TRATADO

TRATADO

DE

GEOMETRIA DESCRIPTIVA,

SOMBRAS, TOPOGRÁFICO

Y

SISTEMA DE ACOTACIONES,

por el Coronel, Teniente Coronel de Artillería, Profesor de la Academia

D. JOSE BIELSA Y CIPRIAN.

2.ª edicion.

SEGOVIA, 1857.

IMPRENTA DE LOS SOBRINOS DE ESPINOSA.

Excmo. Sr.:

Cuando en 1844 se dignó S. M. conferirme la enseñanza de la Geometría Descriptiva en este establecimiento, la primera dificultad que vino á aumentar los inconvenientes de mi insuficiencia, fue la falta absoluta de un testo adecuado al objeto. Así lo comprendió tambien el Coronel Profesor 1.° de la academia, que echó sobre mis hombros una carga superior á mis fuerzas, mandándome escribir un pequeño tratado que llenase el vacío que en la enseñanza se notaba. Obedeci como era mi deber, y en 1845 presenté á dicho Señor Gefe el resultado de mis trabajos. Examinados estos con sobrada indulgencia por una Junta de Profesores primero, y despues por la superior facultativa, el E. S. D. G. del cuerpo dió la órden para su publicacion.

Tal era E. S. la carencia absoluta de un testo de esta especie para el estudio de la Geometría Descriptiva en todos los establecimientos de instruccion pública, que á pesar de que la obra que yo publicaba adolecia de los defectos inherentes á mi inesperiencia en primer lugar, y en segundo á la incorreccion y mal tirado de las láminas, se ha agotado no obstante la edicion primera, volviendo á encontrarse otra vez la academia sin obras elementales españolas que poder dar á los alumnos para su debida instruccion. La esperiencia adquirida en once años de enseñanza, si bien me ha corroborado en la justa desconfianza con que miro mis trabajos, me ha convencido por otra parte de la necesidad de uniformar el estudio, teniendo siempre un testo que sirva de norma para la rigorosa observancia del sistema convencional mas generalmente admitido, y esta consideracion me ha dado aliento para emprender una segunda edicion de la Geometría Descriptiva elemental, aumentando, corrigiendo y variando la antigua, con sujecion á los mas modernos adelantos, tanto en la parte científica como en la material y tipográfica.

Al tener el honor de acoger mi trabajo á los auspicios de V. E., me atrevo á suplicarle se digne disculpar los errores que en él haya cometido en compensacion del buen deseo que me anima por el lustre del cuerpo que tan dignamente manda V. E. y con cuyo uniforme me envanezco. Dígnese pues V. E. aceptar benévolo el mezquino fruto de mis tareas, juntamente con la manifestacion de mi mas distinguida consideracion y respeto.

Dios guarde á V. E. muchos años. Segovia y Junio 28 de 1855.

Excmo. Sr.

José Bielsa.

Direccion general de Artillería.=2.ª seccion.=Por la adjunta copia de la sesion celebrada por la Junta Facultativa del Colegio, en 24 de Noviembre de 1855, se enterará V. S. del favorable informe que ha merecido á dicha corporacion la segunda edicion de su obra de Geometría Descriptiva; y conforme en un todo con cuanto en la citada acta se espone, deseando por mi parte contribuir á que la Academia del Cuerpo disfrute de la ventaja que le ha de reportar la inteligencia, laboriosidad y celo de V. S., he dispuesto que dicha obra se adopte por testo en la Academia, proponiéndome al mismo tiempo dar á V. S. cuantos auxilios le sean necesarios para llevar á cabo la impresion de la obra, con cuyo objeto espero me manifieste el modo y forma como desea se verifique esta, para que procediéndose desde luego á su impresion, pueda darse cumplimiento en el Colegio á lo dispuesto respecto á su adopcion por testo para la enseñanza de esta materia.

Dios guarde á V. S. muchos años. Madrid 4 de Abril de 1857. =El Director general, Azpiroz.=Sr. Coronel D. José Bielsa, Teniente Coronel del Cuerpo.=Cartagena.

Artillería.=Colegio.=Junta Facultativa.=Sesion del 24 de Noviembre de 1855.=Reunida la Junta, compuesta del Señor Presidente y vocales que al márgen se espresan, se leyó la acta de la sesion anterior que fué aprobada.=Seguidamente se dió lectura por el Señor Secretario, del informe razonado, que acerca de la nueva edicion del Tratado de Geometria Descriptiva del Coronel Teniente Coronel del Cuerpo, D. José Bielsa, ha evacuado con fecha 19 del corriente, la comision nombrada al efecto en la sesion anterior. Enterada la Junta, y despues de una detenida discusion, acordó manifestar al Excmo. Señor Director General del Cuerpo, en cumplimiento de lo prevenido por S. E. en su comunicacion de 9 de Agosto de este año, que el nuevo Tratado elemental de Geometria Descriptiva con sus aplicaciones á las Sombras y al Dibujo, escrito por el Coronel D. José Bielsa, es muy preferible para servir de testo en esta Academia, á la primera edicion del mismo Tratado que en la actualidad se emplea; y que el autor que tantas pruebas tiene dadas de su infatigable laboriosidad, ha hecho con este nuevo trabajo un importantísimo servicio al Cuerpo en general y en particular á la Academia, donde indudablemente se palparán las ventajas que proporciona esta obra para la enseñanza de tan interesante ramo de la instruccion. Con efecto, examinada la nueva edicion, tanto en la parte doctrinal, como en la esmerada ejecucion de las muchas láminas de que está adornada, aparece considerablemente aumentada respecto á la anterior, ya por la adicion del sistema de representacion de los cuerpos por medio de un solo plano de proyeccion, tan útil para el estudio de la fortificacion, ya por la resolucion del trazado de planos tangentes al paraboloide hiperbólico con que se completa la teoría de este género de superficies; ya, en fin, por la insercion de numerosos y útiles problemas indispensables para el estudio de las sombras, y por medio de los cuales se ejercitarán los alumnos en el sistema de proyecciones, que ha de allanarles el camino para el conocimiento de las máquinas y construcciones peculiares de la Artillería.=La Junta, por tanto, acordó esponer estas observaciones á la consideracion del Excmo. Sr. Director General, devolviendo á S. E. el manuscrito de dicha obra y el atlas correspondiente; y no habiendo otros asuntos de que tratar se levantó la sesion.=El Coronel Profesor Secretario, Joaquin de Bouligny.=V.° B.°=El Coronel Capitan 1.° interino, Manuel Paez Jaramillo.=Es copia: Azpiroz.

Excmo. Sr.=Con satisfaccion he recibido la lisonjera comunicacion de V. E. con que se sirve acompañar el acta de la Junta Facultativa del Colegio, y hecho cargo de la singular distincion y benevolencia con que se ha servido V. E. honrar mi manuscrito, perteneciente á la 2.ª edicion de G. D., y de la bondadosa proteccion que se sirve dispensarme para que le proponga los medios de llevar á cabo su impresion; considero deber manifestar á V. E. que dispuesto siempre á contribuir por cuantos medios me sean dables, á cuanto pueda ser de utilidad al Cuerpo que V. E. representa tan dignamente, y á que tengo el honor de pertenecer, y consecuente á lo manifestado en mi oficio de remision al antecesor de V. E., en que hacia donacion al Cuerpo de este trabajo, con objeto de que pudiese reemplazarse el anterior testo que, por causas agenas á mi voluntad, no habia salido con la perfeccion que habria sido de desear: si por evitar este escollo V. E. juzgase conveniente el que dirigiese la impresion y tirado de las láminas, estoy pronto á hacer lo único que en el particular me resta; si, como creo, V. E. acepta esta insignificante prueba de gratitud al Cuerpo á que tengo la honra de pertenecer.

Dios guarde á V. E. muchos años. Cartagena y Abril 8 de 1857.=Excmo. Sr.=José Bielsa.=Excmo. Sr. Director general de Artillería.

asuntos de que trata esta instancia.=El Coronel Profesor Secretario, [illegible] de [illegible].=V.º B.º=El Coronel Capitan 1.º interino, Manuel Perez Jaramillo.=Es copia: Azpiroz.

Excmo. Sr.=Con satisfaccion he recibido la lisonjera comunicacion de V. E. en que se sirve acompañar el acta de la Junta Facultativa del Colegio, y la noticia de la singular distincion y benevolencia con que se ha servido V. E. honrar mi manuscrito, permitiendo [illegible] y de la bondad y proteccion de V. E. [illegible] para que [illegible] proponga los medios de llevar [illegible] cumpliendo un deber manifestar a V. E. que dispuesto como estoy [illegible] por cuantos medios me sean dables, [illegible] que V. E. representa tan [illegible] el honor de pertenecer, y consecuente a [illegible] de remision al antecesor de V. E., en [illegible] al Cuerpo de este trabajo, con objeto de que [illegible] justo que, por causas agenas a [illegible] la que habria sido de [illegible] V. E. juzgase conveniente el que [illegible] y tirado de las láminas, estoy pronto a hacerlo [illegible] en particular me resta; así como ruego a V. E. acepte esta [illegible] prueba de [illegible] al Cuerpo a que tengo la honra de pertenecer.

Dios guarde a V. E. muchos años. Cartagena y Abril 8 de 1867.=Excmo. Sr.=[illegible].=Excmo. Sr. Director General de Artillería.

GEOMETRÍA DESCRIPTIVA.

LIBRO I.

CAPITULO PRIMERO.

Nociones preliminares.

§. 1. La Geometría descriptiva tiene dos objetos esenciales, el 1.° es la representacion gráfica de los cuerpos, y el 2.° dada la descripcion de estos cuerpos, venir en conocimiento de la forma que afectan.

Entre los diferentes medios que han podido elegirse para llenar estos objetos, *es el sistema de proyecciones rectangulares*, cuyos principios vamos á esponer.

2. Si de un punto A, situado en el espacio, *bajamos* sobre un plano fijo XYV, una perpendicular Aa, el pie a, *Fig.* 1.
de esta línea, se llama la proyeccion del punto A, sobre el plano en cuestion. Del mismo modo, bajando perpendiculares de todos los puntos de la recta AB, la serie de puntos ab... formará lo que llamamos la *proyeccion* de la recta AB sobre el plano fijo y esta proyeccion, es necesariamente rectilínea, porque todas las perpendiculares estan evidentemente contenidas en el plano trazado

por Aa y AB: por consiguiente, la interseccion del plano que la proyecta con el de proyeccion XYV, será la recta *ab* proyeccion de AB. La proyeccion de una curva MNP... es la serie de puntos que marcan los pies de las perpendiculares *m*M, *n*N, *p*P... bajadas de sus diferentes puntos sobre el plano fijo XYV. La proyeccion *m*, *n*, *p*, de dicha curva, es una línea cuya curvatura difiere ordinariamente de la curva dada en el espacio. El conjunto de estas perpendiculares *forman* una superficie cilíndrica, en el sentido general de esta palabra y se llama *cilindro proyectante ó superficie proyectante.*

3. Esto supuesto decimos, que un punto, una recta ó una curva, están completamente determinados, cuando tenemos sus proyecciones sobre dos planos fijos, cuya posicion es conocida, con tal que no sean paralelos. Sean en efecto XYV, XYZ, dos planos de esta clase y (a, a') las proyecciones dadas de un cierto punto en el espacio; si por el punto a, elevamos una perpendicular indefinida aA, sobre el plano XYV, esta recta pasará necesariamente por el punto pedido; este punto deberá asimismo encontrarse sobre la recta a'A, trazada perpendicularmente al plano XYZ, luego no podrá ser otro que el punto A, interseccion de las dos perpendiculares. Si las dos rectas (aA, a'A), no se encontrasen, no existiria ningun punto del espacio que tuviese por proyecciones las (a, a'), lo que probaria que las dos proyecciones de un punto no pueden tomarse *arbitrariamente* y que existe entre ellas una dependencia que esplicaremos mas adelante.

4. Sean (ab, $a'b'$) las proyecciones de una recta desconocida sobre los planos de proyeccion XYV, XYZ, imaginemos por la 1.ª un plano indefinido abB perpendicular á XYV, este plano contendrá evidentemente la recta

pedida, y tambien se hallará en el plano $a'b'$B, trazado sobre $a'b'$ perpendicularmente á XYZ; luego la línea desconocida se encontrará necesariamente en la interseccion de estos dos planos, que es una recta única y determinada. Solo se esceptuará el caso en que los dos planos proyectantes, se confundan en uno solo, lo que supondrá que la recta en el espacio, como sus dos proyecciones, serán perpendiculares á la interseccion XY de los dos planos fijos; en tal caso, dos proyecciones de esta clase, no bastarán para definir la recta en cuestion, y será necesario dar otra tercera proyeccion sobre otro plano fijo, no paralelo á la interseccion de los dos primeros.

5. En fin si se dan las proyecciones (*m.n.p.*) (*m'.n'.p'.*) de una curva desconocida, imaginaremos por la 1.ª un cilindro perpendicular al plano XYV y por la 2.ª otro perpendicular al plano XYZ; la curva pedida debe evidentemente encontrarse sobre cada una de estas superficies, y por consecuencia su posicion y su forma serán determinadas por su interseccion (M.N.P.) que podrá ser una línea de doble curvatura, es decir, que todos sus puntos no estén comprendidos en un mismo plano.

Asi será como en lo sucesivo definiremos gráficamente por sus dos proyecciones, un punto ó una línea, y cuando digamos que tal punto ó tal línea es dada, se deberá entender que son sus proyecciones las conocidas.

6. En todo lo que precede hemos supuesto que las proyecciones se efectuan por medio de rectas perpendiculares á dos planos fijos XYV y XYZ, tambien perpendiculares entre sí, de los cuales el 1.º es horizontal y el otro vertical. La interseccion XY, es una línea importante y se llama *línea de tierra*.

Alguna vez se emplean líneas oblícuas, pero siempre paralelas á los planos y las consecuencias establecidas (n.º 3. 4. 5) subsisten del mismo modo: pero solo en casos escepcionales debe adoptarse esta clase de proyecciones, porque en general son menos sencillas y ofrecen poca exactitud, en razon á que las líneas que se cortan oblícuamente, dejan indeterminado el punto de interseccion. Así, á menos que no se advierta lo contrario, las proyecciones serán siempre rectangulares.

7. Resta modificar este sistema de manera que las construcciones puedan efectuarse sobre un solo plano: á este fin, podemos imaginar que el plano XYZ ha girado sobre la línea de tierra XY, hasta quedar á la altura del plano horizontal, quedando ambos en uno solo VZ″, sobre el que se practican todas las construcciones que habrian de hacerse sobre los dos planos. Bien entendido, que este modo de considerar los planos, no es admisible sino para facilitar las construcciones, pues cuando hayamos de hacernos cargo de un problema, debemos imaginar estos planos en su primitiva posicion.

8. Por consecuencia del giro de estos planos, existe entre las dos proyecciones de un punto del espacio, una dependencia de suma importancia. En efecto: las dos rectas *a*A, *a′*A: que proyectan el punto A en *a* y *a′*, son perpendiculares, la una al plano horizontal y la otra al vertical, por consiguiente, el plano *a*A*a′*, trazado por estas dos rectas, será perpendicular á los dos planos de proyeccion y las comunes intersecciones *af* y *a′f* serán perpendiculares á XY, y concurrirán en el mismo punto *f* de la línea de tierra. Esto supuesto, cuando el plano vertical XYZ, gire alrededor de XY, llevará consigo la línea *a′f*, que durante el movimiento permane-

cerá perpendicular á la charnela XY, por consecuencia, despues del giro del plano vertical, la recta $a'f$, tomará la posicion fa'', prolongacion de af. Por manera que *las dos proyecciones de un mismo punto del espacio, se hallarán siempre sobre una línea perpendicular á la de tierra.*

9. En cuanto á la recta AB, si sobreponemos el punto b' en b'', la proyeccion vertical $a'b'$ vendrá á situarse en $a''b''$, que no tendrá con la proyeccion horizontal ab, ninguna dependencia, de suerte que podemos trazar arbitrariamente las líneas ab, $a''b''$ para representar las dos proyecciones de una recta del espacio. Debe esceptuarse el caso en que AB sea perpendicular á la línea de tierra XY: entonces la proyeccion vertical deberá ser prolongacion de ab, perpendicular á la línea de tierra; mas hemos dejado dicho (número 4) que en este caso particular, no bastan dichas dos proyecciones para determinar la posicion de la recta.

10. En lo sucesivo supondremos los planos de proyeccion confundidos en uno solo, de modo que la línea de tierrá XY, tenga la posicion indicada (F. 2.) y como entonces la parte XYV representará al mismo tiempo la porcion anterior del plano horizontal y la inferior del plano vertical, que ha venido á confundirse con la 1.ª mientras que la XYZ comprenderá la porcion superior del plano vertical y la posterior del horizontal, no bastará dar indistintamente las dos proyecciones a y a' de un punto del espacio, para fijar su posicion, porque la una ó la otra de estas dos condiciones pueden ser admisibles y producir una gran diferencia en cuanto á la posicion del punto del espacio.

11. Con el fin de hacer mas perceptible á la vista el plano á que hacen relacion cada una de las proyecciones

de un punto del espacio ó de una línea, se ha convenido en indicar con letras sin acento, las proyecciones horizontales, y con las mismas letras acentuadas, sus correspondientes verticales. Así las proyecciones de un punto A situado en el primer cuadrante (F. 1.) quedará representado por (a. a') F. 2.ª y un punto R del 2.° por las (r. r') y así de los demas.

Antes de terminar estas nociones, estableceremos algunas reglas concernientes al trazado de las figuras. Estos diseños deben representar exactamente la forma de los objetos; lo que exige que los medios que se empleen ofrezcan una clase de lenguaje inteligible á los ojos, á cuyo fin se han establecido las reglas siguientes.

12. Las líneas principales, es decir, las que representan los datos ó resultados de un problema, se marcarán por líneas seguidas, cuando son visibles como A, de la F. 3.ª; mas si estas líneas son invisibles, se trazarán de puntos como la D.

Todas las líneas auxiliares que no se emplean sino como medios para llegar á la solucion del problema, se trazarán con intérvalos, tal como B. Esta clase de líneas no es necesario hacer distincion de si son ó no visibles, puesto que no deben existir mas que en la imaginacion del geómetra.

Cuando entre estas líneas auxiliares exista alguna sobre que se quiera llamar la atencion, se podrá representar por una línea mista como C.

Falta dar á conocer cómo se distinguen las líneas que son visibles de las que no lo son. Las reglas completas á este objeto no pueden establecerse sino despues de haber hablado de las superficies curvas y de los planos tangentes; mas como en los primeros problemas de que nos vamos á ocupar no se encuentran mas que rectas y planos, bastará por ahora conocer las conivenciones siguientes.

13. Se admite que siempre que se considera un objeto sobre el plano horizontal, el observador está situado sobre la vertical que pasa por un punto cualquiera de dicho objeto y por delante del plano vertical. En efecto, los rayos, visuales trazados del ojo del observador á todos los puntos de un cuerpo, se aproximarán tanto á ser perpendiculares al plano horizontal, cuanto el observador se eleva mas sobre dicha vertical, de suerte que cuando el punto de vista esté á una distancia infinita, estos rayos serán paralelos y se confundirán con las rectas que sirven para proyectar los puntos del cuerpo. De que se sigue, que la proyeccion horizontal de un objeto no es otra cosa que una vista de este objeto, tomada de un punto infinitamente distante sobre la vertical, resultado que justifica suficientemente la convencion enunciada (número 2.)

Por una razon semejante, toda proyeccion vertical se considera vista á una distancia infinita sobre una perpendicular al plano vertical y por cima del plano horizontal.

14. En su consecuencia, toda línea principal ó porcion de ella que se encuentre detras de estos planos ó de cualquiera otro, se considerará invisible y por consiguiente de puntos. Esto no deberá entenderse con las líneas auxiliares por lo dicho (número 12).

Principios generales deducidos del sistema convencional.

I. Si un punto está situado en uno de los planos de proyeccion, su proyeccion en este plano se confunde con el mismo punto, y en el otro será un punto de la comun seccion. Si el punto estuviese á la vez en los dos planos de proyeccion, el punto y sus proyecciones se confundirán en uno solo de dicha comun seccion.

II. Si una línea está en uno de los planos de proyeccion, su proyeccion sobre este plano se confundirá con la misma línea, y la 2.ª proyeccion estará sobre la línea de tierra. Si se hallase á la vez en los dos planos, se confundirá con sus dos proyecciones, y las tres líneas estarán confundidas en una sobre la comun seccion.

III. *Si una línea es perpendicular á uno de los planos fijos, su proyeccion en este plano será un punto, y en el otro una perpendicular á la línea de tierra.* Por ser la línea perpendicular al plano, se confundirá con su proyectante. El plano que proyecta esta línea sobre el otro, debiendo serle perpendicular, su interseccion comun habrá de serlo á la línea de tierra.

IV. *Si la línea es perpendicular á la comun seccion, sus proyecciones serán perpendiculares á dicha línea.* Porque los planos proyectantes se confunden en uno que será perpendicular á los de proyeccion (número 4).

V. *Si una línea es paralela á los planos de proyeccion, sus dos proyecciones serán líneas rectas idénticas á ella y paralelas á la comun seccion.* Si lo fuese solo á uno de ellos, su proyeccion en el plano á que es paralela, será una recta igual á ella; y en el otro, una paralela á la línea de tierra.

VI. *En todo caso, las proyecciones de una línea recta son rectas, pero no todas las proyecciones rectas pertenecen á líneas rectas.* En efecto, todas las curvas planas, situadas en planos perpendiculares á los de proyeccion, darán por proyecciones la comun interseccion de estos planos con los de proyeccion, que serán una línea recta perpendicular á la comun seccion. Fuera de este caso dos proyecciones rectas nó pueden pertenecer sino á una línea recta.

VII. *Si dos líneas se cortan en el espacio, sus proyecciones tambien se cortarán.* Los planos que proyectan estas líneas se cortarán, y como las comunes intersecciones de estos planos con los de proyeccion, son las proyecciones de las líneas, es consiguiente que dichas proyecciones se hayan de cortar. La comun interseccion de las dos líneas es un punto del espacio, luego sus proyecciones habrán de estar en una perpendicular á la línea de tierra (n.° 8.)

VIII. *Si dos líneas son paralelas, lo serán tambien sus proyecciones y vice-versa.* Por ser estas líneas paralelas, los planos que las proyectan tambien lo serán, dos planos paralelos cortados por un tercero, sus intersecciones serán paralelas, que es el caso en que están los planos proyectantes con los de proyeccion á que se refiere. La recíproca está fundada en los mismos principios.

IX. *Si los planos de proyeccion son cortados por un tercero, la comun seccion de dicho plano serán dos líneas que concurrirán en un punto de la línea de tierra y que llamamos trazas del plano.* De que se infiere que conocidas las trazas de un plano se conoce su posicion, puesto que dos líneas que se cortan fijan la posicion de un plano.

X. *Si dos planos son paralelos, sus trazas tambien lo serán.* Porque si dos planos paralelos son cortados por un tercero, sus intersecciones son paralelas.

XI. *Si una línea AB es perpendicular á un plano PQR′, las proyecciones (ab, a′b′) de la recta, serán perpendiculares á las trazas del plano.* El plano que proyecta la recta en *ab*, es por su definicion perpendicular al plano horizontal, tambien lo es al plano dado PQR′, por contener una línea que le es perpendicular: luego este plano F. 4.

proyectante es á la vez perpendicular á los dos, y por consiguiente lo será á su interseccion, que es la traza horizontal QP, por consecuencia esta traza será perpendicular á la proyeccion *ab* que se encuentra en el plano proyectante. De un modo análogo se demuestra que la traza QR′, es perpendicular á la proyeccion *a′b′*.

Recíprocamente, si las proyecciones (*ab*; *a′b′*) de una recta, son respectivamente perpendiculares á las trazas QP y QR′ de un plano, este plano y la recta son perpendiculares. En efecto, el plano *ab*C′ proyectante de la recta, es evidentemente perpendicular á la traza QP y por consecuencia al plano PQR′ que contiene á esta; del mismo modo, el plano proyectante cuya traza es *a′b′* es perpendicular á la recta QR′ y por consecuencia al plano PQR′ por la misma razon.

CAPITULO II.

Problemas relativos á la línea recta y el plano.

15. Hemos dejado dicho, que dos proyecciones rectilíneas cualquiera, determinan una línea del espacio; mas como una línea se determina conocidos dos de sus puntos, vamos á dar á conocer el método general para encontrar las trazas de una recta; esto es, los puntos en que encuentra los planos de proyeccion.

Dadas las proyecciones de una recta, determinar sus trazas é inversamente.

F. 5. 16. Sean las *ab*, *a′b′* las proyecciones de la recta: la traza vertical, que deberá ser un punto comun al plano vertical y á la recta dada, habrá de estar proyectada horizontalmente sobre la línea de tierra y sobre la proyeccion horizontal (*ab*) prolongada. Luego esta traza tiene por proyeccion horizontal el punto c: la traza vertical ha de estar en la perpendicular cC' y ha de pertenecer á la proyeccion vertical $a'b'$, luego no podrá ser otra que el punto C' interseccion de las dos rectas; de que resulta la regla general siguiente: *prolónguese la proyeccion horizontal hasta la línea de tierra, en este punto elévese una perpendicular indefinida, y su interseccion con la proyeccion vertical, será la traza vertical de la recta propuesta.*

La traza horizontal debiendo ser un punto situado á la vez en el plano horizontal y sobre la línea propuesta, se hallará proyectada verticalmente sobre la línea de tierra y sobre $(a'b')$ prolongada. Esta traza tendrá por proyeccion vertical la d', se ha de encontrar en la perpendicular $d'D$ á la línea de tierra, tambien debe hallarse sobre la proyeccion horizontal ab, luego será el punto D, que es la comun interseccion y en general: *prolónguese la proyeccion vertical hasta la línea de tierra, en este punto trácese una perpendicular, su interseccion con la proyeccion horizontal determinará la traza horizontal de la recta.*

17. Recíprocamente, si se dan las trazas DC' de una recta, será fácil determinar sus proyecciones; como el punto C' pertenece á la recta, la perpendicular $C'c$, bajada sobre la línea de tierra, dará un punto c de la proyeccion horizontal, que será evidentemente la Dc: del mismo modo el punto D, que pertenece á la recta, estará proyectado verticalmente sobre la línea de tierra y dará un punto d' de la proyeccion vertical $d'C'$.

18. Si la línea tuviese por proyecciones la $(Dd', C'c)$ *F.* 6.
por lo dicho (número 4) estas proyecciones no son suficientes para definir la recta, y será necesario una tercera proyeccion ó una condicion mas, como la de tener por trazas los puntos D, C', ó el punto c. En el primer caso bastaria rebatir á uno de los planos el punto D: si este

punto se considera como traza, no habiendo variado en el giro el punto C′, C′D′ representará la posicion y magnitud de la línea efectiva: en el segundo caso, si fuese *c* la traza de la linea, el punto (C′, D,) seria un punto de la línea, y rebatidas al plano vertical las proyectantes de dicho punto, el punto D trasladado á D′ fijaria el lugar de la proyectante C″D′, y como C′ no ha variado de posicion, C′C″ dará por su encuentro con C″D′ el punto C″, estremo de la línea propuesta, y por consiguiente C″*c* la línea efectiva.

Construir la recta que pasa por dos puntos dados, (a, a′), (b, b′), y la distancia efectiva entre dichos dos puntos.

F. 7. 19. Conforme á las definiciones dadas, es evidente que la proyeccion horizontal de la recta buscada, pasará por los puntos *ab*, mientras que la proyeccion vertical pasará por los *a′b′*, luego esta recta indefinida estará proyectada segun la línea (*ab*, *a′b′*), y por lo dicho (número 3) estará determinada su posicion.

20. En cuanto á la distancia entre los puntos dados, está medida en el espacio por la porcion de la recta proyectada sobre *ab* y *a′b′*; mas es fácil ver que una recta es siempre mayor que sus proyecciones sobre un plano, escepto cuando es paralela al plano sobre que se proyecta, porque entonces la recta en el espacio es evidentemente de la misma longitud que su proyeccion. Hecha esta reseña, imaginemos que la línea (*ab*, *a′b′*) gira alrededor de la vertical proyectada en *b*, sin variar de inclinacion con esta línea, con lo que la estremidad (*b*, *b′*) permanecerá fija, mientras que la (*a*, *a′*) situada á una altura constante y determinada, describirá un arco de círculo alrededor del eje de rotacion.

Luego si continuamos este movimiento hasta que la recta movible vaya á quedar paralela al plano vertical, lo que sucederá cuando la recta *ab* haya tomado la situacion $a''b$, paralela á la línea de tierra XY, la estremidad *a*, trasladada á a'', se encontrará proyectada verticalmente (número 8.) en un punto de la $a''A'$ perpendicular á XY; y como debe estar á la misma altura $a'm$, A' será la proyeccion vertical de la estremidad movible de la recta en cuestion.

Por otra parte, puesto que la otra estremidad bb' ha permanecido inmóvil, se sigue que la recta $(ab, a'b')$ quedará proyectada segun $(a''b, A'b')$, y su verdadera longitud, es precisamente la proyeccion vertical $b'A'$. De que se deduce la regla siguiente: *para encontrar la distancia efectiva entre dos puntos, constrúyase un triángulo rectángulo en que un cateto sea la diferencia de las alturas de los dos puntos, y el otro, el intérvalo que da la proyeccion horizontal entre las proyecciones horizontales de dichos puntos, y la hipotenusa será la distancia efectiva.*

21. Habriamos podido llegar al mismo resultado, construyendo un triángulo rectángulo en que un cateto fuese la diferencia de las distancias de los dos puntos dados, al plano vertical, y el otro cateto, el intérvalo de las dos proyecciones verticales.

22. Asimismo habriamos podido sobreponer la recta $(ab, a'b')$ al plano horizontal, haciendo girar alrededor de *ab*, como una charnela, el trapecio invariable, formado por la recta propuesta y las verticales que proyectan sus estremidades en *a* y en *b*. Estas dos verticales permanecerán perpendiculares á la charnela *ab* y tomarán la posicion $aA=pa'$ y $bB=qb'$; de suerte que trazando la recta AB, habremos obtenido la verdadera distancia entre los dos puntos (a,a') y (b, b'). Observaremos que la línea AB prolongada, termina en C, porque este punto es la traza horizontal de la recta primitiva, por consiguiente se encuentra situado sobre la charnela C*d* y como tal, ha debido permanecer invariable durante la revolucion de la recta.

23. Recíprocamente, si se da la recta indefinida (C*b*, *c'b'*) y uno de sus puntos *bb'*, y queremos encontrar sobre esta línea otro punto (*a*, *a'*) que diste del primero una cantidad α: sobrepondremos como anteriormente la recta propuesta al plano horizontal, haciendo *b*B=*b'q* y tirando CB, tomaremos sobre esta última un intérvalo AB=α y restituyendo CB á su primitiva posicion, el punto A se hallará en *a* por una perpendicular á la charnela C*b*: en fin, de la proyeccion horizontal *a*, deduciremos la vertical *a'*; lo que determinará completamente el punto que dista de (*b*, *b'*) la estension dada.

24. La determinacion del ángulo que forma una línea con los planos de proyeccion, no ofrecerá dificultad si se reflexiona que el ángulo que una línea forma con el plano, es el que forma esta línea con su proyeccion: que por consiguiente, rebatiendo el trapecio proyectante de la línea, en él tendremos el ángulo en sus justas dimensiones.

Construir el plano que pase por tres puntos dados, cuyas proyecciones son (m, m') (p, p') (n, n') Fig. 8.

25. Recordaremos que para determinar gráficamente la posicion de un plano, basta marcar sus dos trazas, esto es, las intersecciones de este plano con los de proyeccion (núm. IX). Ademas, es evidente que cuando una recta está situada en un plano, las trazas de esta recta deben estar en algun punto de la traza del plano. Esto supuesto, unamos los puntos dados dos á dos, por las rectas (*np*, *n'p'*), (*mp*, *m'p'*), (*mn*, *m'n'*), las que estarán contenidas en el plano, y por consiguiente sus trazas serán puntos de las trazas del plano: construyamos, como en el (número 16) las trazas verticales G′ D′ y B′ de estas rectas. Estos tres puntos deben evidentemente pertenecer á la interseccion del plano buscado con el plano vertical de proyeccion, que deberán estar en línea recta, y serán mas que suficientes para determinar la traza vertical R′Q del plano pedido. Del mismo modo, la traza horizontal QP, de este plano, se obtendrá construyendo las trazas horizontales A, C y E de las tres rectas auxiliares. Las líneas PQ y QR′ así obtenidas, deben encontrar la línea de tierra XY en el mismo punto Q, lo que ofrecerá un medio de comprobar las construcciones anteriores.

26. Si queremos hacer pasar un plano por una recta y un punto dado, uniremos este punto con uno de los de la recta, ó bien trazaremos una paralela á esta por el punto dado; entonces conoceremos dos rectas situadas en el plano buscado, y cuyas trazas bastarán para determinar las de este plano.

Rebatimiento de los planos con los puntos ó líneas que contienen.

27. El rebatimiento de un plano sobre uno de los de proyeccion, facilita ejecutar por los procedimientos de la Geometría plana, todas las construcciones del espacio que deban hacerse en este plano.

El rebatimiento está fundado en que despues de hecho el giro sobre una de las trazas como charnela, un punto del plano se encuentra sobre la perpendicular bajada de su proyeccion sobre esta traza y á una distancia igual á la hipotenusa de un triángulo rectángulo, en que la distancia de la proyeccion á la charnela, y la del punto al plano de proyeccion, forman los dos catetos de dicho triángulo.

Rebatimiento de un punto contenido en un plano perpendicular á la línea de tierra.

28. Un punto (a, a') (Fig. 9) de un plano PQR' perpendicular á la línea de tierra, se encuentra despues del giro sobre su traza PQ, en la perpendicular aA elevada á esta traza, de la proyeccion horizontal del punto y su distancia á la charnela es la a'Q del punto al plano horizontal. El punto rebatido sobre el plano horizontal debe hallarse en la interseccion A de la perpendicular aA y de una paralela a''A á PQ.

Por medio del rebatimiento de un segundo punto (b, b') obtendremos el de una línea AB sobre el plano horizontal de proyeccion.

La segunda traza del plano que es una línea perpendicular á la que hace de charnela en el punto Q, se confundirá con la línea de tierra XY, y los puntos CD'' en que la recta rebatida AB encuentra las trazas del plano, pertenecerán á las trazas de la recta. Cuando se restituya el plano á su primitiva posicion, el punto D'' describirá en el plano vertical un arco de círculo D''D' cuyo centro es Q, é irá á situarse en D' sobre la traza vertical QR' del plano; D' será por consiguiente la traza vertical de la línea. Cuando se quieran fijar las proyecciones de una recta dada, en un plano rebatido, la construccion mas sencilla consiste en restituir las trazas de esta recta, y en defecto de ellas, dos puntos cualquiera.

Rebatimiento de un punto ó línea contenidas en un plano perpendicular á uno de los de proyeccion.

29. El punto (a, a') (Fig. 10) del plano PQR' perpendicular al horizontal de proyeccion, se encontrará despues del giro, en este plano, en la interseccion A de la perpendicular aA y de la paralela á PQ que dista de esta traza $a'''Q=a''Q=a'\alpha$. Del mismo modo obtendremos un

segundo punto B de una recta dada por las proyecciones de dos de sus puntos.

La traza vertical R′Q perpendicular al plano horizontal, lo será á QP, por consiguiente en el giro no dejarán de serlo y estará bien representada por la RQ.

La traza horizontal C de la recta, no variará como punto de la charnela, la vertical D′ se encontrará despues del giro sobre QR á una distancia QD=QD′.

30. Si el punto A del plano, estuviese dado en el plano rebatido, obtendremos su proyeccion horizontal, trazando la perpendicular Aa á la traza horizontal del plano y la proyeccion vertical, en la perpendicular á la línea de tierra á una distancia $a'\alpha$=Aa. En el rebatimiento del plano sobre el vertical de proyeccion, la traza horizontal PQ, vendrá á confundirse con la línea de tierra QP′, las proyecciones horizontales $a\,b$ habrán ido por arcos de círculo á $a^{\text{iv}}b^{\text{iv}}$ y como sus alturas no habrán variado, los puntos A, B, habrán de encontrarse en la interseccion de la perpendicular a^{iv}A′, b^{iv}B′ y de la horizontal a'''A′ y b''' B′. El punto D′, traza de la línea, no habrá variado puesto que está en la charnela, el C, traza horizontal, se habrá trasladado á C′, de modo que uniendo C′D′ esta línea comprende los puntos A′B′, que la pertenecen.

Rebatimiento de un punto y una línea contenidos en un plano cualquiera.

31. Partiendo del principio enunciado (número 27), el rebatimiento A, sobre el plano horizontal de un punto (a, a') del plano PQR, debe encontrarse en la perpendicular aA, bajada de la proyeccion horizontal a, á la charnela PQ, y á una distancia a''A, igual á la hipotenusa de un triangulo rectángulo en que los catetos son las aa'', $a'\alpha$. *F.* 11.

Este triángulo puede construirse sobre el plano vertical en $\alpha x''a'$ ó en el horizontal, en aa''A′.

32. El rebatimiento de un segundo punto (b, b') de una recta $(Cd, c'D')$ situado en el plano, determinará el rebatimiento CD de dicha recta. No habrá necesidad de este segundo punto para fijar la posicion de la recta, siempre que conozcamos la traza horizontal, porque necesariamente la recta habrá de pasar por ella.

Si nos propusiesemos rebatir la traza vertical QR' del plano, construiriamos como anteriormente, el giro de un punto cualquiera dD', de esta traza y uniéndole con el en que se cortan las trazas del plano, tendriamos el plano DQP rebatido.

Observaremos que los ángulos en C' y a''' de los triángulos rectángulos $\alpha'C'b'$ y $\alpha a'''a'$ y de todos los triángulos correspondientes á los diferentes puntos del plano, miden su inclinacion con el plano horizontal.

33. Recíprocamente, si se dá el rebatimiento A, de un punto del plano PQR, podemos obtener las proyecciones de este punto, bajando la perpendicular Aa'' á la traza horizontal del plano y construyendo el triángulo rectángulo $aa''A'$ conocida la hipotenusa $A'a''=Aa''$ y el ángulo agudo en a'', lo que siempre es posible, sea que se dé el plano PQR' ó su traza horizontal PQ y la vertical RQ rebatida. Porque en uno y otro caso, podremos construir el triángulo rectángulo $dd''D''$ correspondiente al rebatimiento de un punto $(D'd)$ de la traza vertical de este plano.

34. En efecto, en el primer caso, el punto D' se encontrará proyectado horizontalmente en d y $D'd$, medirá la distancia del punto al plano horizontal; en el rebatimiento de este plano, el punto D' caminará por una perpendicular á la traza horizontal QP sobre que se hace el giro, y $d''d$ medirá la distancia de la proyeccion horizontal del punto á la traza del plano, y por consiguiente $D'd$ y dd''

serán los catetos del triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es necesariamente la Dd''. Si pues rebatimos al plano horizontal el plano $d''d$D$'$, el punto D$'$ caerá en D$''$ y el ángulo D$''d''d$ medirá la inclinacion del plano propuesto.

La proyeccion del punto A, dado en el plano rebatido, quedará determinada trazando por a'' la paralela a''A$'$, á d''D$''$ tomando a''A$'$=Aa'' y bajando de A$'$, la perpendicular A$'a$ cuyo pie a será la proyeccion horizontal. La proyeccion vertical se obtendrá elevando la perpendicular aa' y tomando aa'=aA$'$.

35. Para el segundo caso en que se diese la traza horizontal fija, y la vertical rebatida, un punto cualquiera D de la traza vertical, se habrá de encontrar en la traza vertical del plano D$'dd''$ que pasando por dicho punto, fuese perpendicular á la traza horizontal QP del propuesto y á una distancia QD$'$=QD del punto Q, por manera que $d''d$ y dD$'$ representarán los catetos del triángulo rectángulo, cuyo ángulo en d'' será el que forma el plano con el horizontal de proyeccion.

Por un punto dado (a, a$'$) *trazar un plano que sea paralelo, á otro cuyas trazas sean las PQ, QR$'$.* F. 12.

36. Es evidente que las trazas de dos planos paralelos, serán tambien paralelas; así bastará encontrar un punto de cada una de las trazas del plano que se pide. Para esto imaginaremos por el punto dado (a, a') una horizontal situada en el plano desconocido, lo que siempre es posible, porque podemos considerar una recta auxiliar paralelamente á la traza horizontal de este mismo plano, ó bien paralelamente á PQ. Si trazamos en esta direccion la ac y a'C$'$ paralelamente á la línea de tierra, estas serán evidentemente las dos proyecciones de la horizontal contenida en el plano que buscamos. Esto supuesto, construyendo el punto (c, C$'$) en que toca

el plano vertical, este punto pertenecerá á la traza del plano buscado, que será por consecuencia la recta M′N, paralela á QR′, la otra traza que deberá pasar por el punto N, será la línea NT, paralela á QP.

Como comprobante de esta operacion podemos determinar un punto de la traza horizontal, por un procedimiento análogo que dará un resultado idéntico.

F. 11. *Dada la proyeccion horizontal* ab, *de una recta que sabemos está situada en un plano conocido PQR′, encontrar la otra proyeccion.*

37. La recta propuesta tocará al plano vertical en un punto que debe estar proyectado horizontalmente en *d* (§. I.) y no pudiendo hallarse esta traza fuera de la vertical QR′ del plano que contiene esta recta, dicho punto estará necesariamente situado en D′ y será uno de los de la proyeccion pedida. Por semejantes motivos veremos que la recta en cuestion va á cortar al plano horizontal en C; luego si proyectamos C en *c′* sobre la línea de tierra XY, *c′*D′ será la proyeccion vertical de la recta propuesta. Fácil es conocer se puede hallar la proyeccion horizontal, conocida que sea la vertical.

F. 12. Si la proyeccion señalada en el plano horizontal tuviese la posicion de la *ac*, paralela á la traza NT del plano dado, obtendremos como hemos dicho la traza vertical C′ de la recta desconocida; mas la traza horizontal de esta recta no existe, puesto que *ac* no encuentra á NT; de donde concluiremos que esta recta es paralela al plano horizontal, y así su proyeccion vertical es la recta C′*a′* paralela á la línea de tierra XY.

Podriamos ver del mismo modo, que si la proyeccion horizontal dada, fuese paralela á la línea de tierra, la recta en el espacio es paralela al plano vertical, y que su proyeccion sobre este último plano, seria paralela á la traza NM′.

Conocida la proyeccion horizontal de un punto que sabemos está en un plano dado, encontrar la otra proyeccion.

38. Sea *a* el punto dado y PQR′ el plano: por el punto dado *a*, trazaremos una recta cualquiera *d*C que tomaremos por la proyeccion horizontal de una de las infinitas líneas situada en el plano PQR′, y cuya proyeccion vertical determinariamos como queda dicho (número 37). Conocidas las proyecciones de la línea y la horizontal del punto, se deducirá la segunda proyeccion por la perpendicular *aa′*. *F.* 11.

Entre las diversas direcciones que podemos dar á esta recta auxiliar, la mas cómoda ordinariamente es una paralela á la traza horizontal como la *ca*. (F. 12).

Construir las trazas de un plano paralelo á otro dado, y á una distancia tambien dada.

39. Sea PQR′ (F. 13) el plano dado, y *m* la línea que mide la distancia que ha de haber entre los dos planos. La distancia entre dos planos paralelos estará medida por la perpendicular á ellos, por consiguiente, si del punto Q de interseccion de las trazas del plano propuesto, imaginamos una perpendicular á este plano, tendrá por proyecciones (núm. XI) la (Q*c*, Q*c′*) perpendiculares respectivamente á las trazas del plano: si obtenemos (número 20) la longitud efectiva QC de esta línea, y puesto que el punto Q es punto del plano, á contar de este punto tomamos la dimension propuesta *m*; la AQ medirá la distancia efectiva á que habrán de estar los dos planos. Obtenidas las proyecciones *aa′* de este punto, y haciendo pasar por el (número 36) un plano paralelo al dado PQR′, el M′NS será el que cumpla con las condiciones.

Por una recta dada hacer pasar un plano paralelo á otra recta tambien dada.

40. El plano propuesto habrá de contener una de

las rectas y ser paralelo á la otra, por consiguiente contendrá todas las paralelas á la segunda, por manera que si se elige un punto de la primera recta, y por él se hace pasar una línea paralela á la segunda, estas dos determinarán un plano que cumplirá con la condicion.

Dadas dos paralelas, por un punto de una de ellas trazar una secante tal que la parte interceptada sea de una magnitud dada.

41. Puesto que dos rectas paralelas fijan la posicion de un plano, determinaremos las trazas del que contiene dichas líneas. Rebatido este (número 32) á uno de los de proyeccion, obtendremos las líneas propuestas en su verdadera magnitud y á la distancia efectiva á que se encuentran en el espacio.

Conseguido esto, solo restará tomar la longitud dada y aplicarla del punto á cortar la paralela.

Desde luego se ve que el problema en general tendrá dos soluciones, porque podrá tomarse á uno ú otro lado del punto, y que si la distancia dada es menor que la que hay entre las dos rectas, no tendrá ninguna.

Construir la recta que pase por dos puntos, el uno dado por la proyeccion horizontal, y el otro por la vertical.

42. Sabido cómo se determina la segunda proyeccion de un punto que se supone en un plano, no habrá mas que determinar las segundas proyecciones de cada uno de los puntos propuestos. Obtenidas estas, puesto que son puntos de una línea, uniéndolos, quedará determinada la línea.

Dada la proyeccion horizontal de una recta y un punto de la vertical, determinar esta recta con la condicion de ser paralela á un plano dado.

43. En el plano propuesto, siempre será posible construir la proyeccion horizontal de una recta paralela

á la dada, y de ella, deducir su proyeccion vertical en el mismo plano. Haciendo pasar por la proyeccion vertical del punto, una paralela á la proyeccion vertical determinada en el plano, quedará resuelta la cuestion.

Hallar la interseccion de dos planos que se cortan, y cuyas trazas son NQR′, S′TV.

44. Si prolongamos las dos trazas horizontales hasta que se corten, este punto B, comun á los dos planos, pertenecerá á su interseccion, y puesto que se halla en el plano horizontal, esta será la traza horizontal de la recta buscada: del mismo modo el punto A′ en que se cortan las trazas verticales de los planos dados, será la traza vertical de esta recta. *F. 14.*

Conocidas las dos trazas de una recta, será fácil determinar sus proyecciones (número 17).

45. Si dos de las trazas fuesen paralelas, como las R′QP y VTS′, el punto B se alejará indefinidamente, y por consecuencia la interseccion de los dos planos será una horizontal y tendrá por proyeccion la A′*c*′ paralela á la línea de tierra y *ac* paralela á TV; resultado que es fácil comprobar, pues que los planos dados pasarán entonces por dos rectas paralelas QP y TV que no podrán cortarse, sino segun una recta paralela á ellas. Puede suceder, que prolongadas las trazas horizontales ó verticales, no se corten, en cuyo caso faltaria un punto para determinar las proyecciones de esta línea comun interseccion. Si suponemos limitadas las trazas QR′, TS′ (Fig. 15), en tal caso bastará imaginar un plano auxiliar horizontal M′N′. La interseccion de este plano con cada uno de los propuestos, será una horizontal que verticalmente estará proyectada sobre su misma traza M′N′ y horizontalmente por las paralelas (*mc*, *nc*) á las trazas horizontales de los planos propuestos. El punto *c* interseccion, correspon-

derá á la comun seccion de los planos, cuya proyeccion vertical será c', por manera que (Ac, $a'c'$) serán las proyecciones de la comun seccion de los dos planos.

F. 16. 46. Si las trazas de dos planos son paralelas y cortan la línea de tierra, los planos serán paralelos, y por consiguiente no habrá comun seccion; mas puede suceder, que siendo las trazas de los planos paralelas á la línea de tierra, y por consiguiente paralelas entre sí, que los planos se corten ó que no se corten. Se cortarán dos planos cuyas trazas sean paralelas á la línea de tierra, siempre que la equidistancia entre las trazas de estos planos, no sea igual en proyeccion horizontal y vertical, porque es indudable que los planos no serán paralelos, ó bien cuando teniendo las trazas paralelas están invertidas como en los planos (PQ, P′Q′) y (TS, T′S′); pero el método precedente no es suficiente para obtener aquella interseccion.

47. Para encontrarlas tracemos un plano auxiliar $\alpha\delta\gamma'$ este plano cortará al (TS, T′S′) segun la recta (Cd, $c'D'$) que se construye por el método general, y al plano (PQ, P′Q′) segun la recta (Ef, $e'F'$); estas dos líneas darán por su encuentro un punto (m, m') que será evidentemente comun á los dos planos (PQ, P′Q′) (TS, T′S′) y por consecuencia estos tendrán por interseccion la recta (am, $a'm'$) trazada paralelamente á XY.

48. Tambien podriamos emplear un plano de perfil VXZ′ trazado perpendicularmente á XY; este plano cortará á los de proyeccion primitivos segun las rectas XV y XZ′ en que la última tomará evidentemente la posicion XZ″, cuando sobrepongamos el perfil sobre el plano horizontal, girando alrededor de VX como charnela. Esto supuesto, el plano de perfil encontrará las trazas verticales de los planos propuestos, en los puntos P′ y T′, que

supuesto el giro caerán en P″ y T″; PP″ y TT″ serán las intersecciones de estos planos con el vertical sobrepuesto segun Z″XV; y como estas intersecciones se cortan en A, este será un punto de la interseccion pedida, la que tendrá evidentemente por proyeccion horizontal, la recta A*m* paralela á XY. Por otra parte, si restituimos el perfil, el punto A se proyectará verticalmente en *a′* y *a′m′* paralela á XY, será la segunda proyeccion de la interseccion de los planos propuestos.

Si las trazas de estos planos, sin ser paralelas entre sí, pasasen todas cuatro por el mismo punto de la línea de tierra, será menester recurrir á alguno de los planos auxiliares que acabamos de emplear.

Construir el punto de interseccion de una recta con un plano dado.

49. Para conseguirlo es menester trazar por la recta dada y en una direccion cualquiera, un plano secante; construir la interseccion de este con el plano dado; y como esta línea ha de cortar la propuesta, el punto en que la encuentre será el de comun seccion de la línea con el plano. *F.* 17.

Sea el plano PQR′ y (*ab*, *a′b′*) la línea propuesta: adoptaremos por plano secante, el vertical que proyecta la recta dada en *ab*; esta línea será al propio tiempo la traza horizontal de este plano, y su traza vertical será la perpendicular *b*B′ sobre la línea de tierra. Esto supuesto, el plano *ab*B′ cortará al plano dado PQR′ segun una recta proyectada sobre D*b* y *d′*B′, y como esta interseccion encuentra á la recta dada en el punto *m′*, esta será la proyeccion vertical del punto pedido. La segunda proyeccion no está determinada inmediatamente, porque las dos rectas que combinamos están proyectadas una sobre otra segun D*b*; mas la deduciremos de *m′* bajando la perpendicular (m, m') sobre la línea de tierra. Asi el punto (m, m') es el en que la recta $(ab, a'b')$ corta al plano PQR'.

50. Podemos emplear del mismo modo por plano secante, el proyectante de la recta sobre el plano vertical, que tendrá por trazas $a'b'c'$ y c'C perpendicular á XY. Este plano cortará á PQR' segun la recta Cf, que por su encuentro con ab, deberá dar el mismo punto obtenido por la primera construccion: asi los dos procedimientos empleados simultáneamente sirven de comprobacion.

Observaremos que el plano dado PQR' es una estension principal realmente existente, que por su interposicion hace invisible la porcion de la recta $(mb, m'b')$ que está del otro lado de la interseccion, por lo que dicha parte es de puntos.

F. 18. 51. Aunque el procedimiento empleado anteriormente sea el mas cómodo, será bueno ejercitarnos en las combinaciones de los planos con las líneas, resolviendo el mismo problema sirviéndonos de un plano secante cualquiera; como este plano deberá contener la recta dada $(ab, a'$B'$)$ cuyas trazas son B' y C, será necesario hacer pasar por estos dos puntos, las trazas del plano secante que adoptemos. Tracemos por el punto $(c'$, C$)$ la recta arbitraria CTV, y por los B' y T la recta TS'; estas serán las trazas de un plano auxiliar que contendrá la línea $(ab, a'$B'$)$. Esto supuesto, los planos PQR' y STV se cortarán segun la línea (Ed, e'D'); y como esta encuentra á la $(ab, a'$B'$)$ en (m, m'), este punto es el en que la recta dada corta al plano PQR', pero siempre convendrá asegurarse: para verificarlo bastará ver que la (m, m') que une los dos puntos, es exactamente perpendicular á la línea de tierra.

Por un punto dado dirigir una recta que encuentre dos rectas dadas de posicion.

52. Por el punto dado y la primera recta, dirigiremos un primer plano, despues un segundo por el mismo punto y la segunda recta; buscando la interseccion de estos dos planos, obtendremos una recta que satisfará evidentemente á las condiciones enunciadas.

Si solo se quisiese emplear el primer plano, búsquese (número 49) el punto en que el plano corta la segunda recta, y uniéndole con el punto dado, se obtendrá una recta que resolverá el problema.

Hallar la mas corta distancia de un punto (a, a′) *á un plano dado PQR′* (Fig. 19).

53. Del punto (*a, a′*) bajaremos una perpendicular indefinida sobre el plano trazando las proyecciones (*am, a′m′*) que serán (núm. XI) respectivamente perpendiculares á las trazas PQ y QR′, hallaremos (número 49) el punto (*m, m′*), en que esta recta encuentra el plano. Entonces *am* y *a′m′* serán evidentemente las proyecciones de la mas corta distancia pedida y su longitud efectiva se obtendrá como queda dicho (número 20).

Hallar la mas corta distancia de un punto (c, c′) *á una recta dada* (ab, a′b′).

54. Tracemos por el punto (*c, c′*) un plano perpendicular á la recta propuesta; sus trazas serán perpendiculares (§. XI:) á las proyecciones (*ab, a′b′*): y para determinar uno de sus puntos, imaginaremos en este plano, una horizontal que parta de (*c, c′*). Esta recta que será necesariamente paralela á la traza horizontal buscada, tendrá por proyecciones, *cd* perpendicular á *ab* y *c′d′* paralela á XY; que corta el plano vertical en (*d, d′*). Si por *d′* trazamos R′Q perpendicular á *a′b′* y por Q la QP paralela á *cd* ó perpendicular á *ab*; estas serán las trazas *F.* 20.

del plano buscado. Esto supuesto, construyendo (§. 49) el punto (m, m') en que este plano encuentra á la recta $(ab, a'b')$ y uniéndole con (c, c') la línea $(cm, c'm')$ estará evidentemente contenida en el plano PQR′ y como tal, será perpendicular á $(ab, a'b')$; por consiguiente medirá la mas corta distancia pedida, cuya longitud efectiva, se deducirá de las proyecciones cm y $c'm'$ por la regla general (número 20).

En esta figura, el plano PQR′ no es ni un dato ni resultado del problema primitivo, es solo un auxiliar para llegar á la solucion y por consecuencia deberemos marcar estas trazas como líneas auxiliares.

F. 21. 55. *Otra solucion*. Hagamos pasar un plano por el punto (c, c') y por la recta dada $(Ab, a'B')$, bastará unir (c, c') con (A, a') y buscar las trazas verticales de las dos rectas $(Ab, a'B')$ y $(cd, c'D')$ que darán las PQ y QR′ por las trazas del plano auxiliar de que acabamos de hablar. Esto supuesto, hagamos girar este plano alrededor de su traza horizontal PQ, que suponemos contiene á la recta y el punto dados. En este movimiento de revolucion, el punto (b, B') no saldrá del plano vertical BbB' perpendicular á la charnela QP: por otra parte, la distancia QB′ de este punto, al punto fijo Q, permanecerá la misma, por consecuencia, si describimos con el radio QB′ un arco de círculo que corte á bB en B, este punto será el trasportado de (b, B') y AB, la recta rebatida y trasportando del mismo modo el punto (dD') en D; DA, será la segunda recta que contiene el punto, cuya posicion se fijará por la perpendicular cC.

Obtenidos asi en el plano horizontal los datos sin que hayan variado las posiciones respectivas del punto y de la línea, podremos bajar sobre AB, la perpendicular CM, y esta será la mas corta distancia buscada en toda su estension. Este resultado es ordinariamente el que interesa: sin embargo, si queremos fijar las proyecciones de la mas corta distancia, no habrá mas que restituir todo el sistema; el punto M se trasladará á m por una perpendicular sobre la charnela PQ, y la proyeccion vertical m' se deducirá (número 8) de la horizontal; de suerte que la distancia en cuestion estará proyectada sobre $(cm, c'm')$.

56. Esta solucion es conveniente tratándose de hallar sobre la recta $(Ab, a'B')$ un punto que diste de cc' una cantidad α. Porque obtenida que sea la recta y el punto en un mismo plano, podremos tomar del punto designado C, la estension $CN=\alpha$. Si con este radio describimos un arco de círculo, podrá resultar, que sea tangente, secante ó que no toque á la recta AB: en el primer caso, el problema tendrá una solucion, en el segundo dos, y ninguna en el tercero.

Por una recta dada, hacer pasar un plano perpendicular á otro plano dado.

57. Por un punto de la recta propuesta se trazará una perpendicular al plano dado. El plano que pase por estas dos, será el que se busca.

Por un punto dado, trazar un plano perpendicular á dos planos dados.

58. Para esto bastará encontrar la comun seccion de los planos, y obtenida, por el punto dado, trazar á dicha comun seccion un plano perpendicular.

Hallar los ángulos que forma un plano dado PQR' con los de proyeccion. (Fig. 22.)

59. Sabemos que para medir la inclinacion de dos planos, basta cortarles por un tercero que sea perpendicular á su interseccion, y que las intersecciones de este plano con cada uno de los propuestos formarán entre sí

un ángulo medida del que buscamos. Esto supuesto, cortaremos el plano PQR′ y al horizontal por otro que sea perpendicular á la traza PQ. Este plano secante, que será vertical, tendrá por trazas una línea E*d* perpendicular á PQ, y la vertical *d*C′, por consecuencia, cortará al plano dado segun una recta que reunirá en el espacio el punto E con C′ y será la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos serán E*d* y *d*C′. Si hacemos girar este triángulo alrededor de *d*C′ para sobreponerlo al plano vertical, caerá en C′E′*d*, y el ángulo del mismo nombre medirá la inclinacion del plano PQR′ sobre el plano horizontal.

Para obtener el ángulo que forma el plano PQR′ con el vertical, les cortaremos por un plano F′*d*G perpendicular á la traza vertical QR′, que dará un triángulo cuyos catetos serán F′*d* y *d*G; por consiguiente este triángulo despues del giro sobre G*d*, caerá en *d*FG en que el ángulo F espresará la inclinacion pedida.

Por un punto dado, trazar un plano que forme un ángulo α con el plano horizontal y un ángulo δ con el vertical.

F. 22. 60. Observaremos que en el problema precedente los dos planos secantes C′*d*E y F′*d*G deben cortarse entre sí, segun una recta perpendicular al plano PQR′ que medirá la mas corta distancia de este plano, al punto *d* de la línea de tierra. Por otra parte, como esta perpendicular, sobrepuestos á su vez los dos triángulos, se encuentra evidentemente representada por las rectas (*ds*, *ds′*) trazadas en ángulo recto sobre las hipotenusas, se sigue que cualquiera que sea el plano PQR′ debemos tener la relacion $ds = ds'$; esto supuesto, si sin conocer el plano PQR′ que suponemos tener sobre los planos fijos las inclinaciones α, δ, construimos arbitrariamente sobre la línea de tierra un triángulo rectángulo C′*d*E′, en el que el ángulo en E′ sea igual á α, y con la perpendicular *ds′* describimos un arco de círculo, al que trazamos una tangente F*s*G, que forme un ángulo F=δ; esta tangente determinará por su encuentro con la prolongacion de la vertical C′*d*, un punto G de la traza horizontal del plano. Este plano tendrá por traza horizontal PEQ, tangente al arco de círculo descrito con el radio *d*E′, y uniendo los puntos Q y C′, obtendremos las trazas de un plano PQR′ que tendrá sobre los planos fijos las inclinaciones α y δ: para resolver el problema primitivo, faltará trazar por el punto un plano paralelo á este.

Determinar el ángulo comprendido entre dos planos dados PQR′ y STV′

61. Este ángulo estará medido por el plano perpendicular á la comun seccion de los dos propuestos: si pues por un punto arbitrario *m* de dicha comun seccion, trazamos una perpendicular L*m*F, esta línea la podemos considerar como la traza del plano que mide el ángulo que buscamos. Las comunes secciones de este plano perpendicular con cada uno de los propuestos, formarán un triángulo cuya base será LF y cuyo ángulo opuesto es el que buscamos. Como el plano secante es perpendicular á la comun seccion C*d*, es consiguiente que en este plano se habrá de encontrar la altura, se ha de encontrar á la vez en el plano secante, luego el punto *m* de interseccion de las trazas, habrá de ser el pie de la perpendicular de este triángulo: ahora bien, si rebatimos al plano horizontal el triángulo cuyos catetos son C*d*, *d*D′ con la comun seccion que proyectan, haciéndole girar alrededor de C*d*. CD″, será la comun seccion de los dos planos rebatida. Si pues del punto *m* trazamos una perpendicular á dicha comun seccion, tendremos en T*m*, la longitud efectiva de la perpendicular del triángulo. Si imaginamos que *F. 23.*

este triángulo del espacio cuya base es LF, le hacemos girar alrededor de su base, es consiguiente que la altura T*m* perpendicular á la base, no dejará de serlo durante el giro, y por consecuencia habrá venido á situarse en *t*, y como los puntos L y F no habrán variado de posicion durante el giro por ser puntos de la charnela, uniendo los puntos LF con *t*, el ángulo L *t* F será el que buscamos en sus justas dimensiones.

Construida la traza LF del plano secante, hemos podido rebatir la comun seccion de los dos planos, al vertical de proyeccion, haciendo girar al triángulo C*d*D′ alrededor de *d*D′, en cuyo caso D′C′, seria la comun seccion rebatida; el punto *m* se habrá trasladado á *m*′ y en *m*′T′ tendriamos la altura del triángulo.

F. 24. **62.** Cuando los planos propuestos tengan sus trazas paralelas en uno de los de proyeccion, como R′QP, y S′TV, La construccion precedente exige una ligera modificacion que facilita la solucion; porque sabemos que en este caso, la interseccion es la recta horizontal (D′*m*′, *dm*) paralela á las trazas horizontales. Por consecuencia, si trazamos un plano vertical D′*d*S, perpendicular á esta interseccion, cortará los planos propuestos segun dos rectas que formarán con NS, un triángulo cuyo vértice será el punto D′, y su altura la vertical D′*d*, de suerte que sobreponiendo este triángulo sobre el plano horizontal alrededor de la base *d*S, el cúspide D′ caerá en D, y el ángulo SDN será la medida de la inclinacion de los planos propuestos.

63. En fin, si las trazas fuesen todas paralelas á la línea de tierra, como en la (F. 16) cortaremos los planos dados, por el plano de perfil Z′XV, empleado (§. 48); y por el giro de que nos servimos en él, obtendremos el ángulo PAT por la inclinacion de los planos en cuestion.

Construir el plano bisectriz del ángulo que forman dos planos.

64. Una vez determinado el ángulo formado por los planos, bastará saber, que el plano bisectriz ha de contener la línea comun interseccion de los dos planos y la bisectriz del ángulo-plano medida del diedro propuesto. Por consiguiente, supuesto rebatido el ángulo plano y hecha la division del ángulo, solo restará determinar las proyecciones de la bisectriz, en cuyo caso, por esta y la de la comun seccion, se hace pasar un plano que será el plano bisectriz del ángulo propuesto.

Hallar el ángulo de dos rectas dadas (ab, a′b′) (cd, c′d′).

65. Entendemos por el ángulo que comprenden dos rectas que no se hallan en un mismo plano, por el que forman entre sí otras dos respectivamente paralelas á las primeras, que pasen por un mismo punto del espacio. Principiaremos por examinar si las líneas propuestas se cortan. Si tienen un punto comun sus proyecciones, deberán estar en una perpendicular á la línea de tierra, condicion que no satisface el punto interseccion, (*bb′*) por consiguiente, las rectas propuestas no se cortan. Tracemos una recta paralela á la línea *c′d′* por un punto cualquiera de la otra recta, y para simplificar, elegiremos el punto proyectado en *b*. Esta paralela tendrá por proyeccion horizontal la recta (*dc*) dada, y por proyeccion vertical, la línea (*d″c″*) paralela (*d′c′*), de suerte que el problema quedará reducido á encontrar el ángulo formado por las dos rectas (*ab, a′b′*) y (*cd, c″d″*). F. 25.

Construyendo las trazas horizontales P y *c* de estas rectas, la línea P*c*, será la base de un triángulo cuyo vértice es el punto (*b, b″*) en que se cortan las rectas propuestas, y cuyo ángulo P*bc* será el que buscamos. La altura de este triángulo es evidentemente la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tendrá por base la perpendicular bE, bajada sobre Pc, y por altura, la vertical que proyecta el vértice en b, que es igual á $b''t$; por consecuencia, si tomamos tf=bE y tiramos $b''f$, esta recta será la altura del triángulo primitivo. Si sobreponemos este último al plano horizontal, haciéndole girar alrededor de su base Pc, el vértice no saldrá del plano vertical Eb perpendicular á esta base, y trasladando la altura $b''f$, de E en B, el triángulo buscado se hallará sobrepuesto segun PBc, y cuyo ángulo en B será el que forman en el espacio las dos rectas propuestas.

66. Cuando una de las rectas, por ejemplo la segunda, es paralela á los planos de proyeccion, el triángulo no existirá: mas la traza horizontal del plano de las dos rectas propuestas, será una paralela á la línea de tierra, de suerte que sobreponiendo, como hemos dicho, este plano alrededor de su traza, obtendremos el ángulo pedido. No hablaremos del caso en que las rectas sean paralelas al plano horizontal, porque entonces el ángulo que forman en el espacio será igual á su proyeccion.

Hallar el ángulo formado por una recta (ab, a'b') *con el plano PQR'.*

F. 26. 67. El ángulo formado por una recta con un plano, es una cantidad indeterminada, si no convenimos en tomarle por el ángulo que forma la recta propuesta con su proyeccion rectangular sobre el plano: esta eleccion se funda en que este ángulo es evidentemente el mas pequeño de todos los que forma la recta con las diversas líneas trazadas por su pie en el plano en cuestion. De aquí se sigue que si bajamos de un punto de esta recta una perpendicular sobre el plano propuesto, el ángulo comprendido entre esta perpendicular y la recta primitiva, será complemento del que queremos obtener, y bastará para deducir este último.

Tracemos pues por el punto (a, a') tomado arbitrariamente sobre la recta dada, una perpendicular $(ac, a'c'.)$ al plano PQR′; construyamos el ángulo formado por las dos rectas $(ac, a'c')$ y $(ab, a'b')$ aplicando el método del (número 65); y bAc será el ángulo de las dos rectas. Su complemento se obtendrá trazando An perpendicular sobre Ac, y nAb será el ángulo formado por la recta $(ab, a'b')$ con el plano PQR′.

Los problemas precedentes conducen á la solucion de los siguientes.

Dado un triángulo equilátero, construir las proyecciones del tetaedro y el octaedro, y dado un pentágono construir las del dodecaedro é icosaedro.

Primer caso. Sea el triángulo ABC (F. 27).

68. Puesto que las caras del tetaedro son idénticas y simétricamente dispuestas, los vértices opuestos á las bases de las caras laterales, habrán de coincidir en un punto *d*, que será el centro de la cara A, B, C, tomada por base, uniéndole con los vértices A, B, C, tendremos la proyeccion horizontal del tetaedro.

Para obtener la proyeccion vertical, es necesario determinar la altura del punto *d*, esta altura es el cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa varía segun se considere en la seccion Ae, el triángulo proyectado en Ad, ó en de. En el primer caso, la hipotenusa es el lado del triángulo, y en el segundo la perpendicular del mismo. El otro cateto es la proyeccion del lado ó la de la perpendicular, luego si en *d* levantamos una perpendicular á la Ae, y tomando del punto A la longitud del lado del triángulo ó del punto *e*, la de la perpendicular del mismo, el punto D en que corten dicha perpendicular, determinará la altura del tetaedro. Esta altura habrá de corresponder en proyeccion vertical á dd' y á una distancia $d'd''=d$D; luego proyectando los puntos ABC en A', B', C', y uniendo estos con d'', tendremos resuelta la cuestion.

69. *Segundo caso.* El octaedro consta de ocho triángulos equiláteros iguales y paralelos dos á dos, cuyos vértices están contenidos en la esfera circunscripta al sólido. De aqui resulta que circunscribiendo una circunferencia al triángulo ABC (F. 28) puede tomarse por la proyeccion de dos círculos paralelos de la esfera; su radio aplicado sobre dicha circunferencia á contar de un punto A, nos dará los A*d*B*e*C*f* por vértices de las caras opuestas y paralelas, uniendo los A*d*, *d*B, B*e*, *e*C, C*f*, *f*A resultarán las ocho caras A*d*B, *d*B*e*, B*e*C, *e*C*f*, C*f*A, A*fd*, ABC, y *fde*, que componen el sólido y representan su proyeccion horizontal. La proyeccion vertical estará determinada tan luego como conozcamos la perpendicular que mide la distancia entre dos caras paralelas. Esta perpendicular es cateto de un triángulo rectángulo en que la hipotenusa es la perpendicular *fm* del triángulo *fde* y el otro cateto, su proyeccion *m*B; procediendo como en el caso anterior, obtendremos la altura M*m*. Conocidas las proyecciones horizontales de los puntos y las alturas á que deben encontrarse del plano horizontal, por lo dicho (número 8) tendremos determinada la proyeccion vertical A'B'*e'f'*.

70. *Tercer caso.* El dodecaedro (F. 29) está compuesto de doce pentágonos regulares y paralelos dos á dos; eligiendo uno de ellos por base, habrá otro opuesto y paralelo que determinará la altura del sólido. A cada lado de estos pentágonos, están unidos otros idénticos, subdividiéndose por consiguiente la altura del sólido en dos cuerpos, uno formado por el pentágono de la base

inferior, con cinco pentágonos, y el otro por la base superior con los otros cinco. Los lados de las caras laterales, no seria posible que se adaptasen para formar el sólido, si los vértices del pentágono de la base inferior, correspondiesen en la perpendicular de los de la base superior; y como por otra parte son idénticos, su posicion no podrá ser otra que en los centros de los arcos cuyas cuerdas representan los lados del pentágono propuesto. Asi que las perpendiculares bajadas del centro del círculo á las cuerdas que representan el pentágono ABCDE nos darán por su interseccion con el círculo, los vértices correspondientes á la base superior *abcde*. Para fijar la posicion respectiva de los vértices *rr*... consideraremos rebatidas dos caras contiguas correspondientes á las aristas AB, BC. En tal situacion, es indudable que al girar estas dos caras para ocupar su posicion, todos los vértices caminarán en un plano perpendicular á su base, y los puntos RR vendrán á reunirse en el punto *r*. Si hiciésemos igual consideracion respecto de los pentágonos de la cara opuesta que apoyan en las aristas *ab*, *bc* observariamos que los lados *bs*, *cs*, homólogos á los BR, CR, darian un punto *ss*... equidistante de *a* y *b* como *r*, *r* lo está de B, C, por consiguiente, si con el radio O*s* ó O*r*, describimos un círculo, en él habrán de insistir las proyecciones de los vértices de estos pentágonos, por manera que, uniendo cada dos de estos puntos, tendremos la proyeccion horizontal.

Para deducir de esta, la proyeccion vertical, habremos de determinar las alturas correspondientes á los dos cuerpos de que podemos imaginar compuesto el sólido.

Si suponemos un plano horizontal que pase por los puntos *rr*... la altura á que este plano se encuentra del horizontal, habrá de ser el cateto de un triángulo rectángulo, en que el otro cateto es la proyeccion de un lado de los pentágonos y la hipotenusa la longitud efectiva del mismo lado. Luego si elevamos en C la perpendicular CC″ y con un radio *bc*, desde *r*, describimos un arco que corte dicha perpendicular; CC″, será la altura de los puntos *rrr*..., sobre el plano horizontal. La de los puntos *abc* sobre este plano auxiliar, habrá de ser el cateto de un triángulo rectángulo en que un cateto es la proyeccion de la perpendicular *em*=*mr* y su hipotenusa la misma *em*. Luego si sobre la perpendicular *m*M y con el radio *em*, desde *r*, describimos un arco hasta que corte dicha perpendicular en M, *m*M será lo que diste la base superior *abcd* del plano auxiliar. Conocidas las proyecciones horizontales de los vértices del poliedro y las alturas de los planos en que se hallan, fijando por medio de horizontales estas alturas; solo restará proyectar los puntos, y uniendo convenientemente cada dos puntos obtendremos la proyeccion vertical A′B′C′*r*′*s*′*c*′*b*′*a*′*e*′*s*′*r*′.

F. 30. 71. *Cuarto caso.* El icosaedro regular consta de dos pirámides pentagonales, cuyas bases son idénticas y están unidas á un poliedro compuesto de diez triángulos equiláteros. Como los vértices de las dos bases, equidistan del centro, se hallarán todos contenidos en la circunferencia descrita con el radio del pentágono; por manera, que si dado el pentágono *ghyjk*... con el radio *og*, describimos un círculo y de su centro bajamos perpendiculares á las cuerdas que representan los lados del pentágono, su interseccion con el círculo nos determinará los vértices correspondientes á la base *acdef* de la pirámide superior, uniendo estos puntos con el cúspide correspondiente á cada base, quedarán descritas las pirámides y uniendo los vértices de ambas bases, tendremos la proyeccion horizontal del sólido.

Como hemos dicho, este cuerpo consta de tres partes; dos piramidales cuyas alturas son iguales y el cuerpo intermedio. Si consideramos el plano vertical que pasa por *oh* y rebatimos este plano al horizontal, obtendremos como en el tetaedro las alturas M*o* y *p*P y por un procedimiento análogo al del caso anterior, determinariamos la proyeccion vertical.

Por un punto dado (a, a′) *trazar una línea que forme un ángulo* δ *con la línea de tierra* (F. 31).

72. Siendo este ángulo el formado por la recta que há de pasar por el punto (*a*, *a*′) con su proyeccion sobre la línea de tierra, es evidente, que conocida la perpendicular del punto á la línea de tierra, estará conocida la línea propuesta.

Para conocer esta perpendicular, bastará rebatir el punto (*a*, *a*′) al plano vertical, haciendo girar al plano perpendicular que pasa por él, alrededor de la interseccion *a*′*d*; en cuyo caso, la proyeccion horizontal *a*, se habrá trasladado á *a*″, y A′ será el punto del espacio rebatido al plano vertical y A′*d*, la perpendicular trazada del punto á la línea de tierra en sus justas dimensiones: conocida esta línea, si imaginamos que el plano determinado por ella y la línea de tierra, le rebatimos al plano horizontal, haciéndole girar alrededor de dicha línea de tierra, el punto (*a*, *a*′) habrá venido á A; si en A sobre la perpendicular A*d*, construimos un ángulo, complemento del que queremos que la línea forme con la línea de tierra, la AB será la línea rebatida al plano horizontal, que formará con la de tierra el ángulo δ. Sus proyecciones se obtendrán con solo considerar, que al restituir esta línea, el punto A se trasladará á (*a*, *a*′), el punto B es de la charnela, por consiguiente no ha variado; uniendo (*a*, *a*′) con B, estas serán las proyecciones de la línea que cumplirá con las condiciones de pasar por el punto y formar el ángulo dado con la línea de tierra.

Construir las proyecciones de una línea que forme ángulos dados con los planos de proyeccion.

73. Si en el plano vertical trazamos una línea (A′B′) (F. 32), cuyo ángulo con la línea de tierra sea α, que es el que queremos que forme con el plano horizontal, podemos tomar esta línea por la que se busca. Si en el estremo B′ de la línea, opuesto al ángulo formado, construimos el ángulo β que queremos que forme con el plano vertical, solo faltará determinar las proyecciones de estas líneas. La horizontal se encontrará en A′*b*, sobre la línea de tierra, bajando la perpendicular del estremo superior de la recta: la vertical, trazando del otro estremo A′ la perpendicular A′A″ á la A″B′. Obtenidas asi las proyecciones de la línea propuesta, resta solo fijarlas en los planos de proyeccion. Considerado el estremo superior B′ de la línea, como su traza vertical, su proyeccion horizontal estará en *b* sobre la línea de tierra. La traza horizontal estará proyectada verticalmente en *a*′, por manera que si haciendo centro en *b* con el radio A′*b* describimos un arco hasta que corte la perpendicular *a*′A, el punto de interseccion A será la traza horizontal de la línea y A*b*, *a*′B′ las proyecciones de la línea que cumple con las condiciones.

Hallar la posicion y magnitud de la línea que mide la mas corta distancia entre dos líneas que no están en un plano.

74. Sabemos que en el espacio, dos rectas pueden no encontrarse sin ser paralelas: entonces hay lugar de elegir entre todas las líneas que reunen dos cualesquiera de sus puntos, la mas corta; con objeto de hacer mas perceptible la serie de operaciones para resolver este problema, vamos á indicar la marcha sobre la (F. 33) en

perspectiva en que AB y CD representarán las dos rectas propuestas. Si por un punto cualquiera B de la primera, trazamos una recta (BF) paralela á CD, é imaginamos el plano ABF, este plano será paralelo á la recta CD, bajando de un punto D de esta última una perpendicular D*d*, sobre el plano ABF, la distancia buscada no será menor que D*d*. Mas para hacer ver que una recta igual á D*d* puede efectivamente reunir dos puntos de las líneas propuestas, tracemos por el pie *d* de esta perpendicular una paralela *dc* á BF; esta línea *dc* encontrará necesariamente á AB en un cierto punto *c*, sin que AB sea paralela á CD, lo que seria contrario á la hipótesis admitida; con que si del punto *c* elevamos la perpendicular *c*C sobre el plano ABF, se encontrará evidentemente contenida en el plano CD*dc* por su posicion perpendicular sobre ABF, y por consecuencia *c*C encontrará á CD. Esta línea *c*C, igual y paralela á *d*D, medirá la mas corta distancia de las rectas AB y CD, y vemos que será perpendicular á las dos al mismo tiempo, puesto que lo es al plano ABF paralelo á la recta CD.

75. Sean $(ab, a'b')$ y $(cd, c'd')$ las dos rectas dadas: F. 34.
nos aseguraremos que no están en un mismo plano, observando que no son paralelas; y á mas, que los puntos en que sus proyecciones horizontales y verticales se cortan, no están (número 8) sobre la perpendicular á la línea de tierra. Esto supuesto, elijamos el punto (b, b') de la primera recta para trazar una paralela $(be, b'e')$ á la segunda, y construyamos las trazas PQR′ del plano en que se hallan, bajando del punto ff' de la segunda recta, una perpendicular $(fm, f'm')$ sobre el plano PQR, y buscando (número 49) el punto (m, m') en que esta perpendicular encuentra el plano PQR′ la $(fm, f'm')$ medirá la distancia de la segunda recta al plano: ahora será

necesario trazar por el punto (m, m') y paralelamente á la segunda recta $(cd, c'd')$, una recta $(mp, m'p')$ que deberá necesariamente cortar á la $(ab, a'b')$; por consecuencia, los dos puntos (p, p') deberán estar sobre una misma perpendicular á la línea de tierra. En seguida, del punto p, p' trazaremos paralelamente á $(fm, f'm')$ la línea $(ps, p's')$, y como esta debe encontrar la $(cd, c'd')$, será necesario que s y s' se correspondan sobre una misma perpendicular á la línea de tierra. Entonces ps y $p's'$ serán las proyecciones de la mas corta distancia pedida; la distancia efectiva se obtendrá como queda dicho (número 20).

76. Podriamos resolver el mismo problema buscando la interseccion de dos planos perpendiculares á PQR' que pasase el uno por la recta $(ab, a'b')$ y el otro por la recta $(cd, c'd')$ estos dos planos se determinarán bajando una perpendicular al plano PQR', por un punto de cada recta de las propuestas.

Resolucion del ángulo triedro.

77. En un ángulo triedro S (F. 35) se reunen en el cúspide tres ángulos planos y tres ángulos diedros: los primeros son los ángulos rectilíneos, formados por la interseccion de cada dos aristas, y los segundos, los que forman la inclinacion de los planos entre sí. Dados tres cualquiera de estos seis ángulos, pueden hallarse los otros tres; lo que ofrece seis problemas distintos, porque designando por C, A, B, los ángulos diedros, cuyas aristas son SC, SA, SB, y por α, δ, γ, los ángulos planos ó caras opuestas á los ángulos diedros, pueden darse

1.° Tres caras ó ángulos planos. . . . . α, δ, γ.
2.° Dos caras y el ángulo diedro comprendido. $\alpha\,\delta$ B.

3.° Dos caras y el ángulo opuesto á una de ellas. $\alpha\delta A$.
4.° Dos ángulos diedros y una de las caras. . $AC\delta$.
5.° Dos ángulos diedros y la cara que los une. $BC\delta$.
6.° Los tres ángulos diedros. . . . . ABC.

Estas son evidentemente las diferentes combinaciones que se pueden hacer con los seis datos, siendo posible reducir los tres últimos casos á los anteriores con el auxilio de un ángulo triedro suplementario.

Caso primero. *Estando dadas las tres caras α, δ, γ, de un ángulo sólido hallar los tres ángulos diedros A, B, C.*

78. Sean CSA′, CSB y BSA″ los tres ángulos dados que suponemos sobrepuestos al plano de la cara CSB que tomaremos como el plano horizontal de la figura; es claro que para rehacer el ángulo sólido bastará hacer girar las dos caras laterales A′SC, BSA″, alrededor de las rectas CS y BS como charnelas, hasta que las dos líneas SA′ y SA″ coincidan la una con la otra; su posicion comun en el espacio, será la de la tercera arista, cuya proyeccion desconocida designaremos por SA. Para determinarla tomemos en las rectas SA′ y SA″ dos distancias cualquiera, pero iguales, en cuyo caso los puntos D′ y D″ deberán evidentemente reunirse á la formacion del ángulo sólido, porque girando sobre las aristas SC, SB, no saldrán del plano vertical D′FD, D″ED, perpendiculares á estas charnelas, de que se sigue, que los puntos D′ y D″ irán á coincidir con el punto del espacio proyectado horizontalmente en D, y por consiguiente la tercera arista del ángulo sólido tendrá por proyeccion la SA. Por otra parte, el plano vertical DD′, perpendicular á SC, deberá cortar las dos caras que pasan por esta arista, segun la recta D′F, DF que restituidas compondrán entre sí un ángulo igual á la inclinacion de F. 36.

estas caras y que formarán un triángulo con la vertical proyectada en D; por consecuencia, si hacemos girar este triángulo alrededor de DF, elevando sobre esta base una perpendicular indefinida DG′, que terminaremos por un radio FG′=FD′, obtendremos el ángulo diedro C que tratamos de encontrar. Del mismo modo, el plano vertical D″D cortará las dos caras que pasarán por SB, segun las rectas ED, D″E que estando restituidos comprenderán entre sí la medida del ángulo diedro B, y como estas rectas forman con la vertical proyectada en D, un triángulo en que ellas son la base y la hipotenusa, podremos fácilmente construir el giro de G″ED de este triángulo y el ángulo E será el que se pide. Observaremos por otra parte, que las dos verticales DG″ y DG′ deberán ser iguales, pues que la una y la otra espresan la altura del punto único de la arista SA proyectada en D.

79. Para obtener el tercer ángulo diedro D, imaginaremos un plano secante perpendicular á SA por el punto de esta arista, proyectado en D y rebatido en D′ por una parte y por otra en D″, este plano cortará las caras laterales segun las rectas D′N, D″M, respectivamente perpendiculares á SA′ y SA″, y por una consecuencia necesaria, su interseccion con la cara BSC será la recta MN. Si pues con las tres líneas D′N, MN, D″M, construimos un triángulo, el ángulo P opuesto á NM será precisamente la medida del ángulo diedro que tiene por arista la SA.

Las construcciones precedentes son aplicables para el caso en que los tres ángulos planos α. δ. γ. ó bien alguno de ellos sea obtuso, y solo será necesario para que el problema sea posible: 1.° que la suma de los tres ángulos α. δ. γ. sea menor que cuatro rectos: 2.° que el mayor de estos ángulos sea menor que la suma de los otros dos. De no verificarse estas condiciones, es fácil ver que las construcciones gráficas darán para los triángulos rectángulos FDG′ y EDG″, hipotenusas menores que sus bases, en tanto que estos triángulos se podrán construir si se cumplen las condiciones enunciadas, y por consiguiente el ángulo sólido podrá formarse con los datos del problema.

Referir un ángulo del espacio al plano horizontal.

80. Este problema, de reconocida utilidad para el levantamiento de planos, tiene por objeto fijar la proyeccion horizontal de un ángulo α cuyos lados forman con la vertical que proyecta el cúspide, los ángulos δ y γ tambien conocidos.

Para simplificar habremos de suponer sobrepuntos al plano vertical, y por consiguiente en sus justas dimensiones, los ángulos que las dos líneas BS′ y CS′ forman con la vertical AS′ que hemos denominada δ, γ. En tal caso, si consideramos fijo en el plano vertical el ángulo γ, podremos tomar la AB por la proyeccion horizontal de la cara AS′B. La proyeccion horizontal del lado S′C tendrá comun con AB el punto A. Si suponemos que este lado S′C, gira alrededor de la vertical proyectada en A, es consiguiente que su estremo C habrá de encontrarse en un punto del arco descrito con el radio AC, y á una distancia del punto B, igual á la magnitud del lado opuesto al ángulo α que forman las dos rectas. Puesto que conocemos el ángulo α propuesto, cuyos lados S′B y S′C los tenemos en sus justas dimensiones, y si sobre el lado fijo S′B construimos el ángulo α y tomamos S′C′=S′C, la BC′ será la línea que mide la distancia entre los puntos B y C, que es el lado opuesto al ángulo dado. Por consiguiente, si haciendo centro en B con el radio BC′ describimos un arco de círculo que corte al anteriormente descrito, el punto *c* en que se encuentran, será el estremo F. 37.

del lado S'C, y cAB la proyeccion horizontal del ángulo α dado del espacio.

Caso segundo. *Estando dadas dos caras α, δ, de un ángulo sólido, con el ángulo comprendido A, encontrar las demas partes.*

F. 38. 81. Sean BSC=α, CSA'=δ las dos caras sobrepuestas al plano horizontal: haciendo girar la segunda alrededor de SC hasta que forme con BSC el ángulo diedro A, obtendremos dos caras del ángulo sólido en su verdadera situacion: durante este movimiento de rotacion, el punto D', tomado á voluntad sobre la arista movible, no saldrá del plano vertical D'FD perpendicular á la charnela: si en este plano construimos el ángulo DFG'=A y tomamos la distancia FG'=FD' es evidente que el punto D' vendrá á situarse en G', y por consiguiente que estará proyectado horizontalmente en D, cuando la cara movible A'SC haya tomado la inclinacion designada por la cuestion. Ahora el punto del espacio que tiene por proyecciones (G', D) pertenece á la tercera cara desconocida; y si la concebimos que ha girado alrededor de SB, el punto (G', D) no saldrá del plano vertical D''ED perpendicular á esta charnela, y como este punto debe quedar á una distancia del cúspide SD''=SD', si describimos con esta distancia un arco de círculo, cortará la recta indefinida DE en el punto D'' que determinará el ángulo D''SB para la tercera cara desconocida. Estando conocidas las tres caras, entraremos en el problema del (número 78) que enseña á construir los ángulos diedros.

Podriamos emplear la distancia MG', que es igual evidentemente á MD'', para describir un arco de círculo, cuyo encuentro con el primero, daria determinado el punto D''.

Caso tercero. *Dadas dos caras α, δ, de un ángulo sólido, y el ángulo diedro B opuesto á una de ellas, hallar las demas partes.*

82. Sean BSC=α, CSA′=δ (F. 39) las dos caras dadas sobrepuestas al plano horizontal. En un plano vertical EF, perpendicular á la arista SB, construyamos el ángulo REF=B, ó imaginemos un plano indefinido que pasa por SER: este plano indicará la posicion de la cara desconocida, de suerte que para formar el ángulo sólido no faltará mas que hacer girar la cara A′SC alrededor de SC, hasta que la arista SA′ venga á situarse en el plano SER. Durante este movimiento de rotacion, el punto D′ de la arista movible, no saldrá del plano vertical D′FM, trazado por el punto F, perpendicularmente á la charnela SC; y por consecuencia este punto D′ se hallará sobre la interseccion del plano vertical FM con el plano indefinido SER. Esta interseccion es una recta que partiendo de M va á encontrar la vertical F al mismo punto evidentemente que la recta ER restituida: si para hallar esta altura tiramos la línea FR, perpendicular á EF, despues de trasportar FR en ángulo recto sobre FM de F en R′, la línea MR′ será la interseccion de que hemos hablado, sobre cuya recta deberá situarse el punto D′ de la arista movible SA′. Asi describiendo con el radio FD′ un arco de círculo que corte MR′ en G, obtendremos en el plano vertical FM la posicion G de un punto de la tercera arista SA, y será fácil deducir la proyeccion horizontal D.

Observaremos que el punto G, situado en el plano vertical MF, pertenece á la cara desconocida, y que cuando la hagamos girar alrededor de la arista SB, no cambiará de distancia con relacion al punto M y S situado sobre la charnela; porque estas distancias son evidentemente MG y SD′, pues si con estas como radio describimos dos arcos de círculo, su interseccion D″ determinará el giro del punto G, y por consiguiente la cara desconocida será D″SB: una vez hallada esta cara estaremos en el caso del (número 78).

83. Notaremos que el arco de círculo descrito con el radio FD′ cortará generalmente la recta MR′ en dos puntos G y *g*, de suerte que la cara A′SC, girando alrededor de CS, podrá tomar dos posiciones, en las que la arista SA′ se hallará situada en el plano indefinido SER ó SMR′: para una de estas posiciones el punto D′ se hallará en G, y para la otra en *g*. Por consecuencia, si trasportamos este último punto alrededor de SB, como lo hicimos para el primer punto, se trasportará en *d*″, y *d*″SB será la estension de la tercera cara desconocida.

Tendremos pues dos ángulos sólidos diferentes, que podemos componer con los datos α, δ y B, resultado análogo al obtenido en la construccion de un triángulo rectilíneo, en que conocemos dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos. No hay necesidad de añadir que si el arco descrito con el radio FD′, no hace mas que tocar la recta MR′, no habrá mas que una solucion, y el problema será imposible, si este arco no encuentra dicha recta MR′.

LIBRO II.

CAPITULO PRIMERO.

Generacion y representacion de las superficies.

§. 84. Para representar una superficie no es necesario, como para las líneas, tratar de construir sobre dos planos fijos las proyecciones de los diferentes puntos de este lugar geométrico: en efecto, atendido á que sobre una superficie y partiendo de un punto dado, podemos caminar en diferentes direcciones, el medio anterior no ofreceria otro resultado que el cargar los planos fijos de una multitud de puntos y líneas, en que no se percibiese la ligazon, y cuya union no representaria al espectador la forma de la superficie, su curvatura mas ó menos pronunciada y el número de sus hojas. Emplearemos pues otro proceder (número 102) deducido de la naturaleza misma de la estension, de que es menester antes de todo dar una definicion precisa.

85. Por superficie no debemos entender únicamente una serie de puntos ó de curvas tan próximas unas á otras como queramos, sin dependencia ó relacion entre sí; es necesario que estos puntos ó estas líneas tengan cierta relacion comun y constante, cuya espresion analítica no será otra cosa que la ecuacion de la superficie,

y cuya definicion geométrica deba estar concebida asi: *una superficie es el lugar de todas las posiciones que toma sucesivamente en el espacio, una línea movible que cambia de situacion y de forma bajo una ley determinada y constante.*

La línea movible se llama *generatriz*, y por la palabra *una ley constante*, es necesario entender *por condiciones tales, que, en cada punto dado del espacio, no deje nada de arbitrario en la forma y la posicion de la generatriz.* El medio pues mas cómodo para espresar (á lo menos en parte) la ley de este movimiento, es señalar una ó muchas líneas fijas, nombradas *directrices*, sobre las que deberá constantemente apoyarse la generatriz en todas sus posiciones; de suerte que para definir completamente una superficie particular, es necesario indicar la naturaleza de la generatriz, el modo de moverse y la directriz sobre que debe resbalar durante su movimiento.

Cuando cambien solo sus directrices, se obtienen diversas superficies que pertenecen todas á una misma familia, y mas adelante haremos ver que cada superficie puede ser engendrada de una infinidad de modos diferentes.

F. 40. 86. *Una superficie cónica* es el lugar que ocupan las diversas posiciones que toma una recta SA movible, sujeta á pasar siempre por un punto fijo S, apoyándose constantemente sobre una curva dada ABC que puede ser de doble curvatura; es decir, que no tenga todos sus puntos en un mismo plano. Consecuente á esta definicion, la recta movible SA es una generatriz de forma constante y variable solamente de posicion, mientras que el punto fijo y la curva ABC son las directrices. Ademas esta línea SA debe considerarse indefinida por uno y otro lado del punto S, que llamamos cúspide ó centro que engendra dos hojas opuestas é indefinidas SABC, *Sabd*; si sustituimos á la curva ABC otra directriz cambiando el cúspide S, obtendremos diversas superficies pertenecientes todas á la familia de los conos.

Estas superficies admiten otros modos de engendrarse. En efecto, si cortamos al cono SABC por diferentes planos paralelos, obtendremos secciones semejantes A′B′C′, es decir, curvas en que habrá puntos O′, A′, tales que los radios respectivamente paralelos OA y O′A′, OB y O′B′.... tendrán entre sí una relacion constante: esta proposicion cierta, cualquiera que sea la direccion ABC, se demuestra fácilmente por la teoría de las líneas proporcionales.

Esto supuesto, si hacemos mover la elipse ABC de manera: 1.° que su centro recorra la línea SO: 2.° que sus ejes sean paralelos á su posicion primitiva: 3.° que decrezcan proporcionalmente á las distancias SO, SO′... entonces, es evidente que esta elipse movible coincidirá sucesivamente con ABC... A′B′C′... y resultará por este medio para la superficie cónica propuesta, una generatriz variable de forma y de posicion.

En fin, puesto que somos libres de adoptar para los planos secantes paralelos, una direccion cualquiera, y que del mismo modo podemos cortar al cono por otras superficies tales como la esfera descrita del punto O como centro con un radio variable, continúa la evidencia de existir una infinidad de líneas planas ó de doble curvatura, que podemos adoptar por generatrices de una misma superficie cónica.

87. *Una superficie cilíndrica* es el lugar que ocupan las diversas posiciones de una recta movible AA′ que resbala á lo largo de una curva fija ABC y permanece paralela á una direccion dada. Mas esta primera descripcion, en F. 41.

que la generatriz AA′ tiene una forma constante, no es la sola admisible; porque puesto que todas las secciones paralelas al plano ABC son curvas evidentemente idénticas, podemos mirar la superficie como recorrida por la curva ABC que se mueve paralelamente á sí misma, apoyándose siempre sobre la recta A. A′, la que vendrá á ser una directriz de la curva movible ABC. Variando la direccion de las secciones paralelas, obtendremos una infinidad de generatrices que describirán el mismo cilindro.

88. Observaremos de paso que si la directriz del cono ó del cilindro es una recta, la superficie se reducirá á un plano, el que puede definirse como el lugar de las posiciones que toma una recta movible sujeta: 1.º á resbalar sobre una recta fija; 2.º á pasar constantemente por un punto dado, ó bien á permanecer siempre paralela á su primera posicion.

F. 42. 89. *Una superficie de revolucion* es engendrada por una curva cualquiera GG′G″.... que gira alrededor de una recta fija FC, de manera que cada punto G′ describe un círculo cuyo plano es perpendicular al eje FC, y cuyo radio es la mas corta distancia G′O′ de dicho punto al eje. Observaremos que estos diversos radios GO, G′O′, G″O″.... aunque todos perpendiculares á FC, no serán paralelos entre sí cuando la generatriz GG′G″ sea de doble curvatura, ó cuando, siendo plana, su plano no contenga al eje FC: en adelante los diferentes círculos G′B′D′A′, G″B″D″A″, descritos por estos radios, se llaman *paralelos de la superficie.*

90. Si por el eje FC trazamos planos cualesquiera CB′B″, FC, obtendremos las secciones CA′A″A‴FD‴D″C que llamamos los *meridianos ó las curvas meridianas* de la superficie, y que son necesariamente idénticas en cuanto á su forma.

En efecto, estos planos meridianos cortan los paralelos segun dos radios que comprenden á ángulos evidentemente iguales D′O′B′, D″O″B″, por consecuencia, si hacemos girar el plano CB′B″F una cantidad B′D′, todos los radios O′B′, O″B″ coincidirán al mismo tiempo con O′D′, O″D″, y las curvas meridianas se confundirán una con otra.

91. De que resulta que el meridiano CA′A″A‴F, girando alrededor de CF, recorrerá toda la superficie de revolucion, y puede ser considerada como una nueva generatriz que reemplaza la curva primitiva GG′G″.... Esta última en efecto será distinta de la meridiana, puesto que no tiene todos sus puntos situados en un mismo plano que pase por CF, como podemos notar en la figura actual, considerada como construida en perspectiva sobre el plano CA′A″FD″D′; y por consecuencia de esta convencion, es por lo que hemos punteado las partes de los paralelos y de la curva GG′G″.... que están detras de este plano. En lo sucesivo podemos construir siempre el meridiano despues de conocer una generatriz cualquiera, pues que bastará buscar los puntos en que un plano CA′A″FD″D′ corta los diversos paralelos descritos por los puntos GG′G″....

92. La superficie de que nos ocupamos, admite otros modos de engendrarse que conviene conocer. Pues que todo plano perpendicular al eje CF, da por seccion un círculo cuyo centro está sobre el eje (número 89), y que tienen un punto comun con la curva GG′... ó bien con el meridiano BB′... podemos mirar la superficie de revolucion como *el lugar de las diversas posiciones que toma un círculo D′B′A′, y cuyo centro recorre esta recta mientras su radio varía, de manera que la circunferencia se apoya constantemente sobre la curva fija GG′G″*.... esta línea es en

este caso una directriz á la que podemos sustituir el meridiano BB′B″.... y el círculo movible es una generatriz variable á la vez de forma y de posicion. Esta definicion, traducida analíticamente, ofrece la ventaja de que bajo este punto de vista todas las superficies de revolucion forman una misma familia (número 85) que admite una generatriz de una especie constante, que en este caso es el círculo movible siempre perpendicular al eje y dirigido en su movimiento por el meridiano, que solo cambia de una superficie individual á otra.

93. Así segun adoptemos por meridiano una recta, una elipse, una hipérbola ó una paralela, obtendremos un cono, un cilindro, un elipsoide, ó un paraboloide de revolucion, con tal que el eje de rotacion coincida con uno de los diámetros principales de la curva; porque de otro modo, la superficie, aunque siempre de revolucion, será de una especie mas complicada. Un círculo, por ejemplo, que gira alrededor de una recta situada en el mismo plano, pero sin pasar por su centro, producirá el toro, que es una superficie anular que mas adelante daremos á conocer.

94. Estos diversos ejemplos, escepto el último, no son mas que casos particulares de superficies mas generales, que sin ser de revolucion nos serán de utilidad en lo sucesivo, por lo que importa conocer su generacion. Estas son las superficies de segundo grado que ofrecen cinco géneros diferentes, sin contar los conos, los cilindros y el plano.

F. 42. 95. *Elipsoide.* Sea una elipse A″FD″C construida sobre los semi-ejes O″A″$=a$; O″C$=c$: suponiéndola trazada en un plano vertical, que tomaremos por el en que está la superficie presentada en perspectiva. Si en un plano perpendicular, construimos otra elipse A″E″D″B″, que tengan por semi-ejes la ordenada $O''A''=a'$ de la primera elipse, y una recta $O''B''=b'$ de una estension cualquiera, pero perpendicular sobre $O''A''$: despues que hagamos mover la curva $A''D''B''$, de modo que sus ejes permanezcan paralelos á sí mismos, conservando la razon primitiva $\frac{b'}{a'}$ y que uno de ellos coincida sucesivamente con las cuerdas $O'A'$, $O''A''$, $O'''A'''$.... de la elipse fija $CA''FD''$, en este caso, el lugar geométrico asi engendrado, será la superficie que llamamos *elipsoide*. Cuando el plano de la elipse movible pase por el centro O'' tendrá el máximum de su estension, pues que al semi-eje variable b' corresponderá la ordenada máxima $O''A''=a'$, y si representamos por $OB=b$ la longitud que tomará en el mismo instante el segundo eje b', las tres líneas $A''D''=2a$, $B''E''=2b$, $CF=2c$ serán los que llamamos los diámetros principales á los ejes del elipsoide.

Ademas debemos notar que esta superficie estará cerrada por todas partes, pues que del otro lado de los puntos C y F, la elipse movible tendrá sus dos ejes imaginarios.

96. Si la elipse generatriz $E''A''D''B''$ es un círculo, es decir, que hayamos elegido $O''B''=O''A''$, la superficie resultará (número 89) una elipsoide de revolucion que tendrá por meridiano la curva directriz $CA''FD''$ y dos de los diámetros principales de la superficie, á saber: $O''A''$ y $O''B''$ serán iguales entre sí. En fin en el caso en que los tres ejes $O''A''$, $O''B''$, $O''C$, sean de la misma longitud, el elipsoide degenerará en una esfera.

97. *Hiperboloide de una hoja.* Si sustituimos á la elipse directriz una hipérbola $A'AA''$, cuyo semi-eje real sea $OA=a$, y el semi-eje imaginario $OC=c$, y en un plano *F.* 43.

perpendicular á OC, y sobre dos ejes en que uno sea la cuerda A′D′ de la hiperboloide, construimos una elipse A′B′D′E′, haciéndola mover bajo la misma ley que anteriormente, engendrará la hiperboloide de una hoja llamada así, porque esta superficie no tendrá evidentemente mas que una hoja, pero indefinida como la hipérbola directriz. Cuando el plano de la elipse movible pase por el centro O, llegará el mínimun, pues que el eje variable D′A′ resultará igual á DA, que es la mas pequeña cuerda de la hipérbola, por lo que la curva ABDF, se llama la elipse de garganta, y las tres rectas $AD=2a$, $BF=2b$, $CF=2c$, son los tres ejes del hiperboloide; mas el CF no encontrará la superficie y es llamado imaginario, aunque la cantidad real $2c$ no sea sino el coeficiente de la espresion imaginaria que dará el análisis, buscando los puntos de la superficie situados sobre la recta indefinida O″O′.

98. Cuando los dos semi-ejes reales O′A′ y O′B′ son iguales, el hiperboloide es de revolucion (número 89), pues que entonces la elipse generatriz A′B′D′ resulta un círculo; así en este caso particular, la superficie podrá ser engendrada por la revolucion de la hipérbola A′AA″, alrededor de su eje imaginario O′OO″.

F. 44. 99. *Hiperboloide de dos hojas.* Sobre los semi-ejes $OA=a$, $OC=c$, construyamos una hipérbola, pero situada de manera que OC sea el eje real; despues hagamos como anteriormente, y la elipse A′B′D′ engendrará otra especie de hiperboloide que tendrá dos hojas indefinidas, y separada la una de la otra por un intervalo en que no existiria ningun punto de la superficie. En efecto, entre los puntos C y F, la cuerda variable A′D′, que sirve de eje á la elipse movible, resultará imaginario, y lo mismo sucederá al segundo eje O′B′ que debe guardar con el primero una relacion constante; de suerte que la generatriz se encontrará totalmente imaginaria en este intérvalo, y no dará ningun punto real de la superficie.

Para que este hiperboloide sea de revolucion, será menester que O'A'=O'B'. Entonces la superficie podrá ser engendrada por la revolucion de dos ramas A'A''C y FA''' de la hipérbola primitiva alrededor de su eje real COF.

100. *Paraboloide elíptico*. Continuando adoptando por directriz fija una parábola D''OA'', haciendo mover perpendicularmente á su eje OX una elipse A''B''D''C'', cuyo primer eje O''A''=*a* sea la ordenada variable de esta parábola y el segundo O''B''=*b* en un principio de una longitud arbitraria; pero que conserve con el primero una relacion constante. En este movimiento, la elipse movible engendrará una superficie compuesta de una sola hoja indefinida en el sentido OX, y que se llama el paraboloide elíptico; porque todas las secciones planas que podamos trazar, no son jamas sino parábolas ó elipses. F. 45.

Cuando los dos ejes de la elipse generatriz son iguales, la superficie resulta de revolucion (número 92), y entonces podrá ser engendrada por el movimiento de la parábola A''OD'', girando alrededor de OX.

101. *Paraboloide hiperbólico*. En fin, si conservando siempre por directriz la parábola D''OA'', reemplacemos la elipse generatriz que nos ha servido hasta el presente, por una hipérbola H''D''h'', G''A''g'', construida en un plano perpendicular á OX y sobre dos semi-ejes O''A'', O''B'' cuya relacion sea constante, mientras que el primero que es el eje real de esta hipérbola, resultará sucesivamente igual á las diversas ordenadas O'A', O''A'' de la parábola fija. La hipérbola movible, moviéndose paralelamente á sí misma, describirá desde el principio dos hojas abiertas á derecha é izquierda, separadas por el espacio vacío in- F. 46.

terior del cilindro D''OA'', y que se estenderá indefinidamente como la parábola en el sentido OX; mas si hacemos mover la hipérbola movible de O'' hacia el punto V, su eje real O'A' disminuirá y resultará nulo en O; por consecuencia las dos hojas de que acabamos de hablar se reunirán, y al mismo tiempo la hipérbola se reducirá por esta posicion á dos rectas indefinidas KO*k*, LO*l*, que estarán todas enteras sobre la superficie, y paralelas á las asíntotas de todas las hipérbolas precedentes.

Importa observar que el paraboloide hiperbólico no podrá jamás ser de revolucion, porque ninguna de las secciones perpendiculares al eje de rotacion da una curva cerrada, por consiguiente no puede ser circular.

102. Volviendo á la cuestion indicada (número 84), que tiene por objeto encontrar la representacion gráfica de las superficies, puesto que por la definicion general dada (número 85), una superficie es siempre producida por el movimiento de una cierta línea, bastará para llenar el objeto propuesto, marcar sobre los planos de proyeccion diversas posiciones de la generatriz, bastante numerosas y próximas para que este sistema de curvas pueda presentar á los ojos la continuidad de la superficie, su curvatura y la estension de las hojas.

103. Entre las generatrices de diferente especie, debemos preferir aquella que por su sencillez ó regularidad sea la mas propia á representarla y alguna vez para darlas mejor á conocer, se trazan al mismo tiempo dos sistemas de generatrices, tales como los meridianos y los paralelos en las superficies de revolucion.

Por este medio se han descrito en perspectiva las diversas superficies de revolucion.

Tambien conviene determinar las trazas de las superficies, es decir, sus intersecciones con los planos de proyeccion, asi como los contornos que se hallan dentro ó fuera de los mismos; mas para aprender á determinar estos contornos, es necesario hablar antes de los planos tangentes.

CAPITULO II.

De los planos tangentes en general.

104. Se dice que un plano es tangente á una superficie en un punto dado, *cuando contiene las tangentes á todas las curvas que se tracen sobre esta superficie por el punto en cuestion;* mas es necesario demostrar que existe en general para cada punto de una superficie, un plano que goza de esta propiedad.

105. Vamos á probar que tres curvas cualesquiera trazadas sobre una superficie en un punto dado, *tienen siempre sus tres tangentes situadas en un solo plano.*

Sea GMg la forma y la posicion de la generatriz (nú- F. 47.
mero 85) cuando pasa por el punto dado M; sea DMd, una curva trazada sobre la superficie, y sobre la que deberá resbalar constantemente la generatriz, cuando, en su movimiento, describa este lugar geométrico. Sea en fin MX una tercera curva cualquiera, situada sobre la superficie. Si trasportamos la generatriz á otra posicion G′M′g', no dejará de encontrar la curva MX en un punto cualquiera P′, por distante que el punto M′ se tome de M sobre la directriz DMd. Entonces, uniendo los puntos M, M′, P′ por rectas indefinidas, estas tres líneas serán secantes con relacion á las curvas MD, MX y G′g' y estarán evidentemente en un mismo plano. Ahora moviendo la generatriz G′g' sobre MD, aproximándola á su posicion primitiva Gg, observando siempre la ley que

rige la variacion de forma y posicion de esta curva en la superficie que se considera, é imaginando que el plano de las tres secantes gira alrededor del punto M, de manera que pase al mismo tiempo que la generatriz, por los puntos M y P″M″, en que cortará sucesivamente las curvas MD y MX, este plano movible contendrá constantemente las tres secantes variables. Cuando la generatriz vuelva á la posicion GM*g*, el punto M′, movible sobre MD, se confundirá con M; al mismo tiempo el punto P′ de la curva MX, habrá debido evidentemente reunirse con M, y por una consecuencia necesaria, sobre la curva variable G*g*. Los puntos P′ y M′ se confundirán á sí mismo, y las tres secantes movibles vendrán á ser respectivamente tangentes á las curvas MD, MX, MG, y si recordamos que estas tres secantes están en un mismo plano para cada posicion de la generatriz, concluiremos que cuando hayan vuelto á su posicion las tangentes MT, MT′, MT″ se encontrarán en un plano único, que no es otra cosa que el límite de las posiciones que habrá tomado sucesivamente el plano movible de las tres secantes.

Por otra parte, como la curva MX tiene por lo que precede, una posicion arbitraria sobre la superficie, se sigue que el plano trazado por las tangentes de las dos líneas MG y MD, contendrá las tangentes de toda curva que pase por M; asi este plano TMT′ se hallará tangente á la superficie segun la definicion que hemos dado al principio de este artículo.

F. 48. **106.** Existe un cierto número de superficies en que el plano que es tangente en un punto, lo es necesariamente en toda la estension de una recta. Consideremos el cilindro ABC de una base cualquiera: si por la generatriz A′B y la tangente BT á la base, trazamos un plano, no solamente este plano contendrá las tangentes á las diversas curvas que queramos trazar sobre la superficie en el punto B (lo que resulta de lo dicho en el teorema demostrado, número 105), sino que contendrá las tangentes á todas las otras curvas que tracemos sobre el cilindro, por los diversos puntos de la generatriz A'B; y para comprobar esta asercion, bastará hacer ver que el plano A'BT contiene la tangente MU á la curva cualquiera MX. Porque si por A'B y un punto D, próximo á B, trazamos el plano A'BR, cortará evidentemente el cilindro segun una recta DE, paralela á A'B y á la curva MX, en un punto G, situado sobre DE. De suerte que este plano contendrá las dos secantes BD y MG. Continuando haciéndole girar alrededor de A'B, de modo que el punto D se aproxime á B, los puntos de seccion D y G van á cambiar sobre las curvas, pero se encontrarán siempre juntos sobre una recta movible, constantemente paralela á A'B; luego cuando uno de estos puntos D, se confunda con B, al mismo tiempo el otro punto G, coincidirá con M; es decir, que cuando el plano movible haya tomado la posicion TBA', la secante variable MG, siempre situada en este plano, se confundirá con la tangente MU. Asi esta última recta estará contenida en el plano TBA'. Concluiremos de aqui, *que cuando un plano sea tangente á un cilindro en un punto cualquiera, es necesariamente tangente á toda la generatriz que pasa por el punto de contacto.*

En las superficies cónicas el plano tangente goza de la misma propiedad, y se demuestra de una manera análoga. Esta misma propiedad se verifica en las superficies desarrollables, de que el cono y el cilindro no son sino un caso particular.

107. El teorema demostrado (número **106**) ofrece una consecuencia importante, á saber: *que cuando proyectamos sobre un plano una curva MX y su tangente MU,* *las proyecciones de estas dos líneas son tangentes entre sí.* En efecto, para proyectar la curva MX, será menester (número 5) imaginar un cilindro MBCX que pase por esta línea, perpendicular al plano dado que cortará segun una curva BC, y será la proyeccion de MX. Para proyectar la recta MU, será menester trazar el plano UMB, el cual, siendo evidentemente tangente al cilindro en M, lo deberá ser del mismo modo (número 106) en B, y por consecuencia contendrá la tangente BT de la base BC. Esta tangente se encontrará en la interseccion del plano proyectante con el plano de la base, y será la proyeccion de MU.

108. Resumiendo lo dicho sobre los planos tangentes debemos concluir, que para construir el plano que toca una superficie cualquiera en un punto dado, bastará en adelante buscar las tangentes á dos curvas trazadas sobre la superficie por el punto de que se trata, prefiriendo en cada ejemplo las que ofrezcan mas facilidad, despues hacer pasar un plano por estas dos tangentes, lo que se ejecutará (número 25).

Cuando por el punto dado pasa una recta situada sobre la superficie, esta recta será su tangente, por lo tanto deberá hallarse contenida en el plano tangente y emplearse para construir este plano; mas no podrá decirse siempre que este plano toca la superficie toda la estension de la recta.

109. La normal á una superficie *es la recta perpendicular al plano tangente, trazada por el punto de contacto de este plano.* Esta normal se construirá facilmente (núm. XI.) cuando tengamos determinadas las trazas del plano que toca la superficie en el punto dado.

F. 49. 110. Este es el lugar de dar una regla general propia para determinar el contorno aparente de un cuerpo, es decir, las líneas que sobre la superficie de este cuerpo, separan las partes visibles, para el observador, de las que no puede percibir. Sea S una superficie y O la posicion que ocupa el ojo del observador. Todas las tangentes que de este punto pueden dirigirse á la superficie, determinarán la curva ABC, cuyo contorno separará la parte superior ABC de la inferior que no podrá ver. Pero este contorno cambiará en su forma y estension, si varía el punto de vista: supongamos que este se ha trasladado á O′, en cuyo caso el contorno será la curva A′B′C′. Es evidente que ofreciendo un cuerpo tantos contornos diferentes como posiciones pueda tomar el observador, se harian necesarias construcciones gráficas que complicarian inútilmente los diseños. En lugar de que si admitimos la hipótesis indicada (número 13), que el punto de vista en toda proyeccion horizontal se considera á una distancia indefinida sobre la vertical OO′ que pase por un punto cualquiera del objeto, entonces los planos tangentes, cuyo punto de contacto con la superficie dá á conocer la curva ABC... serán todos verticales, y su determinacion será mas breve y de una manera mas sencilla, como lo veremos en los siguientes casos.

111. De aqui resulta que el contorno aparente de una superficie proyectada sobre el plano horizontal, se obtiene buscando los puntos de contacto de todos los planos tangentes verticales.

En cuanto á la proyeccion vertical de esta misma superficie, tiene su punto de vista particular considerado (número 13) á una distancia infinita sobre una perpendicular al plano vertical, de que se sigue que el contorno aparente, relativo á esta proyeccion, no será el mismo que para el plano horizontal; mas se obtendrá buscando los puntos de contacto de la superficie, con todos los planos tangentes que son perpendiculares al plano vertical.

112. Podemos pues completar las reglas que indicamos (número 14) para la puntuacion de las líneas principales, porque se sigue de lo que precede, que las líneas ó porciones de líneas que sobre una superficie cualquiera se encuentran por cima del contorno aparente relativo á la proyeccion horizontal, serán las únicas visibles sobre esta proyeccion; y en cuanto al plano vertical, las únicas partes visibles serán las que se encuentren por delante del contorno aparente relativo á este último plano. Mas no deberemos olvidar que una misma línea podrá ser visible en una de las proyecciones é invisible en la otra, pues que el punto de vista es diferente en los dos casos; de suerte que será menester emplear con discernimiento los dos modos de indicar las líneas principales, acordándose siempre que las distinciones precedentes no se emplean mas que para las líneas principales (número 14).

113. Ademas, siempre que en una figura entre un plano indefinido, tangente ó secante, no le consideraremos como realmente existente, supondremos que hemos querido solo dar ó encontrar sus trazas, porque de otro modo, este plano interceptaria casi siempre una gran parte de la superficie, lo que traeria el grave inconveniente de no dejar distinguir sobre esta superficie el objeto principal de la figura, las partes superiores ó anteriores de las partes opuestas; de suerte que la forma de los objetos seria menos pura para el diseño.

CAPITULO III.

De los planos tangentes al cilindro, al cono y á la esfera.

Por un punto dado sobre la superficie de un cilindro cualquiera, trazar un plano tangente.

114. Sea AECG la directriz del cilindro que supo- F. {50. 50'.
nemos situada en el plano horizontal (igualmente aplicable á una curva cualquiera); sea asimismo (ab, $a'b'$) la recta á que la generatriz rectilínea deba ser constantemente paralela, resbalando sobre AECG. Principiaremos por determinar el contorno aparente de la superficie que sobre el plano horizontal será dado (número 111), por los puntos de contacto de todos los planos tangentes verticales. luego cada plano de estos contendrá una arista (1) del cilindro que tendrá por traza horizontal la proyeccion misma de esta recta, es decir, una paralela á ab; ademas, este plano tocará al cilindro todo lo largo de esta generatriz (número 106), y por consecuencia su traza deberá ser tangente á la base AECG; con que si trazamos á esta curva las tangentes AB y CD, paralelas á ab,

---

(1) Alguna vez, por simplificar el lenguage, llamaremos aristas de un cilindro ó de un cono, las diversas posiciones de la generatriz rectilínea, mas de ningun modo debe darse á estas rectas el nombre de elemento, porque los elementos de un cuerpo deben siempre ser homogéneos con él; asi los elementos de una superficie, son otras pequeñas superficies, cuya suma compone la superficie en cuestion: mas adelante tendremos necesidad de emplear esta palabra *elemento* en su verdadera acepcion, y entonces resultaria de este doble sentido, una confusion de ideas muy perjudicial en la teoria de las superficies *gauchas*. Emplearemos asimismo alguna vez la palabra *base*, para designar la directriz de un cilindro ó de un cono, sobre todo cuando esta curva se encuentra en el plano horizontal.

estas serán las trazas de los planos tangentes verticales y al mismo tiempo las proyecciones horizontales de sus líneas de contacto que serán las dos generatrices (AB, A′B′) y (CD, C′D′). Así estas dos líneas formarán el contorno del cilindro sobre el plano horizontal y toda arista de esta superficie que esté por bajo de estas rectas, esto es, que toque el semicírculo AGC, será invisible en la proyeccion horizontal.

En cuanto al contorno aparente sobre el plano vertical, será determinado (número 111) por los planos tangentes que sean perpendiculares á este plano de proyeccion: sus trazas horizontales deberán ser perpendiculares á la linea de tierra, y tangentes como anteriormente á la base AECG; por consecuencia estas trazas serán EE′ y GG′; como estos planos tocan necesariamente al cilindro segun las generatrices EF y GH, cuyas proyecciones verticales son E′F′ y G′H′, paralelas á $a'b'$, estas dos rectas formarán el contorno aparente de la superficie sobre el plano vertical, de suerte que toda arista que se encuentre por detras de estas rectas, ó que toque el semicírculo EAG, será invisible en la proyeccion vertical.

115. Volviendo al problema propuesto, suponiendo que m sea la proyeccion horizontal del punto dado, y puesto que debe estar sobre la superficie, no podrá elegirse arbitrariamente la segunda proyeccion de este punto, porque esta debe resultar de la primera. En efecto, por el punto en cuestion sobre el cilindro pasará necesariamente una generatriz que estará proyectada horizontalmente segun mL, paralela á (ab); pero encontrando mL la base del cilindro en L, este punto debe ser la traza horizontal de esta generatriz, cuya proyeccion vertical será por consecuencia L′K′ paralela á $(a'b')$; así proyectando el punto m sobre L′K′ obtendremos las dos proyecciones m y m' del punto designado sobre el cilindro.

Sin embargo, existe en este caso una segunda solucion, porque cortando la recta LK á la base en dos puntos L y V, podemos decir que V es la traza de otra arista proyectada igualmente sobre LK cuya proyeccion vertical será $V'K''$; de suerte que si trasportamos el punto m sobre esta última recta en m'' dará sobre el cilindro un segundo punto (m, m'') que estará como el primero (m, m') proyectado horizontalmente en m.

116. Esto supuesto, construyamos el plano tangente para el punto (m, m'). Este plano contendrá la generatriz $(LK, L'K')$, y por consecuencia su traza pasará por el pie L de esta recta: ademas, como debe tocar al cilindro todo lo largo de esta generatriz (número **106**), contendrá necesariamente la tangente de la base en el punto L, es decir, la línea PQ que será precisamente la traza horizontal del plano pedido. Para obtener la traza vertical, buscaremos el punto K', en que la recta $(LK, L'K')$ contenida en este plano, va á cortar el plano vertical y QK' será la traza vertical del plano tangente. Mas si llegase á suceder que la traza PQ cortase la línea de tierra á una distancia muy considerable, imaginaremos por el punto (m, m') una recta auxiliar que sea paralela á la traza horizontal PQ, y cuyas proyecciones serán (mx) paralela á QP, y $(m'x')$ paralela á la línea de tierra. Construyendo el punto x' en que esta horizontal va á cortar al plano vertical, este punto deberá pertenecer ademas á la traza vertical del plano tangente que será QR'. En todo caso conviene emplear este medio como comprobante de la operacion.

En cuanto al plano tangente relativo al punto (m, m'') observaremos que la generatriz de contacto está proyectada segun VK, V'K''; luego trazando por el pie V de esta recta, una tangente ST á la base del cilindro, esta será la traza horizontal de este plano tangente. La traza vertical TK'' se determinará como anteriormente, buscando el punto K'' en que la arista de contacto va á cortar al plano vertical; ó bien determinando la traza de la horizontal $(mx, m''x'')$ que dará un tercer punto x'' de esta traza.

117. Observaremos ademas que los dos planos tangentes PQR' y STN', que acabamos de construir, contienen dos generatrices del cilindro que son paralelas entre sí; luego estos planos, caso de cortarse, habrá de ser segun una línea paralela á $(ab, a'b')$, pero las trazas horizontales y verticales de estos planos, son paralelas, por consiguiente los planos no se cortarán.

118. Por los motivos espuestos (número 113) nos proponemos en el caso actual construir solamente las trazas de los planos tangentes, sin considerar estos como realmente existentes; mas puesto que estas trazas subsisten, es necesario puntear las partes de estas líneas que se encuentran cortadas por la proyeccion del cilindro, sobre el plano horizontal y vertical. En cuanto á las diversas aristas del cilindro, habriamos podido puntear las que nos han servido de líneas auxiliares para llegar al plano tangente; pero hemos preferido considerar todas estas rectas como otras tantas generatrices, cuya reunion indica mejor la forma de la superficie, por lo que se han marcado por un trazado lleno ó punteado, segun que sean visibles ó invisibles, distincion que se efectuará por las reglas enunciadas (número 112).

119. Si queremos construir la curva, segun la que el cilindro corta al plano vertical, bastará buscar las trazas verticales de las diversas generatrices de estas superficies, y obtendremos así la línea F'D'H'K''B', que en el

caso actual será una elipse que deberá tocar en los puntos K′, K″, las trazas de los dos planos tangentes, pues que estos contienen (número 104) las tangentes á todas las curvas situadas en el cilindro, y trazadas por los diversos puntos de la arista de contacto. Para obtener el punto mas elevado y mas bajo de la curva D′H′K″F′K′, bastará construir las dos generatrices que corresponden á los puntos de la base J, J, en que la tangente es paralela á la línea de tierra. Porque el plano tangente, correspondiente á las generatrices de cada uno de estos puntos, cortará al plano vertical segun una recta evidentemente paralela á la línea de tierra, y por consecuencia horizontal: ademas esta interseccion debe tocar necesariamente la curva D′H′K″F′K′, de que se sigue que los puntos B′, *b*′ son aquellos en que las tangentes son horizontales.

120. Añadamos, en fin, que si asignamos para directriz del cilindro una curva cualquiera situada en el espacio, definida por dos proyecciones sobre los planos fijos, para volver al caso del (número 114) tirando por diferentes puntos de esta curva, paralelas á la recta (*ab*, *a′b′*), y buscando las trazas de estas generatrices sobre el plano horizontal, tendremos inmediatamente la base AELG dada.

Trazar un plano tangente á un cilindro por un punto dado fuera de esta superficie.

121. Sea ABGL la base del cilindro y (*n*, *n′*) el punto designado en el espacio: trazaremos por este punto y paralelamente á las generatrices, una recta (*np*, *n′p′*) que deberá evidentemente hallarse contenida toda entera en el plano tangente buscado, porque cualquiera que sea contendrá una arista del cilindro. Luego construyendo la traza horizontal *p* de esta recta, obten- *F.* 51.

dremos un punto de la traza del plano pedido, y como de un punto siempre es posible trazar dos tangentes á un círculo, resulta que podremos trazar dos planos tangentes que cumplan con la condicion, de los que LQ será una de las trazas horizontales, y pS la otra. Tendremos pues dos planos que resolverán el problema, y sus trazas verticales se obtendrán fácilmente, pues que cada uno de estos planos contendrá la recta $(pn, p'n')$ y la arista que parte de un punto de contacto L ó V.

En adelante podremos como en el (núm. 116) imaginar por el punto dado (n, n') una horizontal situada en uno ú otro de los planos tangentes, y construir la traza vertical de esta recta.

Hallar un plano que sea tangente á un cilindro y paralelo á una recta dada.

122. Supuesto determinados los contornos del cilindro en proyeccion horizontal y vertical, cuya base sea la curva ALG, si representamos por $(mn, m'n')$ la recta dada, será necesario por un punto de esta línea trazar una paralela $(ma, m'a')$ á las generatrices del cilindro, y hacer pasar un plano por estas dos rectas.

Este plano, que tendrá por traza horizontal an, deberá ser paralelo al plano tangente buscado, pues que contendrá una arista del cilindro, necesariamente paralela á dos rectas proyectadas sobre ma y mn; por consiguiente, si trazamos las tangentes LQ y TM, paralelas á la traza an, estas podrán considerarse como las trazas horizontales de los planos buscados, y cuyas trazas verticales se determinarán por los procedimientos ya dados á conocer.

123. Terminados estos problemas sobre el cilindro, observaremos que no podemos exgir que un plano sea tangente á una tal superficie, y que pase al mismo tiempo por una recta dada. Porque solo para que un plano toque al cilindro en un punto, es necesario como hemos visto (número **106**), sea tangente todo lo largo de la generatriz que pase por este punto, de suerte que esta primera condicion contiene implícitamente dos, y si ademas imponemos la condicion de pasar por una recta ó por dos puntos dados fuera de ella, esta formará cuatro condiciones distintas, mientras que tres son suficientes para determinar la posicion de un plano. Sin embargo, si la recta dada es paralela á las aristas del cilindro, viene á señalar un solo punto, y el problema estará en el caso del (número **122**.)

Por un punto dado sobre una superficie cónica, trazar un plano tangente.

124. Sea ACBD la curva directriz que suponemos situada en el plano horizontal y (s, s') el cúspide del cono: principiaremos por determinar el contorno aparente de esta superficie, sobre el plano horizontal, buscando (número **111**) todos los planos tangentes verticales. Un tal plano, tendrá por traza horizontal la proyeccion misma de la generatriz que contenga, asi esta traza pasará por el punto s. Como debe tocar ademas la base, atendido á que en este caso el contacto del plano tangente, tiene lugar (número **106**) todo lo largo de una generatriz, concluiremos que las tangentes (sA y sB) trazadas del punto s, son las trazas de los planos tangentes verticales y que tocan al cono segun las dos aristas (sA, s'A') y (sB, s'B'), las cuales forman el contorno aparente de la superficie cónica, relativamente al plano horizontal. *F.* **52.**

En cuanto al contorno aparente sobre el plano vertical, será dado por los planos tangentes al cono que sean perpendiculares á este plano de proyeccion (número **111**), asi las trazas horizontales de estos planos deben ser perpendiculares á la línea de tierra y tangentes como anteriormente á la base ACBD, que serán las rectas CC′ y DD′. Por otra parte, puesto que estos planos tocarán evidentemente el cono segun las generatrices (C*s*, C′*s*′) y (D*s*, D′*s*′), se sigue que estas dos rectas formarán el contorno aparente de la superficie proyectada sobre el plano vertical, y por consecuencia toda arista que se encuentre por detras de estas rectas ó que toque á la porcion CAD de la base, será invisible en la proyeccion vertical.

125. Volviendo al problema primitivo y suponiendo que *m* sea proyeccion horizontal del punto dado, la otra proyeccion no debe ser tomada arbitrariamente, porque puesto que el punto en cuestion pertenece á la superficie, debe encontrarse sobre una generatriz que no puede estar proyectada horizontalmente sino segun *sm*, esta recta tendrá por traza horizontal el punto E ó el punto G y las proyecciones verticales serán *s*′E′ y *s*′B′; con que si trasportamos la proyeccion *m* por una perpendicular á la línea de tierra, obtendremos para el punto designado las dos soluciones (*m*, *m*′) y (*m*, *m*″).

126. Esto supuesto, construyamos el plano tangente para el primero de estos dos puntos. Este plano contendrá la generatriz (*s*E *s*′E′) y tocará al cono en toda la estension de esta recta (número 106); por consecuencia, tendrá por traza horizontal la tangente PQ á la base: en cuanto á su traza vertical deberá pasar por el punto FF″ en que la arista de contacto va á cortar al plano vertical y por el punto Q en que la traza PQ cortará la línea de tierra; mas si este punto Q estuviera fuera del cuadro, se suplirá imaginando por el punto (*mm*′) ó (*s*, *s*′), y en el plano tangente buscado, una horizontal (*sx*, *s*′*x*′), que habrá de cortar el plano vertical en *x*′, y dará así un nuevo punto de la traza pedida QR′.

Del mismo modo, para el punto (m, m'') siendo la arista de contacto (sG, s'B'), la tangente TV será la traza horizontal del plano tangente actual, cuya traza vertical TS' se determinará buscando el punto F' de la arista de contacto (Gs, B's') en que va á cortar el plano vertical, ó bien sirviéndose como anteriormente de una horizontal situada en el plano tangente que nos ocupa.

127. Observaremos ademas que los dos planos tangentes que acabamos de determinar, habrán de pasar por el cúspide; luego siendo este punto comun á los dos planos, deberá encontrarse en su comun seccion, y por consiguiente las proyecciones de esta comun seccion deberá pasar por las proyecciones del vértice, lo que dará una comprobacion de las construcciones anteriores.

Trazar un plano tangente á una superficie cónica, por un punto fuera de ella.

128. Sea ABC la base del cono y (S, S') el cúspide: se F. 53.
determinará como anteriormente el contorno aparente de la superficie sobre cada uno de los planos fijos, y representaremos por (n, n') el punto designado en el espacio. El plano tangente que buscamos deberá contener una generatriz que pasará por el cúspide (S, S'), y como ha de contener el punto (n n') si unimos el cúspide con el punto dado, la generatriz de contacto y la línea que une los dos puntos, nos determinarán el plano. Por consiguiente si determinamos la traza horizontal P de la línea que pasa por el punto, esta habrá de ser un punto de la traza del plano, y como de un punto siempre es posible trazar dos tangentes á un círculo, las PQ y PV serán las trazas horizontales de los dos planos tangentes, cuyas trazas verticales se determinarán por los procedimientos ya indicados.

Hallar un plano que sea tangente á un cono y paralelo á una recta dada.

129. Conservaremos los mismos datos que anteriormente para el cono, y supongamos sea $(mn, m'n')$ la recta á la cual el plano tangente debe ser paralelo. Como este plano pasará necesariamente por el cúspide, si trazamos por este punto y paralelamente á $(mn, m'n')$ la recta (SP, S'P'), esta última estará evidentemente contenida en el plano pedido; por consecuencia la traza (P, P') de esta recta pertenecerá á la traza horizontal del plano tangente, la cual será una de las dos tangentes PQ, PV, trazadas á la base, puesto que admitirá dos soluciones, y las trazas verticales de estos planos se determinarán como queda indicado.

Para este caso son aplicables las mismas consideraciones que hicimos para el cilindro (número **123**), de que resulta que no se podrá exigir que un plano sea tangente á un cono, y que al mismo tiempo pase por una recta ó dos puntos dados, á menos que la recta que reuna estos dos puntos, no pase al mismo tiempo por el cúspide, porque entonces esto equivale á señalar un solo punto.

Por una recta dada, trazar un plano tangente á una superficie esférica.

130. Este problema tendrá evidentemente dos soluciones. Para hallarlas se imaginará por el centro de la esfera un plano perpendicular á la recta dada, que cortará la esfera segun un círculo máximo, y á la recta en un punto. Si conociésemos las proyecciones de este círculo máximo, el problema quedaria determinado, trazando de las proyecciones del punto en que el plano corta á la recta, dos tangentes á las proyecciones del círculo máximo, y haciendo pasar por esta y la recta dada los planos en cuestion; mas como las proyecciones de este

círculo no las conocemos, habremos de emplear otros medios.

131. Sean (c, c') el centro de la esfera; *gpk* y *x'v'z'* los contornos de sus proyecciones y $(Ab, A'b')$ la línea dada. El plano que pase por el centro (c, c') perpendicularmente á la recta dada, tendrá sus trazas respectivamente perpendiculares á las proyecciones de la recta $(Ab, A'b')$ (teorema núm. XI). *F. 54.*

Si imaginamos que por el centro de la esfera pasa una línea horizontal perpendicular al plano proyectante Ab, esta línea, cuyas proyecciones serán $(ce, c'e')$, estará contenida en el plano perpendicular á la recta dada, y si en un plano vertical paralelo al de proyeccion, que pase tambien por el centro de la esfera, concebimos otra línea perpendicular al proyectante de la $A'b'$, esta línea, cuyas proyecciones son $(cd, c'd')$, tambien se hallará contenida en el plano, y ambas determinarán su posicion. La primera $(ce, c'e')$ corta al plano vertical Ab en (e, e'), y la segunda $(cd, c'd')$ en (d, d'); por consecuencia, el plano de las dos rectas y el vertical Ab se cortarán segun la recta $(de, d'e')$. Luego el punto (y, y') será la interseccion del plano de las dos rectas con la recta dada, ó lo que es lo mismo, la interseccion del plano que pasa por el centro de la esfera perpendicularmente á la recta dada, con esta recta.

132. Segun lo dicho, sería necesario tirar por este punto (y, y') tangentes al círculo máximo, interseccion de la esfera y del plano de las rectas $(ce, c'e')$ $(cd, c'd')$; mas como esta interseccion no se conoce, y sí la horizontal por quien se halla representada la esfera, supondremos que el plano de las dos rectas, gira sobre la $(ce, c'e')$ hasta acomodarse en el plano horizontal que pasa por el centro de la esfera: el punto (y, y') describiendo un arco con el centro (e, e'), y cuyo radio sea hy', hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son $l'y'$, que es lo que el punto original dista del plano horizontal á que se acomoda, é ye proyeccion horizontal de la distancia entre los puntos (y, y') y (e, e'), habrá caido en un punto Y, situado en el plano horizontal que pasa por el centro de la esfera, de cuyo punto será posible trazar las tangentes Yg, Yk, que determinarán los puntos de tangencia g y k, y á mas las intersecciones (o, o') y (r, r') con la horizontal $(ce, c'e')$, sobre la cual ha girado el plano de las dos rectas.

Si suponemos restituido el punto Y á su primitiva posicion, las tangentes Yk é Yg caminarán siendo tangentes á la esfera segun un círculo que será perpendicular á $(ce, c'e')$ y sin dejar de tocarla en (o, o') y (r, r'). Luego si por (y, y') trazamos las $(yo, y'o')$ é $(yr, y'r')$, estas serán las tangentes que determinarán respectivamente los puntos (m, m') y (n, n') en que los planos serán tangentes á la esfera.

133. Para encontrar las trazas de los planos tangentes, hallaremos primero las de la recta dada que son A y L'. Por el punto (m, m'), consideraremos una línea paralela á la recta dada, cuyas proyecciones serán ms, $m's'$ y su traza horizontal será s; si unimos este punto con el A, esta será la traza horizontal del plano tangente á la esfera en el punto (m, m'); como el punto de interseccion Q pertenece tambien á la traza vertical, uniéndole con L' que es la traza vertical de la recta dada, tendremos que L'QR' será la traza vertical de dicho plano. Efectuando el mismo procedimiento con el punto (n, n') obtendriamos el plano tangente correspondiente á este punto que pasase tambien por la línea propuesta.

F. 55. **134.** *Otra solucion.* Sea C el centro de una esfera representada por el círculo gsk y $(ab, a'b')$ la recta dada.

Como somos dueños de elegir la posicion de los planos de proyeccion, podremos suponer que la línea de tierra pasa por el centro de la esfera, en cuyo caso, el plano perpendicular á la recta dada, que debe pasar por el centro de la esfera, estará bien representado por las líneas C*e*, C*d'* que partiendo de dicho punto, sean perpendiculares respectivamente á las *ab* y *a'b'*. La interseccion del plano con la recta, estará determinada por la interseccion comun *d'e'* del proyectante *bdd'* con el plano *e*C*d'*, que darán (*y*, *y'*) por proyeccion de la interseccion. Esto supuesto, si sobreponemos el plano *e*C*d'* sobre el horizontal, haciéndole girar alrededor de *e*C, el punto (*y*, *y'*) describiendo un arco de círculo, habrá venido á situarse en Y, esto es, á una distancia del punto (*e*, *e'*), igual á la hipotenusa *y'h*, de un triángulo rectángulo que tendrá por catetos, la altura *y'l* y *ey*: si de Y trazamos dos tangentes Y*g* é Y*k*, cortarán la línea C*e* en los puntos *r* y *o*. Al restituir el punto Y á su primitiva posicion, los puntos de tangencia *k*, *g*, caminarán en círculos perpendiculares á *e*C, sin que varíen los puntos de contacto *o* y *r* con la *e*C, con que si por *y* trazamos las *yo* é *yr*, estas serán las tangentes á la esfera cuya interseccion, con los círculos proyectados en *gs* y *kn* darán los *m*, *n*, que son las proyecciones horizontales de los puntos de tangencia de los planos que se buscan.

Las proyecciones verticales de estos mismos puntos, están fácilmente determinadas: con efecto, los puntos *o* y *r*, situados en el plano horizontal, son los de contacto de las tangentes trazadas en esta proyeccion con la línea C*e*; las proyecciones verticales de estos puntos se hallarán en *o'*, *r'*, sobre la línea de tierra, que con *y'* tendremos determinada la posicion de las proyecciones verticales de las tangentes, uniendo *y'* con *o'* y con *r'*; y como las proyecciones verticales de m y n, se han de hallar precisamente en las tangentes $y'o'$ é $y'r'$ y al mismo tiempo en una línea perpendicular á la línea de tierra, los m' y n' serán dichas proyecciones verticales de los puntos de contacto. Por un procedimiento análogo al que se siguió en el caso anterior, se determinarian las trazas correspondientes á los planos propuestos.

Por una recta dada trazar un plano que forme con el horizontal un ángulo determinado α.

135. De un punto cualquiera de la recta, bajaremos sobre el plano horizontal una perpendicular y una oblícua, dirigiendo esta paralelamente al plano vertical, y de manera que forme el ángulo α con la línea de tierra. Entonces imaginando que esta oblícua gira alrededor de la vertical, describirá un cono recto, cuya traza horizontal será un círculo fácil de determinar, y en que todas las aristas se hallarán igualmente inclinadas sobre dicho plano en una cantidad cualquiera α; por consiguiente si trazamos á este cono un plano tangente que pase por la recta dada (número **128**), obtendremos evidentemente un plano que satisfará á las condiciones señaladas en la cuestion.

Trazar á un cilindro dado, un plano tangente, cuya inclinacion sobre el plano horizontal sea α.

136. Construiremos como en el problema precedente un cono de revolucion, cuyas aristas formen el ángulo α con el plano horizontal. Despues tirando por el cúspide una recta paralela á las generatrices del cilindro, y haciendo pasar por esta recta un plano tangente al cono (número **128**), restará trazar al cilindro un plano tangente paralelo á aquel; problema que se resolverá como en el (número **122**) trazando á la base del cilindro una tangente paralela á la traza horizontal del plano que toca al cono.

Sabemos que el problema será imposible cuando la paralela trazada por el cúspide del cono auxiliar, toque lo interior de la base.

137. Si proponemos la misma cuestion para un cono dado de base cualquiera, será necesario modificar la solucion tomando por cúspide del cono de revolucion el punto mismo que sirve de cúspide á la superficie cónica señalada por el problema; en seguida debemos trazar una tangente comun á las bases de estos dos conos, y esta será la traza horizontal del plano pedido.

Por un punto dado trazar una recta que sea tangente á una superficie cónica y paralela á un plano dado.

138. Construiremos un plano que toque al cono y pase por el punto señalado por la cuestion: en seguida construiremos otro trazado del mismo punto y paralelamente al dado: la interseccion de los dos planos así construidos, deberá evidentemente ser una recta que satisfará la cuestion.

Dadas las proyecciones de cuatro puntos, encontrar el radio de la esfera que pasa por ellos, ó sea circunscribir una esfera á un tetaedro.

139. Puesto que somos árbitros de elegir la posicion de los planos, tomaremos por el horizontal de proyeccion, el que determinan tres de los puntos dados (a, a'), (b, b') y (c, c'). Estos tres puntos determinarán un círculo de la esfera cuyo centro o estará en la interseccion de las perpendiculares on, om que dividan las cuerdas en dos partes iguales. El centro de la esfera se hallará en la perpendicular al plano horizontal que pasa por el centro de dicho círculo. Uniendo el cuarto punto (d, d') con otro (c, c') de los tres, el centro de la esfera habrá de encon- *F. 56.*

trarse en la interseccion de la perpendicular que divida esta cuerda en dos partes iguales, con la perpendicular (o, o' t) que pase por el centro del círculo anteriormente determinado. Luego si por el punto medio (s, s') de la tercera cuerda (dc, $d'c'$), hacemos pasar un plano que la sea perpendicular y encontramos la interseccion de este plano con la perpendicular al plano horizontal, el punto (o, o') en qué la encuentre, será el centro de la esfera.

CAPITULO IV.

De los planos tangentes á lás superficies de revolucion cuando el punto de contacto es dado.

F. 57. **140.** Puesto que por cada punto M tomado sobre una superficie de revolucion (número 90), pasa siempre un meridiano AMD y un paralelo FMG, si construimos las tangentes MT y MV á estas curvas, y trazamos un plano por estas dos rectas, este será (número 104) el plano tangente de la superficie en M. Luego la tangente MV situada en el plano del círculo FMG, es evidentemente perpendicular á la vez al radio MO y al eje AD, pues lo es al plano-meridiano AMD. De esta consecuencia, independiente de la naturaleza de la curva AMD y de la posicion del punto M, resulta este teorema notable: *en toda superficie de revolucion, el plano tangente es siempre perpendicular al plano meridiano que pasa por el punto de contacto.*

141. Trazando por el punto M una normal MN á la superficie, esta recta perpendicular al plano tangente se encontrará necesariamente contenida en el plano meridiano AMD; porque en toda superficie de revolucion, la normal va á encontrar al eje.

Ademas esta union se verifica en el mismo punto por todas las normales MN, GN, FN.... que corresponden á un mismo paralelo. En efecto, cuando el plano meridiano AMD gire alrededor del eje, llevando consigo la recta MN, no cesará de ser perpendicular á MV; ademas esta recta movible MN, siempre contenida en el plano meridiano, se encontrará (como en el caso número 140) perpendicular sucesivamente á cada tangente MV del paralelo, pues MN es perpendicular á dos tangentes, y por consecuencia normal á la superficie, en todas las posiciones que ocupe girando alrededor del eje AD. Por otra parte, pues que en este movimiento el punto N de la normal MN permanece inmóvil, resulta *que todas las normales trazadas á lo largo de un mismo paralelo, forman siempre un cono recto, cuyo cúspide está sobre el eje;* mas este cúspide cambia pasando de un paralelo á otro.

Notadas estas propiedades generales y comunes á todas las superficies de revolucion, vamos á ocuparnos de la construccion de los planos tangentes.

Por un punto dado sobre una superficie de revolucion, cuyo meridiano es conocido, trazar un plano que sea tangente á esta superficie.

142. Para simplificar las construcciones, elijamos el plano de proyeccion de manera que sea perpendicular al eje de rotacion: esta recta vertical, estará proyectada horizontalmente en un punto *o* y verticalmente segun la recta *o'z'*. Sea pues *a'b'd'e'* la proyeccion del meridiano principal, es decir, del que es paralelo al plano vertical, y que está proyectado horizontalmente sobre *eob*, paralelo á la línea de tierra; en este caso, el meridiano es una elipse en que uno de los diámetros principales coincide con el eje de rotacion, y por consiguiente, la *F.* 58.

superficie será un elipsoide de revolucion (número **96**); mas los razonamientos y las construcciones serán enteramente semejantes para toda otra curva meridiana. El mayor de los paralelos, ó bien el ecuador de la superficie, es evidentemente el círculo descrito por el semi-eje $o''b'$ que está proyectado horizontalmente por un círculo $bkeq$ igual al primero, y forma el contorno aparente de la superficie relativamente al plano horizontal.

En efecto, todo lo largo del ecuador (bke, $b'e'$) los planos tangentes serán verticales, pues que cada uno contendrá la tangente del meridiano, que es una vertical como la bb'. En cuanto al contorno aparente de la superficie, con relacion al plano vertical, será el meridiano principal (be, $a'b'd'e'$), por que este contorno debe formarse (número **111**) por los puntos de contacto de todos los planos tangentes perpendiculares al plano vertical.

143. Esto supuesto, sea m la proyeccion horizontal de un punto dado sobre la superficie, no será arbitraria la segunda proyeccion de este punto, que debe estar evidentemente proyectado sobre ok. Pues si hacemos girar este alrededor del eje (o, $o'z'$) hasta que coincida con el meridiano principal ob, se encontrará proyectado verticalmente segun $a'b'd'$; y como por consecuencia de esta mudanza la proyeccion m habrá descrito el arco mg, concluiremos que la proyeccion vertical del punto buscado se encontrará actualmente en g' ó en g''. Ahora, si volvemos el meridiano á la posicion ok, el punto en cuestion que durante este movimiento no habrá cambiado de altura, quedará proyectado verticalmente sobre la horizontal $g'f'$ ó $g''f''$, de que se sigue evidentemente, que en su posicion primitiva, está proyectado verticalmente en m' ó en m'': así hay sobre la superficie dos puntos (m, m') y

(m, m''), que están el uno y el otro proyectados horizontalmente en m.

144. Consideremos el primero de estos puntos (m, m') y para determinar el plano tangente que se considera, le sujetaremos á pasar por dos tangentes de la superficie, á saber: la tangente al meridiano y la tangente al paralelo; mas como la proyeccion de la curva meridiana relativa al punto (m, m') no nos es dada inmediatamente, no podemos trazarle directamente una tangente, sobrepondremos el plano vertical omk sobre el meridiano principal eob. Por lo dicho, el punto (m, m') se trasladará á (gg'), y será fácil construír la tangente $g'h'$ que vendrá á cortar el plano horizontal en el punto (h, h') sobre ob, pues si volvemos el meridiano movible á la posicion omk, el pie h de esta tangente describirá evidentemente un arco de círculo terminado en T, mientras que el punto de contacto g' caerá en m', con que proyectando el punto T sobre la línea de tierra, obtendremos mT y $m't'$ por las proyecciones de la tangente al meridiano que pasará por el punto (m, m'). Observaremos por otra parte, que esta tangente prolongada, debe encontrar al eje de la superficie en el mismo punto z' en que encuentra la recta $g'h'$.

En cuanto al paralelo relativo al punto (m, m') está evidentemente proyectado sobre el círculo gmf y sobre $g'f'$; por consecuencia su tangente es la horizontal $(mv, m'v')$, perpendicular al plano meridiano omk. Ahora el plano que contiene las dos tangentes así determinadas, tendrá por traza horizontal una recta TU que pasará por el punto T de la primera tangente, y trazada paralelamente á mv que es una horizontal contenida en este plano; despues obtendremos la traza vertical US' de este mismo plano, construyendo el punto (v, v') en que la recta $(mv, m'v')$ va á cortar el plano vertical.

145. El plano tangente relativo al punto (m, m'') se obtendrá de una manera análoga, sobreponiendo el punto m'' en g'' sobre el meridiano principal, y trazando á este la tangente $l'g''$. En seguida el pie (l, l') de esta recta, trasportada en el meridiano ok, caerá en R, y como la tangente al paralelo es aquí $(mv, m''v'')$ las trazas del plano tangente serán RS paralela á mv y SV'.

Convendrá observar que dada la direccion de la tangente mv al paralelo, cada plano tangente á una superficie de revolucion, tendrá siempre su traza horizontal, perpendicular á la del plano meridiano que pasa por el punto de contacto, en tanto que el eje de la superficie sea vertical.

146. Observaremos ademas que los dos planos tangentes en (m, m') y (m, m'') tienen sus trazas TU y RS paralelas, por consiguiente se cortarán segun una horizontal y por la simetría de la superficie, esta horizontal estará situada en el plano del ecuador $e'b'$. En efecto, los puntos g' y g'' pertenecen á dos paralelos equidistantes al ecuador $e'b'$, y á distancias iguales del eje $o'z'$: las tangentes al meridiano principal por los puntos g' y g'' habrán de formar ángulos iguales con el eje $o'z'$, y habrán de cortarse por consecuencia en un punto equidistante de los estremos a' y b' del eje que no puede ser sino sobre la prolongacion de $e'b'$; como las trazas horizontales de los dos planos tangentes son paralelas, la comun interseccion de estos planos será horizontal, y como las trazas verticales han de pasar necesariamente por r' y v'' puntos equidistantes al ecuador, dichas trazas no podrán cortarse sino en un punto P' prolongacion del ecuador $e'b'$, donde deberá encontrarse el trasportado de α en la posicion de las tangentes á los puntos m' y m'' ó sea el punto β.

147. Para obtener la normal de la superficie de revolucion al punto (m, m'), recordaremos (número 141) que todas las normales á lo largo de un mismo paralelo, van á cortar al eje al mismo punto, y que por otra parte, cada una está contenida en el plano meridiano que pasa por el punto de contacto; asi despues de haber sobrepuesto sobre el meridiano principal, el punto m' en g', tiraremos por este último una recta $g'n'$, perpendicular á la tangente $g'k'$, y uniendo el pie n' de esta normal con el punto dado m', obtendremos la normal $m'n'$ relativa á este último punto. Esto es, la proyeccion vertical; y en cuanto á su proyeccion horizontal, caerá evidentemente sobre om.

Observaremos que esta normal, siendo perpendicular al plano tangente TUS', las trazas de este último deberán ser (núm. XI.) respectivamente perpendiculares á las rectas om y $n'r$ (lo que ofrecerá una comprobacion de las construcciones anteriormente efectuadas para el plano tangente); por lo que si queremos un medio de encontrar *á priori* las trazas, no habrá mas que trazar por un punto comun (mm'), un plano perpendicular á la recta $(mo, m'n')$ véase (número 54).

148. Hemos visto (número 143) que fácilmente se determina la proyeccion vertical de un punto de la superficie, conocida que sea la proyeccion horizontal: si pues aplicamos el mismo proceder á diversos puntos k, m, q.... tomados en el plano meridiano kq, podremos construir la proyeccion vertical de la curva meridiana contenida en este plano, y esta curva deberá ser tangente á las rectas $t'm'$ y $r'm''$, y repitiendo la misma operacion para otros meridianos, obtendremos tantas posiciones de la elipse movible cuantas queramos; lo que servirá para completar la representacion gráfica de la superficie.

Así por operaciones análogas es como estando dadas las proyecciones de una generatriz cualquiera de una superficie de revolucion, se determina fácilmente el meridiano principal, ó cualquiera otra seccion meridiana. Podremos proponernos, como ejemplo, el caso en que esta generatriz es una recta que no encuentra el eje, y entonces hallaremos que el meridiano es una hipérbola.

F. 59. **149.** *Del plano tangente al toro.* Si hacemos girar un círculo $(abc, b''a'b'c')$ alrededor de una recta $(o, o'z')$ y á una distancia oa, $o'a'$, tomada á voluntad, este meridiano circular engendrará una superficie anular, llamada *toro*, pues todos esos puntos estarán proyectados horizontalmente entre el ecuador descrito por el radio $oc=o'c'$ y el círculo de garganta descrito por el radio $oa=o'a'$; pero es necesario notar que los dos semicírculos $b'c'b''$ y $b'a'b''$ engendrarán dos hojas muy diferentes de forma, aunque la una y la otra vienen á reunirse á lo largo de las circunferencias recorridas por las estremidades b' y b'' del diámetro vertical. La hoja esterior es convexa, es decir, que todas las curvas trazadas por un mismo punto (n, n') se encontrarán situadas de un mismo lado del plano tangente en este punto. En efecto, para determinar este plano, es necesario construir la tangente $n'P'$ del meridiano, y por el pie P' de esta recta trazar una perpendicular $P'Q$ á la traza on del meridiano (número 144), pues vemos que el meridiano $b'n'b''$ y el paralelo $n'i'$ están á la izquierda del plano tangente $n'P'Q$; y aunque hayamos elegido el punto (n, n') sobre el meridiano principal, á fin de hacer mas sencilla la construccion del plano tangente, es evidente que las mismas circunstancias concurrirán para cualquiera otro punto de la hoja esterior, puesto que es de revolucion, y por consecuencia simétrica todo alrededor del eje $(o, o'z')$.

Si por el contrario tomamos un punto (m, m') sobre la hoja interior, el plano $m'T'T$, tangente en este punto, atravesará la superficie, porque el meridiano $(b'm'a'b'')$ estará evidentemente á la derecha de este plano, mientras que el paralelo $m'v'$ se encontrará á la izquierda: asi el plano $m'T'T$ cortará el *toro* segun una curva enlazada, representada en proyeccion horizontal por $(mhefg f''e''mh''e'''f'''g''f^{iv}e^{iv})$. Mas esta interseccion no impide al plano $m'T'T$ contener las tangentes del meridiano, del paralelo y de todas las demas curvas trazadas sobre la superficie por el punto (m, m'); de suerte que este plano es realmente tangente al *toro* en este punto, y secante en todos los demas puntos comunes, circunstancia que tiende á que la hoja interior es una superficie cóncava del todo semejante al cuello de una polea.

LIBRO III.

CAPITULO UNICO.

De las superficies desarrollables.

150. Se dice que una superficie es desarrollable, cuando supuesta su flexibilidad inestensible, puede estenderse sobre un plano sin fractura ni dobleces. Pues que sabemos, por ejemplo, que una porcion cualquiera de esfera no goza de esta propiedad, deberá haber en la generacion de una superficie desarrollable, alguna condicion particular que la permita sufrir esta trásformacion. Mas antes de estendernos á estas generalidades, nos parece útil examinar dos géneros particulares que pueden desenvolverse sobre un plano; estos son, el cilindro y el cono. Por otra parte, es llegado el momento de introducir las consideraciones del método infinitesimal, que bien entendido presentará toda la exactitud que puede desearse, y ofrecerá en lo sucesivo la doble ventaja de abreviar los razonamientos y prestarse con facilidad á las construcciones gráficas de la geometría descriptiva.

151. Siendo la tangente de una curva el límite de la posicion que toma una secante, cuando dos de sus puntos de contacto se aproximan infinitamente, podemos considerar la tangente como una recta que pasa por dos puntos infinitamente próximos sobre la curva, ó que tiene un elemento comun con ella: por lo dicho podemos sustituir á la curva propuesta un polígono inscripto, cuyos lados y los ángulos esteriores sean infinitamente pequeños, y en que cada lado prolongado reemplace á una tangente; mas esta propiedad que en un tal polígono será independiente de la estension absoluta de sus lados y los ángulos comprendidos, subsistirá igualmente cuando multipliquemos estas pequeñas cuerdas aproximándolas á la curva, por consecuencia, tendrá lugar semejantemente, cuando pasemos al límite, es decir, cuando consideremos la curva en cuestion y sus verdaderas tangentes.

152. Por otra parte, hemos demostrado rigorosamente (número 105) que en toda superficie las diversas curvas trazadas por un mismo punto, tienen sus tangentes de este punto en un plano único, pues este plano que llamamos tangente, podrá considerarse como que tiene comun con la superficie un elemento superficial, formado por la union de elementos lineales comunes á las curvas y á sus tangentes: este será el elemento de contacto que se encuentra en general infinitamente pequeño en todos sentidos; á menos que la superficie no sea de un género tal, que el plano tangente sea el mismo para muchos puntos consecutivos.

153. En un cilindro, por ejemplo, sabemos (número 106) que el plano BAT es tangente toda la estension de la generatriz AMB; luego este plano tendrá de comun con la superficie un elemento superficial ABB′A′ indefinido en longitud, comprendido entre las dos generatrices infinitamente próximas que pasan por los puntos A y A′ comunes á la base AC y á su tangente AT. *F.* 60.

Se ve que distinguimos aqui, como en la nota del (número 114), el elemento de la superficie, de la generatriz: esto es esencial, porque en las superficies gauchas veremos que esta última recta será comun á la superficie y al plano tangente, mientras que el elemento superficial, indefinido en longitud, no se hallará todo entero en este plano.

Del mismo modo, una superficie cónica que toca su plano tangente todo lo largo de una generatriz (número 106), tendrá de comun con este plano un elemento superficial indefinido en longitud, pero comprendido entre dos generatrices infinitamente próximas.

F. 61. **154.** *Una superficie cilíndrica es siempre desarrollable.* Porque si la imaginamos cortada por un plano perpendicular á sus generatrices, segun una curva CA, que se nombra la seccion recta del cilindro (1), y que miraremos como su base ó como la directriz de la recta movible que ha engendrado esta superficie, si sustituimos por un momento á esta curva un polígono inscripto CAA′A″, lo que trasformará el cilindro en un prisma rectangular, entonces podremos hacer girar la cara B″A″A′B′ alrededor de la arista B′A′ como charnela, hasta que se sitúe en el plano de la cara B′A′, AB y por lo que la cara A′A″ trasportada en A′*a*″, se hallará situada en prolongacion de AA′, y continuarán las dos siendo perpendiculares á la base CAA′. Podemos hacer girar las caras compuestas por

---

(1) Llamaremos en lo sucesivo, por abreviar, cilindro recto aquel en que tomamos por base ó por directriz la seccion recta, sin exigir por esto que esta seccion sea un círculo: esta denominacion no indicará nada de particular en la naturaleza del cilindro, pues que sabemos que toda superficie cilíndrica puede llegar á este caso, cortándole, como aqui, por un plano perpendicular á sus generatrices.

BA$a''b''$ alrededor de la charnela AB, hasta que llegue al plano de la cara anterior, y continuando así llegarán todas las caras del prisma á situarse en un plano único, seguidas las unas de las otras; de suerte que la superficie primitiva se hallará desenvuelta ó desarrollada sin haber cambiado de superficie. Ademas observaremos que todos los lados del polígono CA, A′A″, formarán despues del desarrollo una sola línea recta, á que todas las aristas del prisma continuarán siendo perpendiculares, como lo hemos probado para los dos primeros lados AA′ y A′A″; y que la longitud de la base será igual á la suma de los lados del polígono primitivo, mientras que las diversas aristas AB, A′B′... habrán conservado las longitudes que tenian anteriormente.

155. Pues es evidente que todas estas consecuencias serán igualmente ciertas, cualquiera que sean los ángulos y los lados del polígono que circunscribamos á la curva CAA′, tendrán por consecuencia lugar del mismo modo en un cilindro, por ser el límite de los prismas inscriptos, ó si queremos espresar de otro modo la misma idea, en un cilindro que no es otra cosa que un prisma, cuya base es un polígono infinitesimal. Podemos pues afirmar: 1.° *que toda superficie cilíndrica es desarrollable:* 2.° *que despues de esta trasformacion, la seccion perpendicular á la generatriz es una recta, cuya longitud es igual al perímetro de esta seccion:* 3.° *que las generatrices quedarán perpendiculares á esta recta conservando su longitud primitiva, sea por cima ó por bajo de esta base.*

156. Si existe sobre el cilindro una curva cualquiera GMM′, se hallará reemplazada sobre el prisma por un polígono GMM′M″, cuyos lados no cambiarán de longitud, cuando sean trasportados con las caras del prisma, en su movimiento de rotacion alrededor de las aristas sucesivas: mas este polígono cambiará de forma porque el ángulo interior MM′M″ caerá en MM′m″. Como en este desarrollo el lado M′M″ girará por un movimiento de rotacion alrededor de la charnela B′M′, se sigue que el ángulo B′M′M″ permanecerá constante é igual á B′M′m″: lo mismo sucederá al BMM′ y TMA que permanecerá invariable y en que un lado TMM′ vendrá al límite de la tangente de la curva que reemplaza actualmente el polígono GMM′. Si por otra parte observamos que todas estas propiedades son independientes de la mayor ó menor estension de las caras del prisma, y que asi deberán estar variadas por los límites de este prisma, ó por el cilindro de la (F. 61), deduciremos: 1.° que cuando desarrollamos un cilindro sobre que está trazada una curva cualquiera GM, *esta línea cambia en otra curva que llamarémos la trasformada de la primera, y cuyos arcos tienen la misma longitud absoluta que la curva primitiva:* 2.° *las porciones de las generatrices MA, M′A′... comprendidas entre esta curva y la seccion recta CAA′ permanecen de la misma estension y siempre perpendiculares á la recta segun la que se trasforma esta base CAA′:* 3.° cada tangente MT á la curva primitiva, forma con la generatriz MA *un ángulo que permanecerá invariable, y por otra parte esta recta MT se halla despues del desarrollo, tangente á la trasformada.*

Esta última asercion se comprueba observando que sobre el desarrollo del prisma, la línea MT no deja de ser la prolongacion de un lado del polígono trasformado.

157. Hemos dicho que una curva GMM′ trazada sobre un cilindro, cambia despues del desarrollo de la superficie en otra línea que generalmente es curva: sin embargo, hay casos particulares en que esta trasformada, puede ser rectilínea, y para hallar mas fácilmente las

condiciones que la originan, sustituyamos al cilindro y á la curva, el prisma recto y el polígono GMM' de la (61). Entonces para que el lado M'M'', trasportado en M'm'', se encuentre sobre la prolongacion de MM', es necesario evidentemente que tengamos *ángulo* B'M'm'' =A'M'M=BMM', y puesto que hemos visto (núm. 156) que el primero de estos ángulos permanecerá igual al ángulo primitivo B'M'M'', la condicion precedente quedará *ángulo* B'M'M''=BMM'; lo mismo sucederá con los otros lados del polígono GMM'M'' que deben cortar las aristas del prisma sobre un ángulo constante. Ahora si trasportamos al cilindro estas relaciones que deben siempre tener lugar sobre el prisma, por pequeñas que sean sus caras, y si recordamos (número 151) que las prolongaciones de los lados del polígono y las tangentes de la curva continua hácia la que es convergente este polígono, se aproximan al límite, deduciremos este teorema: *Para que una curva GM, trazada sobre un cilindro, resulte rectilínea despues del desarrollo de esta superficie, es preciso que todas las tangentes de esta curva, formen un ángulo constante con las generatrices del cilindro.*

158. Las curvas que satisfacen á esta última condicion se llaman *Hélices*, cualquiera que sea la base del cilindro sobre que se trazan; así las *Hélices* son las curvas que resultan rectilíneas por el desarrollo de la superficie cilíndrica que las contiene.

Tambien gozan ademas de esta propiedad notable: *Un arco cualquiera de la Hélice GM, es la línea mas corta que puede trazarse sobre el cilindro entre sus estremidades* G y M. En efecto, si la comparamos con otra curva comprendida entre los puntos G y M, este último arco no resultará rectilíneo cuando hayamos desarrollado el cilindro, luego será mas largo que el arco de que resulta una recta: mas hemos visto (número 156) que en este desarrollo, las trasformadas conservan la misma longitud que las curvas primitivas; es pues consiguiente que antes del desarrollo del cilindro, el arco de Hélice es mas corto que toda otra línea que pase por los puntos G y M.

159. Importa observar que todas las curvas que resultan rectilíneas despues del desarrollo del cilindro, son primitivamente de doble curvatura; es decir que tres tangentes próximas á tres elementos consecutivos no están en un mismo plano. En efecto, volviendo al polígono de la (61), y considerando tres lados consecutivos KM, MM′, M′M″, que supondremos dirigidos de modo que formen con las aristas del prisma ángulos iguales entre sí designados por α: si estos tres lados pueden estar en un plano único, lo podrán estar del mismo modo tres rectas trazadas por un punto cualquiera G paralelamente á estos lados; porque estas tres paralelas que forman cada una un ángulo α con la arista GD, se hallarán situadas sobre la superficie de un cono recto en que GD será el eje: sabemos que una tal superficie no podrá tener tres de sus generatrices en un mismo plano, porque entónces tres de los puntos de la circunferencia que le sirve de base, estarian en línea recta. Es pues imposible que los tres lados consecutivos KM, MM′, M′M″ se encuentren en un mismo plano: esta proposicion tiene lugar, cualquiera que sea la longitud de los lados, y permanece igualmente cierta para sus prolongaciones, cuando el polígono degenera en una curva contínua, en cuyo caso, estas prolongaciones son las tangentes de esta curva. Así las Hélices son siempre líneas de doble curvatura.

160. Es menester esceptuar solamente de esta conclusion general un caso único, que es el en que el án-

gulo α es recto, porque entonces el cono que nos ha servido para establecer la proposicion precedente se reduce á un plano. Por otra parte la Hélice particular que corresponde á la hipótesis actual $\alpha=90°$ no es otra cosa evidentemente que la seccion recta CAA′, y sabemos en efecto (número 155) que esta seccion resulta rectilínea despues del desarrollo del cilindro, con lo que podemos afirmar que de todas las curvas planas trazadas sobre un cilindro, no hay mas que la seccion recta que resulte rectilínea, despues del desarrollo de esta superficie.

161. A propósito de las Hélices que como hemos reconocido no son curvas planas, deberemos observar que en toda curva de doble curvatura, tal como GKM, situada de una manera cualquiera en el espacio, si tres elementos consecutivos KM, MM′, M′M″, no están en un mismo plano, á lo menos esta condicion se llenará siempre por dos elementos consecutivos MM′ y M′M″, y el plano MM′M″ se llama el *plano osculador* de la curva en el punto M.... Para el punto K, al contrario, el plano osculador será KMM′, y asi de los demas; de suerte que los diversos planos osculadores, se cortan dos á dos segun un elemento intermedio, y no coinciden todos juntos, sino en tanto que la curva es plana. Por las consideraciones espuestas anteriormente, se viene á definir el *plano osculador, como el que pasa por dos tangentes próximas.*

162. Observaremos ademas que una línea curva, plana ó no, no tiene mas que una tangente única en un punto dado, pero admite evidentemente una infinidad de normales: es decir, rectas perpendiculares á la tangente, y trazadas por el punto de contacto de esta; pues todas estas normales forman necesariamente un plano perpendicular á la tangente, y que llamamos el plano normal de la curva en el punto en cuestion. Es precisamente lo contrario de lo que sucede para una superficie, la cual admite en cada uno de sus puntos una infinidad de tangentes que forman el plano tangente, y una normal única perpendicular á este plano.

F. 62. **163.** *Una superficie cónica es siempre desarrollable.* Omitiendo todas las consideraciones que hemos creido deber emplear para el cilindro, consideraremos inmediatamente la base de un cono, cualquiera que sea, como un polígono infinitesimal CAA′A″, y este como una pirámide en que cada cara SAA′ sea un elemento superficial infinitamente estrecho, que será comun (número **106**) á la superficie, y su plano tangente á lo largo de la generatriz SA. Entonces podremos hacer girar la cara SA′A″ alrededor de la arista SA′, hasta que venga á situarse en el plano de la cara SA′A, y á continuacion de esta, hacer girar el sistema de estas dos caras alrededor de la arista SA y trazarlas en el plano de la cara precedente. Continuando de esta suerte, obtendremos un sector poligonal compuesto de todas las caras de las pirámides puestas al lado las unas de las otras en un mismo plano, cuya superficie será igual al área de esta pirámide: ademas, es evidente que en esta trasformacion, los lados y los ángulos de las caras SA′A″, SAA′... quedarán invariables, como las de los triángulos cualesquiera SM′M″, SMM′... mientras que los ángulos AA′A″, MM′M″ cambiarán de tamaño; y como estas diversas circunstancias son igualmente ciertas, cualquiera que sean las dimensiones de las caras de la pirámide, subsistirán análogamente para el límite de este cuerpo, es decir, para un cono sobre el cual los polígonos CAA′A″ y GMM′M″ provengan de curvas contínuas, cuyas tangentes sean las prolongaciones de los elementos AA′ y MM′.

164. De aqui resultan las consecuencias siguientes:

1.° *Toda superficie cónica es desarrollable*, y en esta trasformacion, *las generatrices ó porcion cualquiera de estas rectas no cambian de longitud.*

2.° La base del cono ó toda otra curva trazada sobre su superficie, *da una línea cuya curvatura no es la misma que la de la curva primitiva y que llamamos trasformada de la primera, mas los arcos de estas trasformadas, conservan la misma longitud absoluta que la de la curva primitiva.* Si esta última tiene todos sus puntos á una distancia constante del cúspide, la trasformada será un arco de círculo descrito con esta distancia por radio.

3.° *Cada tangente de la curva primitiva forma con la generatriz del cono, un ángulo que permanece invariable en el desenvolvimiento de esta superficie, y esta primera recta es tangente á la trasformada.*

165. Para que una curva GMM′ trazada sobre un cono resulte rectilínea despues del desarrollo de la superficie, es menester que dos elementos consecutivos MM′, M′M″ sean dirigidos de manera que el ángulo SM′M″=SM′t′, y como la prolongacion de estos elementos, son las tangentes de la curva primitiva, conduce á decir *que dos tangentes consecutivas de esta curva, forman ángulos iguales con la generatriz intermedia;* mas estos ángulos no son constantes para todas las tangentes como sucede en el caso del cilindro. *F.* 63.

166. Toda curva en que se verifique la condicion precedente, gozará la propiedad de ser la línea mas corta que puede trazarse entre dos puntos de la superficie cónica, por la razon dada en el (número 158), mas esta curva no presentará la forma de un espiral. En efecto, el ángulo SMM′ será menor que SM′M″ pues que este último será igual SM′t′, asi la inclinacion SMt de cada tangente sobre la generatriz correspondiente, es un án-

gulo agudo que va constantemente aumentando: la distancia SM, llegará al mínimun cuando este ángulo sea recto, y entonces obtendremos el punto M″ de la curva, mas próximo al cúspide S: del otro lado, esta curva se alejará cada vez mas, pues el ángulo SMT será obtuso y continuará creciendo. Asi sobre un cono de revolucion, por ejemplo, la línea mas corta comprendida entre dos puntos de la base circular, no es el arco de círculo comprendido entre estos dos puntos, si no es una especie de curva hiperbólica, cuyo cúspide se encuentra á igual distancia de los dos puntos en cuestion, y que despues del desarrollo del cono, resultará una cuerda del círculo en que la base primitiva estará trasformada. Los dos radios paralelos á esta cuerda, están sobre el cono primitivo y las generatrices son asíntotas de la curva en cuestion.

167. Al contrario, una curva que sobre una superficie cónica cualquiera, goza de una propiedad análoga á la de la Hélice (número 157), es decir, en que cada tangente haga un ángulo constante con la generatriz que pasa por el punto de contacto, presentará la forma de una espiral que se aproxima indefinidamente al cúspide, el cual será á su vez un punto asintótico; pues en el desarrollo, esta curva resultará evidentemente una espiral logarítmica, porque sabemos que esta última tiene la propiedad de cortar todos sus radios vectores bajo un ángulo constante.

Si este ángulo es recto, la trasformada será un círculo, y entonces todos los radios vectores son iguales; la curva primitiva trazada sobre el cono, no podrá ser sino una curva esférica, es decir, que resultará de la interseccion del cono propuesto con una esfera que tendrá por centro el cúspide.

168. *Superficie desarrollable cualquiera.* F. 64.

Generalicemos ahora las consideraciones que hemos empleado para los conos y cilindros é imaginar *que una superficie sea engendrada por una recta que se mueva de tal suerte, que dos posiciones consecutivas é infinitamente próximas se encuentren siempre en un mismo plano.* Aunque hay otros medios de satisfacer á esta condicion, nos basta admitir que ha sido satisfecha de un modo cualquiera, y que AB, A′B′, A″B″... son las posiciones de la recta movible. Consecuente á la definicion de la superficie, las dos generatrices consecutivas AB y A′B′, se cortarán necesariamente en un cierto punto M′; la generatriz A′B′ encontrará la A″B″ en un punto M″, y esta lo será por la siguiente en un punto M‴, de suerte que estas intersecciones sucesivas darán lugar á un polígono MM′M″M‴, ó mas bien, pues que suponemos las generatrices infinitamente próximas, estas formarán una curva continua VMM′M″U, á que todas las rectas serán tangentes y que se nombra la *arista de retroceso* por una razon que esplicaremos mas adelante.

169. Esto supuesto, la superficie engendrada bajo la ley precedente, es desarrollable. En efecto, puesto que dos generatrices consecutivas AMB y A′M′B′ están siempre en un mismo plano, comprenderán entre las dos, sobre la superficie, una zona angular infinitamente estrecha, mas indefinida en longitud, y que es necesariamente plana, porque por las diversas curvas trazadas sobre la superficie, los elementos lineales AA′, PP′... teniendo dos puntos comunes con la recta AM y A′M′, se encontrarán todos en el plano de estas dos generatrices. Del mismo modo, las generatrices A′M′B′ y A″M″B″, comprenden otro elemento superficial que es plano y de una longitud indefinida, y asi de las otras. Si hacemos girar al primer elemento alrededor de la recta A′M′B′, como charnela, hasta que llegue al plano del segundo elemento, y estos dos les hacemos girar alrededor de A″M″B″ sobre el plano del tercer elemento, concluiremos continuando asi por desarrollar sobre un plano único toda la superficie propuesta sin descontinuidad y sin alterar su superficie. Ademas es evidente: 1.º que por esta trasformacion no habrán cambiado las longitudes de las posiciones de las generatrices MA, M′A′... ni las de los AA′, A′A″... 2.º que los ángulos MAA′ ó MAT, MA′A″ ó MA′T′... formados por las generatrices con las tangentes de una curva cualquiera AD, trazada sobre la superficie, permanecerán invariables: 3.º que al contrario, los ángulos de contingencia, tales que TA′T′ ó sus suplementos como AA′A″ variarán, y que asi la curva AD tendrá por trasformada una línea cuya curvatura no será la misma que la primitiva. Por lo que queda probado que toda superficie que satisfaga la condicion del (núm. 168) será desarrollable.

170. Recíprocamente esta condicion es necesaria: porque para que una superficie pueda estenderse sobre un plano sin rasgarse ni doblarse, es necesario evidentemente que se componga de elementos superficiales planos, reunidos dos á dos por aristas rectilíneas indefinidas, á fin de que estas rectas puedan servir de charnelas para hacer girar estos elementos superficiales, y ponerlos en un plano único, seguidos los unos de los otros. Mientras que si la recta interseccion de dos elementos contiguos, está limitada por el encuentro de otro elemento, existiria en este espacio un ángulo triedro ó poliedro, cuyas caras no podrán ser estendidas sobre un plano sin dejar entre ellas intersticios; y como esta circunstancia se repetiria para cada punto, no habrá continuidad en el desarrollo de la superficie, y será alterada.

171. De lo que resulta inmediatamente *que el plano que toca una superficie desarrollable en un punto cualquiera P, es tangente todo lo largo de la generatriz APMB que pasa por este punto*. En efecto, puesto que todas las curvas AD, PX, BC.... tienen sus elementos lineales AA′, PP′, BB′.... situados en el plano de dos rectas infinitamente próximas AMB, A′M′B′, se sigue que este plano contendrá todas las tangentes en A, P, B.... y por consecuencia es un solo plano AM′A′, ó BAT, que toca la superficie desarrollable todo lo largo de la generatriz AMB. Asi en adelante cuando queramos construir el plano tangente relativo al punto Q dado sobre una tal superficie, bastará hacerle pasar por la generatriz AQB, y por la tangente AT, á una curva trazada sobre esta superficie por un punto cualquiera de AB.

Esta proposicion demostrada al (número 106) para el cilindro y el cono, es comun á todas las superficies desarrollables, y merece tanta mas atencion, cuanto que no se verifica en las superficies gauchas, aunque estas admiten semejantemente generatrices rectilineas.

Observaremos tambien que el plano AM′A′ ó BAT, que es tangente á la superficie desarrollable, coincide precisamente con el plano osculador de la arista de retroceso VMU, pues que las dos generatrices AM y A′M′ son tangentes á esta curva.

172. Hemos dicho que la curva VMU, formada por las intersecciones de las generatrices, se llama la arista de retroceso de la superficie desarrollable: para convencerse de esta justa denominacion, basta considerar cada generatriz AB como compuesta de dos partes MA y MB, la una situada debajo, y la otra sobre el punto de contacto M; designando bajo el nombre de hoja inferior la porcion de la superficie engendrada por las porciones F. 64.

MA, M'A', M''A''.... y las partes MB, M'B' M''B'' con el de hoja superior (1). Si queremos pasar de una hoja á otra caminando sobre la superficie de un modo continuo y en una direccion cualquiera (esceptuando la de una generatriz), se percibe fácilmente que este paso no puede tener lugar sino siguiendo una curva $\delta N \alpha$ que presentará un punto de retroceso en el sitio en que encuentra la línea VMU.

F. {64. 65.} Como esta circunstancia es importante, ensayaremos el modo de hacerla mas perceptible, proyectando toda la figura sobre un plano horizontal cualquiera: sea pues *vnu* (figura 65) la base del cilindro vertical que pasa por la curva VNU, y *ab*, *a'b'*.... las proyecciones de las generatrices que serán necesariamente tangentes á *vnu*; de que se sigue que ninguna de estas rectas penetrará en el cilindro vertical *vnu*, y que asi las dos hojas de la superficie desarrollable permanecen fuera de este cilindro, sobre el cual vienen á apoyarse á lo largo de la curva *vnu*. Ademas, si miramos este cilindro como un cuerpo sólido, y la generatriz proyectada sobre *ab* como una recta inflexible que gira sin resbalar sobre este cilindro, permaneciendo tangente á la curva *vnu*, es evidente que esta recta movible recorrerá la superficie desarrollable en cuestion. En este movimiento percibimos bien que un punto cualquiera δ, invariablemente unido á la parte superior *mb* de la generatriz, irá aproximándose al cilindro, y caerá en δ' cuando la generatriz se proyecte sobre

(1) Estas partes de generatrices se prolongarán indefinidamente, mas para hacer mas sensible la forma opuesta de las dos hojas, suponemos que estas rectas se terminan por dos planos horizontales que cortan la superficie segun las curvas AD y BC en que la primera vuelve su convexidad y la segunda su concavidad hácia el observador.

$a'b'$, despues en n cuando sea proyectada sobre $a''b''$. Mas allá de esta posicion, el punto generador se encontrará debajo del punto de contacto de la generatriz, cuando continúe girando sobre el cilindro vertical, de suerte, que el punto movible principiará desde entonces á separarse cada vez mas del cilindro, y caerá en α' para la posicion $a'''b'''$ y en α'' para $a^{IV}b^{IV}$.... de donde podemos ver claramente que la curva $\delta\delta'n\alpha'\alpha''$ descrita por el punto δ, se compondrá de dos ramas que ofrecerán un retroceso en n, y en que la primera $\delta\delta'n$ estará situada en la hoja superior de la superficie, mientras que la otra $n\alpha'\alpha''$ estará en la hoja inferior.

173. Resumiendo todo lo que precede, tendremos las consecuencias siguientes:

1.ª *Para que una superficie sea desarrollable, es necesario que sea engendrada por una recta que se mueva de manera que dos posiciones consecutivas se encuentren en un mismo plano.* Esta es una propiedad característica para todas las superficies de esta clase, y comprende evidentemente los dos géneros particulares de los cilindros y de los conos; pues que en la primera, las generatrices rectilineas son siempre paralelas, y en el segundo se cortan todas en un punto.

2.ª *Una superficie desarrollable admite siempre una arista de retroceso formada por las intersecciones sucesivas de las generatrices:* estas rectas son tangentes á la arista de retroceso y ademas divide la superficie en dos hojas distintas. En las superficies cónicas la arista de retroceso se reduce á un punto único que es el cúspide; y en el cilindro esta arista se halla trasportada toda entera á una distancia infinita.

3.ª *El plano tangente* de una superficie desarrollable es *comun* para todos los puntos de una misma generatriz y coincide con el *plano osculador* de la arista de retroceso.

4.ª En el desarrollo de las superficies *las porciones de las* generatrices, *lo mismo que los arcos de una curva* cualquiera, trazadas sobre la superficie, *no cambian de longitud absoluta, y las tangentes á esta curva forman con las generatrices ángulos que permanecerán constantes.* Mas no es así con los ángulos de contingencia comprendidos entre dos de estas tangentes consecutivas; y por consecuencia esta curva tiene por trasformada una línea cuya curvatura no es la misma que antes (1).

F. 64. **174.** Veamos de qué modo podemos llenar la condicion (número **168**) que ha de servir para la definicion de las superficies desarrollables. Tomemos dos curvas cualquiera **AD** y **BC** fijas en el espacio: sujetemos una recta movible á resbalar sobre estas directrices, mas de manera que las posiciones consecutivas se encuentren dos á dos en un mismo plano. Despues de haber elegido sobre la primera curva un punto cualquiera **A′** no podrá unirse con un punto arbitrario de la segunda, pues que nada asegura que la recta asi trazada esté en un mismo plano con la posicion próxima que tomemos á continuacion (**2**), mas imaginemos una superficie cónica que tenga por cúspide el punto **A′** y por base la curva **BC**, y

---

(1) Debemos esceptuar la arista de retroceso, para la cual los ángulos de contingencia permanecen invariables; porque estos ángulos están formados por las generatrices entre sí, y estas rectas sirven precisamente de charnelas para ejecutar el desarrollo. Así por ejemplo el ángulo **AM′A′** permanecerá constante como su suplemento **MM′M″**.

(2) A menos que no queramos dejar fijo el punto de la recta situada en A′ y hacer resbalar solamente la otra estremidad sobre la curva BC; mas con esto no obtendremos sino una superficie cónica, género muy particular de las superficies desarrollables.

tracémosla un plano tangente que pase por la recta AT en el punto A de la directriz AD: entonces si construimos la recta A'B' segun la que este plano tocará al cono auxiliar, A'B' será la posicion que debe tomar la generatriz de la superficie desarrollable cuando pase por el punto A de la directriz: y las otras posiciones A''B'', A'''B'''.... se obtendrán de una manera semejante. Para justificar esta construccion basta observar que cuando la recta movible pase de la posicion A'B' á la otra infinitamente próxima A''B'', podrá considerarse que resbala sobre las tangentes A'A''T' y B'B''S', que coinciden con las verdaderas directrices en el intérvalo de los elementos A'A'', B'B'', pues estas dos tangentes están evidentemente situadas en un plano único que es el plano tangente que hemos trazado al cono auxiliar, y así las dos generatrices A'B' y A''B'' se encontrarán en un mismo plano.

175. Bastará designar una directriz para determinar completamente la superficie desarrollable, si sujetamos la recta movible á permanecer constantemente tangente á esta curva. Sea en efecto VNU una línea cualquiera fija en el espacio que es necesario elegir de doble curvatura, si no queremos encontrar un plano, construyamos las tangentes AMB, A'M'B' y A''M''B''.... para los puntos M, M', M''.... estremadamente próximos sobre la curva; estas serán otras tantas posiciones de la recta movible: la superficie, lugar de todas estas posiciones, será desarrollable. Porque las dos generatrices infinitamente próximas AMB, A'M'B' tienen de comun con la curva, la una el elemento MM', la otra el elemento M'M'': estas generatrices se cortan en el punto M', y por consecuencia están situadas en un mismo plano. Un razonamiento semejante se aplicará á las otras generatrices consecutivas; así es cierto que la superficie, lugar de todas estas tan-

gentes es desarrollable, y en el caso actual la curva directriz VNU es precisamente la arista de retroceso que tiene siempre por plano osculador los planos tangentes (número 171) de la superficie desarrollable.

Veamos otra manera de engendrar una superficie desarrollable.

F. 66. 176. Si sobre una superficie dada, que designaremos simplemente por S, trazamos una curva fija, cualquiera CND, y por los puntos próximos N, N′, N″.... tomados sobre esta línea, trazamos á la superficie los planos tangentes P, P′, P″... representados solamente por las rectas NP, N′P′... estos planos se cortarán consecutivamente segun las rectas AM, A′M′, A″M″... que se encontrarán dos á dos en un mismo plano. En efecto, las dos primeras resultan de las intersecciones del plano P′ con el precedente P y con el siguiente P″ que están evidentemente situadas la una y la otra en el plano P′; las rectas A′M′ y A″M″ están tambien las dos en el plano P″, y asi de las demas: de donde resulta que estas diversas intersecciones determinan una serie de caras planas y angulares AMA′, A′M′A″, A″M″A‴ que se aproximan á formar una superficie continua y evidentemente desarrollable, tanto mas exacta cuanto los puntos de contacto N, N′, N″... estén mas próximos sobre la curva CD. Para llegar á este límite basta imaginar que el plano P gira sobre la superficie S por un movimiento continuo, permaneciendo tangente á lo largo de la curva dada CND: entonces decimos que la superficie desarrollable en cuestion es la evolvente de las posiciones que toma el plano movible, porque en efecto las toca en cada una de ellas, porque no son otra cosa que las prolongaciones de pequeños elementos superficiales AMA′, A′M′A″.... que componen la superficie.

177. Esto no es esclusivo de la superficie que nos ocupa; y podemos decir que toda superficie desarrollable es la evolvente de las posiciones de un plano sujeto á moverse segun una ley determinada; en efecto, en el caso general hemos visto (núm. 171) que la superficie está en contacto todo lo largo de la generatriz AB, con un plano único que contiene la generatriz infinitamente próxima A′B′, y por consiguiente es la prolongacion del elemento superficial AMA′; del mismo modo, el plano tangente que sigue será la prolongacion del elemento A′M′A″, y estos dos planos se cortarán segun la recta A′M′B′; de suerte que las diversas generatrices son las intersecciones de dos planos tangentes consecutivos: podemos obtener estas rectas, ó bien engendrar la superficie desarrollable, haciendo mover un plano indefinido, de manera que tome sucesivamente las posiciones AM′A′, A′M″A″... Mas en cada superficie particular, el movimiento del plano movible deberá ser reglado por una ley determinada, es decir, *por condiciones tales que este plano no pueda tomar sino una posicion única para cada punto del espacio por que deba pasar*. F. 64.

LIBRO IV.

CAPITULO PRIMERO.

Interseccion de superficies.

PRINCIPIOS GENERALES.

178. Para dar una idea general de los procederes por que se viene á determinar la interseccion de dos superficies, supongamos que se trata de un caso muy simple, que es el en que una superficie S, sea cortada por un plano horizontal dado P: pues que la superficie se supone conocida y definida, conoceremos la forma de las generatrices (número 85), y la ley por la cual puede variar; por consiguiente podremos construir sobre los dos planos de proyeccion diversas posiciones de esta generatriz, tan numerosas y próximas como queramos. Designemos las proyecciones de estas líneas por (G, G') (G_2, G_2') (G_3, G_3'), y observaremos que el plano secante P que es perpendicular al plano vertical, corta la línea G, G' en un punto que debe estar proyectado verticalmente á la union de G' con la traza del plano P.... por consecuencia, si sobreponemos este punto á la línea G, por medio de una perpendicular á la línea de tierra, obtendremos la proyeccion horizontal m, de un punto de

la interseccion de S con P. Repitiendo la misma operacion para cada generatriz, obtendremos una serie de puntos m, m_2, m_3.... que si están muy próximos los unos á los otros, podrán fácilmente reunirse por un trazado continuo que hará conocer sobre el plano horizontal, la curva segun la que la superficie S es cortada por el plano P. En cuanto á la proyeccion vertical de esta misma curva, es evidente que se reduce en el caso actual, á la traza misma del plano secante P.

179. Consideremos ahora dos superficies cualquiera S y S′: para hallar su interseccion, cortémoslas por una série de planos horizontales P, P_2, P_3.... Cada uno de estos planos auxiliares, P por ejemplo cortará la superficie S, segun una línea m, m_2, m_3.... y la superficie S′, segun otra línea m', m'_2, m'_3.... Estas dos líneas se construirán como hemos dicho en el número precedente, y si se cortan sobre el plano horizontal en uno ó muchos puntos MN... estas serán evidentemente las proyecciones horizontales de diversos puntos de la interseccion de las superficies S y S′.

En cuanto á la proyeccion vertical, se deducirá llevando sobre las trazas del plano auxiliar P, los puntos M, N.... por perpendiculares á la línea de tierra. Si repetimos operaciones semejantes para los otros planos P_2, P_3.... obtendremos sobre cada plano de proyeccion, una série de puntos M, M_2, M_3.... N, N_2, N_3.... que será necesario reunir por un trazado continuo, distinguiendo siempre los puntos que pertenecen á un ramal de la curva, de los que hacen parte de otro ramal.

180. El método que acabamos de exponer es general y suficiente en todos los casos para obtener la interseccion de dos superficies cualesquiera S y S′, mas para mayor abundamiento, pueden usarse los planos secan-

tes P, P_2, P_3... con la direccion que queramos. Asi en cada problema será conveniente elegir los planos secantes, de manera que las secciones auxiliares sean si es posible rectas ó círculos, porque semejantes líneas se trazan fácilmente por medio de dos datos. Por ejemplo, si se trata de dos cilindros, tomaremos los planos P, P_2, paralelos á las generatrices de las dos superficies á la vez: si se propusiesen dos conos, haremos pasar todos los planos secantes por la recta que reuna las dos cúspides. Alguna vez se emplea para cortar las superficies S, S' no planos sino superficies curvas tales como las esferas concéntricas que pueden dar círculos por secciones auxiliares en las dos superficies propuestas.

181. Cuando hayamos construido las dos proyecciones de la interseccion buscada, la curva está evidentemente determinada; mas si es plana, es menester otra para manifestar mas claramente su forma y practicar su sobreposicion en el plano de proyeccion. Cuando una de las superficies es desarrollable, debemos efectuar el desarrollo de esta superficie y construir la trasformada de la interseccion, porque esta nueva curva se necesita conocer en las aplicaciones á la esteorotomía. En fin, como la determinacion de las tangentes á una curva, es un medio de diseñar con mas precision el curso de esta línea, y este conocimiento es en lo sucesivo útil en muchos casos, será necesario ejercitarse en hallarlas, tanto para la interseccion primitiva, como para su trasformada; mas como la tangente á esta última se deduce fácilmente de la tangente á la primera, nos limitaremos á dar un método general para esta última.

F. 67. **182.** Designaremos las superficies propuestas por S y S', y sea AMB su interseccion, cuya tangente es necesario hallar: pues que esta curva está situada al mismo tiempo sobre las dos superficies, su tangente MT, en un punto cualquiera M, deberá hallarse á la vez en el plano que toca la superficie S en M, y en el que toca la superficie S′ en M; *luego la tangente MT será la interseccion de los planos tangentes á las dos superficies.*

Por consecuencia, bastará construir estos dos planos por los métodos espuestos anteriormente y buscar la recta segun la que se cortarán: podremos del mismo modo limitarnos á encontrar un solo punto de esta recta, pues que el punto M está designado por la cuestion.

183. Cuando una de las superficies propuestas, por ejemplo S′, es un plano, ó bien cuando sepamos que la curva AMB es plana, aunque las dos superficies de que es la interseccion sean curvas, la regla precedente se reduce evidentemente á buscar la interseccion del solo plano tangente S con el plano S′ ó con el plano AMB.

184. Otro método: si construimos la normal MN de la superficie S para el punto M; y la normal MN′ de la superficie S′, para el mismo punto, es evidente que el plano NMN′ de estas dos rectas, se encontrará perpendicular á cada uno de los planos tangentes, y por consiguiente á su interseccion que es MT. Así la tangente á la interseccion de las dos superficies, es una recta perpendicular al plano de las dos normales de estas superficies: este plano coincide por otra parte con el plano normal (número **162**) de la curva AMB. Bastará por consiguiente construir estas dos normales con el plano que ellas determinan, y trazarle una perpendicular en el punto dado M. Este método es conveniente: **1.°** porque hay superficies cuya normal se determina de una manera mas simple que el plano tangente é independiente de este (número **147**): **2.°** porque se encuentran alguna vez puntos singulares para los que los dos planos tangentes son perpendiculares á un mismo plano de proyeccion: entonces el procedimiento del (número 182) no da resultado para la tangente de la curva proyectada sobre este plano, mientras que el método de las dos normales puede aplicarse por consecuencia de ciertas relaciones que al límite no resultan indeterminadas.

CAPITULO II.

Secciones planas.

Hallar: 1.° *la interseccion de un cilindro recto y de un plano:* 2.° *la superposicion de esta interseccion y su tangente:* 3.° *el desarrollo del cilindro y la trasformada de la interseccion con su tangente.*

F. 68. 185. Hemos dicho (número 154) que entendemos por cilindro recto un cilindro que tiene por base ó por directriz una curva plana y perpendicular á las generatrices rectilíneas de esta superficie, sin exigir que esta base sea un círculo; adoptando asi esta forma por ejemplo, razonaremos de una manera general y aplicable á toda curva. Por otra parte, como en cada problema conviene elegir los planos de proyeccion en direcciones propias para simplificar las operaciones gráficas, adoptaremos el plano de la base ABDC por plano horizontal, y elegiremos el plano vertical perpendicular al plano secante, el cual tendrá por trazas PQ y QR'.... En cuanto al cilindro, estará representado por la curva ABDC, que será el contorno aparente sobre el plano horizontal; y sobre el plano vertical el contorno aparente estará formado por las dos rectas *gg'* y *vv'*, que son evidentemente las trazas de los dos planos tangentes perpendiculares al de proyeccion (número 111). Supondremos ademas que el cilindro está terminado por los dos planos horizontales gv y $g'v'$.

186. Esto supuesto el plano PQR′ cortará al cilindro segun una curva que supuesta la situacion actual de los planos de proyeccion, se hallará evidentemente proyectada segun ABDC sobre el plano horizontal, y sobre el plano vertical segun la porcion $a'd'$ de la traza del plano secante. Asi en este caso sencillo, las proyecciones de la interseccion son conocidas inmediatamente, y no hay lugar de emplear el método general espuesto (núm. 179).

187. *Superposicion.* Para conocer la verdadera forma de la interseccion, podemos sobreponer el plano que la contiene sobre el horizontal, girando sobre PQ, pero á fin de obtener un resultado mas simétricamente dispuesto, hagamos girar el plano PQR′, alrededor de la horizontal (BC, b'), hasta que quede paralelo al plano de proyeccion. Por esta revolucion, la traza vertical QR′ caerá en la horizontal $q'b'$, y un punto cualquiera de la curva, por ejemplo (m, m') describirá un arco de círculo perpendicular al eje de rotacion, con que este arco estará proyectado verticalmente, sobre un arco igual $m'm''$ descrito del centro b' y horizontalmente sobre la recta indefinida mf, paralela á la línea de tierra. Entonces puesto que el punto m' se trasporta en m'', si proyectamos este último en m_2 sobre mf, tendremos la posicion (m'', m_2) que toma despues del giro el punto (m, m') de la curva propuesta. Operando del mismo modo para los demas puntos de la interseccion, obtendriamos los $a_2m_2f_2d_2e_2n_2$, que reunidos por un trazado continuo nos dará la línea $a_2m_2Bf_2d_2e_2Cn_2$ por la interseccion buscada en sus justas dimensiones.

188. Esta interseccion es una elipse, pues que comparándola con el círculo ABDC, se ve que para las mismas ascisas contadas sobre la recta BC, las ordenadas perpendiculares á esta línea, han aumentado todas en la razon constante de OA á $b'a'$, modificacion que hace cambiar á un círculo en una elipse. Ademas como existen dos puntos m y n de la primitiva, que tienen el uno y el otro á m' por proyeccion vertical, y que estos dos puntos se trasportan sobre una cuerda m_2n_2 evidentemente perpendicular á Oa_2, y cuyo medio está sobre esta recta. Se sigue que la línea a_2Od_2 divide en dos partes iguales y en ángulo recto, una série de cuerdas paralelas en la curva trasportada, en que a_2Od_2 es un eje de la elipse, y por consecuencia BOC es el segundo eje.

189. Busquemos la tangente de la interseccion, para un punto cualquiera (m, m'). Segun la regla general (número 182) esta recta, debe estar situada á la vez en el plano PQR′ y en el plano tangente del cilindro, que es el plano vertical mT, de que resulta inmediatamente que tiene por proyeccion mT y m'Q. Si queremos encontrar esta tangente sobre la interseccion, observaremos que el pie (T, Q) de esta recta, describe como hemos esplicado para (m, m'), un arco de círculo perpendicular á la charnela (BC, b'): de suerte que el pie de la tangente está trasportado en t, q', y puesto que el punto de contacto cae en m_2, la tangente trasportada es tm_2. Esta recta deberá tocar exactamente la curva $a_2m_2Bd_2C$.

Podemos observar que la tangente Tms á la interseccion primitiva, va á encontrar la charnela en un punto (s, b') que debe permanecer invariable durante el movimiento de rotacion; luego será menester que la recta tm_2 antes hallada, pase por el punto s.

190. *Desarrollo.* Hemos visto (número 155) que cuando desarrollamos un cilindro, la seccion recta, que en este caso es la base ABDC, resulta rectilínea sin cambiar de longitud absoluta, y que las aristas permanecen perpendiculares. Si suponemos abierto el cilindro á lo largo de la generatriz (D, vv') y trasportamos sobre una línea indefinida UU′ (F. 68′) las cuerdas Ua^2, a^2b^2, b^2c^2... correspondientes á las 1, 2; 2, 3; 3, 4... (F. 68) tan sumamente pequeñas que las podamos considerar confundidas con los arcos, tendremos en UU′ desarrollada la base circular ABDC, del cilindro, y si en los puntos V, a^2, b^2, c^2.... elevamos perpendiculares iguales en magnitud á las aristas del cilindro que limitamos por la horizontal VV′, el rectángulo UU′, VV′, nos representará el cilindro desarrollado. La trasformada de la curva interseccion, estará determinada fácilmente si recordamos que las porciones de generatrices del cilindro, comprendidas desde la interseccion á la base, deberán conservar despues del desarrollo sus longitudes primitivas; por consiguiente, si llevamos sobre las verticales del desarrollo las distancias $d'v'$= D′V=D″V′, y continuamos haciendo lo mismo con todas las generatrices, obtendremos una série de puntos que unidos nos determinarán la trasformada de la curva interseccion D′MA′M′D″. F. {68. 68′.

La tangente mT, á la curva, en la trasformada, estará determinada con solo considerar que se trata de representar una línea dada por sus proyecciones, en su magnitud efectiva. En efecto, las proyecciones de esta línea son m'Q la vertical y mT la horizontal. Tambien sabemos que despues del desarrollo no ha variado la longitud efectiva de la porcion de generatriz $m'h$ que en el desarrollo corresponde á M′h'; luego si del punto h' tomamos la proyeccion horizontal mT y la llevamos de h' á T′, la

T'M' será la tangente á la trasformada que buscamos.

191. Conviene notar que en los dos puntos (A, a') y (D, d') de la interseccion del cilindro con el plano PQR', la tangente á esta curva es paralela á la traza PQ, pues que el plano tangente del cilindro en A ó en D es paralelo á esta traza. Resulta que en cada uno de estos puntos la tangente de la seccion forma un ángulo recto con la arista del cilindro; y como este ángulo debe permanecer invariable (número 155) en el desarrollo de la superficie, será necesario que en los puntos D', A', D'', la tangente á la trasformada corte en ángulo recto las verticales V, A' y V'.

F. 69. 192. *Otra solucion* de la interseccion de un cilindro recto por un plano.

Puede suceder, que alguna circunstancia de la cuestion, impida que el plano secante sea perpendicular al vertical de proyeccion; entonces aquel tendrá por trazas dos rectas cualquiera PQ y QR', y el cilindro estará siempre representado por su base ABDF, y por las dos verticales *uu'*, *vv'* que forman su contorno aparente sobre los planos fijos. En este caso sigamos el método general del (número 179), y cortemos el cilindro y el plano dado PQR' por diversos planos horizontales, tales como K'*n'm'*: este tendrá por seccion en el plano dado, una horizontal *km*, K'*m'*, y por seccion en el cilindro una curva proyectada horizontalmente sobre su base ABD; por consecuencia, los puntos *m* y *n*, comunes á estas dos secciones auxiliares sobre el plano horizontal, proyectados sobre K'*m'*, darán dos puntos (*m*, *m'*) y (*n*, *n'*) de la interseccion pedida. Los demas se obtendrán de una manera análoga, trazando á voluntad paralelas á la línea de tierra, como (Z'*e'*, *z*E).

193. Pueden interpretarse de otro modo estas cons-

trucciones, diciendo: tírense á voluntad planos auxiliares que sean verticales y paralelos á la traza PQ, como *mk*K'. Este plano vertical cortará al plano PQR' segun la horizontal (*km*, K'*m'*), y al cilindro segun dos generatrices proyectadas horizontalmente en *n*, *m* y verticalmente en *n's*, *m'y*, cuya interseccion con K'*m'* dará dos puntos (*m*, *m'*) (*n*, *n'*) de la interseccion pedida. Este método ofrecerá la ventaja de poder encontrar directamente ciertos puntos notables que importa construir con preferencia á otros que se encuentran muy próximos.

1.° Si aplicamos el método precedente para determinar los puntos situados sobre las aristas (A, *uu'*) (D, *vv'*) que forma el contorno aparente del cilindro sobre el plano vertical, obtendremos los puntos *a'* y *d'* que separan la parte visible de la interseccion buscada, de la parte invisible, y en aquel punto la proyeccion vertical *a'b'd'c'* deberá tocar las dos rectas *uu'* y *vv'*. En efecto, la tangente de la curva en el espacio para el punto (A, *a'*) está necesariamente situada en el plano tangente del cilindro á lo largo de la arista (A, *uu'*), mas este plano es perpendicular al plano vertical, y por consecuencia la tangente en cuestion se halla proyectada sobre su traza *uu'*, la cual debe tocar la curva *a'b'd'c'*, porque anteriormente hemos demostrado (número 107) que una curva y su tangente deben ser tangentes una á otra, cuando se proyectan sobre un mismo plano.

2.° El punto mas alto y el mas bajo de la curva, es decir, aquellos en que la tangente será horizontal, se obtendrán buscando las aristas B y C, para las que el plano tangente del cilindro es paralelo á la traza PQ. En efecto, si despues de haber conducido en esta direccion la tangente BI de la base ABDC, y haber construido como hemos dicho el punto (B, *b'*) de la seccion, queremos encontrar la tangente relativa á este punto, será menester (número 182) buscar la interseccion del plano PQR′ con el plano vertical BII′ que toca al cilindro en (B, *b*′); como estos planos tienen sus trazas horizontales paralelas, su comun seccion será la horizontal I′*b*′ que es la tangente al punto *b*′: esta recta será un límite de la curva, y el otro límite la tangente al punto (C, *c*′) que será precisamente horizontal por la misma razon.

194. La tangente en un punto cualquiera (*m*, *m*′) será dada por la interseccion del plano PQR, con el plano tangente al cilindro lo largo de la arista vertical *m*; que tendrá por traza la recta *m*T, y encontrará á PQ en el punto T; de suerte que sin buscar la segunda traza de este plano tangente, es sabido que T es la traza horizontal de la tangente pedida: asi proyectando este punto sobre la línea de tierra y uniéndole con el punto de contacto, obtendremos T*m* y *t*′*m*′ por las proyecciones de la tangente.

195. El giro de la curva se efectuará haciendo girar el plano PQR′ alrededor de la traza QR′ para sobreponerlo al plano vertical, que como hemos dicho (número 31) vendrá á tomar la posicion R′QR, en este rebatimiento, la (*r*S, R′*s*) habrá venido á tomar la posicion de R′S′. En esta línea está el eje mayor de la elipse interseccion del plano dado, con el cilindro; este eje estará limitado por los dos planos tangentes que determinan los puntos mas alto y mas bajo de la curva, representados por las horizontales (IB, I′*b*′) y (*g*C, G′*c*′); por ser estas tangentes horizontales deberán ser paralelas á la traza horizontal del plano y despues del giro no dejarán de serlo á la QR, por manera que I′B′ y G′C′ determinarán el eje mayor B′C′, de la elipse. Los demas puntos se pueden determinar trazando las paralelas K′M, Z′E′... y tomando á un lado y otro del eje distancias iguales á las mitades de las cuerdas correspondientes *mn*, EF.... puesto que siendo estas líneas horizontales, estarán proyectadas horizontalmente en su longitud efectiva. Tambien pudimos haber tomado la mitad del eje mayor B'C', levantar en su medio una perpendicular y tomar á uno y otro lado la mitad de EF que seria el eje menor de la elipse, y una vez conocidos los ejes, construir la curva. Para obtener la tangente vemos, que el punto de tangencia *m*, al efectuar el giro, se habrá trasladado á M; el punto T, traza horizontal de la tangente, habrá ido á T'; por manera que MT' será la tangente á la curva despues del giro. El desarrollo de la superficie se hará como anteriormente, y supuesto abierto el cilindro por la generatriz (B, *bb'*) obtendremos la B''C''B''' por la trasformada á la curva interseccion propuesta.

Problema 2.° *Encontrar los puntos de seccion de un plano cualquiera PQR', con una curva, cuyas proyecciones son* abcde *y* a'b'c'd'e'.

196. Este problema está contenido en el precedente, *F.* 70.
porque si imaginamos el cilindro vertical que proyecta la curva dada segun *abcde*, y construimos como en el (número **193**) la proyeccion vertical *a''b''c''d''* de la interseccion de este cilindro con el plano PQR', es claro que los puntos buscados deberán encontrarse sobre esta interseccion, y como están tambien asimismo sobre la curva dada, no habrá mas que examinar si estas dos curvas se encuentran en algun punto sobre el plano vertical. Vemos que se cortan en los puntos (*m'*, *n'*) luego estos deberán ser puntos de interseccion de la curva propuesta con el plano, cuyas proyecciones horizontales serán *m* y *n*.

Problema 3.° *Dado un cilindro oblicuo de base cual-*

quiera, hallar: 1.° las proyecciones de la seccion recta de este cilindro: 2.° el giro de esta seccion: 3.° el desarrollo de la superficie y la trasformada de la curva que sirve de base, con las tangentes á estas diversas curvas.

F. 71. **197.** Sea ABCD la base del cilindro que suponemos plana, y cuyo plano adoptaremos por el horizontal de proyeccion, y sea (Ee'', $E'e^3$) la direccion de las generatrices.

Trazando las tangentes Dd'' y Bb'' á la base, paralelas á Ee'', estas serán las trazas de dos planos tangentes verticales, y por consecuencia formarán el contorno aparente del cilindro sobre el plano horizontal (núm. 111); mientras que las tangentes EE' y CC', perpendiculares á la línea de tierra, darán para el contorno aparente sobre el plano vertical, las generatrices $E'e^3$, $C'c^3$, que no son otra cosa que las trazas de dos planos tangentes perpendiculares al plano vertical. Se supone que el cilindro está limitado por los planos horizontales $E'C'$ y e^3c^3, lo que hará invisible sobre el plano horizontal todas las aristas que como Cc'' partan de la semi-circunferencia de la base DCB, y asi se manifestará de una manera sensible, la posicion particular de las generatrices.

Para aclarar mejor la forma de la superficie, consideraremos todas las aristas que tengamos necesidad de emplear, no como líneas auxiliares, sino como generatrices que, punteadas unas y otras seguidas, nos facilitarán distinguir las partes superiores ó anteriores de las partes opuestas de las superficies.

198. Puesto que la seccion recta de un cilindro es la curva trazada sobre esta superficie por un plano secante perpendicular á las generatrices, y que ademas todas las secciones paralelas hechas en un cilindro son idénticas, tracemos por un punto cualquiera Q de la línea de tierra las trazas PQ y QR respectivamente perpendiculares á las proyecciones de las generatrices, y busquemos la interseccion de la superficie con el plano PQR'. Para obtener esta interseccion, cortaremos las dos superficies por diversos planos auxiliares que sean verticales y paralelos á las aristas del cilindro, porque asi no tendremos que comparar mas que secciones rectilíneas. Por otra parte, á fin de simplificar la operacion posterior del desarrollo, convendrá conducir estos planos por los puntos de la base que estén dos á dos sobre cuerdas que como las EC y GM sean paralelas á la traza PQ. Admitidas todas estas disposiciones podemos operar de dos modos.

199. *Primer método.* Sean DI é II' las trazas de uno de los planos secantes verticales que cortan al cilindro segun generatrices; la traza horizontal DI de este plano encuentra en K á la horizontal del que es perpendicular al cilindro, y en I' se encuentran las verticales: por consiguiente, la proyeccion vertical de la comun seccion estará proyectada segun I'*k'*; pero como convenga determinar esta línea con toda exactitud, en razon á que para encontrar las comunes secciones de los demas planos, bastará trazar paralelas á esta recta, buscaremos un punto de la comun seccion tal como el proyectado horizontalmente en *s*, para lo cual imaginaremos por este punto una horizontal *sr* paralela á la traza PQ. Esta línea que estará necesariamente contenida en el plano PQR' tendrá por proyeccion vertical la *r's'*, paralela á la línea de tierra; si *s*, *s'* es punto de la comun seccion, estará en una perpendicular á la línea de tierra y en prolongacion de I'*k'*.

Asegurados de que *k's'* es la proyeccion vertical de la comun seccion del plano perpendicular al cilindro con el vertical DI, puesto que la proyeccion vertical D'd^3 de la arista DI que contiene el plano, encuentra á $k's'$ en d', este será un punto de la comun seccion del cilindro con el plano PQR', que horizontalmente estará en d.

Si tomamos en consideracion el plano vertical que contiene la generatriz Aa''; como las trazas horizontales de los dos planos se cortan en Y, yc' paralela á $k's'$ deberá ser la proyeccion de la comun seccion del plano Aa'', con el PQR'. El plano vertical Aa'' corta la base del cilindro en los puntos A y C que corresponderán á dos generatrices (Aa'', $A'a^3$) y (Cc'', $C'c^3$): las proyecciones verticales $A'a^3$ y $C'c^3$ de estas generatrices, encuentran en a' y c' á la comun seccion hallada; luego estos serán puntos de la comun seccion del plano con el cilindro, que proyectados horizontalmente nos darán los (a, a') y (c, c'). Aplicando el mismo procedimiento para diferentes planos, podiamos obtener cuantos puntos se creyesen necesarios para fijar con toda exactitud la curva interseccion ($abcde$) ($a'b'c'd'e'$)

200. *Segundo método*. Sea ACY un plano vertical paralelo á las aristas del cilindro, el cual corta esta superficie segun dos generatrices que parten de los puntos A y C, y al plano PQR', segun una recta que parte del punto Y y se encuentra perpendicular á estas generatrices; pues si hacemos girar este plano secante alrededor de AY, llevando la altura y, y' de Y á Z'', la recta AZ'' y su paralela Cc^2 serán las posiciones nuevas de las generatrices, mientras que la perpendicular Yc^2a^2 bajada sobre estas líneas harán conocer los trasportados a^2 y c^2 de dos puntos de la curva buscada. Para otro plano secante MNV, bastará trazar Mm^2 y Nn^2 paralelamente á AZ'', y la recta Vm^2 paralela á Ya^2 dará ademas m^2 y n^2 pertenecientes á dos nuevos puntos de la seccion recta del cilindro.

Este procedimiento facilita el poder determinar la curva interseccion en sus justas dimensiones, sin necesidad de conocer sus proyecciones, con solo rebatir al plano horizontal, y sobre las generatrices correspondientes, los puntos de interseccion hallados; consiguiéndose de este modo el objeto principal de facilitar el desarrollo del cilindro.

Pero si quisiésemos obtener las proyecciones de la curva interseccion, no habria mas que llevar los puntos a^2, b^2, c^2.... por perpendiculares á la charnela AY, sobre las generatrices correspondientes, y de la proyeccion horizontal *abcd* deduciriamos la vertical $a'b'c'd'$...

201. *Hallar los puntos notables que conviene construir con preferencia á otros.*

1.° Si aplicamos uno de los métodos precedentes á las aristas Bb'' y Dd'' que forman el contorno aparente sobre el plano horizontal, hallaremos los puntos (b, b') y (d, d') en los que la curva deberá tocar las aristas en cuestion; pero solo en proyeccion horizontal limitará su contorno. En efecto, aunque en el espacio sean diferentes la tangente de esta curva y la arista del cilindro, como ambas á dos están contenidas en el plano vertical cuya traza es Bb'', se sigue que deberán coincidir en proyeccion horizontal; luego la tangente se encuentra proyectada sobre Bb'', y por consecuencia (número 107) esta línea deberá tocar la proyeccion horizontal de la curva.

Observaremos, por otra parte, que los puntos *b* y *d* están situados sobre el contorno aparente de la superficie relativamente al plano horizontal, y formarán los límites que separan la parte visible *bad* de la invisible *bcd*, para el observador que considera esta proyeccion.

2.° Aplicando este procedimiento general para la determinacion de los puntos situados sobre la $E'e^3$ y $C'c^3$ que forman el contorno aparente sobre el plano vertical, obtendremos los puntos (e, e') y (c, c') en los que la proyeccion vertical de la curva tocará estas dos rectas. Este contacto resulta ademas de que la tangente de la curva en el espacio y la arista del cilindro, están las dos situadas en un plano perpendicular; y por consecuencia, la proyeccion vertical de la tangente coincide con la de las aristas del cilindro. Por otra parte, los puntos e' y c' serán en este caso los límites que separan la rama visible $e'b'c'$, de la invisible $e'd'c'$, para el observador que considera la proyeccion vertical.

3.° Para obtener el punto mas alto y mas bajo de la curva, es decir, aquellos en que la tangente es horizontal, es necesario buscar sobre la base ABCD, cualquiera que sea su forma, los puntos A y C á que la tangente es paralela á la traza horizontal PQ del plano que corta al cilindro. Si construimos por el proceder general, el punto (a, a') de la interseccion que estará situado sobre la arista $A'a^3$, la tangente en este punto será horizontal: en efecto, esta tangente debe ser (número 182) la interseccion del plano PQR con el plano tangente á lo largo de la arista $A'a^3$; mas por la hipótesis, la traza horizontal Aθ de este último plano, es paralela á PQ; estos dos planos no podrán cortarse sino por una recta paralela á PQ, es decir, horizontal. Lo mismo será para la arista Cc'', $C'c^3$ que dará un punto (c, c') á que la tangente de la interseccion será tambien horizontal. Estos dos puntos es útil determinarlos para trazar la curva sobre los planos de proyeccion con mas facilidad y exactitud.

202. *La tangente de la interseccion para un punto cualquiera* (m, m'). Este punto se encuentra sobre la

arista Mm''; y el plano tangente del cilindro á lo largo de esta generatriz, tiene por traza horizontal la tangente MT á la base; si prolongamos esta recta hasta que corte á PQ en T, este será un punto de la interseccion del plano tangente con el plano de la curva interseccion, que no es otra cosa que la traza horizontal de la tangente (número 182). Uniendo el punto de contacto (m, m'), ya conocido, con el punto T, que se proyecta verticalmente en T′ sobre la línea de tierra, obtendremos Tm y $T'm'$ por las proyecciones de la tangente pedida.

203. *Giro.* Para obtener la interseccion en su forma verdadera, sobrepongamos el plano PQR′, sobre el plano horizontal, haciendo girar al primero alrededor de su traza PQ; despues busquemos donde cae el punto (m, m') de la curva. Este punto no saldrá del plano vertical MV, perpendicular á la charnela, y como su mas corta distancia á esta recta, es evidentemente la línea $(mV, m'V'')$, no hay mas que apreciar por el proceder general del (número 20) la verdadera longitud de esta línea y llevarla de V en μ, y este último punto será el trasportado (m, m'). Mas observaremos que si empleamos el método del (número 200), conoceremos inmediatamente la verdadera longitud buscada que será Vm^2; de suerte que describiendo con esta recta por radio, un arco de círculo, irá á cortar la línea VM en el punto pedido μ. Del mismo modo las aristas del círculo descrito con el radio Ya^2 é Yc^2 darán los puntos α y γ; y por operaciones semejantes, obtendrémos la curva $\alpha\beta\gamma\delta\mu$ por el giro de la secion recta del cilindro.

La tangente $(mT, m'T')$ á la curva primitiva, tiene su pie T situado sobre la charnela PQ: este punto permanecerá invariable durante el movimiento de rotacion, y como el punto de contacto (m, m') está trasportado en μ, se sigue que $T\mu$ es la tangente trasportada, línea que deberá tocar exactamente la curva $\alpha\beta\gamma\delta\mu$.... en el punto μ.

F. {71. 72. **204.** *Desarrollo.* Hemos demostrado (número 155) que entre todas las curvas planas trazadas sobre un cilindro cualquiera, la seccion recta es la sola que resulta rectilínea despues del desarrollo de la superficie, por consecuencia, no basta conocer la base ABCD del cilindro para estar en estado del desarrollo, sino que es necesario buscar la seccion recta (*adcb*, *a'd'c'b'*), y construir el giro $\alpha\beta\gamma\delta\mu$ de esta curva, á fin de poder medir cada uno de los arcos $\alpha\mu$.... y llevar sus longitudes seguidas las unas de las otras, sobre una misma recta; asi suponiendo que abrimos el cilindro á lo largo de la arista Aa'', tomaremos sobre una recta indefinida XY las distancias $\alpha_2\lambda_2=\alpha\mu$; $\lambda_2\mu_2=\mu\delta$.... con lo que tendremos en $d''a''$, desarrollada la seccion recta *abcd*.

Si por todos los puntos de division elevamos perpendiculares indefinidas sobre la recta XY, estas serán (número 155) las posiciones de las generatrices despues del desarrollo. En seguida para obtener la curva segun lo que es trasformada por esta operacion la base inferior ABCD, será necesario llevar sobre estas perpendiculares las longitudes de las diversas porciones de generatrices, comprendidas entre esta base y la seccion recta, las que tienen por proyeccion (A*a*, A'*a'*) (M*m*, M'*m'*).... que pueden ser valuadas por el proceder general del (número 20); mas el método del (número 200) ofrecerá una ventaja sensible porque da desde luego las magnitudes Aa^2, Mm^2.... en sus justas dimensiones, y podemos llevarlas sobre la XY en (α_2A_2) (λ_2L_2) (μ_2M_2) y la curva $A_2L_2M_2B_2C_2D_2$.... que pasará por las estremidades de estas rectas, será la trasformada de la base ALMBCDA.

205. La trasformada de la base superior se obtiene generalmente, llevando sobre las perpendiculares á XY, y por cima de esta línea, distancias iguales á las porciones de generatrices comprendidas entre la seccion recta y la curva $a''m''b''c''$... mas en este caso que las dos bases son paralelas, las longitudes de las generatrices totales son constantes, de suerte que bastará valuar la dimension de una sola arista, tal como (Aa'', $A'a^3$) que dará por el giro una estension AA_3, y llevar esta dimension constante sobre las diversas perpendiculares á XY, partiendo de los puntos $A_2L_2M_2$.... y obtendremos por trasformada de la base superior, una curva $A_4L_4M_4C_4A_4$ idéntica con $A_2L_2M_2C_2A_3$....

La tangente á la trasformada en el punto (m, m') y las correspondientes al punto mas alto y mas bajo, se determinan como queda espuesto al (número 190).

Problema 4.° Dado un cono recto y un plano, hallar: 1.° las proyecciones de sus intersecciones: 2.° el giro de esta curva: 3.° el desarrollo del cono y de la trasformada de la interseccion, con las tangentes á estas diversas curvas.

206. Siendo un cono recto una superficie de revolucion engendrada por una recta que encuentra al eje, toda seccion perpendicular á esta última, será un círculo ACBD, que tomaremos por la directriz y la base del cono que adoptaremos por plano horizontal de proyeccion. Proyectado en (s, s') el cúspide, el contorno aparente del cono sobre el plano vertical, estará formado (número 111) por las dos aristas $s'a'$, $s'b'$ que corresponden á los planos tangentes (A, $a's'$;) (B, $b's'$,) perpendiculares al plano vertical; y si por otra parte admitimos, para simplificar un poco las operaciones gráficas, que el plano secante sea perpendicular al vertical de proyeccion, sus trazas podrán ser PQ y QR'. *F.* 73.

207. Esto supuesto, cortemos el plano PQR′ y el cono, por planos auxiliares que pasen por el cúspide (s, s'), y que sean ademas perpendiculares al plano vertical.

Uno de estos planos auxiliares tendrá por traza una recta $s'f'$, trazada por el punto s' en una direccion arbitraria, y una recta f'F, perpendicular á la línea de tierra. Como esta última traza encuentra la base ACBD del cono, en dos puntos F é Y, concluimos que las aristas sF y sY son las secciones producidas en el cono, por el plano ausiliar $s'f'$F; mas este corta al plano PQR′ segun una recta necesariamente perpendicular al plano vertical, y proyectada en (M′, xnm), cuyo encuentro con las dos aristas dará sobre el plano horizontal dos puntos m y n de la curva pedida, los cuales estarán proyectados verticalmente en M′.

Repitiendo estas construcciones para otros planos auxiliares, obtendremos los puntos de la interseccion tan numerosos como queramos, mas para la operacion ulterior del desarrollo, será útil hacer pasar las trazas horizontales paralelas á la traza horizontal del plano secante, y ademas que dividan la circunferencia en arcos iguales y tan pequeños que se confundan con sus cuerdas. Entre estos planos se encontrarán los A, $a's'$ y B, $b's'$, en que cada uno dará un punto único (g, G′) y (h, H′): estos serán los dos vértices de la curva, porque vemos fácilmente que la recta (gh, GH′) dividirá en dos partes iguales y en ángulo recto, todas las cuerdas paralelas á mn; de suerte que esta recta es un eje de la seccion cónica. Esta curva que en el caso actual es una elipse, tiene por proyeccion $gmhn$ y G′H′.

208. Este método no podrá servir para encontrar los puntos de interseccion situados sobre las dos aristas CD y $c's'$ que se proyectan verticalmente segun el eje

del cono, porque las secciones auxiliares hechas en estas superficies y en el plano PQR′, se confunden todas sobre el plano horizontal con la recta C*s*D. Mas si trazamos por el punto I un plano secante horizontal, cortará al cono segun un círculo del radio (I′*v*′=*sv*, y al plano dado segun una recta (I′, CD); por consecuencia, el encuentro de esta línea con el círculo del radio *sv* sobre el plano horizontal, dará los puntos *i* y *j*.

Este segundo proceder pudo haberse empleado para encontrar los otros puntos de la interseccion del cono con el plano PQR por ser mas exacto que el primer método, porque en él, la interseccion de las generatrices con las trazas horizontales de los planos secantes, se verifica por ángulos muy agudos, lo que ofrece poca exactitud para determinar el punto de interseccion.

209. La tangente en un punto cualquiera (*m*, M′) de la curva, es (número **182**) la interseccion del plano PQR′ con el plano tangente al cono, lo largo de la arista *sm*F, y puesto que este último tiene por traza horizontal la tangente FT á la base ACBD, el punto T en que se cortan las rectas FT y PQ, es un punto de la tangente buscada, que es la traza horizontal; y en fin, esta tangente es la recta (T*m*, QM′).

210. *Giro*. Hagamos girar el plano PQR′ alrededor de su traza QR′ para sobreponerlo al plano vertical. En este movimiento, la recta (*mnx*, M′) evidentemente perpendicular á la charnela, permanecerá en ángulo recto sobre esta traza y tomará la posicion M′M, llevando sobre esta última línea las distancias M′M=*xm*, M′N=*xn*, obtendremos los puntos M y N por los correspondientes de *m* y *n*. Todos los otros puntos se encuentran semejantemente, y la seccion en su verdadera estension es GMHN. Por consecuencia de las consideraciones espuestas veremos fácilmente que el pie T de la tangente T*m*, se trasporta á una distancia Q*t*=QT, sobre una perpendicular á la charnela QR′; asi uniendo los puntos *t* y M tendremos la recta *t*M que deberá tocar en M la curva sobrepuesta GMHN.

211. *Desarrollo.* Sabemos (número 163), que una superficie cónica cualquiera es desarrollable, y que en esta trasformacion, las generatrices ó porciones cualquiera de estas rectas, no cambian de longitud. Puesto que el cono es recto, las aristas comprendidas desde el cúspide á la base serán iguales, y es evidente, que las estremidades de estas rectas, se hallarán situadas despues del desarrollo sobre una circunferencia de círculo que tendrá por centro el cúspide del cono y un radio igual á *s′a′*. Asi elijamos sobre el plano en que queremos eje-
F. 74. cutar el desarrollo, un punto arbitrario S y con un radio SA′=*s′a′*, describiremos un círculo sobre el que tomaremos un arco A′B′A″ que sea la suma de elementos lineales, en que suponemos dividida la circunferencia de la base, tomados á continuacion unos de otros, y el sector S, A′B′A″, representará exactamente la hoja inferior del cono desarrollado sobre el plano que hemos elegido. En cuanto á la hoja superior hemos hecho abstraccion porque no encuentra al plano PQR′.

212. Para obtener la trasformada de la interseccion (G″L″M″H″G‴) y admitiendo que el cono ha sido abierto á lo largo de la arista (*s*A, *s′a′*) (Fig. 73), tomemos sobre la circunferencia A′B′A″ (Fig. 74) que es la trasformada de la base ACBC..... los arcos A′K′=AK, K′E″=KE.... despues tiremos los radios SA′, SK′, SE″.... sobre los que será necesario llevar las longitudes respectivamente iguales á las porciones de las generatrices comprendidas entre el cúspide y los diversos puntos de la curva (gmh, $G'H'$); y si consideramos por ejemplo el punto (m, M') situado sobre la generatriz (sF, $s'f'$) y hacemos girar esta recta alrededor del eje, hasta que sea paralela al plano vertical, es evidente irá á coincidir con las aristas (sA, $s'a'$), mientras que el punto m' permanecerá sobre una horizontal, y se trasportará en μ, entonces $s'\mu$, será la verdadera longitud de la recta primitiva (sm, $s'M'$). Asi despues de haber trazado por todos los puntos $L'M'I'$... las horizontales, será necesario llevar sobre los radios del desarrollo, las distancias $SG''=s'G'$, $SL''=s'\lambda$... y la curva $G''L''M''H''G'''$ será la trasformada de la seccion hecha en el cono por el plano dado PQR'.

213. La tangente á la trasformada, se obtendrá con solo considerar que el punto de tangencia (m, m') se habrá trasladado á M'', que la tangente TF permanecerá tangente á la trasformada en F', y que la estension TF no habrá variado; por consiguiente, uniendo T'' con M'', $T''M''$ será la tangente á la trasformada.

214. *Caso que la seccion cónica es una hipérbola.* Sea ACBD, la base del cono recto, y $as'b'$, $bs'a'$ las aristas que forman el contorno aparente de esta superficie sobre el plano vertical: nos haremos cargo de las dos hojas, suponiéndolas terminadas por dos secciones horizontales ab, $a'b'$, que se hallan igualmente distantes del cúspide, y que por consecuencia dará lugar á dos círculos proyectados el uno y el otro sobre ACBD. En cuanto al plano secante, dispongámosle de manera que corte las dos hojas del cono; y admitiendo siempre que el plano vertical le es perpendicular, sus trazas serán PQ y QR'. *F.* 75.

215. La construccion de la curva de interseccion, podrá efectuarse como anteriormente por medio de planos auxiliares trazados por el cúspide perpendicular-

mente al plano vertical; mas por las razones espuestas (número 208) será mas exacto emplear planos horizontales. Sea pues $\mu'\gamma'$ uno de estos planos que corta al cono segun un círculo proyectado sobre $\mu m\gamma n$ y al plano dado PQR' segun una recta (M', xnm); por consecuencia, los puntos m y n, comunes á estas dos secciones sobre el plano horizontal, pertenecen á la curva pedida, en que una de sus ramas es (PmgnI, QG'). La otra rama (RlhkV, H'R') se construirá del mismo modo, y podremos emplear una seccion $\delta'\lambda'=\mu\gamma$ que dará dos puntos (l, L') y (k, L') proyectados horizontalmente sobre el círculo $\mu m\gamma n$. No repetimos lo que hemos dicho en el problema precedente sobre lós cúspides y la construccion de la tangente por simplificar y por pasar á examinar un caso particular del en que estamos.

216. Cuando una curva admite una rama indefinida y alejamos el punto de contacto de una tangente, este límite de las posiciones de la tangente, se nombra asíntota y enunciamos esta propiedad de una manera abreviada, diciendo: *que la asíntota de una curva es la tangente para un punto de contacto infinitamente lejano.*

217. Esto supuesto, propongamos construir las asíntotas de la seccion hecha en el cono por el plano PQR'. El punto de contacto de una tangente de esta especie, debe hallarse á una distancia infinita, por consiguiente deberán encontrarse necesariamente sobre una generatriz paralela al plano secante; si pues por el cúspide y paralelamente á PQR' trazamos un plano $s'\alpha'$, $\alpha'\alpha$, cortará al cono segun las aristas $s\alpha$ y $s\delta$, estas dos líneas serán las que contengan los puntos de contacto de las asíntotas. Construyamos la primera y recordemos que el plano que sea tangente á lo largo de la generatriz $s\alpha$, tendrá por traza horizontal $\alpha\theta$ á la base, luego la asíntota que debe encontrarse (número 182) en la interseccion del plano tangente $\alpha\theta$ con el plano PQR′ pasará por el punto θ en que se encuentran sus trazas, y $\theta\omega$ será la asíntota paralela á $s\alpha$, puesto que estos dos planos son paralelos á esta generatriz.

Del mismo modo construiríamos la otra asíntota $\varphi\omega$ paralela á la arista $s\delta$ que deberán cortarse en el punto ω.

218. Si aplicamos el método precedente al caso de una seccion parabólica, lo que exigirá que el plano PQR′ sea paralelo á una generatriz (sA, $s'a$) por ejemplo, tendremos que las dos aristas $s\alpha$ y $s\delta$ se confundirán con sA, de suerte que esta será la única generatriz del cono paralela al plano secante PQR′, la seccion ofrecerá una sola rama indefinida, pero no admitirá asíntotas, porque el plano PQR′ y el plano tangente á lo largo de sA, que deberian dar esta tangente por su interseccion, serán evidentemente paralelos entre sí.

219. *Giro.* Esta operacion se efectuará como en el (número 210) llevando sobre cada recta perpendicular á la traza vertical QR′ las M′M=Xm y M′N=Xn. En cuanto á las asíntotas trasportaremos de una manera semejante sus pies θ y φ en θ' y φ', despues uniremos estos últimos puntos con el centro (ω, ω') sobrepuesto en ω''.

220. *Desarrollo.* Recordando los principios enunciados al (número 211), será menester describir de un punto arbitrario S y con un radio igual á la apotema $s'a$, un círculo sobre el cual tomaremos un arco B″A″B‴ que esté con la circunferencia total en la razon de sA á $s'a$: y el sector SB″A″B‴ representará el desarrollo de la hoja inferior del cono, suponiendo que hemos abierto esta superficie lo largo de la arista (BsA, $bs'a'$). Mas como la hoja superior se desarrolla al mismo tiempo que la primera y por movimiento contrario alrededor del cúspide F. {75. 76.

que pudo suponerse inmóvil, esta segunda hoja aplanada vendrá á ocupar un sector $Sa'''b''a''$ igual al precedente, y cuyos radios estremos serán las prolongaciones de SB″ y de SB‴. Para hacer mas sensible la distribucion de estos dos sectores, hemos supuesto que la hoja superior está terminada por un círculo $a_2b_2a_3$ de un radio un poco menor que SB″: dejando de puntos la base superior del cono, para que quede visible la curva interseccion de la rama inferior en el desarrollo.

221. Esto supuesto, sobre el radio SA″ que divide en dos partes iguales al primer sector, tomaremos la distancia $SG''=s'G'$, y el punto G″ será la posicion del cúspide (g, G′). A continuacion por un punto cualquiera (m, M′) de la curva, trazaremos la generatriz smF, cuya posicion S″F″ sobre el desarrollo se obtendrá tomando el arco $A''F''=AF$; y como la verdadera distancia del cúspide al punto (m, M′) es igual á $s'\mu'$ (número 211) si tomamos una longitud $SM''=s'\mu'$, el punto M″ será la posicion actual de (m, M′). Los otros puntos se determinarán de una manera semejante y la trasformada de la rama inferior de la seccion cónica será P″M″G″N″I″.

En cuanto á la otra rama estará dividida en dos partes separadas, porque el cúspide (h, H′) está situado sobre la generatriz $bs'a'$ segun la que hemos abierto el cono cuya arista se trasporta en Sa'' de una parte, y de la otra Sa'''. Llevaremos pues sobre estas últimas rectas dos distancias SH‴ y SH″ iguales á $s'H'$ y los puntos H″, H‴, serán las posiciones actuales del punto H′. Por un punto cualquiera (l, L′) de esta rama, tiraremos la generatriz slC, cuya posicion SC″ sobre el desarrollo se encontrará tomando el arco $a''C''=AC$ y sobre el radio SC″ restará llevar una longitud $SL''=s'\lambda'$ que es la verdadera distancia del cúspide al punto (l, L′). Por operaciones análogas hallaremos que la seccion hecha en la hoja superior del cono tiene por trasformada las dos ramas H″L″R″ y H‴K″V″, que deben cortar en ángulo recto los radios S*a*″ y S*a*‴.

Problema 5.º Hallar la interseccion de un cono cualquiera por un plano, el desarrollo de la superficie y la trasformada de la interseccion.

222. Cualquiera que sea el cono en cuestion en que suponemos conocida la traza horizontal, pues que la sabremos construir prolongando las aristas hasta el plano fijo, no habrá mas que cortar esta superficie y el plano dado, por una série de planos auxiliares trazados todos por el cúspide, y elegirlos paralelos á la traza horizontal del plano secante: cada plano auxiliar producirá en las dos superficies secciones rectilíneas fáciles de encontrar, y cuyos puntos de encuentro pertenecerán á la curva pedida. No nos parece necesario presentar ejemplos que el lector podrá proponerse, con tanta mas razon, cuanto que habrá casos de construccion análogos en cuestiones mas generales.

223. En cuanto al desarrollo de la superficie cónica, convendrá dividir la base en partes muy pequeñas que puedan confundirse con sus cuerdas: uniendo una de estas cuerdas y las dos aristas que tocan sus estremidades, podremos formar con estas tres rectas y sobre un punto cualquiera un triángulo que representará un elemento superficial del cono: á continuacion trazaremos otro triángulo que tendrá un lado comun con el primero; y continuando de esta suerte obtendremos todos los elementos del cono estendidos sobre un plano, lo que dará bien á conocer el desarrollo de esta superficie.

Esta marcha, aunque buena en teoría, ofrecerá poca exactitud en la práctica, si las operaciones no se hacen con mucho cuidado, porque es necesario construir una série de triángulos en que un ángulo es estremadamente pequeño con relacion á los otros, y los errores parciales podrán aumentarse. Será mas ventajoso sin duda, conocer anteriormente sobre el desarrollo una línea recta ó circular, sobre la que no quedará mas que tomar las aristas determinadas para fijar la posicion nueva de las generatrices.

F. 59. *Construir la interseccion de un plano con una superficie de revolucion.*

224. Tomemos por ejemplo el *toro,* de que hemos hablado (número **149**), y cuyo meridiano es el círculo ($ac, a'b'c'b''a'$) que gira alrededor de la vertical ($o, o''z'$) situada en su plano; despues busquemos la interseccion de esta superficie con el plano $m'T'T$ que le es tangente en el punto (m, m') de la hoja interior, porque hemos notado anteriormente (número **149**) que los planos tangentes á esta hoja deben cortar la superficie.

A este fin, emplearemos planos horizontales; y supongamos que la traza vertical de uno de estos planos, sea $f'k'n'$ que corta al toro segun dos círculos cuyos radios son $on=i'n'$ y $om=i'k'=v'm'$ mientras que su interseccion con el plano $m'T'T$ es la línea ($ff''f'''f^{iv}, f'$) perpendicular al plano vertical, cuyos cuatro puntos $ff''f^{iv}f'''$, f', en que esta recta encuentra los dos círculos, pertenecen á la curva pedida. Los demas puntos se encontrarán de una manera semejante: mas cuando lleguemos á los paralelos estremos $d'b'$ y $g'b''$, no obtendremos para cada plano mas que dos puntos g y g'' ó h y h''; resultando por proyeccion de la curva la ($mhefgf''e''mh''e'''f'''g''f^{iv}e^{iv}m, g'h'$.)

CAPITULO III.

Interseccion de dos superficies curvas.

225. Sea ABGKH la base ó traza de un cilindro y (AZ, A′Z′) una de las generatrices: sean VLMYI y (V*v*, V′*v*′) los datos análogos del segundo cilindro; y por lo dicho (número **111**) fácilmente deduciremos los contornos de ambos cilindros en proyeccion horizontal y vertical. Para obtener su interseccion, haremos uso de planos secantes paralelos á la vez á las generatrices de uno y otro cilindro, que producirán en las dos superficies secciones evidentemente rectilíneas. A este fin, por un punto arbitrario (Z, Z′) de una generatriz cualquiera (AZ, A′Z′) de uno de los cilindros, trazaremos una paralela (ZR, Z′R′) á las generatrices del otro cilindro, y construiremos la traza RA del plano que pasa por estas dos rectas: todas las líneas que hagamos pasar paralelas á esta, podrán considerarse como las trazas horizontales de otros tantos planos que cortarán á los cilindros segun generatrices. *F.* 77.

226. Tomando en consideracion el plano secante RA, vemos que corta la base del primer cilindro en los puntos Y, V á que corresponderán las generatrices V*v* é Y*y*, y al segundo cilindro en A y D á que corresponderán las A*a* y D*d*: como estas generatrices están en un mismo plano, se habrán de cortar, y los puntos *a*α*d*λ en que se cortan, serán puntos de interseccion de los dos cilindros. Para obtener las proyecciones verticales de estos puntos, bastará proyectar sobre la línea de tierra los pies V, Y, A, D, de las generatrices, construir estas en la proyeccion vertical y los puntos en que se corten serán las proyecciones verticales $a'\alpha'd'\gamma'$ de los puntos de interseccion: tambien se han podido determinar únicamente las proyecciones verticales de las generatrices de uno de los cilindros, y sobre ellas proyectar las proyecciones horizontales de los puntos, puesto que sabemos (núm. 8) que se han de encontrar en una perpendicular á la línea de tierra, y ademas han de pertenecer á las generatrices. Del mismo modo se procederá para otros planos secantes paralelos á AR.

227. *Puntos sobre los planos limitados.* Si trazamos paralelamente á RA las rectas MNB y GHI que sean tangentes á una de las bases y secantes á la otra, estas serán las trazas de los planos que limitarán la curva interseccion, porque fuera de los límites de estos planos, todos los demas que puedan trazarse no cortarán mas que uno de los cilindros. Si aplicamos el método precedente para el plano MNB obtendremos los puntos (δ, δ') (b, b') por las proyecciones de la comun seccion de la generatriz B con $(Mm, M'm')$ $(Nn, N'n')$ que habrán de ser tangentes á la curva interseccion, puesto que se hallan contenidas en el plano tangente al cilindro en el punto B (número 107).

Las mismas consideraciones son aplicables al plano GHI en que la generatriz I resultará tangente á la curva interseccion.

228. *Puntos sobre el contorno aparente.* Los puntos de las bases á que pertenecen las generatrices que determinan el contorno en proyeccion horizontal, son los QX en el primero y Kk en el segundo, haciendo pasar por estos puntos planos paralelos á RA siguiendo el procedimiento espuesto, obtendremos los puntos de la curva que deben estar sobre el contorno del cilindro en proyeccion horizontal. Para encontrar los que en proyec-

cion vertical deben estar sobre el contorno, se harán pasar del mismo modo planos paralelos á RA por los puntos G, T y U, V que son los que determinan el contorno en proyeccion vertical.

229. *La tangente á la curva interseccion* en un punto *t*, por ejemplo, se determina fácilmente si consideramos que por este punto habrá de pasar una generatriz de cada cilindro, que la tangente á la curva habrá de ser la interseccion de los planos tangentes á los dos cilindros que contendrán respectivamente la generatriz que pasa por el punto; con que si por lo dicho (número **107**) trazamos las tangentes $T\theta$ y S_θ á las bases de ambos cilindros, el punto en que estas trazas se corten, será la traza de la tangente y *ωt*, la tangente que se pide.

Interseccion de dos superficies cónicas.

230. Sea (*s*, *s'*) el cúspide del primer cono, y AD *F.* 78.
la curva que le sirve de base sobre el plano horizontal, y (*t*, *t'*), GE, los datos análogos para el segundo cono: trazando á las bases las tangentes perpendiculares á la línea de tierra, obtendremos las rectas *s'a'* y *s'd'*; *t'g'* y *t'e'* por los contornos aparentes de estas dos superficies sobre el plano vertical. En cuanto al plano horizontal no hay otros límites que las trazas *s*K y *s*F, porque el cono *t*, tiene su cúspide dentro de la base, y es imposible trazar á esta curva las tangentes que pasen por el punto *t* (número **124**), lo que seria necesario para obtener los planos tangentes verticales. Haremos abstraccion de las hojas superiores de los dos conos, á fin de no hacer invisibles sobre el plano horizontal, las ramas de interseccion que provendrán de

las hojas inferiores, y que deben fijar especialmente nuestra atencion.

231. Para obtener la interseccion de estos dos conos, emplearemos diversos planos secantes, dirigidos todos segun la recta (st, $s't'$) que une los dos cúspides, porque estos planos no producirán en las dos superficies sino secciones rectilíneas, fáciles de construir, y por otra parte, sus trazas horizontales deberán evidentemente pasar por el punto R, R'. Esto supuesto el plano que tenga por traza una cuerda cualquiera RMFH cortará el cono t, segun las aristas tM y tH, y al cono s segun las aristas sF y sH. La Mt encuentra á las sF y Hs en los puntos l y n, cuyos puntos pertenecerán á la proyeccion horizontal de la interseccion pedida. Para encontrar sus correspondientes verticales, bastará determinar las proyecciones verticales de las generatrices sF, sH y tM y los puntos en que esta corte á las otras dos, serán puntos de la comun seccion. Como estos puntos deben encontrarse en una perpendicular á la línea de tierra, obtenidas las horizontales, podremos deducir las verticales con solo determinar las generatrices de uno de los conos, y proyectar los puntos sobre estas generatrices.

Operaremos de una manera semejante, con otras rectas que partan del punto R; pero recomendamos principiar por determinar los diversos puntos naturales de que vamos á hablar, porque estos son esenciales, y una vez fijas sus posiciones, será fácil proporcionar el número de planos intermedios á los intérvalos que quedarán entre los puntos ya obtenidos.

Puntos sobre los planos limitados.

232. Si la traza R de la línea (st, $s't'$) no está situada por delante de las dos bases, podremos trazar de este punto dos rectas RPQ y RUV que cada una sea á la vez tangente á una de las bases, y secante con relacion á la otra: estas rectas serán las trazas de los planos secantes limitados, porque vemos que todo plano trazado por los dos cúspides, fuera del espacio angular VRQ, no encontrará mas que un solo cono, y por consiguiente, no podrá contener ningun punto de su interseccion. Por otra parte, si aplicamos al plano limitado RPQ el método general de construccion, indicado en el número precedente, obtendremos el punto (m, m') en que la generatriz $(smP, s'm'p')$ será tangente á la curva de interseccion en el espacio, y este contacto deberá verificarse sobre los dos planos de proyeccion como lo hemos visto en la (F. 77). En efecto, la generatriz $(sP, s'p')$ está contenida en el plano limitado que por hipótesis es tangente al cono s segun la arista sP y en el punto (m, m'), mas esta generatriz $(sP, s'p')$ está contenida en el plano que tocará al cono t en el punto (m, m') que es la interseccion de los planos tangentes trazados á las dos superficies por el punto (m, m'); y por consecuencia (número 182) es tangente á la curva segun la que se cortan estas superficies. Lo mismo podiamos decir respecto á la generatriz $(sK, s'k')$ que por su interseccion con tU, $t'v'$ da el punto (v, v').

233. *Puntos sobre el contorno aparente.* Haremos pasar planos secantes por los puntos A, E, D, G en que tocan las aristas que forman el contorno aparente de cada superficie en proyeccion vertical, y por el método general del (número 208) obtendremos los puntos (b, b') (d, d') en que la curva tocará, pero solo en el plano vertical, las aristas correspondientes. En efecto, en el punto (b, b'), por ejemplo, las tangentes de la curva en el espacio son diferentes de la generatriz $(sA, s'a')$; pero estas rectas están todas en el plano $s'a'A$ tangente á lo largo de

esta generatriz; y como este plano es evidentemente perpendicular al plano vertical, resulta que la tangente y la generatriz de que hablamos, se confundirán en proyeccion vertical; por consiguiente será menester que la recta $s'a'$ toque la curva sobre el plano vertical, mientras que sA estará lejos de ser tangente á la proyeccion horizontal.

La tangente á la interseccion en el punto nn' se determinará de una manera análoga á la determinada (número 229).

Determinar 1.° *La interseccion de una línea con un cilindro:* 2.° *La interseccion de una línea con un cono, y* 3.° *La interseccion de una línea con una esfera.*

234. *Primer caso.* La interseccion de esta línea con el cilindro, habrá de encontrarse en el plano secante que pasando por la línea, corte al cilindro. Si pues por un punto de la línea trazamos otra que sea paralela á sus generatrices, estas dos líneas determinarán un plano que cortará al cilindro segun generatrices.

Si determinamos las trazas horizontales de dichas líneas, estas serán puntos de la traza horizontal del plano, que si hay interseccion habrá de cortar la base del cilindro; los puntos en que esta traza corte á la base, pertenecerán á las generatrices del cilindro segun las que es cortado por el plano, y los puntos en que estas generatrices corten la recta propuesta, serán las proyecciones de los puntos de interseccion de la recta con el cilindro.

235. *Segundo caso.* Si unimos un punto de la línea propuesta, con el cúspide del cono, estas dos líneas determinarán un plano que cortará al cono segun generatrices. La traza de este plano la determinarán las de las líneas, y los puntos en que esta traza corte la base del

cono, pertenecerán á las generatrices en que el plano cortará al cono, y los puntos en que la recta propuesta corte estas generatrices, serán los puntos de interseccion de la recta con la superficie.

236. *Tercer caso.* Si una línea corta una esfera, las proyecciones de la línea y la esfera habrán de cortarse; si pues consideramos uno de los planos proyectantes de la línea, el horizontal, por ejemplo, este plano cortará la esfera segun un círculo cuyo diámetro será la porcion de línea interceptada por la proyeccion horizontal del círculo. Si rebatimos al plano horizontal el plano proyectante de la línea, obtendremos la línea y el círculo en sus justas dimensiones y sobre un mismo plano.

Para rebatir el círculo basta considerar que al girar alrededor de la proyeccion de la recta que es la traza del plano, su centro caminará en una perpendicular á la charnela y á una distancia igual á la altura que el centro de la esfera esté del plano horizontal, puesto que todas las secciones paralelas que hagamos en la esfera, tendrán sus centros en diámetros horizontales, y por consiguiente á la misma altura.

Obtenidas asi la línea y el círculo, los puntos en que se corten pertenecerán á la comun seccion de la línea con la esfera, cuyas proyecciones se obtendrán deshaciendo el giro.

Dadas las proyecciones de un prisma triangular, cortarle por un plano, de manera que las intersecciones de este plano con dos caras contiguas, formen ángulo recto.

237. Si imaginamos en una de las caras sobre que se ha de formar el ángulo, una línea que suponemos sea la interseccion que dicho plano ha de formar con la cara que la contiene, podremos determinar la proyeccion vertical de esta línea: conocida que sea, por el punto de interseccion de esta línea con la arista del prisma que ha de contener el vértice del ángulo, podremos hacer pasar un plano perpendicular á la supuesta comun seccion: este plano habrá de encontrar necesariamente la tercera arista del prisma, uniendo el punto de interseccion de esta tercera arista, con el punto porque hemos hecho pasar el plano; esta línea que habrá de encontrarse en la segunda cara, será la que forme el ángulo que se pide, por estar contenida en un plano perpendicular á la primera interseccion fijada.

Obtenidas asi las proyecciones de las líneas segun las que el plano deberá cortar el prisma, no faltará mas que encontrar las trazas del plano que las contiene.

LIBRO V.

DE LAS SUPERFICIES GAUCHAS.

CAPITULO PRIMERO.

Nociones generales.

238. Toda superficie que pueda ser engendrada por el movimiento de una línea recta, se designa generalmente bajo el nombre de *superficie reglada*, porque puede evidentemente construirse sobre un cuerpo sólido por medio de una regla, ventaja que hace este uso muy frecuente en las artes, pero es necesario dividirlas en dos clases bien distintas, segun que la ley que dirige el movimiento de la generatriz rectilínea, satisface ó no, la condicion *que dos posiciones consecutivas de la recta movible, estén situadas en un mismo plano*. Cuando esta condicion se satisface, la superficie reglada es desarrollable, y un mismo plano la toca todo lo largo de la generatriz, como lo hemos probado (números **106** y **171**). Y puesto que todo lo que toca á la determinacion del plano tangente, la construccion de las generatrices y el desarrollo de una tal superficie, se ha esplicado en los artículos precedentes, nos ocuparemos solamente de las superficies gauchas, es decir, *de las superficies engendradas por*

una recta que se mueve de tal suerte, que dos posiciones consecutivas, por próximas que las supongamos, no estén en un mismo plano.

F. 79. **239.** Antes de indicar los diversos medios de realizar la condicion precedente, haremos observar, que resultará una tal superficie, siempre que el elemento supercial indefinido en longitud y comprendido entre las dos generatrices próximas G, G′, sea gaucho, porque todas las curvas A, B, C.... que tracemos sobre la superficie, los elementos lineales LL′, MM′, NN′, que son rectas que tienen cada una dos puntos comunes con G, G′, no podrán estar situadas en un plano á que estas dos generatrices no pertenezcan. Como las generatrices LL′T, MM′U, NN′V.... que son las prolongaciones de estos elementos lineales, se hallarán en planos diferentes, llegaremos necesariamente á que los planos tangentes GLT, GMU, GNV,..... relativos á los diversos puntos L, M, N de una misma generatriz, serán distintos los unos de los otros, aunque contengan todos la generatriz GLMN.

240. De aqui resulta que en una superficie gaucha, cada plano tal como GLT, aunque verdaderamente tangente en L, es decir, conteniendo las tangentes á todas las curvas trazadas sobre la superficie por este punto, es secante en todos los otros puntos que tiene comunes con él, y su interseccion se compondrá de la generatriz GLM, ademas de una segunda rama que pasa por el punto L, y que puede ser rectilínea ó curvilínea, segun la forma de la superficie gaucha en cuestion.

241. Veamos de qué modo podremos en adelante realizar la condicion del (número 238) que caracteriza las superficies gauchas. Si sujetamos la recta movible á resbalar solamente sobre una ó sobre dos curvas directrices A y B, invariables de forma y de posicion, el movimiento de esta recta no estará completamente determinado, pues que para cada punto L, elegido á voluntad sobre A, la generatriz rectilínea podrá tomar una infinidad de posiciones situadas todas sobre el cono que tendrá por base B y por cúspide L. Dos curvas no son pues suficientes para dirigir el movimiento de una recta, á menos que no impongamos la condicion, que la superficie engendrada sea desarrollable, como lo hemos visto (número 174), mas esta condicion es precisamente la que queremos descartar.

Sujetemos la recta movible á resbalar constantemente sobre tres curvas directrices A, B, C; vamos á ver que estas condiciones son suficientes para reglar completamente el movimiento de esta generatriz. En efecto, si imaginamos dos conos que tengan por cúspide comun el punto L, tomado á voluntad sobre A, y por base, uno la directriz B, y el otro la directriz C, podremos fácilmente construir las trazas de estas superficies cónicas sobre uno de los planos de proyeccion, y uniendo los puntos de seccion de estas dos trazas con el cúspide comun L, obtendremos una ó muchas rectas en número infinito que como GLMN se apoyarán evidentemente sobre las tres curvas A, B, C, que serán las intersecciones de dos conos que pasen por B y por C. Estas rectas serán por consiguiente las posiciones determinadas que deba tomar la generatriz movible, cuando resbalando sobre A llegue al punto L, y para otros puntos L′L″.... construiremos semejantemente las posiciones de estas generatrices.

En lugar de emplear dos superficies de que es necerio construir las trazas, será á veces mas conveniente construir la interseccion del primer cono LBM con el cilindro vertical que proyectará la directriz C sobre el plano horizontal. Por donde obtendremos una curva auxiliar, cuyo encuentro con la proyeccion vertical C, hará conocer el punto que es menester unir con L, para obtener una posicion de la generatriz.

242. En general, la superficie asi engendrada será gaucha, porque cuando la recta movible pase de una posicion GLMN á otra G′L′M′N′, infinitamente próxima, podrá considerarse resbalar sobre las tres tangentes LT, MU, NV, que tienen con las directrices los elementos comunes LL′, MM′, NN′: como estas tangentes no están situadas las tres en un mismo plano, las generatrices G, G′ tampoco lo estarán. Pero para que estas tangentes se encuentren en un mismo plano, y sobre todo, para que la misma circunstancia se reprodujese á cada sistema de puntos (L, M, N), (L′, M′, N′), (L″, M″, N″), situados tres á tres en líneas rectas, es claro que será menester hacer una eleccion particular en la forma y posicion de las directrices A, B, C; por consecuencia, en general *la superficie descrita por una recta movible que se apoya constantemente sobre tres curvas, es gaucha.*

Mas una tal superficie puede ofrecer una línea singular á lo largo de la que existirá un elemento plano indefinido en longitud: este es aquel caso en que para un cierto punto L, los dos conos de que hemos hablado en el número precedente, tengan sus trazas tangentes una á otra. Entonces la generatriz trazada de L á este punto de contacto, podrá, sin dejar el punto L, resbalar sobre la tangente comun á las dos trazas, y describir un elemento particular que será plano. Esto conduce á suponer que las dos tangentes MU y NV están en un mismo plano; y hay razon para creer sucederá lo mismo si las tres tangentes L, M, N, se hallasen tambien en un plano.

243. Podemos *aun sujetar la recta movible G á resbalar constantemente sobre dos curvas fijas A y B, permaneciendo siempre paralela á un plano dado P, que llamamos plano director*. Para construir las posiciones de las generatrices, bastará cortar las curvas A, B, (número 196) por diversos planos paralelos á P, y uniendo por una recta los dos puntos de seccion de cada plano, tendremos las líneas GLM, G'L'M'.... que satisfarán evidentemente á las condiciones impuestas á la generatriz. La superficie, lugar de todas estas rectas, será gaucha en general, porque las tangentes LL'T, MM'U, sobre la que se apoya la recta G cuando pasa á la posicion próxima G', no se hallarán ordinariamente en un mismo plano. F. 80.

244. Para completar estas nociones generales, estableceremos que damos el nombre particular de *conoides*, á las superficies gauchas que admiten un plano director P con dos directrices, que una es rectilínea, pudiendo ser la otra una curva ó una superficie. La conoide se llamará recta si la directriz rectilínea es perpendicular al plano P. Cuando las dos directrices son la una y la otra rectas, la conoide toma el nombre de *paraboloide hiperbólico* ó de conoide de segundo grado.

En fin, cuando una superficie reglada que no admite plano director, tiene por directrices tres rectas cualquiera, recibe el nombre de *hiperboloide á una hoja:* esta hiperboloide y el paraboloide de que acabamos de hablar, se designan bajo el nombre de *superficies gauchas de segundo grado*. Principiaremos por considerar estos dos géneros particulares que ofrecen las propiedades mas notables y necesarias para estudiar las demas superficies gauchas.

CAPITULO II.

De la hiperboloide de una hoja.

F. 81. **245.** Llamamos asi á la superficie engendrada *por una recta movible A, que se apoya constantemente sobre tres rectas fijas B, B′, B″, no paralelas á un plano único, y en que dos posiciones cualquiera, no se hallan en un mismo plano;* porque se demuestra que esta superficie es idéntica á la que hemos dejado designada bajo este nombre (número 97). La construccion de las generatrices se efectuará por el proceder general del (número 241) que aparecerá aqui muy sencillo, porque las superficies cónicas auxiliares se reducirán á planos: asi despues de haber tomado un punto arbitrario L sobre la directriz B, conduciremos por este punto dos planos de los que el uno pasará por B′, y el otro por B″: despues buscando la interseccion de estos dos planos, obtendremos una recta ALMN, que se apoyará evidentemente sobre las tres directrices designadas. Llegaremos al mismo resultado, construyendo la interseccion de la directriz B″ con el solo plano trazado por L y la recta B′, y uniendo este punto de seccion al punto L. Este proceder aplicado sucesivamente á otros puntos L′, L″... de la recta B, dará las diversas generatrices A, A′, A″.... del hiperboloide en cuestion, y como cada una no puede evidentemente ocupar mas que una sola posicion cuando pase por un punto dado L ó L′, se sigue que el movimiento de la recta movible está completamente determinado por la condicion de apoyarse sobre las tres directrices designadas.

246. Esta superficie es necesariamente gaucha, porque dos generatrices cualquiera A y A′ no podrán encontrarse en un mismo plano, en tanto que las rectas B, B′, B″, que tienen cada una dos puntos comunes con A y A′, no estén situadas en este plano único, lo que es contrario á las condiciones impuestas en la definicion (número 245). Por otra parte, este razonamiento no exige que las dos rectas A y A′ estén infinitamente próximas, como lo suponemos para una superficie gaucha en general (número 238), resulta que en la hiperboloide, *dos generatrices cualquiera no están jamás en un mismo plano.*

247. Si entre las tres directrices B, B′, B″, que suponemos no ser paralelas á un mismo plano, hay dos contenidas en un plano B′CB″, la recta movible A, no podrá satisfacer á las condiciones impuestas sino de los dos modos siguientes: 1.° pasando constantemente por el punto de seccion C y resbalando sobre B, lo que hará describir el plano CBD: 2.° girando en el plano B′CB″ alrededor del punto D en que encuentra la recta B; de suerte que entonces la superficie descrita será el sistema de dos planos que se cortan. Mas esta variedad de la hiperboloide que es análoga al caso de una hipérbola reducida á sus asíntotas, no presenta ningun caso nuevo; continuaremos escluyendo en adelante la hipótesis particular, que dos de las directrices estén en un mismo plano. *F.* 82.

248. La hiperboloide á una hoja goza de una propiedad bien notable y muy importante para la determinacion de los planos tangentes á las superficies gauchas en general; y es que admite un segundo modo de generacion por la línea recta, en que las primeras generatrices hacen de directrices y recíprocamente. Es decir, que si hacemos resbalar una recta movible sobre tres, cualquiera de las A, A′, A″, A‴.... que acabamos de *F.* 81.

construir, esta nueva generatriz que coincidirá evidentemente en tres de sus posiciones con BB′ y B″, describirá una superficie idéntica al primer hiperboloide, tanto por la forma como por su posicion. Mas antes de demostrar esta propiedad, recordaremos dos teoremas conocidos en la teoría de trasversales.

F. 83. **249.** *Lema* 1.° Cuando en un triángulo ABC trazamos una trasversal cualquiera PQR que corta los tres lados ó sus prolongaciones, forma seis segmentos, el producto de tres segmentos no contiguos, es igual al producto de los otros tres: es decir, que

$$AP\times CR\times BQ=AQ\times BR\times CP \quad (x).$$

En efecto, tracemos la recta BH paralela á PQR, y tendremos evidentemente las progresiones

$$AQ : QB :: AP : PH=\frac{AP\times QB}{AQ.}$$
$$CR : BR :: CP : PH=\frac{CP\times BR}{CR.}$$

Despues igualando los dos valores de PH, obtendremos la fórmula (x).

F. {84. 85. **250.** *Lema* 2.° Si en un cuadrilátero gaucho ABCD, trazamos dos rectas MN y PQ, que cada una se apoye sobre dos lados opuestos ó sobre su prolongacion, se cortan en cierto punto O, el producto de cuatro segmentos no contiguos, será siempre igual al producto de los otros cuatro segmentos, es decir, que tendremos

$$AP\times BN\times CQ\times DM=AM\times DQ\times CN\times BP \quad (y).$$

Luego observaremos que si las dos trasversales MN y PQ se cortan efectivamente, deben estar en un mismo plano, el cual contendrá las rectas PN, MQ que por consecuencia irán á cortarse en un punto R: mas como estas rectas PN y MQ, se encuentran la una en el plano del triángulo ABC, y la otra en el plano del triángulo ADC, y que estos planos se cortan segun la diagonal AC, será necesario que el punto de encuentro R, de las líneas PN y MQ esté situado precisamente sobre esta diagonal. De que se sigue, que para obtener en un cuadrilátero gaucho dos trasversales opuestas que se corten realmente, podemos tomar á voluntad una de entre ellas MN, y elegir arbitrariamente el punto P de la segunda; trazar la recta PNR que irá á cortar la diagonal AC en R; unir R con M que determinará el punto Q, que unido con P nos dará la trasversal QP.

Esto supuesto, los triángulos ABC y ADC, cortados por las trasversales PNR y MQR, dan despues del lema precedente

$$AP \times BN \times CR = AR \times CN \times BP.$$

$$CQ \times DM \times AR = CR \times DQ \times AM.$$

De donde multiplicando ambos miembros de estas igualdades y suprimiendo los factores comunes, deduciremos las relaciones siguientes:

$$AP \times BN \times CQ \times DM = AM \times DQ \times CN \times BP. \quad (y).$$

que puede escribirse $\dfrac{AP}{PB} \times \dfrac{CQ}{QD} = \dfrac{AM}{MD} \times \dfrac{CN}{NB}$ (z)

251. Recíprocamente, si dos rectas PQ y MN cortan los lados opuestos de un cuadrilátero gaucho ABCD, de suerte que la fórmula (y) se verifique, estas dos trasversales están en un mismo plano. En efecto, si esto no sucede, podremos trazar por el punto P, una recta PQ′ que cortará MN, y entonces tendremos

$$AP\times BN\times CQ'\times DM=AM\times DQ'\times CN\times BP,$$

ecuacion incompatible con la (y) que suponemos verdadera, pues que si CQ′ es mayor que CQ, necesariamente DQ′ será menor que DQ.

F. 81. **252.** Volviendo al doble modo de generacion (número 248) para la hiperboloide á una hoja, y probado que toda recta B‴DD′D‴ que se apoya sobre tres generatrices cualquiera A, A′, A‴, del primer modo, cortará necesariamente todas las rectas de este sistema: por ejemplo, que encontrará la generatriz A″ en un cierto punto D″. Se seguirá evidentemente que todos los puntos de esta línea B‴, se encontrarán sobre el hiperboloide anteriormente construido con las tres directrices fijas B, B′, B″... y que asi, una de estas últimas puede describir esta misma superficie, resbalando sobre tres rectas del sistema A.

Puesto que por el primer modo de generacion las tres rectas A, A′, A‴, cortan las B, B′, B″, el cuadrilátero LNN‴L‴ dará en virtud de la fórmula (z)

$$\frac{L\ L'}{L'L'''}\times\frac{N'''N'}{N'\ N}=\frac{LM}{MN}\times\frac{N'''M'''}{M'''L'''};\ (1)$$

mas puesto que la recta A″ encuentra las tres rectas B, B′, B″, y que B‴ corta las A, A′, A‴ el mismo cuadrilátero dará despues de la fómula (z) las dos relaciones siguientes:

$$\frac{L\ L''}{L''L'''}\times\frac{N'''N''}{N''\ N}=\frac{LM}{MN}\times\frac{N'''M'''}{M'''L'''}\ (2)$$

$$\frac{LD}{DN}\times\frac{N''\ D'''}{D'''L'''}=\frac{L\ L'}{L'L'''}\times\frac{N'''N'}{N'\ N}\ (3)$$

entonces los segundos miembros de las (2) y (3) son iguales en virtud de la (1), y podremos concluir con esta nueva igualdad

$$\frac{LD}{DN}\times\frac{N'''D'''}{D'''L'''}=\frac{L\ L''}{L''L'''}\times\frac{N'''N''}{N''\ N}\ (4)$$

que prueba (número 252) que las dos rectas A″ y B″ se cortan efectivamente en el punto D″.

253. Notaremos que el segundo miembro comun á las ecuaciones (1) y (2) es una cantidad constante K, que permanecerá invariable cuando la posicion de las cinco rectas B, B′, B″, A, A‴ sea fijada; de que se sigue que para una nueva recta cualquiera A′ que se apoya sobre las tres primeras, tendremos siempre

$$\frac{L\ L'}{L'L'''}=K\frac{N\ N'}{N'N'''}\ (5)$$

pues si las tres rectas B, B′, B″ se encuentran paralelas á un mismo plano, sabemos que dividirán á A y A‴ en partes proporcionales, de suerte que tendremos (K=1) por consiguiente la ecuacion (5) que dará entonces

$$\frac{L\ L'}{L'L'''}=\frac{N\ N'}{N'N'''}$$

prueba que en este caso, las tres rectas A, A′, A‴ serán necesariamente paralelas á un plano único, pero diferente del primero.

F. 81. 254. *Del plano tangente.* Pues que por cada punto del hiperboloide pasan dos rectas (número 248), la una del sistema A y la otra del sistema B, y que estas líneas son sus propias tangentes, deberán encontrarse en el plano tangente relativo al punto en que ellas se cortan, y por consecuencia bastarán para determinar este plano y encontrar sus trazas. Asi cuando definamos un hiperboloide por las tres directrices B, B′, B″, y señalemos el punto de contacto D sobre una generatriz dada A, será necesario construir (número 244) á lo menos otras dos posiciones A′, A″ de esta generatriz; y adoptando estas líneas A, A′, A″ por directrices, construiremos una recta D, D′, D″ que se apoye sobre estas últimas y que parta del punto D. Entonces, esta recta D, D′, D″ estará situada sobre el hiperboloide, y conduciendo un plano por las dos líneas AD y D, D′, D″, este será el plano tangente relativo al punto D.

255. Cuando los datos de una hiperboloide son dados sobre dos planos de proyeccion, y se cita solamente la proyeccion horizontal D, de un punto de esta superficie para el que se pide el plano tangente, no será posible trazar inmediatamente la generatriz AD antes de haber encontrado la proyeccion vertical del punto D. Para hallarla será menester en general conducir por este punto un plano vertical cualquiera; buscar la seccion que producirá en la superficie, encontrando los puntos de seccion de este plano secante con diversas generatrices que se apoyen sobre las rectas dadas B, B′, B″, y en fin, proyectar sobre esta seccion el punto D asignado sobre el plano horizontal. Entonces conociendo las dos proyeccio-

nes del punto de contacto, podremos construir las proyecciones de la generatriz A que pasa por este punto, y estaremos en el caso del número precedente.

256. *Del centro de la hiperboloide*. Esta superficie está dotada de un centro, es decir, que existe un punto tal que todas las cuerdas de la superficie que pasen por este punto, se hallan divididas cada una en dos partes iguales. Para demostrar esta propiedad, representemos por B, B′, B″, tres directrices primitivas que satisfagan á la condicion enunciada en la definicion (número 245): entonces podremos por las rectas B′ y B″ conducir dos planos distintos B′DC y B″CD, paralelos el uno y el otro á la directriz B, y estos dos planos se cortarán segun una recta ACD evidentemente paralela á B; de suerte que esta línea ACD será una generatriz de la hiperboloide propuesta, pues que se apoyará sobre B′, B″, é irá á encontrar á B á una distancia infinita. Del mismo modo, conduciendo por B″ y B dos planos B″GH y BHG paralelos á B′, se cortarán segun una recta A′GH que será ademas una generatriz del hiperboloide: hallaremos una tercera A″KE por medio de dos planos BHF y B′DY paralelos á B″, y trazados por B y B′. De aqui concluiremos *que cada generatriz de un sistema tiene su paralela en el sistema opuesto*; pero lo que hemos dicho de B, es igualmente aplicable á toda generatriz B‴, B⁗.... la que puede ser tomada por directriz en lugar de B (número 252). Por lo tanto, los seis planos que hemos construido forman evidentemente un paralelepípedo, que tiene por aristas opuestas las seis rectas B, B′, B″ y A, A′, A″ y digo *que el centro de este paralelepípedo, es el centro de la hiperboloide*. F. 86.

Para demostrarlo, tracemos por un punto M, tomado arbitrariamente sobre la directriz B, una recta M′MM″

que corte las otras dos directrices en M' y M'', y que será una directriz del sistema A; despues se compara con una generatriz del sistema B, que apoyándose sobre A, A', A'', será paralela á $MM'M''$: para obtener esta nueva generatriz tomemos las distancias $DN=HM$, $GN'=EM'$, $EN''=GM''$ y los tres puntos N, N', N'' asi determinados, se hallarán en línea recta. En efecto, tirando las líneas OM y ON, los triángulos OMH y OND que son visiblemente iguales, probarán que los lados OM y ON son iguales y están en línea recta; la misma consecuencia tiene lugar para las líneas OM' y ON', OM'' y ON'' en virtud de los triángulos iguales que percibimos fácilmente. Ademas los triángulos MOM' y NON' iguales por lo que precede, darán el paralelismo de los lados MM' y NN', y en fin MM'' será paralela á NN'' en virtud de los triángulos iguales MOM'' y NON''. Por consecuencia, las dos porciones $N'N$ y NN'' no formarán mas que una sola línea recta, que será una generatriz del sistema B, paralela á la generatriz $M'MM''$ elegida á voluntad en el sistema A. Por otra parte vemos que *dos generatrices paralelas se encuentran siempre en un plano que pasa por el punto O y están igualmente distantes de este punto.*

Esto supuesto, si por un punto arbitrario P de la recta $M'MM''$ tiramos una cuerda POQ que pase por el punto O, irá necesariamente á cortar la hiperboloide en un punto Q situado sobre $N'NN''$ y despues de las relaciones anteriormente establecidas, tendremos evidentemente $OP=OQ$: puesto que esta consecuencia es cierta para un punto P tomado arbitrariamente sobre la hiperboloide, queda probado que el punto O es el centro de esta superficie.

257. Observaremos que cuando se trate solamente de construir este centro, le obtendremos sin trazar el paralelepípedo de que acabamos de hablar, buscando la intersección de tres planos trazados por la recta dada B y su paralela A; por B′ y su paralela A′; por B″ y su paralela A″; porque cada uno de estos planos diagonales pasa evidentemente por el centro del paralelepípedo, que es el del hiperboloide. Ademas podemos decir que estos son los tres planos asintóticos de la superficie, como esplicaremos mas adelante.

258. Resumiendo las proposiciones precedentes vemos que en la hiperboloide de una hoja

1.° Existen dos sistemas de generatrices rectilíneas A, A′, A″, A‴ y B, B′, B″, B‴ en que cada una corta todas las rectas del sistema opuesto (número 252); sin embargo, cada generatriz A′ tiene su paralela en el sistema B (número 256) y recíprocamente, de suerte que para estas rectas comparadas dos á dos, su interseccion no se verifica sino á una distancia infinita.

2.° Dos generatrices del sistema A no se encontrarán jamás en un mismo plano (número 246): lo mismo sucede con las generatrices del sistema B, pues que esta última se apoya (número 252) sobre tres rectas del sistema A, las cuales están en planos diferentes.

3.° Tres rectas cualquiera del sistema A no son jamás paralelas á un mismo plano; porque si esto tuviese lugar, se seguiria por lo dicho (número 253) que las directrices B, B′, B″, sobre las que se apoyan todas las generatrices del primer modo, serian las tres paralelas á un mismo plano, lo que es contrario á la definicion (número 245). Recíprocamente, tres cualquiera de las generatrices del sistema B, no se encuentran jamás paralelas á un mismo plano, porque esto arrastraria consigo (número 253) una condicion semejante para las rectas del sistema A, sobre las que se apoyan estas generatrices del segundo modo.

4.° El centro del hiperboloide está situado en el centro del paralelepípedo construído con tres rectas cualquiera del sistema A, unidas á tres generatrices del sistema B que se encuentran respectivamente paralelas á las tres primeras (número 256), ó mas simplemente es dada por la interseccion de tres planos asintóticos (número 257).

5.° Una recta cualquiera D no podrá cortar la hiperboloide mas que en dos puntos; porque si tuviese tres puntos comunes con la superficie, la recta D se apoyaria sobre tres generatrices del uno ó el otro sistema, de suerte que coincidiria toda con la superficie. Para obtener estos puntos de interseccion, será necesario como en el (número 255) construir la seccion hecha en la hiperboloide por un plano vertical ú horizontal que pase por la recta D.

259. La superficie gaucha engendrada por una recta que resbala sobre otras tres rectas fijas, no paralelas á un mismo plano, es idéntica al hiperboloide de una hoja descrito (número 97). En efecto, esta superficie gaucha es de segundo grado; pues es fácil ver que las condiciones por las que se espresa que la recta movible tiene un punto comun con cada directriz, no puede conducir sino á una ecuacion del segundo grado. Ademas, esta superficie gaucha está dotada de un centro (número 256), y como no es evidentemente ni un cono, ni un cilindro que son desarrollables, es necesario sea un elipsoide ó uno de los dos hiperboloides. Pero el elipsoide es una superficie limitada en todos sentidos (número 95) que no admite por generatriz una recta indefinida; el hiperboloide del (número 99) presenta dos hojas separadas por

un intérvalo imaginario, de suerte que una recta indefinida y continua no podrá aplicarse en toda su estension sobre esta superficie; por consecuencia, volvemos á la proposicion anunciada al principio de este párrafo.

260. Para manifestar mas claramente la identidad *F.* 88.
de que se trata, y que puede parecer estraña al primer golpe de vista, vamos á demostrar sintéticamente que el hiperboloide descrito al (número 97) admite en efecto dos sistemas de generatrices rectilíneas. Por la definicion de esta superficie, todas las secciones perpendiculares á su eje imaginario, son elipses semejantes; si pues la cortamos por tres planos horizontales $e'a'$, V'X', V''X'', en que el primero pase por el centro y los otros á distancias iguales por cima y por bajo de dicho plano, obtendremos la elipse de garganta (*abef*, *a'e'*) y otras dos elipses iguales, proyectadas horizontalmente sobre VUXY, que tienen sus ejes paralelos y proporcionales á los *ea*, *bf*. Esto supuesto, trazando á esta última una tangente cualquiera ADB, sabemos que las partes AD y DB serán iguales: si pues unimos los puntos (D, D') con (A, A') y (B, δ'), obtendremos dos rectas (AD, A'D') y (DB, D'δ') que serán necesariamente prolongacion una de otra, pues que son las hipotenusas de dos triángulos rectángulos evidentemente iguales, proyectados sobre (D'I'A' y D'I''δ'). De que resulta que la recta total (ADB, A'D'δ') tiene tres puntos comunes con el hiperboloide, y por consecuencia está toda entera sobre esta superficie, atendido á que esta es de segundo grado.

Ahora proyectemos el punto A sobre la elipse superior en α', y el punto B sobre la elipse inferior en B'; si pues unimos estos dos puntos en el espacio con (D, D') obtendremos dos rectas (BD, B'D') (DA, D'α'), de que probaremos del mismo modo la coincidencia; de suerte que la recta total (BDA, $B'D'\alpha'$) tendrá tres puntos comunes con el hiperboloide, y por consiguiente estará situada toda entera sobre esta superficie de segundo grado.

261. De que podemos concluir, que todo plano vertical ADB, tangente á la elipse de garganta, corta al hiperboloide segun dos rectas distintas que se cortan en (D, D') sobre esta elipse, y están simétricamente inclinadas de uno y otro lado de la vertical D.

Por consecuencia, esta superperficie puede considerarse como producida por el movimiento de la generatriz (AD, A'D') ó de la generatriz (BD, B'D'), sujeta á resbalar constantemente sobre las tres elipses semejantes (XYVU, X'V'), (*abef*, *a'e'*), (XYVU, X''V''), porque sabemos (número 241) que estas condiciones reglan completamente el movimiento de una línea recta. Las diversas posiciones de estas generatrices presentan pues dos sistemas de rectas indefinidas, situadas sobre el hiperboloide, á saber:

$$(AD, A'D')\ (A_2E, A'_2E')\ (A_3F, A'_3F').\ .\ .\ .\ (A)$$

$$(BD, B'D')\ (B_2E, B'_2E')\ (B_3F, B'_3F').\ .\ .\ .\ (B)$$

unas y otras se proyectan verticalmente sobre las tangentes ó la hipérbola $X''a'X'$, $V''e'V'$ contenida en el plano vertical VX. En efecto, en el punto (N, N') en que una de estas generatrices corta este plano VX, al plano tangente de la superficie, es perpendicular al plano vertical, atendido á que contiene la tangente á la elipse horizontal que tiene su vértice en (NN'); pues la generatriz (BND, B'N'D') se confunde en proyeccion vertical con la tangente de la hipérbola ($X''a'X'$, aX) que está en este plano. La misma circunstancia se verifica para la recta (ADN, A'D'N''), cuya proyeccion vertical toca esta hiperboloide en el punto (N, N''), y las asíntotas serán dadas por las generatrices (*b*K, O'K') (*f*B_2O'B'_2) que son paralelas al plano vertical VX, y no tocarán al hiperboloide sino al infinito.

262. *Dos generatrices cualquiera del sistema A no están en un mismo plano, y la superficie es gaucha.* Considerando en efecto las rectas (AD, A'D') y (A_4G, A'_4G') si se cortan, el punto de interseccion estará proyectado horizontalmente en M; mas para la primera de estas rectas el punto M que está á la derecha de D y que pertenece á la elipse de garganta, deberá encontrarse sobre la hoja superior en M'', mientras que para la recta (A_4G, A'_4G) el punto M, estando de este lado de G, pertenecerá indudablemente á la hoja inferior, y estará proyectada en M': luego las rectas propuestas no se cortan, y es evidente que no son paralelas. Del mismo modo probaríamos que dos generatrices del sistema B no están en un plano.

263. Por el contrario, *cada generatriz (A_4G, A'_4G') del primer sistema, corta todas las rectas del segundo*, por ejemplo (BD, B'D'). Porque el punto M en que se encuentran las proyecciones horizontales de estas dos rectas, está situado sobre la una y la otra de este lado del punto G y D que pertenecen á la elipse de garganta, y los dos puntos proyectados en M están sobre la hoja inferior del hiperboloide, y por consecuencia se proyectan á la vez en M', pues que esta hoja no puede evidentemente ser cortada por la vertical M sino en un solo punto. Observaremos sin embargo, que cuando elijamos una generatriz del sistema A, y otra del sistema B que pasen por las estremidades de un mismo diámetro de la elipse de garganta, estas dos rectas serán paralelas ó

estarán en un plano. Del mismo modo se demostraria que cada generatriz del sistema B corta todas las del sistema A escepto una sola que le será paralela.

264. Puesto que el movimiento de una línea está completamente determinado (número 245) por la condicion de que esta línea movible se apoye constantemente sobre tres rectas fijas, resulta que si hacemos resbalar la generatriz (AD, A'D') sobre tres rectas cualquiera del sistema B, no podrá tomar otra posicion que la $A_2A_3A_4$... que todas encuentran dichas tres generatrices (número 263): del mismo modo, resbalando la generatriz (BD, B'D') sobre tres rectas del sistema A, vendrá á coincidir necesariamente con $B_2B_3B_4$. Por consecuencia, el hiperboloide de que tratamos nos presenta todas las propiedades que dejamos descritas en las superficies gauchas del (número 245), y si las tres elipses directrices fuesen círculos, recaeriamos á la hiperboloide de revolucion de que hemos hablado (número 98).

265. *Del plano tangente*. Cuando la hiperboloide de una hoja está definida por las tres elipses semejantes citadas al (número 261) (curvas que podemos fácilmente construir cuando se designan los tres ejes $Oa{=}Oa'$, $Ob{=}O'$ de la superficie), es bien fácil encontrar el plano tangente relativo á un punto dado por su proyeccion horizontal M. En efecto, si tiramos por el punto M una tangente AMB á la elipse de garganta, esta será la proyeccion de dos generatrices representadas sobre el plano vertical por A'D' y B'D', sobre el que será necesario proyectar al punto dado, en M'' ó en M': de suerte que habrá dos posiciones para el punto propuesto. Consideremos el punto (M, M'') situado sobre la recta (ADM, A'D'M''); por él pasará una segunda generatriz perteneciente al sistema B, á saber (B_4GM, B'_4G'M'') que se ob-

tiene tirando por el punto M, la nueva tangente MGB_4 á la elipse de garganta; entonces la union de estas dos generatrices determinará completamente el plano (número 254) que tocará al hiperboloide en el punto (M, M''), y los pies de estas rectas darán inmediatamente la traza horizontal AB_4P de este plano tangente. En cuanto á su traza vertical PQ'' la obtendremos por medio de la horizontal $(MQ, M'Q'')$ trazada paralelamente á AB_4.

Para el otro punto (M, M') combinaremos las dos generatrices $(BMD, B'M'D')$ y $(A_4MG, A'_4M'G')$ que se cortan; y la traza horizontal del plano tangente relativo á este nuevo punto, será la recta A_4B que es evidentemente paralela á AB_4. La traza vertical se obtendrá por el mismo medio que anteriormente.

CAPITULO III.

Del paraboloide hiperbólico.

266. Llamamos asi la superficie engendrada por una recta movible A, que resbala sobre dos rectas fijas B y B' no situadas en un plano, y paralelamente á un plano dado P, llamado plano director, porque demostraremos mas adelante, que esta superficie es idéntica á la que dejamos descrita bajo este nombre al (número **101**). Para construir las diversas posiciones de la generatriz, bastará trazar por cada punto M tomado á voluntad sobre la directriz B, un plano paralelo á P: hallar el punto N en que este plano cortará la otra directriz B', y juntar estos dos puntos por una recta AMN. Asi vemos que las condiciones precedentes reglan completamente el movimiento de la recta movible, pues que para cada punto M, no puede tomar mas que una sola posicion. *F.* 87.

267. El paraboloide hiperbólico es una *superficie gaucha*, porque dos generatrices cualquiera A y A′, no podrán hallarse contenidas en un mismo plano, en tanto que las directrices B y B′ que tienen cada una dos puntos comunes con las primeras, no estén situadas en este plano, lo que es contrario á la definicion dada en el número precedente, *la superficie pues es gaucha*.

268. La superficie que nos ocupa admite como la hiperboloide un segundo método de generarse inverso del primero, y en el que dos de las generatrices A, A′, A″... pueden ser las directrices. Para probarlo, demostraremos que todo plano DUV, paralelo á dos directrices B y B′, corta al paraboloide segun una recta; lo que se reduce á hacer ver que los tres puntos D, D′, D″ en que este plano encuentra tres generatrices cualquiera A, A′, A″ están en línea recta.

Proyectemos la figura sobre un plano QOX, paralelo á dos directrices B y B′, y empleemos por líneas proyectantes, líneas oblícuas, pero paralelas todas á una línea PO, trazada arbitrariamente en el plano director POX. Entonces B, B′ se convertirán en *b* y *b′*; mas las rectas MDN, M′D′N′, M″D″N″ que tienen sus planos proyectantes paralelos á P, se proyectarán segun las rectas *mdn*, *m′d′n′*, *m″d″n″*, necesariamente paralelos á la interseccion OX de los planos P y Q. Esto supuesto, tendremos evidentemente

$$\frac{MD}{DN}=\frac{md}{dn},\ \frac{M'D'}{D'N'}=\frac{m'd'}{d'n'},\ \frac{M''D''}{D''N''}=\frac{m''d''}{d''n''}$$

mas por otro lado, el plano DUV, siendo paralelo á las dos líneas B y B′, podemos mirar las rectas A, A′, A″ como cortadas por tres planos paralelos, y como cantidades iguales á una tercera son iguales entre sí, tendremos

$$\frac{MD}{DN}=\frac{M'D'}{D'N'}=\frac{M''D''}{D''N''} \text{ y } \frac{md}{dn}=\frac{m'd'}{d'n'}=\frac{m''d''}{d''n''}$$

Puesto que esta igualdad subsiste entre las rectas mn, $m'n'$, $m''n''$, paralelas entre sí, resulta necesariamente que los tres puntos d, d', d'' están sobre una misma recta que gira con b y b' sobre un punto único; por consecuencia los puntos del espacio D, D', D'' se encuentran en el plano proyectante que pasa por la recta d, d', d''; y como están ademas en el plano DUV distinto del proyectante, resulta que estos tres puntos D, D', D'' están evidentemente en línea recta.

269. Despues de lo que, *si hacemos resbalar sobre dos generatrices A y A' del primer método, una recta movible B'' sujeta á permanecer paralela á un plano Q, engendrará el mismo paraboloide que anteriormente.* Porque cuando B'' pase por el punto D, por ejemplo, no podrá dejar de coincidir con la recta D, D', D'' situada (número 266) sobre el paraboloide que satisface las condiciones impuestas á B''.

270. Ahora ensayemos hacer mover una recta B'' de manera que se apoye constantemente sobre las tres rectas cualquiera A, A', A'' del primer sistema, sin imponer la condicion de ser paralela á un plano director. Estas condiciones bastarán para reglar completamente (número 245) el movimiento de esta generatriz, y cuando pase por el punto D por ejemplo, deberá conincidir con D, D', D'' que llena las condiciones enunciadas: pues B'' describirá el mismo paraboloide que anteriormente. Por consecuencia es un tercer método de generacion, en el que esta superficie es producida por el movimiento de una recta que resbala constantemente sobre las tres rectas fijas A, A′, A″ que son paralelas á un mismo plano; porque estas tres rectas en lugar de ser arbitrarias, se encuentran por lo dicho (número 266), paralelas al plano P, de suerte que bajo este punto de vista, el paraboloide hiperbólico es un caso particular del hiperboloide á una hoja. Por otra parte, aun cuando no impusiéramos á la recta movible B″ la condicion de moverse paralelamente á un plano fijo, no dejará de llenarla; pues que las posiciones que tomará, como D, D′, D″ son paralelas al plano Q, segun se estableció.

Es asimismo evidente que este modo de generar admite por recíproco un cuarto modo, en el que haremos mover la recta A, sobre tres cualquiera de las generatrices del sistema B, porque esta recta A no podrá tomar (número 245) mas que la posicion A′, A″.... que llene esta condicion, y permanecerá paralela al plano P, aunque no la hayamos impuesto esta condicion.

271. De aqui resulta evidentemente: 1.° que para cada punto D tomado arbitrariamente sobre el paraboloide, pasarán dos rectas situadas en toda su estension sobre la superficie, pertenecientes la una al sistema A, la otra al sistema B: 2.° que dos generatrices pertenecientes al mismo modo, no están jamás en un mismo plano, que es lo que se ha probado (número 267) para las rectas A, A′, A″.... y que es aplicable á las B, B′, B″...: 3.° que cada generatriz de un sistema corta todas las rectas del otro sin que haya dos paralelas: porque si esta circunstancia tuviese lugar para A‴ y B″ por ejemplo, se seguiria que estas rectas serian paralelas á la interseccion OX de los dos planos directores, lo que es imposible, á menos que no los miremos como situados á una distancia infinita: 4.° una recta cualquiera no puede cortar al paraboloide mas que en dos puntos; porque si tuviese tres puntos comunes con esta superficie, apoyaría sobre tres generatrices, y por consecuencia (núm. 269) coincidirá toda entera con el paraboloide. Por otra parte, para obtener los puntos de interseccion será menester construir la seccion hecha en la superficie por un plano vertical ú horizontal dirigido segun la recta dada.

272. En fin, pues que en el primer modo de generacion las diversas posiciones A, A′, A″.... de la generatriz son dadas por los planos paralelos á P, que cortan la directriz B y B′ en los puntos M y N, M′ y N′.... sabemos por la geometría que estos planos cortarán las rectas B y B′ en partes proporcionales, es decir que tendremos $\frac{MM'}{NN'}=\frac{M'M''}{N'N''}=\frac{M''M'''}{N''N'''}$ de que resulta que en lugar de un plano director podremos designar dos posiciones primitivas A y A′ de la recta movible, pues exige que esta resbale sobre B y B′ de modo que intercepte las partes proporcionales con MM′ y NN′. Esta marcha será de un uso muy cómodo para la generacion en relieve del paraboloide hiperbólico, porque despues de haber construido un cuadrilátero gaucho, tal como MN, N‴M‴ en que los lados y los ángulos sean invariables, bastará dividir los lados opuestos MM‴ y NN‴ en un mismo número de partes iguales: uniendo las divisiones correspondientes por hilos tendidos en línea recta, obtendremos una representacion fiel de esta superficie. Para introducir al mismo tiempo las generatrices del sistema B, bastará dividir del mismo modo los otros dos lados opuestos MN y M‴N‴ en el mismo número de partes iguales, y unir los puntos de division correspondientes por otros hilos que deberán apoyarse sobre la primera y no formar mas que una sola superficie, cuyos dos modos de generacion se hallan espresados de una manera bien sensible. Tal es el procedimiento empleado para la construccion de las caras de las cañoneras.

273. *Del plano tangente.* Cuando el punto de contacto G sea dado sobre una generatriz conocida AMGN, bastará construir solamente una segunda generatriz A′ del mismo órden, empleando el proceder del (número 266), si el paraboloide se define por un plano director P, y si lo está por tres directrices B, B′, B″, paralelas á un mismo plano, emplearemos la marcha del (número 245). Una vez conocidas las dos generatrices A y A′, se las cortará por un plano trazado del punto G, paralelamente á las directrices B y B′, y la recta GH que reunirá los puntos de seccion, estará situada sobre el paraboloide cuyo sistema de las dos rectas AG y GH que son sus propias tangentes, determinarán el plano tangente de la superficie para el punto dado G.

274. Si designamos solamente la proyeccion horizontal g del punto de contacto, sin dar la generatriz que le contiene, será necesario buscar antes la segunda proyeccion del punto. Para esto haremos pasar por g un plano vertical cualquiera, en que determinaremos las intersecciones con diversas generatrices; y la série de estos puntos dará la proyeccion vertical de la seccion hecha en la superficie: entonces proyectaremos el punto g sobre esta curva, y obtenidas asi las dos proyecciones g y g' del punto de contacto, será fácil trazar la generatriz que pasa por este punto, apoyándose en B y B′; de suerte que habremos venido al caso precedente.

275. La superficie gaucha que nos ocupa es idén-

tica al paraboloide hiperbólico descrito al (núm. 101). En efecto, esta superficie gaucha es de segundo grado; porque sin efectuar el cálculo, es fácil ver que las condiciones por las que espresamos que la recta movible tenga siempre un punto comun con B y B', permaneciendo paralela al plano P elegido, ó si queremos á uno de los planos coordenados, conducirá á una ecuacion que no pasará de segundo grado: y esta consecuencia está acorde con lo manifestado (número 271). Ademas, esta superficie gaucha no admite ninguna seccion plana que produzca una curva cerrada: tampoco puede ser un cilindro de base hiperbólica ó parabólica, atendido á que es gaucha; es necesario pues que coincida con el paraboloide hiperbólico (número 101) pues que todas las demas superficies del segundo grado admiten para su generacion, secciones elípticas.

Secciones planas del paraboloide hiperbólico.

276. Obtendremos la curva de interseccion de esta superficie con un plano dado π, construyendo los puntos en que este plano corta las diversas generatrices A, A', A''.... y la tangente á esta curva en un plano dado, resultará de la interseccion del plano π con el plano tangente al paraboloide por el punto en cuestion, plano que se construirá como en el (número 273). En cuanto á la naturaleza de la seccion, puede preveerse anteriormente con las reglas siguientes. *F*. 87.

277. Si el plano secante π pasa por una recta A del paraboloide, la otra rama de la interseccion será rectilínea, pues que esta superficie es de segundo grado: la obtendremos buscando solamente los puntos D' y D'', en que π va á encontrar otras dos genera-

trices A′ y A″ del mismo órden que A, y la seccion total se compondrá de dos rectas A y D, D′, D″, de suerte que el plano π se encontrará tangente en D, y secante en otra parte de la curva.

278. En el caso aun mas particular, en que el plano π que pase por A, se encontrase paralelo al plano director P que corresponde á esta generatriz, no cortará las otras generatrices del mismo modo, de suerte que la segunda rama de interseccion que es en este caso D, D′, D″, se alejará toda al infinito. En este caso la seccion se reducirá á la recta única A; mas el plano π deberá siempre considerarse como tangente al paraboloide en el punto infinitamente lejano, situado en A, ó bien como un plano asintótico de la superficie.

279. En general, si π es un plano cualquiera no paralelo á la interseccion OX de dos planos directores, cortará estos segun las rectas δ y δ' no paralelas á OX, y entonces existirá en cada sistema una generatriz paralela á π. En efecto, dirijamos por la directriz B un plano BCE paralelo á la traza δ: este plano cortará necesariamente la directriz B′ en un cierto punto N″, y trazando por este punto la recta N″M″A″ paralela á δ, irá á encontrar la directriz B, y será evidentemente una generatriz paralela al plano π. Si operamos de una manera semejante para la traza δ', trazando por la generatriz A un plano paralelo á δ' cortará otra recta A′ del mismo sistema en un punto D′ por el cual podremos conducir otra generatriz B″ que será paralela á δ' y al plano π. De aqui podemos concluir que la seccion hecha por este plano π, presentará dos ramas abiertas convergentes hácia los puntos infinitamente distantes, en que π irá á encontrar las dos generatrices A″ y B″; asi esta seccion será una hipérbola cuyas asíntotas vamos á construir.

Tracemos por la generatriz A″ un plano π', paralelo á P: este plano π' será tangente (número 276) al paraboloide en el punto situado al infinito sobre A″, cuya interseccion de este plano tangente con el plano π' de la curva, dará la asíntota de la rama convergente hácia A″, y esta asíntota será evidentemente paralela á esta generatriz. La otra asíntota será dada semejantemente por la interseccion del plano π', con un plano π'', trazado segun B″ paralelamente al segundo plano director Q, que será paralelo á B″.

280. En fin, supongamos que el plano π sea paralelo á la interseccion OX de los dos planos directores, en cuyo caso las dos trazas δ y δ', se encontrarán paralelas á OX. Si queremos ensayar obtener generatrices paralelas á π, será necesario trazar por B un plano BCE paralelo á δ; mas en este caso este plano no cortará ninguna de las generatrices B′, B″.... pues que resultará evidentemente paralelo á Q: pues la generatriz paralela á π en el sistema A está trasportada en toda su estension á una distancia indefinida. Lo mismo sucederá á la generatriz que en el sistema B, sea paralela á π: de suerte que la seccion hecha por el plano π será abierta; pues que habrá generatrices que se separan cada vez mas, y que se aproximan indefinidamente á ser paralelas á π, mas esta curva no tendrá asíntotas.

En efecto, esta línea será dada como lo hemos visto en el número precedente por la interseccion del plano π con el plano π' ó π'', paralelos á P ó Q, y trazado segun la paralela á π: esta generatriz en este caso está trasportada en toda su estension al infinito, y asi el plano π' se aleja indefinidamente y no da asíntota. Por consecuencia la seccion relativa al caso actual, es una parábola.

281. Resumiendo este razonamiento, vemos 1.° *que* *todo plano* π, *paralelo á la interseccion OX de dos planos directores* (1), *da una seccion parabólica, y si ademas* π *es paralelo á uno de estos planos directores, esta parábola se reduce á una recta* (número 277): 2.° *Si el plano secante* π *no es paralelo á la interseccion OX de los dos planos directores, la seccion es una hipérbola*; (número 278) *mas degenera en dos rectas que se cortan, si el plano secante contiene una generatriz de la superficie*: 3.° *En ningun caso la seccion hecha por un plano cualquiera* π *en el paraboloide, puede ser una curva cerrada* (número 275).

282. Observaremos tambien que las construcciones indicadas al (número 277) servirán á resolver este problema: *sobre un paraboloide dado encontrar una generatriz que sea paralela á un plano conocido* π. Habrá dos soluciones cuando este plano π no sea paralelo á la interseccion de los dos planos directores, y el problema será imposible, cuando π sea paralelo á esta interseccion, á menos que no sea al mismo tiempo paralelo á uno de los planos directores, en cuyo caso, existirán una infinidad de soluciones dadas por todas las generatrices paralelas á este plano director.

Problema. *Representar un paraboloide engendrado por una recta movible A que resbala sobre dos rectas fijas B y* B_2 *siendo paralela á un plano director dado P; y construir el plano tangente de esta superficie por un punto conocido.*

283. A fin de dar á la figura toda la simetría que

---

(1) *Veremos mas adelante que esta recta OX es el eje principal del paraboloide, ó á lo menos le es paralelo, porque los dos planos directores no están determinados en cuanto á su posicion absoluta, sino en cuanto á su direccion.*

deberemos buscar, para obtener la construccion de un modelo en relieve, observaremos que un plano Q, paralelo á las rectas dadas B y B_2 será el plano director del segundo sistema de generacion (número 269) del paraboloide buscado; y como este plano Q está evidentemente determinado, á lo menos en direccion por los datos actuales del problema, nos será permitido adoptar las disposiciones siguientes:

1.° Elegiremos el plano horizontal de proyeccion perpendicular á los dos planos directores P y Q que estarán representados por sus trazas horizontales *op* y *oq*. *F.* 89.

2.° Dirigiremos el plano vertical de proyeccion de manera que sea paralelo á la recta *og* que divide en partes iguales el ángulo *poq*: despues trazaremos las proyecciones (CD, C′D′) de la recta dada B, y las proyecciones (EF, C′F′) de la otra directriz B_2 observando que las dos proyecciones CD y EF, deberán ser necesariamente paralelas entre sí por la condicion primera, pues que lo serán á la traza *oq* del plano director Q.

3.° Podemos elevar ó bajar el plano horizontal de tal suerte que la línea de tierra VY′ pase por el punto C′, en que se cortan las dos proyecciones verticales de las directrices B y B_2; y entonces las trazas horizontales C y E de estas rectas, se hallarán sobre una misma perpendicular CE á la línea de tierra.

4.° Limitaremos estas directrices en los puntos (D, D′) (F, F′) en que van á encontrar el plano vertical DOF, trazado perpendicularmente sobre la mitad de CE: de suerte que la figura CDEF será un rombo, cuyo centro O será la proyeccion del eje del paraboloide, con tal que las directrices B y B_2 estén igualmente inclinadas sobre el plano horizontal actual. Aunque esta última condicion podrá muy bien no llenarse por las directrices que asigna la cuestion: admitiremos que se verifica en este caso, y por consiguiente, que los puntos (D, D′) (F, F′) están á la misma altura, atendido que en todos los casos obtendremos entre las generatrices del paraboloide, dos rectas que estarán igualmente inclinadas sobre la vertical, y que podrán sustituir á las directrices dadas (CD, C′D′) (EF, C′F′), si estas últimas no llenasen esta condicion.

284. Esto supuesto, la recta que reunirá los puntos E, D y C′, D′ será evidentemente paralela al plano director P, pues que su proyeccion horizontal DE se encuentra paralela á la traza *op* de este plano vertical P, conforme á las condiciones 2.ª y 4.ª del número precedente. Luego (DE, D′C′) es una posicion de la generatriz movible A; y como sucederá lo mismo respecto á la recta (CF, C′F′) vemos que si dividimos en el mismo número de partes iguales, las dos directrices (CD, C′D′) (EF, C′F′) y unimos los puntos de division 0, 16; 1, 15; 2, 14; 3, 13... obtendremos asi las diversas generatrices del sistema A, á saber (DE, D′C′) (GH, G′H′) (CF, C′F′)....; ademas todas estas rectas estarán proyectadas horizontalmente sobre paralelas á la traza *op* del plano director P.

El plano tangente al paraboloide en un punto cualquiera λ dado por su proyeccion horizontal, se obtendrá trazando las generatrices $\lambda\alpha$ y $\lambda\delta$ respectivamente paralelas á DE y DC, puesto que si proyectamos sobre el plano vertical los dos puntos en que cada una de estas va á cortar los lados opuestos del rombo CDEF, encontraremos las proyecciones verticales de estas generatrices y solo restará hacer pasar un plano por estas dos rectas. No se hace esta construccion por temor de complicar la figura y por considerar no ofrece dificultad.

285. Hemos indicado al (núm. 272), el procedimiento que se emplea para la construccion de las cañoneras gauchas; como su uso es muy comun, procuraremos hacerlo conocer con mas claridad.

Sea A′B′ (F. 90) el plano de la cañonera que hace las veces de plano director, y B′C′, A′D′ las directrices, de las que B′C′ representa la altura y declivio interior del merlon, y A′D′ su declivio esterior.

Conocidos los perfiles, como es consiguiente para llegar á este estado, estos datos siempre lo han de ser, y la construccion gráfica resulta muy sencilla, porque conocida las B′C′ y A′D′ dividiendo una de ellas en un número cualquiera de partes iguales, y trazando de los puntos de division paralelas al plano director A′B′, las 1, 1′; 2, 2′; 3, 3′, nos representarán las generatrices que engendran la superficie.

Se han podido tambien dividir las dos rectas en el mismo número de partes iguales, con lo que resultarian divididas proporcionalmente; y uniendo estos puntos de division, tendriamos el mismo resultado.

286. En la práctica, los procedimientos varían segun la clase de materiales que se emplean. Cuando son de ladrillos ó tepes, no hay mas diferencia que la magnitud de las partes en que se divide una de las directrices, que se arregla al grueso del tepe ó ladrillo; marcados con listones los declivios interior y esterior que nos representan las directrices B′C′ y A′D′, ni aun se hace necesario efectuar la division, porque consideradas paralelas las caras de los ladrillos ó tepes, solo se necesita fijar su direccion que se consigue, colocando la cuerda á la altura del grueso del ladrillo ó tepe sobre los dos listones ó sean las directrices. Sentado el primer órden sobre el plano de la cañonera y en contacto de la cuerda, por la arista

superior, se corre la cuerda otro espacio de igual estension y asi sucesivamente.

Si las cañoneras se hubiesen de construir de zarzos, se hace necesario marcar por medio de cuerdas, diferentes posiciones de las generatrices, á fin de que la superficie quede bien determinada; hecho esto, por cualquiera de los dos medios (núm. 285) por la parte interior, se clavan piquetes de manera que queden rasantes á las cuerdas, con lo que se habrán obtenido las generatrices del segundo modo. La distancia entre estos piquetes, depende de la mayor ó menor flexibilidad del zarzo que se ha de entrelazar con los piquetes como están los mimbres de los gaviones.

Si hubiese de emplearse salchichones, conviene fijar con crecido número de generatrices la superficie, para poder adaptar á ella los diferentes órdenes de salchichones.

De la rosca de filete triangular.

F. 91. 287. Si imaginamos un triángulo $\alpha' A' \alpha''$, cuya base $\alpha' \alpha''$ coincida, sobre una arista de un cilindro vertical de base circular, y cuyo plano pase constantemente por el eje del cilindro girando uniformemente alrededor de esta recta, y suponemos que al mismo tiempo, este triángulo se eleva en cantidades proporcionales á los espacios angulares descritos por este plano movible, de tal modo, que en cada revolucion total, el triángulo isósceles, se eleve una cantidad igual á su base $\alpha' \alpha''$, es decir, que haya tomado la posicion $\alpha'' A'' \alpha'''$; el sólido engendrado por este triángulo movible, será la rosca triangular, en que el cilindro interior, es el montante.

288. Es evidente que en virtud de estas condiciones el vértice A describirá una hélice ABCDEF, A'B'.... que

pertenece á un cilindro concéntrico con el primero, y cuyo paso es igual á $\alpha' \alpha''$: ademas los lados $A'\alpha'$ y $A'\alpha''$ encuentran el eje formando ángulos constantes con esta recta, de que resulta que las dos caras de la rosca son porciones de dos helizoides gauchos, en que la hoja superior forma la cara inferior de la rosca, mientras que la superior de la rosca, pertenece á la hoja inferior del otro helizoide.

289. La construccion gráfica de la rosca se hace con el auxilio de la proyeccion horizontal. A este fin, conocido el radio $o\alpha$ del montante $\alpha\delta\gamma\Sigma\varphi\lambda$, cuyo centro o corresponde al eje vertical $o'z'$ y el vuelo αA de la rosca, la circunferencia ABC.... se divide en un número cualquiera de partes iguales, tanto mas numerosa cuanto con mas exactitud se quiera obtener el trazado de la curva, con lo que quedará proporcionalmente dividido el montante $\alpha\delta\gamma$....

El eje vertical se divide en un número indeterminado de partes iguales; cada una de estas divisiones verticales, marcará los espacios recorridos por el triángulo $\alpha'A'\alpha''$ en sentido vertical, mientras que los A, B determinarán los espacios angulares que en el mismo tiempo ha recorrido el mismo triángulo girando alrededor del eje; por manera que en las verticales elevadas de los puntos A, B, C, D.... deberán encontrarse los A′, B′, C′, D′.... Para fijar su posicion, conocido el punto medio de la base $\alpha'\alpha''$ del triángulo $\alpha'A'\alpha''$ que corresponde á 0, 16: trazando en él la perpendicular 8 A′ al eje, el punto A′ en que esta perpendicular corta la vertical AA′, será el vértice del triángulo cuyos lados apoyarán en 0, 16. Para la posicion inmediata, el vértice debe encontrarse en la vertical BB′. Como á cada espacio angular AB corresponde una division vertical, trazando del punto 9 la horizontal 9 B′, el punto B′ será el vértice del triángulo en la nueva posicion. Las estremidades de la base de este triángulo habrán recorrido otra division, y partirán de los puntos 1, 17. Los puntos $\alpha'\alpha''$ de las hélices trazadas sobre el montante, ó sean las intersecciones de las caras, quedarán determinadas por las intersecciones de las verticales elevadas de los $\alpha\delta\gamma\Sigma\varphi$ con los lados 0, A′, 16 y 1′, B′, 17..., de los triángulos en las diversas posiciones que toman en cada uno de los espacios recorridos sobre el eje, uniendo por un trazado continuo los puntos A′B′C′D′.... y los $\alpha''\delta'\gamma'\Sigma'\varphi'$ tendremos el contorno de la rosca triangular.

De la rosca de filete cuadrado.

F. 92. **290.** Esta rosca es engendrada por un rectángulo AO, A′O′ 3 L′, cuyo plano que pasa por el eje de un cilindro recto y circular, gira uniformemente alrededor de este eje, mientras el rectángulo se eleva lo largo de las aristas del cilindro, en cantidades proporcionales á los espacios angulares descritos por su plano movible. De aqui resulta evidentemente que los puntos A, A′L′ describen en este movimiento dos hélices iguales, cuyo paso A′A″ ó L′L″ se proporciona al objeto á que se destina y la naturaleza del material, para que tenga la suficiente resistencia y deje libre paso al saliente de la matriz L′A″, que engrane con la rosca.

Ademas los radios AO, A′O′, L′ 3 que se apoyan sobre estas hélices y sobre el eje, cortando éste en ángulo recto, engendrarán caras gauchas que pertenecerán á helizoides de plano director, mientras el lado A′L′ describirá una zona cilíndrica que terminará esteriormente la rosca.

Visto el procedimiento empleado para determinar la construccion gráfica de la rosca de filete triangular, basta la inspeccion de la figura para venir en conocimiento de la construccion de la rosca de filete rectangular, por cuya razon nos abstendremos de entrar en sus detalles de construccion.

LIBRO VI.

CAPITULO UNICO.

SISTEMA DE ACOTACIONES.

291. Este sistema difiere de la Geometría descriptiva de dos planos, en que las proyecciones se representan en uno solo, que se supone horizontal y se llama plano de comparacion, sustituyendo á las alturas representadas en el plano vertical, acotaciones ó cotas, que espresan lo que los puntos ó líneas están elevadas del plano horizontal.

Lám. 15. **292.** Asi, un punto (*a*) (**Fig. 1**), está fijo de posicion por su proyeccion horizontal, y su cota (**6**) espresa lo que este punto está elevado del plano horizontal. Cuando dicha proyeccion pertenece á dos ó mas puntos, como (*d*), otras tantas cotas escritas al lado, darán á conocer las alturas respectivas de los puntos contenidos en la recta proyectante.

293. Las cotas se suponen siempre referidas á una unidad constante para cada plano, la cual puede ser independiente de la escala del plano.

Las proyecciones acotadas de dos puntos cualquiera (2. 11) (Fig. 2) determinan una línea única en el espacio.

294. Toda línea del espacio dividida en un número determinado de partes iguales, ó de otro modo cualquiera, tiene por proyeccion otra recta dividida en el mismo número de partes proporcionales, como queda demostrado en la (G. E).

Cuando la proyeccion de una línea, está igualmente dividida y acotada, forma la *escala de pendiente de la línea.* Esta escala se obtiene directamente por una simple sustraccion.

295. Sea (5. 11) (Fig. 3), la línea cuya escala se quiere determinar, véase la diferencia 6, de las dos cotas, divídase la línea en el número de partes que espresa esta diferencia y se tendrá la escala de pendiente de la línea propuesta.

Si una ó ambas cotas contuviesen decimales, en nada variaria el procedimiento, sino en estar referido á la unidad de órden inferior.

296. La traza de una línea es el punto en que la línea corta al plano de proyeccion, por consiguiente en este punto corresponde la cota (*o*).

Si una línea es horizontal, todos sus puntos distarán igualmente del plano de comparacion, esta línea quedará bien representada por las cotas iguales de dos de sus puntos (4. 4) (Fig. 3).

Dos líneas situadas en un plano perpendicular al horizontal de comparacion, estarán bien espresadas por la B de la (Fig. 3) con las dobles acotaciones, acentuadas las de una de las rectas, ó colocadas como manifiesta dicha línea B.

La A de la (Fig. 4) representa una línea limitada en los dos sentidos; la B, una línea limitada en un sentido, y la Cilimitada en los dos sentidos.

Toda vertical tendrá por proyeccion un punto, la letra designará su traza y la cota su estremo opuesto, caso de ser limitada. Si la línea no apoyase en el plano horizontal, dos cotas darán á conocer los estremos de la recta como (3. 8) (3′. 8′) (Fig. 1).

Del plano.

297. Se dice que está determinado un plano, cuando se conocen dos rectas contenidas en él. En el sistema de acotaciones basta una sola recta que es la *línea de pendiente del plano*. Esta es aquella cuya inclinacion con su proyeccion, mide el ángulo que forma el plano con el de comparacion: de lo que resulta, que midiéndose el ángulo que forma un plano con el horizontal, por la interseccion del plano perpendicular á la comun seccion, es consiguiente que esta sea horizontal y perpendicular á la línea de pendiente.

Las horizontales de un plano son por consiguiente perpendiculares á la línea de pendiente del plano, de que se deduce, que conocida la línea de pendiente de un plano, estará completamente determinado.

298. Si se dá la línea (CD) (Fig. 5) cuyas cotas son (3. 9) y se supone sea la línea de pendiente de un plano, tambien lo serán todas las paralelas á esta igualmente divididas; por manera que si acotamos esta línea como se hizo (núm. 5) ó la paralela á ella EF, esta podrá ser la escala del plano.

299. Se ha dicho que conocida la escala de pendiente de un plano, está determinado: en efecto, si conocida la EF quisiésemos determinar la cota que corresponde á un punto x de él, la perpendicular $(x, 4,5)$ á la línea de pendiente acotada, nos determinará por su interseccion, la cota que corresponde al punto (x).

Con objeto de que la escala de pendiente de un plano se distinga de la de una línea, se la designa con dos líneas como la EF.

Un plano vertical se dá á conocer por su traza MN, sin asignarla cotas.

Líneas curvas.

300. Estas líneas pueden ser planas ó de doble curvatura. En el primer caso, conocida su proyeccion, bastarán las acotaciones de tres de sus puntos para fijar los correspondientes á todos los demas de la curva. En el segundo caso, la curva puede estar en una superficie, y por consiguiente será determinada siempre que conozcamos su proyeccion y la generacion de la superficie en que está. En todo caso, una curva cualquiera estará determinada con tanta mas exactitud, cuanto mas numerosas y próximas estén las cotas de dicha curva.

301. La AB (Fig. 6) representa una curva de doble curvatura.

La proyeccion C pertenece á una hélice.

Cuando las curvas están contenidas en planos verticales, es consiguiente que sus proyecciones queden confundidas con las trazas de estos planos, pero no podrán confundirse con una recta, por las diferentes distancias á que estarán las cotas que se diferencian en una unidad.

La D es una curva contenida en el plano vertical.

Una curva cerrada se conocerá por las dobles acotaciones como la E.

Cuando existan dos curvas contenidas en un plano vertical, se tildarán las cotas correspondientes á una de las dos.

Superficies curvas.

302. Una superficie cónica (3. 4. 5.... 17) (Fig. 7) quedará definida por la proyeccion acotada de la curva directriz (3. 4. 5....) y su vértice, porque, dada la proyeccion de un punto de la superficie, podemos asignarle su cota, haciendo pasar por él, la generatriz que le corresponde.

Una superficie cilíndrica está igualmente determinada por la curva directriz y una de sus generatrices.

Las superficies gauchas engendradas por dos rectas directrices y una generatriz, están completamente definidas desde que se conocen aquellas y el plano director.

Lo mismo puede decirse de las superficies gauchas que tienen por directrices una recta y una curva ó dos curvas.

Las superficies de revolucion, no regladas, se darán á conocer por un meridiano y un paralelo. Si el eje es paralelo al plano de comparacion, habrá un meridiano que tambien lo será, las cotas de este habrán de corresponder á los estremos de todos los diámetros horizontales de los paralelos.

Superficies irregulares.

303. Acabamos de ver que ninguna indeterminacion ofrece el uso de un solo plano para la representacion de las superficies sujetas á leyes determinadas; vamos á ver cómo podemos obtener el mismo resultado para las superficies que no están en este caso.

304. El medio mas sencillo es el de suponer estas superficies tales como la ABC, A'B'C' (Fig. 8), cortadas por planos horizontales, como los 1. 2. 3... proyectar las curvas de interseccion, y para que las zonas irregulares que resultan entre estas curvas, puedan ser tomadas por superficies desarrollables, hacer que los planos horizontales estén lo mas próximos posible.

Como se deja ver, este procedimiento aunque el mas aproximado, no es enteramente exacto, porque las zonas que resultan no son superficies desarrollables, atendido á que las curvas que limitan estas zonas, no tienen normales comunes. Sin embargo, como somos dueños de hacer tan pequeña como queramos la distancia entre los planos horizontales y determinar cuantos puntos queramos en cada curva, podemos llevar la aproximacion al grado que se quiera.

Tal es el procedimiento empleado para la representacion del terreno por el sistema de curvas de nivel. Como estas curvas son horizontales, una sola cota es suficiente para cada una.

Problemas.

Dados dos puntos (4. 9) (Fig. 9) *determinar la longitud efectiva de la línea que los une.*

305. Esta línea es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, en que un cateto es la proyeccion horizontal de la distancia entre las proyecciones de los puntos, y el otro la diferencia de alturas entre dichos dos puntos, (G. D. número 20). Por manera, que si rebatimos al plano horizontal, las proyectantes (4. 4') (9. 9') con las longitudes que espresan sus cotas, la línea (4'. 9'), que

une estos estremos, será la longitud efectiva de la distancia entre los dos puntos (4.9).

306. El ángulo que forma una línea con el plano de comparacion, es el que forma la línea del espacio con su proyeccion (G. D. número 24). Este ángulo se espresa por el valor de la *tangente* $4' = \frac{sen\ 4'}{cos\ 4'}$,

ó el de la *cotang*. $4' = \frac{cos\ 4'}{sen\ 4'}$.

Dada la proyeccion A de un punto (Fig. 10), *encontrar la proyeccion de una línea que pasando por dicho punto, tenga la inclinacion de* $\frac{m}{n}$ *ó sea* $\frac{2}{1}$.

307. Si imaginamos un cono recto que tenga su vértice en A y cuyo radio *n* de la base, sea de 15 partes y su eje *n* de 30; es consiguiente que todas las generatrices de este cono, estarán en la razon que se pide. Luego si haciendo centro en A, con un radio de 15 partes, describimos un círculo sobre un plano paralelo al de proyeccion, cuya cota sea (4), toda línea que como la (4. 34) parta de A y se apoye en la circunferencia, satisfará las condiciones pedidas.

Por tres puntos dados, hacer pasar un plano, ó sea construir la escala de pendiente del plano que pase por tres puntos dados.

308. Si acotamos la línea que une los puntos de mayor y menor cota de los propuestos, y unimos el tercer punto con el de igual cota de la línea, esta será una horizontal del plano; y como la línea de pendiente ha de ser perpendicular á esta, trazando á una distancia arbitraria la línea de pendiente, y por los puntos acotados

las paralelas á la horizontal, nos determinarán por su interseccion con ella, la escala del plano.

La solucion de este problema es general para los diferentes casos que pueden ocurrir de determinar el plano que pase por una recta y un punto, por dos paralelas, ó dos rectas que se corten.

Por un punto trazar una recta paralela á otra dada.

309. Si dos rectas son paralelas, sabemos que sus proyecciones tambien lo serán. Si pues por el punto designado trazamos una paralela á la recta dada, en ella deberá encontrarse la línea que cumple con la condicion y quedará determinada, uniendo el punto propuesto con el de igual cota de la línea, esta será una horizontal del plano que contiene las dos paralelas, trazando por los demas puntos acotados, paralelas á la horizontal determinada, sus intersecciones nos determinarán las cotas de la recta paralela á la dada.

Por un punto dado, hacer pasar un plano paralelo á una recta dada.

310. Por el punto dado, siempre será posible trazar una paralela á la propuesta, y como por una línea pueden pasar infinidad de planos, todos los que hagamos pasar por la espresada línea, cumplirán con la condicion.

Determinar la mas corta distancia de un punto á una línea.

311. La mas corta distancia de un punto (5) á una línea (1. 7) (Fig. 11) estará representada por la perpendicular trazada del punto á la línea.

Para fijarla, pueden emplearse dos medios:

1.° Encontrando la longitud efectiva de los tres lados del triángulo que resultaria de unir el punto dado, con los estremos de la línea y trazar la perpendicular, ver á qué punto corresponde el pie de esta perpendicular, cuya cota será conocida y unir la proyeccion del punto, con el de la línea cuya cota nos hubiese marcado el pie de la perpendicular.

2.° Uniendo el punto propuesto, con el de igual cota de la línea, la (5. $\overline{5}$) que los une, será una horizontal del plano que determinan la línea y el punto.

Si hacemos girar este plano alrededor de la horizontal determinada (5. $\overline{5}$), todos los puntos de la línea (1. 2. 3.....) marcharán por perpendiculares á la charnela (5. $\overline{5}$); por manera, que si encontramos la magnitud efectiva (1′. 5′.) de la (1. 5), como el punto (5), pertenece á la charnela, en el giro no habrá variado de posicion, trasladando la estension (1′. 5′) del punto (5), hasta que corte la perpendicular (1. $\overline{1}$), los puntos ($\overline{1}$. $\overline{5}$) pertenecerán á la línea propuesta rebatida en sus justas dimensiones y en el plano que contiene al punto. Si del punto designado, bajamos la perpendicular (5. $\overline{2,8}$) y por el punto de interseccion ($\overline{2,8}$), trazamos una paralela á las perpendiculares, esta nos determinará por su encuentro con la (1. 7) la proyeccion (2,8) del pie de la perpendicular á la línea propuesta; uniendo este punto con el designado, la (5. 2,8) será la proyeccion de la línea que mida la mas corta distancia del punto á la línea propuesta.

Encontrar la proyeccion acotada de una línea perpendicular á un plano dado, en un punto del plano tambien dado.

312. La proyeccion de esta línea perpendicular deberá ser evidentemente paralela á la escala del plano, mas su inclinacion con relacion al plano de comparacion, será en sentido opuesto: es decir que si la pen-

diente del plano es $\frac{m}{n}$; la de la recta perpendicular habrá de ser $\frac{n}{m}$.

Luego si á partir del punto (7) (Fig. 12) designado y en sentido inverso, dividimos la recta (3. 9) igualmente acotada que la escala del plano AC; la (6. 8) deberá ser la perpendicular al plano en el punto designado.

Bajar una perpendicular á un plano de un punto fuera de él.

313. Por el punto podremos imaginar que pasa un plano vertical, cuya traza sea paralela á la línea de pendiente: este plano cortará al dado segun una línea en que estará proyectado el punto.

Si rebatimos este plano y del punto designado trazamos la perpendicular á la comun seccion de los dos planos, quedará resuelto el problema.

La perpendicular bajada del punto de interseccion á la escala, nos determinará la cota correspondiente á este punto, que con la del punto dado, determinarán la proyeccion de la perpendicular.

Por dos rectas dadas AB y CD hacer pasar dos planos paralelos.

314. Si por un punto A de la recta AB trazamos una paralela á la CD igualmente acotada, y por el punto de igual cota C de la CD trazamos una paralela á la primera AB con las mismas condiciones, cortándose estas líneas dos á dos, y siendo paralelas, determinarán dos planos paralelos cuyas escalas será fácil construir por lo dicho (número 308).

La distancia efectiva entre los planos MN y ST estará medida por la perpendicular á dichos planos. Esta línea perpendicular *pq* tendrá por proyeccion una línea paralela á la escala del plano, y el plano que la proyecta habrá de cortar á los dos determinados; luego si rebatimos este plano, las comunes intersecciones *st* y *mn*, marcarán la distancia efectiva que hay entre ellos, que estará medida por la perpendicular *ac*.

Por un punto dado hacer pasar un plano paralelo á otro dado.

315. Puesto que los planos han de ser paralelos, sus escalas de pendiente tambien lo deberán ser, y no habrá mas que por el punto dado trazar una paralela y asignarla, á contar de dicho punto, cotas iguales á las de la escala del plano dado.

Este procedimiento es igualmente aplicable al caso de trazar una recta paralela á otra por un punto dado.

Dados dos planos por sus escalas, determinar su comun seccion.

316. Siendo esta una línea comun á los dos planos, cada punto de ella habrá de encontrarse en la comun seccion de las horizontales de igual cota trazadas en cada plano. Si nos propusiésemos encontrar la comun seccion de los planos AB y CD (Fig. 14), no habrá mas que trazar las horizontales en cada plano correspondientes á los puntos de iguales cotas, tales como (A 3′. B 10′) y (C 3′. D 10′), los puntos en que estas se cortan, son puntos de la comun seccion (3′. 10′).

317. Puede ocurrir que sea tal la posicion de los planos, que las horizontales vayan á concurrir fuera de los límites del papel; en cuyo caso, será necesario valerse de planos auxiliares. Sean por ejemplo los planos AB y CD (Fig. 15); si consideramos las horizontales de estos planos correspondientes á las cotas (6. 14), $(\overline{6}.\ \overline{14})$ y unimos dos puntos cualquiera de las hori-

zontales de igual cota en cada plano, por dos paralelas tales como (14. 14) y (6. 6), estas dos líneas las podemos considerar como horizontales de un plano ausiliar que cortará á cada uno de los propuestos segun las (6. 14) (14. 6) el punto en que estas intersecciones se cortan será la comun seccion de los tres planos.

Trazando otras dos paralelas (6′. 6′,) (14′. 14′,) obtendremos un segundo punto perteneciente á la comun seccion de los dos planos, con lo que quedará determinada la *mn* que buscamos.

318. Si los planos fuesen los (4. 10) (12. 7) (Figura 16) bastará rebatir al plano horizontal los puntos acotados, y con ellos las líneas que representan, y el punto (*n*) en que se cortan será perteneciente á la comun seccion. Como estos planos tienen las proyecciones de sus líneas de pendientes paralelas, sus horizontales tambien lo habrán de ser, las trazas de estos planos son por consiguiente paralelas y su comun seccion habrá de serlo á dichas horizontales.

Determinar el ángulo que forma un plano con el de comparacion.

319. Este ángulo está medido por las intersecciones que un plano vertical paralelo á la línea de pendiente, produce con el propuesto y el de comparacion. Puede espresarse este ángulo por el valor de su tangente ú obtenerse gráficamente segun convenga.

En el primer caso, suponiendo que AB (F. 17) sea el plano propuesto, tomaremos la CD por la traza del plano vertical que mide su inclinacion. Este plano corta las horizontales que parten de los puntos C y D, cuyas cotas son 3. 8. Si valuamos por la escala del plano la CD=12 que mide la distancia horizontal de los puntos

C y D, y determinamos la diferencia de cotas 8. 3. tendremos por valor de tangente $D = \frac{5}{12}$.

En el segundo caso, conservando los mismos datos; si rebatimos al plano horizontal el vertical CD; en el trapecio CD. 3′. 8′ tendremos en sus justas dimensiones las intersecciones del plano vertical CD con el propuesto y el de comparacion: si por el punto *d* trazamos la *cd* paralela á la traza del plano, el ángulo *cd*8′ será el que se busca.

Determinar la interseccion de una línea con un plano.

320. Sea AB el plano y CD las proyecciones de la recta (Fig. 18). La cuestion está reducida á considerar uno de los infinitos planos que pasan por la línea propuesta y determinar la comun seccion de los dos planos. A este fin, trazamos las horizontales A2′ y B12′ del plano propuesto, y si por los puntos de iguales cotas de la línea, trazamos dos líneas, sin mas condicion que la de ser paralelas entre sí, tales como C2′ y D12′ estas líneas las podemos considerar como horizontales de uno de los planos que pueden pasar por la CD, los puntos en que las horizontales de este plano corten las correspondientes del dado, serán puntos de la interseccion (2′. 12′) de los dos planos, esta encuentra á la línea en el punto E, luego esta será la comun seccion de la recta con el plano.

Dadas dos líneas contenidas en un plano vertical, determinar su comun seccion.

321. Si por cada una de las líneas propuestas hacemos pasar un plano, quedará reducida la cuestion á determinar la comun seccion de estos dos planos.

Lám. 16. Si fuesen AB y CD (Fig. 19) las líneas propuestas, elegiríamos en una de ellas, tal como la AB, dos puntos

(5. 12) y por ellas trazaremos dos líneas paralelas entre sí, tales como 5*m* y 12*n*, que nos representarán las horizontales de un plano que pase por AB. Si por los puntos de iguales cotas de la CD, trazamos otras dos líneas 5′*m* y 12′*n*, con la misma condicion, representarán del mismo modo dos horizontales del plano que pasa por esta línea. Los puntos *m* y *n* en que estas horizontales se cortan, serán puntos de la comun seccion de los dos planos, el punto (8,2), en que la comun seccion *mn*, corta las proyecciones de las líneas, será su comun interseccion.

Por una recta dada hacer pasar un plano perpendicular á otro plano dado.

322. Sea AB el plano y CD la proyeccion de la recta (Fig. 20). Si de un punto (*o*) de la línea, por ejemplo, trazamos una perpendicular al plano, estas dos líneas determinarán el plano perpendicular al propuesto. La proyeccion de esta perpendicular será una paralela á la línea de pendiente.

Si del punto (*o*) trazamos la CE, esta será la proyeccion de la línea perpendicular. Si determinamos la interseccion de esta perpendicular con el plano, tendremos acotada esta línea. Esta interseccion no podemos determinarla por el procedimiento indicado (núm. 312) por ser dada la proyeccion de la línea, por cuya razon nos valdremos del rebatimiento del plano proyectante que pasa por CE que cortará al plano, y cuya interseccion estará representada en (3′. 11′) que rebatida será la (*m. n*). Elevando la perpendicular del punto (*o*) conoceremos el punto de interseccion P de la perpendicular. Conocidas las dos líneas que determinan el plano, uniendo dos puntos de ellas de iguales cotas tales como (10,1) y ($\overline{10,1}$) esta será una horizontal del plano, y MN su escala.

Determinar la interseccion de una curva con una superficie irregular.

323. Sea A la superficie y 0, 1, 2, 3.... (Fig. 21) la curva propuesta. Si imaginamos las horizontales de los diferentes puntos de esta curva, equivaldrá á considerar el cilindro horizontal que la contenga: sus horizontales cortarán á las curvas de iguales cotas de la superficie, por estar en el mismo plano, y estos serán puntos de interseccion de la superficie cilíndrica con la propuesta, uniéndolos con un trazado contínuo, el punto C, en que este trazado corta la proyeccion de la curva, será la interseccion de la línea con la superficie.

Determinar la interseccion de un plano dado, con una superficie cónica.

324. La cuestion está reducida á trazar cuantas generatrices del cono se crean necesarias, y determinar la interseccion de cada una de ellas con el plano (núm. 320).

Por un punto dado sobre una superficie cónica, trazarla un plano tangente.

325. Sea la superficie (2, 2, 2.... 18) (Fig. 22) y *d* el punto dado. Por este punto pasará una generatriz, la tangente (2 B) á la curva de la base en el punto de contacto de la generatriz, determinará una horizontal del plano. Si en un punto cualquiera B, trazamos la perpendicular AB, esta será la línea de pendiente que limitada por la (A 18) paralela á la 2B, la AB convenientemente acotada, representará la escala del plano.

Por un punto dado fuera de una superficie cónica, trazarla un plano tangente.

326. Si unimos el punto designado (*c*) con el vértice (18) podemos determinar la cota (2) de esta línea, este punto pertenecerá indudablemente al plano de la base, y como de un punto se pueden trazar dos tan-

gentes á un círculo y estas tangentes son horizontales, las perpendiculares á ellas serán las líneas de pendiente de los dos planos tangentes que satisfacen la condicion. Concretándonos al que determina la horizontal (C. 2), elevando en C la perpendicular CD y trazando la (18. D) paralela á (C, 2), CD será la escala del plano que cumplirá con la condicion de ser tangente al cono y pasar por el punto (*c*).

Por una recta dada trazar un plano que forme con el horizontal un ángulo (α).

327. Sea AB (Fig. 23) la línea porque se quiere hacer pasar el plano.

Si rebatimos la AB al plano horizontal y en ella elegimos un punto S arbitrario y de él bajamos la perpendicular S*s* á la *ab*, que podemos considerar como la traza del plano de comparacion paralelo al horizontal, y en el punto S trazamos una oblícua S*m'*, que forme con la vertical S*s* un ángulo β, complemento del ángulo α, que es el que queremos que forme el plano, y suponemos que esta oblícua gira alrededor de dicha vertical, sin que varíe el ángulo que forma con ella, engendrará un cono cuyas generatrices formarán el ángulo que se pide con el plano horizontal.

Como la base de este cono se supone en un plano horizontal cuya cota es (3), todos los puntos de la base les corresponderá igual cota.

Al restituir la (*a*. 11') á su primitiva posicion, el punto S se trasladará á *s*, los *m'*, *b* á *m*, B sin que hayan variado las distancias *m' b*, *m* B que representarán el diámetro del círculo, base del cono engendrado.

Si del punto A trazamos las tangentes A3, estas serán las horizontales contenidas en los planos que buscamos y las perpendiculares 3S en los puntos de tangencia, serán las líneas de pendiente y CD, C'D' sus escalas.

328. Si en vez de darse el ángulo α se diese la espresion de su tangente, espresada por la relacion $\frac{m}{n}$ ó sea $\frac{15}{18}$, la cuestion por lo dicho (número 307), estará reducida á elegir un punto S de la línea cuya cota esté con la línea que mide la distancia horizontal del punto A y el 1, en la relacion de $\frac{m}{n}$ ó $\frac{15}{18}=\frac{5}{6}$. El plano de comparacion está elevado 3 partes, luego el punto cuya cota es 8, habrá de ser el que adoptemos como vértice del cono. Si haciendo centro en este punto con un radio de 6 partes, describimos un círculo, habremos engendrado un cono cuyas generatrices formarán con el plano horizontal el ángulo cuya *tangente* $\frac{15}{18}$ se pedia. Solo restará trazar la tangente como se hizo en el caso anterior.

Trazar un plano tangente á una superficie irregular por una recta cualquiera.

329. Sea la superficie S y (1. 7) (Fig. 24), la línea porque se quiere hacer pasar el plano. Si acotamos la línea propuesta, siempre podremos obtener en ella el mismo número de cotas que las representadas en la superficie; en tal caso, si por los puntos 6, 5, 4 de la línea, trazamos tangentes á las curvas de igual cota, la que de estas forme el menor ángulo con la parte descendente de la oblícua, nos determinará el punto de contacto del plano que forma el mayor ángulo con el horizontal. En efecto, si tenemos una oblícua BC (Fig. 25) con el mismo nú-

mero de cotas que la superficie S, y suponemos que girando este plano alrededor de la recta BC, va tomando las distintas posiciones que indican las horizontales, se verificará que, cuanto mayor sea el ángulo que el plano forme con el horizontal, será menor el ángulo que la horizontal correspondiente á aquel plano, forme con la parte descendente de la oblícua BC.

330. Para demostrar esto, si por el punto 4′ trazamos las paralelas (4′. *m*) á la (3. 3′), (4′, *n*) á la (2. 2′) y (4′. *p*) á la (1. 1′), es consiguiente que (4′. *m*) (4′. *n*) y (4′. *p*) serán horizontales que pertenecerán á los mismos planos que las respectivas paralelas (3. 3′) (2. 2′) y (1. 1′). La inclinacion de estos planos estará medida por la línea de pendiente perpendicular á dichas horizontales. Para que la comparacion nos dé á primera vista el resultado, elegiremos el punto 2′ para trazar estas perpendiculares ó las líneas de pendiente de los diferentes planos, y como todos los ángulos rectos que insisten sobre los estremos de un diámetro, tienen su vértice en la circunferencia, si del punto 3′ trazamos una semicircunferencia, y del punto 2′ las cuerdas á los puntos de interseccion de las horizontales, es indudable que estas serán perpendiculares á las horizontales respectivas (4′. *m*), (4′. *n*) y (4′. *p*), y por consiguiente medirán la inclinacion de los planos que las contienen. Por otra parte, los puntos *m*, *n* y *p* tienen la misma cota por pertenecer á horizontales que parten de un mismo punto; luego 2′*m* cuya distancia horizontal es menor que la que miden las proyecciones de todas las demas líneas de pendiente, será la que forme el mayor ángulo con el plano horizontal, y (4. 4′) la horizontal de este plano, cuya escala representará la (4. 0).

331. Volviendo á la cuestion (Fig. 24), para asegu-

rarse de cuál es la oblícua, bastará trazar por el punto 7 paralelas á las horizontales determinadas, con lo que tendremos referidos á un punto de la oblícua, los diferentes vértices de los ángulos que forman las horizontales con ella y será fácil conocer cuál es el menor. Conocida la horizontal (4. 4′) que determina el punto de contacto, no habrá mas que trazarla una perpendicular, y esta acotada convenientemente representará la escala del plano (4′. 1′).

Trazar un plano tangente por una recta horizontal á una superficie dada

332. Siendo horizontal la línea propuesta AB (Figura 26) y debiendo pasar por ella el plano, la línea de pendiente habrá de ser perpendicular á dicha recta; mas es necesario determinar el punto de contacto del plano con la superficie. A este fin trazaremos las tangentes á las curvas de nivel, paralelas á la recta dada, y si prolongamos estas tangentes hasta que corten la perpendicular BD, que podemos considerar como la traza de un plano vertical, en él se hallarán las cotas correspondientes á las diferentes curvas de nivel; por manera, que si por B trazamos la oblícua BC, con el mismo número de cotas que espresan las curvas, y dirigimos las horizontales (3. 3′), (4. 4′) (5. 5′).... la que de estas forme el menor ángulo con la parte descendente de la oblícua, corresponderá al punto de contacto del plano que forme el mayor ángulo. Para cerciorarse de cuál es esta, emplearíamos el procedimiento anterior (número 331), resultando por él ser la horizontal 6, bajando de este punto la perpendicular (D′A), y acotándola, esta será la escala del plano pedido.

Por un punto dado trazar un plano tangente á una superficie con una inclinacion mínima.

333. Para esto, del punto designado A (Fig. 27) tra-

zaremos arcos de círculos tangentes á las curvas de nivel, hasta que vayan á cortar la línea arbitraria AB, que podemos considerar como la traza de un plano vertical en que tendremos las diferentes cotas de las curvas de nivel. Si imaginamos la oblícua arbitraria AC, acotada, y unimos los puntos acotados de esta oblícua con los correspondientes á las curvas de nivel, referidos á la primera línea, estas serán horizontales cuyas inclinaciones nos darán á conocer á qué curva corresponde el punto de tangencia. Conocido este, la tangente á la curva de nivel correspondiente será una horizontal del plano, y su perpendicular (6. 1), acotada, representará su escala.

LIBRO VII.

CAPITULO PRIMERO.

Preliminares.

334. Por la influencia de la luz percibimos los objetos que nos rodean. Aunque ningun conocimiento cierto tenemos de esta admirable sustancia, sus efectos son bien conocidos, y como por otra parte nos basta conocer alguna de sus propiedades, nos limitaremos á las que hacen relacion con el objeto que nos proponemos. En tal concepto, es fácil concebir que para que un punto luminoso pueda ser visto de todas partes, es necesario que emanen de este punto infinidad de rayos luminosos en todos sentidos. La esperiencia da á conocer que estos rayos luminosos, se estienden en línea recta, mientras no encuentran obstáculo, y que iluminan en razon inversa del cuadrado de las distancias. En efecto: si ima-
Lám. 17. ginamos un cuerpo luminoso C (Fig. 1), este cuerpo esparcirá rayos de luz en todas direcciones; si á una distancia arbitraria imaginamos un plano *b d*, este plano recibirá una porcion de rayos de luz, comprendidos entre el ángulo *d*C*b*, si á una distancia C2, doble de la primera, suponemos otro plano BD, este plano será cuatro veces mayor que el primero, puesto que las bases de

estas pirámides estarán en razon de sus alturas: al propio tiempo se ve está iluminado por los rayos de luz comprendidos en el mismo ángulo DCB, de que se infiere, que la misma porcion de rayos de luz, ha de iluminar una superficie cuatro veces mayor que la primera, de que se sigue que la intensidad de la luz en la segunda superficie, será cuatro veces menor que en la primera lo que se espresa diciendo *que la luz ilumina en razon inversa del cuadrado de las distancias.*

335. Acabamos de ver en qué razon están iluminados los planos directos á la luz; vamos á ver lo que sucederá cuando estos planos sean oblicuos á ella. Sea C (Fig. 2) un punto luminoso, y AB un plano: este plano estará iluminado por todos los rayos de luz comprendidos por el ángulo ACB: si suponemos que este plano gira alrededor de la horizontal proyectada en D, hasta tomar la posicion *ab*, los rayos de luz que le iluminan en esta nueva posicion, serán todos los comprendidos por el ángulo $aCb<ACB$, luego deberá estar menos iluminado que en el primer caso. Como el punto *b* está mas próximo de C que *a*, se infiere que la intensidad de la luz sea mayor en *b* que en *a*. Si continuamos haciendo girar al plano hasta que tome la posicion de *a′b′*, observaremos que en este caso, los rayos de luz no hieren la superficie, por consiguiente estará privada de luz, ó lo que se llama en sombra.

336. Por el contraste del claro y oscuro, es por lo que venimos en conocimiento de la forma que afectan los cuerpos. Cuando estos están expuestos á su accion, nos presentan una parte de la superficie iluminada y otra en sombra, á esta sombra se llama *sombra propia*, y la que produce sobre otros cuerpos, *sombra arrojada*. La línea que separa la parte iluminada del sólido de la que está en sombra, se llama línea de *separacion de luz y de sombra*. Los rayos de luz rasantes al cuerpo, interceptados por la línea de separacion de luz y de sombra, producen el contorno de la sombra arrojada.

Tales son en resúmen los principales efectos de la luz, cualquiera que sea su direccion y procedencia: réstanos hacer ver las modificaciones que admiten estos principios.

CAPITULO II.

Teoría de sombras.

Si comparamos la distancia del Sol á la tierra, calculada en 40 millones de leguas, con la que hay entre los cuerpos que nos rodean, sin error sensible podremos considerar todos los cuerpos como igualmente iluminados, puesto que los cuadrados de las distancias entre dichos cuerpos, son insignificantes comparados con la de estos al cuerpo luminoso.

337. Por razon del ambiente interpuesto entre nuestra vista y los objetos, observamos una degradacion cuya ley, si bien no nos es conocida, es análoga á la manera con que la luz obra en los cuerpos (núm. 334), razon por la que, siguiendo el convenio (G. D. 13) del modo de representar los cuerpos, *la intensidad de las sombras se gradúa por la distancia del observador á los cuerpos que se quieren representar*. De aquí se sigue, que si imaginamos una série de planos paralelos al horizontal de proyeccion (1, 2, 3, 4) (Fig. 3), supuesto el observador á una altura constante, verá mas clara y distintamente el plano número 1 que el 2, y este mas que el 3, y aun cuando por la pequeñez de las alturas no se perciba la dife-

rencia de uno á otro, no dejará de existir y hacerse notar del 1.° al 4.° ó 5.°, ó entre el 1.° y 2.° si se aumentan las alturas. Por esta razon y la de hacerse necesario en los diseños, dar á conocer que no están en un mismo plano, se indica en el lavado dando una capa igual clara al 1.°, dos al 2.° y asi sucesivamente.

La propiedad del diseño será tanto mayor, cuanto mejor graduadas estén las tintas. Esta degradacion depende del tino y gusto del dibujante, lo que no es posible sujetar á reglas, ni tampoco tomar la indicada como general para todos los casos; pues cuando los planos sean en corto número y diferencias de alturas considerables, no bastan el aumento de una sola capa al mas lejano, y por el contrario, cuando sean en crecido número y de poca altura, habrá casos en que no pueda indicarse sino por un desvanecido general. Las mismas consideraciones son aplicables para el caso en que los planos sean paralelos al vertical de proyeccion.

338. Los planos inclinados pueden ser directos á la luz como *af* y opuestos como *ch*. En el primer caso, conforme á lo manifestado, la parte *bf* de la cara *af* (Fig. 4) se verá mas clara que la *ae*; asi en proyeccion horizontal este plano se representará con un desvanecido suave desde *ae* á *bf*. En los opuestos á la luz, parece no deberia cuidarse mas que de oscurecerlos, pero por razon del contraste de la parte iluminada con la privada de luz, hace aparecer mas densa la sombra en la parte contigua á la iluminada: como la parte mas clara de los planos directos á la luz, es la mas próxima á la vista, resulta que en los opuestos es la mas oscura; asi se establece por regla general, que los *planos inclinados directos á la luz, se suavicen de la parte mas distante á la mas próxima, y los opuestos de*

la mas próxima á la mas distante: claro en el primer caso y oscuro en el segundo.

339. Para distinguir en los sólidos los planos directos ú opuestos á la luz, es necesario fijar su direccion. Si consideramos que los cuerpos pueden ser iluminados natural ó artificialmente, y que en uno y otro caso pueden variar al infinito las posiciones del astro ó cuerpo luminoso, y por consiguiente las direcciones de la luz, será fácil colegir la dificultad que ofreceria este estudio, si se hubiese de practicar el trazado de las sombras en todos los diversos casos que pudiesen ocurrir. Por esta razon se ha convenido hacer completa abstraccion del cuerpo luminoso y suponer que los rayos de luz son paralelos, siendo tal su direccion, que sus proyecciones formen ángulo de 45.° con la línea de tierra. La línea que satisface esta condicion es la diagonal del cubo que va del ángulo superior de la izquierda, al posterior inferior de la derecha, supuesta una de sus caras horizontal y otra vertical paralela á la vista.

340. En efecto, se ve que si en el cubo AC (Fig. 5) trazamos la diagonal A*c*, supuesta la cara *abcd* en el plano horizontal, y la *c*CD*d* en el vertical, las proyecciones de dicha diagonal serán las *ac* y D*c*: como estas líneas son las diagonales de los cuadrados *abcd* y DC*cd*, los ángulos D*cd* y *dca* serán de 45.° como mitades que son de los ángulos *dcb* y *dc*C.

Asi, si tenemos un punto A y queremos determinar su sombra, este punto estará proyectado horizontalmente en *a* y verticalmente en D: obtenidas las proyecciones del punto del espacio, no habrá mas que pasar por estas la paralela al rayo de luz, que en este caso serán las *ac* y D*c*. Estas líneas concurren en un mismo punto de la línea de tierra y donde concurre el rayo de luz interceptado por el punto A del espacio, que es la traza de la paralela al rayo de luz que pasa por dicho punto. Luego la sombra arrojada de un punto *es la traza de la paralela al rayo de luz que pasa por dicho punto*.

341. Si en vez del punto A fuese la perpendicular A*a*, es evidente que puesto que los rayos de luz son paralelos, todos los interceptados por la línea A*a*, formarán un plano vertical cuya direccion será la de la diagonal *ac*. Este plano es de sombra: su interseccion con el horizontal será la sombra de la línea A*a*, de donde se ve que la sombra arrojada de una línea perpendicular al plano horizontal, *es la diagonal de un cuadrado que tiene por lado la longitud de la línea*, y en general *la sombra de una línea es la interseccion del plano que pasa por dicha línea y es paralelo al rayo de luz con los planos ó superficies que encuentra*.

Las mismas consideraciones son aplicables á la perpendicular AD, que daria por sombra la línea D*c*.

342. La parte iluminada y de sombra de un cuerpo está determinada por los planos rasantes, paralelos al rayo de luz. Estos planos rasantes se fijarán por la paralela al rayo de luz y cada una de las aristas B*b*, B*c*, CD y D*d* que son las líneas de separacion de luz y de sombra porque ellas separan las caras iluminadas *a*B, AC y A*d* de las B*c* y D*c* opuestas á la luz. Esta línea de separacion de luz y de sombra es la que produce el contorno de la sombra arrojada, por manera que este contorno depende á la vez, de la forma del cuerpo y del plano sobre que se proyecta. Para determinarla, basta observar que la arista *b*B apoya en *b* en el plano horizontal, por consiguiente este será punto de partida de la sombra de dicha línea. Si por este punto trazamos en el plano hori-

zontal la *bb′* paralela á la proyeccion del rayo de luz y por el punto B del espacio, la paralela B*b′*, habrán de cortarse en un punto *b′* que será la traza de esta línea ó la sombra arrojada del punto B: como el punto de que ha de partir la sombra es *b*, unido con *b′*, *bb′* será la sombra correspondiente á la línea B*b*.

La C*c′* paralela al rayo de luz, determinará con su proyeccion *cc′* el punto *c′* de la línea B*c*, que unido con *b′*, dará *b′c′*, por sombra de la espresada línea BC. Del mismo modo se determina el punto *d′*, perteneciente á la vez á la horizontal CD y la vertical D*d*, y como el punto *d* es del plano, unido con *d′*, tendremos *dd′c′b′b* por contorno de la sombra arrojada del sólido, y la *b*BCD*d* que la ha producido separando la parte iluminada del cuerpo de la que está en sombra, por cuya razon se la llama línea de separacion de luz y de sombra, se ha convenido representarla mas gruesa que las demas líneas que espresan el contorno de un sólido.

Sentados estos principios fundamentales vamos á dar á conocer como por el auxilio de la G. D. se determinan las sombras.

CAPITULO III.

Problemas.

343. *Dadas las proyecciones de un punto y las de la paralela al rayo de luz, determinar su sombra arrojada:* 1.° *sobre los planos de proyeccion:* 2.° *sobre un plano cualquiera:* 3.° *sobre un cilindro:* 4.° *sobre una superficie cónica; y* 5.° *sobre una esfera.*

F. 6. *Primer caso.* Sea (*ab*, *a′b′*) las proyecciones del rayo de luz y (*a*, *a′*) las del punto cuya sombra se quiere determinar: puesto que los rayos de luz son paralelos, sus proyecciones tambien lo serán; haciendo pasar por (a, a') las paralelas $(ad, a'd')$ estas serán las proyecciones de la paralela interceptada por el punto A, cuya interseccion con el plano, dará el punto de sombra: como esta interseccion es la traza de la línea, el punto *d* que satisface esta condicion, será la sombra arrojada del punto (a, a') ó A (1).

Por lo dicho (número 340) conocida que sea la altura de un punto ó de una perpendicular al plano horizontal, se podrá conocer su sombra sin la 2.ª proyeccion; para lo que bastará construir el cuadrado *acde*, cuyo lado será lo que el punto diste del plano horizontal ó la longitud de la línea y la diagonal *ad*, proyeccion horizontal de la paralela al rayo de luz, será la sombra de la línea, y *d* la sombra arrojada del punto *a*. Las mismas consideraciones son aplicables á la proyeccion vertical del punto.

Segundo caso. Sean PQR′ las trazas de un plano y (a, a') las proyecciones de un punto cuya sombra sobre dicho plano, se quiere determinar. La sombra de este punto habrá de encontrarse en la interseccion de la paralela al rayo de luz que pase por él, con el plano. Siendo conocidas las proyecciones de esta línea, no habrá mas que encontrar su interseccion con el plano (G. D., número 49). *F. 7.*

Tercer caso. Dadas las proyecciones de un cilindro cuya base es (AB, A′B′) y las del punto (a, a') determinar la sombra arrojada sobre este sólido. Esta sombra habrá de encontrarse en el plano que pase por el punto *F. 8.*

---

(1) En lo sucesivo no haremos mencion de la paralela al rayo de luz como dato de los problemas á resolver, puesto que convenidos en que su direccion sea la ya dada á conocer, se sobreentiende que es dada para todos los casos.

y sea paralelo al rayo de luz y sobre la generatriz segun la que, este plano corte al cilindro. Queda pues reducido á encontrar la interseccion de una línea de posicion determinada, que es la paralela al rayo de luz, con el cilindro (G. D., número 234).

F. 9. *Cuarto caso.* Sean DCS, D'C'S' las proyecciones de un cono, y (a, a') la del punto cuya sombra se quiere determinar. No hay mas diferencia de este caso al anterior que la de unir el punto dado con el vértice, en vez de hacer pasar por el punto la paralela á la generatriz del cilindro (G. D., número 235).

F. 10. *Quinto caso.* Sean (c, c') las proyecciones de la esfera y (a, a') las proyecciones del punto. En nada difiere del caso de encontrar la interseccion de una línea con la esfera, mas que en ser una línea de una posicion determinada (G. D., número 236).

Sombra arrojada de una línea.

344. Todos los rayos de luz interceptados por una línea formarán un plano paralelo á la direccion del rayo de luz: la interseccion de este plano con las superficies que encuentra, será la sombra producida por la línea.

Si la línea es perpendicular á uno de los planos de proyeccion, los rayos de luz interceptados por ella, formarán un plano que será perpendicular al que lo es dicha línea, y cuya direccion será la de la proyeccion del rayo de luz correspondiente al mismo plano, y en el otro una perpendicular á la línea de tierra.

Si la línea fuese perpendicular á la línea de tierra, se ha dicho (G. D., número 4) que la posicion de esta línea es indeterminada; asi es geométricamente hablando, puesto que las líneas se consideran indefinidas, mas en las construcciones gráficas, que tienen por objeto la representacion de los cuerpos, no existen estas líneas indeterminadas; y en tal concepto, puesto que se conoce la interseccion de esta línea con la de tierra y las proyecciones del punto estremo, estará determinada de posicion.

345. Sean (*ac*, *a′c*) las proyecciones de una línea. El punto *c* comun á las dos proyecciones, y el (*a*, *a′*) punto estremo de la línea. Haciendo pasar la paralela al rayo de luz por el punto (*a*, *a′*), obtendremos su sombra *d′*, y como el punto *c* es comun á la línea y los planos, uniéndole con *d′*, *cd′* será la sombra que produce dicha línea. F. 11.

Sin conocer el punto (*a*, *a′*) se ha podido cortar la línea por un plano, buscar su interseccion que seria un punto cuya sombra podriamos determinar.

346. Puede ocurrir que la línea contenida en un plano perpendicular á los dos de proyeccion, sea perpendicular á uno de ellos, cuyo caso se ha tomado en consideracion, ó que tenga sus trazas contenidas en dichos planos. En este caso, supuesto que sean *a* y *b′* las trazas, considerada una de ellas como un punto del espacio, no habrá mas que determinar su sombra sobre el otro plano. Tomando en consideracion el punto *b′*, su proyeccion horizontal será *b*; haciendo pasar las paralelas al rayo de luz, su traza *f* será la sombra arrojada del punto (*b*, *b′*) sobre el plano horizontal; como el punto *a*, pertenece á la línea y al plano horizontal, *af* será la sombra de dicha línea ó la interseccion del plano que pasa por esta línea y es paralelo al rayo de luz, con el plano horizontal, mas esta sombra corta en *d* la línea de tierra, uniendo este punto con *b′* traza vertical de la línea, tendremos *adb′* por la interseccion del plano que pasa por la línea, paralelo al rayo de luz, con los de proyeccion ó la sombra arrojada sobre dichos planos. F. 12.

F. 13. 347. Del mismo modo, si la línea tuviese una posicion cualquiera (*ab*, *a'b'*) para fijar las trazas del plano que pasa por esta línea y es paralelo al rayo de luz, bastará elegir un punto *b'* cuya proyeccion horizontal será *b*, y por él hacer pasar la paralela al rayo de luz; la traza *c* será el punto de sombra producido por (*b*, *b'*), y como la traza horizontal de la línea propuesta es *a*, uniendo *a* y *c*, *ac* será la traza horizontal del plano de las dos líneas. Esta traza corta la línea de tierra en *d*, punto comun á los dos planos, y *b'* traza vertical de la línea propuesta, luego *adb'* será la interseccion del plano de las dos líneas con los de proyeccion ó la sombra producida por la línea propuesta.

Si la sombra de la línea se hubiese de obtener sobre un plano, puede ocurrir que la línea no encuentre al plano, ó que lo corte.

F. 14. 348. Sea en el primer caso PQR' un plano y (*a*, *a'c'*) las proyecciones de la línea. Los rayos de luz interceptados por esta línea, formarán un plano vertical; la interseccion de este plano con el propuesto y el de proyeccion, será la sombra producida por esta línea. La traza horizontal de este plano será la *ar* y *rr'* la vertical; la interseccion de los dos planos estará representada por (*tr*, *t'r'*) en cuya interseccion ha de encontrarse la sombra producida. Para fijar su estension, puesto que la línea apoya en el plano horizontal, de este punto habrá de partir la sombra; el otro estremo estará determinado por la interseccion de la paralela al rayo de luz con el plano propuesto, que será (*s*, *s'*). La sombra pues de esta línea estará espresada por *as* en proyeccion horizontal, y *t's'* en proyeccion vertical.

F. 15. 349. Si la línea fuese la (*ab*, *a'b'*) y PQR' el plano propuesto, elegiriamos un punto (*b*, *b'*); por él haríamos pasar la paralela al rayo de luz, su traza *d* con la *a* de la línea propuesta, determinarán la traza horizontal *ad* del plano de las dos líneas. Encontrando la interseccion de este plano con el dado, esta seria la sombra; pero cuando por cortar la traza horizontal á la línea de tierra muy lejos, se complica la construccion, se determina la interseccion de la línea paralela al rayo de luz. Sea de uno ú otro modo, la línea *ad* es la traza del plano que pasa por las dos líneas con el plano horizontal ó la sombra de la línea propuesta sobre dicho plano, esta sombra corta al plano propuesto en *c* y *p*, es la interseccion de la paralela al rayo de luz con dicho plano, por manera que uniendo *c* con *p*, *cp* será la proyeccion horizontal de la sombra sobre el plano propuesto. La proyeccion vertical del punto *c* es *c′* y la de *p*, *p′*, luego *c′p′* será la proyeccion vertical de dicha sombra y la total (*acp*, *c′p′*).

350. Sean PQR′ las trazas del plano y (*ab*, *a′b′*) las proyecciones de la recta. Como la sombra debe partir del punto interseccion de la línea con el plano, lo primero que conviene hacer es encontrar esta interseccion. Hecho esto, elegir un punto cualquiera (*a*, *a′*) de la recta, hacer pasar por él la (*as*, *a′s′*) paralela al rayo de luz, encontrar su interseccion y tendremos dos puntos para fijar la posicion de la sombra sobre el plano; el punto *c* en que esta sombra corte la traza R′Q del plano, será un punto de sombra en el plano de proyeccion que ha de convenir con la línea que pase por las trazas verticales de las dos líneas, puesto que la sombra resulta en el plano vertical. *F. 16.*

La mayor dificultad que ofrece la determinacion de la sombra de una línea curva, no depende mas que del mayor número de puntos que se hacen necesarios para trazarla con exactitud.

Sombra arrojada de un círculo.

351. Todos los rayos de luz interceptados por un círculo engendrarán una superficie cilíndrica: la interseccion de esta superficie con los planos ó superficies que encuentre, será la sombra producida por el círculo.

Si el círculo es paralelo á uno de los planos de proyeccion, el cilindro formado por los rayos de luz que intercepta, es oblícuo; si es cortado por el plano á que el círculo es paralelo, la interseccion que este plano produzca será otro círculo idéntico al propuesto; por manera que la cuestion en este caso, queda reducida á encontrar la traza de la paralela al rayo de luz que pasa por el centro y con el radio de círculo propuesto, haciendo centro en la traza de la paralela al rayo de luz correspondiente al plano á que el círculo es paralelo, trazar otro círculo.

Este procedimiento es conveniente, no solo para cuando la sombra es toda producida sobre el plano á que el círculo es paralelo, sino para cuando parte de ella cae sobre el otro plano.

352. Sean (*ab*, *a'b'*) las proyecciones del círculo propuesto (Fig. 17): segun lo dicho, su sombra arrojada sobre el plano horizontal, será otro círculo de igual radio tal como *n'qm's'*. Este círculo corta la línea de tierra en los puntos *n'm'*, lo que da á conocer que parte de la sombra cae en el plano vertical. Para saber qué parte de él la produce, en los puntos *n'm'* trazaremos paralelas al rayo de luz. Estas líneas podrán cortar al círculo en uno ó dos puntos: en el primer caso el punto del círculo que pertenece al de sombra sobre la línea de tierra, queda determinado. En el segundo caso habrá necesidad de trazar los diámetros perpendiculares á la direccion del rayo de luz, con lo que, viendo de qué lado del diámetro se encuentra el punto *m'*, se inferirá el *m* que la produce; asi vendremos en conocimiento de que el arco *mtsrn* es el que produce sombra sobre el plano vertical. Una vez conocida la porcion de curva que produce la sombra, no habrá mas que elegir puntos tales como *tsr*, determinar las trazas verticales, y uniéndolas con los *m'n'*, se tendrá la sombra producida sobre el plano vertical. La determinacion de la sombra de un círculo, en las diversas posiciones que pueda tener con respecto á los planos de proyeccion ó de un plano cualquiera, está limitada á considerar diversas generatrices del cilindro formado por los rayos de luz que intercepta, y determinar sus trazas horizontales ó verticales, que será su interseccion con el plano ó superficie que encuentre. Solo cuando el círculo es perpendicular á los planos de proyeccion, se hace necesario conocer los puntos del círculo en sus dos proyecciones, para lo cual se rebate á uno de los planos (Fig. 18) de proyeccion. Supuesto el giro en el plano horizontal, en él podemos designar los puntos AQTCSR que proyectados horizontalmente corresponderán á los *aqtcsr*, las perpendiculares A*a*, Q*q*.... medirán las correspondientes alturas á que las proyecciones verticales de los mismos puntos están en la proyeccion vertical sobre la línea de tierra. Conocidas por este medio las proyecciones correspondientes á los puntos del círculo propuesto, no habrá mas que considerar las paralelas al rayo de luz que pasan por cada uno de ellos y determinan su sombra.

Este procedimiento no es arbitrario, ni puede ofrecer dificultad el conocer cuándo convienen las trazas horizontales ó verticales. Un punto del espacio no puede producir mas que uno de sombra, este será aquel en que la paralela al rayo de luz que dicho punto intercepta, encuentre al plano.

Dado un cilindro determinar su sombra propia y arrojada.

F. 19. 353. Sea el cilindro recto (ab, $a'b'$). El contorno de su sombra arrojada estará determinado por los planos rasantes al cuerpo y paralelos al rayo de luz. Como sus aristas son perpendiculares al plano horizontal, las trazas de dichos planos serán las tangentes á la base c, d. Como la base superior del cuerpo es un círculo paralelo al plano horizontal, su sombra en este plano sabemos será otro círculo idéntico, y las tangentes á la base inferior habrán de serlo á la sombra de la base superior. Por consiguiente el contorno de la sombra deberá estar representado por la línea $cmfnd$, caso que toda cayese en el plano horizontal; pero vemos está cortada por la línea de tierra en m y n, lo que indica hay una parte mfn, que debe representarse en el plano vertical. Obtenida esta segun hemos visto (número 352) en la sombra producida por un círculo, puede ocurrir, que la línea de tierra solo corte una porcion del círculo ó que corte una ó las dos líneas de sombra producidas por las generatrices de contacto. El primer caso es exactamente el ya indicado del círculo. El segundo caso, obtenida que sea por los mismos medios la sombra ó parte de sombra del círculo en proyeccion vertical, no habrá mas que del punto en que la línea de tierra corta la línea ó líneas de sombra producidas por la una ó las dos generatrices, trazar la tangente ó las tangentes á la curva determinada; de donde se infiere que aun cuando toda la sombra producida por la base superior de un cilindro no corresponda al plano sobre que insiste, se hace necesario determinarla en él para fijar su direccion. Los puntos de contacto c, d

de los planos tangentes, determinan las proyecciones horizontales de las generatrices, líneas de separacion de luz y de sombra, cuyas proyecciones verticales son las *d'*, *c'*; de estas es visible la *c'*. En los cuerpos redondos como el cilindro y el cono, hay una línea brillante que pertenece á la generatriz de contacto del plano tangente perpendicular al rayo de luz, que en este caso es la generatriz correspondiente al punto (*s*, *s'*.)

354. Si el cilindro tuviese la posicion del representado en la (Fig. 20) cuya base superior se encuentra en el plano vertical representada por una elipse, es consiguiente que su proyeccion horizontal habrá de encontrarse en la línea de tierra; mas esto en nada hace variar el procedimiento para obtener su sombra. Se eligen cuantos puntos se crean necesarios tales como (*atb*, *a't'b'*), y considerados como puntos del espacio, se determina su sombra sobre el plano horizontal: esta série de puntos dará una curva; trazadas las tangentes á la base del cilindro y á la curva obtenida, se tendrá el contorno *cbb''a''t''nd*, de la sombra del cilindro sobre el plano horizontal. Esta sombra corta la línea de tierra en los puntos *b* y *n*; además vemos que el cilindro apoya en el plano vertical: luego si de los puntos *bn* trazamos tangentes á la base superior, tendremos determinada la sombra *cbb'*, *dnn'* producida por el cilindro.

355. Si el cilindro fuese el representado por *ag*, *a'g'*, **F. 21.**
cuyas bases son perpendiculares á los planos de proyeccion, no habria mas que determinar las sombras de estas bases segun se ha dicho para obtener la del círculo (número 352). Trazando las tangentes á las sombras producidas tendremos la arrojada *p'yh'd'md*. Las líneas de separacion de luz y de sombra quedarán determinadas por las paralelas (*cc'*, *dd'*, *hh'*, *pp'*) al rayo de luz, que par-

tiendo de los puntos de contacto *c'*, *d'*, *h'*, *p'*, en que las tangentes cortan las bases, cuyos puntos pertenecen á las generatrices *dh*, *cp*. Los puntos *d c* se obtienen tambien por las proyecciones paralelas al rayo de luz tangentes al círculo DC rebatido, y rebatiendo el plano *dd'* sobre su traza horizontal, se encontrará la verdadera magnitud de la paralela al rayo de luz del punto D, cuya traza nos determinará el punto *d'*.

F. 22. 356. Si el cilindro fuese perpendicular al plano vertical, se determinaria el contorno de la sombra del círculo (*ab*, *a'b'*): como la base *cd* apoya en el plano vertical, las proyecciones verticales de las tangentes *q'*. *s'* representarán las trazas de los planos rasantes, paralelos al rayo de luz, y la sombra arrojada de la generatriz de contacto que ha de ser tangente á las dos bases.

El punto de contacto *s'* corresponde á la generatriz *s*, línea de separacion de luz y de sombra no visible el (*q*, *q'*) á la que es visible; el (*e*, *e'*) pertenece al plano tangente perpendicular al rayo de luz que determina la línea brillante.

F. 23. 357. Si fuese el cilindro *ab*; *a'b'*, cuyas bases están en direccion de la paralela al rayo de luz, será necesario por medio del rebatimiento de una de las bases, encontrar la verdadera posicion de la paralela al rayo de luz *cd*, que pasa por el centro *c*; conocida esta trazar las tangentes *mp* y *ns*, y los puntos en que estas corten la proyeccion del rayo de luz *sp*, marcarán los límites de la sombra.

Los puntos de tangencia del círculo rebatido pertenecerán á la generatriz, línea de separacion de luz y de sombra, que proyectados dará las *qr* y *st* á que pertenecen en proyeccion horizontal, y *q'r'*, *s't'* en proyeccion vertical.

Sombra en el interior de un semi-cilindro.

358. Sea el representado por *af*, *a'f'*. La sombra producida por este cuerpo sobre el plano horizontal, está limitada á encontrar las de las aristas á que los planos paralelos al rayo de luz son rasantes, como estas son líneas rectas, unas perpendiculares al plano en que insiste y las que no lo son, están determinadas por los límites de estas, ninguna dificultad ofrece el contorno de esta sombra. La de la generatriz *ab*, en el interior del cilindro, es la interseccion del plano paralelo al rayo de luz que pasa por ella, que habrá de cortar al cilindro segun otra generatriz; por consiguiente conocido un punto de esta, estará determinada su posicion. A este fin, bastará imaginar el plano vertical *ad*, paralelo al rayo de luz; este plano cortará al semi-cilindro segun una semi-elipse que rebatida al plano horizontal dará por interseccion *a''s'd'*; si encontramos la verdadera posicion del rayo de luz que pasa por el estremo (*a*, *a''*) el punto *s'* en que corta la rama de elipse, será la interseccion del rayo de luz interceptado por dicho punto (*a*, *a''*), que proyectado en *s* será la sombra producida, y *sp* la de la arista á que dicho punto pertenece. F. 24.

Si observamos el rebatimiento del círculo *ab* que es *a'b'*, la tangente *gh'* nos hace ver que la porcion *a'h'* es línea de separacion de luz y de sombra, é inferiremos que la sombra arrojada en lo interior debe partir del punto *h*. Para encontrar los puntos de sombra producidos por la porcion (*ha*, *h'a'*) seguiriamos el mismo procedimiento que para determinar el punto *s*, lo que se suprime para la mayor claridad de la figura. Tampoco se hace mencion del medio que se pueda emplear para obtener la semi-elipse rebatida, porque el procedimiento queda bien indicado con los planos auxiliares (*m*, *n*, *r*).

Sombra arrojada de un cono.

F. 25. **359.** Puesto que la sombra arrojada de un cuerpo está determinada por los planos que le son tangentes y paralelos al rayo de luz, los que lo sean al cono habrán de pasar por el cúspide y ser tangentes á la base, luego cualquiera que sea la posicion de un cono, cuya base apoye sobre el plano en que se quiera determinar su sombra, bastará fijar la del cúspide sobre el mismo plano, y de él trazar las tangentes á la base.

Si fuese el cono cuyo vértice es (*s*, *s'*) su sombra *c* nos da á conocer es producida sobre el plano vertical; pero como la base existe en el horizontal, se hace indispensable determinar la traza horizontal *c* para fijar la direccion de la sombra del cono en este plano. Obtenida asi esta sombra, los puntos de interseccion *mn* de las líneas de sombra *ac* y *cb* con la línea de tierra, serán puntos de sombra sobre el plano vertical, que unidos con la traza vertical *c'* de la paralela al rayo de luz que pasa por el vértice, nos dará la sombra arrojada del cono. Los puntos de tangencia son los que determinan las generatrices de separacion de luz y sombra, y la tangente á la base perpendicular á la direccion del rayo de luz, la línea brillante.

F. 26. **360.** Si el cúspide apoyase en el plano vertical, como *ads*, *a'd's'*, el procedimiento no varía. En efecto, considerando el cúspide como un punto del espacio, no habrá mas que determinar su sombra sobre el plano en que insista el cono y los puntos en que esta sombra corta la línea de tierra, unirlos con el vértice.

Sombra producida por un círculo sobre un cilindro.

361. Siendo recto el cilindro (Fig. 27) el procedimiento es muy sencillo. Está reducido á trazar á la base de él las tangentes (*ab*, *dc*) paralelas al rayo de luz; estas determinarán por su encuentro con la circunferencia, la parte *ad* del círculo que produce sombra sobre el cilindro. Conocida esta, se eligen puntos tales como (*amnp*... *a'm'n'p'*...), por los que se hacen pasar las paralelas al rayo de luz, los puntos en que las correspondientes á las proyecciones *amnp* cortan al cilindro, pertenecerán á otras tantas generatrices que proyectadas verticalmente nos darán por su encuentro con las proyecciones verticales del rayo de luz, los puntos de sombra que se buscan.

Si el cilindro fuese oblícuo, no se puede determinar á primera vista la parte del círculo que produce sombra sobre el cilindro, y se hace necesario emplear el procedimiento indicado *Tercer caso*, número 343, para determinar la sombra arrojada de un punto sobre dicha superficie.

Sombra producida en el interior de una semi-esfera por su circunferencia.

362. Como dada una de las proyecciones de una semi-esfera, son conocidas todas las circunstancias de la otra proyeccion, no se hace necesaria esta segunda. *F.* 28.

En tal concepto, si imaginamos un plano secante vertical, paralelo al rayo de luz que pase por el centro *c*, la interseccion que este plano produzca será un semi-círculo de igual radio, que supuesto rebatido al plano horizontal será el *a'b'*. El rayo de luz interceptado por el punto *aa'*, al rebatirlo al plano horizontal, habrá tomado la posicion de *a'm'*: encuentra en *m'* el semi-círculo *a'b'*, luego este será un punto de sombra que proyectado en *ab*, dará el punto *m*. Considerando diferentes planos verticales paralelos, obtendriamos cuantos puntos se juzgasen necesarios para fijar la forma del contorno de dicha sombra.

Sombra arrojada de la base de un cono en lo interior de esta superficie.

F. 29. **363.** Sea el cono *ab* cuya altura se supone conocida: si imaginamos el plano vertical *casb* que pasa por el vértice, la interseccion que este produzca será un triángulo que rebatido al plano horizontal, es *a's'b'*. La paralela al rayo de luz que pasa por *aa'* es la *a'm'*, y por consiguiente *m'* será la sombra producida por *a'* cuya segunda proyeccion será *m*. Si por el cúspide del cono hacemos pasar una paralela (número 340) al rayo de luz, supuesta la horizontal *a'b'* como plano horizontal, *c'* será la traza de dicha línea, y *c* su proyeccion horizontal. Es consiguiente que todos los planos que hagamos pasar por esta línea (*cs*, *c's'*) y corten al cono, lo verificarán segun dos generatrices, por pasar esta línea por el cúspide, y serán paralelas al rayo de luz, por contener una línea que lo es. Asi pues, si por *c* trazamos la *cd*, las *scd* determinará un plano que cortará al cono segun las generatrices *ms*, *sd*. La paralela al rayo de luz que pase por *m* estará contenida en el mismo plano y encontrará la generatriz *sd*: el punto en que la corte será un punto de sombra. Continuando del mismo modo podriamos determinar cuantos puntos se creyesen necesarios para determinarla con toda exactitud.

Sombra propia y arrojada de la esfera.

364. Todos los rayos de luz rasantes á una esfera, determinarán un círculo máximo que será la línea de separacion de luz y sombra: los interceptados por este círculo, producirán un cilindro, y la interseccion de este con los planos de proyeccion, será una elipse ó la sombra producida por la esfera. *F.* 30.

En todo caso, parecia natural conocer primero la línea que produce una sombra, que la sombra producida por esta línea. Mas en general no sucede asi, como se ha visto en el cilindro y el cono. En la esfera por el contrario puede indistintamente conocerse una ú otra ó las dos á la vez.

Sea por ejemplo la esfera cuyas proyecciones son (c, c'). Si por el centro c imaginamos un plano vertical cd paralelo al rayo de luz, este plano producirá con la esfera una interseccion que será un círculo máximo: si rebatimos este círculo al plano horizontal, podremos obtener las tangentes á este círculo, paralelas al rayo de luz. A este fin, supuesto el giro, como siempre será conocida la altura del centro de la esfera, será fácil determinar la verdadera posicion del rayo de luz que pase por este punto c'' despues de rebatido, que será $c''d''$, conocida esta, no habrá mas que trazar las tangentes $n'p'$, $m'q'$ que le sean paralelas. Estas tangentes representarán dos generatrices de la superficie cilíndrica, interceptada por el círculo máximo de la esfera; su interseccion $p'q'$ con la horizontal, serán dos puntos de sombra, y las proyecciones mn los pertenecientes al círculo máximo que los produce.

Como se deja ver, siendo estos los puntos mas altos y mas bajos de la esfera, determinarán los estremos *pq* del eje mayor de la elipse en la sombra arrojada, y los estremos *nm* del eje menor de la elipse, proyeccion del círculo máximo que la produce. El eje menor de la elipse en la sombra arrojada, corresponderá á una perpendicular en la mitad del eje mayor y limitado por los dos planos paralelos tangentes á la esfera, los puntos de contacto de estos planos tangentes *af*, el eje mayor de la elipse que es la proyeccion del círculo máximo que produce sombra; una vez obtenidos los ejes de estas elipses, será fácil construirlas.

La línea de separacion de luz y sombra en proyeccion vertical, será otra elipse cuyo eje mayor corresponderá al diámetro perpendicular al rayo de luz. Por medio del rebatimiento en el plano vertical de la interseccion producida por el plano proyectante de la $c'd'$ obtendriamos el eje menor de la elipse, proyeccion vertical del círculo máximo, línea de separacion de luz y sombra, ó bien encontrando las proyecciones verticales de las secciones horizontales, cuyas proyecciones serian los círculos concéntricos $(\alpha\delta, \alpha'\delta')$ $(\alpha\delta, \alpha''\delta'')$ que cortarian á la línea de separacion de luz y sombra en los puntos r, t, h, k, que proyectados verticalmente darian los $r't'h'k'$... Conviene advertir que las proyecciones horizontales de los puntos *nm* no corresponden á la proyeccion vertical de la paralela $c'd'$ que pasa por el centro de la esfera, sobre quien suelen proyectarse para determinar el eje menor de la elipse en aquella proyeccion.

No siendo posible presentar un tratado que comprenda todos los casos imaginables, no solo porque seria un proceder infinito, sino por lo costoso de obras de esta naturaleza, juzgando haber dado suficiente amplitud á esta teoría, para poder por sí resolver los casos que puedan ocurrir, terminaremos esta parte proponiendo por via de ensayo los problemas que indican las figuras **31**, **32** y **33**, en que la indicacion de las construcciones dan bastante luz para conocer la marcha que debe seguirse en cada uno de ellos.

LIBRO VIII.

CAPITULO PRIMERO.

Consideraciones sobre el sistema convencional de sombras al dibujo Topográfico.

Desde el año de 1792 en que el arquitecto M. Delagardet publicó su traduccion de Vignola, data por lo menos el sistema convencional de sombras, que consiste en considerar los rayos de luz paralelos y en la direccion de la diagonal de un cubo que va desde el ángulo superior de la izquierda, al posterior inferior de la derecha, supuesta una de sus caras horizontal y otra vertical paralela á la vista.

Las ventajas que ofrece este sistema consisten en no tener que tomar en consideracion la distancia al astro de que emana la luz, la de que formando sus proyecciones ángulos de 45.° con la horizontal ó interseccion de los dos planos, la construccion de las sombras ofrece la mayor sencillez y analogía posible con las del natural.

A pesar de tan favorables circunstancias y de no haberse dado á luz ningun otro sistema, no ha sido observado cual convenia para obtener los adelantos que son de desear, y que no es posible conseguir con la variacion de sistemas ó falta de inteligencia en el primitivo. Este mal es casi tan antiguo como el convenio, segun indica M. Cloquet en su tratado de sombras publicado en 1823, en que dice: «Los antiguos Ingenieros, Arquitectos y Dibujantes convinieron en adaptar un sistema que fuese constante y reuniese mas ventajas bajo todos conceptos. Desgraciadamente sus descendientes no estudiaron suficientemente esta parte, y por consecuencia no comprendieron el principio adaptado en su orígen, incurriendo la mayor parte en un error grosero á este objeto, confundian el rayo de luz con sus proyecciones, tomaban particularmente la proyeccion vertical por el rayo luminoso y lo empleaban indistintamente en los dos planos, resultando en el mismo sentido las sombras en la proyeccion horizontal y vertical. Este método vicioso ha sido seguido por largo tiempo en todas las escuelas escepto la dirigida por Monge.» Fácil es inferir que si este sistema no fue comprendido en su origen, por los que habian de aplicarle al dibujo geométrico, no era natural lo fuese por los que se dedicaban esclusivamente al topográfico; de que proviene indudablemente, se haya generalizado este error hasta nuestros dias, lo que está lejos de probar la insuficiencia de este sistema para el logro de la representacion del terreno.

Sin embargo, el deseo de innovar ha hecho que este sistema, aun no bien conocido, sea reemplazado por otro que sobre exigir lentos y muy prolijos procedimientos, ofrece la singularidad de presentar bajo un mismo aspecto, una concavidad y una eminencia.

Este sistema es el conocido con el impropio nombre de luz *cenital*, ó mas propiamente, de *curvas de nivel*. Consiste en imaginar el terreno cortado por planos horizontales, cuyas intersecciones en general serán curvas: si estos planos se suponen equidistantes, el espacio ó zona comprendido entre curva y curva, medirá la altura entre los planos de nivel, por manera que la de una montaña estará medida por la equidistancia entre cada dos planos, repetida tantas veces como zonas haya desde su pie á la cumbre.

Bajo este aspecto, la representacion del terreno puede obtenerse con la mayor aproximacion posible, supuesta una razonable equidistancia entre los planos de nivel; pero no contentos con esto, se propusieron como dicen los defensores de este sistema, no dejar nada al capricho ó gusto del dibujante, ni tener necesidad del estudio de las sombras para sombrear un plano.

Lám. 21. A este fin han sustituido á las sombras, el recargo de las líneas de mayor pendiente, para lo que han ideado un diapason (Figura 1.ª), en que las líneas *m*Q, *n*Q, *o*Q..., miden los espacios entre curva y curva, ó sea la proyeccion horizontal de la línea que indica la pendiente del terreno, formando con trazos una degradacion de tintas que fijan al pie de cada perpendicular, y cuya mayor intensidad la aplican á la Q*x*, ó mas corta que mide el mayor ángulo del terreno, ó sea la línea de mayor pendiente, que dan á conocer con los trazos que corresponden á la Q*z*. Estas líneas están determinadas, porque conocida la equidistancia RQ entre los planos de nivel A y B (Fig. 2.ª) se conocen los demas lados y ángulos de los triángulos R*p*Q, R*n*Q, R*m*Q... Asi la línea *p*Q, proyeccion de R*p*, espresa ademas el ángulo R*p*Q: como la *q*Q proyeccion de R*q* da á conocer el ángulo R*q*Q.

Para hacer uso del diapason (Fig. 1.ª) se recorta siguiendo la línea *m*Q*fan*Q*fa*... como las *n*Q, *o*Q, *p*Q... dan á conocer las distancias entre curva y curva de nivel, correspondiente á tal ó cual ángulo de inclinacion del terreno, se adaptan en sentido perpendicular á la curva, y la que de estas líneas mida la distancia entre una y otra, dará á conocer el ángulo de inclinacion del terreno con el plano horizontal, que se indica con los trazos *Qf* que hay á su pie.

Esta es, segun la opinion de algunos, la incomparable ventaja de este sistema, porque un plano sombreado de este modo, da á conocer las pendientes del terreno en cada zona y en sus diferentes partes.

A poco que se reflexione, y por pocas operaciones de geodesia que se hayan practicado, se vendrá en conocimiento de que si bien el mecanismo de dar las sombras es muy sencillo, las operaciones que exige para llegar á este estado, son muchas, muy largas y prolijas.

Sabido es que para construir una curva semejante á otra, son necesarios un crecido número de puntos, tan próximos unos á otros, que no dejen parte alguna indeterminada; de que se sigue, que si los trazos han de dar á conocer en cada zona ó parte de ella el ángulo de inclinacion, no puede conseguirse sin que los perfiles sean tan unidos como los planos de nivel.

Esto supuesto, ciñéndonos á la escala de $\frac{1}{2000}$ en que se ha convenido representar los planos de corta estension, con la equidistancia entre los planos de nivel de 4 pies ó 0,002 de pie á que equivalen. Para un plano de $\frac{1}{4}$ de legua y que tenga de 90 á 100 pies de desnivel, se hacen necesarios 1250 perfiles que resultarán de 4 pies poco mas ó menos: á cada perfil hay que adaptarle un trazado de planos de nivel, como representa la (Fig. 3.ª), proyectar las intersecciones de cada perfil con los planos sobre la línea que marque su direccion, y cuando todos estos puntos se tengan en el plano, unir los correspondientes á cada curva (1).

No cabe duda de que supuesta la posibilidad de estos procedimientos, un plano asi terminado daria una idea exacta de la configuracion del terreno, pero el crecido número de perfiles que exige, la dificultad que presenta el trazado de los planos de nivel con la estension de 4 pies y las referidas equidistancias, y aun cuando estas sean mayores, son operaciones que esceden en mucho á las facultades físicas del hombre animado de los mayores deseos y auxiliado de los mejores instrumentos; y aun supuestos hechos los perfiles, adaptados á los planos de nivel, y proyectados los puntos de interseccion de cada perfil sobre sus proyecciones respectivas, seria tal el número de puntos que resultarian, que no se concibe por qué medio podria conseguirse fijar las curvas de nivel sin confundir unos con otros los puntos pertenecientes á cada curva, representados sobre un trazado de líneas tan unidas como representa la (Fig. 3.ª).

El resultado de tan numerosas y prolijas operaciones, dado caso que se obtenga un buen éxito, es el de alterar las formas de los cuerpos en términos de confundir las partes salientes y las entrantes, lo que no puede menos de suceder desde el momento en que se invierten las leyes de la naturaleza. Es indudable, por el contraste del claro oscuro es por el cual venimos en conocimiento de la forma que afectan los cuerpos: cualquiera

(1) Aunque se conocen otros procedimientos para el trazado de las curvas de nivel, nos referimos á este por ser mas generalmente conocido y ser tambien de mas general aplicacion para todos los casos, pues si bien en circunstancias dadas, resulta economía de tiempo, segun el procedimiento de M. Clerc, en otras no ofrece ventaja.

que sea el sistema ó posicion de la luz respecto de estos, vemos una parte de su superficie iluminada y otra en sombra, una parte saliente producir sombra y otra entrante privada de luz; este no es un convenio, es un efecto de la naturaleza que se reproduce, lo mismo en los cuerpos geométricos que en las montañas, y la imaginacion acostumbrada á juzgar por el efecto del claro oscuro, no es posible atribuya las mismas formas á un cuerpo cuyas sombras son semejantes á las que ofrece la naturaleza, que á otro que carece de este requisito.

Segun el sistema de recargar las líneas de mayor pendiente, á juzgar por las proyecciones horizontales de la (Fig. 4.ª) aparecen pertenecer á una superficie única, y sin embargo, representan dos cosas diametralmente opuestas, pues la una es la proyeccion horizontal de la concavidad de la superficie esférica A′, y la otra la convexidad de la semi-esfera B′. Aunque este sea un cuerpo geométrico, no puede dudarse de su semejanza con muchas cavidades y eminencias que darian el mismo resultado, como manifiestan las proyecciones horizontales de la (Fig. 5.ª) que provienen de los perfiles A′B′C′, D′E′F′, en que una representa una eminencia, y otra una cavidad que pueden corresponder á una cordillera ó á una encañada.

Ahora bien, la exactitud geométrica de un plano topográfico, es independiente del sistema de sombras que se adapte, puesto que no se opone el trazado de las curvas de nivel, con equidistancias razonables, el que se ilumine bajo uno ú otro sistema; ¿y quién puede dudar en la eleccion entre un sistema que confunde los objetos, y otro que los presenta clara y distintamente sin que puedan confundirse?

Estas consideraciones que dicta la razon natural, y las numerosas y prolijas operaciones detalladas que se hacen necesarias para obtener tales resultados, hacen ver que solo el deseo de innovar, es lo que ha podido motivar la adopcion de un sistema que contraría las leyes de la naturaleza, oponiéndose á los adelantos que su estudio puede proporcionar, bajo la observancia de un razonado sistema que á la vez que facilitase las construcciones, no fuese necesario emplear el dilatado tiempo que el dibujo natural requiere, por la variedad de puntos de vista y direcciones de la luz bajo que un pintor ha de estudiar cada objeto, para formar el caudal de conocimientos que exige su profesion.

Una sola objecion se puede atribuir al sistema de luz oblícua que es comun á todo dibujo en negro; esta consiste en la aplicacion de las sombras á algunos cuerpos que en realidad no les corresponde, por ejemplo, se representa un tejado recargando las vertientes del lado opuesto á la luz, sin embargo que su inclinacion no escede á la de la diagonal del cubo: las montañas tampoco están privadas de luz y se las aplica una sombra mas ó menos cargada en la parte opuesta á la direccion de la luz, de que resulta una exajeracion en la representacion de estos objetos: mas como en uno ni otro caso la mayor ó menor intensidad de las sombras, no miden las alturas del tejado ni la montaña, y contribuye á formar idea de su configuracion, no puede considerarse como un defecto capital, asi como á nadie se le ha ocurrido atribuir este defecto, al magnífico cuadro de las aguas de Moises, por la intensidad de sombra con que está representada la peña á campo raso y en el centro del dia, mientras que se puede reputar por altamente ridículo, el pretender que las operaciones de geodesia pueden en lo general llevarse á tal grado de exactitud, que los trazos hayan de dar á conocer la inclinacion del terreno, esto es, tratándose de planos topográficos militares, por la sencilla razon, no de la imposibilidad de su ejecucion, sino de ser hasta cierto punto innecesario su conocimiento, y exigir para su ejecucion mas tiempo del que es posible disponer.

CAPITULO II.

Bases generales para el dibujo topográfico.

El fijar definitivamente las bases mas convenientes para representar con la mayor exactitud, tanto la configuracion del terreno, como sus diversos accidentes, depende de la escala ó escalas que se elijan, y estas de la estension que se designe y objeto para que son destinados los planos.

En tal concepto se ha convenido en fijar las correspondientes á los planos topográficos, que siendo de un uso mas comun, son tambien los que por su importancia exigen mas escrupulosidad, y que pueden comprenderse en las clases siguientes:

$\frac{1}{2000}$	Planos detallados de las plazas y demas poblaciones ó estensiones de $\frac{1}{4}$ de legua	4 pies.
$\frac{1}{5000}$	Planos de las plazas con sus cercanías hasta el alcance del cañon de á 24	10 pies.
$\frac{1}{10000}$	Planos de plazas con sus cercanías hasta 1 legua y planos de batallas	20 pies.
$\frac{1}{20000}$	Intinerarios militares y reconocimientos de una frontera	40 pies.

Entre estos, los designados por la escala de $\frac{1}{2000}$ son de los que esclusivamente nos ocuparemos, por ser los que ocurren con mas frecuencia, y los que constituyen el verdadero estudio del dibujo topográfico.

Se establece por principio general representar por sus proyecciones horizontales, todos los edificios, puentes, reductos, acueductos, monumentos &c. &c., que por sus dimensiones pueden apreciarse en la escala y con sujecion al sistema de sombras de luz oblicua establecida para el dibujo geométrico.

Siendo 4 pies la menor dimension que se puede apreciar, quedan escluidos de la representacion topográfica las yerbas y arbustos con tal que estos no sean tan abundantes y unidos, que puedan considerarse como matorral.

La configuracion del terreno que consiste en fijar la forma de las montañas y el enlace de unas con otras, se obtendrá con el auxilio de las curvas de nivel, con equidistancias proporcionadas á la naturaleza del terreno, á la importancia y usos para que se destine el plano, y al tiempo de que se pueda disponer.

Las equidistancias entre los planos de nivel, será una misma para cada plano.

Los planos topográficos pueden hacerse á pluma, lavados á tinta y á colorido.

Los planos á pluma se subdividen en dos clases, en planos aligerados que los franceses llaman *planos minutas* y en planos detallados.

Se entiende por planos minutas; una indicacion de los accidentes de terreno y su configuracion en esqueleto, sin aplicar las sombras.

La lámina 22 representa los detalles aligerados del terreno para los planos minutas, tiene por objeto dar á conocer el modo de espresar los diversos accidentes del terreno y facilitar la ejecucion de los planos detallados.

La lámina 23 son las mismas indicaciones para los planos detallados. Ninguna esplicacion admiten para su inteligencia, ni su imitacion está sujeta á reglas; la disposicion particular del individuo, el uso de buena tinta y plumas son los elementos necesarios para conseguir poseer esta clase de dibujo, cuya mayor dificultad no depende de la aplicacion de las sombras, sino de la naturaleza del dibujo á que se debe el escaso número de dibujantes en este género, y la razon porque no es el mas propio para llenar las atenciones del servicio, pues su enseñanza es lenta y de escasos resultados, y la ejecucion de estos planos requiere mucho tiempo y tranquilidad.

Cuando este estudio se hace sin que preceda el de la Geometría Descriptiva, y las sombras, solo se puede exigir que copien con limpieza y exactitud.

La lámina 24 representa los detalles del terreno para los planos á colorido.

Los colores de que se hace uso son la *Sepia*, *Carmin*, *Guta-gamba*, *Azul-indigo* y *Tinta de China*.

Los únicos compuestos, el verde para la pradera y arbolado, que se compone con el azul y Guta-gamba, el arenal con Guta-gamba y un poco de carmin.

Los eriales se indican con un matizado de sepia y verde, para lo que se toma un color en cada uno de los pinceles, se estiende una porcion con uno de ellos, y á continuacion se da el otro color como si fuese uno mismo.

La pradera es una capa igual de verde.

Todos los terrenos en estado de humedad se observa que tienen un color mas oscuro que cuando están secos;

por esta razon los eriales y praderas húmedas y las márgenes de los pantanos se recargan con el mismo color, procurando que no haya un esceso para que no queden contornos duros.

En general todas las aguas corrientes y estancadas, se indican con azul-indigo claro, recargando con el mismo color las márgenes opuestas á la direccion de la luz, y sin que aparezcan pinceladas en ningun sentido, en lo interior de los pantanos, estanques rios ni mares.

Todo arbolado se representa con solo verde y sus sombras arrojadas como las propias del terreno y rocas, con tinta.

Los edificios se representan por los perfiles horizontales, y los gruesos de paredes se indican con capas iguales de carmin. Cuando entre estos hay alguno de que se quiere hacer distincion, en lugar de indicar su planta se marca con las vertientes del tejado, y en vez de carmin se emplea una capa igual de tinta con azul, recargando las caras opuestas á la luz.

Los terrenos cultivados se representan con capas iguales de sepia y los sembrados con un trazado de paralelas suaves del mismo color.

Los arenales como se ha dicho son una mezcla de Guta-gamba y un poco de carmin, se emplea para los terrenos de esta clase, los paseos, caminos, calles de jardines, plazas y calles de poblacion.

En la misma clase de árboles los hay de diferentes dimensiones, pero con objeto de facilitar la ejecucion, parece conveniente fijar las dimensiones de los mas comunes, lo que puede contribuir en gran manera á evitar las monstruosas representaciones que ocasiona la falta de costumbre en representar estos objetos y mas que todo, la de no tener términos de comparacion.

CAPITULO III.

Procedimientos que conviene seguir en la copia de planos.

El topográfico á colorido es sin dificultad el que ofrece mas ventajas en todos conceptos; á la mayor brevedad en su ejecucion, reune mas animacion y propiedad cuando el colorido es adecuado.

Como el uso de los colores tiene tanta analogía con el de la tinta y el estudio de las sombras que ha debido preceder con el dibujo geométrico, es un auxiliar para aprender á representar los objetos; este estudio que ninguna dificultad ofrece, viene á ser un pasatiempo agradable de que por lo general todos sacan partido.

Supuesta la ejecucion de las cartillas con limpieza y propiedad del colorido, se pasa á la copia de planos. A este fin se da principio por delinear á lapiz con toda exactitud los contornos de los rios, caminos, edificios &c., &c. Cuando nada queda por delinear, se pasa á dar las sombras propias del terreno con tinta de china, como indica la lámina 25.

Dadas que sean las sombras propias, se pasa á dar el colorido, para lo que se tienen disueltos los colores, arenal, sepia y verde. Las márgenes de los rios y caminos subdividen un plano en espacio mas ó menos grandes: en los que hay arenales conviene principiar por estender este color, dar á continuacion la sepia toda la márgen interior del arenal, y continuar matizando con sepia y verde. A los demas espacios se adaptan los colores que estén indicados por la clase de terreno, sin preferencia entre ellos y con sujecion á la cartilla.

Adaptado el colorido, se procede á delinear de tinta los caminos reales, carreteros y de herradura; las divisiones territoriales, puentes, cercados; los signos convencionales que dan á conocer el sitio de una batalla; los vados, minas y la naturaleza de las rocas, todo con sujecion á la lámina 29 de signos convencionales.

Los edificios se delinean en general con carmin, las obras de fortificacion con tinta; el colorido de estas es: la sepia para los fosos, el verde para el glasis y parte superior del parapeto, y arenal para el camino cubierto y terraplen de la obra.

Terminado que sea el dar el colorido, se pasa á los detalles de arbolado, recargando con el mismo verde con que se trazó, las partes opuestas á la direccion de la luz, y sus sombras arrojadas con tinta de china, dejando los planos como da á conocer la lámina 26.

CAPITULO IV.

Sistema que conviene seguir para copiar del natural.

Cuando la instruccion ha sido seguida bajo las bases indicadas, toda la dificultad que presenta un plano está reducida á fijar la justa direccion de los caminos, rios y cordilleras, posicion de los edificios, cercados, puentes y reductos, y direccion de las calles cuando se trata del plano de una poblacion; porque habituados en la copia de los planos á representar todos los accidentes del terreno, nada se puede presentar que no tenga semejanza con las cosas que se está acostumbrado á indicar.

Obtenida que sea la representacion geométrica de la estension de terreno que abraza el plano, la posicion y contorno de los edificios, cercados, puentes, direccion de los rios, caminos, cordilleras y vertientes, son un auxiliar tan poderoso para fijar los demas incidentes de las irregularidades intermedias, como la cuadrícula que se construye para copiar un cuadro. Para terminarlo se va recorriendo cada uno de los espacios comprendidos sea por las márgenes de los rios y caminos, por estos y las vertientes, ó por los límites de unos y otros, haciéndose en el borrador y con disfumino, las indicaciones que convenga para dar á conocer las desigualdades del terreno, como indica la lámina 25.

En este estado, si no hubiese tiempo para hacerlo en limpio, por el pronto se humedece con agua, para que no se borre, y si se quisiese hacer mas permanente, con una mezcla de partes iguales de agua y leche. Llegado el caso de hacerlo en limpio, supuesta la exacta delineacion á lapiz, se dan todas las sombras con tinta, y despues el colorido segun se ha indicado.

El uso del disfumino es de mucha utilidad, se presta á toda clase de indicaciones, no es nada delicado para su uso y conservacion; los planos pueden quedar tan bien concluidos y tan permanentes como si fuese á tinta.

Por sencillas que sean las instrucciones que es posible dar para la ejecucion de los planos topográficos, no por esto puede decirse sea fácil el desempeñar debidamente el cargo de levantar un plano si ha de dar una idea clara y exacta de la configuracion del terreno. Al completo conocimiento en la ejecucion de las operaciones de geodesia, es necesario agregar el estudio de las sombras, sin cuyo conocimiento no es posible adquirir una idea clara del modo de representar los objetos. De aquí la gran ventaja que se nota en los adelantos de los que han aprendido el dibujo natural, porque acostumbrados á representar por solo el auxilio de las sombras, las partes salientes y entrantes del rostro humano, en términos de que por la forma de las sombras, su mayor ó menor intensidad, han llegado á conseguir espresar cuantas diferencias pueden hacer distinguir una fisonomía de otra, nada costoso les es hacer aplicacion de estas ideas para representar el terreno.

Mas como la generalidad carece de tan útil instruccion, estamos en la necesidad de facilitar la inteligencia en la aplicacion del claro-oscuro con el auxilio de los cuerpos geométricos, cuya forma y representacion es conocida.

Tan absurdo seria el pretender la rigorosa determinacion de las sombras en las montañas, como el fijar los ángulos de inclinacion del terreno en toda la estension de un plano (1), ó el representar con toda exactitud las diversas clases de rocas. Todo lo que puede conseguirse con el auxilio de las curvas de nivel, con equidistancias proporcionadas, es el conocer la forma de la superficie y poder deducir la semejanza que ofrece una montaña en todo ó en parte, con alguno de los cuerpos redondos.

*Lám.*27. Sabemos por ejemplo que la sombra propia y arrojada de un cono A (Fig. 1.ª) está determinada por los planos tangentes á la superficie, y paralelos al rayo de luz (Sombras, número 342). Como las tangentes D*d* y E*e* representan las trazas del plano paralelo al rayo de luz, es consiguiente que las generatrices de contacto, sean las que partan de los puntos de tangencia, que serán las líneas de separacion de luz y de sombra, segun las que la sombra propia del cono estará bien representada como se manifiesta en B.

---

(1) Entiéndase de los planos militares que no tienen por objeto edificar.

Pero las alturas de las montañas, como hemos dicho en otro lugar, no escede á la de la diagonal del cubo, razon por la que con propiedad en muy raro caso puede haber partes de una montaña privadas de luz. Por esta razon, en vez de determinar las trazas de los planos tangentes, se trazan las tangentes á la base, paralelas á las proyecciones del rayo de luz, cuyo resultado es el que manifiesta la figura C.

Desde luego se deja ver, que si bien hay alguna exageracion en la representacion de esta sombra, su distinta posicion respecto á la anterior, en nada hace variar la forma de esta superficie, que se reconoce ser idéntica á la B, cuya sombra está rigorosamente determinada. Por consiguiente, si en un cuerpo geométrico no se altera la forma de su superficie por esta variacion, es de presumir sufra aun menos la irregular superficie de una montaña.

Esta circunstancia y la de no tener por objeto las sombras, el dar á conocer las alturas de los cuerpos, nos autoriza á considerar bien determinadas las sombras de una montaña A, B, C, D.... por las tangentes paralelas al rayo de luz, segun manifiesta la (Fig. 2).

Las rocas son de todos los objetos que comprende el dibujo topográfico, las que presentan mayores dificultades para la enseñanza; dificultades, en particular para el dibujo á pluma, insuperables á los que no tienen una buena disposicion.

Sin embargo, considero puede sacarse partido aun de los de mediana disposicion, si se principia por manifestar la analogía ó semejanza de las diferentes clases de rocas, con los cuerpos geométricos de que pueden considerarse derivados. Con este objeto está la lámina 28, pero es de advertir que una vez vencida la dificultad de la copia de ellas, para conseguir un buen resultado, es de absoluta necesidad dedicar mucho tiempo á copiar del natural.

El sistema de luz oblícua para los planos topográficos, lo mismo que para los geométricos, no tan solo no se opone á la rigorosa exactitud geométrica con que puedan ser determinados, sinó que se facilitan tanto mas las construcciones de las sombras, cuanto mayor sea la exáctitud con que estén hechos los planos. En tanto que segun hemos visto en el sistema de luz cenital, por mucha exactitud que se emplee, no nos evita el ver confundidos los objetos de opuestas formas. Pero aun prescindiendo de tan desfavorable circunstancia, la aplicacion de este sistema exige una exactitud en las construcciones que solo en ciertos casos (1) podrán realizarse, y hasta cierto punto fuera de estos casos, seria supérfluo, si atendemos al objeto y uso para que son destinados estos planos. A un Ingeniero de caminos y canales, le es de absoluta necesidad el apreciar las irregularidades del terreno por centésimos, mientras que á un General le basta conocer hasta qué punto la irregularidad del terreno le permite hacer uso de las diferentes armas.

Esta diferencia que depende del uso para que se destinan los planos, da á conocer que debe existir tambien en los medios de conseguirlos, con tanta mas razon, cuanto que los planos militares se ejecutan por lo general en tiempo limitado, y que la falta de exactitud en el trazado de las curvas de nivel, ocasiona errores de suma consecuencia.

(1) En las construcciones de obras.

Creo haber dicho lo suficiente para probar la insuficiencia del sistema de luz cenital, para la representacion de los planos topográficos. En cuanto al sistema de luz oblícua, no se puede ver con indiferencia el deplorable error de emplear la proyeccion vertical del rayo de luz, para iluminar los planos horizontales. Esto prueba hasta qué punto ha sido descuidado este ramo de enseñanza, y por qué es tan escaso el número de dibujantes.

En la imprescindible necesidad de adaptar un sistema de sombras para los planos geométricos, no se concibe por qué este sistema ha de variar para los topográficos que no son otra cosa que proyecciones horizontales de cuerpos irregulares.

FIN.

Creo haber dicho lo suficiente para probar la insuficiencia del sistema de luz cenital, para la represeutacion de los planos topográficos. En cuanto al sistema de luz oblicua, no se puede ver con indiferencia el deplorable error de emplear la proyeccion vertical del rayo de luz, para iluminar los planos horizontales. Esto prueba hasta qué punto ha sido descuidado este ramo de enseñanza, y por qué es tan escaso el número de dibujantes.

En la impresendible necesidad de adaptar un sistema de sombras para los planos geométricos, no se concibe por qué este sistema ha de variar para los topográficos que no son otra cosa que proyecciones horizontales de cuerpos irregulares.

FIN.

ÍNDICE DE LAS MATERIAS.

LIBRO I.

CAPÍTULO I.

Nociones preliminares.

Párrafos.

Objeto de la Geometría Descriptiva; sistema convencional de proyecciones rectangulares; modo de dar á conocer un punto y una línea recta ó curva; modificacion de la representacion de los planos; relaciones que existen entre las proyecciones del punto; representacion de las proyecciones de un punto en los cuatro cuadrantes; representacion de las líneas segun su importancia. . . . . . del 1 al 14
Principios generales deducidos del sistema convencional. I al XI

CAPÍTULO II.

Problemas relativos á la línea recta y el plano.

Dadas las proyecciones de una línea, determinar sus trazas, é inversamente. 16
Construir la recta que pasa por dos puntos dados, y la distancia efectiva entre dichos puntos. 19
Construir el plano que pasa por tres puntos dados. 25
Rebatimiento de los planos con los puntos ó líneas que contienen.. 27

Por un punto dado, trazar un plano paralelo á otro cuyas trazas sean dadas. 36
Conocida una de las proyecciones de una linea contenida en un plano, determinar la segunda proyeccion; y conocida una de las proyecciones de un punto contenido en un plano, determinar su segunda proyeccion. 37
Construir las trazas de un plano paralelo á otro, y á una distancia dada. 39
Por una recta dada, hacer pasar un plano paralelo á otra recta dada. 40
Dadas dos paralelas, por un punto de una de ellas trazar una secante tal, que la parte interceptada sea de una magnitud dada. 41
Construir la recta que pasa por dos puntos, el uno dado por su proyeccion horizontal, y el otro por la vertical. . . . 42
Dada la proyeccion horizontal de una recta, y un punto de la vertical, determinar esta recta con la condicion de ser paralela á un plano dado. 43
Hallar la interseccion de dos planos que se cortan. . . . 44
Interseccion de una recta con un plano. 49
Por un punto dado dirigir una recta que encuentre dos rectas dadas de posicion. 52
Hallar la distancia mas corta de un punto á un plano. . . 53
Hallar la mas corta distancia de un punto á una recta dada. 54
Por una recta dada hacer pasar un plano perpendicular á otro plano dado. 57
Por un punto dado trazar un plano perpendicular á dos planos dados. 58
Hallar los ángulos que forma un plano con los de proyeccion. 59
Por un punto dado trazar un plano que forme ángulos dados con los de proyeccion. 60
Determinar el ángulo comprendido entre dos planos dados. . 61
Construir el plano visectriz del ángulo que forman dos planos. 64
Hallar el ángulo de dos rectas dadas. 65
Hallar el ángulo formado por una recta con un plano. . . 67
Dado un triángulo equilátero, construir las proyecciones del tetaedro y el octaedro; y dado un pentágono, construir las del dodecaedro é icosaedro. 68

Por un punto dado trazar una línea que forme un ángulo dado con la línea de tierra. 72
Construir las proyecciones de una línea que forme ángulos dados con los planos de proyeccion. 73
Hallar la posicion y magnitud de la línea que mide la mas corta distancia entre dos líneas que no estan en un plano. 74
Consideraciones sobre la resolucion del ángulo triedro. . . 77
Primer caso.—Dadas las tres caras de un ángulo sólido, hallar los tres ángulos diedros. 78
Reduccion de un ángulo del espacio al plano horizontal. . . 80
Segundo caso.—Dadas dos caras de un ángulo sólido, y el ángulo comprendido, encontrar las demas partes. . . . 81
Tercer caso.—Dadas dos caras de un ángulo sólido, y el ángulo diedro opuesto á una de ellas, hallar las demas partes. 82

LIBRO II.

CAPÍTULO I.

Generacion y representacion de las superficies.

Consideraciones sobre la representacion de las superficies; qué se entiende por superficie; qué se entiende por directriz y generatriz. 84
Diferentes modos de considerar engendrada una superficie cónica y una superficie cilíndrica. 86
Diferentes modos de considerar engendrada una superficie de revolucion. 89
Modo de considerar engendrado un elipsoide; en qué caso será un elipsoide de revolucion, y cuándo será una esfera. 95
Hiperboloide de una hoja. 97
Hiperboloide de dos hojas. 99
Paraboloide elíptico. 100
Paraboloide hiperbólico. 101
Consideraciones sobre la representacion de las superficies. . 102

CAPÍTULO II.

De los planos tangentes en general.

Cuando se dice que un plano es tangente á una superficie, tres curvas trazadas sobre una superficie en un punto dado, tienen sus tres tangentes en un solo plano. . . . 104
Superficies en que el plano tangente en un punto dado, es tangente toda la estension de la generatriz. 106
Si se proyecta sobre un plano una curva y su tangente, las proyecciones de estas dos líneas son tangentes entre sí. . 107
Modo de construir el plano tangente de una superficie; qué se entiende por normal de una superficie, y cómo se construye. 108
Idea general para determinar el contorno aparente de los cuerpos; cómo se obtienen sus proyecciones. 110

CAPÍTULO III.

De los planos tangentes.

Por un punto dado sobre una superficie cilíndrica, trazarla un plano tangente. 114
Trazar un plano tangente á un cilindro por un punto dado fuera de esta superficie. 121
Hallar un plano que sea tangente á un cilindro y paralelo á una recta dada. 122
Por un punto dado sobre una superficie cónica, trazarla un plano tangente. 124
Trazar un plano tangente á una superficie cónica por un punto fuera de ella. 128
Hallar un plano que sea tangente á un cono y paralelo á una recta dada. 129
Por una recta dada trazar un plano tangente á una superficie esférica. 130
Otra solucion del mismo problema. 134

Por una recta dada trazar un plano que forme con el horizontal un ángulo determinado. 135
Trazar á un cilindro un plano tangente cuya inclinacion sobre el plano horizontal sea dada. 136
Por un punto dado trazar una recta que sea tangente á una superficie cónica y paralela á un plano dado. 138
Dadas las proyecciones de cuatro puntos, encontrar el radio de la esfera que pasa por ellos, ó sea circunscribir una esfera á un tetaedro. 139

CAPÍTULO IV.

De los planos tangentes á las superficies de revolucion, cuando el punto de contacto es dado. 140
Por un punto dado sobre una superficie de revolucion, cuyo meridiano es conocido, trazar un plano que sea tangente á esta superficie, y la normal en el punto de contacto.. . 142
Del plano tangente al toro. 149

LIBRO III.

CAPÍTULO ÚNICO.

De las superficies desarrollables. 150
Una superficie cilíndrica es siempre desarrollable; propiedades que se verifican despues del desarrollo, asi en la superficie como en las curvas trazadas sobre ella; propiedades de la hélice. 154
Una superficie cónica es desarrollable; propiedades que se verifican en esta trasformacion; forma de la línea mas corta que puede trazarse en la superficie. 163
Superficies desarrollables cualquiera; arista de retroceso; condiciones para el desarrollo de estas superficies. . . 168
Resúmen de las condiciones para que una superficie cualquiera sea desarrollable, y modo de engendrarlas. . . . 173

LIBRO IV.

CAPÍTULO I.

Interseccion de superficies.

Principios generales para determinar la interseccion y la tangente á la curva interseccion. 178

CAPÍTULO II.

Secciones planas.

Hallar: 1.° la interseccion de un cilindro recto y de un plano; 2.° la superposicion de esta interseccion y su tangente; 3.° el desarrollo del cilindro y la trasformada de la interseccion con su tangente. 185
Interseccion de un cilindro recto por un plano cualquiera. . 192
Interseccion de un plano cualquiera con una curva. . . . 196
Dado un cilindro oblícuo de base cualquiera, hallar: 1.° las proyecciones de la seccion recta de este cilindro; 2.° el giro de esta seccion; 3.° el desarrollo de la superficie y la trasformada de la curva que sirve de base con las tangentes á estas diversas curvas. 197
Dado un cono recto y un plano, hallar: 1.° las proyecciones de la interseccion; 2.° el giro de esta curva; 3.° el desarrollo del cono y la trasformada de la interseccion, con las tangentes á las diversas curvas. 206
Caso en que la seccion cónica sea una hipérbola. 214
Hallar la interseccion de un cono cualquiera por un plano; el desarrollo de la superficie, y la trasformada de la interseccion. 222
Construir la interseccion de un plano con una superficie de revolucion. 224

CAPÍTULO III.

Interseccion de dos superficies cilindricas; determinar los puntos notables, y la tangente á la curva de interseccion. 225

Interseccion de dos superficies cónicas; puntos notables de la curva interseccion y su tangente. 230
Determinar: 1.º la interseccion de una línea con un cilindro; 2.º la interseccion de una línea con un cono, y 3.º la interseccion de una línea con una esfera. 234
Dadas las proyecciones de un prisma triangular, cortarle por un plano, de manera que las intersecciones de este plano con dos caras contiguas, formen ángulo recto. 237

LIBRO V.

De las superficies gauchas.

CAPÍTULO I.

Nociones generales; definicion de las superficies gauchas, y diversos modos de construirlas. 238

CAPÍTULO II.

De la hiperboloide de una hoja; medio de engendrarla. . . 245
Lema 1.º—Si en un triángulo trazamos una trasversal que corte los tres lados ó sus prolongaciones, forma seis segmentos; el producto de tres segmentos no contiguos es igual al producto de los otros tres. 249
Lema 2.º—Si en un cuadrilátero gaucho trazamos dos rectas que cada una se apoye sobre dos lados opuestos ó sobre sus prolongaciones, se cortan en un cierto punto, el producto de cuatro segmentos no contiguos, será siempre igual al producto de los otros cuatro segmentos. 250
Del plano tangente á la hiperboloide. 254
Del centro de la hiperboloide. 256
Resúmen de las proposiciones precedentes sobre la generacion de la hiperboloide; del centro de la hiperboloide y seccion de una linea con la superficie. 258
Identidad de la superficie engendrada por una recta que resbala sobre otras tres rectas fijas, no paralelas á un mismo plano, con la descrita al (número 97). 259

Dos generatrices de un sistema no están en un plano; cada generatriz de un sistema corta todas las rectas del 2.º. . 262
Del plano tangente. 265

CAPÍTULO III.

Del paraboloide hiperbólico.

Qué se entiende por paraboloide hiperbólico; diversos modos de engendrar esta superficie. 266
Propiedades que se deducen de los diversos modos de generar la superficie hiperbólica. 271
Del plano tangente al paraboloide. 273
Secciones planas del paraboloide hiperbólico. 276
Problema: representar un paraboloide engendrado por una recta movible que resbala sobre dos rectas fijas, siendo paralelas á un plano director, y construir el plano tangente de esta superficie por un punto conocido. . . . 283
Aplicacion de la construccion del paraboloide á las cañoneras gauchas. 285
De la rosca de filete triangular. 287
De la rosca de filete cuadrado. 290

LIBRO VI.

Sistema de acotaciones.

Diferencias que hacen distinguir el sistema de acotaciones del de la Geometría Descriptiva; representacion del punto y la línea recta. 291
Del plano. 297
Líneas curvas. 300
Superficies curvas. 302
Superficies irregulares. 303

Problemas.

Dados dos puntos, determinar la longitud de la línea que los une. 305
Dada la proyeccion de un punto determinar la proyeccion de una línea que pasando por dicho punto tenga la inclinacion $\frac{m}{n}$. 307
Por tres puntos dados, hacer pasar un plano ó sea construir la escala del plano que pase por tres puntos dados. . . 308
Por un punto trazar una recta paralela á otra dada. . . . 309
Por un punto dado, hacer pasar un plano paralelo á una recta dada. 310
Determinar la mas corta distancia de un punto á una línea. 311
Encontrar la proyeccion acotada de una línea perpendicular á un plano dado, en un punto del plano tambien dado. . 312
Bajar una perpendicular á un plano de un punto fuera de él. 313
Por dos rectas dadas hacer pasar dos planos paralelos. . . 314
Por un punto dado hacer pasar un plano paralelo á otro dado. 315
Dados dos planos, por sus escalas determinar su comun seccion. 316
Determinar el ángulo que forma un plano con el de comparacion. 319
Determinar la interseccion de una línea con un plano. . . 320
Dadas dos líneas contenidas en un plano vertical, determinar su comun seccion. 321
Por una recta dada hacer pasar un plano perpendicular á otro plano dado. 322
Determinar la interseccion de una curva con una superficie irregular. 323
Determinar la interseccion de un plano dado con una superficie cónica. 324
Por un punto dado sobre una superficie cónica trazarla un plano tangente. 325
Por un punto dado fuera de una superficie cónica trazarla un plano tangente. 326
Por una recta dada trazar un plano que forme con el horizontal un ángulo dado. 327

Trazar un plano tangente á una superficie irregular por una recta cualquiera. 329
Trazar un plano tangente por una recta horizontal á una superficie dada. 332
Por un punto dado trazar un plano tangente á una superficie con una inclinacion mínima. 333

LIBRO VII.

De las sombras.

CAPÍTULO I.

Preliminares. 334

CAPÍTULO II.

Teoría de las sombras. 337

CAPÍTULO III.

Problemas.

Dadas las proyecciones de un punto y las de la paralela al rayo de luz, determinar su sombra arrojada: 1.° sobre los planos de proyeccion; 2.° sobre un plano cualquiera; 3.° sobre un cilindro; 4.° sobre una superficie cónica, y 5.° sobre la esfera. 343
Sombra arrojada de una línea. 344
Sombra arrojada de un círculo. 351
Dado un cilindro, determinar su sombra propia y arrojada. 353
Sombra del interior de un semi-cilindro. 358
Sombra arrojada del cono. 359
Sombra producida por un círculo sobre un cilindro. . . . 361
Sombra producida en el interior de una semi-esfera por su circunferencia. 362
Sombra arrojada de la base de un cono en lo interior de esta superficie. 363
Sombra propia y arrojada de la esfera. 364

ERRATAS.

PÁGINAS.	LÍNEAS.	DICE.	DEBE DECIR.
11	1	conivenciones	convenciones
38	28	unda	funda
150	13	generatrices	tangentes
173	21	plano	punto
188	27	(núm. 5)	(núm. 295)
222	1	tiendo	ten
226	26	determinará	determinarán

ERRATAS.

PÁGINAS.	LÍNEAS.	DICE.	DEBE DECIR.
11	1	conivenciones	convenciones
58	28	unda	funda
150	15	generatrices	tangentes
175	21	plano	punto
188	27	(núm. 5)	(núm. 295)
222	4	tiendo	ten
226	26	determinará	determinarán

CIELSA

GEOMETRIA

DESCRIPTIVA