$x = \frac{200}{265} = \frac{40}{53}$. Pero si uno ó mas términos de la equacion tuviesen la incógnita x lineal en el denominador, y otro ó mas términos la tuviesen en el numerador, siguiendo el mismo método se llegaría á una equacion del segundo grado, cuya resolucion se dará en su lugar: como por exemplo si es $\frac{ab}{x} + c = \frac{dx}{e} + f$, reduciendo á una comun denominacion será $\frac{abe + cex}{ex} = \frac{dx^2 + efx}{ex}$, de donde resulta ser $abe + cex = dx^2 + efx$, que es una equacion del segundo grado.

PROPOSICION VII.

393. Dadas dos equaciones indeterminadas del primer grado, en las que se hallen dos incógnitas, determinar los valores de éstas.

Sean las equaciones dadas $ax + by = cd$, $ex + fy = gh$, en quienes las cantidades conocidas son qualesquiera.

METODO I.

Si se quiere determinar antes el valor de la incógnita x; en las dos equaciones propuestas háganse idénticos los términos que contienen la otra incógnita y, multiplicando la primera equacion por el coeficiente que tiene la y en la segunda, y multiplicando ésta por el coeficiente que tiene la misma y en la primera equacion; con lo qual se tienen las equaciones $afx + bfy = cdf$, $bex + bfy = bgh$: ahora restada la segunda equacion de la primera, resultará la equacion determinada lineal $afx - bex = cdf - bgh$, ó bien $(af - be) \times x = cdf - bgh$; y partiendo por el factor que multiplica á x, será $x = \frac{cdf - bgh}{af - be}$. Con el mismo método se hallará el valor de la incógnita y: pues multiplicando la primera equacion por el coeficiente que x tiene en la segunda, y multiplicando ésta por el coeficiente que la misma x tiene en la primera, se tendrán idénticos los términos, donde se hálle la incógnita x; esto es, será $eax + eby = cde$, $aex + afy = agh$; y restando ahora la segunda de la primera, se tendrá la equacion lineal determinada $bey - afy = cde - agh$, ó bien $(be - af) \times y = cde - agh$; y dividiendo por $be - af$, será $y = \frac{cde - agh}{be - af}$.

METODO II.

Si se quiere determinar antes el valor de la incógnita x; hállese (389) en cada una de las equaciones $ax+by=cd$, $ex+fy=gh$ el valor de la incógnita y, tratando la cantidad x del mismo modo como si fuese conocida, y se tendrá de la primera $y=\frac{cd-ax}{b}$, y de la segunda $y=\frac{gh-ex}{f}$. Comparados ahora los dos valores hallados de y, se tendrá la equacion $\frac{cd-ax}{b}=\frac{gh-ex}{f}$ que contiene la segunda incógnita x: reduciendo esta equacion á un comun denominador, será $\frac{cdf-afx}{bf}=\frac{gbh-ebx}{bf}$, como tambien $cdf-afx=gbh-ebx$: trasponiendo los términos $-bex$, $+cdf$, resultará $bex-afx=bgh-cdf$; y partiendo por $be-af$, se tendrá $x=\frac{bgh-cdf}{be-af}$. Con el mismo método se podrá determinar el valor de la incógnita y: pues de las equaciones propuestas $ax+by=cd$, $ex+fy=gh$ hallados los valores de x, se tendrá $x=\frac{cd-by}{a}$, $x=\frac{gh-fy}{e}$, los quales comparados entre sí dán la equacion $\frac{cd-by}{a}=\frac{gh-fy}{e}$, y por medio de ésta se hallará $y=\frac{cde-agh}{be-af}$.

METODO III.

Si se quiere determinar antes el valor de la incógnita x; hállese en qualquiera de las equaciones propuestas $ax+by=cd$, $ex+fy=gh$, por exemplo en la primera, el valor de la incógnita y, y se tendrá $y=\frac{cd-ax}{b}$; y substituyendo en la segunda equacion este valor en lugar de y, resultará $ex+f\times\frac{cd-ax}{b}=gh$, ó bien $ex+\frac{fcd-afx}{b}=gh$: reduciendo esta equacion á un comun denominador, será $\frac{bex+fcd-afx}{b}=\frac{bgh}{b}$, como tambien $bex+fcd-afx=bgh$: trasponiendo el término fcd, resultará $bex-afx=bgh-fcd$; y partiendo por $be-af$, será $x=\frac{bgh-fcd}{be-af}$. Substituyendo ahora en la equacion $ax+by=cd$, ó bien $by=cd-ax$, en lugar de x el valor hallado, se tendrá $by=cd-a\times\frac{bgh-fcd}{be-af}=\frac{cdbe-abgh}{be-af}$; y partiendo por b ambos miembros, será $y=\frac{cde-agh}{be-af}$.

EXEMPLO I.

394. Sean las dos equaciones $11x+4y=128$,

$25\,x - 3\,y = 144$; y se pide hallar los valores de las incógnitas x, y.

Para hallar el valor de x (Método I.), multiplíquese la primera por 3, y la segunda por 4, y resultarán las dos equaciones $33\,x + 12\,y = 384$, $100\,x - 12\,y = 576$: luego sumando éstas, será $133\,x = 960$; y partiendo por 133, se tendrá $x = \frac{960}{133}$. Para hallar el valor de la y, en las equaciones dadas $11\,x + 4\,y = 128$, $25\,x - 3\,y = 144$, multiplíquese la primera por 25 y la segunda por 11, y resultarán las equaciones $275\,x + 100\,y = 3200$, $275\,x - 33\,y = 1584$; restando la segunda de la primera, se tendrá $133\,y = 1616$; y partiendo por 133, será $y = \frac{1616}{133}$. Por tanto quedan determinados los valores de las dos incógnitas que se piden.

EXEMPLO II.

395. Se ha de determinar los valores que tienen las incógnitas en las equaciones $\frac{3}{2} \times x - \frac{5}{3} \times y = \frac{7}{12}$, $\frac{1}{6} \times x - \frac{4}{3} \times y = -\frac{2}{9}$.

Redúzcase cada una de dichas equaciones á un comun denominador, y se tendrá $18\,x - 20\,y = 7$, $3\,x - 24\,y = -4$. Para determinar el valor de la incógnita x (Método II.) despéjese en ambas la otra incógnita y, como se figura

$18x - 20y = 7$, $18x - 7 = 20y$, $\frac{18x-7}{20} = y$;

$3x - 24y = -4$, $3x + 4 = 24y$, $\frac{3x+4}{24} = y$:

luego se tendrá la equacion $\frac{18x-7}{20} = \frac{3x+4}{24}$, ó bien $\frac{18x-7}{5} = \frac{3x+4}{6}$: reduciendo á una comun denominacion, será $108x - 42 = 15x + 20$; y trasponiendo se tendrá $93x = 62$, de donde $x = \frac{62}{93} = \frac{2}{3}$. Para determinar el valor de y, en las mismas dos equaciones $18x - 20y = 7$, $3x - 24y = -4$, hágase $18x = 20y + 7$, $3x = 24y - 4$, de donde resulta ser $x = \frac{20y+7}{18}$, $x = \frac{24y-4}{3}$; luego será $\frac{20y+7}{18} = \frac{24y-4}{3}$, ó bien $\frac{20y+7}{6} = 24y - 4$; multiplicando por 6, será $20y + 7 = 144y - 24$; y trasponiendo los términos $20y$, -24, será $124y = 31$, de donde $y = \frac{31}{124} = \frac{1}{4}$.

EXEMPLO III.

396. Se proponen las dos equaciones $\frac{21}{4} - \frac{7x}{y} = \frac{7}{4y}$, $\frac{17}{5} - \frac{4y}{x} = - \frac{26}{5x}$.

Reduciendo dichas equaciones á una comun denominacion, se tendrán las dos $21y - 28x = 7$, $17x - 20y = -26$. Para determinar la incógnita x (Método III.), despéjese la otra incógnita y de la misma equacion como se figura $21y - 28x = 7$, $21y = 28x + 7$, $y = \frac{28x+7}{21} = \frac{4x+1}{3}$; y substitúyase este valor de y en la segunda equacion, con lo que se tendrá $17x - 20 \times \frac{4x+1}{3} = -26$; quitando quebrados $51x - 80x - 20 = -78$; reduciendo y trasponiendo el término -20, $-29x = -78 + 20 = -58$; partiendo por -29, será $x = \frac{-58}{-29} = 2$. Substitúyase este valor de x en la equacion $y = \frac{4x+1}{3}$, y será $y = \frac{4 \times 2 + 1}{3} = \frac{9}{3} = 3$. Por tanto quedan determinados los valores de las dos incógnitas x, y, esto es $x = 2$, $y = 3$.

PROPOSICION VIII.

397. Dadas tres equaciones indeterminadas del primer grado, en las que se hallen tres incógnitas, hallar el valor de cada una de éstas.

Sean las equaciones propuestas, I. . $ax + by + mz = cd$, II. . $ex + fy + nz = gh$, III. . $lx -$

$py + rz = tq$, en quienes las cantidades conocidas son qualesquiera. Háganse idénticos los términos que contienen una de las incógnitas, como x, en las equaciones primera y segunda, esto es multiplíquese la primera equacion por e, y la segunda por a, y resultarán las equaciones $aex + bey + emz = dce$, $aex + afy + anz = agh$: restando ésta de aquella, se tendrá la equacion IV.. $(be - af) \times y + (em - an) \times z = dce - agh$, que contiene solo dos incógnitas y, z. Asimismo háganse idénticos los términos que contienen la x en la segunda y tercera equacion propuesta, esto es multiplíquese la segunda por l, y la tercera por e, y se tendrán las equaciones $elx + fly + nlz = ghl$, $elx + epy + erz = etq$: restada ésta de aquella, resultará la equacion V.. $(fl - ep) \times y + (nl - er) \times z = ghl - etq$, que contiene solo dos incógnitas y, z. Por tanto se han reducido las tres equaciones propuestas á la quarta y quinta equacion, en las que solo se hallan dos incógnitas. Manejadas dichas dos equaciones con el mismo método (393), se tendrán los valores de las incógnitas y, z; esto es

$$y = \frac{(\overline{cde - agh} \times \overline{nl - er}) - (\overline{ghl - etq} \times \overline{em - an})}{(\overline{be - af} \times \overline{nl - er}) - (\overline{fl - ep} \times \overline{em - an})}$$

$$z = \frac{(\overline{cde - agh} \times \overline{fl - ep}) - (\overline{ghl - eqt} \times \overline{be - af})}{(\overline{em - an} \times \overline{fl - ep}) - (\overline{be - af} \times \overline{nl - er})}$$

Ahora haciendo idénticos los términos que contienen una de las incógnitas y, z, por exemplo z, en las equaciones primera y segunda, y tambien haciendo idénticos los términos que contienen la misma incógnita z en las equaciones segunda y tercera, con el mismo método arriba expuesto; se tendrán dos equaciones, en las que se hallarán solo las dos incógnitas x, y, y por medio de ellas se determinará del mismo modo el valor de x, esto es

$$x = \frac{(\overline{cdn - ghm} \times \overline{fr - np}) - (\overline{ghr - tqn} \times \overline{bn - fm})}{(\overline{an - me} \times \overline{fr - np}) - (\overline{er - ln} \times \overline{bn - fm})}$$

Igualmente se resolverá este Problema por el método segundo de la Proposicion VII: pues hallado en cada una de las tres equaciones propuestas el valor de una de las incógnitas, como x, y comparado el primer valor de x con el segundo, y el segundo con el tercero, se tendrán dos equaciones en las que se hallarán solo las dos incógnitas y, z: luego por medio de estas equaciones se determinarán los valores de y, z. Asímismo hallando en cada una de las tres equaciones propuestas el valor de otra incógnita y, y comparando el primer valor de y con el segundo, y el segundo con el tercero, se tendrán dos equaciones, en las que se hallarán solo las dos incógnitas x, z: luego por medio de estas equaciones se determinará el valor de x.

Finalmente se resolverá el mismo Problema por el método tercero de la Proposicion VII: pues hallado en una de las equaciones propuestas el valor de una de las incógnitas, como x, y substituído este valor en las otras dos equaciones, se tendrán dos equaciones, en las que se hallarán solo las dos incógnitas y, z: luego por medio de éstas se determinarán los valores de las mismas incognitas y, z, los que substituídos en qualquiera de las equaciones propuestas darán otra equacion determinada que contendrá la sola incógnita x, cuyo valor se hallará por el método dado (389).

COROLARIO I.

398. Si fuesen quatro las equaciones propuestas, y tambien quatro las incógnitas, se reducirían del mismo modo dichas quatro equaciones á tres, en las quales faltaría una de las incógnitas, y se hallarían por el problema antecedente los valores de las tres incógnitas de las equaciones resultantes: luego substituídos dichos valores en qualquiera de las equaciones propuestas, se tendría el valor de la quarta incógnita.

COROLARIO II.

399 En general si el número de las equaciones es igual á él de las incógnitas, se determinarán sus valores con el mismo método. Pero si el número de las equaciones es menor que él de las incógnitas, no se podrán determinar sus valores, y solo en fuerza de dicho método se llegará á algunas equaciones que tendrán menos incógnitas que las propuestas.

ESCOLIO.

400. El método primero de la Proposicion antecedente tiene lugar en las equaciones indeterminadas de qualquier grado, siempre que el número de las incógnitas sea el mismo que él de las equaciones; pero en este caso las equaciones determinadas que contienen separadamente dichas incógnitas resultan del segundo, tercero, &c. grado. Tambien el referido método sirve para quitar qualesquiera cantidades radicales de las equaciones, suponiendo dichas cantidades iguales á otras incógnitas.

EXEMPLO I.

401. Sean las tres equaciones I.. $3x-4y+5z=5$, II.. $7x+6y-2z=32$, III.. x

$-8y+3z=-21$; y se pide determinar los valores de las incógnitas x, y, z.

Multiplíquese la primera equacion por 3, y la segunda por 2, con lo que resultarán las dos $9x-12y+15z=15$, $14x+12y-4z=64$; y sumada la una con la otra, se tendrá la equacion IV.. $23x+11z=79$. Tambien multiplicada la segunda equacion por 4, y la tercera por 3, resultarán las dos $28x+24y-8z=128$, $3x-24y+9z=-63$, las que sumadas dán la equacion V.. $31x+z=65$. Por tanto las tres equaciones propuestas se han reducido á las equaciones quarta y quinta, que contienen solo las dos incógnitas x, z. Ahora multiplíquese la equacion quinta por 11, y resultará la equacion $341x+11z=715$; restada de ésta la quarta, se tendrá $318x=636$, de donde $x=\frac{636}{318}=2$. Tambien por medio de las equaciones quarta y quinta se determinará con el mismo método el valor de z; pero mas facilmente se hallará dicho valor, si se substituye él de x en la equacion quinta: pues será $31\times2+z=65$, de donde $z=65-62=3$. Asímismo si se substituyen los valores de x, z en qualquiera de las equaciones propuestas, por exemplo en la tercera, será $2-8y+3\times3=-21$;

y trasponiendo los términos -21, $-8y$, resultará $2+9+21=8y$, de donde $y=\frac{32}{8}=4$.

EXEMPLO II.

402. Sean las equaciones I.. $x^3+ax^2y+bxy^2+cy^3+d=o$, II.. $x^3+ex^2y+fxy^2+gy^3+h=o$; y se pide hallar una equacion que contenga solo una de las incógnitas como y.

Réstese la segunda equacion de la primera, y se tendrá la equacion $(a-e)\times x^2y+(b-f)\times xy^2+(c-g)\times y^3+d-h=o$, ó bien $x^2y+\frac{b-f}{a-e}\times xy^2+\frac{c-g}{a-e}\times y^3+\frac{d-h}{a-e}=o$; y nombrados los coeficientes constantes i, k, l, resultará la equacion III.. $x^2y+ixy^2+ky^3+l=o$, en quien la incógnita x está elevada á un grado menos que en las propuestas. Ahora multiplíquese esta equacion por x, y la primera por y; y se tendrán las dos equaciones $x^3y+ix^2y^2+kxy^3+lx=o$, $x^3y+ax^2y^2+bxy^3+cy^4+dy=o$; restada ésta de aquella, resultará la equacion $(i-a)\times x^2y^2+(k-b)\times xy^3+lx-cy^4-dy=o$, ó bien $x^2y^2+\frac{k-b}{i-a}\times xy^3+\frac{l}{i-a}\times x-\frac{c}{i-a}\times y^4-\frac{d}{i-a}\times y=o$; y nombrados los coeficientes m, n, p, q, será la equacion IV. . $x^2 y^2 + m x y^3 + n x - p y^4 - q y = o$, en quien la incógnita x está elevada á un grado menos que en las propuestas. Tratadas del mismo modo las equaciones tercera y quarta, se tendrán otras dos, en las que la incógnita x estará elevada á un grado menos que en aquellas. Por tanto multiplíquese la tercera equacion por y, y se tendrá $x^2 y^2 + i x y^3 + k y^4 + l y = o$, que restada de la quarta, dá la equacion $(m - i) \times x y^3 + n x - (p + k) \times y^4 - (q + l) \times y = o$, ó bien $x y^3 + \frac{n}{m-i} \times x - \frac{p+k}{m-i} \times y^4 - \frac{q+l}{m-i} \times y = o$; y nombrados los coeficientes r,s,t, resultará la equacion V. . $(y^3 + r) \times x - s y^4 - t y = o$. Ahora multiplicando ésta por $x y^2$, y la quarta por $y^3 + r$, resultarán las dos $(y^3 + r) \times x^2 y^2 - s y^6 x - t y^3 x = o$, $(y^3 + r) \times x^2 y^2 + (y^3 + r) \times m x y^3 + (y^3 + r) \times n x - (p y^4 + q y) \times (y^3 + r) = o$; y restada ésta de aquella, se tendrá la equacion VI. . $- s y^6 x - t y^3 x - (y^3 + r) \times m x y^3 - (y^3 + r) \times n x + (p y^4 + q y) \times (y^3 + r) = o$. De las equaciones quinta y sexta resulta ser $x = \frac{s y^4 + t y}{y^3 + r}$, $x = \frac{(p y^4 + q y) \times (y^3 + r)}{s y^6 + t y^3 + (y^3 + r) \times m y^3 + (y^3 + r) \times n}$: luego será $\frac{s y^4 + t y}{y^3 + r} = \frac{(p y^4 + q y) \times (y^3 + r)}{s y^6 + t y^3 + (y^3 + r) \times m y^3 + (y^3 + r) \times n}$;

por consiguiente $(s y^4 + t y) \times (s y^6 + t y^3 + m y^6 + m r y^3 + n y^3 + n r) = (p y^4 + q y) \times (y^3 + r)^2$ equacion en que se halla solo la incógnita y. Con el mismo método se hallará otra equacion que contenga solo la incógnita x.

EXEMPLO III.

403. Se pide convertir la equacion $\sqrt{a y} - \sqrt{(a^2 - a y)} = 2 a + \sqrt[3]{a y^2}$ en otra que no tenga términos radicales.

Supóngase $\sqrt{a y} = x$, $\sqrt{(a^2 - a y)} = z$, $\sqrt[3]{a y^2} = v$, y se tendrán las equaciones, I. . $x - z = 2 a + v$, II. . $x^2 = a y$, III. . $a^2 - a y = z^2$, IV. . $a y^2 = v^3$, esto es quatro equaciones y quatro indeterminadas y, x, z, v; y quitando de ellas x, z, v por el método primero, resultará la equacion que se pide. Multiplicando la primera equacion por x, resultará $x^2 - x z = 2 a x + v x$ de quien restada la segunda, dá $- x z = 2 a x + v x - a y$, ó bien V. . $(2 a + v + z) \times x = a y$. Multiplicando la primera equacion por $2 a + v + z$, se tendrá $(2 a + v + z) \times x - 2 a z - v z - z^2 = 4 a^2 + 4 a v + v^2 + 2 a z + v z$, ó bien VI. . $(2 a + v + z) \times x - z^2 - 4 a z - 2 v z = 4 a^2 + 4 a v + v^2$: restada ésta de la quinta, será z^2

$+ (4a+2v) \times z = ay - 4a^2 - 4av - v^2$; pero por la equacion tercera es $z^2 = a^2 - ay$: luego restando ésta de aquella, se tendrá la equacion VII. . $(4a+2v) \times z = 2ay - 5a^2 - 4av - v^2$: multiplicando ésta por z, será $(4a+2v) \times z^2 = 2ayz - 5a^2z - 4avz - v^2z$, ó bien VIII. . $(4a+2v) \times (a^2 - ay) = (2ay - 5a^2 - 4av - v^2) \times z$. Por medio de las equaciones séptima y octava se hallará ser $(2ay - 5a^2 - 4av - v^2)^2 = (4a+2v)^2 \times (a^2 - ay)$, ó bien $v^4 + 8av^3 + (26a^2 - 4ay) \times v^2 + (40a^3 - 16a^2y) \times v + 25a^4 - 20a^3y + 4a^2y^2 = (4a^2 - 4ay) \times v^2 + (16a^3 - 16a^2y) \times v - 16a^3y + 16a^4$; y trasponiendo al primer miembro los términos que contienen la v, y los demás al otro, será $v^4 + 8av^3 + 22a^2v^2 + 24a^3v = -4a^2y^2 + 4a^3y - 9a^4$, ó bien (por ser $v^3 = ay^2$, $v^4 = ay^2v$) $22a^2v^2 + (24a^3 + ay^2) \times v = -12a^2y^2 + 4a^3y - 9a^4$ que partida por a, dá la equacion IX. . $22av^2 + (24a^2 + y^2) \times v = -12ay^2 + 4a^2y - 9a^3$: multiplicando ésta por v, y la quarta por $22a$, resultarán las equaciones $22av^3 + (24a^2 + y^2) \times v^2 = (-12ay^2 + 4a^2y - 9a^3) \times v$, $22av^3 = 22a^2y^2$: restando ésta de aquella, se tendrá $(24a^2 + y^2) \times v^2 = (-12ay^2 + 4a^2y - 9a^3) \times v - 22a^2$

y^2, ó bien X.. $(24 a^2 + y^2) \times v^2 + (12 a y^2 - 4 a^2 y + 9 a^3) \times v = - 22 a^2 y^2$: multiplicando ésta por $22 a$, y la novena por $24 a^2 + y^2$, se tendrán las dos $(24 a^2 + y^2) \times 22 a v^2 + (12 a y^2 - 4 a^2 y + 9 a^3) \times 22 a v = - 484 a^3 y^2$, $(24 a^2 + y^2) \times 22 a v^2 + (24 a^2 + y^2)^2 \times v = (24 a^2 + y^2) \times (- 12 a y^2 + 4 a^2 y - 9 a^3)$: restando la segunda de la primera, resultará $(- y^4 + 216 a^2 y^2 - 88 a^3 y - 178 a^4) \times v = 12 a y^4 - 4 a^2 y^3 - 187 a^3 y^2 - 96 a^4 y + 216 a^5$, ó bien XI.. $P v = Q$, llamado Q el segundo miembro, y P el factor de la v en el primero: multiplicando esta equacion por $22 a v$, y la novena por P, se tendrán las dos $22 a P v^2 = 22 a Q v$, $22 a P v^2 + (24 a^2 P + y^2 P) \times v = - 12 a y^2 P + 4 a^2 y P - 9 a^3 P$, de quien restada la primera, resultará $(24 a^2 P + y^2 P) \times v = - 12 a y^2 P + 4 a^2 y P - 9 a^3 P - 22 a Q v$, ó bien la equacion XII.. $(24 a^2 P + y^2 P + 22 a Q) \times v = - 12 a y^2 P + 4 a^2 y P - 9 a^3 P$. Por medio de las equaciones undécima y duodécima se hallará la equacion $24 a^2 P Q + y^2 P Q + 22 a Q^2 = - 12 a y^2 P^2 + 4 a^2 y P^2 - 9 a^3 P^2$, cuyos términos son todos racionales.

PROPOSICION IX.

404. Construir las equaciones determinadas del primer grado.

I. Si la incógnita x es igual á la suma ó diferencia de las rectas expresadas por las letras a, b, c, &c. como $x = a + b + c$, $x = a + b - c$; tomada en el primer caso una recta igual á las a, b, c juntas, y en el segundo quitada una recta igual á c de otra igual á $a + b$, se tendrá determinado el valor de la incógnita x.

II. Si la incógnita x es igual á una fraccion, como $x = \frac{ab}{c}$, en quien c, a, b expresan rectas conocidas; se tirarán dos rectas indefinidas (*Fig.* 1.) AE y AD con qualquier ángulo; en una de ellas se tomará $AC = c$, $AE = a$, y en la otra $AB = b$; despues se unirán los puntos B y C con la recta BC, á quien se tirará por el punto E la paralela ED: será $AD = x$. Siendo pues BC y DE paralelas, será $AC : AE = AB : AD$, esto es $c : a = b : AD$: luego $AD = \frac{ab}{c} = x$. Tambien si la incógnita x es igual á la fraccion $\frac{abe}{cd}$; se hallará una quarta proporcional á las rectas c, a, b con el método antecedente; y llamada m la recta que se ha determinado, será $x = \frac{ab}{c} \times \frac{e}{d} = \frac{me}{d}$ que se construirá del mismo modo.

III. Si la incógnita x es igual á la suma ó diferencia de fracciones, como $x = \frac{ab}{c} + \frac{de}{f}$, $x = \frac{ab}{c} - \frac{de}{f}$; hallados los valores de las fracciones $\frac{ab}{c}$, $\frac{de}{f}$ por el caso antecedente, se determinará el valor de la x por el caso primero.

EXEMPLOS.

405. Si se ha de construir la equacion $x = \frac{ab + cb}{d + e}$, se observará que $ab + cb$ es lo mismo que $(a + c) \times b$; y así hallada una quarta proporcional á las rectas $d + e$, $a + c$, b, se tendrá el valor de la incógnita x.

Si se propone construir la equacion $x = \frac{a^2 + b^2}{d + e}$, hágase $b^2 = am$, ó bien $\frac{b^2}{a} = m$ cuyo valor se determinará, hallando una quarta proporcional á las rectas a, b, b, por ser $a : b = b : m$. Hecha dicha substitucion en la equacion propuesta, será $x = \frac{a^2 + am}{d + e} = \frac{(a + m) \times a}{d + e}$; por consiguiente hallada una quarta proporcional á las rectas $d + e$, $a + m$, a, se tendrá construída la equacion propuesta.

Sea $x = \frac{b^3 c}{a^3 + b^3}$; hágase $b^3 = a^2 m$, ó bien m

$=\frac{b^3}{a^2}$, y será $x=\frac{a^2mc}{a^3+a^2m}=\frac{mc}{a+m}$: luego por medio de las tres proporciones $a:b=b:\frac{b^2}{a}$, $a:b=\frac{b^2}{a}:\frac{b^3}{a^2}=m$, $a+m:m=c:x$, se tendrá la recta igual á la incógnita x.

Si se pide construir la equacion $x=\frac{a^3b}{a^3+b^3+ac^2}$; hágase $b^3=a^2f$, $c^2=ap$, y será $x=\frac{a^3b}{a^2f+a^3+a^2p}=\frac{ab}{f+a+p}$.

PROPOSICION X.

406. Hallar la linea que pertenece á las equaciones indeterminadas del primer grado $y=\frac{ax}{b}$, $y=-\frac{ax}{b}$, en quienes $\frac{a}{b}$ expresa el agregado de todas las cantidades conocidas que multiplican á la abscisa x. *Fig.* 3.

En la recta AB prolongada de una y otra parte tómese $AC=b$, y tírese $CD=a$ que haga con AC qualquier ángulo; la recta indefinida Ff que pasa por los puntos A, D, será la línea de las equaciones dadas. Pues tomada qualquier abscisa $AB=x$, y tirada la ordenada BG paralela á CD, será $AC:CD=AB:BG$, esto es $b:$

$a = x : BG$; por consiguiente $BG = \frac{ax}{b} = y$. Tambien tomada qualquier abscisa Ab en parte contraria á las positivas, y tirada la ordenada bg paralela á CD, será $AC : CD = Ab : bg$, esto es $b : a = - x : bg$; por consiguiente $bg = - \frac{ax}{b} = y$.

PROPOSICION XI.

407. Hallar la línea que pertenece á las equaciones indeterminadas del primer grado $y = \frac{ax}{b} + c$, $y = - \frac{ax}{b} - c$, en quienes $\frac{a}{b}$ expresa el agregado de todas las cantidades conocidas que multiplícan á la abscisa x, y además c expresa el agregado de todas las cantidades constantes. *Fig.* 3.

Supuesta la referida (406) construccion del triángulo ACD, tírese por el punto A la recta Hh paralela á CD, y tómese $AH = Ah = c$; tiradas por los puntos H, h las rectas HL, hl paralelas á Ff, será HL la línea de la equacion $y = \frac{ax}{b} + c$, y hl la de la equacion $y = - \frac{ax}{b} - c$. Pues tomada qualquier abscisa $AB = x$, y tirada la ordenada BL paralela á CD, será por lo demostrado (406) $BG = \frac{ax}{b}$; pero en el paralelográmo $AHLF$ es $FL = AH = c$: luego será $BL = \frac{ax}{b} + c = y$. Igualmente tomada qualquier abscisa $Ab = -x$ en parte contraria á las positivas, y tirada la ordenada bl paralela á CD, será (406) $bg = -\frac{ax}{b}$; pero es $gl = Ah = -c$: luego se tendrá $bl = -\frac{ax}{b} - c = y$.

PROPOSICION XII.

408. Hallar la línea que pertenece á las equaciones indeterminadas del primer grado $y = \frac{ax}{b} - c$, $y = c - \frac{ax}{b}$. *Fig.* 4, 5.

Supuesta la referida (406) construccion del triángulo ACD, tírense las rectas Ah, AH paralelas á CD, é iguales á c, y tambien las rectas hM, HN paralelas á AD; será la recta hM la línea de la equacion $y = \frac{ax}{b} - c$ (*Fig.* 4.), y la recta HN la de la equacion $y = c - \frac{ax}{b}$ (*Fig.* 5.).

I. Tomada qualquier abscisa $AB = x$ (*Fig.* 4.), y tirada la ordenada BM que se prolongará hasta encontrar á la recta AD tambien prolongada en G, será (406) $BG = \frac{ax}{b}$; pero $Ah = MG = c$:

luego será $BM = \frac{ax}{b} - c = y$. Obsérvese que quando la abscisa $AB = x$ es mayor que AO, la ordenada $y = BM$ es positiva; quando la abscisa x es igual á AO, la ordenada y es cero; y finalmente quando la abscisa x es menor que AO, la ordenada y correspondiente á dicha abscisa es negativa.

II. Asímismo tomada qualquier abscisa $Ab = -x$ (*Fig.* 5.), y tirada la ordenada bN que se prolongará hasta encontrar á la recta DA tambien prolongada en g, será (406) $bg = -\frac{ax}{b}$; pero $AH = Ng = c$: luego será $bN = c - \frac{ax}{b} = y$. Obsérvese que quando la abscisa $Ab = -x$ es menor que AP, la ordenada $bN = y$ es positiva; quando dicha abscisa es igual á AP, la ordenada es cero; y finalmente siempre que la abscisa $Ab = -x$ es mayor que AP, la ordenada que le corresponde es negativa.

COROLARIO.

409. Infiérese de lo demostrado (408, 407, 406) que la línea recta es la línea á las equaciones indeterminadas del primer grado que contienen las variables x, y.

ESCOLIO.

410. Quando sucede que á qualquier abscisa x corresponde una ordenada constante, como $y = \frac{ab}{c}$, en tal caso la línea de la equacion será una recta paralela á la línea de las abscisas. Tambien si sucede que á qualquier ordenada y corresponde una abscisa constante, como $x = \frac{ab}{c}$, la linea de la equacion será una recta perpendicular á dicha abscisa.

De la Resolucion y Construccion de las Equaciones del segundo grado.

PROPOSICION XIII.

411. Hallar las raíces de la equacion del segundo grado $x^2 + ax = bc$, en quien las cantidades conocidas a, b, c pueden ser indistintamente positivas ó negativas.

Añádase á los dos miembros de dicha equacion el quadrado del semicoeficiente del segundo término, esto es $\frac{a^2}{4}$, con el que se completará el quadrado de los términos que contienen la incógnita, y se tendrá $x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = bc + \frac{a^2}{4}$: extrayendo la raíz quadrada de ambos miembros, será $x+\frac{a}{2}=\pm\sqrt{(bc+\frac{a^2}{4})}$, de donde $x=-\frac{a}{2}\pm$ $\sqrt{(bc+\frac{a^2}{4})}$: luego las raíces de la equacion propuesta serán $x=-\frac{a}{2}+\sqrt{(bc+\frac{a^2}{4})}$, $x=-\frac{a}{2}-\sqrt{(bc+\frac{a^2}{4})}$, las que son reales, si las dos cantidades b y c son positivas ó negativas; y si qualquiera de estas es negativa, y además $\frac{a^2}{4}<bc$, dichas raíces serán imaginárias.

COROLARIO.

412. Si es $a=o$, la equacion propuesta vendrá á ser $x^2=bc$, y sus raíces serán $x=\sqrt{bc}$, $x=-\sqrt{bc}$. Pero si las cantidades b y c, ó una de ellas es igual á cero, dicha equacion vendrá á ser $x^2+ax=o$, y sus raíces serán $x=o$, $x=-a$.

EXEMPLO I.

413. Se pide hallar las raíces de la equacion $x^2-2x=24$.

Háganse idénticas las equaciones $x^2+ax=bc$, $x^2-2x=24$, por medio de las suposiciones $a=-2$, $bc=24$; y substitúyanse estos valores en las raíces $x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{(bc+\frac{a^2}{4})}$ de la fórmula de toda equacion quadrada: con lo que se tendrán las raíces de la propuesta $x = 1 \pm \sqrt{(24+1)} = 1 \pm 5$, esto es, $x = 6$, $x = -4$.

EXEMPLO II.

414. Se propone determinar las raíces de la equacion $x^2 + 10x = -27$. Para resolver esta equacion segun el método general, añádase á ambos miembros el quadrado de 5 semicoeficiente de x, y resultará $x^2 + 10x + 25 = 25 - 27 = -2$; sáquese la raíz quadrada de ambos miembros, y se tendrá $x + 5 = \pm \sqrt{-2}$: luego $x = -5 \pm \sqrt{-2}$, esto es, $x = -5 + \sqrt{-2}$, $x = -5 - \sqrt{-2}$.

EXEMPLO III.

415. Se ha de resolver la equacion $b^2 x - a^2 x - cx^2 + \frac{a^2 b^2}{c} = 0$.

Trasponiendo los tres primeros términos de la equacion propuesta al otro miembro, será $\frac{a^2 b^2}{c} = cx^2 + (a^2 - b^2) \times x$; partiendo por c, $x^2 + \frac{a^2 - b^2}{c} \times x = \frac{a^2 b^2}{c^2}$; añadiendo á ambos miembros el quadrado de $\frac{a^2 - b^2}{2c}$ semicoeficiente del segundo término, se tendrá $x^2 + \frac{a^2 - b^2}{c}$

$$x + \frac{a^4 - 2a^2 b^2 + b^4}{4c^2} = \frac{a^2 b^2}{c^2} + \frac{a^4 - 2a^2 b^2 + b^4}{4c^2}$$

$= \frac{a^4 + 2a^2 b^2 + b^4}{4c^2}$; sacando la raíz quadrada, x

$+ \frac{a^2 - b^2}{2c} = \pm \sqrt{\frac{a^4 + 2a^2 b^2 + b^4}{4c^2}} = \pm \frac{a^2 + b^2}{2c}$; y

trasponiendo el término conocido $\frac{a^2 - b^2}{2c}$, resultará

$x = \frac{b^2 - a^2}{2c} \pm \frac{a^2 + b^2}{2c}$, esto es, $x = \frac{b^2}{c}$, $x = -\frac{a^2}{c}$.

PROPOSICION XIV.

416. Toda equacion determinada $x^{2m} + a x^m = b$ que consta de tres términos, de modo que el exponente de x en el primero es número entero y positivo, y además dúplo del exponente de x en el segundo término, se reduce al segundo grado.

Hágase $x^m = z$; y la equacion propuesta se reducirá á la del segundo grado $z^2 + a z = b$.

COROLARIO

417. Teniendo (411) la equacion $z^2 + a z = b$ las raíces $z = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a^2}{4} \pm b)}$, será tambien $x^m = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a^2}{4} + b)}$; y extrayendo la raíz m de ambos miembros, será $x = \sqrt[m]{(-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b})}$.

si m es número impár; y si es par, será $x = \pm \sqrt[m]{}$ $\left(-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)$.

EXEMPLO I.

418. Se pide resolver la equacion $x^4 - \frac{5}{2} \times x^2 = -\frac{9}{16}$.

Hágase $x^2 = z$; y la equacion propuesta se reducirá á la del segundo grado $z^2 - \frac{5}{2} \times z = -\frac{9}{16}$, cuyas raíces son $z = \frac{5}{4} \pm 1$; pero $z = x^2$: luego será $x^2 = \frac{5}{4} \pm 1$; y extrayendo la raíz quadrada, se tendrá $x = \pm \sqrt{(\frac{5}{4} \pm 1)}$, esto es, $x = \sqrt{(\frac{5}{4} + 1)} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$, $x = \sqrt{(\frac{5}{4} - 1)} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, $x = -\sqrt{(\frac{5}{4} + 1)} = -\frac{3}{2}$, $x = -\sqrt{(\frac{5}{4} - 1)} = -\frac{1}{2}$, que son las quatro raíces de la equacion propuesta.

EXEMPLO II.

419. Se propone resolver la equacion $x^4 - (52 c^2 + 2 d^2) \times x^2 = -576 c^4 + 48 c^2 d^2 - d^4$.

Tómese la fórmula general $x^{2m} + a x^m = b$, y háganse las suposiciones $m = 2$, $a = -52 c^2 - 2 d^2$, $b = -576 c^4 + 48 c^2 d^2 - d^4$. Substitúyanse estos valores en la fórmula $x = \pm \sqrt[m]{\left(-\frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}\right)}$; y será $x = \pm \sqrt{(26 c^2 + d^2 \pm \sqrt{100 c^4 + 100 c^2 d^2})} = \pm \sqrt{(26 c^2 + d^2 \pm 10 c \sqrt{c^2 + d^2})}$. Sin embargo de que no se pueda extraer la raíz quadrada de $c^2 + d^2$, se podrá extraer la de toda la cantidad (A) $26 c^2 + d^2 \pm 10 c \sqrt{(c^2 + d^2)}$, que es $5 c \pm \sqrt{(c^2 + d^2)}$. Por tanto se tendrá $x = \pm (5 c \pm \sqrt{c^2 + d^2})$, esto es, $x = 5 c + \sqrt{c^2 + d^2}$, $x = 5 c - \sqrt{(c^2 + d^2)}$, $x = -5 c - \sqrt{(c^2 + d^2)}$, $x = -5 c + \sqrt{(c^2 + d^2)}$, que son los quatro valores de x en la equacion propuesta.

ESCOLIO.

420. En el exemplo antecedente facilmente se reconoce la raíz quadrada de la cantidad (A) compuesta de la parte racional $26 c^2 + d^2$, y del radical del segundo grado $10 c \sqrt{(c^2 + d^2)}$; pero quando esto no suceda, se hará uso del método general que se dá en la Proposicion siguiente.

PROPOSICION XV.

421. Extraer la raíz quadrada de una cantidad

compuesta de una parte racional y de un radical del segundo grado.

I. Sea dicha cantidad $A+\sqrt{B}$, en quien A es la parte racional, y $\sqrt{B}$ la parte radical del segundo grado. Supóngase $\sqrt{(A+\sqrt{B})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, en quien x, y son cantidades indeterminadas, pero racionales: quadrando ambos miembros de dicha equacion, será $A+\sqrt{B}=x+y+2\sqrt{xy}$. Como las cantidades x, y son indeterminadas, se podrá igualar la parte racional $x+y$ á la parte racional A, y la parte radical $2\sqrt{xy}$ á la parte radical $\sqrt{B}$; por lo que se tendrán las dos equaciones $x+y=A$, $2\sqrt{xy}=\sqrt{B}$: elevando al quadrado una y otra equacion, será $x^2+2xy+y^2=A^2$, $4xy=B$; y restando ésta de aquella, resultará $x^2-2xy+y^2=A^2-B$, de donde se infiere que si $A+\sqrt{B}$ es un quadrado perfecto, lo deberá ser tambien A^2-B: ahora extrayendo la raíz quadrada de uno y otro miembro, será $x-y=\pm\sqrt{(A^2-B)}$; pero $x+y=A$: luego sumando la primera equacion con la segunda, se tendrá $2x=A\pm\sqrt{(A^2-B)}$, de donde $x=\frac{A\pm\sqrt{(A^2-B)}}{2}$; y restando dicha primera equacion de la segunda, será $2y=A\mp\sqrt{(A^2-B)}$, de donde $y=\frac{A\mp\sqrt{(A^2-B)}}{2}$; y porque $x+y$ debe ser igual á A, será $x = \frac{A + \surd(A^2 - B)}{2}$, $y = \frac{A - \surd(A^2 - B)}{2}$;

por consiguiente $\sqrt{x} = \pm \sqrt{\frac{A + \surd(A^2 - B)}{2}}$,

$\sqrt{y} = \pm \sqrt{\frac{A - \surd(A^2 - B)}{2}}$; pero $\sqrt{(A + \sqrt{B})}$

$= \sqrt{x} + \sqrt{y}$: luego será $\sqrt{(A + \sqrt{B})} =$

$\sqrt{\frac{A + \surd(A^2 - B)}{2}} + \sqrt{\frac{A - \surd(A^2 - B)}{2}}$, ó bien

$\sqrt{(A+\sqrt{B})} = -\sqrt{\frac{A + \surd(A^2 - B)}{2}} - \sqrt{\frac{A - \surd(A^2 - B)}{2}}$.

Si en estas expresiones es $A^2 - B$ un quadrado perfecto (lo que debe suceder siempre que $A + \sqrt{B}$ lo sea); la raíz quadrada de $A + \sqrt{B}$ se tendrá por dos radicales del segundo grado; ó por una cantidad racional y por un radical del segundo, si uno de dichos dos radicales es un quadrado perfecto.

II. Si la cantidad dada es $A - \sqrt{B}$, se supondrá $\sqrt{(A - \sqrt{B})} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$, y se hallará con el mismo método $\sqrt{(A - \sqrt{B})} = \sqrt{\frac{A + \surd(A^2 - B)}{2}}$ $- \sqrt{\frac{A - \surd(A^2 - B)}{2}}$, ó bien $\sqrt{(A - \sqrt{B})} =$ $-\sqrt{\frac{A + \surd(A^2 - B)}{2}} + \sqrt{\frac{A - \surd(A^2 - B)}{2}}$.

III. Tambien si la cantidad dada es $A + \sqrt{-B}$, la que está compuesta de la parte racional A, y del radical imaginario $\sqrt{-B}$; se demostrará con el mismo método ser $\sqrt{(A+\sqrt{-B})}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{(A^2+B)}}{2}}$ $+\sqrt{\frac{A-\sqrt{(A^2+B)}}{2}}$, y tambien $\sqrt{(A+\sqrt{-B})}$ $=-\sqrt{\frac{A+\sqrt{(A^2+B)}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{(A^2+B)}}{2}}$, en cuyas expresiones $\sqrt{\frac{A+\sqrt{(A^2+B)}}{2}}$ es un radical real, y $\sqrt{\frac{A-\sqrt{(A^2+B)}}{2}}$ imaginario.

IV. Finalmente si la cantidad dada es $A-\sqrt{-B}$, se demostrará del mismo modo ser $\sqrt{(A-\sqrt{-B})}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{(A^2+B)}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{(A^2+B)}}{2}}$, y tambien $\sqrt{(A-\sqrt{B})}=-\sqrt{\frac{A+\sqrt{(A^2+B)}}{2}}$ $+\sqrt{\frac{A-\sqrt{(A^2+B)}}{2}}$.

COROLARIO.

422. Si en el caso tercero de la Proposicion antecedente se supone $\sqrt{\frac{A+\sqrt{(A^2+B)}}{2}}=m$; $\sqrt{\frac{-A+\sqrt{(A^2+B)}}{2}}=n$; la raíz quadrada de $A+\sqrt{-B}$ se podrá representar siempre por esta fórmula $m+n\sqrt{-1}$, en quien m, n son cantidades reales. Hechas las mismas suposiciones en el caso quarto, la raíz quadrada de $A-\sqrt{-B}$ se podrá representar por la fórmula $m-n\sqrt{-1}$, en la que m, n son cantidades reales.

EXEMPLO I.

423. Se pide extraer la raíz quadrada de la cantidad $7+\sqrt{48}$.

Tómese la fórmula $\sqrt{(A+\sqrt{B})}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{(A^2-B)}}{2}}$ $+\sqrt{\frac{A-\sqrt{(A^2-B)}}{2}}$, y háganse en ella las substituciones $A=7$, $B=48$; con lo que será $\sqrt{\frac{7+\sqrt{(49-48)}}{2}}+\sqrt{\frac{7-\sqrt{(49-48)}}{2}}=\sqrt{\frac{7+1}{2}}$ $+\sqrt{\frac{7-1}{2}}=2+\sqrt{3}$. Tambien por ser $\sqrt{(A+\sqrt{B})}=-\sqrt{\frac{A+\sqrt{(A^2-B)}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{(A^2-B)}}{2}}$, será $\sqrt{(7+\sqrt{48})}=-2-\sqrt{3}$. Por tanto la raíz quadrada de la cantidad propuesta es $2+\sqrt{3}$, ó $-2-\sqrt{3}$.

EXEMPLO II.

424. Se propone extraer la raíz quadrada de $5+\sqrt{24}$.

En la fórmula $\sqrt{(A+\sqrt{B})}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{(A^2-B)}}{2}}$ $+\sqrt{\frac{A-\sqrt{(A^2-B)}}{2}}$ háganse las substituciones $A=5$, $B=24$; y se tendrá $\sqrt{(5+\sqrt{24})}=$ $\sqrt{\frac{5+\sqrt{(25-24)}}{2}}+\sqrt{\frac{5-\sqrt{(25-24)}}{2}}=\sqrt{\frac{5+1}{2}}$

$+ \sqrt{\frac{5-1}{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$. Igualmente será $\sqrt{(5+\sqrt{24})} = -\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

EXEMPLO III.

425. Se ha de extraer la raíz quadrada de $3 + \sqrt{-40}$.

Tómese la fórmula $\sqrt{(A+\sqrt{-B})} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{(A^2+B)}}{2}} + \sqrt{\frac{A-\sqrt{(A^2+B)}}{2}}$, y substitúyanse en ella $A = 3$, $B = 40$; con lo que será $\sqrt{(3+\sqrt{-40})} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{(9+40)}}{2}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{(9+40)}}{2}} = \sqrt{\frac{3+7}{2}} + \sqrt{\frac{3-7}{2}} = \sqrt{5} + \sqrt{-2}$. Tambien se tendrá $\sqrt{(3+\sqrt{-40})} = -\sqrt{5} - \sqrt{-2}$.

EXEMPLO IV.

426. Se propone extraer la raíz quadrada de $20 - \sqrt{6}$.

Tómese la fórmula $\sqrt{(A-\sqrt{B})} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{(A^2-B)}}{2}} - \sqrt{\frac{A-\sqrt{(A^2-B)}}{2}}$, y háganse en ella las substituciones $A=20$, $B=6$: respecto de que $A^2 - B = 400 - 6 = 394$ no es un quadrado perfecto, tampoco lo será la cantidad propuesta; por consiguiente la raíz quadrada que se pide no se podrá sacar sino por aproximacion.

PROPOSICION XVI.

427. Extraer la raíz quadrada de una cantidad compuesta de una parte racional, y de tres radicales del segundo grado.

Sea la cantidad dada $A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}$. Supóngase la raíz que se busca igual á $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$, esto es, $\sqrt{(A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$; y quadrando ambos miembros de esta equacion, resultará $A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}$. Ahora supóngase $x+y+z=A$, $2\sqrt{xy}=\sqrt{B}$, $2\sqrt{xz}=\sqrt{C}$, $2\sqrt{yz}=\sqrt{D}$; quadrando estas tres últimas equaciones, se tendrá $4xy=B$, $4xz=C$, $4yz=D$; y despejando las incógnitas y, z de las dos primeras, será $y=\frac{B}{4x}$, $z=\frac{C}{4x}$: luego substituyendo los valores de y, z en la equacion $x+y+z=A$, resultará $x+\frac{B}{4x}+\frac{C}{4x}=A$, ó bien $x^2+\frac{B+C}{4}=Ax$, que resuelta (411) dá $x=\frac{A\pm\sqrt{(A^2-B-C)}}{2}$. Si la cantidad dada $A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}$ es un quadrado perfecto, se podrá extraer exâctamente la raíz quadrada de A^2-B-C; porque siendo $A^2-B-C=(x+y+z)^2-4xy$

$-4xz$, será $A^2 - B - C = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2zy = (x - y - z)^2$: luego $\sqrt{(A^2 - B - C)} = x - y - z$. Determinado el valor de x, se hallarán los de y, z por las equaciones $y = \frac{B}{4x}$, $z = \frac{C}{4x}$; pero por la equacion $4yz = D$, es $y = \frac{D}{4z}$: luego deberá ser $\frac{B}{4x} = \frac{D}{4z}$, ó bien B á D como el valor de x á él de z, siempre que la cantidad dada es un quadrado perfecto.

EXEMPLO.

428. Se pide extraer la raíz quadrada de la cantidad $9 + \sqrt{24} + \sqrt{32} + \sqrt{48}$.

Tómese la fórmula $\sqrt{(A + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D})} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$, en quien $x = \frac{A \pm \sqrt{(A^2 - B - C)}}{2}$, $y = \frac{B}{4x}$, $z = \frac{C}{4x}$, y las condiciones para que sea posible la extraccion de la raíz, son que $A^2 - B - C$ sea un quadrado perfecto, y que además sea $\frac{B}{x} = \frac{D}{z}$. En dicha fórmula háganse las suposiciones $A = 9$, $B = 24$, $C = 32$, $D = 48$; y será $A^2 - B - C = 81 - 24 - 32 = 25$ que es un número quadrado; con lo qual queda verificada la primera condicion, para que se pueda extraer la raíz quadrada de la cantidad propuesta, Ahora substitúyanse los valores de A, B, C en las expresiones de x, y, z; y se tendrá $x = \frac{A - \sqrt{(A^2-B-C)}}{2} = \frac{9-5}{2} = 2$, $y = \frac{B}{4x} = \frac{24}{8} = 3$, $z = \frac{C}{4x} = \frac{32}{8} = 4$. Hallados los valores de x, z, verifíquese la otra condicion $\frac{B}{x} = \frac{D}{z}$, y resultará ser $\frac{B}{x} = \frac{24}{2} = 12$, $\frac{D}{z} = \frac{48}{4} = 12$: luego será $\sqrt{(9 + \sqrt{24} + \sqrt{32} + \sqrt{48})} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2$, ó bien igual á $-\sqrt{2} - \sqrt{3} - 2$. Si se toma $x = \frac{A + \sqrt{(A^2-B-C)}}{2}$, hecho el cálculo se hallará que no se verifíca la condicion $\frac{B}{x} = \frac{D}{z}$.

PROPOSICION XVII.

429. Construir las equaciones determinadas del segundo grado $x^2 + ax = bc$, $x^2 - ax = bc$, $ax - x^2 = bc$, $x^2 + ax = -bc$. *Fig.* 6, 7.

Tómese $AB = a$, y en sus extremos levántense las perpendiculares $AD = b$, $BC = c$; tírese DC, y sobre ella como diámetro descríbase el círculo DGC. En la *Fig.* 6, dicho círculo cortará á la recta AB prolongada en los puntos G y F: y en la *Fig.* 7, el mismo círculo cortará á la recta

AB en los puntos G y F, si es $bc < \frac{a^2}{4}$; tocará á dicha recta en un punto, si es $bc = \frac{a^2}{4}$; y finalmente si es $bc > \frac{a^2}{4}$, dicho círculo no encontrará á la recta AB, como se ha demostrado en la Geometría (332).

I. La equacion $x^2 + ax = bc$ tiene sus raíces (*Fig.* 6.) iguales á BF y BG, la una positiva y la otra negativa. Siendo pues $AF \times FB = AD \times BC$, llamada $BF = x$ será $(x + a) \times x = bc$, de donde resulta ser $x^2 + ax = bc$. Igualmente por ser $BG \times GA = AD \times BC$, llamada $BG = -x$ será $-x \times (-x - a) = bc$, de donde $x^2 + ax = bc$.

II. Con el mismo método se demostrará que la equacion $x^2 - ax = bc$ tiene sus raíces (*Fig.*6.) iguales á AF y AG, de las quales AF es positiva, y AG es negativa. Asímismo la equacion $ax - x^2 = bc$ tiene las raíces (*Fig.* 7.) iguales á AF y AG, y ambas positivas. Finalmente la equacion $x^2 + ax = -bc$ tiene las raíces iguales á BF y BG, y ambas negativas. En estos dos últimos casos serán iguales las raíces, si es $bc = \frac{a^2}{4}$; y si es $bc > \frac{a^2}{4}$, serán imaginárias.

COROLARIO.

430. Si se supone $a = o$ en las equaciones $x^2 + a x = b c$, $x^2 - a x = b c$, se reducirán éstas á $x^2 = b c$, y la construccion á la siguiente. Puestas directamente (*Fig.* 8.) las rectas $D B = b$, $B C = c$, y sobre $D C$ como diámetro descrito el círculo $DGCF$, las perpendiculares BG y BF al mismo diámetro serán las dos raíces iguales de dicha equacion $x^2 = b c$, una de ellas positiva, y la otra negativa; lo qual consta tambien por la Geometría, por ser $D B \times B C = \overline{BF}^2 = \overline{BG}^2$.

EXEMPLOS.

431. Se propone construir la equacion $d x^2 + e f x = g h l$. Pártase ésta por d, y será $x^2 + \frac{e f}{d} \times x = \frac{g h l}{d}$; hállese (404) una recta igual á $\frac{e f}{d}$, y otra igual á $\frac{g h}{d}$; y llamadas dichas rectas a, b, se tendrá la equacion propuesta reducida á la $x^2 + a x = b l$ que se construirá, como se ha enseñado en el caso primero de la Proposicion antecedente.

Se ha de construir la equacion $x^2 - 3 a^2 + 2 a b = - a m$, que contiene solo el quadrado de la incógnita. Trasponiendo los términos conocidos al segundo miembro, será $x^2 = 3a^2 - 2ab - am = a \times (3a - 2b - m)$, equacion que se construirá segun el método explicado en el Corolario antecedente.

Si la equacion propuesta es $x^2 = a^2 + b^2$; hágase $b^2 = am$, y será $x^2 = a^2 + am = a \times (a + m)$. Tambien dicha equacion se construirá mas facilmente, si se toma la recta (*Fig. 3.*) $AB = a$, y sobre ella se levanta la perpendicular $BG = b$: tirada AG, será $\overline{AG}^2 = a^2 + b^2 = x^2$; por consiguiente $AG = \sqrt{a^2 + b^2} = x$.

PROPOSICION XVIII.

432. Hallar la equacion á la Parábola GAE referida á qualquiera de sus diámetros, ó á qualquiera de sus tangentes. *Fig. 9.*

Sea el diámetro ó exe AF, y el parámetro perteneciente al mismo diámetro sea p. Tómese en dicho diámetro qualquier abscisa $AB = x$, y tírese su correspondiente ordenada $BC = y$. Siendo pues el quadrado de la ordenada BC igual al rectángulo hecho del parámetro, y de la abscisa AB, será $y^2 = px$ equacion á la Parábola. Quando las abscisas x se toman en la tangente AH, y las ordenadas se tiran paralelas al diámetro AF; por ser la abscisa $AD = CB$, la ordenada $DC = AB$, será $\overline{AD}^2 = p \times DC$, esto es $x^2 = py$ equacion á la Parábola referida á la tangente.

PROPOSICION XIX.

433. Hallar la equacion á la Elipse $ADBE$ referida á qualesquiera dos diámetros conjugados, ó á qualquiera de sus tangenres. *Fig.* 10.

Sean AB y DE dos diámetros conjugados; el semidiámetro $AC = a$, el otro $CD = b$. Tómese desde el vértice A qualquier abscisa $AF = x$, y tírese su correspondiente ordenada $FH = y$. Por ser $AF \times FB : FH^2 = \overline{AC}^2 : \overline{CD}^2$, será $x \times (2a - x) : y^2 = a^2 : b^2$, ó bien $2ax - x^2 : y^2 = a^2 : b^2$; por consiguiente $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (2ax - x^2)$ equacion á la Elipse. Quando las abscisas x se toman desde el centro C, esto es $CF = x$, $FH = y$, será $AF = a - x$, $FB = a + x$: luego $(a - x) \times (a + x) : y^2 = a^2 : b^2$, ó bien $a^2 - x^2 : y^2 = a^2 : b^2$; por consiguiente $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (a^2 - x^2)$ equacion á la Elipse. Finalmente si las abscisas x se toman en la tangente AI, y las ordenadas se tiran paralelas al diámetro AB, como $AG = x$, $GH = y$; por ser $GH = AF$, y AG

$= FH$, será $FB = 2a - y$, $FH = x$; pero $AF \times FB : \overline{FH}^2 = \overline{AC}^2 : \overline{CD}^2$: luego $y \times (2a - y)$: $x^2 = a^2 : b^2$; por consiguiente $x^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (2ay - y^2)$ equacion á la Elipse referida á la tangente.

PROPOSICION XX.

434. Hallar la equacion á la Hipérbola KAH referida á qualesquiera dos diámetros conjugados, ó á qualquiera de sus tangentes. *Fig.* 11.

Sean dos diámetros conjugados AB y DE, el semidiámetro transverso $CA = a$, y el otro $CE = b$. Tómese desde el vértice A qualquier abscisa $AG = x$, y tírese su correspondiente ordenada $GH = y$. Siendo pues $BG \times GA : \overline{GH}^2 = \overline{CA}^2 : \overline{CE}^2$, será $(2a + x) \times x : y^2 = a^2 : b^2$, ó bien $x^2 + 2ax : y^2 = a^2 : b^2$; por consiguiente $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (x^2 + 2ax)$ equacion á la Hipérbola. Quando las abscisas se toman en el mismo diámetro, pero desde el centro C, esto es $CG = x$, $GH = y$, será $BG = a + x$, $AG = x - a$; pero $BG \times GA : \overline{GH}^2 = \overline{CA}^2 : \overline{CE}^2$: luego $(a + x) \times (x - a) : y^2 = a^2 : b^2$, ó bien $x^2 - a^2 : y^2 = a^2 : b^2$; por consiguiente $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (x^2 - a^2)$

equacion á la Hipérbola. Igualmente si las abscisas se toman en el diámetro transverso desde el vértice B, esto es $BG = x$, $GH = y$; se hallará otra expresion de la equacion á la Hipérbola, que es $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (x^2 - 2ax)$. Tambien si las abscisas se toman en la tangente AI, y las ordenadas son paralelas al diámetro transverso, esto es $AI = x$, $IH = y$; será la equacion á la Hipérbola $x^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (2ay + y^2)$. Pero si las abscisas se toman en la tangente BL, siendo las ordenadas paralelas al diámetro transverso como antes, esto es $BL = x$, $LH = y$; la equacion á la Hipérbola será $x^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (y^2 - 2ay)$. Finalmente si las abscisas se toman en el segundo diámetro DE desde el centro C, y las ordenadas son paralelas al primero, esto es $CF = x$, $FH = y$; por ser $\overline{CF}^2 + \overline{CE}^2 : \overline{FH}^2 = \overline{CE}^2 : \overline{CA}^2$, será $x^2 + b^2 : y^2 = b^2 : a^2$; por consiguiente $y^2 = \frac{a^2}{b^2} \times (x^2 + b^2)$.

PROPOSICION XXI.

435. Hallar la equacion á la Hipérbola GH referida á sus asíntotas GC y CH. *Fig.* 12.

En la asíntota CH tómese qualquier abscisa

CE, y tírese su correspondiente ordenada $EF = y$. Siendo CA el lado de la potencia de la Hipérbola, será $CE \times EF = \overline{CA}^2$: luego llamada $CA = a$, será $xy = a^2$ equacion á la Hipérbola referida á sus asíntotas.

ESCOLIO.

436. En la tabla siguiente se expondrán las equaciones de las Secciones Cónicas halladas antecedentemente, cuyo uso será el conocer á qual de ellas se reduce, por los métodos que se darán, qualquier equacion indeterminada del segundo grado que contenga dos variables. Adviértase que la coluna *A* de la misma tabla contiene la denominacion de las coordenadas, y la coluna *B* las equaciones á las mismas curbas expresadas por las respectivas coordenadas y las cantidades constantes.

I. Equaciones á la Parábola GAE (*Fig.* 9.), cuyo diámetro es AF, su parametro p, y AH tangente en el vértice A.

A	B
$AB = x$, $BC = y$	$y^2 = px$
$AD = x$, $DC = y$	$x^2 = py$

II. Equaciones á la Elipse $ADBE$ (*Fig.*10.), que tiene los diámetros conjugados $AB = 2a$,

$DE = 2b$, y AI tangente en el vértice A.

A	B
$AF = x, FH = y$	$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (2ax - x^2)$
$CF = x, FH = y$	$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (a^2 - x^2)$
$AG = x, GH = y$	$x^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (2ay - y^2)$

Si se supone $a = b$, dichas tres equaciones pertenecen al círculo.

III. Equaciones á la Hipérbola, que tiene los diámetros conjugados $AB = 2a$, $DE = 2b$, y las rectas AI y BL tangentes en los vértices A y B del diámetro transverso. *Fig.* 11.

A	B
$AG = x, GH = y$	$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (2ax + x^2)$
$CG = x, GH = y$	$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (x^2 - a^2)$
$BG = x, GH = y$	$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (x^2 - 2ax)$
$AI = x, IH = y$	$x^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (2ay + y^2)$
$BL = x, LH = y$	$x^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (y^2 - 2ay)$
$CF = x, FH = y$	$y^2 = \frac{a^2}{b^2} \times (x^2 + b^2)$

IV. Equacion á la Hipérbola GBH referida á las asíntotas CG y CH, en quien la potencia $\overline{CA}^2$ es igual á a^2. *Fig.* 12.

A B

$CE = x, FE = y \mid xy = a^2.$

PROPOSICION XXII.

437. Hallar las líneas que pertenecen á la equacion general indeterminada del segundo grado $y^2 + lxy + mx^2 + ny + px + r = o$, en quien los coeficientes l, m, &c. pueden tener valor positivo ó negativo. *Fig.* 14.

Sea ADB qualquier curba expresada por la equacion propuesta, en quien la abscisa $MN = x$, y la ordenada $NB = y$. Supóngase $y + \frac{lx + n}{2} = v$; quadrando será $y^2 + lxy + ny + \frac{l^2x^2}{4} + lnx + \frac{n^2}{4} = v^2$, de donde $y^2 + lxy + ny = v^2 - \frac{l^2x^2}{4} - lnx - \frac{n^2}{4}$: luego substituyendo este valor en la equacion general, se tendrá $(A)\ v^2 - \frac{l^2x^2}{4} + mx^2 - lnx + px - \frac{n^2}{4} + r = o$. Para determinar el valor de v que por la suposicion es $y + \frac{lx + n}{2}$, tírese por el punto M la recta MK paralela á AB é igual á $\frac{n}{2}$, y por el punto K la recta KO paralela á MN;

y se tendrá $BO = y + \frac{n}{2}$, y $KO = x$: ahora tirada por qualquier punto R de la recta KO la RQ paralela á AB, hágase $KR : RQ = 2 : l$, y por los puntos K y Q tírese la recta KP; y por ser $KR : RQ = KO : OP$, ó bien $2 : l = x : OP$, será $OP = \frac{lx}{2}$: luego se tendrá $BP = y + \frac{n}{2} + \frac{lx}{2} = v$. Llámese $KP = z$, y supóngase la razon de KR á KQ (conocida por la construccion del triángulo KRQ) igual á la de 2 á q; y por ser $KR : KQ = KO : KP$, será $2 : q = x : z$, de donde $x = \frac{2z}{q}$: luego substituyendo el valor de x en (A), se tendrá la equacion $v^2 - \frac{l^2}{q^2} \times z^2 + \frac{4m}{q^2} \times z^2 - \frac{2lnz}{q} + \frac{2pz}{q} - \frac{n^2}{4} + r = o$, ó bien ($B$) $v^2 - \frac{l^2}{q^2} \times z^2 + \frac{4m}{q^2} \times z^2 - bz - c = o$ (haciendo $\frac{2ln - 2p}{q} = b$, $r - \frac{n^2}{4} = -c$) que pertenece á las mismas líneas expresadas por la equacion general dada, respecto de que por medio de las referidas substituciones no se ha variado sino la posicion de la recta, donde se toman las abscisas. Por tanto supuesto m igual, mayor, y menor que $\frac{l^2}{4}$, se tendrán tres equaciones, esto es, I. . $v^2 - bz - c = o$, II. . $v^2 + az^2 - bz - c = o$, supuesta $-\frac{l^2}{q^2} + \frac{4m}{q^2} = a$, III. . $v^2 - az^2 - bz - c = o$, supuesta $\frac{l^2}{q^2} - \frac{4m}{q^2} = a$: en estas equaciones las cantidades b y c pueden ser positivas ó negativas.

En la primera equacion $v^2 - bz - c = o$ traspónganse los términos segundo y tercero; y se tendrá $v^2 = bz + c = b \times (z + \frac{c}{b})$. Supóngase $z + \frac{c}{b} = t$, y resultará $v^2 = bt$ equacion á la Parábola, que será real, si b y t son ambas positivas ó negativas; y si una de ellas es negativa, será dicha curba imaginária.

En la segunda equacion $v^2 + az^2 - bz - c = o$, ó bien $\frac{v^2}{a} + z^2 - \frac{bz}{a} - \frac{c}{a} = o$, hágase $z - \frac{b}{2a} = t$; y se tendrá $\frac{v^2}{a} + t^2 - \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = o$, de donde $\frac{v^2}{a} = \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - t^2$: haciendo $\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = m^2$, $\frac{1}{a} = \frac{m^2}{n^2}$, será $\frac{m^2 v^2}{n^2} = m^2 - t^2$; y multiplicando por $\frac{n^2}{m^2}$, resultará $v^2 = \frac{n^2}{m^2} \times (m^2$

Fig. 1.

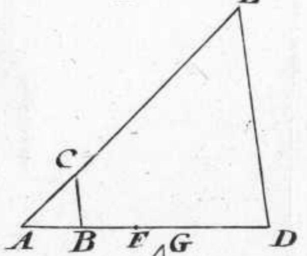


Fig. 2.

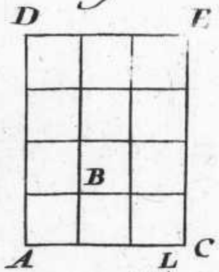


Fig. 3.

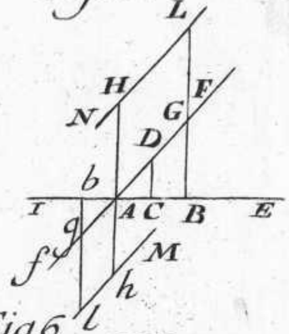


Fig. 4.

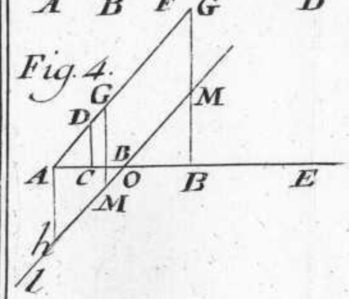


Fig. 5.

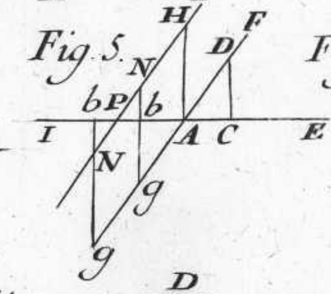


Fig. 6.

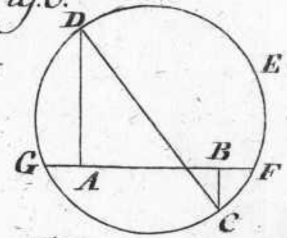


Fig. 7.

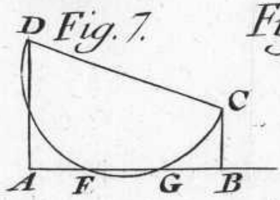


Fig. 8.

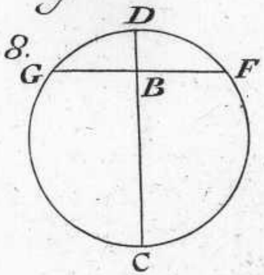


Fig. 9.

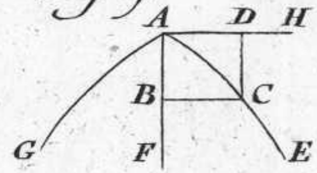


Fig. 10.

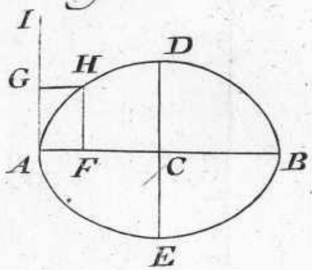


Fig. 11.

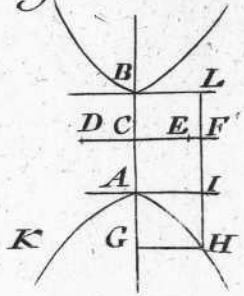
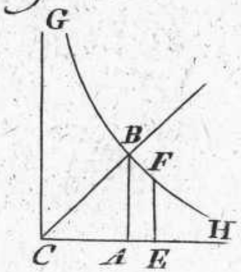
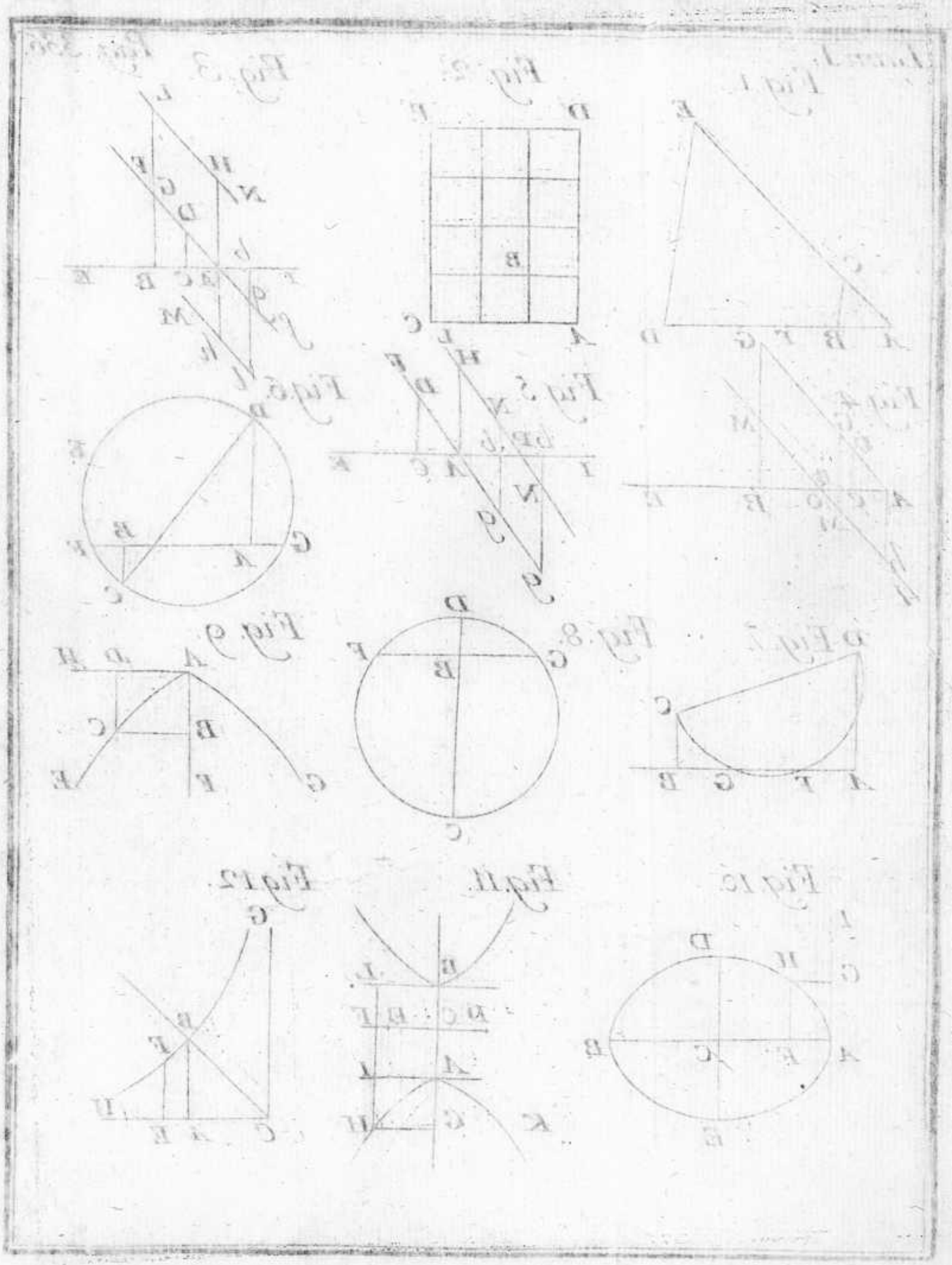


Fig. 12.





$-t^2$) equacion á la Elipse. Si c tiene valor negativo, y es $\frac{b^2}{4a^2} < \frac{c}{a}$, dicha curba será imaginária.

Finalmente la tercera equacion $v^2 - az^2 - bz - c = o$ se reduce por medio de la substitucion $z + \frac{b}{2a} = t$ á la $\frac{v^2}{a} - t^2 + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = o$, de donde $\frac{v^2}{a} = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} + t^2$: haciendo $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \pm m^2$, $\frac{1}{a} = \frac{m^2}{n^2}$, será $\frac{m^2 v^2}{n^2} = \pm m^2 + t^2$; y multiplicando por $\frac{n^2}{m^2}$, resultarán las equaciones $v^2 = \frac{n^2}{m^2} \times (m^2 + t^2)$, $v^2 = \frac{n^2}{m^2} \times (t^2 - m^2)$, que pertenecen á la Hipérbola.

COROLARIO I.

438. Infiérese que si el trinómio $y^2 + lxy + mx^2$ de la equacion general se puede resolver en dos factores iguales (en cuyo caso $m = \frac{l^2}{4}$), dicha equacion pertenece á la Parábola: si dicho trinómio no se puede resolver en dos factores reales, la misma equacion es á la Elipse: en fin si el trinómio $y^2 + lxy + mx^2$ se puede sesolver en factores reales, la equacion general pertenece á la Hipérbola.

COROLARIO II.

439. Si en la equacion general falta el quadrado de una de las coordenadas, y además el rectángulo de ellas; se reducirá á la expresion $y^2 + ny + px + r = o$, y la equacion (A) de la Proposicion antecedente á la $v^2 + px - \frac{n^2}{4} + r = o$, ó bien $v^2 = \frac{n^2}{4} - r - px = p \times (\frac{n^2}{4p} - \frac{r}{p} - x)$, en quien $v = y + \frac{n}{2}$: ahora suponiendo $\frac{n^2}{4p} - \frac{r}{p} - x = z$, se tendrá $v^2 = pz$ equacion á la Parábola.

COROLARIO III.

440. Pero si en la equacion general falta solo el quadrado de una de las coordenadas, como mx^2; se reducirá á la expresion $y^2 + lxy + ny + px + r = o$, y la equacion ($B$) de la Proposicion antecedente á la $v^2 - \frac{l^2}{q^2} \times z^2 - bz - c = o$ que pertenece á la Hipérbola por lo demostrado en la tercera equacion de la proposicion antecedente. En este caso, como tambien en él de faltar los dos quadrados de las coordenadas, se reducirá mas facilmente la equacion á la de la Hipérbola referida á las asíntotas con el método que se dará en los exemplos siguientes.

EXEMPLO I.

441. Se pide hallar la curba que pertenece á la equacion indeterminada del segundo grado $xy + ax + by = bc$. Fig. 13.

Supóngase 1º. $y + a = v$, ó bien $y = v - a$; y substituyendo el valor de y en dicha equacion, se tendrá $vx + bv - ba = bc$, ó bien $v \times (x+b) = b \times (c+a)$. Tambien supóngase 2º. $x + b = z$; y la equacion hallada se transformará en $zv = b \times (c+a)$, que pertenece á la Hipérbola referida á las asíntotas, cuya potencia es igual á $b \times (c + a)$. Para construir esta curba tómese la recta $AC = b$, y tírese AB que sea igual á $a + c$, y haga con AC un ángulo igual á él de las coordenadas x, y, si es dado; despues hágase CM paralela á AB, y entre las asíntotas CM y CN descríbase la Hipérbola MBN que pase por el punto B; y se tendrá la curba que se pide: pues tirada qualquier ordenada FG, y llamada la abscisa $CF = z$, y la ordenada $FG = v$, será por la propiedad de esta curba $z \times v = b \times (c + a)$. Ahora para determinar en la misma curba las coordecadas x, y de la equacion dada, se tiene que por la segunda suposicion es $x + b = z$, y por la construccion es $CA = b$: luego será $AF = x$: y como por la primera suposicion es $y+a=v=FG$, tomada $AD=a$, y tirada la recta DI paralela á CN, será $HG=y$; pero $DH=AF=x$: luego la Hipérbola descrita será la línea de la equacion propuesta, cuyas coordenadas $x=DH$, $y=HG$, y el ángulo DHG formado por ellas es igual á CAB. Con el mismo método se tratará qualquier equacion indeterminada del segundo grado, á quien falten los quadrados de las coordenadas.

EXEMPLO II.

442. Se propone hallar la curba que pertenece á la equacion indeterminada del segundo grado $x^2 + 2ax + \frac{b}{d} \times (y^2 + 2dy) = c^2$. *Fig.* 14.

Añádase $a^2 + bd$ á cada miembro de dicha equacion, para completar los quadrados de los términos que contienen las coordenadas x, y; y se tendrá $x^2 + 2ax + a^2 + \frac{b}{d} \times (y^2 + 2dy + d^2) = c^2 + a^2 + bd$. Supóngase 1°. $x + a = z$, 2°. $y + d = v$, 3°. $c^2 + a^2 + bd = m^2$; y será $z^2 + \frac{b}{d} \times v^2 = m^2$; por consiguiente $v^2 = \frac{d}{b} \times (m^2 - z^2)$ equacion á la Elipse, cuyos semidiámetros conjugados son m, $\sqrt{\frac{dm^2}{b}}$. Para construir esta curba tómese la recta $AC = m$, y tírese CD que sea igual á $\sqrt{\frac{dm^2}{b}}$, y haga con AC un ángulo igual á él de las coordenadas x, y, si es dado; despues con los semidiámetros AC y CD descríbase la Elipse ADB, y se tendrá la Curba que se pide: pues tirada qualquier ordenada HE al diámetro AB, y llamada la abscisa $CE = z$, la ordenada $EH = v$, será por la propiedad de esta curba $(m + z) \times (m - z) : v^2 = m^2 : \frac{dm^2}{b}$; por consiguiente $v^2 = \frac{d}{b} \times (m^2 - z^2)$. Ahora para determinar en la misma curba las coordenadas x, y de la equacion propuesta, se tiene que por la primera suposicion es $x + a = z$: luego tomada $CF = a$, será $FE = z$: y como por la segunda suposicion es $y + d = v$; tirada FG paralela á CD é igual á d, y tambien GL paralela á CB, será $LH = y$; pero $GL = FE = x$: luego la Elipse descrita será la línea de la equacion propuesta, cuyas coordenadas $GL = x$, $LH = y$, y el ángulo formado por ellas es igual al ángulo ACD. Con el mismo método se tratarán todas las equaciones indeterminadas del segundo grado, á quienes falte el rectángulo de las coordenadas. Si además de dicho rectángulo falta el quadrado de una de las coordenadas, como en la equacion $2ax + \frac{b}{d} \times (y^2 + 2dy) = c^2$, se completará el quadrado de la y, añadiendo bd á ambos miembros, y será $2ax + \frac{b}{d} \times (y^2 + 2dy + d^2) = c^2 + bd$. Ahora supóngase 1°. $y + d = v$, y se tendrá $2ax + \frac{b}{d} \times v^2 = c^2 + bd$, de donde $v^2 = \frac{d}{b} \times (c^2 + bd - 2ax) = \frac{2ad}{b} \times (m - x)$, haciendo $c^2 + bd = 2am$. Tambien supóngase 2°. $m - x = z$, y será $v^2 = \frac{2ad}{b} \times z$ equacion á la Parábola referida á uno de sus diámetros, cuyo parámetro $= \frac{2ad}{b}$.

EXEMPLO III.

443. Se ha de determinar la curba que pertenece á la equacion $yx - \frac{b}{d} \times x^2 + ax + dy = cd$. *Fig.* 15.

Supóngase 1°. $y - \frac{bx}{d} = v$, ó bien $y = v + \frac{bx}{d}$; y substituyendo el valor de y en la equacion propuesta, se tendrá $vx + ax + dv + bx = cd$. Ahora supóngase 2°. $v + a + b = z$, y se transformará la equacion hallada en $zx + dz - da$

$-db=cd$, de donde $zx+dz=da+db+cd$. Finalmente supóngase 3°. $x+d=t$, y $a+b+c=h$; con lo que será $tz=dh$ equacion á la Hipérbola referida á las asíntotas, que para su construccion se pondrá baxo esta forma $mt\times z=mdh$, siendo m una cantidad indeterminada cuyo valor se hallará despues. Supóngase descrita la Hipérbola HIL entre las asíntotas CH y CL con una potencia igual á $md\times h$, y tírese qualquier ordenada FI: luego suponiendo la abscisa $CF=mt$, y la ordenada $FI=z$, será por la propiedad de dicha curba $mt\times z=mdh$. Por la tercera suposicion es $x+d=t$; y multiplicando por m, será $mx+md=mt=CF$: luego tomada $CA=md$, será $AF=mx$. Tambien por la segunda suposicion es $v+a+b=z=FI$: luego tomada $FD=a+b$, será $DI=v$. Finalmente por la primera suposicion es $y=v+\frac{bx}{d}$: luego tirada DE paralela é igual á AF, y además la recta EG, de modo que corte á $DG=\frac{bx}{d}$, será $IG=y$. Ahora supóngase $EG=x$, y el ángulo EGI igual á él que deben formar las coordenadas x, y, si es dado. Siendo pues $EG=x$, $DG=\frac{bx}{d}$, será $EG:GD=d:b$: formado el triángulo MON

con los lados $MO = d$, $ON = b$, y el ángulo $MON = EGD$, quedará conocido el tercer lado MN que se supondrá igual á q, y será semejante al triángulo EGD: luego se tendrá $EG : ED = MO : MN$, ó bien $x : mx = d : q$, de cuya proporcion resulta el valor de la indeterminada $m = \frac{q}{d}$. Por tanto el supuesto rectángulo $md \times h$ de la Hipérbola será igual á qh; el ángulo HCL formado por las asíntotas igual á MNO; en fin la recta CA, supuesta md, será igual á q. Discúrrase del mismo modo respecto á qualquier otra equacion del segundo grado, á quien falte el quadrado de una de sus coordenadas.

EXEMPLO IV.

444. Se pide hallar la curba que pertenece á la equacion indeterminada del segundo grado $y^2 + 2ay + \frac{2b}{d} \times xy = \frac{c}{d} \times x^2 + \frac{2af}{d} \times x + e^2$. *Fig.* 16.

Complétese el quadrado de los términos que contienen la y, añadiendo á uno y otro miembro $a^2 + \frac{2ab}{d} \times x + \frac{b^2 x^2}{d^2}$; y se tendrá ($A$) $y^2 + 2ay + a^2 + \frac{2bxy}{d} + \frac{2abx}{d} + \frac{b^2 x^2}{d^2} = \frac{b^2 + cd}{d^2} \times x^2 + \frac{2af + 2ab}{d} \times x + a^2 + e^2$. Supóngase 1°. la raiz de dicho quadrado, esto es $y + a + \frac{bx}{d} = v$, y para la comodidad del cálculo hágase $b^2 + cd = dh$, $af + ab = lh$, $a^2 + e^2 = hn$; con lo que se transformará la equacion (*A*) en la $v^2 = \frac{h}{d} \times x^2 + \frac{2lh}{d} \times x + hn$, de donde resulta ser $\frac{d}{h} \times v^2 = x^2 + 2lx + dn$. Supóngase 2°. $x + l = z$; y substituyendo el valor de x en la equacion antecedente, será $\frac{d}{h} \times v^2 = z^2 - l^2 + dn$. Supóngase 3°. $dn - l^2 = r^2$, y se tendrá $\frac{d}{h} \times v^2 = z^2 + r^2$, ó bien $v^2 = \frac{h}{d} \times (z^2 + r^2)$ equacion á la Hipérbola referida al segundo diámetro, y que se prepára para su construccion de este modo $v^2 = \frac{h}{m^2 d} \times (m^2 z^2 + m^2 r^2)$, siendo m una cantidad indeterminada, cuyo valor se hallará despues. Con los semidiámetros $CA = mr$, $CB = \sqrt{\frac{hr^2}{d}}$ descríbase la Hipérbola BE, y tírese al segundo diámetro qualquier ordenada DE: llamada la abscisa $CD = mz$, y la ordenada $DE = v$, será por la propiedad de esta curba $m^2 z^2 + m^2 r^2 : v^2 = m^2 r^2 : \frac{hr^2}{d}$; por consiguiente $v^2 = \frac{h}{m^2 d} \times (m^2 z^2 + m^2 r^2)$. Siendo por la suposicion segunda $x + l = z$, será $mx + ml = mz$:

luego tomada $CF = ml$, será $mx = FD$. Tambien siendo por la suposicion primera $y + a + \frac{bx}{d} = v$, cortada $DG = a$, será $GE = y + \frac{bx}{d}$: luego si se completa el paralelógramo $DFHG$, y desde H se supone tirada HI de modo que sea $GI = \frac{bx}{d}$, se tendrá $IE = y$. Ahora supóngase $HI = x$, y el ángulo HIE igual á él que deben formar las coordenadas x, y, si es dado; por consiguiente será tambien dado el ángulo HIG. Por ser $HI = x$, $IG = \frac{bx}{d}$, será $HI : IG = d : b$; y formado el triángulo NPO con los lados $NP = d$, $PO = b$, y con el ángulo $NPO = HIG$, se conocerá su tercer lado NO, que se expresará por q, y será semejante al triángulo HIG; por consiguiente se tendrá $HI : HG = NP : NO$, ó bien $x : mx = d : q$, de cuya proporcion resulta el valor de la indeterminada $m = \frac{q}{d}$. Por tanto el semidiámetro CA que se ha supuesto mr será igual á $\frac{qr}{d}$; el ángulo BCD igual al ángulo NOQ; y finalmente será $CF = ml = \frac{ql}{d}$. En la tercera suposicion se hizo $dn > l^2$; pero si es $dn < l^2$, suponiendo $dn - l^2 = - r^2$, la equacion propuesta se reducirá á la $v^2 = \frac{h}{d} \times (z^2 - r^2)$ que pertenece á la Hipérbola referida al diámetro transverso, y que debe tratarse con el mismo método que anteriormente se ha explicado. Finalmente si es $dn = l^2$, la equacion propuesta se reducirá á la $v^2 = \frac{h}{d} \times z^2$; y extrayendo la raíz quadrada de ambos miembros, será $v = \pm z \times \sqrt{\frac{h}{d}}$, equacion que pertenece á la línea recta.

De la Resolucion y Construccion de las Equaciones del tercer grado.

PROPOSICION XXIII.

445. Si qualquier equacion determinada del tercero ó de otro qualquier grado no tiene coeficiente en su primer término, ni quebrados en los demás; dicha equacion no podrá tener raíces racionales quebradas.

Sea la equacion $x^3 + ax^2 + bx + c = o$, en quien a, b y c expresan qualesquiera cantidades enteras, positivas ó negativas. Supóngase, si es posible, la incógnita x igual á la fraccion $\frac{d}{e}$, cuyos términos no tengan algun divisor comun; y substituyendo en la equacion dada la fraccion $\frac{d}{e}$ en lugar de x, se tendrá $\frac{d^3}{e^3}+\frac{ad^2}{e^2}+\frac{bd}{e}+c=0$: multiplicando todos los términos por e^2, y trasponiendo, será $\frac{d^3}{e}=-(ad^2+bde+ce^2)$; pero este miembro es una cantidad entera : luego el primero será tambien una cantidad entera, lo que es imposible : luego &c. Con el mismo método se demostrará que qualquier equacion en las mismas hipótesis de la Proposicion no puede tener raíces racionales quebradas.

PROPOSICION XXIV.

446. Determinar, si una equacion numérica del tercero ú otro qualquier grado, tiene algun factor racional del primero.

METODO I.

Hállense los divisores ó factores (109) del último término de la equacion dada ; en ésta substitúyanse sucesivamente los mismos factores tanto positivos como negativos en lugar de la incógnita ; y aquel factor que haga toda la equacion igual á cero, será una de las raíces racionales de la misma equacion : luego la incógnita menos la raiz será el factor racional que se busca. Si la equacion propuesta no resulta igual á cero por ninguna de las referidas substituciones de los factores del último término en lugar de la incógnita ; dicha equacion no tendrá factor racional : pues el último término de una equacion es (364) el producto de todas sus raíces , las que no pueden ser (445) racionales y quebradas , porque se supone (387) que el primer término no tiene coeficiente y los demás no son fracciones.

METODO II.

Hállense los divisores ó factores del último término de la equacion dada ; divídase ésta sucesivamente por la incógnita $x \pm$ uno de dichos factores; y aquel divisor que parte exâctamente la equacion propuesta , será el factor racional que se busca. Si dicha equacion no se puede partir nunca exâctamente por la incógnita $\pm$ qualquiera de los factores del último término , no tendrá factor racional del primer grado.

METODO III.

En la equacion dada substitúyanse sucesivamente en lugar de la incógnita tres ó mas términos de la série aritmética 1 , *o* , — 1 , &c. hállense los divisores de los números que resultan, y pónganse á lado de las respectivas substituciones; entre estos divisores considerados tanto positivos como negativos búsquense los que forman séries aritméticas cuya diferencia es la unidad, de modo que el primer término sea uno de los divisores correspondientes á la suposicion mas alta, como por exemplo $x=2$; el segundo término sea uno de los divisores correspondientes á la suposicion próxîmamente menor $x=1$, y asi sucesivamente: halladas dichas séries, pártase sucesivamente la equacion por un binómio compuesto de la incógnita y de uno de los términos de las mismas séries correspondiente á la suposicion $x=o$; y se tendrá el factor racional que se busca en aquel divisor que parte exâctamente la equacion propuesta. Si no se halla ninguna de las referidas séries, ó bien si la equacion no se puede partir exâctamente por ninguno de dichos binómios; la misma equacion no tendrá factor racional del primer grado. Pues suponiendo a un número positivo ó negativo, de suerte que la equacion propuesta tenga el factor racional $x+a$, ó bien pueda partirsé por éste, si en la equacion y en el factor racional se substituyen sucesivamente en lugar de x los números de la série aritmética $2, 1, o, -1, -2$, &c. los números en quienes se convierte la equacion por dichas substituciones, se podrán partir respectivamente por $2+a$, $1+a$, a, $-1+a$, $-2+a$, &c. pero estos divisores forman una série aritmética cuya diferencia es la unidad, y además el número a correspondiente á la suposicion $x=0$ es divisor del último término de la equacion dada: luego &c.

COROLARIO.

447. Luego por los métodos segundo y tercero quedarán determinados los dos factores de toda equacion numérica del tercer grado (esto es un factor racional del primero y otro del segundo) siempre que dicha equacion tenga un factor racional; por consiguiente comparando dichos factores con cero, y resolviendo estas dos equaciones, se tendrán los tres valores de la incógnita de dichas equaciones.

ESCOLIO.

448. Los métodos primero y segundo de la Proposicion antecedente se aplícan igualmente á las equaciones literales, y en general son útiles, si el último término de ellas tiene pocos factores; pero si son muchos, se usará del tercero en las equaciones numéricas, y en las literales del método que se dará en la Proposicion siguiente. El referido mé-

todo tercero se aplica igualmente á las equaciones numéricas que tienen coeficiente en su primer término, con tal que se tomen todas aquellas séries cuya diferencia es igual á qualquiera de los divisores del primer término, y se multiplique la incógnita x de cada binómio divisor por la diferencia de la respectiva série: pues en qualquiera de dichas equaciones suponiendo el factor racional $mx + a$, en quien m es uno de los divisores del primer término, y a qualquier número entero positivo ó negativo; y substituyendo sucesivamente en la equacion y en el factor los números de la série aritmética $1, o, -1$, &c. los números en quienes se convierte la equacion por dichas substituciones, se podrán partir por $2m + a$, $m+a$, a, $-m + a$, $-2m+a$, &c. los que forman una série aritmética cuya diferencia es m, y además a correspondiente á la suposicion $x = o$ es divisor del último término de la equacion.

EXEMPLO I.

449. Se pide hallar, si la equacion $x^3 - 8x^2 + 17x - 4 = o$ tiene algun factor racional del primer grado.

Como el último término de la equacion propuesta tiene pocos divisores, esto es ± 1, ± 2,

± 4, los substitúyo en lugar de x, y hállo que haciendo sucesivamente $x=1$, $x=-1$, $x=2$, $x=-2$, $x=-4$ nunca resulta $x^3 - 8x^2 + 17x - 4$ igual á cero, pero sí haciendo $x=4$: pues en esta suposicion es $x^3 - 8x^2 + 17x - 4 = 64 - 128 + 68 - 4 = o$: luego la equacion propuesta tendrá una de sus raíces $x=4$, y por consiguiente el factor racional $x-4$. Ahora parto la equacion propuesta por $x-4=o$, y hállo el otro factor de ella $x^2 - 4x + 1 = o$, cuyas raíces son $x = 2 \pm \sqrt{3}$. Por tanto las tres raíces de la equacion dada son $x=4$, $x=2+\sqrt{3}$, $x=2-\sqrt{3}$.

EXEMPLO II.

450. Se propone determinar, si la equacion $x^3 - 14x^2 + 37x + 30 = o$ tiene algun factor racional del primer grado.

Siendo muchos los divisores de 30, busco el factor racional de la equacion propuesta por el método tercero.

A	B	C	D	
$x=1$	54	1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54	3	-9
$x=o$	30	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30	2	-10
$x=-1$	22	1, 2, 11, 22	1	-11

Escribo en la coluna *A* los valores que quiero dár á x correspondientes á la série aritmética 1, o, -1: en la coluna B escribo los números, en quienes se convierte sucesivamente la equacion por las correspondientes suposiciones de x, dexando los signos de dichos números; esto es, supuesta $x=1$, la cantidad $x^3-14x^2+37x+30$ es igual á 54; supuesta $x=o$, dicha cantidad es igual á 30, y así sucesivamente: despues escribo en la coluna C los divisores de los números puestos en la coluna B, y considéro aquellos tanto positivos como negativos: finalmente observo si entre los divisores correspondientes á la suposicion $x=o$ se hallan algunos, á quienes añadiendo una unidad estén los números que resultan entre los divisores correspondientes á la suposicion $x=1$, y restando una unidad queden los números que resultan entre los divisores de la suposicion $x=-1$; con lo que hállo las dos séries escritas en D: luego los números 2, -10 de estas séries correspondientes á la suposicion $x=o$ son los únicos divisores de 30 último término de la equacion, que sirven para determinar si esta tiene algun factor racional del primer grado. Por tanto parto dicha equacion por $x+2$; y respecto de que no hállo un quociente exâcto, la parto de nuevo por $x-10$, con lo que resulta el quociente exâcto x^2-4x

$=3$: luego los factores componentes de la equacion propuesta son $x-10=o$, $x^2-4x-3=o$; por consiguiente $x=10$, $x=2\pm\sqrt{7}$.

EXEMPLO III.

451. Se ha de determinar, si la equacion $9x^3-66x^2+49x+138=o$ tiene algun factor racional del primer grado.

A	B	C	D	
$x=2$	44	1, 2, 4, 11, 22, 44	-4	
$x=1$	130	1, 2, 5, 10, 13, 26, 65, 130	-5	5
$x=o$	138	1, 2, 3, 6, 23, 46, 69, 138	-6	2
$x=-1$	14	1, 2, 7, 14	-7	-1

Escribo en *A* las suposiciones de x: en la coluna *B* escribo los números, en quienes se convierte sucesivamente la equacion por las correspondientes suposiciones de x: en la coluna *C* colóco los divisores de los números puestos en *B*, considerándolos tanto positivos como negativos: finalmente observo, si entre los divisores correspondientes á la suposicion $x=o$ se hallan algunos, á quienes añadiendo, y despues restando qualquiera de los divisores 1, 3, 9 del coeficiente del primer término de la equacion dada, estén los números que resultan entre los divisores correspondientes á las suposiciones $x=1$, $x=-1$; con lo que hállo las dos séries escritas en la coluna D: luego los números -6, 2 de estas séries correspondientes á la suposicion $x=o$ son los únicos divisores del número 138 último término de la equacion propuesta, que pueden ser útiles para determinar el factor racional que se busca; pero continuando las suposiciones de $x=2$, hállo el resultado 44, en cuyos divisores se halla solo el número -4 que es la continuacion de la primera série, y no se halla el número 8 que es la continuacion de la segunda: luego el número -6 de la primera série correspondiente á la suposicion $x=o$ es el único divisor de 138 último término de la equacion dada, el qual sirve para determinar el factor racional que se busca. Por tanto parto dicha equacion por $x-6$, y hállo el quociente exâcto $9x^2-12x-23$; por consiguiente los dos factores de la equacion dada son $x-6=o$, $9x^2-12x-23=o$: luego $x=6$, $x=\frac{2}{3}\pm\sqrt{3}$.

EXEMPLO IV.

452. Se pide hallar, si la equacion $6x^4-x^3-21x^2+3x+20=o$ tiene algun factor racional.

A	B	C	D			
$x=2$	30	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30		3		10
$x=1$	7	1, 7	−1	1	7	7
$x=o$	20	1, 2, 4, 5, 10, 20	−2	−1	5	4
$x=-1$	3	1, 3	−3	−3	3	1
$x=-2$	34	1, 2, 17, 34			1	−2

Hechas las suposiciones de $x=1$, $x=o$, $x=-1$, con el método del exemplo antecedente búsco entre los divisores *C* los que forman séries aritméticas, cuyas diferencias son los divisores 1, 2, 3, 6 del coeficiente del primer término; y hállo las quatro séries escritas en la coluna *D*. Prosigo, suponiendo $x=2$, $x=-2$; y hállo que solo la série quarta continúa: luego el número 4 de esta série correspondiente á la suposicion $x=o$ es el único divisor de 20 último término de la equacion dada, el qual puede servir para determinar el factor racional que se busca; pero la diferencia de dicha série es 3: luego la fórmula del factor racional $mx+a$ será en este caso $3x+4$. Ahora parto la equacion propuesta por $3x+4$, y hállo el quociente exâcto $2x^3-3x^2-3x+5$; en conseqüencia dicha equacion tiene efectivamente el factor racional $3x+4=o$, y la raíz $x=-\frac{4}{3}$.

PROPOSICION XXV.

453. Determinar, si una equacion literal del tercero ú otro qualquier grado tiene algun factor racional compléxô del primero.

I. Tenga la equacion propuesta dos letras, esto es la incógnita y otra cantidad conocida; y todos los términos de ella sean de igual dimension. Supóngase la cantidad conocida igual á la unidad, con lo que se tendrá una equacion numérica; hállese (446) el factor racional de ésta; y si lo tiene, multiplíquese su segundo término, esto es el número añadido á la incógnita, por dicha cantidad conocida, y el binómio que resulta será el factor racional que se busca.

II. Tenga la equacion dada tres letras, esto es la incógnita x, y otras dos cantidades conocidas p, q; y todos los términos de ella sean de igual dimension. En la equacion propuesta háganse sucesivamente $x=o$, $p=o$, $q=o$, y nótense las tres fórmulas que resultan, las que contendrán solo dos letras; en estas fórmulas búsquense por el caso antecedente todos los factores racionales compléxôs del primer grado, como tambien los factores monómios lineales, considerando dichos factores tanto positivos como negativos; y si resulta que entre los factores correspondientes á las suposiciones $x = o$, $p = o$, $q = o$ se hallen tres, de suerte que los dos términos de cada factor se hallen separadamente en los otros dos; ó bien si resulta que dos factores monómios compóngan el tercero, será la semisuma de los tres el factor racional que se busca. Siendo pues la equacion dada compuesta de las tres letras x, p, q, será la fórmula del factor racional $ax + bp + cq$ en quien a, b, c expresan los coeficientes numéricos. Ahora si en la equacion propuesta se supone sucesivamente $x = o$, $p = o$, $q = o$, las tres fórmulas que resultan se podrán partir exâctamente por los respectivos factores $bp + cq$, $ax + cq$, $ax + bp$, en quienes se observa que los dos términos de cada factor se hallan separadamente en los otros dos factores, y que además la semisuma de los tres factores restituye el factor racional $ax + bp + cq$. Quando el factor racional de la equacion dada está compuesto de dos letras, será su fórmula $ax + bp$: luego haciendo sucesivamente en dicha equacion $x = o$, $p = o$, $q = o$, las tres fórmulas que resultan se podrán partir por los respectivos factores bp, ax, $ax + bp$.

III. Si la equacion dada tiene dos letras, y los términos de ella no tienen igual dimension; se completarán las dimensiones que faltan por las de qualquier otra letra, y se hallará por el caso antecedente el factor racional, en quien se quitará dicha letra para tener el factor de la equacion dada.

IV. Finalmente si la equacion dada tiene quatro ó mas letras; se argüirá de un modo semejante á él expuesto en los casos segundo y tercero, para determinar el factor racional del primer grado de dicha equacion.

ESCOLIO.

454. En los métodos generales que se darán en adelante para la resolucion de las equaciones, se supondrá que éstas están libres de dichos factores racionales del primer grado.

EXEMPLO I.

455. Se pide hallar, si tiene algun factor racional la equacion $x^3 - 17\,a\,x^2 + 89\,a^2\,x - 133\,a^3 = o$, que contiene solo dos letras, y todos sus términos son de una misma dimension.

Supóngase $a = 1$, y resultará la equacion numérica $x^3 - 17\,x^2 + 89\,x - 133 = o$. Por las reglas dadas (446) se hallará que esta equacion tiene el factor racional $x - 7$: luego él de la propuesta será $x - 7\,a$. Ahora partiendo la equacion dada por $x - 7\,a$, se tendrá la del segundo grado x^2

$-10ax+19a^2=0$, cuyas raíces son $x=5a+a\sqrt{6}$, $x=5a-a\sqrt{6}$. Por tanto las raíces de la equacion propuesta serán $x=7a$, $x=5a+a\sqrt{6}$, $x=5a-a\sqrt{6}$.

EXEMPLO II.

456. Se propone determinar, si tiene algun factor racional la equacion $6x^3-13ax^2+6bx^2+2b^2x+6a^2x-4abx-3ab^2+2b^3=0$, que contiene tres letras, y todos sus términos son de una misma dimension.

A	B	C	D
$x=0$	$-3ab^2+2b^3$	$-3a+2b, b$	$-3a+2b$
$a=0$	$6x^3+6bx^2+2b^2x+2b^3$	$2x+2b$	$2x+2b$
$b=0$	$6x^3-13ax^2+6a^2x$	$3x-xa, 2x-3a, x$	$2x-3a$

Escribo en *A* las suposiciones, y los resultados en *B*; esto es haciendo sucesivamente $x=0$, $a=0$, $b=0$ en la equacion propuesta, resultan las tres cantidades $-3ab^2+2b^3$, $6x^3+6bx^2+2b^2x+2b^3$, $6x^3-13ax^2+6a^2x$. Como cada una de estas cantidades está compuesta de dos letras, determino sus factores por el caso primero de la Proposicion antecedente, los que están escritos en *C*. Entre estos factores correspondientes á las tres suposiciones busco los que tienen la condicion que los términos de cada uno se hallen en los otros dos;

y tengo los escritos en D: luego la semisuma de estos, esto es $2x - 3a + 2b$, será el factor racional que se busca. En efecto partiendo la equacion propuesta por $2x - 3a + 2b$, se hallará el quociente exâcto $3x^2 - 2ax + b^2$; por consiguiente las raíces de ella serán $x = \frac{3a-2b}{2}$, $x = \frac{a}{3} \pm \sqrt{(\frac{a^2}{9} - \frac{b^2}{3})}$.

EXEMPLO III.

457. Se propone determinar, si la equacion $12x^3 - 38ax^2 + 14bx^2 - 30a^2x - 21abx - 6b^2x + 56a^3 - 98a^2b + 21ab^2 = o$ tiene algun factor racional.

A	B	C	D		
$x = o$	$56a^3 - 98a^2b + 21ab^2$	a, *7, $4a-b$, $2a-3b$	$-7a$	$4a-b$	$-2a+3b$
$a = o$	$12x^3 + 14bx^2 - 6b^2x$	x, *2, $3x-b$, $2x+3b$	$2x$	$3x-b$	$2x+3b$
$b = o$	$12x^3 - 38ax^2 - 30a^2x + 56a^3$	*2, $x-a$, $2x-7a$, $3x+4a$	$2x-7a$	$3x+4a$	$2x-2a$

Escribo en A las suposiciones, en B los resultados, y en C los divisores, en quienes los números notados con el asterisco pueden multiplicar los factores que quedan en la misma línea. Ultimamente escribo en D las tres séries que tienen las condiciones necesarias; esto es la primera série tiene sus dos términos primeros en el último, y las séries segunda y tercera tienen la condicion yá expresada en el exemplo antecedente. Por tanto la equacion propuesta tendrá los factores racionales $2x - 7a$, $3x + 4a - b$, $2x + 3b - 2a$: luego las raíces $x = \frac{7a}{2}$, $x = \frac{-4a+b}{3}$, $x = \frac{2a-3b}{2}$.

PROPOSICION XXVI.

458. Hallar las raíces de la equacion determinada del tercér grado $x^3 + a = o$.

Supóngase $a = b^3$, y será $x^3 + b^3 = o$: partiendo esta equacion por $x + b$, se tendrá $x^2 - bx + b^2 = o$, cuyas raíces son (411) $x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{-3b^2}{4}}$, $x = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{-3b^2}{4}}$: luego la equacion $x^3 + b^3 = o$ tiene las tres raíces $x = -b$, $x = \frac{b + b\sqrt{-3}}{2} = -b \times \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, $x = \frac{b - b\sqrt{-3}}{2} = -b \times \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, y estas dos últimas imaginárias. Por ser $a = b^3$, será $\sqrt[3]{a} = b$; y substituyendo el valor de b en las tres raíces antecedentes, resultará $x = -\sqrt[3]{a}$, $x = -\sqrt[3]{a} \times \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, $x = -\sqrt[3]{a} \times \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.

EXEMPLO I.

459. Se propone hallar las raíces de la equacion $x^3 - 1 = o$.

Compárese esta equacion con la de la fórmula $x^3 + a = o$, y será $a = -1$: substituyendo el valor de a en las tres raíces halladas de la fórmula, se tendrán las de la propuesta, esto es, $x = -\sqrt[3]{-1} = 1$, $x = -\sqrt[3]{-1} \times \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, $x = -\sqrt[3]{-1} \times \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.

EXEMPLO II.

460. Se pide hallar las raíces de la equacion $x^3 + 5 = o$.

Haciendo idéntica la equacion general $x^3 + a = o$ con la propuesta, será $a = 5$; y substituyendo el valor de a en las tres raíces halladas de dicha equacion general, se tendrán las de la propuesta, esto es, $x = -\sqrt[3]{5}$, $x = -\sqrt[3]{5} \times \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, $x = -\sqrt[3]{5} \times \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.

PROPOSICION XXVII.

461. Hallar las raíces de la equacion determi-

nada del tercer grado $x^3 + px + q = o$, en quien las cantidades conocidas p, q pueden ser qualesquiera positivas ó negativas.

Supóngase $x = y + z$; elevando ambos miembros al cubo, será $x^3 = y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$; pero por ser $x = y + z$, es $3y^2z + 3yz^2 = 3yzx$: luego se tendrá $x^3 = y^3 + 3yzx + z^3$, ó bien $x^3 - 3yzx - y^3 - z^3 = o$; y debiendo ser esta equacion idéntica á la propuesta, será 1°. $-3yz = p$, 2°. $-y^3 - z^3 = q$: hallando por medio de la primera equacion el valor de z, se tendrá $z = -\frac{p}{3y}$; y substituyendo este valor en la segunda, resultará la equacion $-y^3 + \frac{p^3}{27y^3} = q$, ó bien $y^6 + qy^3 = \frac{p^3}{27}$. Ahora tratando esta equacion segun el método dado (416) se hallará $y^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27})}$; pero por la segunda equacion es $-y^3 - z^3 = q$, ó bien $z^3 = -y^3 - q$: luego será $z^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27})}$: luego (458) los valores de y, z serán los que se manifiestan en la siguiente tabla.

valores de y	valores de z
$\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}$	$\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}$
$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\times\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}$	$\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\times\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}$
$\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\times\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}$	$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\times\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}$
$\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}$	$\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}$
$\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\times\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}$	$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\times\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}$
$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\times\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}$	$\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\times\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}$

Porque debe ser por la primera equacion $yz = -\frac{p}{3}$, y solamente dán este resultado los valores que se oponen uno á otro en la tabla antecedente; y tambien porque debe ser por la suposicion $x = y + z$, serán las raíces de la equacion propuesta

$$x=\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}+\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}$$

$$x=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}.\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}$$

$$x=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}.\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}$$

En estas expresiones, si p es positiva, será real la cantidad $\sqrt{(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27})}$; pero si p tiene valor negativo, y es $\frac{q^2}{4}<\frac{p^3}{27}$, será dicha cantidad imaginária.

COROLARIO.

462. Si es $q=o$, la equacion de la Proposicion antecedente vendrá á ser $x^3+px=o$, y sus raíces serán $x=o$, $x=\sqrt{-p}$, $x=-\sqrt{-p}$. Tambien estas raíces se hallarán, reflexionando que la equacion $x^3+px=o$ es el producto de los factores $x=o$, $x^2+p=o$: esta equacion resuelta dá $x=\sqrt{-p}$, $x=-\sqrt{-p}$.

PROPOSICION XXVIII.

463. El primer valor de x hallado en la solucion del antecedente Problema es siempre real: pero los otros dos serán reales, si el radical del segundo grado, esto es $\sqrt{(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27})}$ es imagináno; y al contrario.

En los tres valores de x substitúyase para mayor facilidad del cálculo $\sqrt{t}$ en lugar de $\sqrt{(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27})}$, y además s en lugar de $-\frac{q}{2}$; con lo que será $x = \sqrt[3]{(s+\sqrt{t})} + \sqrt[3]{(s-\sqrt{t})}$, $x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{(s+\sqrt{t})} - \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{(s-\sqrt{t})}$, $x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{(s+\sqrt{t})} - \frac{1-\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{(s-\sqrt{t})}$.

I. Extraída la raíz tercera de las cantidades $s+\sqrt{t}$, $s-\sqrt{t}$ segun el método dado, se tendrá

$$\sqrt[3]{(s+\sqrt{t})} = s^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} . s^{-\frac{2}{3}} \sqrt{t} - \frac{1}{3^2} . s^{-\frac{5}{3}} t + \frac{5}{3^4} . s^{-\frac{8}{3}} t\sqrt{t} \text{-\&c}$$

$$\sqrt[3]{(s-\sqrt{t})} = s^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} \times s^{-\frac{2}{3}} \sqrt{t} - \frac{1}{3^2} . s^{-\frac{5}{3}} t - \frac{5}{3^4} . s^{-\frac{8}{4}} t\sqrt{t} \text{-\&c}$$

luego será $\sqrt[3]{(s+\sqrt{t})} + \sqrt[3]{(s-\sqrt{t})}$ ó bien x

$$= 2 \times s^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3^2} \times s^{-\frac{5}{3}} t - \frac{2 \times 2 \times 5}{3^5} \times s^{-\frac{11}{3}} t^2 - \text{\&c.}$$

en cuya série no se hallan los términos que contienen $\sqrt{t}$; por consiguiente aunque esta raíz sea imaginária, siempre será real el primer valor de x.

II. Para tener el segundo valor de x, será necesario multiplicar la primera de las séries antecedentes por $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, y la segunda por $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, y sumar estos productos. Multiplicando la primera serie por $-\frac{1}{2}$, y la segunda por $-\frac{1}{2}$, será siempre real la suma de estos productos, como en el caso antecedente: ahora multiplicando la primera série por $\frac{-\sqrt{-3}}{2}$, y la segunda por $\frac{+\sqrt{-3}}{2}$, y sumando estos productos, quedarán solamente los términos en quienes se halla $\sqrt{t} \times \sqrt{-3}$; por consiguiente si la $\sqrt{t}$ es real, será dicha suma imaginária, y al contrario: luego será imaginario el segundo valor de x, si la cantidad $\sqrt{t}$ es real; y si esta es imaginária, será real dicho valor. Con el mismo método se demostrará que el tercer valor de x es real, quando la $\sqrt{t}$ es imaginária, y al contrario.

COROLARIO.

464. Infiérese que la equacion $x^3 + px + q = 0$ tiene solo una raíz real, si la cantidad p es positiva, sea q positiva ó negativa; porque la $\sqrt{(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27})}$ es real. Pero si la cantidad p tiene valor negativo, y además es $\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}$; dicha equacion tendrá sus tres raíces reales.

ESCOLIO.

465. Tambien se puede demostrar que en una equacion del tercer grado, á quien falta el segundo término, y que tiene tres raíces reales y desiguales, siempre es $\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}$, esto es el quadrado

de la mitad del último término menor que el cubo de la tercera parte del coeficiente del tercer término tomado positivamente. Pues debiendo faltar en dicha equacion el segundo término, tendrá (365) una raíz positiva igual á las otras dos negativas, ó bien dos raíces positivas iguales á la otra negativa; por consiguiente nombradas dichas raíces $a, -b, -c$, ó bien $-a, +b, +c$, serán los factores componentes de la misma equacion $x \mp a = o$, $x \pm b = o$, $x \pm c = o$, y la equacion

$$\begin{aligned} x^3 &- b^2 x \mp bc \times (b+c) = o. \\ &- c^2 x \\ &- cb\, x \end{aligned}$$

Porque b, c son cantidades reales, será $(b-c)^2$ cantidad positiva, que se expresará por d: luego $b^2 + bc + c^2 = d + 3bc$, y $(b+c)^2 = b^2 + 2bc + c^2 = d + 4bc$; por consiguiente $\frac{(b^2+bc+c^2)^3}{27} = \frac{d^3}{27} + \frac{d^2bc}{3} + db^2c^2 + b^3c^3$, $\frac{b^2c^2 \times (b+c)^2}{4} = \frac{db^2c^2}{4} + b^3c^3$; pero es $\frac{db^2c^2}{4} + b^3c^3 < \frac{d^3}{27} + \frac{d^2bc}{3} + db^2c^2 + b^3c^3$: luego $\frac{b^2c^2 \times (b+c)^2}{4} < \frac{(b^2+bc+c^2)^3}{27}$.

EXEMPLO I.

466. Sea la equacion $x^3 - 9x - 10 = o$, de quien se piden las tres raíces.

Hágase idéntica la equacion general $x^3 + px +$

$q = o$ con la propuesta; y se tendrá $p = -9$, $q = -10$. Ahora substitúyanse los valores de p, q en las raíces de dicha equacion general, con lo que serán las de la propuesta

$$x = \sqrt[3]{[5+\sqrt{(25-27)}]} + \sqrt[3]{[5-\sqrt{(25-27)}]} = \sqrt[3]{(5+\sqrt{-2})} + \sqrt[3]{(5-\sqrt{-2})}$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{(5+\sqrt{-2})} - \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{(5-\sqrt{-2})}$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{(5+\sqrt{-2})} - \frac{1-\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{(5-\sqrt{-2})}$$

cuyos tres valores de x son todos reales, por ser $\sqrt{-2}$ imaginária.

EXEMPLO II.

467. Se propone resolver la equacion $y^3 + 3y^2 - 3y + 25 = o$.

Para reducir dicha equacion á la fórmula $x^3 + px + q = o$, transfórmese (379) en otra á quien falte el segundo término, haciendo $y = x - 1$; y se tendrá la equacion (A) $x^3 - 6x + 30 = o$; la que comparada con dicha fórmula dará $p = -6$, $q = 30$. Ahora substituídos los valores de p, q en las tres fórmulas de resolucion ó valores de x, se tendrán las tres raíces de la equacion (A), esto es,

$$x = \sqrt[3]{[-15+\sqrt{(225-8)}]} + \sqrt[3]{[-15-\sqrt{(225-8)}]} =$$
$$\sqrt[3]{(-15+\sqrt{217})} + \sqrt[3]{(-15-\sqrt{217})}$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{(-15+\sqrt{217})} - \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{(-15-\sqrt{217})}$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{(-15+\sqrt{217})} - \frac{1-\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{(-15-\sqrt{217})};$$

pero por la transformacion es $y = x - 1$: luego las tres raíces de la equacion propuesta serán

$$y = -1 + \sqrt[3]{(-15+\sqrt{217})} + \sqrt[3]{(-15-\sqrt{217})}$$

$$y = -1 - \frac{1-\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{(-15+\sqrt{217})} - \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{(-15-\sqrt{217})}$$

$$y = -1 - \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{(-15+\sqrt{217})} - \frac{1-\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{(-15-\sqrt{217})}.$$

PROPOSICION XXIX.

468. La equacion determinada $x^{3m} + a x^{2m} + b x^m + c = o$ que consta de quatro términos, de modo que los exponentes de la incógnita x en los tres primeros son como 3, 2, 1, se reduce á una del tercer grado.

Hágase $x^m = z$, siendo z una nueva incógnita; y la equacion propuesta se transformará en $z^3 + a z^2 + b z + c = o$ equacion del tercer grado.

COROLARIO.

469. Luego determinando las raices de la equacion $z^3 + a z^2 + bz + c = o$, se conocerán los va-

lores de x en la equacion $x^{3m} + ax^{2m} + bx^{m} + c = 0$, por ser $x^{m} = z$ ó bien $x = z^{\frac{1}{m}}$.

EXEMPLO.

470. Se pide resolver la equacion $x^6 + 6x^4 - 3x^2 - 24 = 0$.

Hágase $x^2 = z$; y la equacion propuesta se convertirá en la $z^3 + 6z^2 - 3z - 24 = 0$. Transfórmese ésta en otra á quien fálte el segundo término, haciendo $z = y - 2$; con lo que se tendrá la equacion $y^3 - 15y - 2 = 0$, cuyas raíces son las siguientes

$$y = \sqrt[3]{(1+\sqrt{-124})} + \sqrt[3]{(1-\sqrt{-124})}$$

$$y = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{(1+\sqrt{-124})} - \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{(1-\sqrt{-124})}$$

$$y = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{(1+\sqrt{-124})} - \frac{1-\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{(1-\sqrt{-124})}$$

pero por la transformacion es $z = y - 2$: luego las raíces de la equacion $z^3 + 6z^2 - 3z - 24 = 0$ serán

$$z = -2 + \sqrt[3]{(1+\sqrt{-124})} + \sqrt[3]{(1-\sqrt{-124})}$$

$$z = -2 - \frac{1-\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{(1+\sqrt{-124})} - \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{(1-\sqrt{-124})}$$

$$z = -2 - \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{(1+\sqrt{-124})} - \frac{1-\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{(1-\sqrt{-124})}$$

y como es $x^2 = z$ ó bien $x = \pm\sqrt{z}$, los valores de x en la equacion propuesta serán los siguientes

$$x = \pm\sqrt{[-2+\sqrt[3]{(1+\sqrt{-124})}+\sqrt[3]{(1-\sqrt{-124})}]}$$

$$x = \pm\sqrt{[-2-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\times\sqrt[3]{(1+\sqrt{-124})}-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}.\sqrt[3]{(1-\sqrt{-124})}]}$$

$$x = \pm\sqrt{[-2-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\times\sqrt[3]{(1+\sqrt{-124})}-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}.\sqrt[3]{(1-\sqrt{-124})}]}.$$

PROPOSICION XXX.

471. Extraer la raíz cúbica de una cantidad compuesta de una parte racional y de un radical del segundo grado.

I. Sea dicha cantidad $A \pm \sqrt{B}$, en quien A es la parte racional, y $\sqrt{B}$ dicho radical. Supóngase $\sqrt[3]{(A \pm \sqrt{B})} = \frac{x \pm \sqrt{y}}{\sqrt[3]{m}}$, en quien x, y son cantidades racionales indeterminadas, y m es otra que se determinará despues segun convenga: elevando uno y otro miembro al cubo, será $A \pm \sqrt{B} = \frac{x^3 \pm 3x^2\sqrt{y}+3xy \pm y\sqrt{y}}{m}$; y por consiguiente $mA \pm m\sqrt{B} = x^3 \pm 3x^2\sqrt{y}+3xy \pm y\sqrt{y}$. Como las cantidades x, y son indeterminadas, se podrá igualar la parte racional x^3+3xy á la parte racional mA, y la parte radical $\pm 3x^2\sqrt{y} \pm y\sqrt{y}$

á la parte radical $\pm m\sqrt{B}$; por lo que se tendrán las dos equaciones $x^3+3xy=mA$, $(3x^2+y)\times\sqrt{y}=m\sqrt{B}$: elevando al quadrado una y otra equacion, será $x^6+6x^4y+9x^2y^2=m^2A^2$, $9x^4y+6x^2y^2+y^3=m^2B$; y restando ésta de aquella, resultará $m^2\times(A^2-B)=x^6-3x^4y+3x^2y^2-y^3=(x^2-y)^3$: luego extrayendo la raíz cúbica será $\sqrt[3]{(m^2\times\overline{A^2-B})}=x^2-y$; de donde se infiere que si $A\pm\sqrt{B}$ es un cubo perfecto, lo deberá ser tambien $m^2\times(A^2-B)$, cuya raíz x^2-y: quando A^2-B resulta un cubo perfecto, se supondrá $m=1$; pero si no resulta, se podrá hacer $m^2\times(A^2-B)$ un cubo perfecto á lo menos en el caso de suponer $m=A^2-B$. Para brevedad del cálculo llamada $\sqrt[3]{(m^2\times\overline{A^2-B})}=c$ cantidad racional, será $x^2-y=c$; por consiguiente $y=x^2-c$: substituyendo este valor en la equacion $x^3+3yx=mA$, se tendrá $x^3+3x^3-3cx=mA$, ó bien (M) $4x^3-3cx-mA=0$. Ahora si por medio de esta equacion se determina un valor racional de x, se hallará tambien él de y por medio de la equacion $y=x^2-c$; y llamados p, q los respectivos valores racionales de x, y, se tendrá $\sqrt[3]{(A\pm\sqrt{B})}=\frac{p\pm\sqrt{q}}{\sqrt[3]{\sqrt{m}}}=\frac{p\sqrt[3]{\sqrt{m^2}}\pm\sqrt{q}\times\sqrt[3]{\sqrt{m^2}}}{m}$, la que se reduce á la forma $r\sqrt[3]{n} \pm \sqrt{h} \times \sqrt[3]{n}$, haciendo $\frac{p}{m} = r$, $q = hm^2$, $m^2 = n$: luego si es $A^2 - B$ un cubo perfecto (en cuyo caso $m = 1$ como se ha demostrado), la raíz cúbica de $A \pm \sqrt{B}$ tendrá la forma del binómio $p \pm \sqrt{q}$; y y si es $m^2 \times (A^2 - B)$ un cubo perfecto, la raíz cúbica de $A \pm \sqrt{B}$ tendrá la forma del binómio $r\sqrt[3]{n} \pm \sqrt{h} \times \sqrt[3]{n}$. La raíz que se busca puede solo tener estas dos formas, para que su cubo esté compuesto de una parte racional, y de un radical del segundo grado.

II. Si la cantidad dada es $A \pm \sqrt{-B}$, se supondrá $\sqrt[3]{(A \pm \sqrt{-B})} = \frac{x \pm \sqrt{-y}}{\sqrt[3]{m}}$, y se hallarán los valores de x, y, m con el mismo método expuesto en el caso antecedente.

COROLARIO.

472. Infiérese que las raíces cúbicas de $A + \sqrt{-B}$, $A - \sqrt{-B}$ se podrán expresar siempre baxo esta forma $a + b\sqrt{-1}$, $a - b\sqrt{-1}$, en las que a, b son cantidades reales.

ESCOLIO.

473. Quando el binómio de quien se ha de

extraer la raíz cúbica, está compuesto de dos radicales del segundo grado, como $\sqrt{A} + \sqrt{B}$; multiplicando y dividiendo este binómio por el cubo de una de las partes, como por $A\sqrt{A}$, será $\sqrt{A} + \sqrt{B} = \frac{A^2 + \sqrt{A^3 B}}{\sqrt{A^3}}$: ahora extrayendo la raíz cúbica de $A^2 + \sqrt{A^3 B}$ por el método de la Proposicion antecedente, y dividiéndola por $\sqrt{A^3}$, se tendrá la raíz cúbica de $\sqrt{A} + \sqrt{B}$. Tambien imitando el método de la misma Proposicion para la extraccion de la raíz cúbica, se extraerán quando sea posible las raíces impares quinta, séptima, &c. del binómio $A \pm \sqrt{B}$; pero en estos casos la equacion (M) será del quinto, séptimo, &c. grado. Respecto á las raíces pares, se extraerá como se ha enseñado (421) la raíz quadrada de $A \pm \sqrt{B}$, y de la cantidad que resulta se extraerá de nuevo, si es posible, la raíz quadrada, y asi sucesivamente.

EXEMPLO I.

474. Se pide extraer, si es posible, la raíz cúbica de la cantidad $20 + \sqrt{392}$.

Supóngase $A + \sqrt{B} = 20 + \sqrt{392}$, esto es $A = 20$, $B = 392$; y será $A^2 - B = 400 - 392 = 8$ que es un cubo perfecto; por consiguiente será $m = 1$, $\sqrt[3]{(A^2 - B)} = c = 2$. Por tanto la equacion (M) $4x^3 - 3cx - mA = o$ se convertirá en la $4x^3 - 6x - 20 = o$, que partida por 2 dá $2x^3 - 3x - 10 = o$, equacion que tiene la raíz racional $x = 2$; y substituyendo este valor de x en la equacion $y = x^2 - c = x^2 - 2$, resulta $y = 2$; pero $\sqrt[3]{(A + \sqrt{B})} = x + \sqrt{y}$, por ser $m=1$: luego será $\sqrt[3]{(20 + \sqrt{392})} = 2 + \sqrt{2}$.

EXEMPLO II.

475. Se propone extraer, si es posible, la raíz cúbica de la cantidad $20a^3 - 18ab^2 - (14a^2 - 3b^2) \times \sqrt{(2a^2 - 3b^2)}$.

Supóngase $A - \sqrt{B} = 20a^3 - 18ab^2 - (14a^2 - 3b^2) \times \sqrt{(2a^2 - 3b^2)}$, esto es $A = 20a^3 - 18ab^2$, $\sqrt{B} = (14a^2 - 3b^2) \times \sqrt{(2a^2 - 3b^2)}$; y será $A^2 - B = 400a^6 - 720a^4b^2 + 324a^2b^4 - 392a^6 + 756a^4b^2 - 270a^2b^4 + 27b^6 = 8a^6 + 36a^4b^2 + 54a^2b^4 + 27b^6$ que es un cubo perfecto, cuya raíz $2a^2 + 3b^2$; por consiguiente $m = 1$, y $\sqrt[3]{(A^2 - B)} = 2a^2 + 3b^2 = c$. Por tanto la equacion (M) $4x^3 - 3cx - mA = o$ se convertirá en la $4x^3 - (6a^2 + 9b^2) \times x - 20a^3 + 18ab^2 = o$, que tiene la raíz racional $x = 2a$;

y substituyendo este valor de x en la equacion $y = x^2 - c = x^2 - 2a^2 - 3b^2$, resulta $y = 2a^2 - 3b^2$; pero $\sqrt[3]{(A - \sqrt{B})} = x - \sqrt{y}$, por ser $m = 1$: luego será $\sqrt[3]{(20a^3 - 18ab^2 - \overline{14a^2 - 3b^2}.\sqrt{2a^2 - 3b^2})} = 2a - \sqrt{(2a^2 - 3b^2)}$.

EXEMPLO III.

476. Se pide extraer, si es posible, la raíz cúbica de la cantidad $135 - 27\sqrt{27}$.

Supóngase $A - \sqrt{B} = 135 - 27\sqrt{27}$, esto es $A = 135$, $\sqrt{B} = 27\sqrt{27}$; y será $A^2 - B = 18225 - 19683 = -1458$ que no es un cubo perfecto; pero si se multiplíca por 4, resulta -5832 cuya raíz cúbica es -18; por consiguiente será $m = 2$, $\sqrt[3]{(m^2 \times \overline{A^2 - B})} = c = -18$. Por tanto la equacion (M) $4x^3 - 3cx - mA = o$ se convertirá en la $4x^3 + 54x - 270 = o$ que partida por 2 dá $2x^3 + 27x - 135 = o$, equacion que tiene la raíz racional $x = 3$. Substituyendo este valor de x en la equacion $y = x^2 - c = x^2 + 18$, resulta $y = 27$; pero $\sqrt[3]{(A - \sqrt{B})} = \frac{x - \sqrt{y}}{\sqrt[3]{m}}$: luego será $\sqrt[3]{(135 - 27\sqrt{27})} = \frac{3 - \sqrt{27}}{\sqrt[3]{2}}$.

PROPOSICION XXXI.

477. Construir las equaciones determinadas del tercer grado $x^3+abx-af^2=o$, $x^3+abx+af^2=o$, $x^3-abx+af^2=o$, $x^3-abx-af^2=o$. *Fig.* 17, 18, 19, 20.

I. Para construir la equacion $x^3+abx-af^2=o$, supóngase (A) $x^2=ay$, con que dicha equacion se mudará en la $ayx+abx-af^2=o$, que partida por a dá (B) $yx+bx-f^2=o$. La equacion (A) pertenece á la Parábola; y la equacion (B) á la Hipérbola referida á las asíntotas: pues supuesta $y+b=v$, será $vx-f^2=o$, ó bien $vx=f^2$. Por tanto la equacion determinada del tercer grado $x^3+abx-af^2=o$ se ha dividido en dos indeterminadas del segundo pertenecientes á la Parábola y á la Hipérbola, las que se deben describir de modo que ambas tengan la misma línea de las abscisas, empezando estas desde un mismo punto. Entre las asíntotas BG y HM puestas en ángulo recto (*Fig.* 17.), con la potencia igual á f^2, descríbanse las Hipérbolas opuestas MI, HG; y tomada qualquier abscisa $CA=x$, será su correspondiente ordenada $AF=v$. Córtese la recta $CD=b$, y por el punto D tírese la recta DE paralela á GB;

con lo que será $CD = AE = b$, $CA = DE = x$; pero $AF = v = b + y$: luego $EF = y$. Por tanto las coordenadas de la equacion (B) son $DE = x$, $EF = y$. Ahora cerca del exe DM y con el parámetro $= a$ descríbase la Parábola LDN, á quien será tangente la recta DE en el punto D: luego las coordenadas de la equacion (A) serán $DE = x$, $EF = y$. Como una y otra equacion, esto es (B) $yx + bx - f^2 = o$, (A) $x^2 = ay$, no pueden tener lugar, sino en aquellos puntos que son comunes á la Hipérbola y á la Parábola, y en el solo punto F se cortan estas curbas; será la recta FE el valor de y, y DE será el valor de x ó la raíz real que tiene la equacion $x^3 + abx - af^2 = o$, siendo las demás imaginárias.

II. Con el mismo método se hallará que para construir la equacion $x^3 + abx + af^2 = o$, se ha de tomar (*Fig.* 18.) la recta CD de la parte opuesta, y por esta parte se ha de describir la parabola LDN refiriéndose esta posicion á la de la *Fig.* 17. con lo que será DE la raíz real y negativa de dicha equacion.

III. Tambien se hallará que para construir la equacion $x^3 - abx + af^2 = o$, debe describirse (*Fig.* 19.) la Parábola LDN de la parte opuesta, refiriéndose siempre la posicion á la *Fig.* 17. y si dicha parábola corta los dos ramos hiperbólicos en los puntos F, $2F$, $3F$, la equacion propuesta tendrá tres raíces reales, esto es, DE, $D2E$, $D3E$, de las quales las dos primeras son positivas y la otra negativa.

IV. Finalmente se hallará que para construir la equacion $x^3 - abx - af^2 = o$, debe tomarse la recta CD (*Fig.* 20.) de la parte opuesta, refiriéndose siempre la posicion á la *Fig.* 17. y si la Parábola LDN corta los dos ramos hiperbólicos en los puntos F, $2F$, $3F$, la equacion $x^3 - abx - af^2 = o$ tendrá tres raíces reales, esto es, DE, $D2E$, $D3E$, de las quales la primera es positiva, y las otras dos negativas.

ESCOLIO I.

478. Para la construccion de las equaciones determinadas del tercer grado se ha considerado que éstas están libres del segundo término; porque se puede reducir á esta forma qualquier equacion que lo tenga. Sin embargo con el mismo método se podrá dividir en dos equaciones indeterminadas del segundo grado qualquier equacion determinada del tercero $x^3 + ax^2 + abx - abf = o$, en quien a, b, f pueden ser positivas ó negativas: pues ha-

ciendo $(A)\ x^2 + ax = ay$, será $x^3 + ax^2 = axy$; pero $x^3 + ax^2 + abx - abf = o$: luego será $axy + abx - abf = o$, y partiendo por a se tendrá $(B)\ xy + bx - bf = o$. Por tanto la equacion propuesta quedará dividida en las dos indeterminadas (A) y (B), de las quales la primera pertenece á la Parábola, y la segunda á la Hipérbola; y descritas estas curbas, con el mismo método de la Proposicion antecedente se determinarán las raíces de la equacion propuesta.

ESCOLIO II.

479. Si en el caso tercero de la Proposicion antecedente es $\frac{a^3 b^3}{27} = \frac{a^2 f^4}{4}$, ó lo que es lo mismo $a = \frac{27 f^4}{4 b^3}$, y se toma $DP = \frac{DC}{3} = \frac{b}{3}$; tirada la ordenada PQ (*Fig.* 19.) el ramo parabólico DN tocará al hiperbólico MI en el punto Q. Siendo pues en la Parábola la ordenada $PR = \sqrt{(\frac{27 f^4}{4 b^3} \times \frac{b}{3})} = \frac{3 f^2}{2 b}$, y en la Hipérbola la ordenada $PQ = \frac{f^2}{CP} = \frac{3 f^2}{2 b}$, será $PR = PQ$; por consiguiente dichos dos ramos se encontrarán en el punto Q. Ahora tírese la tangente QS al punto Q de la Hipérbola, y será la subtangente $PS = PC$; pero PC

$= 2PD$: luego $SP = 2PD$; por consiguiente la recta SQ será tambien tangente de la Parábola en el punto Q: luego si es $a = \frac{27f^4}{4b^3}$, la Parábola DN y la Hipérbola MI se tocarán en el punto Q; de donde resulta que si es $a > \frac{27f^4}{4b^3}$, el ramo parabólico DN cortará á el hiperbólico MI; y al contrario si es $a < \frac{27f^4}{4b^3}$, dichos dos ramos no se encontrarán. Por tanto la equacion $x^3 - abx + af^2 = o$ tendrá una raíz real y dos imaginárias, si es $a < \frac{27f^4}{4b^3}$ ó bien $\frac{a^3b^3}{27} < \frac{a^2f^4}{4}$; pero tendrá tres raíces reales, siendo a igual ó mayor que $\frac{27f^4}{4b^3}$: todo lo qual conviene con lo demostrado antes (464). Lo mismo se demostrará con igual método respecto al quarto caso de la Proposicion antecedente.

PROPOSICION XXXII.

480. Si las rectas LC, CG forman ángulo recto, y la esquadra LOG tiene el lado OL indeterminado, y el otro GO igual á CL está dividido por medio en M; y si se mueve dicha esquadra de modo que el punto G vaya siempre sobre

C G, y el lado *O L* páse libremente por el punto fixo *L*, el punto *M* describirá una Curba llamada la Cisoide de Diocles, cuya equacion se ha de hallar. *Fig.* 21.

Divídase *C L* por medio en *A*; tómese *C B* $= C A$, y báxese á la recta *A B* la perpendicular *M P*. Los triángulos *G O L*, *L C G* tienen la recta *G L* comun, y el lado $G O = C L$: luego serán iguales, y tirada la recta *C O* será paralela á *G L*; pero es $L A : A C = G M : M O$: luego la recta *A M* será paralela á *L G*, y el triángulo *G C L* semejante al triángulo *M P A*. Llámense $G M = A C = a$, la abscisa $A P = x$, la ordenada $P M = C F = y$; y será $C P = F M = x - a$, $G F = \sqrt{(\overline{G M}^2 - \overline{M F}^2)} = \sqrt{(a^2 - \overline{x - a}^2)} = \sqrt{(2 a x - x^2)}$, y $G C = G F + F C = \sqrt{(2 a x - x^2)} + y$. Ahora por la semejanza de dichos triángulos, será $C L : C G = A P : P M$, esto es, $2a : y + \sqrt{(2ax - x^2)} = x : y$; por consiguiente $2a y = x \sqrt{(2a x - x^2)} + x y$, ó bien $2a y - x y = x \sqrt{(2a x - x^2)}$: quadrando ambos miembros será $(2 a - x)^2 \times y^2 = x^3 \times (2a - x)$; y partiendo por $(2a - x)^2$, se tendrá $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$, que es la equacion á la Cisoide.

COROLARIO I.

481. Siendo en la Cisoide $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$, será $y = \pm \sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}$: luego esta curba tendrá dos ramos perfectamente iguales, uno á cada lado de la recta AB que será el exe: y como á $x = o$ corresponde $y = o$, será el punto A vértice de la misma curba.

COROLARIO II.

482. Descrito sobre AB como diámetro el círculo $AIBN$, y prolongada la recta AM hasta que encuentre á la perpendicular BH levantada sobre dicho diámetro en su extremo B; será la cuerda $AI = MQ$: porque siendo $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$, será tambien $y^2 = \frac{x^4}{2ax-x^2}$; por consiguiente $2ax - x^2 : x^2 = x^2 : y^2$, de donde $\sqrt{(2ax - x^2)} : x = x : y$, esto es, $PN : PA = PA : PM$: luego será el ángulo MAN recto, y la recta NI diámetro del círculo; por consiguiente siendo en los triángulos equiángulos CDI, CPN, el lado $CI = CN$, será $CD = CP$, y $AD = PB = ME$: luego en los triángulos ADI y MEQ será $AI = MQ$, propiedad principal de esta curba.

COROLARIO III.

483. Por ser $AD = ME$ (482) resulta que quanto mayor es el ángulo QAB, tanto menor será la recta AD ó bien ME; por consiguiente la curba AM prolongada se acercará contínua y constantemente á la recta indefinida BH, de suerte que solo la encontrará á una distancia infinita, esto es la curba AM tendrá por asíntota á la recta BH. Lo mismo se infiere de la equacion $y = \sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}$: pues haciendo la abscisa $x = 2a = AB$, será $y = \sqrt{\frac{8a^3}{0}}$; por consiguiente la ordenada BH correspondiente á dicha abscisa será infinita. Igualmente el otro ramo de la Cisoide tendrá por asíntota á la recta HB prolongada desde el punto B.

PROPOSICION XXXIII.

484. Si la esquadra EAH se mueve libremente al rededor del punto A puesto en la recta AF perpendicular á la LM, y además si el punto C comun siempre al lado de la esquadra y á la recta LM se mueve sobre la curba parabólica ACG, moviéndose la recta LM paralelamente á sí misma; hallar la equacion á la curba ADI descri-

ta por el punto D comun al lado AE de la esquadra y á la recta LM. *Fig.* 22.

Supónganse las rectas $AB=x$, $BD=y$, $BC=z$. Siendo pues el ángulo DAC recto, y la recta AB perpendicular á la DC, será $CB : BA = BA : BD$, esto es, $z : x = x : y$; de donde resulta ser $z = \frac{x^2}{y}$, y quadrando será $z^2 = \frac{x^4}{y^2}$; pero supuesto a el parámetro de la Parábola ACG, su equacion es $z^2 = ax$: luego será $ax = \frac{x^4}{y^2}$; por consiguiente $ay^2 = x^3$, equacion á la curba ADI que es la segunda Parábola cúbica.

COROLARIO I.

485. Si se supone la curba CG una Hipérbola (*Fig.* 23.) referida á las asíntotas Ff, Gg, cuya potencia $= a^2$, y las coordenadas $AB = x$, $BC = z$, se tendrá $zx = a^2$, y por consiguiente $z = \frac{a^2}{x}$; pero por lo arriba demostrado es $z = \frac{x^2}{y}$: luego será $\frac{a^2}{x} = \frac{x^2}{y}$, de donde $a^2 y = x^3$, equacion á la curba ADI que es la primera Parábola cúbica.

COROLARIO II.

486. Si se supone la curba ACG una Hiper-

bola equilátera (*Fig.* 22.) cuyos exes iguales á $2a$; se tendrá $z^2 = 2ax + x^2$; pero por lo demostrado es $z^2 = \frac{x^4}{y^2}$: luego será $\frac{x^4}{y^2} = 2ax + x^2$; por consiguiente $y^2 = \frac{x^3}{2a + x}$. Es evidente por la construccion ó por la equacion de las curbas ADI que cada una de éstas tendrá otro ramo Adi que le será perfectamente igual, cuya posicion será la que se manifiesta en las Figuras. Con el mismo método se describirán otras curbas, por medio de otras tantas distintas curbas ACG.

PROPOSICION XXXIV.

487. Si la esquadra ABE tiene el lado BE indeterminado, y la regla AF tambien indeterminada se mueve al rededor del punto A; y tomado un hilo ACD igual á AB se fixa uno de sus extremos en A y el otro en el extremo D de una regla DC que se ha de mantener siempre perpendicular á la AF; y en esta disposicion se mueven las dos reglas AD, DC, de suerte que la parte AC del hilo se ajuste sobre el lado AB de la esquadra, y la otra parte con la regla CD; hallar la equacion á la curba descrita por el punto D. *Fig.* 24.

Tírese la perpendicular DM á la recta AB.

Supónganse las rectas $AB=a$, $AM=x$, $MD=y$; será $BM=a-x$, y $AD=\sqrt{(x^2+y^2)}$. Siendo pues el ángulo ADC recto, y la recta DM perpendicular á AC, será $AM:MD=MD:MC$, esto es, $x:y=y:MC=\frac{y^2}{x}$: luego $CB=CD=a-x-\frac{y^2}{x}$; pero por la semejanza de los triángulos ADM, DCM es $AD:DM=DC:CM$, esto es, $\sqrt{(x^2+y^2)}:y=a-x-\frac{y^2}{x}:\frac{y^2}{x}$: luego será $\frac{y^2\times\sqrt{(x^2+y^2)}}{x}=y\times(a-x-\frac{y^2}{x})$; partiendo por y, y reduciendo, se tendrá $y\times\sqrt{(x^2+y^2)}=ax-x^2-y^2$; quadrando ambos miembros resultará $a^2x^2-2ax^3+x^4-2axy^2+2x^2y^2+y^4=x^2y^2+y^4$, ó bien $a^2x^2-2ax^3+x^4-2axy^2+x^2y^2=o$: luego partiendo por x, y trasponiendo los términos que contienen la y, será $x^3-2ax^2+a^2x=2ay^2-xy^2$; de donde resulta ser $y^2=\frac{x^3-2ax^2+a^2x}{2a-x}$.

COROLARIO I.

488. Por ser $y^2=\frac{x^3-2ax^2+a^2x}{2a-x}$, será (*A*) $y=\pm\sqrt{\frac{x^3-2ax^2+a^2x}{2a-x}}$: luego la curba tendrá dos ramos perfectamente iguales respecto á la recta

A B que será su exe, y dichos ramos concurrirán en el punto *B*: lo qual es manifiesto por la construccion de la Figura, ó por la equacion á la Curba: pues suponiendo en ella $x = a$, será $y = o$.

COROLARIO II.

489. Tambien se deduce de la equacion (*A*) que la ordenada *y* tendrá dos valores reales é iguales, uno positivo y otro negativo, hasta tanto que la abscisa *x* no sea mayor que $2a$. Para describir con el instrumento el ramo *B F* correspondiente á dichas abscisas, en qualquier punto *G* de la recta $BH = BA$ levántese una perpendicular indefinida *G F*, y tomado un hilo igual á *A H* colóquese uno de sus extremos en el punto *G* y ajústese con la recta *A G* hasta que llegue al punto *A*; dóblese el hilo desde este punto, y vuélvase á ajustar sobre *A B* hasta donde alcance como en el punto *M*, y haciendo girar la regla *A F* cerca del punto *A* hasta que pase por el punto *D* extremo de la ordenada *M D* correspondiente á la abscisa *A M*, se tendrá en el punto *F* en que corta la regla á la perpendicular *G F*, uno de los puntos de la curba *B F*. Siendo pues $GAM = AH$, quitada *A G* será $AM = GH$; por consiguiente $MB = BG$; pero es $MB : BG$

$= DE : EF$: luego será $DE = EF$: y como es $CD = CB$, y los ángulos CDE, CBE iguales por rectos, será $DE = EB$; por consiguiente las tres rectas DE, EB, EF serán iguales, y por medio de esta propiedad se hallará que el ramo BF tiene la misma equacion de la Curba. Discúrrase del mismo modo respecto al ramo Bf.

COROLARIO III.

490. Levantada sobre la recta AH en el punto H la perpendicular IHL, y tirada FN paralela al exe AH, se demostrará con el mismo raciocinio expuesto antes (483) que la recta ID es asíntota de los ramos BF, Bf.

RROPOSICION XXXV.

491. Describir por puntos qualquier línea algébrica del tercer orden, cuya equacion sea dada. *Fig.* 25.

Dénse á la abscisa x tomada tanto positiva como negativa muchos valores sucesivos desde el cero al infinito, con lo que se tendrá siempre una equacion determinada del tercer grado dada por la incógnita y, y cantidades conocidas, la que resuelta ó construída determinará los valores de la y correspondientes á qualquier abscisa determi-

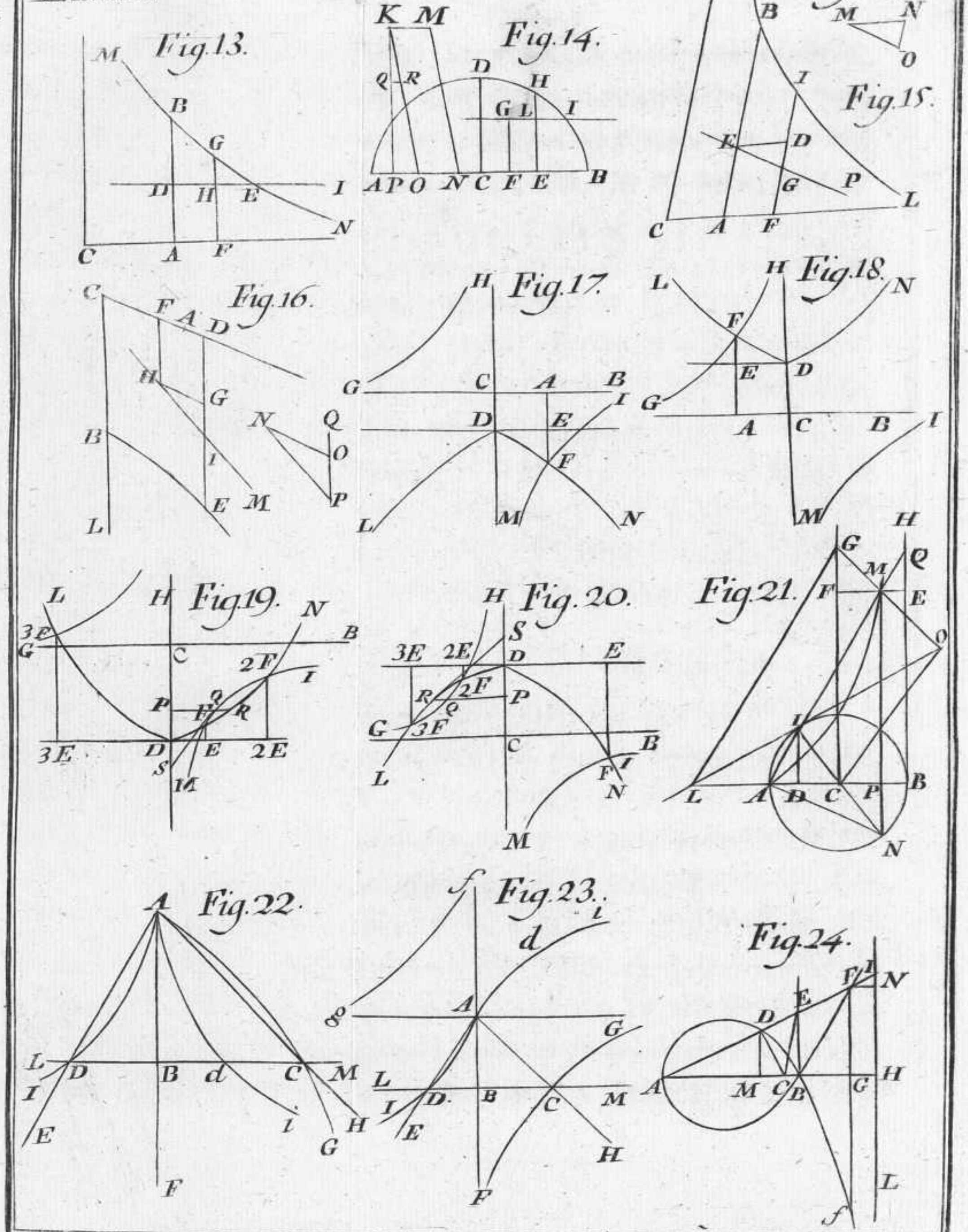


Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.

nada x. Ahora en la recta indefinida ML tómese un punto A por origen de las abscisas, como tambien las abscisas AB, AC, &c. iguales á los valores positivos dados antes á la x, y las abscisas AQ, AN, &c. iguales á los valores negativos dados á la misma x; y por los puntos B, C, &c. Q, N, &c. tírense con un ángulo comun las rectas BD, CE, &c. QR, NO, &c. correspondientes á los valores reales y positivos de la y que se han determinado, y tírense además las rectas BF, CG, &c. QI, NP, &c. correspondientes á los valores reales y negativos de la y que tambien se han determinado; y de esta suerte se tendrá descrita por infinitos puntos la curba de la equacion propuesta.

ESCOLIO.

492. Quando la ordenada y es igual á una fraccion, cuyo numerador y denominador son funciones de la abscisa x, puede suceder que dando un valor á dicha abscisa resulte la ordenada $y=o$, aunque ésta sea igual á una cantidad finita ó infinita: en este caso pártanse el numerador y denominador de la fraccion dada por la abscisa x menos el valor que tiene, y esta operacion repítase si es menester, hasta que se halle una fraccion, en quien substituyendo por la x su valor, resulten

ambos términos ó uno de ellos iguales á una cantidad finita; y en el valor de esta fraccion se tendrá él de dicha ordenada y. Este método suele ser inútil ó sumamente dificil para aquellas fracciones que tienen muchos términos radicales: en los Cálculos Diferencial é Integral se dará otro método que se extiende igualmente á dichas fracciones. Tambien es de advertir que si en la equacion dada se supone la abscisa x infinita, y se halla su correspondiente ordenada $y=o$, ó igual á una cantidad finita; la curba de dicha equacion tendrá por asíntota la misma linea de las abscisas, ó una paralela á ella con una distancia igual al valor hallado de la ordenada y. Igualmente si en la equacion dada se supone la ordenada y infinita, y se halla su correspondiente abscisa $x=o$, ó igual á una cantidad finita; la curba de dicha equacion tendrá por asíntota la ordenada que sale del origen de las abscisas, ó aquella ordenada que parte del extremo de dicha abscisa determinada.

Finalmente en los exemplos siguientes se manifestarán otros artificios que hay para construír las líneas del tercer orden, yá sea por medio de las del segundo, yá sea por medio de las del tercero cuya construccion se conoce.

EXEMPLO I.

493. Se pide describir por puntos la curba de la equacion $a y^2 = x^3$. *Fig.* 26.

Sáquese de la equacion dada el valor de la y, y se tendrá $y = \pm \sqrt{\frac{x^3}{a}}$. En la recta Bb fíxese el punto A para origen de las abscisas, positivas sobre la AB y negativas sobre la Ab. Tambien determínese colocar las ordenadas positivas hácia la parte H de la línea de las abscisas Bb, y las ordenadas negativas hácia la parte F, de suerte que todas ellas hagan con Bb ángulos iguales, los quales se supondrán rectos, mientras que no sean dados. Exâminando la equacion $y = \pm \sqrt{\frac{x^3}{a}}$, se verá 1°. que siendo la x positiva, la y tiene dos valores iguales, uno positivo y otro negativo: 2°. que siendo $x = o$, es $y = o$: 3°. que siendo $x = \infty$, es $y = \pm \infty$: 4°. que siendo la x negativa, serán imaginarios ambos valores de la y: de donde resulta 1°. que la curba expresada por dicha equacion tiene dos ramos perfectamente iguales, uno á cada lado del exe: 2°. que ambos ramos nacen del origen A de las abscisas, y se extienden uniformemente hácia la parte QS: 3°. que se ván apartando de la recta AB hasta una distancia infinita: 4°. que á las abscisas Ab negativas no corresponde ningun ramo de la Curba. Esto supuesto, dénse á la x valores positivos, y sean en partes de la constante a tomada por unidad; de lo que resultarán los correspondientes valores positivos y negativos de la y en partes de la misma constante: la construccion será mas exâcta, quanto menores sean estos valores de la x; para la idéa de la operacion bastan los siguientes: $x = \frac{a}{4}$, $y = \pm \frac{a}{8}$; $x = \frac{a}{2}$, $y = \pm \sqrt{\frac{a^2}{8}}$; $x = \frac{3a}{4}$, $y = \pm \sqrt{\frac{27a^2}{64}}$; $x = a$, $y = \pm a$, &c. En la recta indefinida AB córtense desde el punto A las partes $AC = \frac{a}{4}$, $AD = \frac{a}{2}$, $AL = \frac{3a}{4}$, $AO = a$, &c. y en los puntos C, D, L, O, &c. levántense sobre la recta AB las perpendiculares $CP = CE = \frac{a}{8}$, $DG = DF = \sqrt{\frac{a^2}{8}}$, $LM = LI = \sqrt{\frac{27a^2}{64}}$, $OR = ON = a$, &c. y se tendrán los puntos A, P, G, M, R, &c. del ramo AQ, como tambien los puntos A, E, F, I, &c. del ramo AS. Aunque solo se hubiesen determinado qualesquiera dos abscisas AD, AO, y sus correspondientes ordenadas DG, OR, se averiguaría si esta curba es cóncava ó convexà al exe AB: pues tirada la recta AR, por la semejanza de los triángulos ADH, OAR

será $AO : OR = AD : DH$, esto es, $a : a = \frac{a}{2} : DH = \frac{a}{2}$; pero es $DG = \sqrt{\frac{a^2}{8}}$: luego será $DH > DG$; por consiguiente entre los puntos A, R la curba se retira de la recta AR hácia el exe AB, y en conseqüencia es convexâ respecto al mismo exe. Discúrrase del mismo modo de todas las curbas que tienen todos sus puntos en curbatura contínua: pues si tienen algun punto de Inflexîon ó de Regreso (cuya determinacion se verá en los Calculos Diferencial é Integral) en este caso podrá ser parte de la curba cóncava al exe y parte convexâ.

EXEMPLO II.

494. Sea la equacion $xy^2 + by^2 - a^3 = o$ que se quiere describir por puntos. *Fig.* 27.

Hállese en la equacion propuesta el valor de la ordenada y, y se tendrá $y = \pm\sqrt{\frac{a^3}{x+b}}$, de cuya equacion resulta 1°. que siendo $x = o$, la y tiene dos valores iguales, uno positivo y otro negativo: 2°. que siendo la x positiva, la y tiene siempre dos valores iguales, uno positivo y otro negativo, los quales se ván disminuyendo á proporcion que la x se aumenta: 3°. que siendo la x negativa y menor que b, la y tiene dos valores iguales, los que se ván aumentando á proporcion que la $-x$ crece: 4°. que quando llega á ser $-x=b$, es $y=\pm\infty$: 5°. que siendo $-x > b$, los valores de la y son imaginarios. Por tanto suponiendo Bb la línea de las abscisas, el punto A origen de ellas, sobre AB positivas, y sobre Ab negativas, y suponiendo además recto el ángulo de las coordenadas, se tendrá 1°. que la curba no pasa por el origen A de las abscisas: 2°. que tiene dos ramos iguales y semejantemente puestos respecto á la Bb, convergentes hácia B y divergentes hácia b: 3°. que la recta AB es asíntota de ambos ramos: 4°. que sobre el punto A y recta AR continúan ambos uniformemente: 5°. que cortando la recta $AR=-x=b$, y tirando por R la recta EF perpendicular á ella, esta recta es tambien asíntota de ambos ramos: 6°. que sobre el punto R y recta EF no hay curba. Ahora dénse á la abscisa $\pm x$ valores, como por exemplo, $x=o$, $x=\frac{b}{2}=AM$, &c. $-x=\frac{b}{2}=AH$, &c. y substituídos estos en la equacion á la curba, se tendrán los correspondientes valores de las ordenadas, esto es, $y=\pm\sqrt{\frac{a^3}{b}}$, $y=\pm\sqrt{\frac{2a^3}{3b}}$, &c. $y=\pm\sqrt{\frac{2a^3}{b}}$, &c. Constrúyanse estas equaciones determinadas (430) y sean $AD=AC=\sqrt{\frac{a^3}{b}}$, $MN=ML=\sqrt{\frac{2a^3}{3b}}$, &c.

$HI = HG = \sqrt{\frac{2d^3}{b}}$, &c. con lo que se tendrán los puntos D, C, N, L, &c. I, G, &c. de los dos ramos de la curba de la equacion propuesta.

EXEMPLO III.

495. Se propone describir la Hiperbolóide de la equacion $x^2 y = a^3$. *Fig.* 28.

Hágase $x^2 = az$; y substituyendo el valor de x^2 en la equacion propuesta será $az \times y = a^3$, ó bien $zy = a^2$. Entre las asíntotas AB y AO puestas en ángulo recto descríbase la Hipérbola GO, cuya equacion $zy = a^2$; por consiguiente tomada qualquier abscisa $AC = z$, será su correspondiente ordenada $CG = y$: y tirada CI de modo que forme con AC un ángulo semirecto será $AI = AC = z$. Ahora cerca del exe AM descrita la Parabóla NAH cuya equacion $x^2 = az$, será la ordenada $IH = x$: luego tirada la recta HD paralela á la BM, y la recta GD paralela á la AO, será $AE = IH = x$, y $ED = CG = y$; con lo que queda determinado el punto D del ramo DF: y tomada $Ae = AE$, y completo el paralelógramo De, será $Ae = -x$, $ed = y$; por consiguiente se tendrá el punto d del otro ramo df de la Hiperbolóide. Con el mismo método se hallarán otros infinitos puntos de esta curba, que tendrá dos ramos iguales y semejantemente puestos respecto á las rectas AB y LO, que serán sus asíntotas; lo qual se deduce tambien de la equacion $x^2 y = a^3$ ó bien $y = \frac{a^3}{x^2}$: pues tomada la abscisa x tanto positiva como negativa, corresponde á la ordenada y el mismo valor positivo; y supuesta $x = o$, es $y = \frac{a^3}{o}$ cantidad infinita; y tambien supuesta $y = o$, es $x = \sqrt{\frac{a^3}{o}}$ cantidad infinita.

EXEMPLO IV.

496. Se pide describir la Curba de la equacion $x^3 + ax^2 = a^2 y$. *Fig.* 29.

Hágase $y = z + v$, en quien z, v son cantidades indeterminadas; y substituyendo el valor de y en la equacion propuesta se tendrá $x^3 + ax^2 = a^2 z + a^2 v$. Supóngase ahora $x^3 = a^2 z$, $ax^2 = a^2 v$ ó bien $x^2 = av$. Descríbase (485) cerca del exe EF la Parábola cúbica CAL de la equacion $x^3 = a^2 z$; y tirada por el punto A la perpendicular BG sobre la recta EF, y supuesta la abscisa $AB = x$, será la ordenada $BC = z$. Descrita ahora cerca del exe AF la Parábola HAD de la equacion $x^2 = av$, y supuesta como antes $AE = x$, será $BH = v$; pero es $y = z + v$: luego será $y = BC + BH$ respecto á la abscisa $AB = x$; de donde resulta que prolongada BC hasta que sea $CI = BH$, será $BI = y$ siendo $AB = x$; por consiguiente el punto I estará en la curba de la equacion propuesta. Con el mismo método se podrán determinar quantos puntos se quieran del ramo AI. Respecto al ramo AMN de la curba de la equacion propuesta, se determinará qualquier punto M de él, si se toma la ordenada $GM = GD - GL$. Por tanto la curba de la equacion propuesta tendrá la figura $IAMN$, cuyos ramos AI, AMN ván al infinito.

EXEMPLO V.

497. Se ha de construir la equacion $x^3 + ax^2 + bx + c = y^3$.

Hágase $y^3 = a^2 z$; y será $x^3 + ax^2 + bx + c = a^2 z$. La curba expresada por esta equacion se describirá segun el método enseñado en el exemplo antecedente; despues descrita la Parábola de la equacion $y^3 = a^2 z$, se tendrá la relacion entre las coordenadas x, y de la equacion propuesta.

ESCOLIO.

498. Hasta ahora se ha supuesto que las ordenadas x, y no están mezcladas entre sí: quando ésto

suceda, se separarán conforme se pueda por la division, por la extraccion de raíces, por las convenientes substituciones, ó por qualquier otro artificio. Finalmente imitando los métodos expuestos antes para la descripcion de las lineas del tercer orden, se describirán las del quarto: tambien se aplicarán los mismos métodos con utilidad para la descripcion de las lineas de los grados superiores.

De la Resolucion y Construccion de las Equaciones del quarto grado.

PROPOSICION XXXVI.

499. Determinar, si una equacion numérica del quarto ú otro qualquier grado tiene algun factor racional del segundo.

En la equacion dada substitúyanse sucesivamente en lugar de la incógnita tres, ó mas términos de la série aritmética 1, o, -1, &c. hállense los divisores de los números que resultan, y póngանse á lado de las respectivas substituciones; de estos divisores considerados tanto positivos como negativos réstense los quadrados de dichas substituciones; entre los números que resultan búsquense los que forman séries aritméticas, de modo que el primer término sea uno de dichos números correspondientes á la suposicion mas alta, como por exemplo $x = 2$; el segundo término sea uno de los mismos números correspondientes á la suposicion próxîmamente menor $x = 1$, y así sucesivamente: halladas dichas séries, pártase sucesivamente la equacion propuesta por una funcion de la incógnita, cuyo primer término es el quadrado de la misma incógnita, el segundo término es la incógnita multiplicada por la diferencia de la série, y el tercero es aquel término de la misma série correspondiente á la suposicion $x = o$; y se tendrá el factor racional que se busca en aquel divisor que parte exâctamente la equacion propuesta. Si no se halla ninguna de las referidas séries, ó bien si la equacion no se puede partir exâctamente; la misma equacion no tendrá factor racional del segundo grado. Pues suponiendo a, b números positivos ó negativos, de suerte que la equacion propuesta tenga el factor racional $x^2 + bx + a$, ó bien pueda partirse por éste, si en la equacion y en el factor racional se substituyen sucesivamente en lugar de x los números de la série aritmética $2, 1, o, -1, -2$, &c. los números en quienes se convierte la equacion por dichas substituciones, se podrán partir respectivamente por $4 + 2b + a$, $1 + b + a$, a, $1 - b + a$, $4 - 2b + a$, &c. Por tanto quitando de éstos el quadrado del valor respectivo de x, se forma la série aritmética $2b+a$, $b+a$, a, $-b+a$, $-2b+a$, &c. luego el coeficiente b del segundo término del factor racional es igual á la diferencia de dicha série, y el último término a es aquel término de la misma série correspondiente á la suposicion $x=o$.

COROLARIO.

500. Luego quedarán determinados los dos factores racionales del segundo grado de toda equacion numérica del quarto, siempre que esta tenga uno de ellos; por consiguiente comparando dichos factores con cero, y resolviendo estas dos equaciones del segundo grado, se tendrán los quatro valores de la incógnita de dichas equaciones.

ESCOLIO.

501. El método explicado en la Proposicion antecedente se aplica igualmente á las equaciones numéricas que tienen coeficiente en su primer término, con tal que se resten de los divisores de los números en quienes se convierte sucesivamente la equacion por las respectivas suposiciones de x, los quadrados de éstas multiplicados por qualquiera de los divisores del coeficiente del primer término, y se multi-

plique el quadrado de la incógnita x de cada factor racional por el correspondiente divisor de dicho coeficiente: pues en qualquiera de dichas equaciones suponiendo el factor racional $m x^2 + b x + a$, en quien m es uno de los divisores del primer término, y las cantidades b, a expresan números enteros positivos ó negativos; y substituyendo sucesivamente en la equacion y en el factor los números de la série aritmética $2, 1, 0, -1, -2$, &c. los números en quienes se convierte la equacion por dichas substituciones, se podrán partir por $4m + 2b + a$, $m + b + a$, a, $m - b + a$, $4m - 2b + a$, &c. luego restando de éstos los quadrados de las respectivas suposiciones multiplicados por m, se tendrá la série $2b + a$, $b + a$, a, $-b + a$, $-2b + a$, &c.

EXEMPLO I.

502. Se pide hallar, si la equacion $x^4 - 5x^3 + 15x - 9 = 0$ se puede resolver en dos factores racionales del segundo grado.

A	B	C	D	E		F
$x = 4$	13	1,13	16	-15,-3,-17,-29	-17	-3
$x = 3$	18	1,2,3,6,9,18	9	-8,-7,-6,-3,0,9,-10,-11,-12,-15,-18,-27	-12	-3
$x = 2$	3	1,3	4	-3,-1,-5,-7	-7	-3
$x = 1$	2	1,2	1	0,1,-2,-3	-2	-3
$x = 0$	9	1,3,9	0	1,3,9,-1,-3,-9	3	-3
$x = -1$	18	1,2,3,6,9,18	1	0,1,2,5,8,17,-2,-3,-4,-7,-10,-19	8	-3
$x = -2$	17	1,17	4	-3,13,-5,-21	13	-3

Escribo en la coluna *A* los valores que quiero dár á x correspondientes á la série aritmética 4, 3, 2, &c. en la coluna *B* escribo los números, en quienes se convierte sucesivamente la equacion por las correspondientes suposiciones de x, dexando los signos de dichos números: despues escribo en la coluna *C* los divisores de los números puestos en la coluna *B*, considerándolos tanto positivos como negativos: además escribo en la coluna *D* los quadrados de las suposiciones de x puestas en la *A*: ahora resto dichos quadrados de los correspondientes divisores puestos en *C*, y escribo los números que resultan en la coluna *E*: finalmente noto en *F* las dos séries aritméticas que resultan, tomando sus términos en la coluna *E* de modo que correspondan sucesivamente á las suposiciones *A*. Por tanto las cantidades b, a de la fórmula del factor racional $x^2 + b\,x + a$ serán en fuerza de la primera série respectivamente iguales á -5, 3, por ser -5 la diferencia de la misma série, y 3 aquel término de la série correspondiente á la suposicion $x = o$: luego $x^2 - 5\,x + 3$ será el factor racional del segundo grado, por quien se deberá tentar la division de la equacion propuesta: y como sucede efectivamente la particion, resultando el quociente exácto $x^2 - 3$, serán $x^2 - 5\,x + 3 = o$, $x^2 - 3 = o$

los dos factores, que se buscan; por consiguiente las raíces de la equacion dada serán $x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$, $x=\pm\sqrt{3}$. Adviértase que el factor x^2-3 se tendrá igualmente por medio de la segunda série: pues en virtud de ésta, las cantidades b, a de la fórmula x^2+bx+a serán respectivamente iguales á o, -3, por ser o la diferencia de la misma série, y -3 aquel término de la série correspondiente á la suposicion $x=o$.

EXEMPLO II.

503. Se propone determinar, si la equacion $2x^4-8x^3+9x^2+4x-5=o$ se puede resolver en dos factores racionales del segundo grado.

A	B	C	D		E	F		
$x=3$	34	1,2,17	9	-8,-7,8,-10,-11,-26	-17,-16,-1,-19,-20,-35	-7	-7	-1
$x=2$	7	1,7	4	-3,3,-5,-11	-7,-1,-9,-15	-3	-5	-1
$x=1$	2	1,2	1	0,1,-2,-3	-1,0,-3,-4	1	-3	-1
$x=0$	5	1,5	0	1,5,-1,-5	1,5,-5,-1	5	-1	-1
$x=-1$	10	1,2,5,10	1	0,1,4,9,-2,-3,-6,-11	-1,0,3,8,-4,-7,-12,-3	9	1	-1
$x=-2$	119	1,7,17,119	4	-3,3,13,115,-5,-11, (-21-123	-7,-1,9,111,-9,-15,-25 (-127	13	3	-1

Escríbo en *A* las suposiciones de x, en *B* los números en quienes se convierte sucesivamente la equacion propuesta por dichas suposiciones, en *C* los divisores de los mismos números, en *D* los quadrados de dichas suposiciones, en *E* los números que resultan, restando de los divisores C tomados tanto positivos como negativos los quadrados de dichas suposiciones multiplicados primero por 1, despues por 2, porque estos dos números son los divisores del coeficiente del primer término de la equacion dada: finalmente escribo en F las progresiones aritméticas que se hallan entre los residuos E tomados con sus propios signos. Por tanto las cantidades m, b, a del factor racional del segundo grado $mx^2 + bx + a$ serán respectivamente iguales en virtud de la primera série á $1, -4, 5$, en fuerza de la segunda á $1, -2, -1$, y por la tercera á $2, 0, -1$: luego los fáctores racionales, por quienes se debe tentar la division de la equacion propuesta, serán $x^2 - 4x + 5$, $x^2 - 2x - 1$, $2x^2 - 1$: y como sucede efectivamente la particion por $x^2 - 4x + 5$, $2x^2 - 1$, serán éstos los factores racionales que se buscan; y resueltas las dos equaciones $x^2 - 4x + 5 = 0$, $2x^2 - 1 = 0$, se tendrán las quatro raíces de la equacion propuesta, esto es, $x = 2 \pm \sqrt{-1}$, $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$.

PROPOSICION XXXVII.

504. Determinar, si una equacion literal del quarto ú otro qualquier grado tiene algun factor racional complexô del segundo.

I. Tenga la equacion propuesta dos letras, esto es la incógnita y otra cantidad conocida; y todos los términos de ella sean de igual dimension. Supóngase la cantidad conocida igual á la unidad, y se tendrá una equacion numérica; hállese (499) el factor racional de ésta; y si lo tiene, multiplíquese su segundo término por dicha cantidad conocida, y el tercero por el quadrado de ésta: luego la cantidad que resulta será el factor racional que se busca.

II. Tenga la equacion dada tres letras, esto es la incógnita, y otras dos cantidades conocidas p, q; y todos los términos de ella sean de igual dimension. En la equacion propuesta háganse sucesivamente $x=o$, $p=o$, $q=o$, y nótense las fórmulas que resultan, las que contendrán solo dos letras; en estas fórmulas búsquense por el caso antecedente todos los factores racionales compléxos del segundo grado, y los factores monómios de dos dimensiones, que se han de considerar tanto positivos como negativos; y si resulta que entre los factores correspondientes á las suposiciones $x=o$, $p=o$, $q=o$, se hallen tres, de suerte que estando el quadrado de alguna de las cantidades x, p, q en uno de ellos, se halle el mismo quadrado en otro factor, y estando el producto de dos de dichas cantidades en alguno de los factores, no se halle el mismo producto repetido en otro factor; la suma de estos productos y la semisuma de dichos quadrados será el factor racional que se busca. Siendo pues la equacion dada compuesta de las tres letras x, p, q, será la fórmula del factor racional $ax^2 + bpx + cqx + dp^2 + epq + fq^2$, en quien a, b, c, d, e, f expresan los coeficientes numéricos. Ahora si en la equacion propuesta se suponen sucesivamente $x=o$, $p=o$, $q=o$, las tres fórmulas que resultan se podrán partir exâctamente por $dp^2+epq+fq^2$, $ax^2+cqx+fq^2$, $ax^2+bpx+dp^2$, en quienes se observa que los quadrados de las cantidades x, p, q se hallan repetidos en dos factores y no los productos de cada dos de ellas, y que además la semisuma de dichos quadrados, esto es $dp^2+fq^2+ax^2$, junta con la suma de los productos $epq+cqx+bpx$, restituye el factor racional $ax^2+bpx+cqx+dp^2+epq+fq^2$. Quando el factor racional está compuesto de dos letras, será su fórmula $ax^2+bpx+dp^2$: luego haciendo sucesivamente en la equacion propuesta $x=o$, $p=o$, $q=o$, las tres fórmulas que resultan se podrán partir por los respectivos factores dp^2, ax^2, $ax^2+bpx+dp^2$.

III. Si la equacion dada tiene dos letras, y los términos de ella no tienen igual dimension; se completarán las dimensiones que faltan por las de qualquier otra letra, y se hallará por el caso antecedente el factor racional, en quien se quitará dicha letra para tener el factor de la equacion dada.

IV. Finalmente si la equacion dada tiene quatro ó mas letras; se argüirá de un modo semejante á él expuesto en los casos segundo y tercero, para determinar el factor racional del segundo grado de dicha equacion.

EXEMPLO I.

505. Se pide determinar, si puede resolverse en dos factores racionales del segundo grado la equacion $x^4+7ax^3+2a^2x^2+28a^3x-8a^4=o$, que contiene solo dos letras, y todos sus términos son de una misma dimension.

Supóngase $a=1$, y resultará la equacion numérica $x^4+7x^3+2x^2+28x-8=o$. Por las reglas dadas (499) se hallará que esta equacion se resuelve en dos factores racionales del segundo grado, esto es, $x^2+7x-2=o$, $x^2+4=o$: luego los de la propuesta serán $x^2+7ax-2a^2=o$, $x^2+4a^2=o$.

EXEMPLO II.

506. Se propone determinar, si puede resol-

verse en dos factores racionales del segundo grado la equacion $x^4 - 3ax^3 - a^2x^2 + abx^2 - b^2x^2 + 3a^3x + 3ab^2x - a^3b - ab^3 = 0$, que contiene tres letras, y todos sus términos son de una misma dimension.

A	B	C	D	
$x=0$	$-a^3b-ab^3$	ab, a^2+b^2	ab	$-a^2-b^2$
$a=0$	$x^4-b^2x^2$	x^2, x^2-b^2	x^2	x^2-b^2
$b=0$	$x^4-3ax^3-a^2x^2+3a^3x$	x^2-3ax, x^2-a^2	x^2-3ax	x^2-a^2

Escribo en *A* las suposiciones, y los resultados en *B*; esto es haciendo sucesivamente $x=0$, $a=0$, $b=0$ en la equacion propuesta, resultan las tres cantidades $-a^3b - ab^3$, $x^4 - b^2x^2$, $x^4 - 3ax^3 - a^2x^2 + 3a^3x$: de estas tres cantidades hallo los factores monómios y polinómios de dos dimensiones, y los escribo en *C*, considerándolos tanto positivos como negativos: finalmente pongo en la coluna *D* aquellos factores que tienen las condiciones expresadas en la Proposicion antecedente respecto á los quadrados y productos de las cantidades x, a, b. Ahora tomada la semisuma de los quadrados y la suma de los productos en la primera série *D*, hallo el factor racional del segundo grado $x^2 - 3ax \pm ab$: tambien tomada la semisuma de los quadrados de la segunda série escrita en *D*, hallo otro factor racional $x^2 - a^2 - b^2$; y tentada la division de la equacion propuesta por $x^2 - a^2 - b^2$, resulta el quociente exâcto $x^2 - 3ax + ab$. Por tanto dicha equacion se resuelve en los dos factores racionales $x^2 - a^2 - b^2 = o$, $x^2 - 3ax + ab = o$; por consiguiente tendrá las raíces $x = \pm\sqrt{(a^2 + b^2)}$, $x = \frac{3a}{2} \pm \sqrt{(\frac{9a^2}{4} - ab)}$.

PROPOSICION XXXVIII.

507. Determinar los factores del segundo grado de qualquier equacion convertible del quarto $x^4 + 2bx^3 + c^2x^2 + 2a^2bx + a^4 = o$.

Supónganse los factores que se buscan $x^2 + hx + a^2 = o$, $x^2 + fx + a^2 = o$, en quienes las cantidades h, f se han de determinar. Multiplicados entre sí dichos factores, resulta la equacion convertible (B)

$$\begin{aligned} x^4 + hx^3 &+ 2a^2x^2 + a^2fx + a^4 = o \\ + fx^3 &+ fhx^2 + a^2hx \end{aligned}$$

que será idéntica á la propuesta: luego se tendrán las equaciones $f + h = 2b$, $2a^2 + fh = c^2$, por cuyo medio se hallarán los valores de las indeterminadas $h = b \pm \sqrt{(2a^2 - c^2 + b^2)}$, $f = b \mp \sqrt{(2a^2 - c^2 + b^2)}$; por consiguiente los factores del segundo grado de la equacion propuesta serán $x^2 + [b + \sqrt{(2a^2 - c^2 + b^2)}] \times x + a^2 = o$, $x^2 + [b$

$-\sqrt{(2a^2-c^2+b^2)}]\times x+a^2=o.$

EXEMPLO.

508. Se pide hallar los factores del segundo grado de la equacion convertible $x^4+4x^3+64x+256=o.$

Hágase idéntica la equacion propuesta con la de la fórmula $x^4+2bx^3+c^2x^2+2a^2bx+a^4=o$; y se tendrá $b=2$, $c=o$, $a=4$: y como los factores de la fórmula son $x^2+[b+\sqrt{(2a^2-c^2+b^2)}]\times x+a^2=o$, $x^2+[b-\sqrt{(2a^2-c^2+b^2)}]\times x+a^2=o$, los de la equacion propuesta serán $x^2+8x+16=o$, $x^2-4x+16=o$. Por tanto las raíces de la equacion convertible $x^4+4x^3+64x+256=o$ son $x=-4$, $x=-4$, $x=2\pm\sqrt{-12}$.

ESCOLIO.

509. Con el mismo método se tratarán las equaciones convertibles de qualquier otro grado. Sea propuesta, por exemplo, la equacion del sexto grado (A) $x^6-bx^5+c^3x^3-a^4bx+a^6=o$. Tómese la equacion convertible $x^4+fx^3+h^2x^2+a^2fx+a^4=o$ inferior en dos grados respecto á la propuesta; y multiplicándola por el trinómio $x^2+gx+a^2=o$, se tendrá la equacion (B)

$$\left.\begin{array}{l} x^6+fx^5+h^2x^4+2a^2fx^3+a^2fgx^2+a^4gx+a^6 \\ \quad +gx^5+gfx^4+h^2gx^3+a^4x^2+a^4fx \\ \quad\quad +a^2x^4 \quad\quad\quad +a^2h^2x^2 \end{array}\right\}=o$$

Comparando como antes (507) los términos correspondientes de las equaciones (A) y (B) se derivan las equaciones $f+g=-b$, $h^2+gf+a^2=o$, $2a^2f+h^2g=c^3$, las que manejadas con los métodos enseñados (400) dán la equacion $g^3+bg^2-3a^2g-2a^2b-c^3=o$: resuelta ésta (461) se tendrá el valor de g, y por medio de las equaciones antecedentes se hallarán los valores de las indeterminadas f, h.

PROPOSICION XXXIX.

510. Si una equacion del quarto grado ó de qualquier otro tiene dos ó mas raíces iguales, y se multiplícan sus términos por los de una série aritmética; la suma de los productos será igual á cero, y en esta equacion quedará excluida una de las raíces iguales.

Supónganse las raíces $x=a$, cuyo número sea m: tambien supóngase $x^r+bx^{r-1}+cx^{r-2}+\&c.=o$ la equacion que dá las demás raíces desiguales: luego la equacion $(x-a)^m\times(x^r+bx^{r-1}+cx^{r-2}+\&c.)=o$ será idéntica á la propuesta; y por ser $(x-a)^m=x^m-max^{m-1}+$

$$\frac{m\times(m-1)}{2}\times a^2x^{m-2}-\frac{m\times(m-1)\times(m-2)}{2\times3}\times a^3x^{m-3}+\&c.$$

será $(x-a)^m\times(x^r+bx^{r-1}+cx^{r-2}+\&c.)=(A)$

$$\left.\begin{array}{l} x^{m+r}-max^{m+r-1}+\frac{m(m-1)}{2}.a^2x^{m+r-2}-\frac{m\times(m-1)\times(m-2)}{2\times3}.a^3x^{m+r-3}+\&c.\\ \quad +bx^{m+r-1}-mab\times x^{m+r-2}+\frac{m\times(m-1)}{2}\times a^2bx^{m+r-3}-\&c.\\ \quad\quad +c\times x^{2\ m+r-}-mac\times x^{m+r-3}+\&c.\\ \quad\quad\quad\quad +\&c.\quad -\&c.\\ e,\quad e+d,\quad e+2d,\quad e+3d,\quad \&c. \end{array}\right\}=0$$

Multiplicando ahora los términos de esta equacion por los de la série aritmética e, $e+d$, $e+2d$, $e+3d$, &c. se tendrá un producto igual á la suma de los productos 1°. de los términos de la primera série horizontal de dicha equacion multiplicados por los de la série e, $e+d$, $e+2d$, $e+3d$, &c. 2°. de los términos de la segunda série horizontal multiplicados por los de la série $e+d$, $e+2d$, $e+3d$, &c. 3°. de los términos de la tercera série horizontal multiplicados por los de la série $e+2d$, $e+3d$, &c. y así sucesivamente; pero el producto de los terminos de la série

$$x^n-nax^{n-1}+\frac{n\times(n-1)}{2}.a^2x^{n-2}-\frac{n\times(n-1)\times(n-2)}{2\times3}.a^3x^{n-3}+\&c.$$

por los $\underline{\quad q,\quad q+d,\quad q+2d,\quad\quad q+3d,\quad\quad \&c.}$

$$\text{es}=\left\{\begin{array}{l} qx^n-naqx^{n-1}+\frac{n\times(n-1)}{2}.a^2qx^{n-2}-\frac{n\times(n-1)\times(n-2)}{2\times3}a^3qx^{n-3}+\&c.\\ -nadx^{n-1}+n.(n-1).a^2dx^{n-2}-\frac{n\times(n-1)\times(n-2)}{2}.a^3dx^{n-3}+\&c. \end{array}\right.$$

ó bien igual á $q \times (x-a)^n - n a d \times (x-a)^{n-1}$ $= [q \times (x-a) - n a d] \times (x-a)^{n-1}$: luego el producto de los términos de dicha primera série horizontal por los de la série aritmética e, $e+d$, $e+2d$, $e+3d$, &c. será igual á $x^r \times [e \times (x-a) - m a d] \times (x-a)^{m-1}$; el producto de los términos de dicha segunda série horizontal por los de la série aritmética $e+d$, $e+2d$, $e+3d$, &c. será $b x^{r-1} \times [(e+d) \times (x-a) - m a d] \times (x-a)^{m-1}$; el producto de los términos de dicha tercera série horizontal por los de la série aritmética $e+2d$, $e+3d$, &c. será igual á $c x^{r-2} \times [(e+2d) \times (x-a) - m a d] \times (x-a)^{m-1}$; y así sucesivamente. Por tanto los términos de la equacion (A) multiplicados por los de la série aritmética e, $e+d$, $e+2d$, $e+3d$, &c. dán unos productos tales, que su suma es igual á $x^r \times [e \times (x-a) - m a d] \times (x-a)^{m-1} + b x^{r-1} \times [(e+d) \times (x-a) - m a d] \times (x-a)^{m-1} + c x^{r-2} \times [(e+2d) \times (x-a) - m a d] \times (x-a)^{m-1} + \&c. =$

$$\left.\begin{array}{l} x^r \times [e \times (x-a) - m a d] \\ + b x^{r-1} \times [(e+d) \times (x-a) - m a d] \\ + c x^{r-2} \times [(e+2d) \times (x-a) - m a d] \\ + \&c. \end{array}\right\} \times (x-a)^{m-1}$$

pero es $x-a=o$: luego dicha suma será igual á cero, y en esta equacion habrá una menos de las raíces iguales, que en la propuesta: y si todas las raíces de la equacion propuesta son iguales á la cantidad a, y el número de ellas es m; la suma de los productos de los términos de la misma equacion $x^m - max^{m-1} + \frac{m\times(m-1)}{2} \times a^2 x^{m-2} - \frac{m\times(m-1)\times(m-2)}{2\times3} \times a^3 x^{m-3} + \&c. = 0$ por los de la série aritmética $e, e+d, e+2d, e+3d$, &c. será igual á $[e \times (x-a) - mad] \times (x-a)^{m-1} = 0$.

COROLARIO.

511. Infiérese que si el primer término e de la referida série aritmética es igual á o; será la suma de dichos productos igual á o, y en esta equacion la incógnita x estará elevada á un grado menos que en la propuesta.

PROPOSICION XL.

512. Determinar, si una equacion del quarto ú otro qualquier grado tiene raíces iguales.

I. Si la equacion dada contiene solo dos raíces iguales, multiplíquense los términos de ella por los de una série aritmética; y la suma de los productos contendrá (510) solo una de dichas raíces iguales. Ahora hállese el mayor comun divisor de la equacion propuesta y de la que ha resultado por la operacion antecedente, y por medio de dicho divisor comparado con cero se hallará una de dichas raíces iguales. Al contrario, si dichas dos equaciones no tienen divisor comun, la equacion propuesta no tendrá raíces iguales.

II. Si la equacion dada contiene tres raíces iguales, con el mismo método del caso antecedente se formará otra segunda equacion que contendrá solo dos de dichas raíces iguales. Tratada esta equacion del mismo modo que la propuesta, se formará otra tercera equacion que contendrá solo una de dichas raíces iguales: luego esta raíz se tendrá por medio del mayor comun divisor de las equaciones segunda y tercera.

III. Finalmente si la equacion dada contiene quatro, cinco ó mas raíces iguales, se formarán con el referido método tres, quatro ó mas equaciones; y el mayor comun divisor de las dos últimas contendrá una de dichas raíces iguales.

COROLARIO.

513. Luego si una equacion del quarto grado tiene dos ó tres raíces iguales, y determinadas éstas por medio de la Proposicion antecedente se parte dicha equacion por el quadrado ó cubo de sus factores iguales; se tendrá en el quociente el otro factor de la misma equacion, el qual comparado

con cero dará una equacion del segundo ó primer grado, cuyas raíces serán las desiguales de la propuesta. Respecto á qualquier otra equacion de grado superior que tiene dos ó mas raíces iguales, se determinará con el mismo método aquella equacion que contiene las demás raíces desiguales, la que será inferior á la propuesta en tantos grados, quantas raíces iguales ésta tenga.

EXEMPLO I.

514. Se pide determinar, si la equacion $x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = o$ tiene raíces iguales; y en la suposicion que las tenga, se pide resolverla.

I. . $x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = o$

A . . 4, 3, 2, 1, o

$4x^4 - 21x^3 + 34x^2 - 17x = o$

II. . $4x^3 - 21x^2 + 34x - 17 = o$

B . . 3, 2, 1, o

$12x^3 - 42x^2 + 34x = o$

III . . $6x^2 - 21x + 17 = o$.

C . . 2, 1, o

$12x^2 - 21x = o$

IV . . $4x - 7 = o$

Multiplíquese la equacion propuesta I por la série aritmética A formada de los exponentes de x en la misma equacion; y se tendrá $4x^4 - 21x^3 + 34x^2 - 17x = o$ que partida por x se deprimirá de un grado, y resultará la equacion II. Despues multiplíquese ésta por la série aritmética B formada de los exponentes de x en la misma equacion; y resultará $12x^3 - 42x^2 + 34x = o$ que partida por $2x$, dará la equacion III. Finalmente multiplíquese ésta por la série aritmética C; y se tendrá $12x^2 - 21x = o$ que partida por $3x$, subministrará la equacion IV. Esto supuesto, si la equacion dada tubiese sus quatro raíces iguales, las equaciones III y IV tendrían un divisor comun: y como hecho el cálculo no se halla, dicha equacion no podrá tener sus quatro raíces iguales. Prosigo diciendo: si la equacion propuesta tubiese tres raíces iguales, las equaciones II y III tendrían un divisor comun: y como hecho el cálculo no se halla, dicha equacion no podrá tener tres raíces iguales. Finalmente si la equacion dada tubiese dos raíces iguales, las equaciones I y II tendrían un divisor comun: y como lo tienen efectivamente, y es $x - 1$, la equacion dada tendrá dos raíces iguales, ó dos factores iguales $x - 1 = o$, $x - 1 = o$: luego dividiendo dicha equacion por el producto de estos factores, esto es por $x^2 - 2x + 1 = o$, resultará por quociente el otro factor $x^2 - 5x + 6 = 0$ de la misma equacion. Por tanto las raíces que se buscan son $x = 1$, $x = 1$, $x = 3$, $x = 2$.

EXEMPLO II.

515. Se propone determinar, si la equacion $x^4 - 54x^2 - 216x - 243 = 0$ tiene raíces iguales; y si las tiene, se propone resolverla.

$$\begin{array}{l}
\text{I} \,.\,.\, x^4 * -54x^2 - 216x - 243 = 0 \\
\text{A} \,.\,.\, \underline{4,3,\quad 2,\quad 1,\quad 0} \\
\quad 4x^4 * -108x^2 - 216x = 0 \\
\text{II} \,.\,.\, x^3 * -27x - 54 = 0 \\
\text{B} \,.\,.\, \underline{3,2,\quad 1,\quad 0} \\
\quad 3x^3 * -27x = 0 \\
\text{III} \,.\,.\, x^2 * -9 = 0 \\
\text{C} \,.\,.\, \underline{2,1,\quad 0} \\
\quad 2x^2 * = 0 \\
\text{IV} \,.\,.\, x = 0
\end{array}$$

Hecha la operacion arriba figurada con el mismo método del exemplo antecedente, resulta que las equaciones III y IV no tienen divisor comun: luego la equacion propuesta no podrá tener quatro raíces iguales; lo que se deduce tambien de la misma equacion, por faltarle el segundo término. Pero hecho el cálculo se hallará que las equaciones II y III tienen el divisor comun $x+3$; por consiguiente la equacion propuesta tendrá tres raíces iguales á -3. Ahora dividiendo la misma equacion por $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$, que es el cubo del factor $x+3=o$, resultará en el quociente el otro factor $x-9=o$ de la misma equacion; por consiguiente las quatro raíces de ella serán $x=-3$, $x=-3$, $x=-3$, $x=9$.

ESCOLIO.

516. Las dos Proposiciones antecedentes se extienden á las equaciones que tienen dos ó mas raíces iguales de una especie, dos ó mas raíces iguales de otra, y así sucesivamente, mezcladas ó no con otras raíces desiguales; esto es, si una equacion contiene dichas raíces, y se multiplícan sus términos por los de una série aritmética, la suma de estos productos será igual á cero, y esta equacion contendrá una menos de dichas raíces iguales, de donde resulta la regla para determinarlas. Como, por exemplo, si una equacion contiene dos raíces iguales de una especie, y dos raíces iguales de otra, y se multiplícan los términos de la misma equacion por los de una série aritmética; la suma de estos productos sera igual á cero, y esta equacion contendrá

solo una vez cada una de dichas raíces iguales; por consiguiente buscando el mayor comun divisor de la equacion propuesta y de la que ha resultado por dicha operacion, se tendrá una equacion del segundo grado que contendrá solo una vez cada una de dichas raíces iguales, la que resuelta dará las raíces que se buscan. Tambien si una equacion contiene dos raíces iguales de una especie, y tres raíces iguales de otra especie, y se hace con esta equacion la misma operacion que antes; la equacion que resulta contendrá una de las raíces iguales de la primera especie, y dos raíces iguales de la segunda: y si con esta equacion se repite dicha operacion, la equacion que resulta contendrá solo una de las raíces iguales de la segunda especie; por consiguiente buscando el mayor comun divisor de las equaciones segunda y tercera, se tendrá una de las raíces de la segunda especie: ahora partiendo por ella la segunda equacion, y buscando el mayor comun divisor entre el quociente que resulta y la equacion propuesta, se tendrá una equacion del segundo grado que contendrá solo una raíz de cada especie: luego dividiendo esta equacion por la raíz hallada, se tendrá la otra.

EXEMPLO III.

517. Se pide hallar, si la equacion $x^4 + 4x^3$

$-26x^2-60x+225=o$ tiene raíces iguales.

$$\text{I}\,..\,x^4+4x^3-26x^2-60x+225=o$$
$$\text{A}\,..\,4,\ 3,\ \ 2,\ \ 1,\ \ o$$
$$4x^4+12x^3-52x^2-60x=o$$
$$\text{II}\,..\,x^3+3x^2-13x-15=o$$
$$\text{B}\,..\,3,\ \ 2,\ \ 1,\ \ o$$
$$3x^3+6x^2-13x=o$$
$$\text{III}\,..\,3x^2+6x-13=o$$
$$\text{C}\,..\,2,\ \ 1,\ \ o$$
$$6x^2+6x=o$$
$$\text{IV}\,..\,x+1=o$$

Hecho el cálculo arriba figurado, hallo que las equaciones tercera y quarta no tienen un comun divisor, y que lo mismo sucede con las equaciones segunda y tercera; pero hallo que las equaciones primera y segunda tienen el divisor comun $x^2+2x-15=o$, cuyas raíces son $x=3$, $x=-5$: de donde resulta que la equacion propuesta tiene dos raíces iguales á 3, y otras dos iguales á -5, esto es, $x=3$, $x=3$, $x=-5$, $x=-5$.

EXEMPLO IV.

518. Se ha de determinar, si la equacion $x^5+x^4-5x^3-x^2+8x-4=o$ tiene raíces iguales.

$$\text{I}\,..\,x^5+x^4-5x^3-x^2+8x-4=0$$
$$\text{A}\,..\,5,\quad 4,\quad 3,\quad 2,\quad 1,\quad 0$$

$$5x^5+4x^4-15x^3-2x^2+8x=0$$
$$\text{II}\,..\,5x^4+4x^3-15x^2-2x+8=0$$
$$\text{B}\,..\,4,\quad 3,\quad 2,\quad 1,\quad 0$$

$$20x^4+12x^3-30x^2-2x=0$$
$$\text{III}\,..\,10x^3+6x^2-15x-1=0$$
$$\text{C}\,..\,3,\quad 2,\quad 1,\quad 0$$

$$30x^3+12x^2-15x=0$$
$$\text{IV}\,..\,10x^2+4x-5=0$$
$$\text{D}\,..\,2,\quad 1,\quad 0$$

$$20x^2+4x=0$$
$$\text{V}\,..\,5x+1=0$$

Las equaciones quarta y quinta, tercera y quarta, no tienen ningun divisor comun; pero las equaciones segunda y tercera tienen el divisor comun $x-1$, de donde resulta que la equacion propuesta tendrá tres raíces iguales á 1. Ahora para determinar, si dicha equacion tiene raíces iguales de otra especie; parto por $x-1$ la segunda, y hallo el quociente $5x^3+9x^2-6x-8=0$: entre esta equacion y la propuesta determíno el mayor comun divisor que es $x^2+x-2=0$, cuyas raíces son $x=1$, $x=-2$, de las quales la primera está contenida tres veces en la equacion propuesta, y la segunda dos veces.

PROPOSICION XLI.

519. Determinar los factores del segundo grado de la equacion $x^4 + qx^2 + rx + t = o$, en quien las cantidades conocidas q, r, t pueden ser qualesquiera, positivas ó negativas.

Prepárese la equacion dada en esta forma (A) $x^4 + (q+m) \times x^2 + \frac{(q+m)^2}{4} = mx^2 - rx - t + \frac{(q+m)^2}{4} = m \times [x^2 - \frac{rx}{m} - \frac{t}{m} + \frac{(q+m)^2}{4m}]$, en quien es m una cantidad que se ha de determinar. Siendo el primer miembro de esta equacion un quadrado perfecto, supongo $\frac{r^2}{4m^2} = \frac{(q+m)^2}{4m} - \frac{t}{m}$, para que la cantidad $x^2 - \frac{rx}{m} - \frac{t}{m} + \frac{(q+t)^2}{4m}$ sea tambien un quadrado perfecto, y se pueda extraer la raíz quadrada de los dos miembros. Hecha esta suposicion, y multiplicándola por $4m^2$, será $r^2 = -4tm + m \times (q+m)^2 = -4tm + q^2 m + 2qm^2 + m^3$; y ordenando se tendrá la equacion (B) $m^3 + 2qm^2 + (q^2 - 4t) \times m - r^2 = o$. Por ser el último término de ésta siempre negativo, sea r positiva ó negativa, (371) á lo menos una de las raíces de la misma equacion será real y positiva, la que se hallará por el método enseñado (461) y ahora se supondrá conocida. Extraída la raíz quadrada de la equacion preparada (A) será $x^2 + \frac{q+m}{2} = \pm\sqrt{m}\times(x - \frac{r}{2m})$; de donde resulta $x^2 \mp \sqrt{m} \times x + \frac{q+m}{2} \pm \frac{r}{2\sqrt{m}} = o$, equacion que incluye los dos factores del segundo grado

$$(C)\ \left.\begin{aligned} x^2 - \sqrt{m}\times x + \frac{q+m}{2} \\ + \frac{r}{2\sqrt{m}} \end{aligned}\right\} = o \qquad (D)\ \left.\begin{aligned} x^2 + \sqrt{m}\times x + \frac{q+m}{2} \\ - \frac{r}{2\sqrt{m}} \end{aligned}\right\} = o$$

en quienes se resuelve la equacion propuesta.

COROLARIO I.

520. Si en la equacion $x^4 + q x^2 + r x + t = o$ es $r = o$, la referida equacion (B) se reducirá á la $m^3 + 2 q m^2 + (q^2 - 4 t) \times m = o$, cuyas raíces son $m = o$, $m = -q + 2\sqrt{t}$, $m = -q - 2\sqrt{t}$. Tomada la raíz $m = o$, serán los dos primeros términos de dicha equacion (B) evanescentes respecto al tercero, y por consiguiente $(q^2 - 4t) \times m - r^2 = o$; de donde resulta ser $\sqrt{(q^2 - 4t)} = \frac{r}{\sqrt{m}}$: substituyendo este valor en los trinómios (C) y (D) hallados antes, la equacion $x^4 + q x^2$

$+t=o$ tendrá los factores $x^2+\frac{q}{2}+\frac{\sqrt{(q^2\cdot 4t)}}{2}=o$

$$x^2+\frac{q}{2}-\frac{\sqrt{(q^2-4t)}}{2}=o$$

y substituyendo en dichos trinómios los otros dos valores de m, la misma equacion se resolverá en los trinómios

$$x^2-\sqrt{(\cdot q+2\sqrt{t})}\times x+\sqrt{t}=o \mid x^2-\sqrt{(-q\cdot 2\sqrt{t})}\times x\cdot\sqrt{t}=o$$
$$x^2+\sqrt{(\cdot q+2\sqrt{t})}\times x+\sqrt{t}=o \mid x^2+\sqrt{(-q-2\sqrt{t})}\times x-\sqrt{t}=o$$

COROLARIO II.

521. Si en la equacion $x^4+qx^2+t=o$, y en los factores en quienes ésta se resuelve, se supone $q=o$; la equacion $x^4+t=o$ tendrá los factores

$$x^2+\sqrt{\cdot t}=o \mid x^2-\sqrt{(2\sqrt{t})}.x+\sqrt{t}=o \mid x^2-\sqrt{(\cdot 2\sqrt{t})}.x\cdot\sqrt{t}=o$$
$$x^2-\sqrt{\cdot t}=o \mid x^2+\sqrt{(2\sqrt{t})}.x+\sqrt{t}=o \mid x^2+\sqrt{(-2\sqrt{t})}.x-\sqrt{t}=o$$

Adviértase que si t es positiva, los segundos trinómios son reales; y si t es negativa, lo son los dos primeros binómios.

COROLARIO III.

522. Luego qualquier equacion del quarto grado se resuelve siempre en dos factores reales del segundo: y qualquiera raíz imaginária del quarto grado se podrá siempre expresar por otra imaginária del segundo; porque supuesta dicha raíz igual á x, y quadrando dos veces, resultará una equacion

del quarto grado, la que se puede resolver en dos trinómios reales del segundo, cuyas raíces tendrán esta forma $a+b\sqrt{-1}$, siendo a, b cantidades reales.

EXEMPLO.

523. Sea la equacion $x^4-15x^2+10x+24=o$, que se quiere resolver en dos factores del segundo grado.

Hágase idéntica la equacion propuesta con la de la fórmula $x^4+qx^2+rx+t=o$, y se tendrá $q=-15$, $r=10$, $t=24$; substitúyanse estos valores en (B) $m^3+2qm^2+(q^2-4t)\times m-r^2=o$, y resultará la equacion numérica $m^3-30m^2+129m-100=o$, cuyas tres raíces son $m=25$, $m=4$, $m=1$. Ahora si en los referidos trinómios (C) y (D) en quienes se resuelve la equacion de la fórmula, se substitúyen los valores de las cantidades q, r, t; se hallará que tomada sucesivamente $m=25$, $m=4$, $m=1$, la equacion propuesta tendrá los factores del segundo grado, esto es,

$x^2-5x+6=o$	$x^2-2x-3=o$	$x^2-x-2=o$
$x^2+5x+4=o$	$x^2+2x-8=o$	$x^2+x-12=o$

ESCOLIO.

524. Despues de haber enseñado la resolucion

general de las equaciones del quarto grado en dos factores del segundo, se expondrá un método que es util algunas veces para la determinacion de ellos en las equaciones particulares del mismo grado. Sea propuesta, por exemplo, la equacion $x^4 + ax^3 \begin{matrix} + a^2x^2 \\ - abx^2 \end{matrix} - a^2bx - a^3b = o$, la qual no tenga divisor lineal. Supongo que los trinómios $x^2 + yx + u = o$, $x^2 + sx + z = o$ son los factores de dicha equacion, en quienes las cantidades y, u, s, z se han de determinar. Multiplicados entre sí dichos factores resulta la equacion

$$\begin{array}{l} x^4 + yx^3 + ux^2 + usx + zu = o \\ \quad\;\; + sx^3 + syx^2 + zyx \\ \qquad\qquad + zx^2 \end{array}$$

idéntica á la propuesta; con que comparando los términos de la una con los correspondientes de la otra, resultarán las equaciones I.. $y + s = a$, II.. $u + sy + z = a^2 - ab$, III.. $us + zy = -a^2b$, IV.. $zu = -a^3b$: tratadas las equaciones primera, tercera y quarta segun las reglas dadas (400) se hallará V.. $y = \frac{au^2 + a^2bu}{u^2 + a^3b}$; y por ser u un factor de dos dimensiones del último termino $-a^3b$ de la equacion propuesta, hállense los factores de dos dimensiones de dicho término, que son $\pm ab$, $\pm a^2$, $\pm a\sqrt{ab}$; y substituído uno de ellos, como $-ab$, en la quinta equacion, se hallará $y=o$; pero $y+s=a$, $zu=-a^3b$: luego será $s=a$, $z=a^2$. Determinados los valores de las cantidades y, s, z mediante la suposicion de $u=-ab$, se substituirán todos ellos en la equacion segunda $ys+u+z=a^2-ab$; y si ésta resulta idéntica como sucede en este caso, los valores hallados serán los que se buscan; pero si dicha equacion no se verifica, se experimentará si esto sucede con algun otro de los valores de u: ahora supuestas las cantidades $u=-ab$, $y=o$, $s=a$, $z=a^2$, resulta ser efectivamente $ys+u+z=a^2-ab$. Por tanto los trinómios $x^2+yx+u=o$, $x^2+sx+z=o$ se reducen á los $x^2-ab=o$, $x^2+ax+a^2=o$, que son los factores de la equacion propuesta.

El mismo método se puede aplicar para encontrar los factores de las equaciones de superior grado: como por exemplo, si la equacion dada fuese del quinto grado, se supondría que ésta resultase de la multiplicacion de los dos factores $x^2+yx+u=o$, $x^3+tx^2+sx+z=o$, en quienes los valores de las indeterminadas y, u, t, s, z se hallarían del mismo modo.

PROPOSICION XLII.

525. Hallar las raíces de la equacion del quarto grado $x^4 + q x^2 + r x + t = o$; y determinar, quando dichas raíces son reales ó imaginárias.

Consta (519) que la equacion propuesta se compone de los dos factores ó equaciones del segundo grado $x^2 - \sqrt{m} \times x + \frac{q+m}{2} + \frac{r}{2\sqrt{m}} = o$, $x^2 + \sqrt{m} \times x + \frac{q+m}{2} - \frac{r}{2\sqrt{m}} = o$, las quales resueltas darán las quatro raíces que se buscan, esto es, $x = \frac{\sqrt{m}}{2} + \sqrt{(-\frac{q}{2} - \frac{m}{4} - \frac{r}{2\sqrt{m}})}$, $x = \frac{\sqrt{m}}{2} - \sqrt{(-\frac{q}{2} - \frac{m}{4} - \frac{r}{2\sqrt{m}})}$, $x = -\frac{\sqrt{m}}{2} + \sqrt{(-\frac{q}{2} - \frac{m}{4} + \frac{r}{2\sqrt{m}})}$, $x = -\frac{\sqrt{n}}{2} - \sqrt{(-\frac{q}{2} - \frac{m}{4} + \frac{r}{2\sqrt{m}})}$ en quienes es m raíz de la equacion $m^3 + 2 q m^2 + (q^2 - 4 t) \times m - r^2 = o$. Para abreviar el cálculo, hágase $\frac{\sqrt{m}}{2} = a$, $\sqrt{(-\frac{q}{2} - \frac{m}{4} - \frac{r}{2\sqrt{m}})} = b$, $\sqrt{(-\frac{q}{2} - \frac{m}{4} + \frac{r}{2\sqrt{m}})} = c$; y si estos dos últimos valores son imaginários, será el primero $b\sqrt{-1}$, y el segundo $c\sqrt{-1}$; por consiguiente podrán suceder los quatro casos siguientes respecto á las quatro raíces de la equacion propuesta, esto es,

$$\begin{array}{l|l|l|l}
x= a+b & x= a+b\sqrt{-1} & x=a+b & x=a+b\sqrt{-1} \\
x= a-b & x= a-b\sqrt{-1} & x=a-b & x=a-b\sqrt{-1} \\
x=-a+c & x=-a+c\sqrt{-1} & x=-a+c\sqrt{-1} & x=-a+c \\
x=-a-c & x=-a-c\sqrt{-1} & x=-a-c\sqrt{-1} & x=-a-c
\end{array}$$

En el primer caso los factores componentes de la equacion dada serán $x-a-b=o$, $x-a+b=o$, $x+a-c=o$, $x+a+c=o$, y el producto de éstos dará la equacion del quarto grado

$$\left.\begin{array}{l}
x^4-2a^2x^2-2ab^2x+a^4 \\
\quad - b^2x^2+2ac^2x-a^2b^2 \\
\quad - c^2x^2 \qquad\quad -a^2c^2 \\
\qquad\qquad\qquad\quad +b^2c^2
\end{array}\right\}=o$$

que ha de ser idéntica á la propuesta $x^4+qx^2+rx+t=o$: luego se tendrá $q=-2a^2-b^2-c^2$, $r=-2ab^2+2ac^2$, $t=a^4-a^2b^2-a^2c^2+b^2c^2$; y substituídos estos valores en la equacion del tercer grado $m^3+2qm^2+(q^2-4t)\times m-r^2=o$, resultará la equacion

$$\begin{array}{l}
m^3-(4a^2+2b^2+2c^2)\cdot m^2+(2a^2+b^2+c^2)^2\cdot m \quad -(-2ab^2+2ac^2)^2=o \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -4\times(a^4-a^2b^2-a^2c^2+b^2c^2)\cdot m
\end{array}$$

cuyas raíces son $m=4a^2$, $m=(b+c)^2$, $m=(b-c)^2$. Ahora substituyendo sucesivamente estos valores de m en las equaciones $a=\frac{\sqrt{m}}{2}$, $b=\sqrt{\left(-\frac{q}{2}-\frac{m}{4}-\frac{r}{2\sqrt{m}}\right)}$, $c=\sqrt{\left(-\frac{q}{2}-\frac{m}{4}+\frac{r}{2\sqrt{m}}\right)}$ se hallará siempre que los quatro valores de x son $x = a + b$, $x = a - b$, $x = - a + c$, $x = - a - c$: luego si la equacion $x^4 + qx^2 + rx + t = o$ tiene quatro raíces reales, la equacion $m^3 + 2qm^2 + (q^2 - 4t) \times m - r^2 = o$ tiene tres raíces reales y positivas; y al contrario, si esta equacion tiene tres raíces reales y positivas (en cuyo caso (370) el valor de q será negativo y él de $q^2 - 4t$ positivo) la del quarto grado tendrá todas sus quatro raíces reales.

En el segundo caso serán los factores $x - a - b\sqrt{-1} = o$, $x - a + b\sqrt{-1} = o$, $x + a - c\sqrt{-1} = o$, $x + a + c\sqrt{-1} = o$, de los quales resulta la equacion del quarto grado

$$\left.\begin{array}{l} x^4 - 2a^2x^2 + 2ab^2x + a^4 \\ \quad + b^2x^2 - 2ac^2x + a^2b^2 \\ \quad + c^2x^2 \qquad\qquad + a^2c^2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad + b^2c^2 \end{array}\right\} = o$$

Comparados, como en el caso antecedente, los términos de esta equacion con los de la propuesta, y substituídos los valores hallados en la del tercero, se transformará ésta en la

$$\begin{array}{l} m^3 - 4a^2m^2 + (b^2 + c^2 - 2a^2)^2 \times m \qquad - (2ab^2 - 2ac^2)^2 = o \\ \quad + 2b^2m^2 - 4 \times (a^4 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) \times m \\ \quad + 2c^2m^2 \end{array}$$

cuyas raíces son $m = 4a^2$, $m = -(b + c)^2$, $m = -(b - c)^2$: luego si la equacion $x^4 + qx^2 + rx + t = o$ tiene quatro raíces imaginárias, la equacion $m^3 + 2qm^2 + (q^2 - 4t) \times m - r^2 = o$ tendrá una raíz real y positiva, y las otras dos reales y negativas; y al contrario, si esta equacion tiene una raíz real y positiva, y las otras dos reales y negativas, la equacion propuesta tendrá todas sus raíces imaginárias.

En el tercer caso serán los factores $x - a - b = o$, $x - a + b = o$, $x + a - c\sqrt{-1} = o$, $x + a + c\sqrt{-1} = o$, y el producto de éstos dará la equacion del quarto grado

$$\left.\begin{array}{l} x^4 - 2a^2x^2 - 2ab^2x + a^4 \\ \quad - b^2x^2 - 2ac^2x - a^2b^2 \\ \quad + c^2x^2 \qquad\qquad + a^2c^2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad - b^2c^2 \end{array}\right\} = o$$

y haciendo las operaciones explicadas antes, se tendrá la del tercero

$$\begin{array}{lr} m^3 - 4a^2m^2 + (-2a^2 - b^2 + c^2)^2 \times m & -(2ab^2 + 2ac^2)^2 = o \\ \quad - 2b^2m^2 - 4 \times (a^4 - a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2) \times m & \\ \quad + 2c^2m^2 & \end{array}$$

cuyas raíces son $m = 4a^2$, $m = -(b + c\sqrt{-1})^2$, $m = -(b - c\sqrt{-1})^2$.

En el quarto caso serán los factores $x - a - b\sqrt{-1} = o$, $x - a + b\sqrt{-1} = o$, $x + a - c = o$, $x + a + c = o$, de los quales resulta la equacion del quarto grado

$$\left.\begin{array}{l} x^4 - 2a^2x^2 + 2ab^2x + a^4 \\ \quad + b^2x^2 + 2ac^2x + a^2b^2 \\ \quad - c^2x^2 \qquad\qquad - a^2c^2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad - b^2c^2 \end{array}\right\} = o$$

luego se tendrá la del tercero

$$\begin{array}{lll} m^3-4a^2m^2+(-2a^2+b^2-c^2)^2\times m & & -(2ab^2+2ac^2)^2=o \\ \quad +2b^2m^2-4\times(a^4+a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2)\times m & & \\ \quad -2c^2m^2 & & \end{array}$$

cuyas raíces son $m=4a^2$, $m=-(c+b\sqrt{-1})^2$, $m=-(c-b\sqrt{-1})^2$. Por tanto en el tercero y quarto caso si la equacion $x^4+qx^2+rx+t=o$ tiene dos raíces reales, y las otras dos imaginárias, la equacion $m^3+2qm^2+(q^2-4t)\times m-r^2=o$ tendrá una raíz real y positiva, y las otras dos imaginárias; y al contrario, quando esta última equacion tenga una raíz real y positiva, y las otras dos imaginárias, la equacion propuesta tendrá dos raíces reales, é imaginárias las otras.

EXEMPLO I.

526. Se propone resolver la equacion $x^4-13x^2+4x+2=o$.

Hágase idéntica la equacion propuesta con la de la fórmula $x^4+qx^2+rx+t=o$, y será $q=-13$, $r=4$, $t=2$; substitúyanse estos valores en la equacion del tercer grado $m^3+2qm^2+(q^2-4t)\times m-r^2=o$, y resultará $m^3-26m^2+161m-16=o$, cuyas raíces son $m=16$, $m=5+\sqrt{24}$, $m=5-\sqrt{24}$: y siendo éstas reales y positivas, las de la propuesta serán todas reales.

Ahora haciendo $q = -13$, $r = 4$, $t = 2$, $m = 16$ en las raíces de la equacion $x^4 + qx^2 + rx + t = o$, se tendrán las de la equacion dada $x^4 - 13x^2 + 4x + 2 = o$, esto es,

$$x = \frac{\sqrt{16}}{2} + \sqrt{\left(\frac{13}{2} - \frac{16}{4} - \frac{4}{2\sqrt{16}}\right)} = 2 + \sqrt{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{16}}{2} - \sqrt{\left(\frac{13}{2} - \frac{16}{4} - \frac{4}{2\sqrt{16}}\right)} = 2 - \sqrt{2}$$

$$x = -\frac{\sqrt{16}}{2} + \sqrt{\left(\frac{13}{2} - \frac{16}{4} + \frac{4}{2\sqrt{16}}\right)} = -2 + \sqrt{3}$$

$$x = -\frac{\sqrt{16}}{2} - \sqrt{\left(\frac{13}{2} - \frac{16}{4} + \frac{4}{2\sqrt{16}}\right)} = -2 - \sqrt{3}$$

EXEMPLO II.

527. Se pide hallar las raíces de la equacion $z^4 + 8z^3 + 9z^2 - 70z - 30 = o$.

Para reducir la equacion propuesta á la fórmula $x^4 + qx^2 + rx + t = o$, transfórmese (379) en otra á quien falte el segundo término, por medio de la substitucion $z = x - 2$; y se tendrá la equacion (A) $x^4 - 15x^2 - 42x + 98 = o$ que comparada con dicha fórmula dará $q = -15$, $r = -42$, $t = 98$. Ahora substitúyanse estos valores en la equacion del tercer grado $m^3 + 2qm^2 + (q^2 - 4t) \times m - r^2 = o$, y resultará $m^3 - 30m^2 - 167m - 1764 = o$, cuyas raíces son $m = 36$, $m = -3 + \sqrt{-40}$, $m = -3 - \sqrt{-40}$; de donde resulta que la equacion

(A) tendrá dos raíces reales, y otras dos imagináarias. Por tanto haciendo $q = -15$, $r = -42$, $t = 98$, $m = 36$ en las raíces de la equacion $x^4 + q x^2 + r x + t = o$, se tendrán las de la equacion $x^4 - 15 x^2 - 42 x + 98 = o$, esto es,

$$x = \frac{\sqrt{36}}{2} + \sqrt{(\frac{15}{2} - 9 + \frac{42}{2\sqrt{36}})} = 3 + \sqrt{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{36}}{2} - \sqrt{(\frac{15}{2} - 9 + \frac{42}{2\sqrt{36}})} = 3 - \sqrt{2}$$

$$x = -\frac{\sqrt{36}}{2} + \sqrt{(\frac{15}{2} - 9 - \frac{42}{2\sqrt{36}})} = -3 + \sqrt{-5}$$

$$x = -\frac{\sqrt{36}}{2} - \sqrt{(\frac{15}{2} - 9 - \frac{42}{2\sqrt{36}})} = -3 - \sqrt{-5}$$

pero por la transformacion es $z = x - 2$: luego será $z = 1 + \sqrt{2}$, $z = 1 - \sqrt{2}$, $z = -5 + \sqrt{-5}$, $z = -5 - \sqrt{-5}$, que son las quatro raíces de la equacion propuesta.

PROPOSICION XLIII.

528. Construir la equacion determinada del quarto grado $x^4 + a b x^2 + a^2 c x - a^3 e = o$, en quien las cantidades b, c, e pueden ser positivas ó negativas, y además la cantidad a puede tomarse arbitráriamente. *Fig.* 30.

Supóngase $x^2 = a y$ (para mayor comodidad se toma por parámetro la cantidad a que se halla en la equacion dada; pero se podrá tomar qualquier otra cantidad segun ocurra) y será $x^4 = a^2 y^2$: substituyendo este valor en la equacion propuesta, se tendrá $a^2 y^2 + a b x^2 + a^2 c x - a^3 e = o$ que partida por a^2 dá $y^2 + \frac{b}{a} \times x^2 + c x - a e = o$; y haciendo $\frac{b}{a} = n$, será (A) $y^2 + n x^2 + c x - a e = o$. Tambien siendo por la suposicion $x^2 = a y$, será $m x^2 - m a y = o$, qualquiera que sea la cantidad m: luego restada esta última equacion de la (A), se tendrá (B)

$$\begin{array}{l} y^2 + n x^2 + c x + m a y - a e = o, \\ \qquad\;\; - m x^2 \end{array}$$

equacion general, en quien dando á m dos valores diferentes, resultarán dos equaciones, y por medio de sus correspondientes curbas se tendrán las raíces de la equacion propuesta. Por tanto supóngase en la equacion (B) la cantidad $m = n$; y se tendrá la equacion I.. $y^2 + c x + m a y - a e = o$ que se reduce á la de la Parábola $z^2 = c u$, por medio de las substituciones $y + \frac{ma}{2} = z$, $- x + \frac{ae}{c} + \frac{m^2 a^2}{4c} = u$: supóngase despues en la misma equacion (B) la cantidad $m = \infty$; y se tendrá la equacion $- m x^2 + m a y = o$, ó bien II.. $x^2 = a y$. La construccion de la equacion I es segun las reglas dadas la siguiente. Descríbase la Parábola AGF

cerca del exe $A B$, y con el parámetro $= a$; por el vértice A tírese la tangente $A E = \frac{ma}{2}$; por el punto E hágase pasar la recta $E D$ paralela á la $A B$; en fin córtese $E C = \frac{a e}{c} + \frac{m^2 a^2}{4c}$; y tomadas desde el punto C qualesquiera abscisas $C H = x$, $C h = - x$, las normales $H G$, $h g$ darán los correspondientes valores de la y de la equacion $y^2 + c x + m a y - a e = o$. Descrita ahora la Parábola $L C M$ con el parámetro $= a$ cerca del exe $C I$ perpendicular á la recta $E D$ en el punto C, y llamadas qualesquiera abscisas $C H = x$, $C h = - x$, las normales $H G$, $h g$ darán los correspondientes valores de la y de la equacion $x^2 - a y = o$. Luego cortándose las Parábolas $A G F$, $L C M$ en los puntos G, g, serán las rectas $C H$, $C h$ las raíces reales de la equacion propuesta, de las quales una es positiva, y negativa la otra. Con el mismo método se hallará la construccion de la equacion propuesta, quando las cantidades a, b, c, e sean todas ó algunas negativas.

ESCOLIO I.

529. Para construir las equaciones determinadas del quarto grado, se ha considerado que éstas no tienen el segundo término; porque se pue-

de reducir á esta forma qualquier equacion que lo tenga. Sin embargo con el mismo método se podrá dividir en dos equaciones indeterminadas del segundo grado qualquier equacion indeterminada del quarto $x^4 + a x^3 + a b x^2 + a^2 c x + a^3 d = o$, en quien lás cantidades a, b, c, d pueden ser positivas ó negativas: pues suponiendo $x^2 + \frac{ax}{2} = b y$, será tambien $x^4 + a x^3 = b^2 y^2 - \frac{a^2 x^2}{4}$; y substituyendo este valor en la equacion propuesta se tendrá $b^2 y^2 - \frac{a^2 x^2}{4} + a b x^2 + a^2 c x + a^3 d = o$, ó bien (*A*) $y^2 - \frac{a^2 x^2}{4b^2} + \frac{a^2 cx}{b^2} + \frac{a^3 d}{b^2} = o$

$$+ \frac{ax^2}{b}$$

Tambien siendo por la suposicion $x^2 + \frac{a x}{2} = b y$, será $m x^2 + \frac{max}{2} - m b y = o$: luego restada esta última equacion de la (*A*) se tendrá la (*B*)

$$\left.\begin{array}{l} y^2 - \frac{a^2 x^2}{4b^2} + \frac{a^2 c x}{b^2} + m b y + \frac{a^3 d}{b^2} \\ + \frac{ax^2}{b} - \frac{max}{2} \\ - m x^2 \end{array}\right\} = o$$

que se tratará con el mismo método explicado en la proposicion antecedente.

ESCOLIO II.

530. La equacion propuesta en la Proposicion antecedente se ha construido por medio de dos Parábolas; pero se podrá construir por medio de otras dos Secciones Cónicas, que se sacarán de la referida equacion general (B): pues si en ésta se toma $m > n$, se tendrá (437) que la equacion que resulta pertenece á la Hipérbola; y si se toma $m < n$, la equacion que resulta pertenecerá á la Elipse: luego dando á la cantidad m dos valores ambos mayores ó menores que n, se tendrán las equaciones á dos Hipérbolas, ó á dos Elipses; y dando á dicha cantidad m dos valores, de modo que uno de ellos sea mayor y otro menor que n, se tendrán dos equaciones, una á la Hipérbola y otra á la Elipse.

PROPOSICION XLIV.

531. Si la recta $CABD$ se mueve al rededor del punto A, y el punto B camina siempre por la recta IL dada de posicion, de suerte que la recta BD se conserve siempre la misma; hallar la equacion á la Curba GDG descrita por el punto D, la qual se llama Concóide de Nicomedes. *Fig.* 31.

Sea la recta AD perpendicular á la IL, y báxese á ella desde qualquier punto N de la curba la perpendicular NM; tírese la recta AN que cortará la IL en el punto F. Llámense las rectas $AB = a$, $BD = FN = b$, $AM = x$, $MN = y$; será $AN = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $MB = x - a$. Siendo pues la recta BF paralela al lado MN del triángulo AMN, será $AN : NF = AM : MB$, esto es, $\sqrt{(x^2 + y^2)} : b = x : x - a$; de donde resulta ser $(x - a) \times \sqrt{(x^2 + y^2)} = bx$; quadrando ambos miembros de esta equacion se tendrá $(x - a)^2 \times (x^2 + y^2) = b^2 x^2$; partiendo por $(x-a)^2$ será $x^2 + y^2 = \frac{b^2 x^2}{(x-a)^2}$; trasponiendo el término x^2, y reduciendo, se hallará $y^2 = \frac{-x^4 + 2ax^3 - a^2x^2 + b^2x^2}{(x-a)^2}$, equacion á la Concóide superior GDG. Esta misma equacion expresa la naturaleza de la Concóide inferior OEP descrita al mismo tiempo por el punto E, siendo $BE = BD$.

COROLARIO.

532. De la equacion ó de la construccion de las referidas curbas se infiere que los ramos DG y DG de la Concóide superior, y tambien los EP y EO de la inferior, son iguales y semejantemente puestos respecto á la recta AD que es el exe; y que la recta IL es asíntota de una y otra Concóide.

ESCOLIO.

533. Es de notar que en la Concóide superior IDL se hallan dos puntos G y G de Inflexion, de modo que la parte GDG de ella presenta la concavidad al exe AD, y las partes GI, GL presentan la convexîdad al mismo exe. Respecto á la Concóide inferior se han de distinguir tres casos: 1°. si es $b < a$, esta curba guarda la misma posicion respecto al exe AD, que la Concóide superior: 2°. si es $b = a$, la Concóide inferior OEP (*Fig.* 32.) es siempre convexâ al exe ED: 3°. si es $b > a$, la Concóide OAP (*Fig.* 33.) formará el anillo $AHEA$, y los dos ramos AO, AP serán siempre convexôs al exe AB.

PROPOSICION XLV.

534. Hallar la equacion á la Curba $ANLGA$ descrita por el punto G puesto en la circunferencia del círculo FBG que rueda sobre la del círculo BCA, que está inmobil y es igual á FGB. Dicha curba se llama Epiciclóide. *Fig.* 34.

Esté el punto G al principio del movimiento en A, y despues de algun movimiento del círculo F pase á la posicion representada en la Figura; y por ser iguales los círculos ACB y GFB, será el arco $AB = GB$. Tírense los radios AC y FG, que se prolongarán hasta encontrarse en D; únanse los centros C y F con la recta CF que pasará por el punto del contacto B; en fin tírense las rectas AG, y GH perpendicular á la CD. Siendo pues los arcos AB y BG iguales, serán tambien iguales los ángulos DCF y DFC; por consiguiente el lado $DF = DC$; pero es $CB = BF$: luego será la recta DB perpendicular á la CF: y por ser la recta $DF = DC$, y el radio $CA = FG$, será $CD : DA = FD : DG$, y por consiguiente la recta CF paralela á la AG. Llámense los radios de los círculos r, $CH = x$, $HG = y$; será $AH = x - r$, y $AG = \sqrt{[(x-r)^2 + y^2]}$. Por ser las rectas AG y CF paralelas será $CF : AG = CD : DA$, y convirtiendo $CF : CF - AG = CD : CA$, esto es, $2r : 2r - \sqrt{[(x-r)^2 + y^2]} = CD : r$; de donde resulta ser $CD = \frac{2r^2}{2r - \sqrt{(x-r^2 + y^2)}}$. Ahora por la semejanza de los triángulos AHG, CBD, que tienen los ángulos en H, B iguales por rectos, y los ángulos DAG, DCB tambien iguales por las paralelas AG, CF, será $HA : AG = CB : CD$, esto es, $x - r : \sqrt{[(x-r)^2 + y^2]} = r : \frac{2r^2}{2r - \sqrt{(x-r^2 + y^2)}} = 2r - \sqrt{[(x-r)^2 + y^2]} : 2r$; por consiguiente $2rx - 2r^2 = 2r\sqrt{[(x-r)^2 + y^2]} - (x-r)^2 - y^2 = 2r\sqrt{[(x-r)^2}$

$+ y^2] - x^2 + 2rx - r^2 - y^2$; trasponiendo la cantidad $- x^2 + 2rx - r^2 - y^2$, y reduciendo, se tendrá $x^2 + y^2 - r^2 = 2r\sqrt{[(x-r)^2 + y^2]}$; elevando al quadrado uno y otro miembro, resultará $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2r^2x^2 - 2r^2y^2 + r^4 = 4r^2x^2 - 8r^3x + 4r^4 + 4r^2y^2$; en fin ordenando por x, se tendrá la equacion á la Epiciclóide, esto es,

$$\left.\begin{array}{l} x^4 + 2y^2x^2 + 8r^3x + y^4 \\ \quad -6r^2x^2 \qquad\qquad -6r^2y^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -3r^4 \end{array}\right\} = o.$$

PROPOSICION XLVI.

535. Si los extremos M, I de la recta dada MI se mueven en la circunferencia del círculo $AEMIA$, y desde qualquier punto determinado A de ella se baxa la perpendicular AH á dicha recta MI prolongada si es necesario; hallar la equacion á la curba $BAHNAB$ descrita por el punto H. Fig. 35.

Por el punto A hágase pasar el radio AC, que se prolongará hasta encontrar la recta IM prolongada, si es necesario, en G; báxense las perpendiculares CL á MI, y HP á AG. Llámense $CA = a$, $MI = 2b$, $AP = x$, $PH = y$; y será $CL^2 = a^2 - b^2$. Siendo pues el ángulo AHG recto, y la recta HP perpendicular á la AG, será $AP : PH = PH : PG$, esto es, $x : y = y : PG = \frac{y^2}{x}$: luego $AG = x + \frac{y^2}{x} = \frac{x^2 + y^2}{x}$, y CG

$= \frac{x^2+y^2}{x} - a = \frac{x^2+y^2-ax}{x}$; pero es $\overline{GH}^2 = AG \times GP$: luego será $\overline{GH}^2 = \frac{x^2+y^2}{x} \times \frac{y^2}{x} = \frac{x^2y^2+y^4}{x^2}$. Por ser el ángulo G comun á los triángulos CLG, HPG, y los ángulos en L, P iguales por rectos, será $GH : HP = CG : GL$, de donde resulta ser $\overline{GH}^2 : \overline{HP}^2 = \overline{CG}^2 : \overline{CL}^2$, esto es, $\frac{x^2y^2+y^4}{x^2} : y^2 = \frac{(x^2+y^2-ax)^2}{x^2} : a^2 - b^2$; por consiguiente se tendrá $(a^2 - b^2) \times \frac{(x^2y^2+y^4)}{x^2} = y^2 \times \frac{(x^2+y^2-ax)^2}{x^2}$; partiendo esta equacion por y^2, y multiplicándola por x^2, será $(a^2 - b^2) \times (x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 - ax)^2$, ó bien $a^2x^2 + a^2y^2 - b^2x^2 - b^2y^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2ax^3 - 2axy^2 + a^2x^2$; y ordenando por x resultará

$$(A)\ \left.\begin{array}{l} x^4 - 2ax^3 + 2y^2x^2 - 2ay^2x + y^4 \\ \qquad\qquad + b^2x^2 \qquad\qquad -a^2y^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +b^2y^2 \end{array}\right\} = 0$$

equacion á la curba que se busca. Los ramos de esta curba tienen la posicion que se manifiesta en la Figura; pero si es $b = a$, esto es, la recta dada MI igual al diámetro del referido círculo, la curba descrita será en este caso el círculo que tiene por diámetro AC: pues substituyendo en la equacion (A) la cantidad a en lugar de la b, y extrayendo la raiz quadrada de la que resulta, será $y^2 + x^2 - a x = o$ equacion al círculo cuyo diámetro $= a$.

PROPOSICION XLVII.

536. Si los lados AB, BM de un ángulo ABM pueden abrirse y cerrarse libremente, y el lado AB se mueve libremente al rededor del punto fixo A, y además el punto C, que divide por medio el lado BM, corre siempre por la recta AG; determinar la equacion á la Curba descrita por el punto M. *Fig.* 36.

Desde los puntos B, M báxense las perpendiculares BF, ME á la recta AG. Llámense las rectas $AB = a$, $BC = CM = b$, $AE = x$, $EM = y$; y será $CE = \sqrt{(b^2 - y^2)}$. Los triángulos BFC, MEC tienen los ángulos en F, E iguales por rectos, el ángulo $BCF = MCE$, y el lado $BC = CM$: luego será $FC = CE = \sqrt{(b^2 - y^2)}$, y $BF = ME = y$; por consiguiente $AF = \sqrt{(a^2 - y^2)}$, y la abscisa $x = \sqrt{(a^2 - y^2)} + 2\sqrt{(b^2 - y^2)}$; quadrando ambos miembros de esta equacion se tendrá $x^2 = a^2 - y^2 + 4\sqrt{[(a^2 - y^2) \times (b^2 - y^2)]} + 4b^2 - 4y^2$; trasponiendo los términos racionales, resultará $x^2 - a^2 + 5y^2 - 4b^2 = 4\sqrt{[(a^2 - y^2) \times (b^2 - y^2)]}$; quadrando de nuevo, será $x^4 - 2a^2 x^2 + a^4 + 10 x^2 y^2 - 10 a^2 y^2 - 8 b^2 x^2 + 8 a^2 b^2 + 25 y^4 - 40 b^2 y^2 + 16 b^4$

$= 16a^2b^2 - 16b^2y^2 - 16a^2y^2 + 16y^4$; ordenando esta equacion por x, y reduciendo, se tendrá la equacion á la Curba que se busca, esto es,

$$\left.\begin{array}{r} x^4 - 2a^2x^2 + a^4 \\ +10y^2x^2 + 6a^2y^2 \\ -8b^2x^2 - 8a^2b^2 \\ +9y^4 \\ -24b^2y^2 \\ +16b^4 \end{array}\right\} = o$$

ESCOLIO.

537. Las Curbas descritas por el punto M, como se ha explicado en la Proposicion antecedente, son distintas segun las diferentes relaciones de BC con BA; es á saber 1°. quando es BC mayor que BA, y menor que $2BA$, la curba TMS descrita por el punto M será en parte cóncava, y en parte convexâ al exe ES, como se manifiesta en la Figura 37, en quien tomadas las rectas AE, AD iguales á la AB, y $DS = BM = 2b$, será $ET = BM = 2b$, y $AT = 2b - a$: 2°. quando es BC igual ó mayor que $2BA$, la curba TMS (*Fig.*38.) será siempre cóncava al exe TS: 3°. quando es $BC = BA$, esto es $b = a$, la equacion hallada en la Proposicion antecedente se convertirá en la

$$\left.\begin{array}{r} x^4 + 10y^2x^2 + 9a^4 \\ -10a^2x^2 + 9y^4 \\ -18a^2y^2 \end{array}\right\} = o$$

que resuelta dá las dos equaciones $x^2 - 9a^2 + 9y^2 = o$, ó bien $\frac{9a^2}{a^2} \times y^2 = 9a^2 - x^2$, y $x^2 + y^2 - a^2 = o$, de las quales la primera pertenece á la Elipse TMS (*Fig.* 39.) y la segunda al círculo DIN que se describe, quando está el punto C en A, y la recta BCM se mueve al rededor de este punto: 4°. quando es $BC < BA$ (*Fig.* 40.) descrito con el radio AB el arco DBG cuyo seno $GK = BC$, y tomadas las rectas $DS = BM$, $AT = BM - AD$, y $KL = KG$, mientras que el vértice B corre desde D á G, describirá el punto M del lado BM la parte SML de la curba; y mientras que baxa de G á D, describirá dicho punto M la otra parte LT. Es evidente que las referidas curbas tendrán dos ramos TMS, TFS iguales y semejantemente puestos respecto al exe TS.

De la Suma y Término general de algunas Séries.

PROPOSICION XLVIII.

538. Si en la Suma general de una série se substituye (361) $n - 1$ en lugar de n, y la cantidad que resulta se resta de dicha suma; el resíduo será el Término general de la misma série.

Pues substituyendo $n-1$ en lugar de n en la suma general dada, resultará la suma de los términos $n-1$ de la série: luego restando esta suma de la de los términos n de la série, quedará el término general de ella.

ESCOLIO.

539. Si se llaman, S la suma de qualquier número n de términos de qualquier série, s la del número $n-1$, y T el término general; será $T=S-s$ siempre que S sea la verdadera suma de la série; pero quando se supone que alguna funcion de n sea la suma general de una série, y por medio del Teorema antecedente se halla su término general, podrá suceder que dicha suma difiera de la verdadera en una cantidad constante, que se determinará, substituyendo la unidad en lugar de n tanto en la suma como en el término general: pues si resulta la suma igual al término general, la suma supuesta será exâctamente la de la série, cuyo término general se haya determinado; y si resulta la suma mayor ó menor que el término general, se deberá restar ó añadir la diferencia á dicha suma: como por exemplo si se supone $6n^2+3$ la suma de una série, será su término general $6n^2+3-6\times(n-1)^2-3=12n-6$; pero haciendo $n=1$, será la suma $6n^2+3=9$, y el término $12n-6=6$; por consi-

guiente la suma excede al término general en 3: luego la verdadera suma de la série, cuyo término general es $12n-6$, será $6n^2$. Tambien es de advertir que á la expresion $S-s$ igual al término general conviene dár muchas veces otra forma, para que substituyendo en él sucesivamente en lugar de n los números naturales 1, 2, 3, 4, 5, &c. no se destruyan mutuamente los términos de las dos séries que resultan: como por exemplo si se supone $\frac{n}{n+2}$ la suma general de una série, será su término general $\frac{n}{n+2}-\frac{n-1}{n+1}$: ahora haciendo sucesivamente n igual á los números naturales 1, 2, 3, 4, 5, &c. dicho término dará las dos séries

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \&c.$$

$$0, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{4}, -\frac{3}{5}, -\frac{4}{6}, \&c.$$

Por tanto quedan destruídos los términos de la primera série por los de la segunda, y en conseqüencia ninguna série se deriva del término general hallado; pero si se reducen á un comun denominador las dos fracciones que componen dicho termino, se hallará ser $\frac{n}{n+2}-\frac{n-1}{n+1}=\frac{2}{(n+2)\times(n+1)}$; y haciendo en esta nueva forma del término general las dichas substituciones de n, se tendrá la série $\frac{2}{3\times2}, \frac{2}{4\times3}, \frac{2}{5\times4}, \frac{2}{6\times5}, \frac{2}{7\times6}$, &c.

PROPOSICION XLIX.

540. Siendo $An+Bn^2$ Suma general de una série, hallar su Término general, y la ley de la série que le pertenece.

I. En la suma dada $An+Bn^2$ substitúyase $n-1$ en lugar de n, y se tendrá $A\times(n-1)+B\times(n-1)^2$, que se reduce á la expresion $\begin{matrix}-A+An+Bn^2\\ +B-2Bn\end{matrix}$:

ahora restando esta cantidad de la suma $An+Bn^2$, quedará $\begin{matrix}A+2Bn\\ -B\end{matrix}$, que será (538) el término general que se pide, en quien la funcion de n es inferior de un grado respecto á la de la suma.

II. Para hallar la ley de la série que resulta del término general $\begin{matrix}A+2Bn\\ -B\end{matrix}$, pónganse sucesivamente en lugar de n los números naturales 1, 2, 3, 4, &c. y hecha la operacion se tendrá la série aritmética $A+B$, $A+3B$, $A+5B$, $A+7B$, &c. cuyas diferencias primeras son constantes.

COROLARIO.

541. Se infiere que es $An+Bn^2$ la fórmula de la Suma general de qualquier série aritmética cuyas diferencias primeras son constantes, y que la fórmula del Término general de dicha série es $A+Bn$,

en quien los coeficientes A, B tienen diferente valor que en la suma.

EXEMPLO.

542. Se pide hallar el Término y la Suma general de la série aritmética 5, 8, 11, 14, 17, &c.

En la fórmula del término general $A + Bn$ háganse sucesivamente $n=1$, $n=2$, y se tendrán los dos primeros términos $A + B$, $A + 2B$ de qualquier série aritmética; compárense estos dos términos con los correspondientes de la série dada, haciendo $A+B=5$, $A+2B=8$; y tratadas estas dos equaciones segun las reglas dadas, se hallará $B=3$, $A=2$: luego substituyendo estos valores en el término general $A+Bn$, se tendrá el término general $2 + 3n$ de la série propuesta.

Para hallar la suma general de la série propuesta, háganse sucesivamente $n = 1$, $n = 2$ en la fórmula de la suma $An + Bn^2$, y se tendrá que el primer término y la suma de los dos primeros de qualquier série aritmética son respectivamente $A + B$, $2A + 4B$; compárense estas dos cantidades con las correspondientes de la série propuesta, haciendo $A + B = 5$, $2A + 4B = 5 + 8 = 13$; y tratadas estas dos equaciones segun las reglas dadas, se hallará $A = \frac{7}{2}$, $B = \frac{3}{2}$: luego substituyendo los valores de A, B en la fórmula de la suma general $An + Bn^2$, se tendrá la suma general $\frac{7n}{2} + \frac{3n^2}{2}$ de la série propuesta.

PROPOSICION L.

543. Si es $An + Bn^2 + Cn^3$ Suma general de una série; hallar su Término general, y la ley de la série que resulta.

I. En la suma dada $An + Bn^2 + Cn^3$ substitúyase $n - 1$ en lugar de n, y se tendrá $A \times (n-1) + B \times (n-1)^2 + C \times (n-1)^3$, que se reduce á la expresion $\begin{array}{l} -A + An + Bn^2 + Cn^3 \\ +B - 2Bn - 3Cn^2 \\ -C + 3Cn \end{array}$; restando esta cantidad de la suma $An + Bn^2 + Cn^3$, quedará

$$\begin{array}{l} A + 2Bn + 3Cn^2 \\ -B - 3Cn \\ +C \end{array}$$

que será (538) el término general que se pide, en quien la funcion de n es inferior en un grado á la de la suma.

II. Para hallar la ley de la série que resulta del término general $\begin{array}{l} A + 2Bn + 3Cn^2 \\ -B - 3Cn \\ +C \end{array}$, pónganse sucesivamente en lugar de n los números naturales 1, 2, 3, 4, &c. y hecha la operacion se tendrá la série A

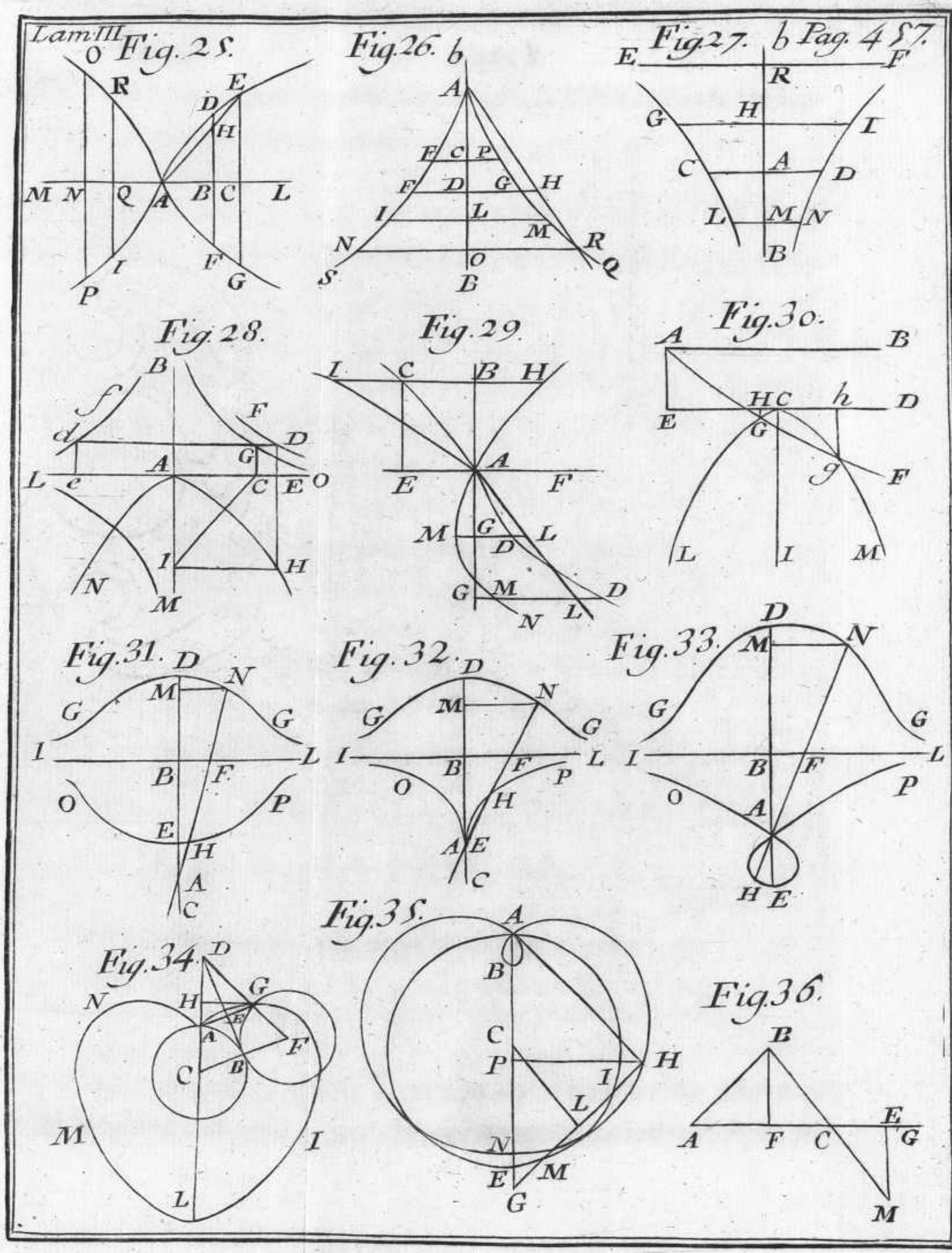
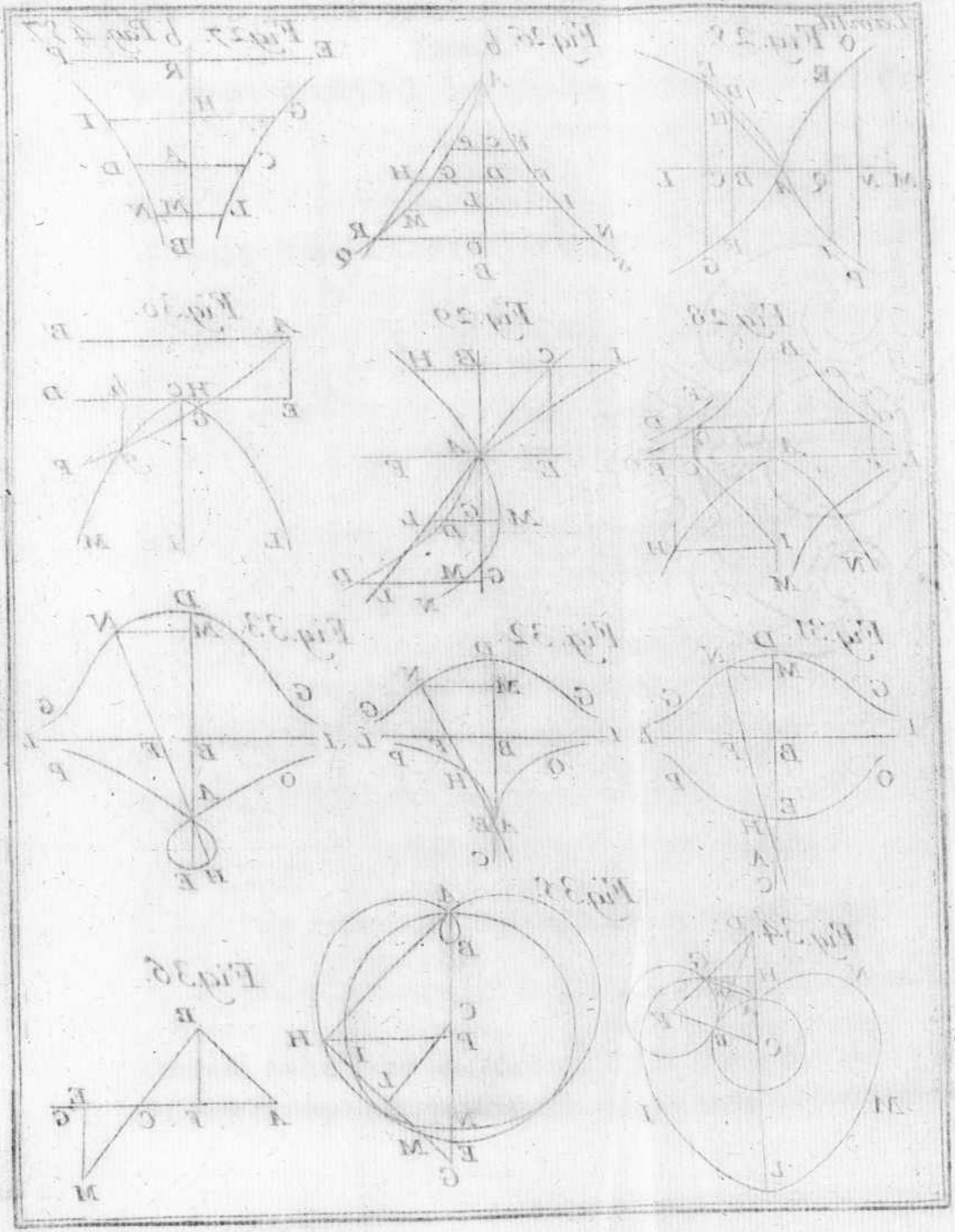


Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.



$+B+C$, $A+3B+7C$, $A+5B+19C$, $A+7B+37C$, &c. cuyas segundas diferencias son constantes.

COROLARIO I.

544. Se infiere que es $An+Bn^2+Cn^3$ la fórmula de la Suma de qualquier série, cuyas segundas diferencias son constantes; y que la fórmula de su Término general es $A+Bn+Cn^2$, en quien los coeficientes A, B, C tienen diferente valor que en la suma.

COROLARIO II.

545. Con el mismo método se hallará que es $An+Bn^2+Cn^3+Dn^4$ la suma de qualquier série, cuyas diferencias terceras son constantes; y que la fórmula de su Término general es $A+Bn+Cn^2+Dn^3$, en quien los coeficientes A, B, C, D, tienen diferente valor que en la suma.

COROLARIO III.

546. En general la funcion $An+Bn^2+Cn^3+Dn^4+En^5\ldots+Qn^{r+1}$ es la fórmula de la Suma general de qualquier série, cuyas diferencias constantes son del orden r: y la funcion $A+Bn+Cn^2+Dn^3+En^4\ldots+Qn^r$ es la fórmula del Término general de qualquier série, cu-

yas diferencias constantes son del órden r. Las cantidades A, B, C, D, &c. del término general tienen diferente valor, que las de la suma, como yá se ha advertido: y unas y otras se determínan con el mismo método que se ha practicado antes (542) esto es, haciendo tantas equaciones, como indeterminadas A, B, C, &c. hay que hallar.

EXEMPLO.

547. Se propone hallar el Término y la Suma general de la série 14, 104, 464, 1406, 3362, 6884, &c. cuyas diferencias quartas son constantes.

Para hallar el término general, tómese la fórmula $A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + En^4$, cuyo grado es igual al órden de las diferencias constantes de la série propuesta. En dicha fórmula pónganse sucesivamente en lugar de n los números naturales 1, 2, 3, 4, 5, y se tendrán los cinco primeros términos de la série general, cuyas diferencias quartas son constantes, esto es, $A + B + C + D + E$, $A + 2B + 4C + 8D + 16E$, $A + 3B + 9C + 27D + 81E$, $A + 4B + 16C + 64D + 256E$, $A + 5B + 25C + 125D + 625E$; compárense estos términos con los correspondientes de la série propuesta, y resultarán las equaciones $A + B + C + D + E = 14$, $A + 2B + 4C + 8D + 16E = 104$, $A + 3B + 9C + 27D + 81E = 464$,

$A + 4B + 16C + 64D + 256E = 1406$, $A + 5B + 25C + 125D + 625E = 3362$, las quales tratadas segun las reglas dadas dán los siguientes valores de las indeterminadas $A = 2$, $B = 7$, $C = -2$, $D = 2$, $E = 5$. Substituídos estos valores en la fórmula $A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + En^4$, resulta ser $2 + 7n - 2n^2 + 2n^3 + 5n^4$ el término general de la série propuesta.

Para hallar la suma general, tómese la fórmula $An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4 + En^5$, cuyo grado es mayor en una unidad que el órden de las diferencias constantes de la série propuesta. En esta fórmula pónganse sucesivamente los números 1, 2, 3, 4, 5 en lugar de n, y se tendrá el primer término y las sumas de los dos, tres, quatro y cinco primeros términos de la série general cuyas diferencias quartas son constantes, esto es, $A + B + C + D + E$, $2A + 4B + 8C + 16D + 32E$, $3A + 9B + 27C + 81D + 243E$, $4A + 16B + 64C + 256D + 1024E$, $5A + 25B + 125C + 625D + 3125E$; compárense estas cantidades con las correspondientes de la série propuesta, y resultarán las equaciones $A + B + C + D + E = 14$, $2A + 4B + 8C + 16D + 32E = 14 + 104 = 118$, $3A + 9B + 27C + 81D + 243E = 14 + 104 + 464 = 582$, $4A + 16B + 64C + 256D + 1024E$

$= 14 + 104 + 464 + 1406 = 1988$, $5A + 25B + 125C + 625D + 3125E = 14 + 104 + 464 + 1406 + 3362 = 5350$. Tratadas estas equaciones segun las reglas dadas, se hallarán los valores de las indeterminadas $A = 5$, $B = 3$, $C = 2$, $D = 3$, $E = 1$: luego será $5n + 3n^2 + 2n^3 + 3n^4 + n^5$ la suma general de la série propuesta.

PROPOSICION LI.

548. Supuesta $\frac{Ln}{A + Bn}$ la Suma general de una série, hallar su Término general, y la ley de la série que resulta.

I. En la suma dada substitúyase $n - 1$ en lugar de n, y se tendrá $\frac{L \times (n - 1)}{A + B \times (n - 1)}$; réstese esta cantidad de la suma $\frac{Ln}{A + Bn}$, y será $\frac{Ln}{A + Bn} - \frac{L \times (n - 1)}{A + B \times (n - 1)}$; y como la diferencia, hecha la resta efectiva, es igual á $\frac{AL}{(A + Bn) \times (A + B \times n - 1)}$, se tendrá (538) en esta fraccion el término general que se pide.

II. Para hallar la ley de la série cuya suma es $\frac{Ln}{A + Bn}$, en su término general yá determinado substitúyanse sucesivamente en lugar de n los números naturales 1, 2, 3, 4, 5, &c. y hecha la operacion se encontrará la série $\frac{AL}{A\times(A+B)}$, $\frac{AL}{(A+B)\times(A+2B)}$, $\frac{AL}{(A+2B)\times(A+3B)}$, $\frac{AL}{(A+3B)\times(A+4B)}$, &c. que es una série compuesta de quebrados, cuyos numeradores son constantes, y los denominadores están compuestos de dos factores, de suerte que los primeros forman la série aritmética A, $A+B$, $A+2B$, $A+3B$, $A+4B$, &c. y los segundos la série tambien aritmética $A+B$, $A+2B$, $A+3B$, $A+4B$, &c. la que empieza por el segundo término de la primera con la misma diferencia B.

COROLARIO.

549. Se infiere que $\frac{Ln}{A+Bn}$ es la fórmula de la suma general de qualquier série de quebrados, en la qual los numeradores sean constantes, y los denominadores estén compuestos de dos factores, los que formen dos séries aritméticas, empezando la segunda por el segundo término de la primera, y siendo una misma la diferencia de estas dos séries; y que la fórmula del término general de la misma série de quebrados es $\frac{AL}{(A+B\times \overline{n-1})\times(A+Bn)}$, en quien las cantidades A, B, L son las mismas que en la fórmula de la suma.

EXEMPLO.

550. Se pide hallar el Término y la Suma general de la série $\frac{4}{2 \cdot 3}$, $\frac{4}{3 \cdot 4}$, $\frac{4}{4 \cdot 5}$, $\frac{4}{5 \cdot 6}$, &c. en la qual los numeradores son constantes, y los denominadores forman las dos séries aritméticas 2, 3, 4, 5, &c. 3, 4, 5, 6, &c. que tienen todas las condiciones expresadas anteriormente.

Comparando el término general $\frac{AL}{(A+B\times\overline{n-1})\times(A+Bn)}$ con la série propuesta, resulta que es $AL = 4$, y que $A + Bn$ es la fórmula del término general que pertenece á la série 3, 4, 5, 6, &c. con lo que se hallará $A = 2$, $B = 1$; pero $AL = 4$: luego será $L = 2$. Substituyendo estos valores en el término general $\frac{AL}{(A+B\times\overline{n-1})\times(A+Bn)}$, y en la suma general $\frac{Ln}{A+Bn}$, resulta ser $\frac{4}{(1+n)\times(2+n)}$ el término general de la série propuesta, y su suma general $\frac{2n}{2+n}$. Si se busca la suma de los infinitos términos de esta série, deberá suponerse n infinita, en cuyo caso $2 + n$ será lo mismo que n: luego la suma de los infinitos términos de la série propuesta será $\frac{2n}{n} = 2$.

PROPOSICION LII.

551. Supuesta $\dfrac{Ln+Mn^2}{(A+B\times\overline{n-1})\times(A+Bn)}$ la Suma general de una série, hallar su Término general, y la ley de la série que resulta.

I. En la suma dada substituyase $n-1$ en lugar de n, y se tendrá $\dfrac{L\times(n-1)+M\times(n-1)^2}{(A+B\times\overline{n-2})\times(A+B\times\overline{n-1})}$; réstese esta cantidad de dicha suma, y será $\dfrac{Ln+Mn^2}{(A+B.\overline{n-1}).(A+Bn)}$ $-\dfrac{L\times(n-1)+M\times(n-1)^2}{(A+B\times\overline{n-2})\times(A+B\times\overline{n-1})}$: y como la diferencia, hecha la resta efectiva, es igual

$$\acute{a}\,(B)\;\frac{\begin{matrix}AL-BLn\\-AM-BMn\\+2AMn\end{matrix}}{(A+B\times\overline{n-2})\times(A+B\times\overline{n-1})\times(A+Bn)},$$

se tendrá en esta fraccion el termino general que se busca, en quien el exponente de n en el numerador es menor en dos unidades que el número de los factores del denominador.

II. Consta (541) que el numerador de (B) es el término general de una série cuyas diferencias primeras son constantes; por consiguiente queda determinada la ley de los numeradores de la série procedente del término general (B). Ahora para determinar la ley de los denominadores de este término, pónganse sucesivamente en lugar de n los números naturales 1, 2, 3, 4, &c. y hecha la operacion se hallarán los denominadores $(A-B)\times A \times(A+B)$, $A\times(A+B)\times(A+2B)$, $(A+B)\times(A+2B)\times(A+3B)$, &c. los quales están compuestos de tres factores, de suerte que forman las tres séries aritméticas $A-B$, A, $A+B$, &c. A, $A+B$, $A+2B$, &c. $A+B$, $A+2B$, $A+3B$, &c. de las quales la segunda empieza por el segundo término de la primera, y la tercera por el segundo término de la segunda, teniendo todas la misma diferencia B.

COROLARIO I.

552. Se infiere que es $\frac{Ln+Mn^2}{(A+B\times\overline{n-1})\times(A+Bn)}$ la fórmula de la Suma general de qualquier série de quebrados, en la qual los numeradores formen una série aritmética, y los denominadores sean compuestos de tres factores que formen tres séries aritméticas, de suerte que la segunda empiece por el segundo término de la primera, y la tercera empiece por el segundo término de la segunda, siendo una misma la diferencia de estas tres series: y tambien se infiere que el Término general de dicha

série es $\dfrac{\begin{array}{l} AL - BLn \\ -AM - BMn \\ \quad +2AMn \end{array}}{(A+B\,.\,\overline{n-2})\,.\,(A+B\,.\,\overline{n-1})\,.\,(A+Bn)}$

COROLARIO II.

553. Con el mismo método se hallará que $\dfrac{Ln+Mn^2+Nn^3}{(A+B\times\overline{n-2})\times(A+B\times\overline{n-1})\times(A+Bn)}$ es la fórmula de la Suma general de aquellas séries compuestas de quebrados, cuyos numeradores compongan una série de segundas diferencias constantes, y los denominadores estén compuestos de quatro factores, de suerte que formen quatro séries aritméticas, de las quales la segunda empiece por el segundo término de la primera, la tercera por el segundo de la segunda, y la quarta por el segundo de la tercera, siendo iguales las diferencias de estas quatro séries: y además se hallará que la fórmula del Término general correspondiente á la misma série de quebrados es $\dfrac{L+Mn+Nn^2}{(A+B\,.\,\overline{n-3}).(A+B\,.\,\overline{n-2}).(A+B.\overline{n-1}).(A+Bn)}$, en quien las cantidades L, M, N tienen diferente valor que las correspondientes en la suma general.

COROLARIO III.

554. En general

$$\frac{Ln + Mn^2 + Nn^3 \;.\;.\;.\;.\; + Hn^{r+1}}{(A+B.\overline{n-r}) \times \ldots (A+B.\overline{n-2}).(A+B.\overline{n-1}).(A+Bn)}$$

es la fórmula de la Suma general de las séries compuestas de quebrados, en las quales los numeradores formen una série que tengan constantes las diferencias del orden r, y los denominadores estén compuestos del número $r+2$ de factores, que formen otras tantas séries aritméticas, de suerte que la segunda empiece por el segundo término de la primera, la tercera por el segundo término de la segunda, y así sucesivamente, siendo siempre una misma la diferencia de todas estas séries: y la fórmula del Término general correspondiente á dicha série de quebrados será

$$\frac{L + Mn + Nn^2 + On^3 \;.\;.\;.\; + Hn^r}{(A+B.\overline{n-r-1}) \times \ldots (A+B.\overline{n-3}).(A+B.\overline{n-2}).(A+B.\overline{n-1}).(A+Bn)}$$

en la qual las cantidades L, M, N, &c. del numerador tienen diferente valor que en la suma general.

EXEMPLO I.

555. Se pide hallar el término y la suma general de la série $\frac{12}{2\times3\times4\times5}$, $\frac{60}{3\times4\times5\times6}$, $\frac{160}{4\times5\times6\times7}$, $\frac{312}{5\times6\times7\times8}$, &c.

en la qual los numeradores tienen las segundas diferencias constantes, esto es $r = 2$, y los denominadores están compuestos del número $r+2$ de factores, esto es de 4, los que tienen las condiciones anteriormente expresadas.

La fórmula del término general correspondiente á la série propuesta es

$$\frac{L + Mn + Nn^2}{(A+B \times \overline{n-3}) \cdot (A+B \times \overline{n-2}) \cdot (A+B \times \overline{n-1}) \cdot (A+Bn)},$$ en quien $L+Mn+Nn^2$ es la fórmula del término general correspondiente á la série 12, 60, 160, 312, &c. que forman los numeradores de las fracciones propuestas, y $A + Bn$ es tambien la fórmula del término general correspondiente á la série 5, 6, 7, 8, &c. que forman los quartos factores de los denominadores de la série propuesta. Ahora haciendo $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, se tendrán las tres equaciones $L + M + N = 12$, $L + 2M + 4N = 60$, $L + 3M + 9N = 160$, y por medio de ellas se hallarán los valores de las indeterminadas $L = 16$, $M = -30$, $N = 26$: asímismo haciendo $n=1$, $n=2$, se tendrán las dos equaciones $A + B = 5$, $A + 2B = 6$, de donde se sacarán los valores de las indeterminadas $A = 4$, $B = 1$. Por tanto el término general de la série propuesta será

$$\frac{16 - 30n + 26n^2}{(1+n) \times (2+n) \times (3+n) \times (4+n)}.$$

La fórmula de la suma general de la série propuesta es $\frac{Ln + Mn^2 + Nn^3}{(A+B\times\overline{n-2})\times(A+B\times\overline{n-1})\times(A+Bn)}$, en quien las cantidades A, B tienen el mismo valor que en el término general hallado anteriormente; por consiguiente dicha fórmula se reducirá á $\frac{Ln + Mn^2 + Nn^3}{(2+n)\times(3+n)\times(4+n)}$. Ahora para determinar los valores de las cantidades L, M, N, que son diferentes de los del término general, substitúyanse en lugar de n los números 1, 2, 3, y resultarán las tres equaciones $\frac{L+M+N}{3\times4\times5} = \frac{12}{2.3.4.5}$, $\frac{2L+4M+8N}{4.5.6} = \frac{12}{2.3.4.5} + \frac{60}{3.4.5.6}$, $\frac{3L+9M+27N}{5.6.7} = \frac{12}{2.3.4.5} + \frac{60}{3.4.5.6} + \frac{160}{4.5.6.7}$, por las quales se hallarán $L = 2$, $M = 1$, $N = 3$: luego la suma general de la série propuesta será $\frac{2n+n^2+3n^3}{(2+n).(3+n).(4+n)}$.

EXEMPLO II.

556. Dado el Término general $\frac{7+4n+6n^2+2n^3}{(1+n)\times(2+n)}$, hallar la suma general que le corresponde.

En el término general propuesto el exponente de n en el numerador es mayor que el número de los factores del denominador, y así parece por lo dicho anteriormente (554) que no puede hallarse la suma de la série que resulta de él ; pero si se multiplícan los dos factores $1+n$, $2+n$ del denominador , y por su producto $2+3n+n^2$ se parte el numerador , se tendrá el quociente $2n + \frac{7}{2+3n+n^2}$, ó bien $2n + \frac{7}{(1+n)\times(2+n)}$. Por tanto el término general propuesto se ha dividido en un entero , y en un quebrado que tiene las condiciones expresadas antes : y como las sumas de las séries correspondientes á los términos generales $2n$, $\frac{7}{(1+n)\times(2+n)}$ son respectivamente $n + n^2$, $\frac{\frac{7}{2}\times n}{2+n}$, será la suma que se busca $n+n^2 + \frac{\frac{7}{2}\times n}{2+n}$.

PROPOSICION LIII.

557. Siendo $A\times K^n - A$ la Suma general de una série, y $K > 1$, hallar el Término general, y la ley de la série que resulta.

I. En la suma dada póngase $n-1$ en lugar de n, y resultará $A\times K^{n-1} - A$; réstese esta cantidad de dicha suma, y se tendrá $A\times K^n - A\times K^{n-1}$, ó bien $\frac{A\times(K-1)}{K}\times K^n$ que es (538) el Término general que se pide.

II. Para hallar la ley de la série que resulta de dicho término general, substitúyanse sucesivamente en lugar de n los números naturales 1, 2, 3, 4, &c. y hecha la operacion se hallará $A \times (K - 1)$, $A \times (K - 1) \times K$, $A \times (K - 1) \times K^2$, $A \times (K - 1) \times K^3$, $A \times (K - 1) \times K^4$, &c. que es una série geométrica crecente por ser $K > 1$.

COROLARIO.

558. Se infiere que $A \times K^n - A$ es la fórmula de la Suma general de las séries geométricas crecentes, y que $\frac{A \times (K-1)}{K} \times K^n$ es la fórmula del Término general de las mismas séries. Las cantidades A, K tienen el mismo valor en la suma que en el término general.

PROPOSICION LIV.

559. Supuesta $A - A \times K^n$ la Suma general de una série, y $K < 1$, hallar el Término general, y la ley de la série que resulta.

I. En la suma propuesta substitúyase $n - 1$ en lugar de n, y se tendrá $A - A \times K^{n-1}$; réstese esta cantidad de dicha suma, y resultará $A \times K^{n-1} - A \times K^n$, ó bien $\frac{A \times (1-K)}{K} \times K^n$ que es (538) el término general que se pide.

II. Para hallar la ley de la série que resulta de dicho término general, substitúyanse sucesivamente en lugar de n los números 1, 2, 3, 4, 5, &c. y se tendrá la série geométrica $A\times(1-K)$, $A\times(1-K)\times K$, $A\times(1-K)\times K^2$, $A\times(1-K)\times K^3$, $A\times(1-K)\times K^4$, $A\times(1-K)\times K^5$, &c. la que es decrecente por ser $K<1$.

COROLARIO.

560. De aquí se sigue que $A-A\times K^n$ es la fórmula de la Suma general de las séries geométricas decrecentes, y que $\frac{A\times(1-K)}{K}\times K^n$ es la fórmula del Término general de las mismas séries. Las cantidades A, K tienen el mismo valor en la suma que en el término general.

EXEMPLO.

561. Se pide hallar el Término y la Suma general de la série geométrica 2, 7, $24\frac{1}{2}$, $85\frac{3}{4}$, &c.

Siendo crecente la série propuesta, le corresponderá (558) la fórmula $\frac{A\times(K-1)}{K}\times K^n$ para el término general, y la fórmula $A\times K^n-A$ para la suma. En dicho término pónganse sucesivamente en lugar de n los números 1, 2, y resultarán los dos primeros términos de la série general, esto es $A\times$

$(K-1)$, $A\times(K-1)\times K$; compárense estos dos términos con los correspondientes de la série propuesta, y se tendrán las dos equaciones $A\times(K-1)=2$, $A\times(K-1)\times K=7$, y por medio de éstas se hallará $K=\frac{7}{2}$, $A=\frac{4}{5}$. Substituídos dichos valores de A, K en el término y suma general, será $\frac{7^{n-1}}{2^{n-2}}$ término general de la série propuesta, y $\frac{1}{5}\times\frac{7^{n}-2^{n}}{2^{n-2}}$ suma general de la misma.

PROPOSICION LV.

562. Hallar la ley de la série que resulta del Término general $AK^{n}+BL^{n}$, en quien AK^{n}, BL^{n} son Términos generales de séries geométricas.

En el término general propuesto substitúyanse sucesivamente en lugar de n los números naturales 1, 2, 3, 4, &c. y resultará la série $AK+BL$, $AK^{2}+BL^{2}$, $AK^{3}+BL^{3}$, $AK^{4}+BL^{4}$, &c. en la qual se observa que multiplicando el segundo término por $K+L$, y el primero por $-KL$, la suma de los dos productos dá el tercer término; y asímismo que multiplicando el tercer término por $K+L$, y el segundo por $-KL$, la suma de estos dos productos dá el quarto término; y así sucesivamente, esto es, que cada término de dicha série es la suma de los productos del primer término antecedente multiplicado por $K+L$, y del segundo término antecedente multiplicado por $-KL$.

COROLARIO.

563. Consta de la Teoría de la Formacion de las equaciones que si se supone $K+L=t$, y $-KL=s$, serán (364) K, L las raíces desiguales de la equacion $x^2-tx-s=0$: luego si se dá una série tal que cada uno de sus términos sea la suma de los productos del primer término antecedente multiplicado por el número dado t, y del segundo término antecedente multiplicado por el número dado s, y la equacion $x^2-tx-s=0$ tiene raíces desiguales; éstas darán los valores de K, L del término general AK^n+BL^n de dicha sèrie. Las cantidades A, B se determinan por el método ordinario, esto es, haciendo sucesivamente $n=1$, $n=2$, y comparando los términos que resultan con los correspondientes de la série propuesta.

EXEMPLO.

564. Se pide hallar el Término general de la série 27, 93, 327, 1173, &c. en la qual cada término es la suma de los productos del primer término antecedente multiplicado por 7, y del segundo término antecedente multiplicado por -12.

La fórmula del término general de la série propuesta es $A K^n + B L^n$. Para determinar las cantidades K, L, tómese la equacion $x^2 - t x - s = o$, y substitúyanse en ella los valores de t, s, que son 7, -12; con que se convertirá en la $x^2 - 7x + 12 = o$, cuyas raíces desiguales $x = 3$, $x = 4$ son los valores de K, L, esto es, $K = 3$, $L = 4$; por consiguiente la dicha fórmula $A K^n + B L^n$ será en el exemplo propuesto $A \times 3^n + B \times 4^n$. Ahora para determinar las cantidades A, B, pónganse sucesivamente en lugar de n los números 1, 2, y se tendrán las dos cantidades $3A + 4B$, $9A + 16B$; comparando estas con las correspondientes de la série propuesta, resultarán las equaciones $3A + 4B = 27$, $9A + 16B = 93$, por las quales se hallará $A = 5$, $B = 3$. Por tanto el término general de la série propuesta es $5 \times 3^n + 3 \times 4^n$.

PROPOSICION LVI.

565. Hallar la ley de la série que resulta del Término general $A K^n + B L^n + C P^n$, en quien $A K^n$, $B L^n$, $C P^n$ son términos generales de séries geométricas.

En el término general propuesto substitúyanse en lugar de n los números naturales 1, 2, 3, 4, &c. y resultará la série $A K + B L + C P$, $A K^2 + B L^2$

$+ CP^2$, $AK^3 + BL^3 + CP^3$, $AK^4 + BL^4 + CP^4$, &c. en la qual se observa que cada término es la suma de los productos del primer término antecedente multiplicado por $K + L + P$, del segundo término antecedente multiplicado por $-KL -PL-KP$, y del tercer término antecedente multiplicado por KLP.

COROLARIO I.

566. Consta de la Teoría de la Formacion de las equaciones que siendo $K + L + P = t$, $-KL -PL - KP = s$, $KLP = r$, serán (364) K, L, P las raíces desiguales de la equacion $x^3 - tx^2 - sx - r = o$: luego si se dá una série tal que cada término sea la suma de los productos del primer término antecedente multiplicado por el número dado t, del segundo término antecedente multiplicado por el número dado s, y del tercer término antecedente multiplicado por el número dado r, y la equacion $x^3 - tx^2 - sx - r = o$ tiene sus raíces desiguales; estas serán los valores de K, L, P del término general $AK^n + BL^n + CP^n$ de la série dada.

COROLARIO II.

567. En general las séries en quienes cada tér-

mino es la suma de los productos del primer término antecedente multiplicado por t, del segundo término antecedente multiplicado por s, del tercer término antecedente multiplicado por r, del quarto término antecedente multiplicado por p, &c. y llamando m el número de dichos términos antecedentes, la equacion $x^m - t\,x^{m-1} - s\,x^{m-2} - r\,x^{m-3} - p\,x^{m-4} - \&c. = o$ tiene sus raíces desiguales; serán éstas los valores de K, L, P, R, &c. del término general $A\,K^n + B\,L^n + C\,P^n + D\,R^n + \&c.$ de dicha série.

PROPOSICION LVII.

568. Supuesta $(A + B\,n) \times K^n - A$ la Suma general de una série, y $K > 1$, hallar el Término general.

En la suma propuesta póngase $n - 1$ en lugar de n, y resultará $[A + B \times (n-1)] \times K^{n-1} - A$; réstese esta cantidad de dicha suma, y quedará $(A + B\,n) \times K^n - [A + B \times (n-1)] \times K^{n-1}$ ó bien

$$\frac{\left.\begin{matrix} A + Bn \\ (-A - Bn) \\ (+B \quad\quad) \end{matrix}\right\} \times K^n}{K}$$

que es el término general que se pide, y se expresa generalmente por $(A+Bn) \times K^n$ en la inteligencia que las cantidades A, B tienen diferente valor que las correspondientes de la suma.

COROLARIO I.

569. Se infiere que las séries, cuyo Término general es $(A + Bn) \times K^n$, tienen por Suma general la fórmula $(A + Bn) \times K^n - A$, en quien los valores de A, B son diferentes de los del término general.

COROLARIO II.

570. Del mismo modo se hallará que las séries, que tienen por Término general $(A + Bn + Cn^2) \times K^n$, tienen por fórmula de la Suma general $(A + Bn + Cn^2) \times K^n - A$, siendo $K > 1$.

COROLARIO III.

571. En general las series, que tienen por Término general $(A + Bn + Cn^2 + Dn^3 \ldots + Hn^r) \times K^n$, siendo $K > 1$ tendrán por fórmula de la Suma general $(A + Bn + Cn^2 + Dn^3 \ldots + Hn^r) \times K^n - A$, en quien las cantidades A, B, C, D, ... H tienen diferente valor que en el término general.

COROLARIO IV.

572. Asímismo se encontrará que las séries, que

tienen por Término general $(A+Bn+Cn^2+Dn^3 \ldots + Hn^r) \times K^n$, y $K < 1$, tendrán por Suma general la fórmula $A-(A+Bn+Cn^2+Dn^3 \ldots + Hn^r) \times K^n$, en quien los valores de A, B, C, D, ... H son diferentes que en el término general.

EXEMPLO.

573. Dado el Término general $(3+2n+n^2) \times 2^n$, se pide hallar la Suma general que le corresponde.

La fórmula de la suma perteneciente al término general propuesto es $(A+Bn+Cn^2) \times 2^n - A$, cuyo término general se hallará ser

$$\left.\begin{matrix} A+Bn+Cn^2 \\ \dfrac{\begin{matrix}(-A-Bn \qquad\quad) \\ (-C+2Cn-Cn^2) \\ (+B \qquad\qquad\quad)\end{matrix}}{2} \end{matrix}\right\} \times 2^n$$

en quien las cantidades A, B, C son las mismas de la suma. Comparando los términos de esta fórmula con los correspondientes del término general dado, resultan las equaciones $A + \frac{B-C-A}{2} = 3$, $B + \frac{2C-B}{2} = 2$, $C - \frac{C}{2} = 1$, y por medio de ellas se tienen los valores de las indeterminadas $C=2$, $B=0$, $A=8$: poniendo estos valores en la fórmula (A

$+ Bn + Cn^2) \times 2^n - A$, se tendrá $(8 + 2n^2) \times 2^n - 8$, que es la suma general correspondiente al término general dado.

PROPOSICION LVIII.

574. Dado el Término general $(A + Bn) \times K^n$, hallar la ley de la série que de él resulta.

En el término general propuesto substitúyanse sucesivamente en lugar de n los números naturales 1, 2, 3, 4, 5, &c. y se tendrá la série $(A + B) \times K$, $(A + 2B) \times K^2$, $(A + 3B) \times K^3$, $(A + 4B) \times K^4$, $(A + 5B) \times K^5$, &c. en la qual se observa que multiplicando el segundo término por $2K$, y el primero por $-K^2$, la suma de los dos productos dá el tercer término; y que multiplicando el tercer término por $2K$, y el segundo por $-K^2$, la suma de estos dos productos dá el quarto término, y así sucesivamente; esto es, que cada término es la suma de los productos del primer término antecedente multiplicado por $2K$, y del segundo término antecedente multiplicado por $-K^2$.

COROLARIO.

575. Consta de la Teoría de la Formacion de las equaciones que suponiendo $2K = t$, $-K^2 = s$, será K una de las raíces iguales de la equacion $x^2 - tx - s = o$: luego si se dá una série, de suerte

que cada término sea la suma de los productos del primer término antecedente multiplicado por un número dado t, y del segundo término antecedente multiplicado por un número dado s, y la equacion $x^2 - t\,x - s = o$ tiene las raíces iguales; una de éstas dará el valor de K en la fórmula $(A + Bn) \times K^n$ del término general de dicha série.

EXEMPLO.

576. Se pide hallar el Término general de la série 20, 128, 704, 3584, &c. en la qual cada término es la suma de los productos del primer término antecedente multiplicado por 8, y del segundo término antecedente multiplicado por — 16.

Tomada la equacion $x^2 - t\,x - s = o$, háganse en ella las substituciones $t = 8$, $s = -16$, y se convertirá en la $x^2 - 8\,x + 16 = o$: y como esta equacion tiene sus dos raíces iguales á 4, será $(A + Bn) \times K^n$ la fórmula del término general perteneciente á la série propuesta, y en dicha fórmula será $K = 4$. Para determinar las cantidades A, B, háganse las substituciones $n = 1$, $n = 2$; y comparando los resultados con los correspondientes términos de la série dada, se tendrán las equaciones $(A + B) \times 4 = 20$, $(A + 2\,B) \times 16 = 128$, y por medio de éstas se hallará $B = 3$, $A = 2$. Por tanto el término general de la série propuesta es $(2 + 3n) \times 4^n$.

PROPOSICION LIX.

577. Dado el Término general $(A + Bn + Cn^2) \times K^n$, hallar la ley de la série que de él resulta.

En el término general propuesto substitúyanse sucesivamente en lugar de n los números naturales 1, 2, 3, 4, 5, &c. y resultará la série $(A + B + C) \times K$, $(A + 2B + 4C) \times K^2$, $(A + 3B + 9C) \times K^3$, $(A + 4B + 16C) \times K^4$, $(A + 5B + 25C) \times K^5$, &c. en la qual se observa que multiplicando el tercer término por $3K$, el segundo por $-3K^2$, y el tercero por K^3, la suma de estos tres productos dá el quarto término; y que multiplicando el quarto término por $3K$, el tercero por $-3K^2$, y el segundo por K^3, la suma de estos tres productos dá el quinto término, y así sucesivamente; esto es, que cada término de dicha série es la suma de los productos del primer término antecedente multiplicado por $3K$, del segundo término antecedente multiplicado por $-3K^2$, y del tercer término antecedente multiplicado por K^3.

COROLARIO I.

578. Consta de la Teoría de la Formacion de

las equaciones que suponiendo $3K = t$, $-3K^2 = s$, y $K^3 = r$, será K una de las tres raíces iguales de la equacion cúbica $x^3 - t\,x^2 - s\,x - r = o$: luego si se dá una série tal que cada uno de sus términos sea la suma de los productos del primer término antecedente multiplicado por un número dado t, del segundo término antecedente multiplicado por un número dado s, y del tercer término antecedente multiplicado por un número dado r, y la equacion $x^3 - t\,x^2 - s\,x - r = o$ tiene sus tres raíces iguales; será una de ellas el valor de K en la fórmula $(A + Bn + C\,n^2) \times K^n$ del término general de la expresada série.

COROLARIO II.

579. En general las séries en quienes cada término es la suma de los productos del primer término antecedente multiplicado por t, del segundo término antecedente multiplicado por s, del tercer término antecedente multiplicado por r, del quarto término antecedente multiplicado por q, y así sucesivamente, y suponiendo m el número de dichos términos antecedentes, la equacion $x^m - tx^{m-1} - s\,x^{m-2} - r\,x^{m-3} - q\,x^{m-4} - \&c. = o$ tiene sus raíces iguales; será una de ellas el valor de K en la fórmula $(A + B\,n + C\,n^2 + D\,n^3 + \&c.) \times K^n$

del término general de dichas séries, el qual tendrá el número de los términos A, Bn, Cn^2, &c. igual á m.

PROPOSICION LX.

580. Dada una série, en quien cada término sea la suma de los productos del primer término antecedente multiplicado por un número dado t, del segundo término antecedente multiplicado por un número dado s, del tercer término antecedente multiplicado por un número dado r, y así sucesivamente, hallar su Término general.

Supóngase m el número de los términos antecedentes multiplicados por t, s, r, &c. de cuya suma de productos se compone cada término de la série, y fórmese la equacion (A) $x^m - tx^{m-1} - sx^{m-2} - rx^{m-3} - \&c. = o$, en quien el último término contendrá la x elevada á la potestad cero.

I. Si la equacion (A) tiene todas sus raíces desiguales, la série propuesta tendrá (567) por término general $AK^n + BL^n + CP^n + \&c.$ siendo el número de estos términos igual al número m, y los valores de K, L, P, &c. serán los de las raíces de dicha equacion.

II. Si la equacion (A) tiene todas sus raíces iguales, la série propuesta tendrá (579) por término general $(A + Bn + Cn^2 + \&c.) \times K^n$, siendo m el número de estos términos, y el valor de K será una de las raíces iguales de dicha equacion.

III. Finalmente si la expresada equacion (A) tiene raíces iguales y desiguales, la série propuesta tendrá por término general $A\,K^n + B\,L^n + C\,P^n +$ &c. $+ (a + b\,n + c\,n^2 +$ &c.$) \times k^n$, esto es, tantos términos $A\,K^n$, $B\,L^n$, $C\,P^n$, &c. quantas son las raíces desiguales, cuyos valores determinarán los de K, L, P, &c. y tantos a, bn, cn^2, &c. quantas son las raíces iguales, y una de ellas dará el valor de k. Determinados los valores de K, L, P, &c. y k, para hallar los de los coeficientes indeterminados A, B, C, &c. a, b, c, &c. pónganse sucesivamente en lugar de n los números naturales 1, 2, 3, 4, &c. y compárense los resultados con los correspondientes términos de la série dada, formando tantas equaciones quantos son los dichos coeficientes; y resolviéndolas, se tendrán los valores de estos coeficientes.

EXEMPLO.

581. Se pide hallar el Término general de la série 3, 5, 4, 6, 8, 6, 28, $-$ 22, &c. en la qual el sexto término es la suma de los productos del primer término antecedente multiplicado por 1, del segundo multiplicado por 9, del tercero multiplicado por $-$ 13, del quarto por $-$ 8, y del quinto por

12, y así sucesivamente cada término se compone de otros tantos productos formados con el mismo método.

Para ésto, en la equacion general $x^m - t\,x^{m-1} - s\,x^{m-2} - r\,x^{m-3} - p\,x^{m-4} - q\,x^{m-5}$ — &c. $= o$ se harán las substituciones $m = 5$, $t = 1$, $s = 9$, $r = -13$, $p = -8$, $q = 12$, y se tendrá la equacion del quinto grado $x^5 - x^4 - 9x^3 + 13\,x^2 + 8\,x - 12 = o$, cuyas raíces son $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 2$. Como en esta equacion se han hallado tres raíces desiguales y dos iguales, el término general correspondiente á la série propuesta será $A\,K^n + B\,L^n + C\,P^n + (a + b\,n) \times k^n$, en quien será $K = -3$, $L = -1$, $P = 1$, $k = 2$; y substituyendo estos valores en dicho término, resultará (M) $A \times (-3)^n + B \times (-1)^n + C \times 1^n + (a + b\,n) \times 2^n$. Para hallar los valores de las cantidades A, B, C, a, b, pónganse sucesivamente en lugar de n los números 1, 2, 3, 4, 5; y comparando los cinco resultados con los correspondientes cinco primeros términos de la série dada, se tendrán las equaciones $-3\,A - B + C + 2\,a + 2\,b = 3$, $9\,A + B + C + 4\,a + 8\,b = 5$, $-27\,A - B + C + 8\,a + 24\,b = 4$, $81\,A + B + C + 16a + 64\,b = 6$, $-243\,A - B + C + 32\,a + 160\,b = 8$, y por medio de ellas se hallará ser $A = -$

$\frac{1}{150}$, $b = -\frac{1}{60}$, $a = \frac{181}{900}$, $C = \frac{7}{2}$, $B = \frac{40}{45}$. Por tanto el término general de la série propuesta es $-\frac{1}{150} \times (-3)^n + \frac{40}{45} \times (-1)^n + \frac{7}{2} + (\frac{181}{900} - \frac{1}{60} \times n) \times 2^n$.

De la Resolucion de las Equaciones en general.

PROPOSICION LXI.

582. Hallar las raíces de la equacion general $x^r - r\,a x^{r-2} + \frac{r \times (r-3)}{2} \times a^2 x^{r-4} - \frac{r \times (r-4) \times (r-5)}{2 \times 3} \times a^3\, x^{r-6} + \frac{r \times (r-5) \times (r-6) \times (r-7)}{2 \times 3 \times 4} \times a^4\, x^{r-8} - \frac{r \times (r-6) \times (r-7) \times (r-8) \times (r-9)}{2 \times 3 \times 4 \times 5} \times a^5\, x^{r-10} \ldots - b = o$, en quien los exponentes de x son todos positivos.

Supóngase $x = m + n$, y se tendrán las equaciones siguientes:

$x^2 = m^2 + 2mn + n^2$; por consiguiente $\left.\begin{matrix} x^2 - 2mn - m^2 \\ -n^2 \end{matrix}\right) = o$

$x^3 = m^3 + 3mn \times (m+n) + n^3$, ... $\left.\begin{matrix} x^3 - 3mnx - m^3 \\ -n^3 \end{matrix}\right) = o$

$x^4 = m^4 + 4mn \times (m+n)^2 + n^4$, . . $\left.\begin{matrix} x^4 - 4mnx^2 + 2m^2n^2 - m^4 \\ -n^4 \end{matrix}\right) = o$

$\quad -2m^2n^2$

$$x^5=m^5+5mn.(m+n)^3+n^5,\ldots x^5-5mnx^3+5m^2n^2x-m^5\left.\begin{array}{r} \\ -n^5\end{array}\right)=0$$
$$\quad -5m^2n^2\times(m+n)$$

$$x^6=m^6+6mn.(m+n)^4+n^6,\ldots x^6-6mnx^4+9m^2n^2x^2-2m^3n^3-m^6\left.\begin{array}{r} \\ -n^6\end{array}\right)=0$$
$$\begin{array}{l} -9m^2n^2\times(m+n)^2 \\ +2m^3n^3\end{array}$$

$$x^7=m^7+7mn.(m+n)^5+n^7,\ldots x^7-7mnx^5+14m^2n^2x^3-7m^3n^3x-m^7\left.\begin{array}{r} \\ -n^7\end{array}\right)=0$$
$$\begin{array}{l} -14m^2n^2\times(m+n)^3 \\ +7m^3n^3\times(m+n)\end{array}$$

$$x^8=m^8+8mn.(m+n)^6+n^8,\ldots x^8-8mnx^6+20m^2n^2x^4-16m^3n^3x^2+2m^4n^4-m^8\left.\begin{array}{r} \\ -n^8\end{array}\right)=0$$
$$\begin{array}{l} -20m^2n^2\times(m+n)^4 \\ +16m^3n^3\times(m+n)^2 \\ -2m^4n^4\end{array}$$

Con el mismo método se hallará que la equacion del grado noveno es $x^9-9mnx^7+27m^2n^2x^5-30m^3n^3x^3+9m^4n^4x-m^9-n^9=0$; y así siguiendo se observará en todas ellas que 1°. los coeficientes de mn forman una série aritmética, cuyo término general es r, con tal que r exprese el grado de la equacion: 2°. los coeficientes de m^2n^2 forman una série, en quien son constantes las segundas diferencias, y el término general de ella se hallará (544) ser $\frac{r\times(r-3)}{2}$: 3°. los coeficientes de m^3n^3 forman una série, en quien las terceras diferencias son constantes, y su término general es $\frac{r\times(r-4)\times(r-5)}{2\times 3}$. Del mismo modo se observará que los coeficientes de los sucesivos términos forman séries que tienen las diferencias quartas, quintas, &c. constantes, y sus términos generales son respectivamente

$$\frac{r\times(r-5)\times(r-6)\times(r-7)}{2\times3\times4}$$

$$\frac{r\times(r-6)\times(r-7)\times(r-8)\times(r-9)}{2\times3\times4\times5}$$

$$\frac{r\times(r-7)\times(r-8)\times(r-9)\times(r-10)\times(r-11)}{2\times3\times4\times5\times6}$$

$$\frac{r\times(r-8)\times(r-9)\times(r-10)\times(r-11)\times(r-12)\times(r-13)}{2\times3\times4\times5\times6\times7}$$

y así sucesivamente: luego la equacion general será

$$x^r - r\,m\,n\,x^{r-2} + \frac{r\times(r-3)}{2}\times m^2n^2x^{r-4} - \frac{r\times(r-4)\times(r-5)}{2\times3} \times m^3n^3x^{r-6} + \frac{r\times(r-5)\times(r-6)\times(r-7)}{2\times3\times4}\times m^4\,n^4\,x^{r-8} - \frac{r\times(r-6)\times(r-7)\times(r-8)\times(r-9)}{2\times3\times4\times5}\times m^5n^5\,x^{r-10} + \ldots \begin{matrix}-m^r\\-n^r\end{matrix} = 0,$$

cuya raíz es $x = m + n$, siendo r número impar, y tambien $x = -m - n$, quando r es número par. Ahora supuesta esta equacion idéntica á la propuesta, será $m\,n = a$, $-m^r - n^r = -b$; y siendo r número impar, se tendrán por medio de estas equaciones los valores de las cantidades $m = \sqrt[r]{\left[\frac{b}{2}\right.} \left.\pm\sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - a^r\right)}\right]$, y $n = \sqrt[r]{\left[\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - a^r\right)}\right]}$; pero $x = m + n$, y $m\,n = a$: luego será $x =$

$\sqrt[r]{}[\frac{b}{2}+\sqrt{}(\frac{b^2}{4}-a^r)]+\sqrt[r]{}[\frac{b}{2}-\sqrt{}(\frac{b^2}{4}-a^r)]$ en quien a^r tendrá valor positivo ó negativo, segun lo tenga a. Pero si r es número par, y a es positiva, por medio de dichas dos equaciones se tendrá $m=\pm\sqrt[r]{}[\frac{b}{2}\mp\sqrt{}(\frac{b^2}{4}-a^r)]$, y $n=\pm\sqrt[r]{}[\frac{b}{2}\pm\sqrt{}(\frac{b^2}{4}-a^r)]$; pero las equaciones de grado par tienen las raíces $x=m+n$, $x=-m-n$, y además ha de ser $mn=a$: luego será $x=\sqrt[r]{}[\frac{b}{2}+\sqrt{}(\frac{b^2}{4}-a^r)]+\sqrt[r]{}[\frac{b}{2}-\sqrt{}\frac{b^2}{4}-a^r)]$, $x=-\sqrt[r]{}[\frac{b}{2}+\sqrt{}(\frac{b^2}{4}-a^r)]-\sqrt[r]{}[\frac{b}{2}-\sqrt{}(\frac{b^2}{4}-a^r)]$. Finalmente si r es número par, y a es negativa, será $mn=-a$, y $-m^r-n^r=-b$, y por medio de estas equaciones se hallará $m=\pm\sqrt[r]{}[\frac{b}{2}\pm\sqrt{}(\frac{b^2}{4}-a^r)]$, $n=\pm\sqrt[r]{}[\frac{b}{2}\mp\sqrt{}(\frac{b^2}{4}-a^r)]$: y porque son $x=m+n$, $x=-m-n$ en las equaciones de grado par, y debe ser $mn=-a$, será $x=\sqrt[r]{}[\frac{b}{2}+\sqrt{}(\frac{b^2}{4}$

$-a^r)] - \sqrt[r]{[\frac{b}{2} - \sqrt{(\frac{b^2}{4} - a^r)}]}$, y tambien $x = -\sqrt[r]{[\frac{b}{2} + \sqrt{(\frac{b^2}{4} - a^r)}]} + \sqrt[r]{[\frac{b}{2} - \sqrt{(\frac{b^2}{4} - a^r)}]}$. Para determinar las demás raíces de la equacion propuesta, será preciso conocer las raíces r de la unidad; y multiplicadas éstas así por $\sqrt[r]{[\frac{b}{2} + \sqrt{(\frac{b^2}{4} - a^r)}]}$ como por $\sqrt[r]{[\frac{b}{2} - \sqrt{(\frac{b^2}{4} - a^r)}]}$ se tendrán las otras raíces que se quieren determinar, con tal que la suma de los dos productos sea igual á la cantidad a positiva ó negativa segun las condiciones arriba expresadas.

EXEMPLO.

583. Se pide hallar las raíces de la equacion del quinto grado $x^5 - 15x^3 + 45x - 36 = o$.

Comparando la equacion general con la propuesta, se hallará ser $r = 5$, $a = 3$, $b = 36$; pero dicha equacion general tiene una de sus raíces $x = \sqrt[r]{[\frac{b}{2} + \sqrt{(\frac{b^2}{4} - a^r)}]} + \sqrt[r]{[\frac{b}{2} - \sqrt{(\frac{b^2}{4} - a^r)}]}$ por ser r número impar y el valor de a positivo: luego la propuesta tendrá la raíz $x = \sqrt[5]{[18 + \sqrt{(324 - 243)}]} + \sqrt[5]{[18 - \sqrt{(324 - 243)}]} =$

$\sqrt[5]{(18+\sqrt{81})}+\sqrt[5]{(18-\sqrt{81})}=\sqrt[5]{27}+\sqrt[5]{9}$; y como las raíces quintas de la unidad son 1, $\frac{-\sqrt{5}-1+\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}$, $\frac{\sqrt{5}-1+\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}$, $\frac{-\sqrt{5}-1-\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}$, $\frac{\sqrt{5}-1-\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}$, se hallará que las raíces de la equacion dada son las siguientes,

$$x=\sqrt[5]{27}+\sqrt[5]{9}$$

$$x=\sqrt[5]{27}\times\frac{\sqrt{5}-1-\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}+\sqrt[5]{9}\times\frac{\sqrt{5}-1+\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}$$

$$x=\sqrt[5]{27}\times\frac{-\sqrt{5}-1+\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}+\sqrt[5]{9}\times\frac{-\sqrt{5}-1-\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}$$

$$x=\sqrt[5]{27}\times\frac{-\sqrt{5}-1-\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}+\sqrt[5]{9}\times\frac{-\sqrt{5}-1+\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}$$

$$x=\sqrt[5]{27}\times\frac{\sqrt{5}-1+\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}+\sqrt[5]{9}\times\frac{\sqrt{5}-1-\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}$$

respecto de que los dos términos del segundo miembro de cada una de estas equaciones multiplicados entre sí dán un producto igual á $3=a$.

PROPOSICION LXII. Lema.

584. Dados el coseno y el seno de qualquier arco de círculo, hallar los cosenos y los senos del duplo, triplo, quadruplo, &c. de dicho arco; y al contrario.

Sea el arco dado A menor que un quadrante del circulo cuyo radio R, y además sea B otro arco del mismo quadrante.

I. Siendo $R \times Cc.(A+B)=Cc.\,A \times Cc.\,B - Sc.\,A \times Sc.\,B$, y $R \times Sc.(A+B)=Sc.\,A \times Cc.\,B + Sc.\,B \times Cc.\,A$, será tambien ($M$) $2R \times Cc.(A+B)=(Cc.A+Sc.A \times \sqrt{-1}) \times (Cc.B+Sc.B \times \sqrt{-1}) + (Cc.A-Sc.A \times \sqrt{-1}) \times (Cc.B-Sc.B \times \sqrt{-1})$, y ($N$) $2R \times Sc.(A+B) \times \sqrt{-1}=(Cc.A+Sc.A \times \sqrt{-1}) \times (Cc.B+Sc.B \times \sqrt{-1})-(Cc.A-Sc.A \times \sqrt{-1}) \times (Cc.B-Sc.B \times \sqrt{-1})$: añadiendo y despues restando esta equacion de la anterior, se tendrán las dos equaciones (O) $R \times Cc.(A+B)+R \times Sc.(A+B) \times \sqrt{-1}=(Cc A+Sc.A \times \sqrt{-1}) \times (Cc.B+Sc.B \times \sqrt{-1})$, y ($P$) $R \times Cc.(A+B)-R \times Sc.(A+B) \times \sqrt{-1}=(Cc.A-Sc.A \times \sqrt{-1}) \times (Cc.B-Sc.B \times \sqrt{-1})$.

Suponiendo ahora $A=B$, se tendrá

(Q) $R \times Cc.2A+R.Sc.2A.\sqrt{-1}=(Cc.A+Sc.A.\sqrt{-1})^2$

(R) $R \times Cc.2A-R \times Sc.2A \times \sqrt{-1}=(Cc.A-Sc.A \times \sqrt{-1})^2$: añadiendo y despues restando esta equacion de la anterior, será

$$2R \times Cc.2A=(Cc.A+Sc.A.\sqrt{-1})^2+(Cc.A-Sc.A.\sqrt{-1})^2$$

$$2R.Sc.2A.\sqrt{-1}=(Cc.A+Sc.A.\sqrt{-1})^2-(Cc.A-Sc A.\sqrt{-1})^2$$

Tambien resulta de las equaciones (Q) y (R) que será

$$(R \times Cc.2A+R \times Sc.2A \times \sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}=Cc.A+Sc.A \times \sqrt{-1},$$

$$(R \times Cc.2A-R \times Sc.2A \times \sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}=Cc.A-Sc.A \times \sqrt{-1}:$$

añadiendo y despues restando esta equacion de la anterior, será $2Cc.A=(R\times Cc.2A+R\times Sc.2A\times\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}+(R\times Cc.2A-R\times Sc.2A\times\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}$, y $2Sc.A\times\sqrt{-1}=(R\times Cc.2A+R\times Sc.2A\times\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}-(R\times Cc.2A-R\times Sc.2A\times\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}}$.

II. En virtud de las equaciones (O) y (P) será $R\times Cc.(A+B+C)+R\times Sc.(A+B+C)\times\sqrt{-1}=[Cc.(A+B)+Sc.(A+B)\times\sqrt{-1}]\times[Cc.C+Sc.C\times\sqrt{-1}]$ y $R\times Cc.(A+B+C)-R\times Sc.(A+B+C)\times\sqrt{-1}=[Cc.(A+B)-Sc.(A+B)\times\sqrt{-1}]\times[Cc.C-Sc.C\times\sqrt{-1}]$. Substituyendo ahora en estas equaciones los valores de $Cc.(A+B)\pm Sc.(A+B)\times\sqrt{-1}$ que se tienen por medio de las equaciones (O) y (P), resultarán las equaciones $R^2\times Cc.(A+B+C)+R^2\times Sc.(A+B+C)\times\sqrt{-1}=(Cc.A+Sc.A\times\sqrt{-1})\times(Cc.B+Sc.B\times\sqrt{-1})\times(Cc.C+Sc.C\times\sqrt{-1})$, y $R^2\times Cc.(A+B+C)-R^2\times Sc.(A+B+C)\times\sqrt{-1}=(Cc.A-Sc.A\times\sqrt{-1})\times(Cc.B-Sc.B\times\sqrt{-1})\times(Cc.C-Sc.C\times\sqrt{-1})$: y supuesto $A=B=C$, con el mismo método expuesto antecedentemente se hallarán las equaciones, $2R^2\times Cc.3A=(Cc.A+Sc.A\times\sqrt{-1})^3+(Cc.A-Sc.A\times\sqrt{-1})^3$, $2R^2\times Sc.3A\times\sqrt{-1}=(Cc.A+Sc.A\times\sqrt{-1})^3$

$-(Cc.\,A - Sc.\,A \times \sqrt{-1})^3$, $2Cc.\,A = (R^2 \times Cc.\,3A + R^2 \times Sc.\,3A \times \sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} + (R^2 \times Cc.\,3A - R^2 \times Sc.\,3A \times \sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$, $2Sc.\,A \times \sqrt{-1} = (R^2 \times Cc.\,3A + R^2 \times Sc.\,3A \times \sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} - (R^2 \times Cc.\,3A - R^2 \times Sc.\,3A \times \sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$.

III. Continuando del mismo modo las referidas operaciones, se hallarán las equaciones, $2R^3 \times Cc.\,4A = (Cc.\,A + Sc.\,A \times \sqrt{-1})^4 + (Cc.\,A - Sc.\,A \times \sqrt{-1})^4$, $2R^3 \times Sc.\,4A \times \sqrt{-1} = (Cc.\,A + Sc.\,A \times \sqrt{-1})^4 - (Cc.\,A - Sc.\,A \times \sqrt{-1})^4$, $2Cc.\,A = (R^3 \times Cc.\,4A + R^3 \times Sc.\,4A \times \sqrt{-1})^{\frac{1}{4}} + (R^3 \times Cc.\,4A - R^3 \times Sc.\,4A \times \sqrt{-1})^{\frac{1}{4}}$, $2Sc.\,A \times \sqrt{-1} = (R^3 \times Cc.\,4A + R^3 \times Sc.\,4A \times \sqrt{-1})^{\frac{1}{4}} - (R^3 \times Cc.\,4A - R^3 \times Sc.\,4A \times \sqrt{-1})^{\frac{1}{4}}$, y así sucesivamente; de donde resulta que en general será $2R^{m-1} \times Cc.\,mA = (Cc.\,A + Sc.\,A \times \sqrt{-1})^m + (Cc.\,A - Sc.\,A \times \sqrt{-1})^m$, $2R^{m-1} \times Sc.\,mA \times \sqrt{-1} = (Cc.\,A + Sc.\,A \times \sqrt{-1})^m - (Cc.\,A - Sc.\,A \times \sqrt{-1})^m$, $2Cc.\,A = (R^{m-1} \times Cc.\,mA + R^{m-1} \times Sc.\,mA \times \sqrt{-1})^{\frac{1}{m}} + (R^{m-1} \times Cc.\,mA - R^{m-1} \times Sc.\,mA \times \sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}$, $2Sc.\,A \times \sqrt{-1} = (R^{m-1} \times Cc.\,mA + R^{m-1} \times Sc.\,mA \times \sqrt{-1})^{\frac{1}{m}} - (R^{m-1} \times Cc.\,mA - R^{m-1} \times Sc.\,mA \times \sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}$.

Elevando los binómios $Cc.\ A + Sc.\ A \times \sqrt{-1}$, $Cc.\ A - Sc.\ A \times \sqrt{-1}$ á la potestad m, y los $Cc.\ mA + Sc.\ mA \times \sqrt{-1}$, $Cc.\ mA - Sc.\ mA \times \sqrt{-1}$ á la potestad $\frac{1}{m}$. se hallará ser

1°. $R^{m-1} \times Cc.\ mA = (Cc.\ A)^m - \frac{m \times (m-1)}{2} \times a q^2 - \frac{(m-2)\times(m-3)}{3\times 4} \times bq^2 - \frac{(m-4)\times(m-5)}{5\times 6} \times c q^2$ — &c. en quien las cantidades a, b, c, &c. expresan los términos antecedentes, y es $q = \frac{Sc.\ A}{Cc.\ A}$.

2°. $R^{m-1} \times Sc.\ mA = m \times (Cc.\ A)^{m-1} \times Sc.\ A - \frac{(m-1)\times(m-2)}{2\times 3} \times a q^2 - \frac{(m-3)\times(m-4)}{4\times 5} \times bq^2 - \frac{(m-5)\times(m-6)}{6\times 7} \times c q^2$ — &c. expresando las cantidades a, b, c, &c. los términos antecedentes, y siendo $q = \frac{Sc.\ A}{Cc.\ A}$.

3°. $Cc.\ A = R^{\frac{m-1}{m}} \times [(Cc.mA)^{\frac{1}{m}} - \frac{1-m}{2m^2} \times a q^2 - \frac{(1-2m)\times(1-3m)}{3\times 4\, m^2} \times bq^2 - \frac{(1-4m)\times(1-5m)}{5\times 6\, m^2} \times c q^2$ - &c.] en quien es $q = \frac{Sc.mA}{Cc.\ mA}$, y las cantidades a, b, c, &c. expresan los términos antecedentes.

4°. $Sc.\ A = R^{\frac{m-1}{m}} \times [\frac{1}{m} \times (Cc.mA)^{\frac{1}{m} - 1} \times Sc.mA$

$-\frac{(1-m)\times(1-2m)}{2\times 3m^2}\times a q^2 - \frac{(1-3m)\times(1-4m)}{4\times 5m^2}\times b q^2$
$-\frac{(1-5m)\times(1-6m)}{6\times 7m^2}\times c q^2 -$ &c.] siendo $q=\frac{Sc.mA}{Cc.mA}$,
y las cantidades a, b, c, &c. respectivamente iguales á los términos antecedentes.

Quando el arco dado A es mayor que el quadrante Q hasta los dos, de suerte que sea $2Q=A+B$, será $Sc.\ A=Sc.\ (2Q-B)=Sc.\ B$, y $Cc.\ A=Cc.\ (2Q-B)=-Cc.\ B$: quando el arco dado A es mayor que dos quadrantes hasta los tres, de suerte que sea $3Q=A+B$, será $Sc.\ A=Sc.\ (3Q-B)=-Sc.\ B$, y $Cc.\ A=Cc.\ (3Q-B)=-Cc.B$: quando el arco dado A es mayor que tres quadrantes hasta los quatro, de suerte que sea $4Q=A+B$, será $Sc.\ A=Sc.\ (4Q-B)=-Sc.B$, y $Cc.\ A=Cc.\ (4Q-B)=Cc.\ B$: finalmente si el arco A es igual á toda la circunferencia, ó á qualquier multíplice de la circunferencia, y á una parte de ésta, el seno y el coseno de dicho arco serán respectivamente iguales al seno y al coseno de dicha parte de la circunferencia.

COROLARIO I.

585. Si en la equacion(1°.) hallada antes se substituyen sucesivamente en lugar de n los números naturales 2, 3, 4, 5, &c. resultarán las equaciones

$R \times Cc.2A = 2 \times (Cc.A)^2 - R^2$

$R^2 \times Cc.3A = 4 \times (Cc.A)^3 - 3R^2 \times Cc.A$

$R^3 \times Cc.4A = 8 \times (Cc.A)^4 - 8R^2 \times (Cc.A)^2 + R^4$

$R^4 \times Cc.5A = 16 \times (Cc.A)^5 - 20R^2 \times (Cc.A)^3 + 5R^4 \times Cc.A$

$R^5 \times Cc.6A = 32 \times (Cc.A)^6 - 48R^2 \times (Cc.A)^4 + 18R^4 \times (Cc.A)^2 - R^6$

$R^6.Cc.7A = 64.(Cc.A)^7 - 112R^2.(Cc.A)^5 + 56R^4.(Cc.A)^3 - 7R^6.Cc.A$

&c. &c.

COROLARIO II.

586. Luego el *Cc.* A tendrá tantos valores, como unidades hay en el multíplo del arco A; y así *Cc.* A tiene seis valores en la equacion $R^5 \times Cc. 6A = 32\,(Cc.\,A)^6 - 48\,R^2\,(Cc.\,A)^4 + 18\,R^4\,(Cc.\,A)^2 - R^6$. Para hallar estos valores, descríbase (*Fig.* 41.) con el radio $MA = R$ el círculo $MAIL$; tómense los arcos $AB = A$, $AC = 6A$; y divídase la circunferencia desde el punto B en seis partes iguales BE, ED, DF, FG, GH, HB: los cosenos de los arcos AE, AED, ADF, AFG, AGH darán los otros valores del *Cc.* A de dicha equacion. Pues llamada C la circunferencia del círculo, y el arco $AC = 6A = B$, el coseno de B no solo pertenece á este arco, sino tambien á los arcos $B + C$, $B + 2C$, $B + 3C$, &c. luego la raíz *Cc.* A deberá expresar el coseno de la sexta parte de qualquiera de estos arcos, esto es, *Cc.* $\frac{B}{6}$, *Cc.* $\frac{B+C}{6}$, *Cc.* $\frac{B+2C}{6}$, *Cc.* $\frac{B+3C}{6}$, *Cc.*

$\frac{B+4C}{6}$, $Cc.$ $\frac{B+5C}{6}$; y como los arcos $\frac{B+6C}{6}$, $\frac{B+7C}{6}$, &c. tienen los mismos cosenos que los $\frac{B}{6}$, $\frac{B+C}{6}$, &c. dicha raíz $Cc. A$ tendrá solo los seis valores hallados que corresponden á los cosenos de los arcos AB, ABE, AED, ADF, AFG, AGH. Tambien los valores de $Cc. A$ podrán expresarse por los cosenos de los arcos $\frac{C-B}{6}$, $\frac{2C-B}{6}$, $\frac{3C-B}{6}$, $\frac{4C-B}{6}$, $\frac{5C-B}{6}$, $\frac{6C-B}{6}$, por ser estos cosenos los mismos que los hallados anteriormente: pues el coseno del arco $\frac{6C-B}{6}$ es el mismo que él del arco $\frac{B}{6}$, porque estos dos juntos forman la circunferencia C; y asímismo el coseno del arco $\frac{5C-B}{6}$ es el mismo que él del arco $\frac{B+C}{6}$, y así sucesivamente. Entiéndase lo mismo para determinar las raíces de la equacion general á los cosenos, de suerte que llamado el arco $mA = B$, las raíces de dicha equacion serán los cosenos de los arcos $\frac{B}{m}$, $\frac{C+B}{m}$, $\frac{2C+B}{m}$, $\frac{3C+B}{m}$, &c. ó bien $\frac{C-B}{m}$, $\frac{2C-B}{m}$, $\frac{3C-B}{m}$, &c. y estos arcos se hallarán dividiendo la circunferencia desde el punto B en tantas partes iguales como unidades hay en m, supuesto el arco $AB = \frac{B}{m}$.

COROLARIO III.

587. Por tanto suponiendo que las cantidades g, h, k, &c. son las raíces de la equacion general á los cosenos, se compondrá ésta del producto de los factores $Cc.\frac{B}{m} - g = o$, $Cc.\frac{C+B}{m} - h = o$, $Cc.\frac{2C+B}{m} + k = o$, &c. Estos cosenos tendrán valores positivos ó negativos, segun queden los extremos de sus arcos en el semicírculo IAL ó en ITL.

COROLARIO IV.

588. Tambien si en la equacion (2°.) hallada en la Proposicion antecedente se substituyen sucesivamente en lugar de n los números naturales 2, 3, 4, 5, &c. resultarán las equaciones

$$R \times Sc.2A = 2Cc.A \times Sc.A$$
$$R^2 \times Sc.3A = [4(Cc.A)^2 - R^2] \times Sc.A$$
$$R^3 \times Sc.4A = [8(Cc.A)^3 - 4R^2 Cc.A] \times Sc.A$$
$$R^4 \times Sc.5A = [16(Cc.A)^4 - 12R^2(Cc.A)^2 + R^4] \times Sc.A$$
$$R^5 \times Sc.6A = [32(Cc.A)^5 - 32R^2(Cc.A)^3 + 6R^4 Cc.A] \times Sc.A$$
$$R^6 \times Sc.7A = [64(Cc.A)^6 - 80R^2(Cc.A)^4 + 24R^4(Cc.A)^2 - R^6] Sc.A$$

&c. &c.

PROPOSICION LXIII.

589. Supuesta la division de un arco de círculo en partes iguales cuyo número m, determinar todos los factores trinómios del segundo grado de la equacion $x^{2m} \mp 2pr^{m-1}x^m + r^{2m} = o$ en quien p expresa el coseno de dicho arco, y r es el radio del círculo. *Fig.* 42.

Con el radio $CA = r$ descríbase el círculo $AGSO$, y tírense los diámetros AS, GO perpendiculares entre sí. Supóngase el arco AL que tenga su coseno $= p$, y el arco $AB = \frac{AL}{m}$; divídase la circunferencia del círculo desde el punto B en el número m de partes iguales BF, FI, IP, &c. llámense los arcos $AL = B$, $AB = A$, la circunferencia del círculo igual á C, y los cosenos de los arcos AB, ABF, AFI, AIP, &c. ó bien de $\frac{B}{m}$, $\frac{C+B}{m}$, $\frac{2C+B}{m}$, $\frac{3C+B}{m}$, &c. exprésense por g, h, k, l, &c. Finalmente supóngase $CK = x$, y tírense las rectas KB, KF, KI, KP, &c. y BN perpendicular al diámetro AS. Siendo pues el triángulo BNK rectángulo en N, será $(BK)^2 = (BN)^2 + (NK)^2$; pero el quadrado del seno BN es igual á la diferencia de los quadrados del radio r y del coseno $CN = g$, y además es $NK = CN - CK = g - x$: luego será $(BK)^2 = r^2 - g^2 + (g-x)^2 = x^2 - 2gx + r^2$. Con el mismo método se hallará ser $(FK)^2 = x^2 - 2hx + r^2$, $(IK)^2 = x^2 + 2kx + r^2$, $(PK)^2 = x^2 + 2lx + r^2$, &c. Supónganse ahora $x^2 - 2gx + r^2 = o$, $x^2 - 2hx + r^2 = o$, $x^2 + 2kx + r^2 = o$, $x^2 + 2lx + r^2 = o$, &c. y se tendrán los valores de los cosenos g, h, k, l, &c. esto es, $g = \frac{x^2 + r^2}{2x}$, $h = \frac{x^2 + r^2}{2x}$, $-k = \frac{x^2 + r^2}{2x}$, $-l = \frac{x^2 + r^2}{2x}$, &c. de modo que será en general $\frac{x^2 + r^2}{2x}$ la expresion del coseno de qualquiera de los arcos AB, ABF, AFI, AIP, &c. Por tanto si en las equaciones halladas á los cosenos (585) se substituyen los valores de $Cc. A$, se tendrán las equaciones siguientes:

$$x^2 - 2Cc.A \times x + r^2 = o$$
$$x^4 - 2rCc.2A \times x^2 + r^4 = o$$
$$x^6 - 2r^2Cc.3A \times x^3 + r^6 = o$$
$$x^8 - 2r^3Cc.4A \times x^4 + r^8 = o$$
$$x^{10} - 2r^4Cc.5A \times x^5 + r^{10} = o$$
$$x^{12} - 2r^5Cc.6A \times x^6 + r^{12} = o$$

de donde resulta que será en general $x^{2m} - 2r^{m-1} Cc. mA \times x^m + r^{2m} = o$, si es el arco $AL < AG$; y quando el arco AL es mayor que AG, y menor que AGS, será $x^{2m} + 2r^{m-1}\, Cc.\, mA \times x^m + r^{2m} = o$; pero $Cc.\, mA = Cc.\, AL = p$: luego será $x^{2m} \mp 2r^{m-1}\, p\, x^m + r^{2m} = o$; pero las equaciones á los cosenos se componen (587) del producto de los factores $Cc.\, \frac{B}{m} - g = o$, $Cc.\, \frac{C+B}{m} - h = o$, $Cc.\, \frac{2C+B}{m} + k = o$, $Cc.\, \frac{3C+B}{m} + l = o$, &c. y dichos cosenos son iguales á $\frac{x^2+r^2}{2x}$: luego será $x^{2m} \mp 2r^{m-1}\, p\, x^m + r^{2m} = (x^2 - 2gx + r^2) \times (x^2 - 2hx + r^2) \times (x^2 + 2kx + r^2) \times (x^2 + 2lx + r^2) \times$ &c.

COROLARIO I.

590. Si se supone $Cc.\, AL = r$, esto es, el arco $AL = ASA = C$ (*Fig.* 43.) será $r^{2m} - 2r^m x^m + x^{2m} = (r^2 - 2gx + x^2) \times (r^2 - 2hx + x^2) \times (r^2 + 2kx + x^2) \times (r^2 + 2lx + x^2) \times$ &c. y extrayendo la raíz quadrada de ambos miembros, se tendrá $r^m - x^m = \sqrt{(r^2 - 2gx + x^2)} \times \sqrt{(r^2 - 2hx + x^2)} \times \sqrt{(r^2 + 2kx + x^2)} \times \sqrt{(r^2 + 2lx + x^2)} \times$ &c. En este caso tomando el arco $AB = \frac{C}{m}$ (*Fig.* 43.) y dividiendo la circunferencia desde el punto B en un número m de partes iguales AB, BF, FI, IP, &c. los cosenos de los arcos AB, ABF, AFI, AIP, &c. serán respectivamente iguales á las cantidades g, h, k, l, &c.

COROLARIO II.

591. Si se supone $Cc.\ AL = -r$, esto es, el arco $AL = AS = \frac{C}{2}$ (*Fig.* 44.) será $r^{2m} + 2r^m x^m + x^{2m} = (r^2 - 2gx + x^2) \times (r^2 - 2hx + x^2) \times (r^2 + 2kx + x^2) \times (r^2 + 2lx + x^2) \times$ &c. y extrayendo la raíz quadrada de ambos miembros, se tendrá $r^m + x^m = \sqrt{(r^2 - 2gx + x^2)} \times \sqrt{(r^2 - 2hx + x^2)} \times \sqrt{(r^2 + 2kx + x^2)} \times \sqrt{(r^2 + 2lx + x^2)} \times$ &c. En este caso tomando el arco $Ab = \frac{\frac{1}{2} \times C}{m}$, y dividiendo la circunferencia desde el punto b en un número m de partes iguales Ab, bB, Bf, fF, &c. los cosenos de los arcos Ab, bB, Bf, fF, &c. serán respectivamente los valores de las cantidades g, h, k, l, &c.

COROLARIO III.

592. Infiérese de la Proposicion y de los Corolarios antecedentes que será 1°. $(CA)^{2m} \mp 2(CA)^{m-1} \times Cc.\ AL \times (CK)^m + (CK)^{2m} = (BK)^2 \times (FK)^2 \times (IK)^2 \times (PK)^2 \times$ &c. (*Fig.* 42.) 2°. $(CA)^m - (CK)^m = KB \times FK \times IK \times$ &c. $\times AK$. (*Fig.* 44.) 3°. $(CA)^m + (CK)^m = Kb \times Kf \times Ki \times KS \times$ &c.

ESCOLIO.

593. En la Proposicion antecedente, como tambien en sus Corolarios, se ha supuesto que el punto K queda en el diámetro del círculo; pero si dicho punto está en la prolongacion del diámetro, con el mismo método se demostrará ser $(CK)^m - (CA)^m = KB \times FK \times IK \times \&c. \times AK$ (*Fig.* 44.)

EXEMPLO.

594. Se pide hallar los factores del binómio $r^5 \pm x^5$. *Fig.* 45.

Divídase la circunferencia $ABEA$ en las cinco partes iguales AB, BF, FP, PE, EA; y será $r^5 - x^5 = KB \times KF \times KP \times KE \times KA$; pero $KB = KE$, y $KF = KP$: luego se tendrá $r^5 - x^5 = (KB)^2 \times (KF)^2 \times KA = (r^2 - 2gx + x^2) \times (r^2 + 2hx + x^2) \times (r - x)$ suponiendo los senos de los arcos AB, AF respectivamente iguales á las cantidades g, h. Para hallar los factores del binómio $r^5 + x^5$, tómese el arco Ab igual á la quinta parte de la semicircunferencia ABS, y desde el punto b divídase toda la circunferencia en las cinco partes iguales bf, fS, Sp, pe, eb; y será $r^5 + x^5 = Kb \times Kf \times KS \times Kp \times Ke$; pero $Kb = Ke$, y $Kf = Kp$: luego se tendrá $r^5 + x^5$

$= (Kb)^2 \times (Kf)^2 \times KS = (r^2 - 2gx + x^2) \times (r^2 + 2hx + x^2) \times (r + x)$, siendo los cosenos de los arcos Ab, Af respectivamente iguales á las cantidades g, h.

PROPOSICION LXIV.

595. Si en una equacion de qualquier grado m se substituyen sucesivamente los números naturales o, 1, 2, 3, &c. en lugar de la incógnita x, y se hallan los resultados correspondientes á las substituciones $x = o$, 1, 2, 3, &c. hasta el número m: digo que se podrán hallar todos los resultados siguientes por la sola adicion.

Búsquense las diferencias de los resultados hallados, y su número será m; búsquense despues las diferencias de estas diferencias, y su número será $m - 1$; y así sucesivamente hasta la diferencia m que será constante: pues la equacion dada puede considerarse como término general de una série (546) cuyas diferencias m son constantes. Por tanto se podrá continuar la série de las diferencias constantes m tanto como se quiera; despues por medio de esta série se podrá continuar por la sola adicion la série de las diferencias $m - 1$; y así sucesivamente, hasta que se llegue á la série de los resultados.

COROLARIO I.

596. Con el mismo método se demostrará que si en la equacion del grado m se substituyen sucesivamente los números naturales $o, -1, -2, -3,$ &c. en lugar de x, y se hallan los resultados correspondientes á las substituciones $x = o, -1, -2, -3,$ &c. hasta el número $-m$, se podrán hallar todos los demás resultados por la sola adicion.

COROLARIO II.

597. Luego si los términos correspondientes en las diferentes séries son todos positivos ó negativos, los términos siguientes de cada série serán tambien positivos ó negativos, y por consiguiente los de la série de los resultados.

EXEMPLO.

598. Sea la equacion $x^4 - 3x - 7 = o$.

Diferencias quartas (E)	24, 24, 24
Diferencias terceras (D)	36, 60, 84, 108
Diferencias segundas (C)	14, 50, 110, 194, 302
Diferencias primeras (B)	-2, 12, 62, 172, 366, 668
Resultados (A)	$-7, -9,$ 3, 65, 237, 603, 1271
Suposiciones	$x = o,$ 1, 2, 3, 4, 5, 6

En la equacion propuesta substitúyanse sucesivamente en lugar de x los números $o, 1, 2, 3, 4,$

y se tendrán los resultados escritos en (A); en la série que forman estos resultados busquénse las diferencias primeras, segundas, terceras y quartas, y resultarán las séries (B), (C), (D), y (E) que será constante por ser la equacion propuesta del quarto grado. Porque la ley que guardan estas séries es que cada término es igual á la suma del término antecedente de la misma série, y del superior á él en la série antecedente, se podrán continuar dichas séries por la adicion: y así para determinar el resultado correspondiente á la suposicion $x = 5$, se añadirá un término á dichas séries empezando desde la (E) que es la de las diferencias constantes, y será 1°. $60 + 24$, ó bien 84, el tercer término de la série (D): 2°. $110 + 84$, ó bien 194, el quarto término de la série (C): 3°. $172 + 194$, ó bien 366, el quinto término de la série (B): 4°. $237 + 366$, ó bien 603, el sexto término de la série (A) que es el resultado que se busca. Con el mismo método se hallará que los resultados correspondientes á las suposiciones $x = 6$, 7, &c. son respectivamente 1271, 2373, &c.

Haciendo ahora en la equacion propuesta las suposiciones de $x = o$, -1, -2, -3, -4, se tendrán los resultados -7, -3, 15, 83, 261, y se hallarán los demás con el mismo método arriba explicado, como se manifiesta en la siguiente tabla.

Diferencias quartas (E) 24, 24
Diferencias terceras(D) 36, 60, 84
Diferencias segundas (C) 14, 50, 110, 194
Diferencias primeras (B) 4, 18, 68, 178, 372
Resultados (A). . . . $-$ 7, $-$3, 15, 83, 261, 633
Suposiciones . . . . . $x = o, -1, -2, -3, -4, -5$

PROPOSICION LXV.

599. Determinar las raíces de una equacion numérica de qualquier grado por aproxîmacion.

I. Tenga la equacion propuesta sus raíces reales y desiguales. Háganse sucesivamente en esta equacion las suposiciones de $x = o$, 1, 2, 3, &c. y hállese (595) la série de los resultados, hasta que todos hayan de tener un mismo signo. Hecho esto, obsérvense los resultados que alternan sus signos de $+$ en $-$, ó bien de $-$ en $+$, y entre cada dos suposiciones correspondientes á resultados semejantes habrá siempre (369) una de las raíces de la equacion; por consiguiente llamadas en general n y $n + 1$ dos suposiciones de x, á quienes correspondan dos resultados con signos contrarios, será $x > n$, y $x < n + 1$. Determinados los límites n y $n + 1$, entre quienes está una de las raíces de la equacion, estréchense mas estos límites, hasta que difieran solo en una décima; lo qual se tendrá por la alternacion de los signos de los resultados, substituyendo sucesivamente en la equacion $n + \frac{1}{10}$, $n + \frac{2}{10}$, $n + \frac{3}{10}$, $n + \frac{4}{10}$, &c. en lugar de x; y teniendo así la raíz x entre dos límites que solo difieran en $\frac{1}{10}$, como $x > m$ y $x < m + \frac{1}{10}$, hágase $x = m + p$, y substitúyanse en la equacion los valores de x y de sus potestades; en la equacion transformada quítense los términos donde se hallan las segundas, terceras, &c. potestades de p, porque siendo el valor de p menor que $\frac{1}{10}$ las potestades p^2, p^3, &c. se podrán despreciar por muy pequeñas; por medio de la equacion resultante que llamo (A) hállese el valor de p; y sumado éste con él de m, se tendrá otro valor mas próximo de la raíz x. Con el mismo método se determinarán próxîmamente las raíces negativas, suponiendo $x = o, -1, -2, -3$, &c.

II. Tenga la equacion dada todas sus raíces imaginarias. Supóngase ésta formada del producto de los factores $x + a + b\sqrt{-1}$, $x + a - b\sqrt{-1}$, $x + c + d\sqrt{-1}$, $x + c - d\sqrt{-1}$, &c. los quales serán (374) en número par é igual al grado de la equacion. Multiplíquense dichos factores entre sí, y los coeficientes de los términos segundo, tercero, &c. compárense con sus correspondientes en la equacion : luego por medio de las equaciones resultantes se determinarán los valores reales de a, b, c, d, &c.

III. Si las raíces de la equacion propuesta son en parte reales y desiguales, y en parte imagínárias; se determinarán las primeras segun el método dado en el caso primero, y será, por exemplo, $x = A$, $x = B$, $x = C$, &c. en quien A, B, C, &c. expresan números tanto positivos, como negativos. Ahora pártase la equacion por el producto de los factores $x - A$, $x - B$, $x - C$, &c. y resultará otra equacion que tendrá solo raíces imaginárias, las quales se hallarán por el método dado en el caso segundo.

ESCOLIO.

600. En la resolucion del Problema antecedente no se ha examinado el caso, en que la equacion dada contenga raíces reales é iguales: pues si las tubiese, se hallarían éstas por el método dado (512) y se deprimiría la equacion de grado, de suerte que la nueva equacion quedaría libre de dichas raíces. Es claro que el método dado en el caso primero no es útil para determinar aquellas raíces de una equacion que son reales é iguales y en número par, como la equacion $(x - a)^2 \times (x - b)^4 \times (x - c)^6 \times$ &c. $= o$, porque los resultados tendrán

siempre el mismo signo, qualesquiera que sean los valores substituídos por x. Entiéndase lo mismo respecto á las equaciones que tienen solamente raíces imaginárias, como la equacion $(x+a+b\sqrt{-1}) \times (x+a-b\sqrt{-1}) \times (x+c+d\sqrt{-1}) \times (x+c-d\sqrt{-1}) \times \&c. = o$, ó que tienen dos, quatro, &c. raíces iguales, y tambien raíces imaginárias.

EXEMPLO I.

601. Se propone determinar por aproxîmacion las raíces de la equacion $x^3 - 5x + 6 = o$.

Antes de resolver la equacion propuesta por aproxîmacion, examîno si ésta contiene raíces reales é iguales, ó raíces racionales; y encuentro que no tiene ni unas ni otras. Por tanto la equacion dada contendrá tres raíces reales é irracionales, ó una raíz real y otras dos imaginárias, no pudiendo tener todas sus raíces imaginárias por ser de grado impar. Ahora si se substituyen en dicha equacion los números naturales o, 1, 2, 3, 4, &c. en lugar de x, se tendrá siempre una série crecente de resultados positivos; pero si se substituyen los números o, -1, -2, -3, -4, &c. en lugar de x, se tendrán resultados positivos y negativos, como se manifiesta en el cálculo siguiente:

Diferencias terceras (D) -6, -6
Diferencias segundas (C) -6, -12, -18
Diferencias primeras (B) 4, -2, -14, -32
Resultados (A) . . . . 6, 10, 8, -6, -38
Suposiciones . . . . $x=o$, -1, -2, -3, -4

Por tanto consta que las dos suposiciones $x=-2$, $x=-3$ dán los dos resultados $+8$, -6 con signos contrarios, y que todos los demás resultados tendrán los signos negativos y crecerán continuamente; por consiguiente una de las raíces de la equacion propuesta estará entre los límites -2 y -3. Para estrechar mas los límites -2 y -3, hágase $x=-2,5$; y substituyendo este valor en la equacion propuesta, se hallará el resultado positivo $+2,875$: y como á la suposicion $x=-3$ corresponde el resultado negativo -6, estará la raíz de la equacion entre $-2,5$ y -3. Continúese estrechando mas estos límites; y se hallará que á la suposicion $x=-2,7$ corresponde el resultado negativo $-o,183$, y que á la suposicion $x=-2,6$ corresponde el resultado positivo $+1,424$: luego la raíz real de la equacion propuesta estará entre los dos límites $-2,6$ y $-2,7$. Hágase ahora $x=m+p$, y substitúyase el valor de x y sus potestades en la equacion propuesta; por lo que se transformará en la $m^3+3m^2p+3mp^2-5m+p^3-5p+6=o$;

y omitiendo en ésta los términos en quienes se hallan las potestades segunda y tercera de p, se tendrá la equacion $m^3 + 3m^2 p - 5m - 5p + 6 = o$, de donde resulta $p = \frac{-m^3+5m-6}{3m^2-5}$; pero es $x = m + p$: luego será $x = \frac{-m^3+5m-6}{3m^2-5} + m = \frac{2m^3-6}{3m^2-5}$. Por tanto si en esta equacion se substituye $-2,6$ en lugar de m, se tendrá $x = -2,69$ valor que se aproxîma mas al verdadero de la raíz: y si se substituye en la misma equacion $-2,69$ en lugar de m, se tendra $x = -2,689095$ valor mas próxîmo al verdadero de la raíz; y continuando con el mismo método, se podrá aproxîmar mas la raíz que se busca.

Ahora para determinar las otras dos raíces imaginárias, pártase la equacion $x^3 - 5x + 6 = o$ por el factor hallado $x + 2,689095$; y se tendrá la equacion (A) $x^2 - 2,689095 \times x + 2,23123191 9025 = o$. Supóngase que ésta se compone del producto de los factores $x + a + b\sqrt{-1}$, $x + a - b\sqrt{-1}$; y multiplicándolos entre sí, se tendrá la equacion $x^2 + 2ax + a^2 + b^2 = o$ idéntica á la (A). Por tanto será $2a = -2,689095$, y $a^2 + b^2 = 2,23123191 9025$; y por medio de estas equaciones se hallará ser $a = -1,3445475$, $b = o,6583505$: luego los tres factores de la equacion propuesta serán próxîmamente $x + 2,689095 = o$, $x - 1$,

$3445475 + o, 6583505 \sqrt{-1} = o$, $x - 1, 3445475 - o, 6583505 \sqrt{-1} = o$; de donde $x = -2, 689095$, $x = 1, 3445475 - o, 6583505 \sqrt{-1}$, $x = 1, 3445475 + o, 6583505 \sqrt{-1}$.

EXEMPLO II.

602. Se pide resolver la equacion $x^4 + 12x^3 + 65x^2 + 184x + 260 = o$.

Si en la equacion propuesta se substituyen qualesquiera números positivos ó negativos en lugar de x, nunca se encontrarán resultados con signos contrarios; por consiguiente dicha equacion no tendrá raíces reales y desiguales: y respecto de que tampoco tiene raíces reales é iguales, se supondrá formada de los factores $x + a + b\sqrt{-1}$, $x + a - b\sqrt{-1}$, $x + c + e\sqrt{-1}$, $x + c - e\sqrt{-1}$, los quales multiplicados entre sí dán el producto

$$\left.\begin{array}{l} x^4 + 2ax^3 + a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 \\ \quad + 2cx^3 + b^2x^2 + 2ac^2x + a^2e^2 \\ \qquad + 4acx^2 + 2ae^2x + e^2b^2 \\ \qquad + c^2x^2 + 2b^2cx + c^2b^2 \\ \qquad + e^2x^2 \end{array}\right\} = o$$

Siendo esta equacion idéntica á la propuesta, se tendrá $2a + 2c = 12$, $a^2 + b^2 + 4ac + c^2 + e^2 = 65$, $2c \times (b^2 + a^2) + 2a \times (c^2 + e^2) = 184$, $(c^2 + e^2) \times (b^2 + a^2) = 260$, de las quales resulta ser $a = 6 - c$, $e^2 = \frac{92 - c \times (65 - 3ac - c^2)}{a - c}$, (92

$-65c+24c^2-4c^3) \times (298-209c+48c^2-4c^3)=260 \times (36-24c+4c^2)$ ó bien $16c^6-288c^5+2248c^4-9696c^3+24113c^2-32358c+18056=o$. Para determinar el valor de c, substitúyanse en lugar de c los números naturales; y se hallará que en la suposicion de $c=4$ el resultado es $=o$, y por consiguiente será 4 una de las raíces de la equacion anterior; pero $a=6-c$: luego $a=2$, y en conseqüencia $e^2=\frac{92-c \times (65-3ac-c^2)}{a-c}=4$, y $e=2$; y substituídos los valores hallados de las cantidades a, c, e en la equacion $a^2+b^2+4ac+c^2+e^2=65$, se tendrá $b^2=9$, y $b=3$. Por tanto los factores componentes de la equacion propuesta serán $x+2+3\sqrt{-1}=o$, $x+2-3\sqrt{-1}=o$, $x+4+2\sqrt{-1}=o$, $x+4-2\sqrt{-1}=o$: luego las raíces de la misma equacion serán $x=-2-3\sqrt{-1}$, $x=-2+3\sqrt{-1}$, $x=-4-2\sqrt{-1}$, $x=-4+2\sqrt{-1}$.

EXEMPLO III.

603. Se pide hallar las raíces de la equacion $x^4+12x^3+43x^2+42x+12=o$ por aproximacion.

Es claro que substituyendo en la equacion propuesta qualesquiera números positivos, los resultidos serán todos positivos. Substitúyanse, pues, los números negativos o, -1, -2, -3, -4, &c. como se figura

Diferencias quartas (E)	24, 24, 24
Diferencias terceras (D)	-36, -12, 12, 36
Diferencias segundas (C)	28, -8, -20, -8, 28
Diferencias primeras (B)	-10, 18, 10, 10, -18, 10
Resultados (A)	12, 2, 20, 30, 20, 2
Suposiciones	$x = o$, -1, -2, -3, -4, -5

y siendo positivos todos los términos de la coluna sexta, los resultados siguientes á la suposicion $x = -5$ serán positivos, y además la série será crecente. Sin embargo de que todos los resultados correspondientes á las suposiciones $x = o$. -1, &c. sean todos positivos, no se puede inferir que la equacion propuesta no tiene raíces reales y desiguales; porque puede suceder que los límites de estas raíces se diferencien en una fraccion y no en una unidad. En efecto, substituyendo sucesivamente una, dos, tres, &c. décimas, se hallará que los resultados correspondientes á las suposiciones $x = -o, 6$ y $x = -o, 8$ son negativos, y que todos los demás resultados son positivos: luego dos raíces de la equacion propuesta estarán entre los límites $-o,6$ y $-o,7$; $-o,8$ y $-o,9$. Asimismo se encontrará que las otras dos raíces de la equacion propuesta están entre los límites $-5,2$ y $-5,3$; $-5,4$ y $-5,5$. Hágase ahora $x = m + p$; y substituyendo el valor de x y sus potestades en la equacion propuesta, se tendrá $m^4 + 4m^3p + 6m^2p^2 + 4mp^3 + p^4 + 12m^3 + 36m^2p + 36mp^2 + 12p^3 + 43m^2 + 86mp + 46p^2 + 42m + 42p + 12 = o$; y omitiendo en ésta los términos en que se hallan las potestades p^2, p^3, p^4, se tendrá $m^4 + 4m^3p + 12m^3 + 36m^2p + 43m^2 + 86mp + 42m + 42p + 12 = o$, de donde resulta ser $p = \frac{-m^4 - 12m^3 - 43m^2 - 42m - 12}{4m^3 + 36m^2 + 86m + 42}$, y por consiguiente $x = m + p = \frac{3m^4 + 24m^3 + 43m^2 - 12}{4m^3 + 36m^2 + 86m + 42}$. Por tanto substituyendo sucesivamente en lugar de m los quatro límites inferiores hallados antes, se determinarán los quatro valores mas próxîmos á las quatro raíces de la equacion propuesta.

EXEMPLO IV.

604. Extraer la raíz quinta de 15 por aproxîmacion.

Llamada dicha raíz x, será $x^5 = 15$, de donde $x^5 - 15 = o$. En esta equacion substitúyanse los números naturales o, 1, 2, &c. en lugar de x, y se hallará que la raíz x está entre 1 y 2: estrechando mas estos límites, como se ha enseñado, se tendrá que el valor de x está entre $1,7$ y $1,8$. Ahora transfórmese la equacion $x^5 - 15 = o$ por medio de la substitucion $x = m + p$; y se tendrá $m^5 + 5m^4p + 10\,m^3\,p^2 + 10\,m^2\,p^3 + 5\,m\,p^4 + p^5 - 15 = o$ en quien omitiendo las potestades segunda, tercera, &c. de p, será $m^5 + 5\,m^4\,p - 15 = o$; de donde resulta $p = \frac{-m^5+15}{5m^4}$; pero $x = m + p$: luego será $x = m + \frac{15 - m^5}{5m^4} = \frac{4m^5+15}{5m^4}$. Por tanto substituyendo 1, 7 en lugar de m, se tendrá $x = 1, 71$: y substituyendo este valor en lugar de m en la misma equacion, se tendrá $x = 1, 718$ que es otro valor mas próxîmo á él de la raíz quinta del número propuesto.

PROPOSICION LXVI.

605. Hallar las raíces de qualquier equacion, que solo contiene una incógnita y otra cantidad conocida, y sus términos tienen una misma dimension.

Hágase dicha cantidad conocida igual á la unidad, y se tendrá una equacion numérica; hállense las raíces de ésta segun el método dado (599) y multiplicándolas por la cantidad dada, se tendrán las de la equacion propuesta.

EXEMPLO.

606. Sea la equacion literal $x^3 + a\,x^2 + 2a^2x$

$-5a^3 = o$ que tiene las condiciones expresadas en la Proposicion antecedente.

Hágase $a = 1$; y se tendrá la equacion numérica $x^3 + x^2 + 2x - 5 = o$. Ahora para determinar las raíces reales y desiguales contenidas en esta equacion, háganse sucesivamente las suposiciones de $x = o$, 1, 2, &c. y búsquense los resultados, como se manifiesta.

Diferencias terceras 6, 6
Diferencias segundas 8, 14, 20
Diferencias primeras 4, 12, 26, 46
Resultados . . . . . . —5,—1, 11, 37, 83
Suposiciones . . $x = o$, 1, 2, 3, 4

Por ser positivos todos los términos de la tercera coluna, serán positivos (597) todos los resultados correspondientes á las demás suposiciones; y por tener solo signos contrarios los resultados correspondientes á las suposiciones $x = 1$, $x = 2$, estará entre estos dos números una de las raíces de la equacion propuesta. Estrechando mas estos límites, se tendrá que x está entre 1, 1 y 1, 2. Hágase $x = m + p$; y la equacion propuesta se transformará en la $m^3 + 3m^2p + 3mp^2 + p^3 + m^2 + 2mp + p^2 + 2m + 2p - 5 = o$: despreciando las potestades segunda y tercera de p, se tendrá $m^3 + 3m^2p + m^2 + 2mp + 2m + 2p - 5 = o$, de donde resulta ser $p = \frac{-m^3 - m^2 - 2m + 5}{3m^2 + 2m + 2}$; pero $x = m + p$: luego será $x = \frac{2m^3 + m^2 + 5}{3m^2 + 2m + 2}$. Si en esta equacion se substituye 1, 1 en lugar de m, se hallará $x = 1, 13$, valor mas próximo al verdadero de la raíz real de la equacion numérica ; por consiguiente una de las raíces de la equacion propuesta será $a \times 1, 13$ ó bien $a + \frac{13a}{100}$. Ahora si en la referida equacion $x^3 + x^2 + 2x - 5 = o$ se substitúyen sucesivamente los números naturales negativos en lugar de x, nunca se tendrán resultados con signos contrarios, y se hallará que ellos forman una série crecente de términos negativos : y como dicha equacion no tiene las otras dos raíces reales é iguales, se supondrá que éstas resultan de los factores imaginarios $x + b + c\sqrt{-1} = o$, $x + b - c\sqrt{-1} = o$, cuyo producto es $x^2 + 2bx + b^2 + c^2 = o$. Comparando esta equacion con la $x^2 + 2, 13 \times x + 4, 4069 = o$, que resulta partiendo $x^3 + x^2 + 2x - 5 = o$ por el factor $x - 1, 13$, se hallará ser $b = 1, 065$; $c = 1, 80905$; por consiguiente dichos factores imaginarios serán $x + 1, 065 + 1, 80905 \times \sqrt{-1} = o$, $x + 1, 065 - 1, 80905 \times \sqrt{-1} = o$, de donde resulta ser $x = -1, 065 - 1, 80905 \times \sqrt{-1}$, $x - 1, 065 + 1, 80905$

$\times \sqrt{-1}$. Por tanto las tres raíces de la equacion propuesta son $x = a \times 1,13$, $x = a \times (-1,065 - 1,80905 \times \sqrt{-1})$, $x = a \times (-1,065 + 1,80905 \times \sqrt{-1})$.

PROPOSICION LXVII.

607. Si en una equacion compuesta de dos variables x, y, y de constantes, se suponen dos términos iguales; hallar todos los demás que tienen igual, mayor ó menor dimension que dichos dos términos, refiriendo solo las dimensiones de ellos á la suma de los exponentes de las mismas variables. *Fig.* 46.

Tírense las rectas AK y AL en ángulo recto, y complétese el rectángulo KL que se dividirá en iguales quadrados como la figura representa. En los quadrados insistentes sobre la recta AK escríbanse las potestades de x desde A hácia K, y en los quadrados insistentes sobre la recta AL nótense las potestades de y desde A hácia L, y en qualesquiera otros quadrados escríbase el producto de las potestades de x, y, que tienen en los quadrados que directamente les corresponden así en la recta AK como en la AL. De esta construccion resulta que no solo estarán en progresion geométrica los términos que quedan en las colunas horizontales ó verticales, sino tambien los que quedan en qualquiera recta obliqua que pasa por los centros de los quadrados, donde están escritos dichos términos: luego si qualesquiera dos términos se suponen iguales, lo serán tambien todos los que estén en la misma recta con ellos, ó lo que es lo mismo todos estos términos tendrán una misma dimension, de suerte que substituyendo en ellos el valor de x dado por y (que se sacará por medio de la equacion formada por dichos dos términos) las dimensiones de y resultarán iguales; y serán mayores las dimensiones de y en todos los términos que quedan sobre dicha recta, y menores las de los términos que quedan baxo la misma recta. Por tanto nótense en el rectángulo *K L* los quadrados, en quienes se hallan los términos de la equacion propuesta; y tírese una recta por los centros de aquellos quadrados, que contienen los dos términos que se suponen iguales en la misma equacion: se tendrá que los términos que quedan en la dicha recta son de igual dimension, y los que quedan sobre ó baxo de ella son de mayor ó menor dimension.

COROLARIO I.

608. Luego si en la equacion se supone la variable y infinitamente pequeña, serán máxîmos aquellos términos de la misma equacion que están

en el paralelógramo en una misma recta tirada de tal modo que dexen todos los demás sobre ella. Entiéndase lo mismo, quando se suponen las dos variables infinitamente pequeñas.

COROLARIO II.

609. Asímismo si en la equacion se supone la variable y infinita, serán máxîmos aquellos términos de la misma equacion, que quedan en el paralelógramo en una misma recta tirada de tal modo que dexen todos los demás baxo de ella. Entiéndase lo mismo, quando se suponen las dos variables infinitas.

ESCOLIO.

610. La Proposicion antecedente puede extenderse al caso, en que las potestades de x, y sean quebradas, con tal que se pongan en las colunas AL, AK las potestades de y, x proporcionales con las de los términos de la equacion dada. En los Corolarios antecedentes se ha supuesto que la variable y ó las dos x, y eran infinitamente pequeñas ó infinitas; pero suponiendo la sola variable x infinitamente pequeña ó infinita, se deberán colocar en la coluna vertical AL las potestades de la misma variable, como representa la *Fig.* 47.

EXEMPLO I.

611. Sea la equacion $x^2 y + a y^2 - a^2 x = o$.

I. Supóngase y infinitamente pequeña (*Fig.*46.). Notados los términos de la equacion propuesta en el paralelógramo, se tendrá que la recta, que pasa por los dos términos x, $x^2 y$, tiene superior el otro término y^2 de la equacion; por consiguiente suponiendo los dos primeros iguales, se podrá despreciar el tercero en comparacion de ellos. Tambien en la misma hipótesis se tendrá que la recta, que pasa por los dos términos y^2, x, tiene superior el otro término $x^2 y$; por consiguiente supuestos los dos primeros iguales, se podrá despreciar el tercero. Por tanto en la suposicion de y infinitamente pequeña, la equacion propuesta se reduce á las equaciones $x y - a^2 = o$, $y^2 - a x = o$.

II. Supóngase y infinita; y se tendrá que la recta, que pasa por los dos términos $y x^2$, y^2, tiene por debaxo al otro término x; por consiguiente se podrá éste despreciar en comparacion de los dos primeros. Por tanto en la suposicion de y infinita se reduce la equacion propuesta á la $x^2 y + a y^2 = o$.

III. Supóngase x infinitamente pequeña (*Fig.*47): y se tendrá que la recta, que pasa por los dos términos y^2, x, tiene superior á ella el otro término $x^2 y$; por consiguiente se podrá éste despreciar en comparacion de los dos primeros. Por tanto en dicha suposicion se reduce la equacion propuesta á la $a y^2 - a^2 x = o$.

IV. Finalmente supóngase x infinita; y considerando como antes la situacion del paralelógramo, se tendrá en virtud del método expresado en la suposicion segunda que la equacion propuesta se reduce á las equaciones $x^2 y - a^2 x = o$, $x^2 y + a y^2 = o$.

EXEMPLO II.

612. Sea la equacion $y^7 - a y^5 x - y^4 x^3 + a^2 y x^4 - a x^6 = o$.

I. Supóngase la variable y infinitésima. Notados los términos de la equacion propuesta en el paralelógramo KL (*Fig.*46.) se tendrá que la recta, que pasa por los términos x^6, $y x^4$, dexa todos los demás superiores á ella; por consiguiente la equacion propuesta se reduce á la $a^2 y x^4 - a x^6 = o$. Por igual razon se hallará $y^7 - a y^5 x = o$, $- a y^5 x + a^2 y x^4 = o$.

II. Si se supone la variable y infinita; la recta que pasa por los términos y^7, $y^4 x^3$, dexa todos los demás inferiores á ella; por consiguiente la equacion propuesta se reducirá á la $y^7 - y^4 x^3 = o$. Con el mismo método se hallará $- y^4 x^3 - a x^6 = o$.

III. Si se supone la variable x infinitésima (*Fig.* 47) se tendrá que la recta, que pasa por los términos y^7, $y^5 x$, dexa todos los demás superiores á ella; por consiguiente la equacion propuesta se reduce á la $y^7 - a y^5 x = o$. Asímismo se encontrará ser $-ay^5x + a^2y\,x^4 = o$, $a^2yx^4 - ax^6 = o$.

IV. Finalmente supóngase la variable x infinita; y se tendrá que la recta, que pasa por los términos x^6, $y^4 x^3$, dexa todos los demás inferiores á ella; por consiguiente la equacion propuesta se reduce á la $a x^6 + y^4 x^3 = o$. Tambien valdrá la equacion $y^7 - y^4 x^3 = o$.

EXEMPLO III.

613. Sea la equacion $x^2 y^2 + a x y^2 + b x^2 y + c x^3 + d^2 x y + e^2 x^2 + f^3 y = o$.

I. Si se supone y infinitésima; notados los términos de la equacion dada en el paralelógramo $K L$ (*Fig.* 46) se tendrá que la recta, que pasa por los dos términos x^2, y, dexa todos los demás superiores á ella: lo mismo sucede respecto á la recta que pasa por los dos términos x^3, x^2. Por tanto la equacion dada se reduce á las $e^2 x^2 + f^3 y = o$, $c x^3 + e^2 x^2 = o$.

II. Si se supone y infinita; se tendrá que la recta, que pasa por los términos y, $x y^2$, dexa todos los demás inferiores á ella: lo mismo sucede respecto á la recta que pasa por los dos términos $x y^2$, $x^2 y^2$, como tambien á la que pasa por los dos $x^2 y^2$, x^3: luego la equacion propuesta se reduce á las tres siguientes $a x y^2 + f^3 y = o$, $a x y^2 + x^2 y^2 = o$, $x^2 y^2 + c x^3 = o$.

III. Supóngase x infinitésima; y mudada la situacion del paralelógramo $K L$ como se representa en la *Fig.*47. se hallará que la equacion propuesta se reduce á las $a x y^2 + f^3 y = o$, $e^2 x^2 + f^3 y = o$.

IV. Finalmente supuesta x infinita, se reduce la equacion propuesta á la $x^2 y^2 + x^3 = o$.

PROPOSICION LXVIII.

614. Dada una equacion compuesta de dos variables x, y, y constantes, determinar el valor de una de ellas por una série compuesta de la otra variable y de las constantes.

Es claro que la fórmula general del valor de una de las variables, como y, dado por una série formada de la otra x, y constantes, tendrá esta expresion $y = a x^m + b x^n + c x^h + d x^r +$ &c. en quien los exponentes crecen ó decrecen segun sea la série crecente ó decrecente, y las cantidades a, b, c, d, &c. expresan los coeficientes de los respectivos términos.

I. Si se pide hallar el valor de la incógnita y

por una série crecente; supóngase x infinitamente pequeña, y en esta suposicion se reducirá la referida série al solo primer término $a x^m$; por consiguiente será $y = a x^m$. Para hallar este término, colóquese la equacion dada en paralelógramo, cuya coluna verticál (*Fig.* 47.) contenga las potestades de x; despues hállense los términos máximos de la misma equacion en la hipótesis de x infinitésima, los quales serán iguales á cero, y por medio de esta equacion determínese el valor de la variable y por la otra x; y se tendrá el primer término de la série que se busca.

Para determinar el segundo término $b x^n$ de la referida série, supóngase que z expresa la suma de los términos $b x^n + c x^h + d x^r +$ &c. y se tendrá $y = a x^m + z$: substituído este valor de y en la equacion dada, se transformará en otra (B) compuesta de las variables x, z. Colóquese esta equacion en el paralelógramo, y en la hipótesis de x infinitèsima hállese segun el método expresado antes el valor de z dado por x; y se tendrá el segundo término $b x^n$ de la série.

Para determinar el tercer término $c x^h$ de la série, supóngase que u expresa la suma de los términos $c x^h + d x^r +$ &c. por consiguiente será $z = b x^n + u$: substituído este valor de z en la equacion (B) se tendrá otra compuesta de las variables x, u. Colóquese esta equacion en el paralelógramo, y en la hipótesis de x infinitésima hállese el valor de u dado por x; y este valor dará el tercer término $c\,x^h$. Del mismo modo se determinarán el quarto y los siguientes términos de la série hasta el último, si la série es finita; y si la série es infinita, se aproximará el valor de y tanto quanto se quisiese.

II. Si se pide hallar el valor de la incógnita y por una série decrecente; se supondrá x infinita, y se harán las mismas operaciones indicadas en el caso anterior para hallar los términos de la série.

ESCOLIO.

615. Si las referidas equaciones que se colocan en el paralelógramo se reducen á dos ó mas equaciones, por las quales se determinan dos ó mas valores de y, z, u, &c. se tendrá el valor de y expresado por dos ó mas séries. Tambien es de advertir que despues de haber determinado el primero, ó los primeros términos de las referidas séries, se considerarán aquellas equaciones reducidas que dán tales valores de z, u, &c. que los exponentes de x crescan sucesivamente, si las séries son crecentes, ó disminuyan siendo las séries decrecentes:

ahora si sucede que no se encuentren tales valores, las séries serán finitas.

EXEMPLO I.

616. Dada la equacion $ay^3 - x^3y - ax^3 = o$, se pide hallar el valor de y dado por x en una série crecente.

Colóquese la equacion propuesta en el paralelógramo que tenga las potestades de x en la coluna verticál (*Fig.* 47.); y se hallará que la misma equacion en la hipótesis de x infinitésima se reduce á la $ay^3 - ax^3 = o$, de donde resulta ser $y = x$ primer término de la série que se busca. Para tener el segundo término de esta série, substitúyase $x + z$ en lugar de y en la equacion dada; por lo que se transformará ésta en la (B) $3azx^2 + 3az^2x + az^3 - x^4 - x^3z = o$. Ahora dispuesta esta equacion en el paralelógramo (en quien se considerará la y como si fuese la z) se hallará que se reduce á las dos equaciones $az^3 + 3az^2x + 3azx^2 = o$, $3azx^2 - x^4 = o$: la primera de éstas es inútil, porque dá el valor de z por x, de suerte que el exponente de éste no es mayor que él hallado en la suposicion antecedente: por la segunda equacion se tiene $z = \frac{x^2}{3a}$, que será el segundo término de la série. Para determinar el tercero, se substituirá

$\frac{x^2}{3a} + u$ en lugar de z en la equacion (B); por lo que se tendrá la (C) $3\,a\,u\,x^2 + u\,x^3 + 3\,a\,u^2\,x + \frac{x^6}{27a^2} + \frac{u x^4}{3a} + u^2\,x^2 + a\,u^3 = o$. Dispuesta ésta en el paralelógramo (en quien se considerará la y como si fuese la u) se hallará que se reduce á las dos equaciones $a\,u^3 + 3au^2x + 3aux^2 = o$, $3\,a\,u\,x^2 + \frac{x^6}{27a^2} = o$: la primera de éstas es inútil, porque se tiene la u por la x lineal: pero la segunda dá $u = -\frac{x^4}{81a^3}$, que será el tercer término de la série. Ahora si la equacion (C) se transforma por medio de la substitucion $u = -\frac{x^4}{81a^3} + p$, con el mismo método se hallará ser $p = \frac{x^6}{3^7 a^5}$, que será el quarto término de la série; y así sucesivamente. Por tanto siendo $y = x + z$, $z = \frac{x^2}{3a} + u$, $u = -\frac{x^4}{3^4a^3} + p$, &c. será $y = x + \frac{x^2}{3a} - \frac{x^4}{3^4a^3} +$ &c. Es evidente que esta série será tanto mas convergente, quanto x sea menor que a; y que por medio de la misma série se tendrá por aproximacion el valor de una de las raíces y de la equacion dada compuesta de tres letras, con tal que la cantidad x que puede expresar qualquier cantidad conocida sea menor que la otra a.

EXEMPLO II.

617. Sea propuesta la equacion $y^2 - 2xy + x^2 - 2ay + ax + a^2 = o$; hallar el valor de y dado por x en una série crecente.

Colóquese la equacion propuesta en el paralelógramo, que tenga las potestades de x (*Fig.*47.) en la coluna verticál; y se hallará que la misma equacion en la hipótesis de x infinitésima se reduce á la $y^2 - 2ay + a^2 = o$, de donde resulta ser $y = a$ primer término de la série que se busca. Para determinar el segundo, substitúyase $a + z$ en lugar de y en la equacion propuesta, que se transformará en (B) $z^2 - ax - 2zx + x^2 = o$. Colocada esta equacion en el paralelógramo, se hallará que en la hipótesis de x infinitésima se reduce á la $z^2 - ax = o$, de donde resulta ser $z = \pm \sqrt{ax} = \pm a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$ segundo término de la série. Substitúyase ahora en la equacion (B) $\pm a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + u$ en lugar de z, y se transformará en (C) $\pm 2 a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} u + u^2 \mp 2 a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} - 2ux + x^2 = o$. Colóquese esta equacion en el paralelógramo construído del modo que se ha indicado (610) y se hallará que en la hipótesis de x infinitésima se reduce á las dos equaciones $u^2 \pm 2 a^{\frac{1}{2}} u x^{\frac{1}{2}} = o$, $\pm 2 a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} u \mp 2 a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = o$: la primera de éstas es inútil, y la segunda dá $u = x$ tercer término de la série. Para tener el quarto término, substitúyase en la equacion (C) la cantidad $x + t$ en lugar de u; por lo que se transformará en la $\pm 2 a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} t + t^2 = o$: esta equacion es inútil, porque dá el valor de t por la x elevada á una potestad menor que la antecedente; por consiguiente se terminará la série. Por tanto siendo $y = a + z$, $z = \pm a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + u$, $u = x$, será $y = a \pm a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + x$.

EXEMPLO III.

618. Propuesta la equacion $x^3 + x^2 y + a y^2 - 2 a^2 y + a^3 = o$, se pide hallar el valor de y por una série crecente formada de las potestades de x.

Colóquese la equacion propuesta en el paralelógramo (*Fig.* 47.) cuya coluna verticál contenga las potestades de x; y en la hipótesis de x infinitésima se hallará que dicha equacion se reduce á la $a y^2 - 2 a^2 y + a^3 = o$; por consiguiente será $y = a$ primer término de la série que se busca. Hágase ahora $y = a + z$; por lo que se transformará la equacion propuesta en la $x^3 + a x^2 + x^2 z + az^2 = o$. Colocada ésta en el paralelógramo, se hallará que en la hipótesis de x infinitésima se reduce á la $a z^2 + a x^2 = o$, de donde resulta $z = \pm \sqrt{- x^2}$ valor siempre imaginario, sea x positiva ó negativa. Por tanto no puede expresarse el valor de la y por una série real.

EXEMPLO IV.

619. Dada la equacion $x^2 y + a y^2 - 2 a x y + a x^2 = o$, se pide hallar el valor de la y por una série crecente formada de las potestades de x.

Colóquese la equacion dada en el paralelógramo, cuya coluna verticál (*Fig.* 47.) contenga las potestades de x; y se hallará que en la suposicion de x infinitésima se reduce á la $a y^2 - 2 a x y + a x^2 = o$, de donde resulta ser $y = x$ primer término de la série que se busca. Hágase ahora $y = x + z$; y substituído el valor de y en la equacion propuesta, se tendrá la transformada (B) $x^3 + x^2 z + a z^2 = o$. Colóquese ésta en el paralelógramo; y se hallará que se reduce á la $a z^2 + x^3 = o$; de donde resulta ser $z = \pm\sqrt{-\frac{x^3}{a}}$, valor real ó imaginário, segun sea x negativa ó positiva. Para determinar el tercer término de la série, substitúyase $u \pm \sqrt{-\frac{x^3}{a}}$ en lugar de z en la equacion (E), y se tendrá la $x^2 u + a u^2 \pm a^{-\frac{1}{2}} \times (-x)^{\frac{7}{2}} \pm 2 a^{\frac{1}{2}} u \times (-x)^{\frac{3}{2}} = o$. Colóquese esta equacion en el paralelógramo; y se hallará que en la hipótesis de x infinitésima se reduce á las dos siguientes $a u^2 \pm 2 a^{\frac{1}{2}} u \times (-x)^{\frac{3}{2}} = o$, $\pm 2 a^{\frac{1}{2}} u \times (-x)^{\frac{3}{2}} \pm a^{-\frac{1}{2}} \times (-x)^{\frac{7}{2}} = o$: la primera de estas equaciones es inútil, y la segunda dá $u = -\frac{x^2}{2a}$ tercer término de la série. Por tanto será $y = x + \sqrt{-\frac{x^3}{a}} - \frac{x^2}{2a} + \text{\&c.}$ como tambien $y = x - \sqrt{-\frac{x^3}{a}} - \frac{x^2}{a^2} + \text{\&c.}$ Estas séries son imaginarias, si x es positiva; pero siendo x negativa, serán reales.

ESCOLIO.

620. El método explicado en la Proposicion antecedente es útil para resolver los Problemas que dependen del Retórno de las séries; esto es, quando se dá el valor de una variable por una série for-

mada de las potestades de la otra, ó bien quando se dá una equacion, cuyo primer miembro consiste en una série compuesta de una variable, y el segundo en otra série compuesta de otra variable, y se pide hallar el valor de una de dichas variables por una série formada de la otra variable. Asímismo es útil el referido método para reducir á séries las cantidades así racionales como irracionales. Es de advertir que hallada la ley de los exponentes en la série que se busca, como por exemplo $y = Ax^m + Bx^n + Cx^d + Dx^h + Ex^r$ + &c. en quien m, n, d, h, r, &c. son números conocidos que forman una determinada série ó desde el primero, ó desde el segundo, ó desde el tercero, &c. se determinarán los coeficientes A, B, C, D, E, &c. substituyendo en la equacion dada la referida série en lugar de y, y en la equacion transformada suponiendo igual á cero la suma de todos los términos que contienen una misma dimension de y; con lo que se tendrán particulares equaciones, de quienes la primera dará el valor de A, la segunda él de B, y así sucesivamente.

EXEMPLO I.

621. Sea la variable y igual á una série convergente formada de las potestades de x, como $y=ax$

$+bx^2+cx^3+dx^4+$ &c. y se pida hallar el valor de x en una série crecente compuesta de las potestades de y.

Supuesta y infinitamente pequeña, y hechas las operaciones indicadas en la Proposicion antecedente, se hallará que las dimensiones de y en los términos de la série que se busca serán 1, 2, 3, 4, &c. Por tanto se deberá suponer $x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 +$ &c. y substituído el valor de x en la série propuesta, se tendrá

$$
\begin{array}{lllll}
ax & = aAy & + aBy^2 & + aCy^3 & + \&c. \\
+bx^2 = & & + bA^2y^2 & + 2bABy^3 & + \&c. \\
+cx^3 = & & & + cA^3y^3 & + \&c. \\
+\&c. & & & & + \&c. \\
-y & = -y & & &
\end{array}
$$

Por ser $ax + bx^2 + cx^3 +$ &c. $- y = o$, el segundo miembro será igual á cero: y como las cantidades A, B, C, &c. son indeterminadas, se podrá suponer $aA - 1 = o$, $aB + bA^2 = o$, $aC + 2bAB + cA^3 = o$, &c. y por medio de estas equaciones se hallará $A = \frac{1}{a}$, $B = -\frac{b}{a^3}$, $C = \frac{2b^2 - ac}{a^5}$, &c. luego será $x = \frac{y}{a} - \frac{b}{a^3} \times y^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^5} \times y^3 -$ &c.

EXEMPLO II.

622. Dada una equacion formada de dos séries convergentes iguales, como $ax+bx^2+cx^3+dx^4$ + &c. $=ey+fy^2+gy^3+hy^4+$ &c. se pide hallar el valor de y por x en una série crecente.

Supuesta x infinitamente pequeña, y hechas las operaciones indicadas en la Proposicion antecedente, se hallará que las dimensiones de x en los términos de la série que se busca son 1,2,3,4, &c. Ahora supóngase $y=Ax+Bx^2+Cx^3+Ex^4+$ &c. y substituído el valor de y en la equacion dada, se tendrá

$$\begin{array}{llll}
ey = & eAx + eBx^2 & + eCx^3 & + \&c. \\
+fy^2 = & +fA^2x^2 & +2fABx^3 & + \&c. \\
+gy^3 = & & +gA^3x^3 & + \&c. \\
+ \&c. & & & + \&c. \\
-ax = & -ax & & \\
-bx^2 = & -bx^2 & & \\
-cx^3 = & & -cx^3 & \\
-\&c. = & & & -\&c.
\end{array}$$

Por ser el primer miembro de esta equacion igual á cero, lo será tambien el segundo: y como las cantidades A, B, C, &c. son indeterminadas, se podrá suponer $eA-a=0$, $eB+fA^2-b=0$, $eC+2fAB+gA^3-c=0$, &c. y por medio de estas equaciones se tendrá $A=\frac{a}{e}$, $B=\frac{be^2-fa^2}{e^3}$,

$C = \frac{ce^4 - 2abe^2f - ga^3e + 2f^2a^3}{e^5}$, &c. luego será $y = \frac{a}{e} \times x + \frac{be^2 - fa^2}{e^3} \times x^2 + \frac{ce^4 - 2abe^2f - ga^3e + 2f^2a^3}{e^5} \times x^3$ + &c.

EXEMPLO III.

623. Se pide transformar la cantidad $\frac{1}{a+x}$ en una série crecente formada de las potestades de x, supuesta x menor que a.

Hágase $\frac{1}{a+x} = y$, y se tendrá $ay + xy - 1 = 0$. Colocada esta equacion en el paralelógramo, y hechas las demás operaciones indicadas en la Proposicion antecedente, se hallará que en la hipótesis de x infinitésima las dimensiones de ésta en los términos de la série que se busca son $0, 1, 2, 3, 4$,&c. Por tanto se supondrá $\frac{1}{a+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ + &c. luego multiplicando esta equacion por $a+x$, y trasponiendo la unidad al otro miembro, será

$$0 = \begin{cases} aA + aBx + aCx^2 + aDx^3 + \&c. \\ -1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \&c. \end{cases}$$

Hágase $aA - 1 = 0$, $aB + A = 0$, $aC + B = 0$, $aD + C = 0$, &c. y por medio de estas equaciones se tendrá $A = \frac{1}{a}$, $B = -\frac{1}{a^2}$, $C = \frac{1}{a^3}$, $D = -\frac{1}{a^4}$, &c. luego será $\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4}$ + &c.

EXEMPLO IV.

624. Se propone reducir la cantidad $(a+x)^{\frac{1}{2}}$ á série, en quien es $x < a$.

Hágase $(a+x)^{\frac{1}{2}} = y$; elevando ambos miembros al quadrado, se tendrá $a+x=y^2$, de donde resulta ser $a+x-y^2=0$. Colocada esta equacion en el paralelógramo en la hipotésis de x infinitésima, y hechas las demás operaciones referidas en la Proposicion antecedente, se hallará que las potestades de x en los términos de la série que se busca son $0, 1, 2, 3, 4$, &c. Por tanto se deberá suponer $(a+x)^{\frac{1}{2}} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.$ quadrando ambos miembros de esta equacion será

$$a+x = A^2 + 2ABx + 2ACx^2 + 2ADx^3 \atop \qquad\qquad\quad + B^2x^2 + 2BCx^3 + \&c.$$

y trasponiendo todos los términos en el segundo miembro se tendrá

$$0 = \begin{cases} A^2 + 2ABx + 2ACx^2 + 2ADx^3 \\ -a - x + B^2x^2 + 2BCx^3 \end{cases} + \&c.$$

luego será $A^2 - a = 0$, $2AB - 1 = 0$, $2AC + B^2 = 0$, $2AD + 2BC = 0$, &c. y por medio de estas equaciones se hallará $A = \sqrt{a}$, $B = \frac{1}{2\sqrt{a}}$, $C = -\frac{1}{8a\sqrt{a}}$, $D = \frac{1}{16a^2\sqrt{a}}$, &c. pero $(a+x)^{\frac{1}{2}}$

$= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ &c. luego será $(a+x)^{\frac{1}{2}}$ $= \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}} \times x - \frac{1}{8a\sqrt{a}} \times x^2 + \frac{1}{16a^2\sqrt{a}} \times x^3$ $-$ &c.

EXEMPLO V.

625. Se ha de reducir la cantidad $\frac{\sqrt{(a+x)}}{\sqrt{(b+cx+dx^2)}}$ á série, siendo x menor que cada una de las cantidades a, b, c, d.

Supóngase $\frac{\sqrt{(a+x)}}{\sqrt{(b+cx+dx^2)}} = A + Bx + Cx^2$ $+ Dx^3 +$ &c. quadrando ambos miembros, será

$$\frac{a+x}{b+cx+dx^2} = \begin{array}{l} A^2 + 2ABx + 2ACx^2 + 2ADx^3 \\ \qquad\qquad\quad + B^2x^2 + 2BCx^3 \end{array} + \&c.$$

multiplicando toda la equacion por $b+cx+dx^2$, será

$$\begin{array}{rl} a+x = & A^2b + 2ABbx + 2ACbx^2 + 2BCbx^3 + \&c. \\ & + A^2cx + B^2bx^2 + 2ADbx^3 \\ & \qquad + 2ABcx^2 + B^2cx^3 \\ & \qquad + A^2dx^2 + 2ACcx^3 \\ & \qquad\qquad + 2ABdx^3 \end{array}$$

y trasponiendo los términos del primer miembro al segundo, será

$$o = \left\{ \begin{array}{l} A^2b + 2ABbx + 2ACbx^2 + 2BCbx^3 + \&c. \\ -a + A^2cx + B^2bx^2 + 2ADbx^3 \\ \quad - \quad x \quad + 2ABcx^2 + B^2cx^3 \\ \qquad\qquad + A^2dx^2 + 2ACcx^3 \\ \qquad\qquad\qquad + 2ABdx^3 \end{array} \right.$$

Por tanto se podrá suponer $A^2 b - a = o$, $2ABb + A^2 c - 1 = o$, $2ACb + B^2 b + 2ABc + A^2 d = o$, $2BCb + 2ADb + B^2 c + 2ACc + 2ABd = o$, &c. y por medio de estas equaciones se hallará $A = \frac{\surd a}{\surd b}$, $B = \frac{b - ac}{2b\surd ab}$, $C = -\frac{(b-ac)^2}{8ab^2\surd ab} - \frac{c\times(b-ac)}{2b^2\surd ab} - \frac{ad}{2b\surd ab}$, $D = \frac{b+ac}{4ab^2} \times \left[\frac{(b-ac)^2}{4ab\surd ab} + \frac{c\times(b-ac)}{b\surd ab} + \frac{ad}{\surd ab}\right] - \frac{(b-ac)^2}{4b^2 a} \times \frac{c}{2b\surd ab} - \frac{db-acd}{2b^2\surd ab}$, &c. luego será $\frac{\surd(a+x)}{\surd(b+cx+dx^2)} = \frac{\surd a}{\surd b} + \frac{b-ac}{2b\surd ab} \times x - \left[\frac{(b-ac)^2}{8ab^2\surd ab} + \frac{c\times(b-ac)}{2b^2\surd ab} + \frac{ad}{2b\surd ab}\right]x^2 + \left[\frac{b+ac}{4ab^2} \times \left(\frac{(b-ac)^2}{4ab\surd ab} + \frac{c\times(b-ac)}{b\surd ab} + \frac{ad}{\surd ab}\right) - \frac{(b-ac)^2}{4b^2 a} \times \frac{c}{2b\surd ab} - \frac{db-acd}{2b^2\surd ab}\right] \times x^3 + $ &c.

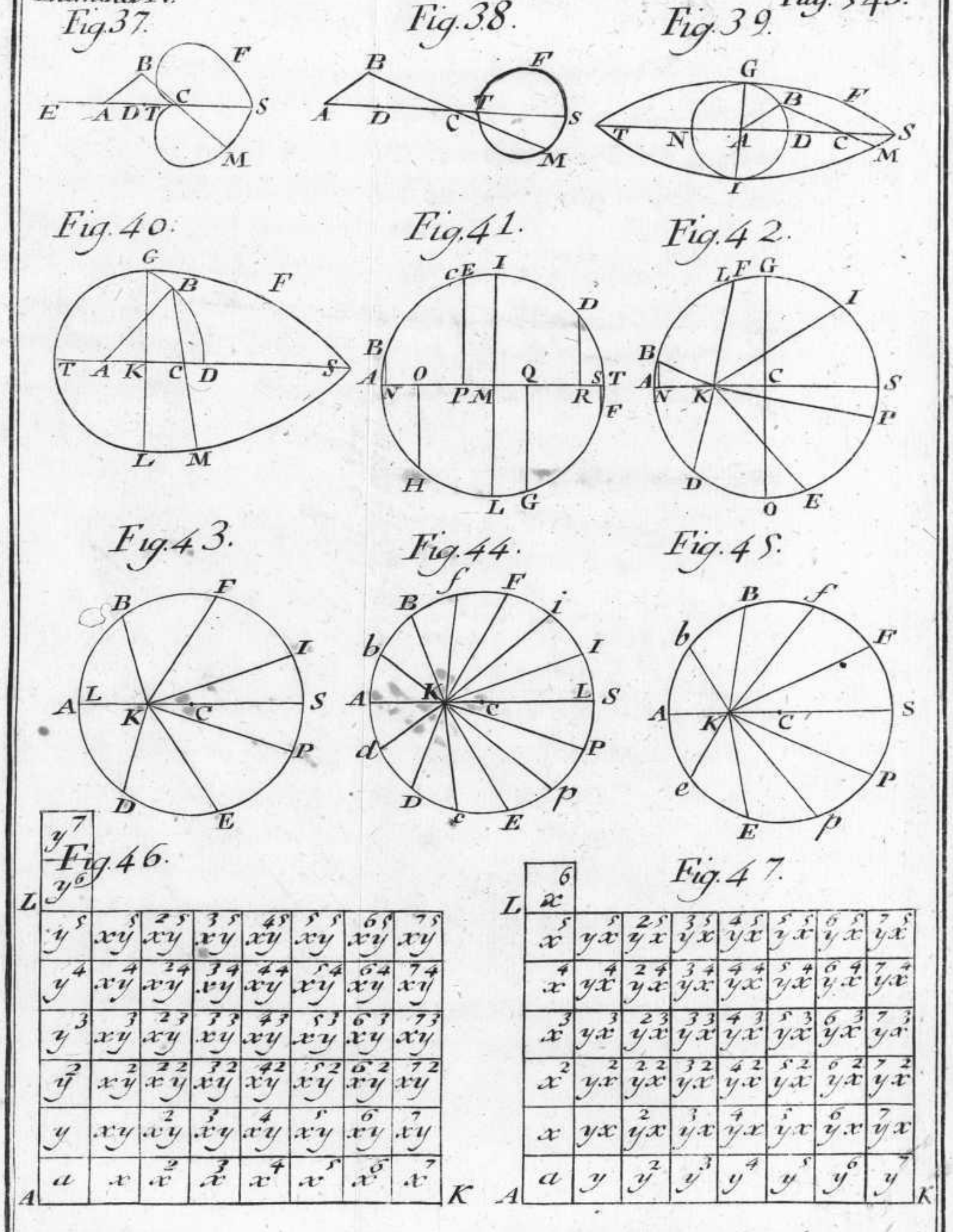


Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.

LIBRO III.

DEFINICIONES.

626. LOS Problemas son del primer grado, segundo, &c. segun sea la equacion que los resuelve.

627. Los Problemas se llaman Determinados, quando el número de las equaciones, que expresan las condiciones de ellos, es igual al número de las incógnitas que contienen: y si el número de dichas equaciones es menor ó mayor que él de las incógnitas, los Problemas se llaman Indeterminados ó mas que determinados.

628. Los Problemas se dicen Aritméticos ó Geométricos, segun que se refieren á la Aritmética ó á la Geometría.

ESCOLIO.

629. Para resolver qualquier Problema aritmético ó geométrico, se nombrarán antes las cantidades incógnitas que contiene con las últimas letras del alfabéto, y las conocidas, si fuere menester, con las primeras; y considerando las cantidades incógnitas como conocidas, se expresarán todas las condiciones del Problema con otras tantas

equaciones. Sucede particularmente en las qüestiones pertenecientes á números ó á cantidades abstractas que expresando el sentido de ellas en idióma algébrico, se presentan por sí las equaciones que conducen á la resolucion de las mismas qüestiones: pero en los Problemas geométricos muchisimas veces se necesitan algunos artificios; y respecto á que no pueden darse reglas ciertas para llegar á las equaciones por medio de las condiciones de los Problemas, se darán bastantes exemplos en este libro.

Del uso del Cálculo para resolver los Problemas Aritméticos.

PROBLEMA I.

630. Un trén de Artillería ha hecho 21 leguas de camino en 5 dias ¿quántos dias tardará en 127 leguas?

Suponiendo la dificultad del camino, y todas las demás cosas iguales, es evidente que si el trén ha hecho 21 leguas en 5 dias, hará 42 en 10 dias, 63 en 15, y así sucesivamente; por consiguiente las leguas tendrán entre sí la misma razon de la que tienen los correspondientes dias, esto es, $21 : 42 = 5 : 10$, $21 : 63 = 5 : 15$, y respecto á la qüestion propuesta serán 21 leguas á 127 como 5 dias al número que se busca: luego por ser este número un quarto proporcional á 21, 127 y 5, se tendrá que es igual (288) al producto de 127 por 5 partido por 21, cuyo quociente es $30\frac{5}{21}$. Por tanto el número de dias, que empleará el trén para caminar 127 leguas, será $30\frac{5}{21}$.

PROBLEMA II.

631. Quarenta y dos hombres han hecho 91 varas de excavacion en un cierto tiempo ¿ quántos serán necesarios para 468 varas en un tiempo igual?

Suponiendo igual la calidad de las tierras y todo lo demás, es claro que si 42 hombres han hecho 91 varas de excavacion, 84 hombres harán 182 varas, y así sucesivamente se aumentará el número de los hombres á proporcion de las varas de excavacion: luego serán 91 varas de excavacion á 468 como 42 hombres al número de hombres que se necesitan para la excavacion de 468 varas; por consiguiente siendo este número el quarto proporcional á los tres dados 91, 468 y 42, se tendrá multiplicando 468 por 42, y partiendo el producto por 91, de lo que resulta el quociente 216. Por tanto el número de los hombres que se busca será 216.

PROBLEMA III.

632. A razon de 3 por 100, quánto darán de ganancia 3591 pesos?

Consta por la naturaleza de la qüestion que si 100 pesos dán 3 de rédito, 200 darán 6, y así sucesivamente: luego serán 100 pesos á 3591 como 3 al rédito que darán los 3591. Por tanto siendo este rédito el quarto proporcional á los tres números 100, 3591 y 3, será igual á $\frac{3 \times 3591}{100} = 107, 73$, esto es 3591 pesos darán de ganancia 107 pesos y 73 centésimas de peso.

ESCOLIO.

633. Los tres Problemas antecedentes se reducen á buscar un número que sea quarto proporcional á tres dados. La operacion que se hace para resolver semejantes Problemas se llama Regla de Tres directa y simple.

PROBLEMA IV.

634. Ochenta hombres en 7 meses han hecho la séptima parte de una Fortificacion; se pide hallar la parte que harán 197 hombres en 18 meses.

Porque ochenta hombres en 7 meses han hecho la séptima parte de una Fortificacion, claro está que la misma parte se hubiera hecho por 7 veces 80 hombres, esto es 560, en un mes, si todos ellos hubieran trabajado igualmente. Por igual razon 197 hombres en 18 meses harán la misma parte de Fortificacion que 18 veces 197, esto es 3546, en un mes. Por tanto la qüestion propuesta se reduce á la regla de Tres directa y simple; es á saber que si 560 hombres han hecho la séptima parte de una fortificacion ¿qué parte harán de ella 3546 hombres en un mismo tiempo? luego la parte que se busca será quarta proporcional á 560, 3546 y $\frac{1}{7}$; y hecho el cálculo se hallará ser igual á $\frac{1773}{1960}$ de toda la fortificacion.

PROBLEMA V.

635. Un trén de Artillería ha hecho 54 leguas en 18 dias; se pide hallar las que hará en 26 dias, suponiendo que en los 18 dias anduvo á 6 horas por dia, y que en estos 26 ha de andar 8 horas por dia.

El trén de Artillería andando 6 horas por cada dia, hará en 18 dias el mismo camino que haría en 6 veces 18, esto es en 108 dias, caminando una hora por dia: igualmente el trén de Artillería andando 8 horas en 26 dias hará el mismo camino que haría en 8 veces 26, esto es en 208 dias, caminando una hora por dia. Por tanto la qüestion propuesta se reduce á la regla de Tres directa y simple ; esto es, que si el trén de Artillería ha hecho 54 leguas en 108 dias, caminando una hora por dia ¿quántas hará en 208 dias caminando la misma hora? Luego el número de leguas que se busca será quarto proporcional á los tres 108, 208 y 54 ; por consiguiente será igual á $\frac{208 \times 54}{108} = 104$.

ESCOLIO.

636. Obsérvese que en los dos Problemas antecedentes se dán mas de tres números, y estos por la naturaleza de la qüestion se reducen á tres; y se busca otro número que tambien por la naturaleza de la qüestion debe ser quarto proporcional á los tres reducidos: la operacion que se hace para resolver semejantes Problemas se llama Regla de Tres directa y compuesta. A esta clase de Problemas se reducen tambien las qüestiones, en quienes se dán mas de tres números y éstos por la naturaleza de la qüestion se reducen á quatro, como A, B, C, G, y se busca otro x que tambien por la naturaleza de la qüestion debe ser multiplicado por G, de suerte que las cantidades A, B, C, $G \times x$ sean proporcionales : en este caso el número que se busca x será igual á $\frac{B \times C}{A \times G}$, esto es, igual al pro-

ducto de los dos medios dados partido por el producto de los dos extremos tambien dados; porqué siendo $A : B = C : G \times x$, será $A \times G \times x = B \times C$, y partiendo por $A \times G$, se tendrá $x = \frac{B \times C}{A \times G}$.

PROBLEMA VI.

637. Siete Regimientos tienen víveres para quatro meses, si se aumentan otros dos Regimientos ¿quántos meses durarán los víveres?

Es evidente que siendo los víveres los mismos, á proporcion que se aumentan los Regimientos, se disminuirá el tiempo en que se gastarán dichos víveres; esto es, si 7 Regimientos tienen víveres para quatro meses, 14 Regimientos tendrán víveres para dos meses, y así será $7 : 14 = 2 : 4$: luego respecto á la qüestion propuesta serán proporcionales los números, esto es, 7, 9, el tiempo en que durarán los víveres para los nueve Regimientos, y 4 meses; por consiguiente el tiempo que se busca será (288) igual al producto de 4 por 7 partido por 9, cuyo quociente es $3\frac{1}{9}$. Por tanto los víveres, que tenían los siete Regimientos para quatro meses, durarán á los nueve Regimientos tres meses y una novena parte de mes.

PROBLEMA VII.

638. Sesenta obreros han hecho cierta obra en 9 dias; se pide hallar el número de dias que necesitarán 18 obreros para hacer la misma obra.

Mientras menor sea el número de obreros, mayor ha de ser el número de dias para hacer una misma obra: luego será 60 á 18, como el número de dias que necesitan estos 18 obreros á 9 dias; por consiguiente dicho número será igual al producto de 60 por 9 partido por 18, cuyo quociente es 30. Por tanto los 18 obreros necesitan 30 dias para hacer aquella misma obra que hicieron los 60 obreros en 9 dias.

ESCOLIO.

639. Con el mismo método se resolverán todas aquellas qüestiones, en quienes se dán tres números, y se busca otro que debe ser el tercero ó el segundo término proporcional entre los tres dados. La operacion que se hace para resolver tales qüestiones se llama Regla de Tres inversa y simple.

PROBLEMA VIII.

640. Veinte hombres trabajando 8 horas por dia han hecho cierta obra en 15 dias; trabajando 30 dias á 10 horas cada dia, para hacer la misma obra

¿quántos hombres serán necesarios?

Es claro que un trabajo de 15 dias á 8 horas cada dia es el mismo que un trabajo de 8 veces 15, esto es 120 dias, á hora por dia: igualmente un trabajo de 30 dias á 10 horas por dia es el mismo que un trabajo de 10 veces 30, esto es 300 dias, á hora por dia. Por tanto la qüestion propuesta está reducida á la siguiente: si 20 hombres han hecho en 120 dias una cierta obra; para hacer la misma obra en 300 dias ¿quántos serán necesarios? Como á proporcion que se aumenta el número de dias, se ha de disminuir él de los hombres, la qüestion reducida pertenecerá á la Regla de Tres inversa y simple, y se tendrá el número de hombres que se busca, multiplicando 120 por 20, y partiendo el producto 2400 por 300, cuyo quociente es 8. Por tanto si 8 hombres trabajan 30 dias á 10 horas cada dia, harán la misma obra que 20 hombres, trabajando 15 dias á 8 horas por dia.

PROBLEMA IX.

641. Con 4 Cañones se han hecho 320 tiros en 5 minutos; se pide hallar el tiempo en que se harán 700 tiros con 7 cañones.

Obsérvese que 4 cañones en 5 minutos harán los 320 tiros, como harían 5 veces 4 cañones, esto es 20, en un minuto: igualmente 7 cañones en el tiempo x que se busca harán los 700 tiros, como harían x veces 7 cañones, esto es $7x$, en un minuto: luego serán proporcionales los números $20 : 7 \times x = 320 : 700$, de donde resulta ser $7 \times x = \frac{20 \times 700}{320} = \frac{1400}{32}$; y partiendo por 7, se tendrá $x = \frac{200}{32} = 6\frac{1}{4}$. Por tanto el tiempo que se busca será 6 minutos y 15 segundos.

ESCOLIO.

642. Del mismo modo se resolverán todos los Problemas semejantes á los dos antecedentes; esto es, quando en una qüestion se dán mas de tres números, y por la naturaleza de la misma qüestion se reducen á tres, y se busca otro número que debe ser segundo ó tercero proporcional entre los reducidos: ó bien quando en una qüestion se dán mas de tres números, y por la naturaleza de la misma qüestion se reducen á quatro, y se busca otro número que multiplicado por uno de ellos, debe ser segundo ó tercero proporcional entre los tres reducidos. La operacion que se hace para resolver esta especie de Problemas se llama Regla de Tres inversa y compuesta.

PROBLEMA X.

643. Tres hicieron Compañía, el primero puso 320 Pesos, el segundo 360, y el tercero 400; al cabo de un cierto tiempo hubo de ganancia 81 Pesos ¿quántos Pesos tocarán á cada uno?

Si se considerase que uno solo había puesto á ganancia la suma de los caudales, ganaría éste los 81 pesos; pero siendo tres, deberá ganar cada uno de ellos á proporcion del caudal que puso: luego las razones del caudal total á él de cada uno son iguales á las razones de la ganancia total á la ganancia respectiva. Por tanto sumando el caudal de todos, será 1080 pesos; y hallando el quarto proporcional á 1080 pesos, al caudal del primero 320, y á la ganancia total 81 pesos, se tendrá en él la ganancia que corresponde al primero, esto es 24 pesos: del mismo modo hallando el quarto proporcional al caudal total 1080 pesos, al caudal del segundo 360, y á la ganancia total 81, se tendrá la ganancia correspondiente al segundo, esto es 27 pesos: finalmente restando la suma de las dos ganancias halladas de la total, se tendrá en la diferencia que es 30 pesos la ganancia correspondiente al tercero cuyo caudal era 400 Pesos.

PROBLEMA XI.

644. El Parque de Artillería perteneciente á cierta Armada tiene 2040 piezas de Cañon ; dividiéndose esta Armada en tres divisiones, de modo que la fuerza de la primera division á la de la segunda sea como 14 á 9, y que la de la primera á la de la tercera sea como 2 á 1, se pide repartir dicha Artillería proporcionalmente á las fuerzas que tienen las tres divisiones.

Como la fuerza de la primera division está expresada por 14 en la primera razon, y por 2 en la segunda, convendrá reducirlas á una misma expresion multiplicando la primera razon por 2, y la segunda por 14; por consiguiente las fuerzas de la primera division, segunda y tercera estarán expresadas por 28, 18, 14, y la fuerza de las tres por 60 : luego será 60 : 28 = 2040 al quarto proporcional 952 que dará el número de cañones para la primera division : asímismo será 60 : 18 = 2040 al quarto proporcional 612, en quien se tendrá el número de cañones para la segunda division : en fin la tercera division deberá tener 476 cañones.

PROBLEMA XII.

645. Tres hicieron Compañía, el primero puso 540 Pesos por espacio de 6 meses, el segundo 568

por espacio de 8 meses, y el tercero 346 por un año; la ganancia que llegaron á tener fue 128 Pesos ¿ quántos Pesos tocarán á cada uno?

Suponiendo constante la ganancia en qualquier tiempo, 540 pesos por espacio de 6 meses darán la misma ganancia que 6 veces 540, esto es 3240 pesos, en un mes: igualmente 568 pesos en 8 meses darán la misma ganancia que 8 veces 568, esto es 4544 pesos, en un mes: en fin 346 pesos en un año ó 12 meses darán la misma ganancia que 12 veces 346, esto es 4152 pesos, en un mes. Es evidente que si uno solo hubiera puesto la suma de los caudales 3240, 4544 y 4152, hubiera tenido la ganancia total de 128 pesos; pero siendo tres, deberá ganar cada uno á proporcion del caudal que puso: luego el caudal total tendrá á los caudales particulares las mismas ó iguales razones que la ganancia total á las ganancias respectivas. Por tanto hallando el quarto proporcional al caudal total reducido 11936 pesos, al caudal del primero reducido 3240, á la ganancia total 128, se tendrá la ganancia del primero, esto es 34 pesos y $\frac{8896}{11936}$: asímismo el quarto proporcional á 11936, á 4544 caudal reducido del segundo, y á 128, dará la ganancia del segundo, esto es 48 pesos y $\frac{8704}{11936}$:

en fin sumadas estas dos ganancias, y restadas de la total, la diferencia 44 pesos y $\frac{6272}{11936}$ será la ganancia del tercero.

ESCOLIO.

646. Con el mismo método explicado en los dos Problemas antecedentes se resolverán todos aquellos, en quienes se ha de dividir un número dado en la razon que tiene la suma de otros dados á cada uno de ellos, ó bien en la razon que tiene la suma de los productos de otros números dados á cada uno de estos. La operacion que se hace para la resolucion de tales Problemas, se llama Regla de Compañías simple ó compuesta.

PROBLEMA XIII.

647. Se toma á rédito una cantidad, que unida al rédito de 3 por 100 en un año, sube á 2743 Pesos; se pide determinar la suma que se ha de restituir al cabo de 8 meses.

Porque 100 de caudal dán 3 de rédito en un año, 103 contendrá el caudal y el rédito respectivamente á 100: luego hallando un quarto proporcional á 103, 3, 2743, se tendrá el rédito de un año que entra en la suma propuesta, y será igual á

$\frac{3 \times 2743}{103}$; por consiguiente la tercera parte de este rédito, esto es $\frac{2743}{103}$ ó bien $26\frac{65}{103}$, dará él de 4 meses. Ahora quitando este rédito de la suma total 2743, el resíduo 2716 pesos y $\frac{38}{103}$ será la suma que deberá restituirse al cabo de 8 meses.

PROBLEMA XIV.

648. Se pide determinar el rédito de 7385 Pesos de caudal en 25 meses, suponiendo que 100 Pesos de caudal dán 3 de rédito en un año.

Es evidente que 100 pesos en un año, ó en 12 meses, dán el mismo rédito que 12 veces 100, ó 1200 pesos, en un mes; y que asímismo 7385 pesos en 25 meses dán el mismo rédito que 25 veces 7385, ó bien 184625 pesos, en un mes: luego el rédito que se ha de determinar será un quarto proporcional á 1200, 184625 y 3, y se hallará igual á 461 pesos y $\frac{9}{16}$.

ESCOLIO.

649. Quando en una qüestion se dá el rédito que una cierta suma tiene en un tiempo dado, se hallará con el mismo método explicado en los dos Problemas antecedentes el rédito, que otra qual-

quier suma debe tener proporcionalmente respecto á un tiempo tambien dado. La operacion que se hace para resolver estas qüestiones, se llama Regla de Interés: hay alguna otra Regla de Interès mas complicada, como se verá en lo sucesivo.

PROBLEMA XV.

650. Se pide determinar un número, de quien la mitad, tercera y quarta parte hagan 65.

METODO I.

Supóngase que 12 es el número que se busca, y su mitad será 6, la tercera parte 4, y la quarta 3; por consiguiente la suma de estas partes será 13: luego la suposicion de que 12 sea el número que se busca será falsa, porque la suma de dichas partes debe ser igual á 65 por la condicion del Problema. Sin embargo por medio de dicha suposicion se hallará el número verdadero; porque siendo 12 al número que se busca, como la mitad del primero á la del segundo, como la tercera parte á la tercera parte, y como la quarta á la quarta, será la suma de la mitad del número 12, su tercera y quarta parte, á la suma de la mitad del número que se busca, su tercera y quarta parte, como 12 al número que se busca, esto es $13 : 65 = 12$ al quarto proporcional que se halla ser 60. Por tanto el número que se pide será 60.

METODO II.

Se pide determinar un número.......... x

de quien la mitad, tercera y

quarta parte hagan 65........ $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=65$

Por tanto la qüestion propuesta se expresa por la equacion $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=65$; reduciendo á una comun denominacion, será $\frac{6x+4x+3x}{12}=65$; multiplicando por 12, se tendrá $13x=780$; y partiendo por 13, será $x=60$.

PROBLEMA XVI.

651. Con un Mortero se tiraron algunas bombas cuyo número se ignora, con otro se tiró un doble número de bombas que con el primero, y 40 mas, y con un tercer Mortero se hizo igual número de tiros que con el primero y segundo, y 50 mas, y con los tres Morteros se tiraron 250 bombas; se pide determinar el número de bombas que se tiraron con cada uno de los tres.

METODO I.

Supóngase que 2 es el número de bombas que se tiraron con el primer mortero: luego 44 bombas se tiraron con el segundo, y 96 con el tercero. Es evidente que la suma de las bombas tiradas con los tres morteros es 142, y no 250 como se pide; por consiguiente la suposicion, de que el primer mortero haya tirado 2 bombas, será falsa. Supóngase de nuevo que con el primer mortero se han tirado 22 bombas; y resultará que con el segundo mortero se han tirado 84 bombas, y con el tercero 156, y que la suma de las bombas tiradas con los tres morteros es 262, que excede á la verdadera en 12; por consiguiente la segunda suposicion será tambien falsa. Ahora escríbanse á parte las dos suposiciones, y baxo ellas los errores que han resultado con sus signos correspondientes:

Suposiciones	2	22
Errores	—108	+ 12

Multiplíquese el primer error por la segunda suposicion, y el segundo error por la primera suposicion; la suma de estos productos que es 2400 pártase por la suma de los errores, esto es por 120, respecto á que tienen signos contrarios; y el quociente 20 dará el número de tiros del primer mortero. Si los errores hubiesen tenido unos mismos signos, se hubiera partido la diferencia de los productos por la diferencia de los errores.

METODO II.

Con un mortero se tiraron algunas bombas cuyo número se ignora . . x

Con otro se tiró un número doble de bombas que con el primero, y 40 mas $2x+40$

Con un tercer mortero se hizo igual número de tiros que con el primero y segundo, y 50 mas. . . . . $x+2x+40+50$

y con los tres morteros se tiraron 250 bombas. $6x+130=250$

Por tanto la qüestion propuesta se expresa por la equacion $6x+130=250$; restando 130 de ambas partes, será $6x=120$; y partiendo por 6, se tendrá $x=20$. Por tanto el número de tiros del primer mortero será 20, él del segundo 80, y finalmente 150 será el número de tiros del tercer mortero.

ESCOLIO.

652. La primera solucion de los Problemas antecedentes manifiesta el método aritmético para hallar un número incógnito por medio de otro supuesto, ó bien por medio de dos supuestos, quando uno solo no basta. La operacion que se hace en el primer caso se llama Regla de falsa posicion simple; y la que se hace en el segundo, se llama Regla de

falsa posicion compuesta. Sin embargo de que esta regla esté sujeta á tantéo, no dexa de tener mucho uso especialmente en los Cálculos Astronómicos.

PROBLEMA XVII.

653. Hallar dos números, cuya suma sea 20, y entre quienes sea medio geométrico el numero 8.

Hallar dos números . . . . x, y

cuya suma sea 20 . . . . . $x+y=20$

y entre quienes sea medio geométrico el numero 8 . . . . $x:8=8:y$, ó bien $xy=64$.

Por tanto la qüestion propuesta se expresa por las equaciones $x+y=20$, $xy=64$, por medio de las quales se determinarán los valores de las incógnitás x, y; y el cálculo será como sigue. Quadrando la primera de dichas equaciones, y multiplicando la segunda por 4, se tendrán las dos $x^2+2xy+y^2=400$, $4xy=256$; restando la segunda equacion de la primera, se tendrá $x^2-2xy+y^2=144$; y extrayendo la raíz quadrada de ambos miembros, será $x-y=\pm 12$; pero es $x+y=20$: luego sumadas estas dos equaciones, y despues restadas, será $2x=\pm 12+20$, $2y=\mp 12+20$; de donde resulta ser $x=16$, $y=4$, ó bien

$x=4$, $y=16$. Por tanto los dos números que se buscan son 16, 4.

PROBLEMA XVIII.

654. Un Comerciante aumenta su caudal todos los años en la tercera parte, exceptuados 100 doblones que él gasta en sus usos propios, y al cabo de tres años ha juntado un caudal doble; se pide determinar el caudal con que empezó al principio.

Para resolver esta qüestion, se necesita explicar algunas proposiciones que en ella están embueltas.

Un Comerciante tiene cierto caudal x

de que gasta anualmente 100 doblones, por lo que quedan . . . $x-100$

aumenta el sobrante de la tercera parte. . . . $x-100+\frac{x-100}{3}$ ó bien $\frac{4x-400}{3}$

En el segundo año gasta de nuevo 100 doblones, por lo que tendrá. . . . . $\frac{4x-400}{3}-100$ ó bien $\frac{4x-700}{3}$

aumenta el sobrante de la tercera parte . . . . $\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9}$ ó bien $\frac{16x-2800}{9}$

En el tercer año gasta otros

100 doblones, por lo que

tendrá . . . . $\frac{16x-2800}{9} - 100$ ó bien $\frac{16x-3700}{9}$

aumenta el sobrante en la tercera

parte . . . . $\frac{16x-3700}{9} + \frac{16x-3700}{27}$ ó bien $\frac{64x-14800}{27}$

Finalmente se halla con un caudal

doble de él que tenía al principio (A) $\frac{64x-14800}{27} = 2x$

Por tanto se reduce la qüestion á la equacion (A) de donde resulta ser $x = 1480$.

PROBLEMA XIX.

655. Se quería distribuir un cierto número de cartuchos á un cierto número de soldados, y se observó que faltaban 9 cartuchos para dár 3 á cada uno, y que distribuyéndose solo 2 cartuchos á cada uno sobraban 5; se pide determinar el número de los soldados, y él de los cartuchos.

Sea y el número de los soldados, x él de los cartuchos. Porque faltaron 9 cartuchos para dár 3 á cada uno de los soldados, será $3y - 9 = x$: asimismo porque sobraron 5 cartuchos dando 2 á cada uno de los soldados, será $2y + 5 = x$: luego será $3y - 9 = 2y + 5$, de donde resulta ser $y = 14$; y substituído el valor de y en la equacion $2y + 5 = x$, se hallará $x = 33$.

PROBLEMA XX.

656. Se tienen tres obreros, de los quales el primero hace 5 toesas de obra por dia, el segundo 7, y el tercero 8; se pide determinar el tiempo, en que los tres juntos habrán acabado 100 toesas.

Llámese x el tiempo que se busca. Es claro que en este tiempo los tres obreros juntos tendrán hecha la obra $5x + 7x + 8x$; pero ésta debe ser igual á 100 toesas por la condicion del Problema: luego será $5x + 7x + 8x = 100$, ó bien $20x = 100$; y partiendo por 20, se tendrá el tiempo $x = 5$ dias. Adviértase que si los números propuestos 5, 7, 8, 100 son diferentes, el Problema se resuelve siempre del mismo modo: y así para resolver las qüestiones, en quienes se trata de hacer una obra de un número dado a de toesas, empleando en ella tres obreros, los quales hagan cada dia respectivamente los números dados de toesas b, c, d; se llamará como antes x el tiempo en que los tres obreros juntos tendrán acabada la obra; por consiguiente será $bx + cx + dx$ la obra que habrán hecho al fin del tiempo x; pero esta obra debe ser igual á la cantidad a: luego se tendrá $bx + dx + cx = a$, de donde resulta ser $x = \frac{a}{b + c + d}$. Hallada la resolucion del Problema en general, se resolverá qualquier caso suyo, substituyendo en lugar de a, b, c, d los valores dados: como por exemplo si debe ser $a = 200$, $b = 6$, $c = 9$, $d = 10$, será el tiempo $x = \frac{200}{6+9+10} = 8$ dias.

PROBLEMA XXI.

657. Hallar un número, cuya mitad, tercera y $\frac{2}{5}$ partes juntas excedan á dicho número en 7.

Llámese x el número que se busca; y será por la condicion del Problema $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{2x}{5} = x + 7$; quitando quebrados, se tendrá $15x + 10x + 12x = 30x + 210$, de donde resulta ser $7x = 210$, y $x = 30$.

PROBLEMA XXII.

658. Un obrero perezoso tiene 24 quartos de sueldo al dia, con la condicion de descontar 6 quartos todos los dias que no trabaja, y al cabo de 30 dias no ha ganado nada; se pide determinar el número de dias en que trabajó.

Llámese x el número de dias que el obrero ha trabajado, y será $30 - x$ el número de dias que ha dexado de trabajar: luego por la condicion del Problema se tendrá $24 \times x = 6 \times (30 - x)$, ó bien $24x = 180 - 6x$; de donde resulta ser $30x = 180$, y $x = \frac{180}{30} = 6$.

PROBLEMA XXIII.

659. Sale de Madrid una partida de Artilleros para Barcelona, los quales andan 3 leguas al dia, dos dias despues sale otra partida de Artilleros de Segovia hácia la misma parte, que andan 4 leguas al dia; supuesta la distancia entre los dos Pueblos de 15 leguas, se pide determinar el tiempo que necesita esta segunda partida para encontrar la primera.

Llámese x el número de dias que anduvo la partida de Segovia antes de encontrar la de Madrid: luego será $4x$ el número de leguas que habrá caminado, y $3\times(x+2)$ será el número de leguas que habrá caminado la primera partida. Ahora por la condicion del Problema se tendrá la equacion $4x=3\times(x+2)+15$, ó bien $4x=3x+6+15$, de donde resulta ser $x=21$. Por tanto la partida de Segovia ha andado 21 dias antes de encontrar la de Madrid.

Si se quiere resolver generalmente este problema, llámense S las leguas que anda cada dia la partida de Segovia, M las leguas que anda la de Madrid, D la distancia entre las dos partidas, y finalmente T la diferencia del tiempo entre la salida de la partida de Madrid y la de Segovia. Esto supuesto, se hallará del mismo modo que es $Sx = M \times (x + T) + D$, ó bien $Sx = Mx + MT + D$; de donde resulta ser $Sx - Mx = MT + D$, y $x = \frac{MT + D}{S - M}$; por consiguiente el número de leguas, que caminará la partida de Segovia antes de encontrar la de Madrid, será igual á $S \times \frac{MT + D}{S - M}$. Ahora si se quiere resolver generalmente el Problema en la suposicion que la partida de Madrid marche hácia Segovia, se mudará el signo á la cantidad M en las dos expresiones anteriores; y se tendrá $x = \frac{D - MT}{S + M}$, y el número de leguas, que andará la partida de Segovia antes de encontrar la de Madrid, será igual á $S \times \frac{D - MT}{S + M}$. En este caso siendo como antes $D = 15$, $M = 3$, $T = 2$, $S = 4$, resultará $x = \frac{15 - 6}{7} = 1\frac{2}{7}$, y el número de dichas leguas será igual á $4 \times 1\frac{2}{7} = 5\frac{1}{7}$.

ESCOLIO.

660. El Problema antecedente manifiesta el adelantamiento que ha tenido la Algebra, despues que se han introducido en ella las letras del Alfabeto en lugar de los números; pues resuelta

una qüestion con las letras, se tiene la regla general para resolver todas las qüestiones de la misma especie, aun quando las cantidades que entren en la qüestion quieran tomarse en un sentido totalmente opuesto ó bien en direcciones contrarias.

PROBLEMA XXIV.

661. Distribuir medio doblon de á 8 en 24 monedas, de suerte que algunas de ellas valgan 5 reales, y las demás 10.

Llámese x el número de las pesetas colunarias, y será $24 - x$ el número de las monedas de á 10 reales: luego por la condicion del Problema será $5x + 10 \times (24 - x) = 160$, ó bien $5x + 240 - 10x = 160$; de donde resulta ser $80 = 5x$, y $x = 16$. Por tanto el número de las pesetas colunarias es 16, y él de las monedas de á 10 reales es 8.

Si se quiere distribuir medio doblon de á 8 en 24 monedas, de suerte que algunas de ellas valgan 4 reales, y las demás 5, será la equacion $4x + 5 \times (24 - x) = 160$, ó bien $4x + 120 - 5x = 160$; de donde resulta $x = -40$, lo que indíca ser el Problema imposible. Pero en este caso se resuelve otra qüestion; esto es, distribuir medio doblon de á 8 en unas monedas de á 4 Reales, y en otras de á 5, de suerte que el número de éstas exceda á él de aquellas en 24, y que la diferencia de sus valores sea igual á un medio doblon de á 8.

PROBLEMA XXV.

662. Se tiene un caudal a que se dá á rédito á 5 por 100, y se añaden todos los años los réditos al caudal; se pide determinar, qual será el caudal despues de qualquier número dado n de años.

Llámese x el caudal al cabo de un número dado n de años. Porque un caudal de 100 pesos vale 105 al cabo de un año, ó bien un caudal de 20 pesos vale 21, el caudal a valdrá $\frac{21 \times a}{20}$ al fin de un año: asímismo si 20 dá 21, $\frac{21 \times a}{20}$ dará $(\frac{21}{20})^2 \times a$, que será el caudal al cabo de dos años. Del mismo modo se hallará que el caudal a al cabo de 3, 4, 5, &c. años ascenderá á $(\frac{21}{20})^3 \times a$, $(\frac{21}{20})^4 \times a$, $(\frac{21}{20})^5 \times a$, &c. luego al cabo de un número n de años se tendrá $x = (\frac{21}{20})^n \times a$. Si se quiere determinar en los casos particulares el valor de x por medio de las Tablas, será $L.x = L.(\frac{21}{20})^n + L.a = n \times L.\frac{21}{20} + L.a = n \times (L.21 - L.20) + L.a$.

PROBLEMA XXVI.

663. Se tiene un caudal a que se dá á rédito á 5 por 100, y se añaden todos los réditos al caudal y además la cantidad b; se pide determinar, quál será el caudal despues de qualquier número dado n de años.

Con el mismo método explicado en el Problema antecedente se hallarán los aumentos del caudal a como sigue:

despues de 1 año . . $\frac{21 \times a}{20} + b$

despues de 2 años. . $(\frac{21}{20})^2 . a + \frac{21 b}{20} + b$

despues de 3 años. . $(\frac{21}{20})^3 . a + (\frac{21}{20})^2 \times b + (\frac{21}{20}) \times b + b$

despues de 4 años. . $(\frac{21}{20})^4 . a + (\frac{21}{20})^3 \times b + (\frac{21}{20})^2 \times b + (\frac{21}{20}) . b + b$

despues de n años . . $(\frac{21}{20})^n . a + (\frac{21}{20})^{n-1} . b + (\frac{21}{20})^{n-2} . b + .. (\frac{21}{20}) . b + b$

Como la suma general de la série geométrica $(\frac{21}{20})^{n-1} \times b + (\frac{21}{20})^{n-2} \times b + \ldots (\frac{21}{20}) \times b + b$ es $20 \times (\frac{21}{20})^n \times b - 20\, b$, será el caudal que se busca al cabo de un número n de años, esto es (A) $x = (\frac{21}{20})^n \times a + 20 \times (\frac{21}{20})^n \times b - 20\, b = (\frac{21}{20})^n \times (a$

$+ 20b) - 20b$. Si se quiere determinar el valor de x por medio de las Tablas en los casos particulares, se tendrá $L.x = L.[(\frac{21}{20})^n \times (a + 20b) - 20b]$: ahora haciendo $m = (\frac{21}{20})^n \times (a+20b)$ será $L.m = L.[(\frac{21}{20})^n \times (a+20b)] = L.(\frac{21}{20})^n + L.(a + 20b) = n \times L.(\frac{21}{20}) + L.(a + 20b)$, y por medio de esta expresion se calculará por medio de las Tablas el valor de m ó bien de $(\frac{21}{20})^n \times (a + 20b)$. Hallado el valor de esta cantidad, se tendrá igualmente por medio de las Tablas el valor de x por ser $L.x = L.(m - 20b)$.

Si en lugar de aumentar el caudal todos los años en la cantidad b, se disminuye en la misma cantidad ; en la equacion (A) se mudará el signo á b, y se tendrá que el caudal que se busca al cabo de un número n de años queda reducido á $x = (\frac{21}{20})^n \times (a - 20b) + 20b$.

PROBLEMA XXVII.

664. Se tienen 9 libras de un mixto de una libra de azufre, y de 8 de salitre ; se pide determinar el número de libras de salitre que conviene añadir á dicho mixto, para que 9 libras de él

contengan solo 4 onzas de azufre.

Llámese x el número de libras de salitre que se busca. Estando la libra dividida en 16 onzas, será por la condicion del Problema $9 + x : 16 = 9 : 4$; por consiguiente se tendrá la equacion $36 + 4x = 144$, de donde resulta ser $x = 27$. Por tanto á las 9 libras del mixto dado se deben añadir 27 libras de salitre, para que este mixto contenga 4 onzas de azufre en cada nueve libras.

PROBLEMA XXVIII.

665. Dadas las cantidades de azufre, carbon y salitre que componen cierta pólvora, y dados los valores de dichas cantidades, determinar el valor de la misma pólvora.

Supóngase que a, b, c son las respectivas cantidades dadas del azufre, carbon y salitre, y que los valores de éstas por cada arroba son d, e, f. Llámese x el valor de una arroba de pólvora. Háganse las proporciones siguientes $1 : a = d : ad$, $1 : b = e : be$, $1 : c = f : cf$; y se tendrá que ad, be, fc son los respectivos valores de las cantidades a, b, c; por consiguiente $ad + be + fc$ será la suma de ellos; pero $1 : a + b + c = x : ad + be + fc$: luego resultará $x = \frac{ad + be + fc}{a + b + c}$.

ESCOLIO.

666. Con el mismo método se resolverán todas aquellas qüestiones, en quienes se ha de determinar el precio medio de un mixto formado de diferentes ingredientes, cuyas cantidades y precios son dados; esto es, se multiplicará cada parte de la mezcla por su precio respectivo, y dividiendo la suma de los productos por la de las cantidades mezcladas, se tendrá en el quociente el precio medio que se busca. Esta operacion pertenece á la Regla de Aligacion, que tiene otros casos que se darán en los seis Problemas siguientes.

PROBLEMA XXIX.

667. Dados los valores ó precios del cobre y del estaño, determinar qué porcion de cobre se ha de mezclar con la de estaño, para que la mezcla salga á un precio medio dado.

Supóngase que una arroba de cobre vale 150 reales, una de estaño 125, y que una arroba de la mezcla ha de valer 140. Llámense x, y las respectivas cantidades del cobre y del estaño, que se necesitan para dicha mezcla; y se tendrá que $150 \times x$, $125 \times y$, $(x+y) \times 140$ son los respectivos precios de las cantidades x, y, $x+y$: luego por la condicion del Problema será $150\,x + 125\,y = (x+y) \times 140$, ó bien $150x + 125y = 140x + 140y$, de donde resulta ser $10x = 15y$, y $x : y = 15 : 10$. Por tanto el Problema propuesto es indeterminado, y es capaz de un número infinito de soluciones aun en números enteros. Por exemplo, si es $y = \frac{1}{3}$ de arroba, será $x = \frac{15 \times \frac{1}{3}}{10} = \frac{1}{2}$ de arroba, esto es, si se mezcla un $\frac{1}{3}$ de arroba de estaño con $\frac{1}{2}$ de arroba de cobre, la mezcla que resulta valdrá á razon de 140 reales la arroba: si es $y = \frac{1}{5}$ de arroba, será $x = \frac{15 \times \frac{1}{5}}{10} = \frac{3}{10}$, y así sucesivamente: y respecto á los números enteros, si es $y = 10$ arrobas, será $x = 15$, esto es, mezclando 10 arrobas de estaño con 15 de cobre, la mezcla que resulta valdrá 140 reales por arroba: si es $y = 20$, será $x = 30$: si es $y = 30$, será $x = 45$: si es $y = 40$, será $x = 60$, de modo que los valores de y, x en números enteros forman las dos séries siguientes:

$$y = 10, 20, 30, 40, 50, 60, \&c.$$
$$x = 15, 30, 45, 60, 75, 90, \&c.$$

ESCOLIO.

668. Si á los Problemas indeterminados del primer grado se añade alguna condicion, como por exemplo que los números que se buscan sean positivos y enteros, se limitará el número de las resoluciones, de suerte que podrá suceder en estos casos que dicho número sea determinado ó tambien ninguno. Obsérvese que si en la equacion general $y = \frac{mx + p}{n}$ (en quien m, p, n expresan números enteros) se puede partir exâctamente m por n, y nó p por n; no podrá tener y valor entero: pero si p puede partirse exâctamente por n, y nó m por n; dando á x qualquier valor multíplice de n, se tendrán los correspondientes valores de y en números enteros, con la advertencia de que si los números m, n nó son primeros entre sí, será preciso reducir la fraccion $\frac{m}{n}$ á los mínimos términos para tener todos los valores posibles enteros de x, y. Tambien obsérvese que si en dicha equacion general es x positiva, tendrá y valor positivo, 1°. quando los números m, p, n son todos positivos ó negativos: 2°. quando siendo p negativo, y m, n positivos, es $x > \frac{p}{m}$: 3°. quando

siendo los números p, n positivos, y m negativo, es $x < \frac{p}{m}$.

Exâminando el método que se ha seguido en el Problema antecedente, se verá facilmente en qué consiste el método general para la resolucion de semejantes Problemas que se llaman Semideterminados: esto es, se dá á la equacion la forma (A) $y = \frac{m\,x + p}{n}$; de esta fraccion se sacan todos los enteros, y si la fraccion resídua tiene algun factor que la multiplíque, éste tambien se pondrá á parte; la nueva fraccion que resulta se supone igual á z, y por medio de ésta equacion se saca el valor de x por z; y si resulta una nueva fraccion, se tratará ésta como se ha dicho respecto á la (A), y así sucesivamente hasta que resulte la fraccion que tenga la forma $\frac{u + a}{b} = q$, de donde $u = b\,q - a$. Ahora dando á q qualquier valor entero y positivo, empezando aún por cero quando $-a$ es número positivo, se tendrán los correspondientes valores de u: substituyendo sucesivamente estos valores de u en la equacion anterior, que sea por exemplo la que dá el valor de z por u, se tendrán los correspondientes de z: asímismo substituyendo sucesivamente estos valores en la equacion que dá el valor de x por z, se tendrán los de x: finalmente sub tituyendo éstos sucesivamente en la equacion (A) se tendrán los de y.

PROBLEMA XXX.

669. Dados los valores de tres ingredientes que se han de mezclar, determinar las partes de cada uno de ellos, para que la mezcla valga á un precio medio dado.

Supóngase que una arroba del primer ingrediente vale 150 reales, una del segundo 125, una del tercero 165, y que una arroba de la mezcla ha de valer 140. Llamense x, y, z las cantidades de los tres ingredientes que se necesitan para dicha mezcla, y con el mismo método del Problema antecedente se hallará la equacion $150\,x + 125\,y + 165\,z = (x + y + z) \times 140$, ó bien $150\,x + 125\,y + 165\,z = 140\,x + 140\,y + 140\,z$, de donde resulta ser $10\,x + 25\,z = 15\,y$, y $x = \frac{15\,y - 25\,z}{10}$. Por tanto el Problema propuesto es indeterminado, y se resuelve de infinitos modos, aunque x, y, z hayan de ser números enteros. Por exemplo, si se supone $z = 1$, $y = 2$, será $x = \frac{15 \times 2 - 25}{10} = \frac{1}{2}$, esto es, si se mezclan $\frac{1}{2}$ arroba del primer ingrediente, 2 del segundo, y 1 del tercero, la mezcla que resulta valdrá á razon de 140 por arroba: si se supone $z=2$, $y=4$, será $x=\frac{15\times4-25\times2}{10}=1$: si se supone $z=3$, $y=5$, será $x=\frac{15\times5-25\times3}{10}=0$: si se supone $z=4$, $y=7$, será $x=\frac{15\times7-25\times4}{10}=\frac{1}{2}$; y así sucesivamente. Pero si se quiere que los tres números x, y, z sean enteros y positivos, se determinarán éstos con el método siguiente. Porque es $x=\frac{15y-25z}{10}$, será tambien $x=y-2z+\frac{y-z}{2}$; y respecto á que x debe ser número entero y positivo, lo deberá ser igualmente la fraccion $\frac{y-z}{2}$. Supóngase p número entero é igual á esta fraccion, esto es $p=\frac{y-z}{2}$; y será $2p=y-z$, de donde $y=2p+z$. Ahora dando á las cantidades p, z, valores enteros y positivos, se determinarán los correspondientes valores enteros y positivos de y, x por medio de las equaciones $y=2p+z$, $x=y-2z+\frac{y-z}{2}$; y serán como se sigue.

$p=1, 2, 3, 4, 5, 6$, &c.
$z=1, 2, 3, 4, 5, 6$, &c.
$y=3, 6, 9, 12, 15, 18$, &c.
$x=2, 4, 6, 8, 10, 12$, &c.

ESCOLIO.

670. Con método semejante á él que se ha explicado en los dos Problemas antecedentes, se resolverán todas aquellas qüestiones, en quienes se proponen mezclar quatro ó mas ingredientes cuyos valores son dados, y determinar las partes de ellos, para que la mezcla salga á un precio medio dado.

PROBLEMA XXXI.

671. Se tienen 8 arrobas de cobre, cuyo precio es de 150 reales por arroba, y se tiene además estaño á 125 reales por arroba; se pide determinar qué parte de éste se deberá mezclar con dicho cobre, para que la mezcla salga á 140 reales por arroba.

Llámese x la cantidad de estaño que se ha de mezclar con las 8 arrobas de cobre, para que salga la mezcla que se busca; y será por la condicion del Problema $8 \times 150 + x \times 125 = (8 + x) \times 140$, ó bien $1200 + 125\,x = 1120 + 140\,x$, de donde resulta ser $80 = 15\,x$; y partiendo por 15, se tendrá $x = \frac{80}{15} = 5\ \frac{1}{3}$. Por tanto si se mezclan 5 arrobas y $\frac{1}{3}$ de estaño con 8 arrobas de cobre, la mezcla que resulta será la que se pide.