$.

Resumiendo, tenemos el mismo resultado que en el caso primero.

3.° *Que el plano sea complejo de segunda especie*, A_2^2.

En este caso, el espacio real mínimo E_3 que contiene á la recta A_1^2, está contenido en el espacio real mínimo E_4 que contiene al plano A_2^2.

E_3 corta al plano A_2^2 en una recta. Cada punto de A_2^2 no situado en esta recta, determina con A_1^2 un plano complejo de segunda especie. Cada punto de dicha recta determina con A_1^2 un plano complejo de primera especie. Resulta, pues, que repitiendo los mismos razonamientos hechos en los casos primero y segundo, llegaremos á las mismas conclusiones, y podemos establecer de un modo general la siguiente proposición:

Si en un espacio real E_4 *tomamos como figura fundamental un plano complejo y proyectamos sus puntos desde una recta compleja de segunda especie* A_1^2, *que se cruce con el plano dado y contenida en* E_4, *todo punto del plano dado que no esté en el espacio* J *común á los espacios mínimos reales en que recta y plano están contenidos, tiene como representante un punto real de* E_4*: las rectas del plano dado no contenidas en* J, *vienen* *representadas por los planos reales de* E_4 *que se apoyan en* A_1^2 y $\overline{A}_1^2$: *la recta del plano dado contenida en* J, *tiene como representante la congruencia lineal elíptica que tiene por directrices las rectas* A_1^2, $\overline{A}_2^1$.

Hay, por consiguiente, correspondencia biunívoca en la representación de los puntos del plano complejo por los puntos reales del espacio real E_4, exceptuando los puntos de una recta que tienen como representantes las rectas reales de una congruencia lineal elíptica.

4.° *Que el plano sea complejo de tercera especie*, A_2^3.

Como E_5 es el mínimo espacio real en que A_2^3 está contenido, no podemos operar en el espacio E_4. Si operamos en E_5, al proyectar los puntos de A_2^3 desde A_1^2 no resultan espacios complejos cuya base real sea un punto y, por consiguiente no es aplicable directamente la representación puntual.

II. Representación reglada.—Establezcamos una correspondencia biunívoca entre los puntos de un plano complejo y las rectas reales bases de los mismos. Pueden ocurrir cuatro casos:

1.° *Que el plano complejo sea de tercera especie*, A_2^3.

En la correspondencia dicha no hay ningún elemento excepcional, por lo cual es de gran importancia.

2.° *Que el plano complejo sea de segunda especie*, A_2^2.

En este caso cada punto imaginario viene representado por la real en que está situado. El elemento excepcional es el punto real base del plano A_2^2, el cual tiene como representantes todas las rectas reales del espacio E_4 que pasan por dicho punto.

3.° *Que el plano complejo sea de primera especie*, A_2^1.

En la correspondencia establecida, á cada punto imaginario corresponde su recta base, y los elementos excepcionales son los siguientes: 1.° Todo punto real de la arista de A_2^1 tiene como representantes todas las rectas reales de E_3 que pasan por dicho punto. 2.° Todo punto imaginario situado en la arista dicha, tiene como representante esta misma recta. 3.° A esta recta corresponden, en cambio, todos los puntos reales é imaginarios en ella situados.

4.° *Que el plano complejo sea de especie cero*, A_2^0.

En tal caso, no hay elemento que no sea de excepción y, por consiguiente, no puede establecerse la correspondencia indicada de punto complejo á recta real y viceversa, sucediendo algo parecido á lo que hemos visto al querer establecer la representación puntual de los puntos del plano complejo de tercera especie.

III. Relación entre las representaciones reglada y puntual.—La representación reglada (**II**, 3.°) que presenta la importante ventaja de no salir del espacio ordinario de tres dimensiones, puede relacionarse con la representación puntual (**I**, 2.°) del modo siguiente:

Consideremos las rectas A^2_1, $\overline{A}^2_1$ en el espacio E_4 que contiene al E_3 en que A^1_2, $\overline{A}^1_2$ están contenidos, y supongamos además que las rectas A^2_1, $\overline{A}^2_1$ y los planos A^1_2, $\overline{A}^1_2$ no tienen ningún punto común. Establezcamos una relación homográfica perspectiva entre las rectas A^2_1 y $\overline{A}^2_1$ y los planos A^1_2 y $\overline{A}^1_2$, haciendo corresponder la recta que une dos puntos cualesquiera, uno de A^1_2 y otro de A^1_2, al punto de intersección de los dos planos homólogos que pasan por A^2_1 y A^2_1, respectivamente, y proyectan los dos puntos dichos. Es claro que á la recta de unión de dos puntos cualesquiera conjugados de A^1_2, $\overline{A}^1_2$ corresponde un punto real de E_4, porque un punto de A^1_2 y la recta A^2_1 determinan un plano complejo de segunda especie, puesto que operamos en un espacio E_4; y análogamente, el otro punto de $\overline{A}^1_2$ y la recta $\overline{A}^2_1$ determinan otro plano complejo de segunda especie, que con el anterior se corta en un punto real de E_4, porque son conjugados.

Hay, pues, correspondencia biunívoca entre las rectas reales representantes de los puntos de un plano complejo de primera especie y los puntos reales de un espacio real E_4. Los espacios reales de tres dimensiones que contienen respectivamente á los A^1_2, $\overline{A}^1_2$ y á las rectas A^2_1, $\overline{A}^2_1$, se cortan en un plano real π, en el cual hay una recta del plano complejo de primera especie dado. Todos los puntos de esta recta eran excepcionales en la representación puntual, y en el estudio que estamos haciendo vamos á ver que resulta lo mismo; pues al tomar los puntos conjugados de A^1_2, $\overline{A}^1_2$, respectivamente, situados en π, no tienen ya como correspondientes en la relación homográfica perspectiva dicha, dos planos imaginarios conjugados de segunda especie, de aristas A^2_1 y $\overline{A}^2_1$, sino dos planos imaginarios de primera especie, porque toda la figura está en el espacio real de tres dimensiones que contiene las rectas A^2_1, $\overline{A}^2_1$. Mas como este par de planos son conjugados, resulta que se cortan en una recta real que es su arista común; y como además pasan por las rectas A^2_1, $\overline{A}^2_1$ respectivamente, dicha arista se apoya en ambas rectas, es decir, es una secante común de ellas. Puede considerarse el caso particular en que la recta de A^1_2 situada en π sea su arista real, y entonces los elementos excepcionales son los de dicha arista, como sucedía en la representación reglada.

Para relacionar la representación puntual **I**, 3.° con la reglada **II**, 2.° consideremos el espacio real E_4 en el que estén los planos A^2_2, $\overline{A}^2_2$ y las rectas A^2_1, $\overline{A}^2_1$ sin ningún punto común con dichos planos. Al establecer la relación homográfica perspectiva entre los planos y rectas dichas, en la misma forma que en el caso anterior, resulta del mismo modo una correspondencia biunívoca entre las bases reales representantes de los puntos del plano complejo de segunda especie y los puntos reales del espacio E_4, obtenidos por intersección de pares de planos homólogos de aristas A^2_1 y $\overline{A}^2$. Por la misma razón que en el caso anterior, la recta del plano dado, contenida en el espacio real E_3 en que están A^2_1, $\overline{A}^2_1$, es excepcional, como ya sabíamos por la representación puntual **I**, 3.° Resulta, pues, que hay correspondencia biunívoca entre los elementos representantes de un mismo punto en la representación puntual y en la reglada, excepto para los elementos de la citada recta excepcional, la cual, para mayor facilidad, puede tomarse de modo que contenga el punto real del plano complejo de segunda especie dado.

También la representación reglada **II**, 1.° está íntimamente ligada con la puntual **I**, 1.° Cortemos, en efecto, las rectas reales representantes de los puntos de A^3_2, $\overline{A}^3_2$ y que están contenidas en E_5 por un espacio E_4 de E_5. Los planos A^3_2, $\overline{A}^3_2$ son cortados por E_4 en dos rectas A^2_1, $\overline{A}^2_1$, y las rectas reales bases de puntos de los planos dichos son cortadas por E_4 en puntos reales. Hay, pues, correspondencia biunívoca entre la representación reglada **II**, 1.° y la puntual **I**, 1.°, excepto para las rectas reales secantes de las rectas A^2_1, $\overline{A}^2_1$, las cuales no son cortadas por E_4 en puntos reales, sino que están totalmente contenidas en él. Esta misma excepción es la que obtuvimos en **I**, 1.°

IV. Representación análoga á la de Riemann.—Consideremos los planos A^3_2 y $\overline{A}^3_2$ como opuestos en la pirámide fundamental del sistema de referencia en el espacio E_5. Las coordenadas homogéneas de los puntos situados en dichos planos son

$$(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0) \quad \text{y} \quad (0, 0, 0, y_1, y_2, y_3) \qquad [I]$$

respectivamente.

Como toda recta real base de un punto imaginario y su conjugado en A_2^3 y $\overline{A}_2^3$ se apoya en estos planos, resulta que tales rectas pueden ser definidas por los productos binarios que resulten de combinar los valores [I], productos que son todos nulos, excepto los nueve siguientes:

$$X_{11} = x_1 y_1, X_{12} = x_1 y_2, \ldots.. X_{lm} = x_l y_m (l, m = 1, 2, 3) \qquad [II]$$

Tomando estos nueve valores como coordenadas homogéneas de puntos en el espacio E_8, y eliminando las $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ entre las ecuaciones [II] resulta el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21} = 0 \\ X_{11}X_{33} - X_{13}X_{31} = 0 \\ X_{21}X_{32} - X_{22}X_{31} = 0 \\ X_{11}X_{23} - X_{21}X_{13} = 0 \end{array}\right\} \qquad [III]$$

compuesto de las mismas ecuaciones que se obtienen igualando á cero los menores complementarios de segundo grado de la matriz

$$| X_{11} X_{22} X_{33} |.$$

El sistema de ecuaciones cuadráticas [III] representa una variedad ψ de cuatro dimensiones de un espacio real de ocho y, por lo tanto, resulta que entre las rectas apoyadas en los planos A_2^3, $\overline{A}_2^3$ y los puntos reales de la variedad ψ (*) hay una correspondencia biunívoca sin excepción. Considerando fijo uno cualquiera de los puntos de A_2^3 y uniéndolo con todos los de A_2^3, se tiene una radiación de rectas complejas de segunda especie. Lo propio sucede considerando fijo el punto conjugado de $\overline{A}_2^3$ y uniéndolo con todos los de A_2^3 (**). Ambas radiaciones son conjugadas, por serlo las rectas que las constituyen. Como

(*) La variedad ψ ha sido estudiada por C. Segre, Rend. Cir. Mat. di Palermo, tomo v (1891).

(**) Esto se consigue dejando fijas las x y variando las y, y al contrario.

esto puede hacerse con cada par de puntos de A_2^3 y de $\overline{A}_2^3$ resultan dos haces de radiaciones. A una cualquiera de estas radiaciones corresponde otra de rectas complejas de primera especie cuyo vértice real común es un punto de ψ, las cuales constituyen un plano imaginario de segunda especie. A la radiación conjugada corresponde el plano conjugado, y á los dos haces de radiaciones conjugadas corresponden dos haces de planos conjugados, imaginarios de segunda especie, y por consiguiente, así como un punto de A_2^3 y su conjugado de $\overline{A}_2^3$ están representados por su recta base común, así esos dos puntos tienen por correspondientes en los haces dichos, dos planos conjugados de segunda especie, los cuales tienen su base real común en la variedad ψ. Por cada punto de ψ pasan un par de planos imaginarios conjugados de segunda especie, uno de cada uno de los haces conjugados, los cuales están contenidos en un espacio real E_4 tangente á ψ en el punto real indicado (*); y por lo tanto hay también correspondencia biunívoca entre los puntos que se trata de representar y los espacios E_4 tangentes á la variedad ψ, cuyos puntos todos son elípticos y por consiguiente es elíptica.

Lo expuesto es suficiente para comprender que esta representación es análoga á la de Riemann, y que para hacer la representación real de los puntos de un plano complejo de cualquier especie sobre la variedad elíptica ψ, basta relacionar estos puntos con los dos haces conjugados de planos imaginarios de segunda especie, que hemos dicho, con el haz de espacios E_4 que contienen cada par de dichos planos conjugados y son tangentes á ψ.

A los puntos de una recta de A_2^3 corresponden otros tantos planos imaginarios de segunda especie de uno de los haces, los que están en un espacio E_5 y forman una variedad cúbica imaginaria Σ contenida en ψ. A los puntos de la recta conjugada tomada en $\overline{A}_2^3$ corresponden otros tantos planos del haz conjugado, los cuales forman otra variedad cúbica imaginaria Σ' conjugada de Σ. Lo dicho para una recta se dice para todas, y por consiguiente resultan dos haces de variedades cúbicas imaginarias conjugadas correspondientes á las rectas de un plano

(*) Así, como por cada punto de la cuádrica de Riemann pasan dos rectas imaginarias conjugadas de primera especie, contenidas en un mismo plano real tangente á la cuádrica en el vértice real común de dichas rectas.

complejo y su conjugado, respectivamente. Cada par de variedades cúbicas conjugadas se cortan en una cuádrica, cuyos puntos reales pueden tomarse como representantes de las dos rectas complejas conjugadas que en A^3_2 y $\overline{A}^3_2$ hemos considerado. Vemos, pues, sobre dicha cuádrica de ψ la representación de Riemann para los puntos de una recta compleja de segunda especie.

Si desde el espacio E_3 en que está contenida una de las cuádricas en que se cortan un par de variedades cúbicas conjugadas Σ y Σ', se proyectan los puntos reales de la variedad ψ sobre un espacio E_4 exterior á ψ y situado con ella en E_8, resulta que cada punto real de ψ determina con E_3 un espacio real de cuatro dimensiones que corta á E_4 en un punto real. Parece, pues, que hay correspondencia biunívoca entre los puntos de ψ y los del espacio E_4; mas considerando los espacios en que están contenidas las rectas conjugadas que han originado la cuádrica situada en E_3, resulta que cortan á E_4 en dos rectas complejas conjugadas de segunda especie, á cuyas secantes no corresponden puntos de E_4, sino las mismas secantes constitutivas de la congruencia lineal elíptica. Vemos, pues, la misma representación puntual y con la misma excepción que ya vimos en **I**, 1.°, y queda indicado el camino que hemos de seguir para pasar de la representación puntual (análoga á la de Gauss) y de la reglada (análoga á la de Staudt) á la representación sobre una hipercuádrica, que debe ser de cuatro dimensiones, situada en E_8 (hipercuádrica que hemos llamado ψ), representación análoga á la de Riemann.

CAPÍTULO II

Representaciones reales de los espacios complejos de k dimensiones.

V. **Representación puntual.**—Lo dicho en el capítulo anterior es suficiente para la generalización de las representaciones reales indicadas.

Si se trata de representar los puntos de un espacio complejo de k dimensiones contenido en un espacio real no superior á E_{2k}, se proyectan sus puntos desde un espacio A^k_{k-1}, contenido en un espacio real mínimo E_{2k-1} perteneciente á E_{2k} y exterior (es decir, sin puntos comunes) al espacio complejo de k dimensiones, cuya representación real se trata de hacer.

Un punto cualquiera del espacio proyectado —el cual no esté en el espacio complejo de $k - 1$ dimensiones, contenido en el espacio $\mathcal{J}$ común á los dos espacios mínimos reales en que se hallan el espacio proyectado y aquel desde el cual se proyecta—, es tal que determina con A^k_{k-1} un espacio A^k_k, cuya base real E_0 se toma como representante de aquel punto. Los puntos análogos, que forman una recta del espacio proyectado, tienen como representantes los puntos reales situados en un plano E_2 de E_{2k}; y en general si están en un espacio complejo de h dimensiones del espacio proyectado, tienen como representantes los puntos reales situados en un espacio real E_{2h} situado en E_{2k} y apoyado en A^k_{k-1} y $\overline{A}^k_{k-1}$. Esta representación es análoga á la de Argand-Gauss.

Un punto cualquiera situado en $\mathcal{J}$, determina con A^k_{k-1} un espacio A^{k-1}_k, cuya base real es una recta representativa de aquel punto y apoyada en A^k_{k-1}, $\overline{A}^k_{k-1}$; como todos los puntos análogos á éste constituyen un espacio complejo de k dimensiones y especie variable, según la especie del espacio proyectado, resulta que á los puntos de dicho espacio complejo situado en $\mathcal{J}$, corresponde la variedad de rectas reales del espacio E_{2k} que se apoyan en A^k_{k-1}, $\overline{A}^k_{k-1}$, las cuales pueden relacionarse biunívocamente con los puntos reales de una variedad elíptica de $2(k - 1)$ dimensiones situada en un espacio real E_{k^2-1}.

VI. Representación reglada.—Representando cada par de puntos conjugados de un espacio complejo de k dimensiones, por su recta base, se obtiene la representación reglada de dicho espacio. Los elementos excepcionales son los puntos de la base real del espacio complejo considerado, los cuales disminuyen cuando aumenta la especie, hasta llegar al espacio A^{k+1}_k sin base real y, por consiguiente, sin excepción ninguna en la representación biunívoca entre sus puntos y las rectas bases de los mismos, las cuales se apoyan en A^{k+1}_k, $\overline{A}^{k+1}_k$ y constituyen una variedad especial de rectas contenidas en un espacio real mínimo E_{2k+1}. Si esta variedad de rectas se corta por un espacio E_{2k} de E_{2k+1}, se obtiene una correspondencia biunívoca de recta á punto, excepto para las rectas bases de puntos imaginarios situados en los espacios A^k_{k-1}, A^k_{k-1}, secciones de A^{k+1}_k, $\overline{A}^{k+1}_k$ con E_{2k}; rectas que forman una variedad representable por los puntos reales de una variedad elíptica de $2(k-1)$ dimensiones, contenida en un espacio mínimo E_{k^2-1}. Volvemos, pues, á la representación puntual. Lo propio sucede en los demás casos, sin más que establecer la relación homográfica perspectiva expuesta en el capítulo primero.

VII. Representación de Riemann generalizada.—Para llegar á esta representación, se toman los espacios complejos directores A^{k+1}_k y $\overline{A}^{k+1}_k$ como fundamentales y opuesto en un sistema de referencia en el espacio E_{2k+1}, y repitiendo los razonamientos del párrafo **IV**, se obtiene una variedad de rectas situada en un espacio real $E_{(k+1)^2-1}$, puesto que las coordenadas no nulas de una recta que se apoye en A^{k+1}_k y $\overline{A}^{k+1}_k$ son

$$X_{lm} = x_l y_m (l, m = 1, 2, 3 \ldots\ldots k+1). \qquad [I]$$

Tomando estos valores como coordenadas homogéneas de puntos reales de un espacio $E_{(k+1)^2-1}$, y haciendo la eliminación de las variables minúsculas, se obtiene un sistema de k^2 ecuaciones cuadrática que son los menores de segundo orden de la matriz cuadrada

$$|X_{lm}| (l, m = 1, 2, 3 \ldots\ldots k+1) \qquad [II]$$

igualados á cero.

El sistema [II] representa una variedad elíptica π de $2k$ dimensiones, situada en un espacio real $E_{(k+1)^2-1}$, y cuyos puntos se corresponden biunívocamente con los de un espacio complejo cualquiera de k dimensiones.

La variedad π contiene dos haces de espacios complejos A^k_k y $\overline{A}^k_k$, cada par de los cuales tienen su base real E_0 en π y están en un mismo espacio E_{2k} tangente á π en dicho punto, y hay correspondencia biunívoca entre los espacios E_{2k} y los pares de espacios A^k_k, $\overline{A}^k_k$ y las radiaciones obtenidas considerando fijo cada punto de A^{k+1}_k y variables los de su conjugado $\overline{A}^{k+1}_k$, y viceversa. Los puntos de los espacios A^k_{k-1} y $\overline{A}^k_{k-1}$, contenidos en A^{k+1}_k y $\overline{A}^{k+1}_k$, tienen como correspondientes en los dos haces dichos, dos conjuntos de espacios A^k_k y $\overline{A}^k_k$

que forman en π dos variedades imaginarias de $2k - 1$ dimensiones, las cuales se cortan en otra variedad real y elíptica de $2(k - 1)$ dimensiones situada también en π y contenida en un espacio E_{k^2-1}.

Si desde este último espacio E_{k^2-1} se proyectan todos los puntos de π sobre un espacio real E_{2k} exterior á π y contenido con π en un espacio $E_{k(k+2)}$, resulta una correspondencia entre los puntos de π y los del espacio E_{2k}. Como las variedades imaginarias conjugadas de $2k - 1$ dimensiones, que han originado la variedad de $2(k - 1)$ contenido en E_{k^2-1} desde el cual se hace la proyección, son cortadas por E_{2k} conjugados A^k_{k-1} y $\overline{A}^k_{k-1}$, resulta que á todos los puntos de la variedad de $2(k - 1)$ dimensiones, representantes de los puntos imaginarios de A^k_{k-1} y $\overline{A}^k_{k-1}$, les corresponden las rectas reales bases de dichos puntos, las cuales constituyen una variedad ya estudiada. Podemos, pues, afirmar que las tres representaciones expuestas, están íntimamente enlazadas entre sí.

(Instituto Nacional de Ciencias. — Laboratorio y Seminario Matemático.)

RESOLUCIÓN ELEMENTAL

DEL

PROBLEMA DE DIRICHLET PARA EL CÍRCULO

POR

D. JULIO REY PASTOR

CATEDRÁTICO DE LA UNIVERSIDAD DE MADRID

(Sesión del 21 de Octubre de 1915.)

Modernamente se tiende á desarrollar la Teoría de funciones analíticas con independencia de la Teoría del potencial. Este programa ha sido desenvuelto en su parte elemental por Burkhardt, en su conocido libro, y el mismo fin persiguen los trabajos de Carathéodory, Bieberbach, etc., que han iniciado esta emancipación para las cuestiones superiores, especialmente en la Teoría de la representación conforme.

Solamente un punto de contacto es indispensable á las dos teorías, cuando se trata de aplicar la representación conforme al *problema de Dirichlet*, que, como es sabido, tiene significación fundamental en la Física Matemática: *Dados los valores de una función armónica en el contorno de un recinto, hallar esta función en los puntos interiores.*

Como la ecuación de Laplace es invariante respecto de todas las transformaciones conformes (*), resuelto el problema para el círculo, queda resuelto para todos los recintos simplemente conexos, puesto que, en virtud del teorema de Riemann, son representables conformemente sobre el círculo. Y desde el punto de vista práctico, la resolución del problema de Dirichlet para un recinto cualquiera, una vez

---

(*) Véase la nota de la pág. 135.

conocida la fórmula que da la solución para el círculo, queda reducida á efectuar la representación conforme sobre éste.

Parece, pues, interesante resolver el problema para el círculo, sin utilizar los recursos de la teoría del potencial, haciendo factible de este modo su exposición en un curso elemental de funciones.

Los complicados métodos de Schwarz (*) y Neumann eran los únicos satisfactorios conocidos. Bôcher ha sido el primero en lograr una simplificación esencial. Su idea, original y sencilla, es la siguiente: puesto que en el antiguo método se comenzaba por hallar el valor de la función desconocida en el centro del círculo (por medio de la fórmula del valor medio de Gauss), para hallar el valor en cualquier otro punto, efectuemos una transformación lineal que lo convierta en el centro.

Pero el método de Bôcher, adoptado en la obra de Osgood (**), no prescinde todavía de la función potencial de Green; y esta dependencia, que no envolvía dificultad esencial en la clásica teoría de Riemann de las funciones analíticas, puesto que el problema fundamental de la representación conforme se apoyaba precisamente en la teoría de la función potencial de Green (***), que era preciso desarrollar con anterioridad, complica, en cambio, extraordinariamente la exposición de la Teoría de funciones desde el recientísimo punto de vista, en el que se prescinde en absoluto de dicha teoría previa de las funciones de Green.

Al pretender en nuestro curso breve sobre representación conforme, explicado en Barcelona en 1915, desarrollar completamente esta teoría, continuando hasta su problema final el camino emprendido por Carathéodory para su problema elemental (****), logramos inci-

(*) *Gesammelte Abhandlungen*. Berlín, 1914, tomo I.

(**) Las Memorias de Bôcher, que no hemos podido encontrar en Madrid, están insertas en el Bull. Amer. Math. Soc., s. II, t. IV (1897-98) y en Annals of Math. s. II, t. VII (1906). Su contenido está expuesto en Osgood. *Lehrbuch der Funktionentheorie*, Leipzig, 1912, t. I, pág. 635.

(***) Se llama así á una función nula en el contorno de un recinto, y armónica en éste, excepto en un punto interior, donde es logarítmicamente infinita.

(****) *Elementarer Beweis für den Fundamentalsatz der konformen Abbildungen*. Math. Abhandlungen H. A. Schwarz, 1914.

dentalmente una simplificación del método de Bôcher, que nos permitió prescindir de las funciones de Green, reduciendo el problema de Dirichlet á uno de Geometría métrica.

Y no creemos fuera de lugar exponer aquí dicha demostración elementalísima, después de haber logrado en ella una nueva simplificación tal, que todo el problema (incluso el recurso preliminar de la fórmula del valor medio ó teorema de Gauss), lo desarrollamos sin otras nociones que la de integral á lo largo de una curva y la de diferencial completa. Ni siquiera necesitamos la conocida fórmula de Green del cálculo integral, ni la derivada según la normal, recursos usuales en todas estas cuestiones.

Si nota el lector cierto contraste entre la brevedad de nuestro trabajo y la extensión del prólogo, tenga en cuenta que la simplificación y abreviación del método constituye precisamente nuestro objeto.

*
* *

Nota.—He aquí una revista de los tratados modernos sobre Teoría de funciones:

Bianchi, en sus *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa*, Pisa, 1916, indica el método de Schwarz, apoyado en la función de Green; pero adopta el complicadísimo de Neumann.

Ni Goursat, en su *Cours d'Analyse*, Paris, 1910-1914; ni Jordan, en su *Cours d'Analyse*, Paris, 1909-1914; ni Weber-Riemann, en su clásica obra *Die partiellen Differential-gleichungen der Mathematischen Physik*, Braunschweig, 1910-12; ni Burkhardt, en su *Theorie der analytischen Funktionen*, Leipzig, 1912, llegan hasta este problema, á pesar de su importancia capital en Análisis y en Física.

Picard puede abordarlo en su *Cours d'Analyse*, París, 1901-1909, gracias al estudio completísimo que hace del potencial newtoniano, llegando por análogo camino, sumamente largo, hasta la integral de Poisson, por medio de las funciones de Green.

Forsyth, en su *Theory of Functions of a complex variable*, Cambridge, 1900, sigue paso á paso el mismo método primitivo de Schwarz.

Fórmula de Gauss.—Sea $u\,(x, y)$ una función *armónica* en un círculo de radio R; es decir, finita y continua en él, y que satisface en todos sus puntos á la ecuación de Laplace:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Por ser

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

la expresión

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,dy - \frac{\partial u}{\partial y}\,dx$$

es la diferencial exacta de una función $v\,(x, y)$; por tanto, la integral á lo largo de cualquier curva de origen (a, b) y extremo (a', b'), será $v\,(a', b') - v\,(a, b)$, y si la curva es cerrada, esta integral será nula.

Tomemos, en particular, una circunferencia de radio $r \lesseqgtr R$, concéntrica con la dada, y entonces, teniendo en cuenta $x = r \,.\, \cos\theta$, $y = r \,.\, \operatorname{sen}\theta$, dicha integral será

$$r\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{sen}\theta\right)d\theta = 0.$$

Si observamos que el integrando coincide con $\frac{\partial u}{\partial r}$ (suponiendo φ constante) é integramos de nuevo entre 0 y R, será

$$\int_0^R dr\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial r}\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^R\frac{\partial u}{\partial r}\,dr = \int_0^{2\pi} U\,d\theta - \int_0^{2\pi} u_0\,d\theta = 0,$$

llamando U al valor de u en el extremo del radio, y u_0 en el centro. Por consiguiente:

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U\,d\theta.$$

Este es el *teorema del valor medio* de Gauss; así llamado porque el valor de u en el centro aparece como media aritmética de los valores en el contorno.

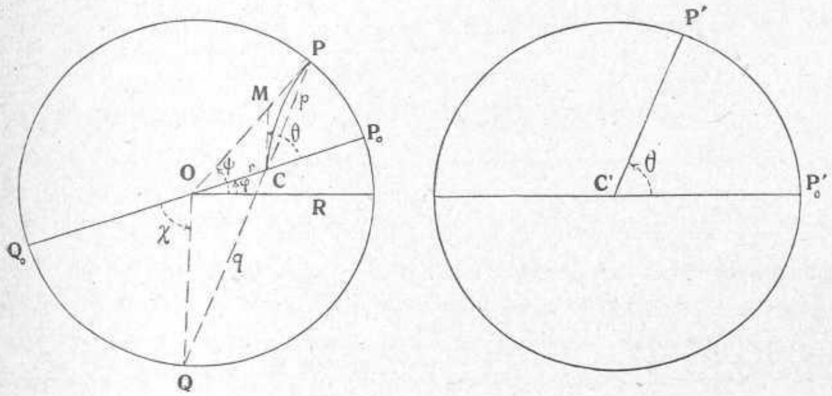
Integral de Schwarz.—Conocidos los valores de una función armónica en la circunferencia, se obtiene inmediatamente su valor en el centro, mediante la fórmula anterior. Para hallar su valor en cualquier punto interior C, de coordenadas (r, φ), bastará transformar el círculo en otro, mediante una función lineal de variable compleja, de tal modo que C se transforme en el centro C'; la función armónica se transforma en otra armónica (*), y la fórmula de Gauss nos dará el valor de ésta en C', ó sea el de la primera en C.

Es decir:

$$u'_{C'} = u_C = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U' d\theta,$$

designando por U' los valores de u' en la nueva circunferencia, y por θ el ángulo central variable $P'_0C'P'$.

En la transformación lineal efectuada (la cual conserva los ángulos),



al radio $C'P'$ corresponde un arco de circunferencia CP, normal á la

(*) El lector mismo puede comprobar esto, observando que si

$$x' = f(x, y) \qquad y' = \varphi(x, y)$$

son las funciones reales en que se descompone la transformación compleja, teniendo en cuenta las ecuaciones características:

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial y} \qquad \frac{\partial x'}{\partial y} = -\frac{\partial y'}{\partial x},$$

dada, y, por tanto, tangente en P al radio OP. Llamando Q al punto opuesto de P respecto de C, es OQ paralela á CM; y llamando χ á los ángulos medidos á partir de OQ_0, resulta:

$$\theta = P'_0C'P' = P_0CM = Q_0OQ = \chi.$$

Obtenemos, pues, por tan elementalísima relación, la fórmula de Schwarz:

$$u_C = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U d\chi,$$

donde U designa el valor conocido de u en el punto variable que recorre en sentido positivo la circunferencia dada, y $d\chi$ es la diferencial del ángulo central (ó del arco, si es $R = 1$), engendrado por su punto opuesto Q.

Integral de Poisson. — Obtenida la fórmula fundamental de Schwarz, que resuelve completamente el problema, se transforma fácilmente en una integral de Poisson. Sean P^* y Q^* dos nuevas posiciones de P y Q (por tanto, opuestas respecto de C); la semejanza de los triángulos CPP^* y CQQ^* da la relación siguiente:

$$\lim \frac{QQ^*}{PP^*} = \frac{d\chi}{d\psi} = \frac{q}{p} = \frac{q \cdot p}{p^2} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cdot \cos(\psi - \varphi)}.$$

Obtenemos así la función armónica, definida en cada punto (r, φ) por la integral de Poisson:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi)} d\psi.$$

---

por derivación resulta:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left[\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}\right)$$

luego si es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} = 0,$$

es también

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} = 0,$$

y viceversa.

Con esto hemos demostrado solamente que si existe una función que en el contorno tome los valores prefijados U, esta función es única, y está dada por las integrales de Poisson y de Schwarz; falta probar que, cualesquiera que sean los valores prefijados en el contorno, la función expresada por medio de estas integrales es armónica, y al aproximarse el punto interior á uno del contorno, la función tiende hacia el valor en él prefijado. Pero esto, así como el desarrollo ulterior de la teoría, no ofrece dificultad ninguna en el elegante método de Schwarz, por todos adoptado, y que aquí es innecesario repetir (*).

Así, por ejemplo, la demostración de que la función $u(r, \varphi)$ es armónica, se logra observando lo siguiente: la función $f(x, y)$ que aparece bajo el signo integral, es la parte real de la función lineal de variable compleja (**):

$$U\frac{Re^{\psi i} + z}{Re^{\psi i} - z} = U\frac{Re^{\psi i} + re^{\varphi i}}{Re^{\psi i} - re^{\varphi i}},$$

y, por tanto, es $\Delta f(x, y) = 0$; luego

$$\Delta u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta f(x, y)\, d\psi = 0.$$

Cálculo numérico.—El cálculo numérico de la función u es muy penoso, por exigir para cada punto el cálculo de una integral cuyo integrando, en la fórmula de Poisson, no es nada sencllo.

En los trabajos de nuestro Laboratorio y Seminario matemático, donde con suma frecuencia se necesita resolver este problema, hemos adoptado construcciones métricas diversas para reducir cada integración á la obtención de un área por medio del planímetro.

Adoptando la fórmula de Schwarz, ocurre inmediatamennte llevar sobre cada radio OQ una longitud igual á la raíz cuadrada del valor de U correspondiente á su punto opuesto P. Obtenemos así una curva cuya área es:

$$K\int U d\chi,$$

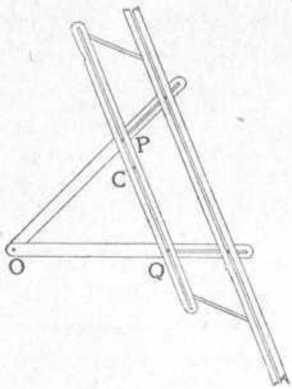
(*) Puede verse esta parte en las memorias mismas de Schwarz ó en *Osgood*, página 634.

(**) El lector puede comprobar esto, sin más que multiplicar numerador y denominador por $Re^{-\psi i} - re^{-\varphi i}$, conjugado de este último.

siendo K una constante que depende de la unidad adoptada; si es $R = 1$, será $K = \frac{1}{2}$.

Así, mediante una multiplicación final, obtenemos u_C.

Construída en coordenadas polares de una vez para todos los puntos C, la curva que representa la función dada U, ó bien $\sqrt{U}$, el cálculo de cada valor de u se reduce á hallar el área de la curva antes dicha, construída mediante el transporte de los radios vectores correspondientes á los puntos P, á sus opuestos Q.



Como á pesar de la sencillez teórica de esta operación, su repetición para cada punto se hace penosa, ocurre inmediatamente proyectar un sencillo sistema articulado de varillas, como indica el adjunto esquema, que permitirá describir directamente la curva cuya área nos expresa el valor buscado u.

(Instituto Nacional de Ciencias. — Laboratorio y Seminario Matemático.)

ACTAS DE LAS SESIONES CELEBRADAS POR LA SECCIÓN DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, DEL CONGRESO DE VALLADOLID

SESIÓN DE APERTURA

Reunidos los señores congresistas, á las cuatro de la tarde del día 18 de Octubre de 1915, en una de las cátedras de la Universidad, abrió la sesión D. Luis Octavio de Toledo, catedrático de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid, en ausencia del presidente y vocales del Comité local.

El Sr. Octavio de Toledo, después de explicar el motivo de su presencia en la Mesa, propuso remitir telegramas de salutación á los señores D. José Echegaray, presidente de la Asociación; D. Zoel García de Galdeano, catedrático de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza é incansable campeón de los estudios matemáticos en España, y á D. F. Gomes Teixeira, profesor de la Universidad de Oporto; y que la Mesa quedase constituída en la forma siguiente: Presidente, D. Luis Gaztelu, marqués de Echandía, director de la Escuela especial de Ingenieros de Caminos; vicepresidentes, D. Luis de Urzáiz, comandante general de Ingenieros, y D. Marcelino Asenjo, coronel director de la Academia de Caballería; secretarios, D. Modesto Díez del Corral, catedrático del Instituto de Burgos, y D. Olegario Fernández Baños, profesor de la Escuela Industrial de Artes y Oficios de Valladolid. A propuesta del Sr. Rey Pastor se agregó á las vicepresidencias á D. Luis Octavio de Toledo, siendo este nombramiento, como las proposiciones anteriores, aprobados por unanimidad.

Ocupada la presidencia por el señor marqués de Echandía y el puesto del secretario por D. Modesto Díez del Corral, hizo uso de la palabra don Julio Rey Pastor, catedrático de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid, para leer el discurso de apertura titulado «La cultura Matemática española».

El que suscribe dió cuenta de los textos de los telegramas que arriba se indican, y después de acordarse que el examen de Memorias empiece á las nueve de la mañana del siguiente día, se levantó la sesión; de todo lo cual, como secretario, certifico.—M. Díez del Corral.—V.° B.°, Luis Octavio de Toledo.

SESIÓN DE LA MAÑANA DEL DÍA 19

Bajo la presidencia de D. Luis Octavio de Toledo se reunió la sección á las nueve de la mañana, y después de fijar el orden para el examen de Memorias y las horas de trabajo, se levantó la sesión; de todo lo cual, como secretario, certifico.—M. Díez del Corral.—V.° B.°, Luis Octavio de Toledo.

SESIÓN DE LA TARDE DEL DÍA 19

Reunida la sección á las cuatro de la tarde, bajo la presidencia de don Luis Octavio de Toledo, y leídos por este señor dos telegramas de los Sres. Echegaray y García de Galdeano contestando á los que en la sesión de apertura se les había dirigido, D. Alejo Olavarrieta dió cuenta de su Memoria sobre «Nuevos principios de Mecánica».

Por no estar conformes con los conceptos y conclusiones en esta Memoria consignados, previa la venia de la presidencia, hicieron objeciones D. Ricardo M. Unciti, comandante de Ingenieros; D. Ramón Fontela, teniente de navío; D. Tomás de Azcárate, director del Observatorio Astronómico de San Fernando, y D. Pedro María González Quijano y don Gonzalo Alonso, ingenieros. Como al contestar el Sr. Olavarrieta se mostrase molestado por creer que alguno de sus contrincantes había estado poco comedido en sus juicios, el presidente afirmó que no había motivo para tal molestia, pues la presidencia no hubiera consentido la emisión de conceptos que no estuvieran dentro de la mayor corrección.

En vista de que la controversia se prolongaba demasiado, se acordó continuarla al día siguiente, á las diez de la mañana, después del examen de Memorias, y antes de la conferencia del Sr. Mingot, señalada para las once, y se levantó la sesión; de todo lo cual, como secretario, certifico.—M. Díez del Corral.—V.° B.°, Luis Octavio de Toledo.

SESIÓN DE LA MAÑANA DEL DÍA 20

Reunida la sección á las nueve de la mañana, bajo la presidencia de D. Luis Octavio de Toledo, propone este señor que D. Francisco Miranda Costa Lobo, profesor de la Universidad de Coimbra, encargado amablemente de leer en castellano dos Memorias escritas en portugués por F. Gomes Teixeira y R. Guimaraes, ocupe la presidencia de la Mesa durante la sesión, como prueba de deferencia al digno representante de la ciencia portuguesa. Tomado este acuerdo por unanimidad, el Sr. Costa Lobo leyó desde el sillón presidencial las Memorias referidas, que versan «Sobre os arcos dos aspirales sinusoides» y «Algunas palabras sobre Pedro Núñez», respectivamente.

El Sr. Rey Pastor presentó un folleto relativo á la vida de Pedro Núñez, escrito por Guimaraes, en el cual están poco determinados los hechos del biografiado durante el período de tiempo que residió en España, y propuso que la Asociación se interese en aclararlos.

El Sr. Costa Lobo dijo que de la poco copiosa edición que de las obras de Pedro Núñez hace con perfecta fidelidad la Academia de Ciencias de Lisboa, ofrece regalar ejemplares á la Facultad de Ciencias de Madrid. El Sr. Octavio de Toledo dió las gracias en nombre de la Facultad.

A continuación desarrolló su Memoria sobre «Representaciones reales de los espacios complejos de E_n» el Sr. Fernández Baños, y la suya el Sr. González Quijano, á la cual hizo una observación D. Julio Rey Pastor. El que suscribe hizo un resumen de la Memoria titulada «La trisección del arco de círculo», de D. Joaquín de Martitegui, capitán de Estado Mayor, ausente de Valladolid.

Se acordó dar por terminada la discusión, suspendida el día anterior, de la Memoria de D. Alejo Olavarrieta, en vista de no haberse presentado este señor en el local, y proponer que la sección de Madrid examine antes de su publicación las Memorias de los Sres. Olavarrieta y Martitegui.

D. José Mingot Shelly, catedrático del Instituto de Valladolid, dió la anunciada conferencia sobre «Aplicaciones modernas de la teoría de las sustituciones», y se levantó la sesión; de todo lo cual, como secretario, certifico.—M. Díez del Corral.—V.° B.°, Luis Octavio de Toledo.

SESIÓN DE LA MAÑANA DEL DÍA 21

Se reunió la sección, á las diez de la mañana, bajo la presidencia de D. Luis Octavio de Toledo, el cual dió cuenta de una carta de D. Zoel García de Galdeano, en la que éste hace el ofrecimiento de dos paquetes de folletos de su producción, á fin de que sean repartidos entre los congresistas. Se acordó que por medio del presidente se diesen las gracias más expresivas al generoso donante.

El Sr. Rey Pastor propuso que la sección se interese para conseguir que el Congreso científico del año 1919 (inmediato al del año 1917, para el cual se designará Sevilla) se celebre en Coimbra.

A continuación expuso el mismo señor la organización y trabajos del Seminario matemático de Madrid por él dirigido, al cual pertenece la Memoria del Sr. Fernández Baños examinada en la sesión anterior, y las de los Sres. Cámara, Araujo y Saldaña, tituladas «Sustituciones en el cuerpo normal de Galois», «Aplicaciones de la polaridad» y «Algunos ábacos en *Z*», respectivamente. En ausencia de los dos primeros señores, dió cuenta de sus Memorias el Sr. Rey Pastor, haciéndolo de la tercera su autor Sr. Saldaña. A la Memoria de D. Sixto Cámara hizo una observación D. Luis Octavio de Toledo. Después el Sr. Rey Pastor explicó su Memoria sobre «Potencial logarítmico», y se levantó la sesión; de todo lo cual, como secretario, certifico.—M. Díez del Corral.—V.° B.°, Luis Octavio de Toledo.

SESIÓN DE LA TARDE DEL DÍA 21

Bajo la presidencia de D. Tomás de Azcárate, figurando en la Mesa D. Luis Octavio de Toledo, se reunieron á las siete y media las secciones de Astronomía y Matemáticas, para oir la conferencia de D. Juan López Soler, comandante de Estado Mayor, sobre «Determinación de coordenadas geográficas con el astrolabio de prisma», conferencia común para las dos secciones.

Concluída la conferencia, se dieron por terminadas las labores del Congreso en lo que á Astronomía y Matemáticas se refería, y se levantó la sesión; de todo lo cual, como secretario, certifico.—M. Díez del Corral.—V.° B.°, Luis Octavio de Toledo.

ÍNDICE

Páginas.