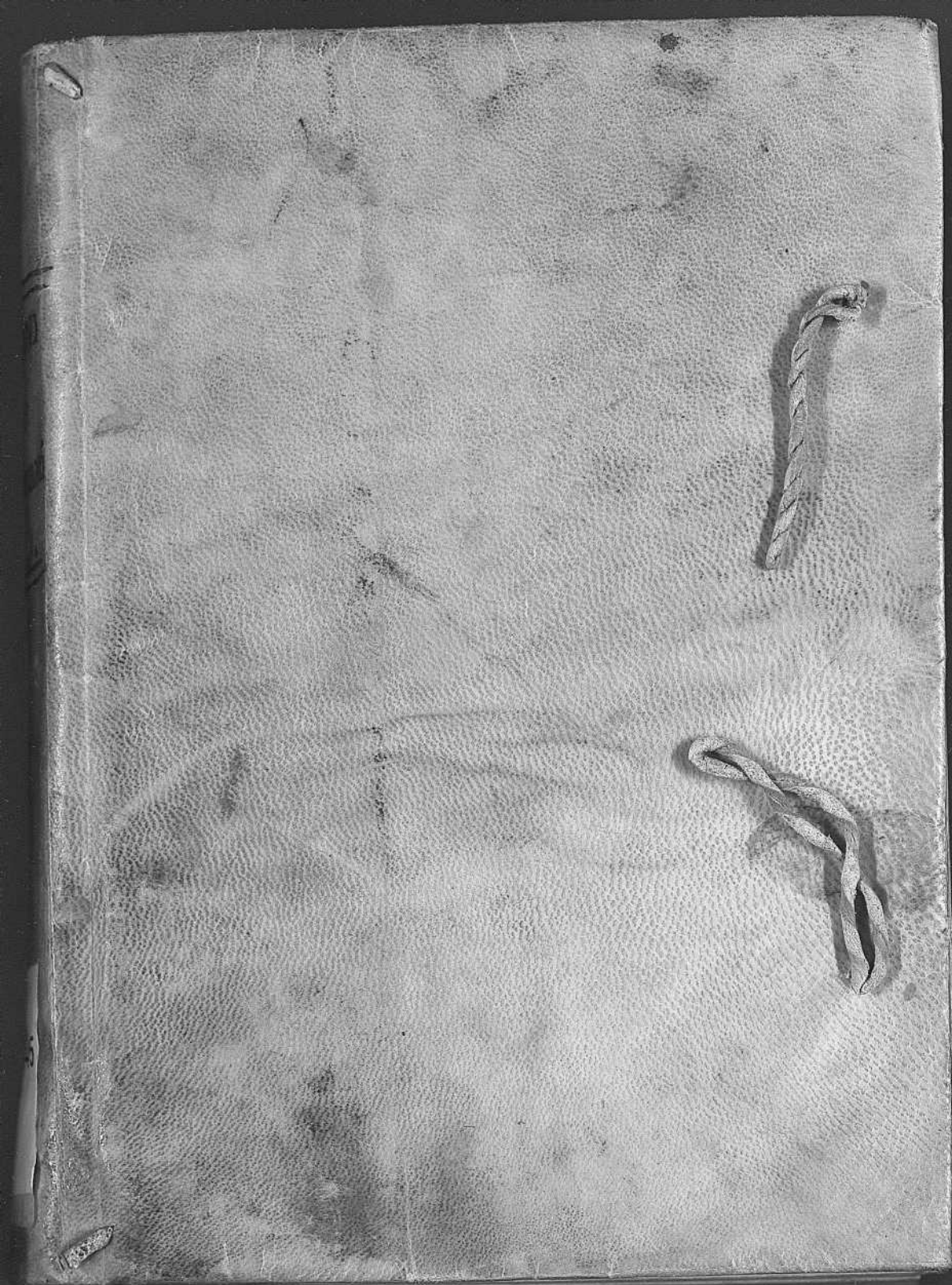






CURSO
MATEMÁTICO

TOMO III

an

Sig.: 71445

Tit.: Curso matemático para la en

Aut.: Giannini, Pedro

Cód.: 51073458





CURSO
MATEMÁTICO.

TOMO III.



CURSO
MATEMÁTICO.

TOMO III.



CURSO MATEMÁTICO

PARA LA ENSEÑANZA

DE LOS CABALLEROS CADETES

DEL REAL COLEGIO MILITAR

DE ARTILLERÍA.

Por DON PEDRO GIANNINI, Comisario de Guerra de los Reales Exércitos, Profesor primero de dicho Colegio, Socio de la Academia del Instituto de Bolonia, de la Real Academia de Ciencias de Lisboa, &c.

TOMO III.



SEGOVIA. MDCCXCV.

EN LA OFICINA DE DON ANTONIO ESPINOSA.

Con superior permiso.

CURSO MATEMÁTICO

PARA LA ENSEÑANZA

DE LOS CABALLEROS CADETES

DEL REAL COLLEJO MILITAR

DE ARTILLERÍA.

Por DON PEDRO BLANQUIN, Comandante de Guerra de los
Reales Ejércitos, Profesor principal de dicha Cátedra, Socio
de la Academia del Instituto de Bologna, de la Real
Academia de Ciencias de Lisboa, &c.

TOMO III.



SEGOVIA. MDCCLCV.

En la Oficina de Don Antonio Barrios.

Con licencia permitida.



PRÓLOGO.

EL Tomo tercero del presente Curso Matemático contiene los Cálculos Diferencial é Integral, que van distribuidos en quatro Libros. En el primero se exponen los fundamentos geométricos de los mismos cálculos, las diferenciales de las cantidades algébricas, logarítmicas, exponenciales, senos, cosenos, &c. circulares é hiperbólicos, y las diferenciales de las áreas, así en las curvas referidas á los exes ó diámetros, como en las referidas á los focus, arcos de las mismas curvas, sólidos descritos por dichas áreas, y superficies de los mismos sólidos, y las expresiones diferenciales, que corresponden en las dichas curvas á la subtangente, tangente, normal, subnormal, radio del ósculo, evoluta, máximas y mínimas orde-

nadas : y en fin se exponen al mismo tiempo los teoremas que resultan del cálculo diferencial para el integral. En el Libro segundo se dan los métodos para integrar las fórmulas diferenciales del primer orden que contienen una sola variable. En el Libro tercero se trata de las integrales de las principales fórmulas diferenciales que contienen dos ó más variables, y sus diferenciales del primer orden. Y finalmente en el Libro quarto se presentan las principales fórmulas diferenciales de los órdenes superiores, de las que se señalan las integrales, ó la separación de sus variables, ó la reducción á diferenciales de órdenes inferiores. En cada Libro he procurado distribuir las referidas teorías con método geométrico, así como lo habia executado en las de la Algebra; he buscado las demostraciones mas sencillas de las mismas teorías, y particularmente por do tocante á las equaciones homogeneas tratadas por el Sabio J. Bernoulli, habiendo hallado un

modo breve y fácil para reducir las indeterminadas, que se contienen en las muchas equaciones que se necesitan, á las raíces de una sola equacion para cada equacion homogenea; he extendido dicho método á las equaciones del primer grado que no son homogneas, y he hallado otro para estas equaciones del segundo grado; y finalmente he ilustrado las mismas teorías con bastantes exemplos, á fin de que los Jóvenes puedan comprehender mas bien los Cálculos Diferencial é Integral, que son la base fundamental de la Mecánica, ciencia útil á los Oficiales de Artillería, como lo manifiestan las Obras de los Señores, Tempehhof, Robins y su Comentador L. Euler, Papacino d' Antoni, y otros. Además, de los adelantamientos de los mismos cálculos dependen los de la Mecánica, Astronomía, y en general de las otras partes de las Matemáticas. Y á todo eso no se ciñe solamente la utilidad del estudio de los Cálculos; éste dispone el

espíritu para las meditaciones profundas ; éste le da extension y solidez ; éste le exercita á seguir la verdad sin apartarse del camino recto en los laberintos más tortuosos : de donde resulta que dicho estudio se hace útil tambien á los que quieran dedicarse á qualquiera otra facultad que no tenga conexi6n con las Matemáticas. En fin si las ciencias exáctas forman la base , las prácticas serán entendidas con rapidez , y no solo entendidas , sino perfeccionadas , mediando la aplicacion y el fomento. Los doctos Académicos , que escribieron la grande Obra de Artes y Oficios , se enteraron prontamente de tales facultades , las que por ellos tuvieron considerables adelantamientos. Tambien las Actas de los mismos manifiestan sus trabajos útiles á las Sociedades en asuntos ajenos de las ciencias. Los prácticos , puramente prácticos , harán lo que aprendieron de sus Padres y Abuelos ; y si por cierta combinacion regular en tantos millones de hombres re-

sultan nuevos experimentos, ú observaciones, se deberá á los científicos que éstas tengan la extension correspondiente. La invencion del antejo pasada á los Astrónomos ha producido conseqüencias de la mayor utilidad bien conocidas de todos. Ni tampoco una tintura de muchas facultades en el plan de educación de la juventud produce unos hombres capaces de adelantar, sino unos hombres superficiales, y á veces perjudiciales: pues se convencen fácilmente de qualquiera idea que hallan en Obras proporcionadas á sus alcances, y se creen en estado de decidir en todas materias. Movido de las referidas razones he dado la correspondiente extension á este Tratado, y á los demas anteriores, y lo mismo executaré en él de la Mecánica: mientras evidentemente me hubiera sido mucho menos laborioso de reducirlos á uno ó dos volúmenes. Asimismo en los referidos Tratados no me he parado en digresiones propias de otras facultades: porque te-

niendo éstas sus principios, es menester estudiarlas en las Obras correspondientes, y además, porque dichas digresiones son impropias del método matemático. . . . Ultimamente debo advertir que en la composición del presente Tratado me he valido de las Obras de diferentes Autores indicados ya en el Tomo anterior, y además de las de los Señores, Marques del Hospital, Le Seur y Jacquier, Bougainville, Cousin, y otros, de quienes se hará mención en sus lugares correspondientes.

ATAS.

380	1	xi +	xi 4 +
478	18	4 ^m	4 ^m
430	3	4	4
415	13	240	430
343	9	325	320
275	11	F ^m x	F ^m x
237	7	+ $\frac{C_{100}y}{n}$	+ $\frac{C_{100}y}{n}$
180	8	40	40
142	10	(C ₁) ^{m-1}	(C ₁) ^{m-1}
9	9	00001	00000
2	7	1415333...1415334	1415333...1415334
111	15	por.....sateoche...	por lo demostrado (122,132)
21	21	840	440
108	20	402	802
107	4	(x ² + 7x ²)	(x ² + 7x ²)
103	13	(x ² + 7x ²)	(x ² + 7x ²)
26	1	EA	EA
248	10	248	248

LIBRO PRIMERO.

INTRODUCCION,

en la qual se exponen, é ilustran con exemplos y escolios los Lemas Newtonianos de las Razones primeras y últimas, que contienen los principios geométricos de los Cálculos Diferencial é Integral.

LEMA I.

1. Las magnitudes, y las razones de las magnitudes, que continua y constantemente se acercan á la igualdad, de suerte que su diferencia venga á ser menor que qualquiera diferencia dada; finalmente son iguales.

La demostracion de este Lema se ha dado en el Tratado de Geometría (I. 430.)

LEMA II.

2. Si en qualquiera Figura $AacE$ contenida por las rectas Aa , AE , y la curva acE , se inscriben los paralelogramos Ab , Bc , Cd , &c. en qualquier número, cuyas bases AB , BC , CD , &c. sean iguales, y sus lados Bb , Cc , Dd , &c. para-

lelos al lado Aa de la Figura, y se completan los paralelogramos Kl , Lm , Mn , &c. y en esta disposicion se disminuyen las bases de los paralelogramos, y se aumenta su número al infinito: digo que las razones últimas, que tienen entre sí la Figura inscripta, la circumscripita, y la curvilínea, son razones de igualdad. *Fig. 1.*

Tírese la perpendicular aG á la recta AE . La diferencia de las Figuras inscripta y circumscripita es la suma de los paralelogramos Kl , Lm , Mn , Do ; pero por tener todos iguales bases, y ser aG la suma de las alturas, es el paralelogramo Al igual á la suma de los paralelogramos Kl , Lm , Mn , Do : luego el paralelogramo Al es la diferencia de las Figuras inscripta y circumscripita; pero este paralelogramo, disminuyéndose su base AB al infinito, resulta menor que qualquier dado: luego (1) la figura inscripta y la circumscripita, y con mucha mas razon la curvilínea intermedia, son últimamente iguales. Que es &c.

EXEMPLO.

3. Sea la curva Eca una Parábola Apoloniana referida á la tangente EA . *Fig. 2.*
 Llamadas, la abscisa $EA = x$, la ordenada $Aa = y$, y el parametro $= a$, por la naturaleza de

(3)

la curva será $x^2 = ay$. Divídase la abscisa EA en las partes iguales ED , DC , CB , &c. cuyo número n , y será $n \times ED = x$. Tírense las ordenadas Dd , Cc , Bb , &c. las que serán respectivamente iguales

á $\frac{\overline{ED}^2}{a}$, $\frac{4\overline{ED}^2}{a}$, $\frac{9\overline{ED}^2}{a}$, $\frac{16\overline{ED}^2}{a}$, &c. luego los rectángulos circunscriptos Ed , Dc , Cb , &c. serán respectivamente iguales á

$\frac{\overline{ED}^3}{a}$, $\frac{4\overline{ED}^3}{a}$, $\frac{9\overline{ED}^3}{a}$, $\frac{16\overline{ED}^3}{a}$, &c., cuya suma resultará igual á la cantidad

$\frac{\overline{ED}^3}{a}$ multiplicada por la suma de la serie algébrica del segundo orden 1, 4, 9, 16, &c. que es igual (II.544) á $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3.2}$: luego la suma de dichos

rectángulos circunscriptos será igual á $\frac{\overline{ED}^3}{a} \times \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3.2} \right) = \frac{x^3}{3a} + \frac{x^3}{2an} + \frac{x^3}{2 \times 3an^2}$, por ser $n \times ED = x$, por consiguiente dicha suma de los rectángulos circunscriptos al area parabólica $AabE$ es mayor que $\frac{x^3}{3a}$ en la diferencia $\frac{x^3}{2an} + \frac{x^3}{2 \times 3an^2}$; pero

aumentado el número n al infinito, dicha diferencia queda menor que qualquiera dada, y la suma últi-

(4)

ma de los rectángulos circunscriptos es igual (2) al area parabólica: luego será $AabE = \frac{x^3}{3a} = \frac{xy}{3}$, de donde resulta que el area parabólica $AabE$ comprendida entre la abscisa EA tomada en la tangente, la ordenada correspondiente Aa , y la curva Ea , es igual á la tercera parte del rectángulo contenido por la abscisa y por la ordenada.

LEMA III.

4. Aunque las bases AB , BC , CD , &c. de los paralelogramos circunscriptos é inscriptos en la Figura $AacE$ se supongan desiguales, con tal que se consideren disminuidas al infinito; siempre las razones últimas, que tienen entre sí la Figura inscripta, la circunscripta, y la curvilínea intermedia, son razones de igualdad. *Fig. 3.*

Sea AB la mayor base de dichos paralelogramos. Tirese la perpendicular aG á la recta AE . La diferencia de las Figuras inscripta y circunscripta es la suma de los paralelogramos Kl , Lm , Mn , Do ; pero esta suma es menor que el paralelogramo Al , por tener la mayor base AB , y ser aG la suma de las alturas: luego el paralelogramo Al es mayor que la diferencia de las Figuras inscripta y circunscripta; pero este paralelogramo, disminuyén-

dose su base AB al infinito, resulta menor que qualquier dado: luego (1) la Figura inscripta, la circumscrip̃ta, y con mucha mas razon la curvilinea intermedia, son últimamente iguales.

COROLARIO I.

5. Luego la suma última de los paralelogramos Ab , Bc , Cd , &c. evanecentes ó menores que qualquiera dado, coincide con la Figura curvilinea: lo mismo se diga de la suma última de los paralelogramos Al , Bm , Cn , &c. evanecentes que forman la circumscrip̃ta.

COROLARIO II.

6. Con mas razon la Figura rectilinea contenida por las cuerdas de los arcos evanecentes ab , bc , cd , &c. y por los lados AE y Aa , coincidirá con la Figura curvilinea.

COROLARIO III.

7. Tambien la Figura rectilinea circumscrip̃ta contenida por los tangentes de dichos arcos, y por los lados AE y Aa , coincidirá con la Figura curvilinea.

COROLARIO IV.

8. Luego estas Figuras últimas (6, 7) respecto de los perímetros $a c E$ no son rectilíneas, sino límites curvilíneos de las rectilíneas (5).

ESCOLIO.

9. Adviértase que el paralelogramo Lm tiene con el paralelogramo LC evaneciente una razón menor que qualquiera dada, ó que es lo mismo, el paralelogramo Lm es evaneciente respecto al paralelogramo evaneciente LC inscripto; porque es $Lm : LC = mc : Cc$, y mc tiene con Cc una razón menor que qualquiera dada. Dígase lo mismo del paralelogramo Mn respecto al paralelogramo evaneciente MD inscripto, y así sucesivamente. Por tanto serán las superficies evanecientes $Bc = Bm = BbcC, Cd = Cn = CcdD, \&c.$

III LEMA IV.

10. Si en dos Figuras $AacE, PprT$ se inscriben, como antes, dos series de paralelogramos, de suerte que sea en ambas igual el número, y que disminuidas sus bases al infinito, las razones últimas de cada término de una serie á su correspondiente en la otra sean iguales: digo que las dos Fi-

guras estarán tambien en la misma razon. *Fig. 3 y 4.*
 Porque estando cada uno de los paralelogramos ó términos de una serie con su correspondiente en la otra en la misma razon, estarán componiendo las sumas de las dos series en la misma razon; pero estas sumas últimas son (4) respectivamente iguales á sus Figuras: luego como un paralelogramo qualquiera en una serie á su correspondiente en la otra, así una Figura á la otra. Que es &c.

COROLARIO.

III. Lo que decimos de las Figuras y paralelogramos inscriptos en ellas, se extiende á qualesquiera cantidades divididas en igual número de partes, en las que, mientras éste se aumenta al infinito, disminuyéndose igualmente cada parte, tienen todas entre sí la misma razon, primera á primera, segunda á segunda, y así las demás por su orden: porque en esta hipótesis la última razon que tenga una parte á su correspondiente, esa misma tendrá el todo al todo.

EXEMPLO.

12. La Figura AaE sea un quadrante de círculo, y la Figura ApE un quadrante de Elipse, de modo que uno de sus semiexes AE sea igual al

radio de dicho círculo. *Fig. 5.*

Divídase el radio AE en qualquier número de partes iguales $AB, BC, CD, \&c.$ é inscribanse en las dos Figuras los rectángulos $Ab, Bc, Cd, \&c.$ y $Aq, Br, Cs, \&c.$ Por la naturaleza de la Elipse es $HD \times DE : Ds = AE : Ap$; pero por la propiedad del círculo es $HD \times DE = Dd^2$: luego será $Dd^2 : Ds = AE : Ap$, y por consiguiente $Dd : Ds = AE : Ap$; pero $Dd : Ds = Cd : Cs$: luego será $Cd : Cs = AE : Ap$. Del mismo modo se demostrará que todos los demás rectángulos inscriptos en el quadrante circular están con sus correspondientes inscriptos en el quadrante elíptico en la razon constante de AE á Ap ; por consiguiente disminuidas las bases de dichos rectángulos, y aumentado su número al infinito, las razones últimas de cada rectángulo inscripto en el quadrante circular á su correspondiente inscripto en el quadrante elíptico son iguales: luego será (10) el quadrante $AaE : ApE = AE : Ap$, de donde se infiere el Teorema que el Círculo es á la Elipse, que tiene uno de sus exes igual al diámetro del círculo, como este exe ó diámetro al otro de la Elipse, esto es, $AE a HmE : AE p HnE = HE : pn$.

DEFINICION.

13. Si en la hipótesis del Lema antecedente los paralelogramos inscriptos ó circunscriptos á las Figuras son tambien semejantes, cada uno á su correspondiente, las Figuras AaE , PpT se llaman semejantes. *Fig. 3 y 4.*

LEMA V.

14. En las Figuras semejantes tanto los lados rectilíneos, como los curvilineos homólogos, son proporcionales, y las áreas tienen la razón duplicada de dichos lados. *Fig. 3 y 4.*

Siendo las Figuras AaE , PpT semejantes, serán $Al:Pu = Bm:Qz$, y además semejantes Al á Pu , y Bm á Qz : luego $Aa:Pp = Bb:Qq$, de donde $aK:pF = Aa:Pp$; pero por la semejanza de los paralelogramos Al y Pu es $Aa:Pp = AB:PQ = Kb:Fq$: luego será $aK:pF = Kb:Fq$; y siendo además los ángulos aKb , pFq iguales, será $ab:pq = Kb:Fq = Aa:Pp$. Del mismo modo se demostrará ser $bc:qr = Bb:Qq = Aa:Pp$; y así sucesivamente de las demas cuerdas: luego será $ab:pq = bc:qr = cd:rs = \&c.$ y componiendo se tendrá $ab + bc + cd + \&c. : pq + qr + rs + \&c. = ab:pq = Aa:Pp$; pero las sumas últimas de las

cuerdas evanecentes (8) coinciden con las respectivas curvas abE, pqT : luego será $abE: pqT = Aa: Pp$. Finalmente por ser los paralelogramos Al, Pu, Bm, Qz proporcionales y semejantes, será $AB: PQ = BC: QR$, y por igual razón $BC: QR = CD: RS$, y así sucesivamente; por consiguiente se tendrá $AB: PQ = BC: QR = CD: RS = \&c.$ y componiendo será $AB + BC + CD + \&c.: PQ + QR + RS + \&c. = AB: PQ$, esto es, $AE: PT = AB: PQ = Aa: Pp$; y habiéndose demostrado antes ser $abE: pqT = Aa: Pp$, será $abE: pqT = Aa: Pp = AE: PT$; que es lo primero.

2°. Siendo las Figuras AaE, PpT semejantes, las razones de los paralelogramos Al á Pu , Bm á Qz , $\&c.$ serán iguales: luego será (10) la Figura $AaE: PpT = Al: Pu$; pero por la semejanza de los paralelogramos Al y Pu es $Al: Pu = \overline{Aa}^2: \overline{Pp}^2$: luego será la Figura $AaE: PpT = \overline{Aa}^2: \overline{Pp}^2$; y habiéndose demostrado en el caso anterior ser $Aa: Pp = AE: PT$, será $\overline{Aa}^2: \overline{Pp}^2 = \overline{AE}^2: \overline{PT}^2$; luego se tendrá $AaE: PpT = \overline{Aa}^2: \overline{Pp}^2 = \overline{AE}^2: \overline{PT}^2$. Que así $\&c.$ como antes se ha demostrado.

EXEMPLO.

15. Sean las Figuras AHG, aHg dos qua-

drantes de círculos que tienen sus centros en el punto *H*. Fig. 6.

Divídase el radio *AH* en qualquier número de partes iguales *AB*, *BC*, *CD*, &c. y tiradas las ordenadas *BP*, *CF*, *DJ*, &c. complétense los rectángulos *BE*, *CK*, &c. inscriptos en el cuadrante *AHG*. Tirese los radios *PH*, *FH*, *JH*, &c. y desde los puntos *p*, *f*, *j*, &c. báxense las perpendiculares *pb*, *fc*, *jd*, &c. al radio *aH*, y complétense los rectángulos *be*, *ck*, &c. inscriptos en el segundo cuadrante *aHg*. Siendo, pues, las rectas *PB* y *pb* paralelas, será $BH : bH = PH : pH$; pero por las paralelas *FC* y *fc*, es $CH : cH = FH : fH = PH : pH$; luego será $BH : bH = CH : cH$; de donde $BC : bc = BH : bH = PH : pH$; pero es $BP : bp = PH : pH$; luego será $BC : bc = BP : bp$, y por consiguiente los rectángulos *BE* y *be* serán semejantes: luego se tendrá el rectángulo *BE*: $be = \overline{BP}^2 : \overline{bp}^2 = \overline{PH}^2 : \overline{pH}^2$. Del mismo modo se demostrará que el rectángulo *CK* es semejante al rectángulo *ck*, y que es $CK : ck = \overline{PH}^2 : \overline{pH}^2$; y así sucesivamente: luego los cuadrantes circulares *AHG*, *aHg* semejantes; por consiguiente (14) el cuadrante circular *AHG*: $aHg = \overline{AH}^2 : \overline{aH}^2$, y el arco *AG*: $ag = AH : aH$; de donde resulta el Teorema, que los círculos son entre sí como

los cuadrados de sus radios, y que sus circunferencias son entre sí como los radios.

LEMA VI.

16. Si á un arco qualquiera ACB dado de posición se le subtende la recta AB , y en un punto A de su curvatura continua es tangente la recta AD prolongada por amibos lados; en fin si el punto B se acerca continuamente al punto A , y coinciden: digo que el ángulo BAD formado por la cuerda y la tangente se disminuirá al infinito, y últimamente se desvanecerá. *Fig. 7.*

Pues, si dicho ángulo BAD no se desvanece, el arco ACB y la tangente AD contendrán un ángulo igual á un ángulo rectilíneo, y por consiguiente la curvatura en A no será continua contra la hipótesis. Luego &c.

ESCOLIO.

17. Si la curva $FAGCAE$ referida al diámetro MN (*Fig. 8.*) tiene dos ramos que se cortan en el punto A , este punto no estará en curvatura continua, y la curva tendrá dos tangentes, esto es, la recta AD tangente del ramo $GCAE$ en el punto A , y la recta AD' tangente del ramo GAF en el mismo punto A . Ahora mientras el punto B se

acerca al punto A , moviéndose hacia la parte C , el ángulo BAD se disminuye, y al contrario se aumenta el ángulo BAD' , de modo que coincidiendo el punto B con el punto A , el ángulo BAD se desvanece, y al contrario el ángulo BAD' viene á ser el ángulo DAD' . Discúrrase del mismo modo respecto á los puntos triplos, quádruplos, &c. que pertenecen á tres, quatro, &c. ramos de una curva.

LEMA VII.

18. En la hipótesis del Lema antecedente, digo que la última razón mutua del arco, la cuerda y la tangente es razón de igualdad. *Fig. 7.*

En el arco ACB concíbese que acercándose el punto B al punto A , siempre las direcciones de la cuerda AB y tangente AD se prolongan á distancia finita en b , d , y á la secante BD tírese la paralela bd : concíbese tambien el arco Acb siempre semejante al arco ACB . Coincidiendo los puntos B y A , el ángulo bAd se desvanece (16); por consiguiente las rectas finitas Ab , Ad , y el arco intermedio Acb coincidirán, y serán por consiguiente iguales: luego tambien las rectas AB , AD , y el arco intermedio ACB (que son siempre proporcionales á las Ab , Ad , y arco Acb)

se desvanecerán, y tendrán la última razón de igualdad. Que les &c.

COROLARIO I.

19. Si por el punto B se tira (Fig. 9.) una paralela BF á la tangente AD , que corta á qualquiera secante AF que pase por el punto A ; dicha paralela BF tendrá últimamente la razón de igualdad con el arco evanecente AB ; porque completo el paralelogramo $AFBD$, tiene siempre AD la razón de igualdad con AB .

COROLARIO II.

20. Si por los extremos A, B del arco se tiran qualesquiera secantes BD, BE, AF, AG , que corten la tangente AD y su paralela BF , todas las abscisas AD, AE, BF, BG , la cuerda y arco AB tienen entre sí la última razón de igualdad.

COROLARIO III.

21. (Luego todas estas líneas, siempre que se arguya de las razones últimas, se podrán tomar unas por otras.

ESCOLIO.

22. Por tanto queda demostrado (Fig. 10.) que

en el círculo el arco evaneciente AB , la cuerda, el seno BF , y la tangente AD de dicho arco son iguales; y en esta suposicion serán rectos los ángulos BAC , CBA , que forman los radios CA , CB con la cuerda evaneciente AB , ó con el arco evaneciente AB ; y el sector evaneciente CBA será

igual á $\frac{CB \times AB}{2}$: pero el seno verso AF del mis-

mo arco será evaneciente respecto á dichas líneas evanecientes; porque tirada la recta BH , por la semejanza de los triángulos BFA , AHB , será $HA:AB = AB:AF$; pero AB tiene con HA una razón menor que qualquiera dada: luego AF tendrá con AB una razón menor que qualquiera dada; esto es, será AF evaneciente respecto á AB ; por consiguiente el cóseno de un arco evaneciente es igual al radio. Además, tirada BK paralela al radio AC , será DK evaneciente respecto al seno verso AF , por ser $AC:AD = BK:KD = AF:KD$. Finalmente, tirada qualquiera secante DE , pase ó no por el centro, la parte DB de ella, comprehendida entre el arco evaneciente y su tangente, será evaneciente respecto á la tangente evaneciente, porque siendo $DE \times DB = AD^2$, será $DE:DA = DA:DB$.

LEMA VIII.

23. Si las rectas dadas AR , BR hacen con el arco ACB , cuerda AB , y tangente AD , los triángulos RAB , $RACB$, RAD , y el punto B se acerca continuamente al punto A : digo que los tres triángulos últimamente serán semejantes, y su última razón de igualdad. *Fig. 7.*

Mientras el punto B se va acercando al punto A , concíbase que las rectas AD , AB , AR se prolongan hasta los puntos distantes d , b , r , por los cuales pasa la $db r$ paralela á DBR , y que el arco Acb siempre es semejante al arco ACB . Quando coincidan los puntos A , B , el ángulo bAd se desvanecerá (16), y por consiguiente los tres triángulos rAb , $rAc b$, rAd , que siempre son finitos, coincidirán, y por lo tanto serán semejantes é iguales: luego los triángulos RAB , $RACB$ y RAD , que siempre son semejantes y proporcionales con los primeros, últimamente serán semejantes é iguales entre sí. Que es &c.

COROLARIO.

24. Luego estos triángulos (siempre que se arguya de las razones últimas) se podrán tomar unos por otros.

EXEMPLO I.

= 25. Si en la recta indefinida MN desde un punto fixo F se toman las rectas FH , FJ , FC , FK , FP , &c. en progresion aritmética, como tambien las Fh , Fj , Fc , &c. en la misma progresion, y por los puntos F , H , J , C , K , &c. h , j , c , &c. se levantan perpendiculares sobre la recta MN , y se cortan de modo que las FY , HA , JB , CE , &c. formen una progresion geométrica crecente; y las FY , ha , jb , ce , &c. la misma progresion decrecente; la curva que pasa por los infinitos puntos Y , A , B , E , &c. a , b , e , &c. así determinados, se llama Logarítmica, y digo que esta curva tiene la subtangente constante.

Fig. II.

Sean las rectas TAD , SEL tangentes á la curva en qualesquiera puntos A , E . Tírense las ordenadas AH , EC ; tómense las abscisas FH , FJ , FC , FK aritméticamente proporcionales, y tiradas las ordenadas JB , KG , por la naturaleza de la curva las ordenadas AH , BJ , EC , GK estarán en proporcion geométrica; en fin tírense las rectas AR , EO paralelas á la recta MN asíntota de la misma curva. Siendo, pues, $GK:EC = BJ:AH$, será dividiendo $GQ:EC = BR:$

AH , y alternando $GO : BR = EC : AH$; pero estando las rectas FK , FC , FJ , FH en proporcion aritmética, es $CK = HJ$, de donde $EO = AR$: luego tambien será $EC : AH = GO \times AR : EO \times BR$, esto es, en razon compuesta de las razones $GO : EO$, y $AR : BR$; pero las razones últimas (23) de $GO : EO$, y AR, BR son respectivamente iguales á las de $LO : EO$, y $AR : RD$: luego será $EC : AH$ en razon compuesta de las razones $LO : EO$, y $AR : RD$; y siendo éstas respectivamente iguales á las de $EC : CS$, y $TH : HA$, por la semejanza de los triángulos EOL y SCE , ARD y THA , se tendrá $EC : AH$ en razon compuesta de las razones $EC : CS$, y $TH : HA$, y por consiguiente $EC : AH = EC \times TH : AH \times CS$: luego serán iguales las subtangentes HT, CS pertenecientes á qualesquiera puntos A, E de la curva.

Es evidente que tomando distintas progresiones, se describirán otras tantas logarítmicas: por exemplo, la logarítmica, en donde se toman los logaritmos tabulares, tiene la progresion aritmética de las abscisas $FH, FJ, FC, FK, FP, \&c.$ correspondiente á la serie aritmética de los números naturales 1, 2, 3, 4, &c. y la progresion geométrica de las ordenadas $FY, AH, BJ, EC,$

&c. correspondiente á la serie geométrica 1, 10, 100, 1000, &c.: esto es, $L. 1 = 0$, $L. 10 = 1$, $L. 100 = 2$, &c.

EXEMPLO II.

26. Si dos logarítmicas ACB , OPQ tienen en el origen F de las abscisas una comun ordenada FF ; las abscisas FJ , FV correspondientes á iguales ordenadas JB , VQ serán como las subtangentes de dichas logarítmicas, esto es, en razon constante. *Fig. 12.*

Tírense las ordenadas AH , OZ iguales; sean GAD , EOS tangentes á dichas curvas en los puntos A , O ; en fin tírense las rectas AR , OT paralelas á la asíntota MN . Por tanto se demostrará, como en el Exemplo antecedente, que la última razon de $AR:RB$ es igual á la de $GH:HA$, y que la última razon de $QT:TO$ es igual á la de $OZ:ZE$; pero $RB=QT$, y tambien $HA=OZ$ (*sup.*): luego será por igualdad ordenada $AR:OT=HG:ZE$, ó bien $HJ:ZV=HG:ZE$. Si se tiran otras dos ordenadas VK , LX iguales, se demostrará del mismo modo ser la parte evanecente VH de la magnitud FJ á la parte evanecente ZL de la magnitud FV , como la subtangente constante HG de la logarítmica ACB á la subtangente

constante ZE de la logarítmica OPQ , y así sucesivamente: luego (II) será $FJ: FV = HG: ZE$.

Si se suponen, ACB la logarítmica, en la que se toman los logaritmos hiperbólicos con la subtangente $GH=1$, OPQ la logarítmica en la que se toman los logaritmos tabulares, y finalmente las ordenadas $BJ=QV=10$; será por lo demostrado el logaritmo hiperbólico de 10 al logaritmo tabular del mismo número como la unidad á ZE ; esto es (II. 337) $2,30258509:1=1:ZE$, y por consiguiente la subtangente de la logarítmica en la que se toman los logaritmos tabulares será igual á $\frac{1}{2,30258509} = ,43429448$ próximamente.

ESCOLIO I.

27. Hasta aquí hemos supuesto que el ángulo del contacto ni es infinitamente mayor, ni infinitamente menor que los ángulos de los contactos que las circunferencias de los círculos forman con sus tangentes. Pues, si las curvas AB , AC , y la recta AD se tocan mutuamente en A , y tirada la recta DBC , sean siempre ó en el punto de la evanescencia, DB como $\overline{AD}^m$, y CD como $\overline{AD}^n$, y finalmente sea $m > n$: digo que el ángulo del contacto BAD será infinitamente menor que el ángu-

lo CAD , y por consiguiente no podrá pasar entre la curva AB y su tangente AD otra curva del mismo género de la AC . Fig. 13.

Supuestas p y q cantidades finitas y constantes,

sean $BD = \frac{\overline{AD}^m}{p}$, $CD = \frac{\overline{AD}^n}{q}$, y se tendrá BD :

$$CD = \frac{\overline{AD}^m}{p} : \frac{\overline{AD}^n}{q} = \overline{AD}^{m-n} : \frac{p}{q}; \text{ pero siendo}$$

AD evanecente, lo es tambien $\overline{AD}^{m-n}$: luego será BD á CD como la cantidad evanecente $\overline{AD}^{m-n}$

á la cantidad finita $\frac{p}{q}$, ó como una finita á una in-

finita; por consiguiente la ordenada evanecente DB será infinitamente menor que la ordenada evanecente DC ; y por lo tanto el ángulo BAD infinitamente menor que el ángulo CAD .

Por medio de las infinitas Parábolas, cuya equacion es $p^{m-1} \times BD = \overline{AD}^m$, se tendrá una serie infinita de los ángulos del contacto, que forman dichas curvas con las tangentes tiradas por sus vértices primarios, esto es, suponiendo m sucesivamente igual á los términos de la serie 2, 3, 4, 5, 6, &c. se tendrán las equaciones $p \times BD = \overline{AD}^2$, $p^2 \times BD = \overline{AD}^3$, $p^3 \times BD = \overline{AD}^4$, &c. que son á las líneas parabólicas de los órdenes segundo, tercero, quarto, &c. luego el ángulo del

contacto en el vértice primario de la línea parabólica del quarto orden será infinitamente menor que el ángulo del contacto en el vértice primario de la línea parabólica del tercer orden, y éste infinitamente menor que el ángulo del contacto en el vértice primario de la Parábola Apoloniana.

Discúrrase del mismo modo respecto á la equacion de otras infinitas Parábolas expresada por $p \times \overline{B D}^{m-1} = \overline{A D}^m$, ó bien $p^{m-1} \times \overline{B D} = \overline{A D}^{m-1}$.

Por tanto se refieren las curvaturas de todos los infinitos géneros de curvas á las que tienen en el vértice las infinitas Parábolas: como, por exemplo, si en una curva dada EG (Fig. 14.) se halla ser la ordenada evaneciente FG como $\overline{EF}^3$, se referirá la curvatura EG á la curvatura AB (Fig. 13) de la parábola cúbica expresada por la equacion $p^2 \times \overline{B D} = \overline{A D}^3$, y el ángulo del contacto que forma la curva EG con la tangente EF ni será infinitamente mayor, ni infinitamente menor que el ángulo del contacto en el vértice primario de dicha parábola: por la misma razon la curvatura HK (Fig. 15) del círculo se referirá á la curvatura AC (Fig. 13) de la Parábola Apoloniana, porque es la ordenada evaneciente IK como $\overline{HI}^2$, como facilmente se demuestra. Tírense, pues, la per-

pendicular KL al diámetro HM , y las cuerdas KM , KH ; y por ser los triángulos MKH , HLK semejantes, será $MH:HK=HK:HL$; de donde $\overline{HK}^2 = MH \times HL$; pero la cuerda evaneciente HK es igual (21) á HI , y además $HL=IK$: luego será $MH \times KI = \overline{HI}^2$; por consiguiente $KI:\overline{HI}^2 = 1:MH$ cantidad constante.

Finalmente observense los infinitos órdenes (Fig. 13) de las ordenadas evanecientes DE , DB , DC , &c. de las cuales unas son infinitamente menores que otras, ó bien que tienen entre sí una razón menor que qualquiera dada.

ESCOLIO II.

28. También lo que se ha demostrado en los Lemas antecedentes respecto á las curvas, y á las superficies comprehendidas por ellas, y sus coordenadas, se aplica fácilmente á la superficie de los sólidos, y á los mismos sólidos.

1.º Si en la Figura curvilínea $EcaA$ se inscriben los rectángulos Ab , Bc , Cd , &c. y se circunscriben los Al , Bm , Cn , &c. y en esta disposición dicha figura da una revolución al rededor del eje EA ; es evidente que la figura $EcaA$ formará un sólido, y los rectángulos inscriptos, y los circunscriptos describirán sus correspondientes cilin-

dros inscriptos y circunscriptos al sólido; y considerando disminuidas las bases AB , BC , CD , &c. de dichos rectángulos, y aumentado su número al infinito; la suma de los cilindros evanecientes ó menores que qualquiera dado, inscriptos en el sólido coincidirá con dicho sólido, y lo mismo sucederá con la suma de los cilindros evanecientes circunscriptos al sólido. (*Fig. 16*). Pues, suponiendo las bases AB , BC , &c. iguales, y prolongando las paralelas nL , o M hasta encontrar el lado Aa en los puntos F , G , el cilindro formado por el rectángulo Do será igual al cilindro formado por el rectángulo AH ; la diferencia entre los cilindros formados por los rectángulos Cn y Cd será igual á la diferencia entre los cilindros formados por los rectángulos AL y AH ; la diferencia entre los cilindros formados por los rectángulos Bm y Bc será igual á la diferencia entre los cilindros formados por Ab y AL ; y la diferencia entre los cilindros formados por los rectángulos Al y Ab será ella misma; luego la diferencia entre los cilindros circunscriptos al sólido formados por los rectángulos Do , Cn , Bm , Al , y los cilindros inscriptos en el sólido formados por los rectángulos Cd , Bc , Ab , será el cilindro formado por el rectángulo Al ; pero este cilindro disminuyéndose

su altura AB al infinito, resulta menor que qualquier dado: luego la figura inscripta en el sólido, y la circunscripta á él, y con mucha mas razón el sólido intermedio, son últimamente iguales.

Nótese que el cilindro evanecente descripto por el rectángulo circunscripto Cn , el cilindro evanecente descripto por el correspondiente rectángulo inscripto Cd , y con mucha mas razón el sólido evanecente formado por el área $CcdD$, serán iguales entre sí: porque dichos cilindros están entre sí como los círculos descriptos por los radios Dn , Dd , y la diferencia entre estos círculos es menor que qualquiera dada.

Si las bases AB , BC , &c. de los referidos rectángulos no son iguales, se supondrá ser AB la mayor de todas.

2º. Si la figura curvilínea AaE da una revolucion al rededor del exe EA , la curva Eca describirá la superficie del sólido formado por dicha revolucion, y los puntos a , b , c , &c. de dicha curva describirán respectivamente las circunferencias circulares aha , bgb , cfc , &c. cuyos radios son las perpendiculares Aa , Bb , Cc , &c. al exe EA ; y considerando las AB , BC , &c. evanecentes, lo serán también los arcos ab , bc , &c. en esta disposicion, la superficie descripta por la

curva Ea será igual á la suma de los productos de cada arco evanecente de la misma curva multiplicado por la circunferencia del círculo, cuyo radio es la perpendicular baxada desde el extremo de dicho arco al exe AE , esto es, será igual á $ab \times bgb + bc \times cfc + cd \times ded + \&c.$ Fig. 17.

Mientras la curva abE da una revolución al rededor del exe AE , el arco ab describirá sucesivamente las superficies $aab'b$, $a'a''b''b'$, $\&c.$ hasta volver al lugar de donde salió, las circunferencias aha , bgb quedarán divididas en igual número de partes aa' , $a'a''$, $\&c.$ y bb' , $b'b''$, $\&c.$ y la suma de dichas superficies será la superficie descripta por el arco ab : entiéndase lo mismo respecto á las superficies descriptas por los arcos bc , cd , $\&c.$ hasta el vértice E . Considerando ahora la recta AB evanecente, y será tambien evanecente la diferencia entre los radios Aa y Bb , y por consiguiente evanecente la diferencia entre las circunferencias aha , y bgb : luego si se consideran evanecentes los arcos aa' , $a'a''$, $\&c.$ bb' , $b'b''$, $\&c.$ se tendrán $aa' = bb'$, $a'a'' = b'b''$, $\&c.$ pero (18) los arcos evanecentes coinciden con sus respectivas cuerdas: luego la superficie $aab'b$ será un quadrilátero que tiene los lados opuestos iguales: entiéndase lo mismo respecto á las demas superficies $a'a''b''b'$, $a''a'''b'''b''$,

&c. en las que se considera dividida toda la superficie descripta por el arco evanecente ab . Y siendo el exe EA perpendicular al plano circular aha ; será el plano aEh , que pasa por dicho exe, perpendicular á dicho círculo aha ; pero (22) el arco aa' menor que qualquiera dado es perpendicular al diámetro ah , que es la comun seccion de dichos planos aha y aEh : luego será aa' perpendicular al plano haE , y por consiguiente al arco evanecente ab ; esto es, el ángulo $a'ab$ será recto; pero el quadrilátero $aa'b'b$ tiene sus lados opuestos iguales por lo demostrado: luego la superficie evanecente $aa'b'b$ será un rectángulo igual á $ab \times bb'$. Con el mismo método se demostrará ser la superficie evanecente $a'a''b''b' = a'b' \times b'b'' = ab \times b'b''$, y así sucesivamente respecto á las demas superficies evanecentes, en las que se considera dividida la superficie descripta por el arco evanecente ab : luego la superficie descripta por el arco evanecente ab será igual á $ab \times bgb$. Del mismo modo se demostrará que la superficie descripta por el arco evanecente bc es igual á $bc \times cfc$; y así de todas las superficies descriptas por los demas arcos evanecentes de la curva propuesta. Luego la superficie descripta por la curva Ea , que da una revolucion al rededor del exe EA , será igual á

$$ab \times bgb + bc \times cfc + cd \times ded + \&c.$$

Es evidente que si la curva aE se refiere al focus F , y se mueve al rededor de la ordenada EF como eje, la superficie descrita por dicha curva será la misma que anteriormente se ha considerado, y en consecuencia será igual á la suma de los referidos productos. Adviértase que son distintas las expresiones de las areas, y de los sólidos descritos por ellas, respecto á las curvas referidas á los focus; pero de un modo semejante se aplican los mismos principios á dichas areas y sólidos, como se verá á continuacion.

3°. Si en qualquiera Figura curvilínea AFJ contenida por la curva AJ referida al focus F , y por las ordenadas FA y FJ , se inscriben los sectores circulares semejantes AFa , EFp , BFm , &c. y se circunscriben los EFd , BFG , CFH , &c. y en esta disposicion se disminuyen unos y otros, y se aumenta su número al infinito; las razones últimas que tienen entre sí la Figura inscripta, la circumscripita y la curvilínea, son razones de igualdad. *Fig. 18.*

Prolónguense los arcos circulares GBm , DEp , Aa hasta encontrar la ordenada FJ en los puntos M , N , O . La diferencia que hay entre el sector circumscripto LFJ , y el inscripto CFK , es la su-

perficie $LCKJ$; la diferencia entre el sector circunscripto $HFC = CFK$, y el inscripto $BFm = mFM$, es la superficie $CmMK$; la diferencia entre el sector circunscripto $GFB = mFM$, y el inscripto $EFp = PFN$, es la superficie $PmMN$; y la diferencia entre el sector circunscripto $DFE = PFN$, y el inscripto $Afa = QFO$, es la superficie $PQON$: luego la diferencia que pasa entre los sectores circunscriptos y los inscriptos es igual á la suma de las superficies $LCKJ$, $CmMK$, $mPNM$, $PQON$, esto es, igual á la superficie $LQOJ$; pero esta superficie, disminuyéndose el ángulo DFJ al infinito, resulta menor que qualquiera dada: luego la figura inscripta, la circunscripta, y con mucha mas razon la curvilinea intermedia, son últimamente iguales.

Nótese que la superficie $LCKJ$ es evanecente respecto al sector evanecente FCK , porque es $LCKJ : FCK = 2JK : KF$, y $2JK$ tiene con KF una razon menor que qualquiera dada. Por tanto será el sector evanecente $FCK = FLJ = FCJ$; y por la misma razon el sector evanecente $FBm = FHC = FBC$, y así sucesivamente.

4°. Si la figura aFE contenida por la curva aE referida al focus F , y por las ordenadas aF , FE , da una revolucion al rededor de la ordena-

da EF , como eje, y supuesto lo que se dixo anteriormente, se tiran las ordenadas Fb , Fc , Fd , &c. digo que el sólido producido por dicha revolución, es igual á la suma de los productos de los triángulos evanescientes aFb , bFc , cFd , &c. multiplicados respectivamente por dos terceras partes de las circunferencias bgb , cfc , ded , &c. cuyos radios son las perpendiculares bB , cC , dD , &c. á la ordenada EF . Fig. 17.

Mientras la figura curvilinea aFE da una revolución al rededor de la ordenada EF , el triángulo evanesciente aFb describirá sucesivamente los sólidos $Faadb$, $Fadb'b'$, &c. hasta volver al lugar de donde salió; pero (2.º) la base $aadb'$ de dicho sólido es un rectángulo, y aa' como tambien bb' son perpendiculares al plano aAE , y de consiguiente al triángulo aFb : luego dicho sólido será una pirámide igual á $aFb \times \frac{2}{3} bb'$: con el mismo método se demostrará el sólido piramidal $b''a''b'a'F = a'Fb' \times \frac{2}{3} b'b'' = aFb \times \frac{2}{3} b'b''$, el sólido piramidal $b'''a'''a''b''F = aFb \times \frac{2}{3} b''b'''$, y así sucesivamente: luego el sólido formado por el triángulo evanesciente aFb será igual á $aFb \times \frac{2}{3} bgb$. Del mismo modo se demostrará que el sólido descrito por el triángulo evanesciente bfc es igual á $bfc \times \frac{2}{3} cfc$, y así sucesivamente de los sólidos

formados por los demas triángulos evanecentes, en los que se considera dividida la figura aFE . Por tanto el sólido descrito por la figura curvilínea aFE , que da una revolución alrededor de la ordenada EF , como exe, será igual á $aFb \times \frac{2}{3} bgb + bFc \times \frac{2}{3} cfc + cFd \times \frac{2}{3} ded + \&c.$;

EXEMPLO I.

29. Se pide hallar la superficie descrita por la revolución del arco circular AI alrededor del radio AF . Fig. 19.

Consta por lo demostrado (28) que la superficie propuesta es igual á la serie $CJ \times CPC + BC \times BTB + BE \times EDE + \&c.$ en la qual se consideran evanecentes los arcos CJ , BC , BE , &c. Tírense los radios FC , FI , y la CY paralela al radio AF : y siendo el arco CJ evanecente, será (22) el ángulo FCJ recto; pero el ángulo NCI es recto: luego será $FCJ = NOI$; y quitando el común ángulo FCY , resultará $NCI = YCI$; pero los ángulos N , Y son iguales por rectos: luego los triángulos CNI , CNY serán semejantes; y en ellos proporcionales los lados, esto es, $CJ : CY = CF : CN$; por consiguiente $CJ \times CN = CY \times CF = FA \times MN$; pero $CJ \times CN : CJ \times CPC = CN : CPC = AF : APGCA$: luego se

rá $AF \times MN : CJ \times CPC = AF : APGCA = AF \times MN : APGCA \times MN$; por consiguiente $CJ \times CPC = APGCA \times MN$. Del mismo modo se demostrará que son, $BC \times BTB = APGCA \times NR$, $BE \times EDE = APGCA \times RS$, y así sucesivamente; pero la superficie formada por el arco circular AJ es igual á $CJ \times CPC + BC \times BTB + BE \times EDE + \&c.$ luego dicha superficie será igual á $APGCA \times MN + APGCA \times NR + APGCA \times RS + \&c. = APGCA \times AM$: de donde resulta el Teorema, que la superficie descrita por la revolucion del arco circular AJ al rededor del radio AF , como exe, es igual al seno verso AM del mismo arco multiplicado por la circunferencia $APGCA$.

COROLARIO I.

Luego la superficie de la Esfera descrita por la revolucion de la semicircunferencia AJG al rededor del diámetro AG será igual al diámetro AG multiplicado por la circunferencia $APGCA$; pero el círculo FPC es igual (I. 435) á la quarta parte del diámetro AG multiplicada por la circunferencia $APGCA$: luego la superficie de la Esfera será quádrupla de la de su círculo máximo FPC .

COROLARIO II.

31. Por tanto las superficies de las Esferas estarán entre sí como los quadrados de sus diámetros; porque los círculos, que son iguales á dichas superficies, están entre sí en la razón de los quadrados de sus diámetros (I. 433).

EXEMPLO II.

32. Se pide hallar el sector esférico producido por la revolucion del sector circular AFJ al rededor del radio AF como exe. Fig. 19.

Consta por lo demostrado (28) que el sólido propuesto es igual á la serie $CFJ \times \frac{1}{3} CPC + BFC \times \frac{1}{3} BTB + EFB \times \frac{1}{3} EDE + \&c.$ en la qual se consideran evanecientes los sectores CFJ , BFC , EFB , &c. pero en el círculo (29) es

$$CJ \times CPC = APGCA \times MN, \text{ de donde } \frac{CJ \times CF}{2}$$

$$\times \frac{1}{3} CPC, \text{ ó bien (22) } CFJ \times \frac{1}{3} CPC = APGCA$$

$$\times MN \times \frac{CF}{3}; \text{ y por la misma razon es } BFC \times \frac{1}{3}$$

$$BTB = APGCA \times NR \times \frac{FC}{3}, \text{ y así de los demas}$$

términos de dicha serie: luego el sector esférico formado por el sector circular AFJ será igual á

$$APGCA \times MN \times \frac{CF}{3} + APGCA \times NR \times \frac{FC}{3} +$$

$APGCA \times RS \times \frac{FC}{3} + \&c. = APGCA \times CF \times \frac{AM}{3}$; y por ser el cono, que tiene por base el círculo máximo FPC de la esfera, y por altura el seno verso AM del arco AJ , igual á $APGCA \times \frac{AF}{2} \times \frac{AM}{3}$, se tendrá que el sector esférico

formado por el sector circular AFJ , que da una revolucion al rededor del radio AF , es duplo del cono que tiene por base el círculo máximo de la esfera, y por altura el seno verso AM del arco AJ .

COROLARIO I.

33. Se infiere que la solidez de la esfera es dupla de la del cono, que tiene por base el círculo máximo de la esfera, y por altura el diámetro AG .

COROLARIO II.

34. Por tanto las esferas estarán entre sí como los cubos de sus diámetros; porque los conos iguales á dichas esferas resultan semejantes, y (I. 456) están entre sí en la razon triplicada de los diámetros de sus bases.

NOCIONES GENERALES.

35. Las cantidades variables se notan con las últimas letras s, t, u, x, y, z del alfabeto, y las constantes con las primeras $a, b, c, &c.$

36. Funcion de una cantidad variable es toda expresion en la que se halla dicha variable, de qualquier modo, mezclada ó no con constantes: así $ax + bx^2 + cx^3, (a + bx^p + cx^q)^r, &c.$ son funciones de la variable x .

37. Las diferencias menores que qualquiera dada, ó las diferencias evanecentes de las cantidades variables, se llaman Diferenciales, Elementos, Infinitésimos, y tambien Fluxiones de las mismas cantidades variables; y dichas cantidades variables se llaman Sumas, Integrales, y tambien Fluents, respecto á sus diferencias evanecentes.

38. Las diferencias que tienen con las cantidades variables finitas, á quienes pertenecen, una razon menor que qualquiera dada, se llaman Diferenciales del primer orden, ó primeras. Las diferencias que tienen con las diferenciales del primer orden una razon menor que qualquiera dada, se llaman Diferenciales del segundo orden, ó segundas respecto á las cantidades variables finitas á quienes pertenecen: así la diferencial del tercer

orden, ó tercera, es la que tiene con la diferencial segunda una razon menor que qualquiera dada. Discúrrase del mismo modo de las diferenciales del quarto orden, y así sucesivamente.

ESCOLIO.

39. 1.^o Si en la recta AM (*Fig. 20*) se toma qualquiera serie de cantidades $AB, AC, AD, AE, AF, \&c.$ expresadas respectivamente con las letras $x, x', x'', x''', x''', \&c.$ es evidente que las diferencias $BC, CD, DE, EF, \&c.$ serán respectivamente iguales á $x - x', x' - x'', x'' - x''', x''' - x''', \&c.$ Por tanto considerando dichas diferencias evanescentes ó menores que qualquier cantidad finita, serán $x - x'', x' - x''', \&c.$ diferenciales del primer orden, respecto á la variable x , y estas diferenciales serán iguales ó constantes, si la serie de las cantidades $x, x', x'', x''', \&c.$ es aritmética. Dígase lo mismo respecto á la serie creciente (*Fig. 21*) de las cantidades $AB, AC, AD, AE, \&c.$ cuyas diferencias primeras son $x' - x, x'' - x', x''' - x'', x'' - x''', \&c.$ Adviértase que en el primer caso la diferencial primera $x - x'$ será la diminucion evanescente de la variable x , y que en el segundo la diferencial primera $x' - x$ será el aumento evanescente de la misma variable x : luego

á la diferencial primera de la variable x se dará el signo $+$ ó $-$, según se considera aumentada ó disminuida dicha variable.

2º. Si dichas diferencias primeras, esto es, $x - x'$, $x' - x''$, $x'' - x'''$, &c. no son iguales, las diferencias de esta serie serán $-x'' + 2x' - x$, $-x''' + 2x'' - x'$, &c. Por tanto si dichas diferencias primeras son diferenciales del primer orden, y las diferencias segundas se consideran evanescientes respecto á aquellas, se tendrán en las mismas diferencias segundas, las diferenciales segundas ó las diferenciales de las diferenciales de la variable propuesta x . Digase lo mismo respecto á la serie creciente (Fig. 21) de las cantidades AB , AC , AD , AE , &c. cuyas diferencias segundas son $x''' - 2x'' + x'$, $x'''' - 2x''' + x''$, &c. Adviértase que á las diferenciales segundas se deberá dar el signo $+$ ó $-$, según las diferenciales primeras se aumentan ó disminuyen. Con el mismo método se manifestarán por medio de las diferencias terceras, cuartas, &c. las diferenciales terceras, cuartas, &c. de la variable propuesta x .

3º. Finalmente obsérvese que el cuadrado de la diferencial primera de la variable x , y el producto de las diferenciales primeras de dos variables, serán diferenciales del segundo orden: pues, lla-

mada m la diferencial primera de la variable x , será $1 : m :: m : m^2$; pero m tiene con 1 una razón menor que qualquiera dada; luego m^2 tendrá con m diferencial del primer orden una razón menor que qualquiera dada; por consiguiente será (38) m^2 diferencial del segundo orden: asimismo llamadas m, n las diferenciales primeras de las variables x, y , será $1 : m :: m : mn$; pero m tiene con 1 una razón menor que qualquiera dada; luego mn tendrá con n diferencial del primer orden una razón menor que qualquiera dada; por consiguiente será (38) mn diferencial del segundo orden. Con el mismo método se hará ver que m^3, m^2n, mn^2 son diferenciales del tercer orden, y que m^4, m^3n, m^2n^2, mn^3 son diferenciales del quarto, y así sucesivamente. Además de dichos órdenes de cantidades evanescentes unas infinitamente menores que otras, hay otros órdenes intermedios, que resultan quando la diferencial primera está elevada á una potestad quebrada positiva: como, por exemplo, en la serie de las diferenciales $m^{\frac{1}{2}}, m^{\frac{2}{3}}, m^{\frac{3}{4}}, m, m^{\frac{5}{4}},$ &c. el segundo término será evanesciente respecto al primero, el tercero respecto al segundo, y así sucesivamente; pero dichas diferenciales serán de los respectivos órdenes $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4},$ &c. Al contrario, supuesta m cantidad infinita, es-

to es, mayor que qualquier cantidad dada, se tendrán en la serie m , m^2 , m^3 , &c. los órdenes segundo, tercero, &c. de dicha cantidad infinita, de modo que el primero tiene con el segundo una razón menor que qualquiera dada, y del mismo modo el segundo con el tercero, y así sucesivamente. Además de dichos órdenes, hay otros intermedios, como se ha hecho observar antes relativamente á las cantidades evanecentes.

40. La diferencial primera de una cantidad variable simple, como x , se nota anteponiendo la letra d á la misma variable: así dx significa la diferencial primera de la variable x (de modo que la letra d se debe considerar como un signo, y no como una cantidad multiplicada por x), y $dx \sqrt{(a^2 - x^2)}$ indica el producto de la cantidad finita $\sqrt{(a^2 - x^2)}$, y de la diferencial dx . La diferencial primera de una cantidad variable monomía de dos ó mas dimensiones, ó polinomia, se nota anteponiendo la letra D . á la misma variable, y la variable polinomia entre un paréntesis ó baxo de una raya: así $D.x^m$, $D.(ax + x^2)$ indican las respectivas diferenciales primeras de las variables x^m , $ax + x^2$.

41. La diferencial segunda, esto es, la diferencial de la diferencial de una variable simple, como

x , se nota anteponiendo las dos letras dd ó d^2 á la misma variable: así $d dx$ ó $d^2 x$ expresa la diferencial segunda de la variable x . Se usará de las dos letras DD ó D^2 . para las cantidades monomias de dos ó mas dimensiones, y para las polinomias que se pondrán entre un paréntesis ó baxo de una raya: así $D^2. x^3 y^2$, $D^2. (ax + x^2)$. indican las respectivas diferenciales segundas de las variables $x^3 y^2$, $ax + x^2$. Discúrrase del mismo modo para indicar las diferenciales terceras, quartas, &c. por medio de las respectivas expresiones d^3 , d^4 , &c. ó bien $D^3.$, $D^4.$, &c.

COROLARIO.

y 42. Luego se tendrán las equaciones (1) $x \pm dx \pm d^2 x + \&c. = x$, $\pm dx \pm d^2 x + \&c. = \pm dx$, $\pm d^2 x \pm d^3 x + \&c. = \pm d^2 x$, y así sucesivamente. Dígase lo mismo relativamente á las equaciones $x \pm \overline{dx} \pm \overline{d^2 x} \pm \overline{d^3 x} + \&c. = x$, $\pm \overline{dx} \pm \overline{d^2 x} \pm \&c. = \pm \overline{dx}$, y así sucesivamente.

ESCOLIO.

43. En lo sucesivo, así por el uso, como por la comodidad, se omitirá la raya para indicar las potestades de la diferencial de una variable simple: y así se escribirá dx^2 en lugar de $\overline{dx^2}$, dx^m en

Fig. 12.

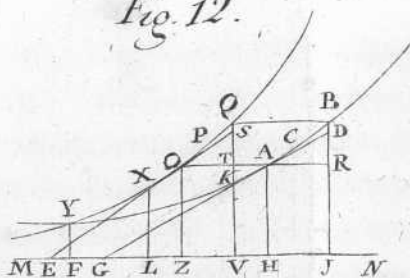


Fig. 13.

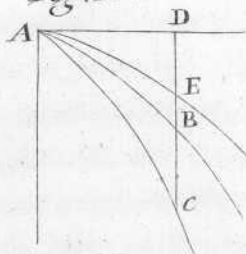


Fig. 14. Pag. 41.

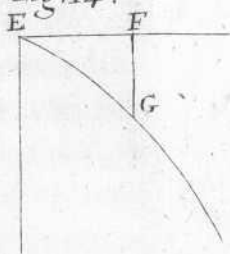


Fig. 16.

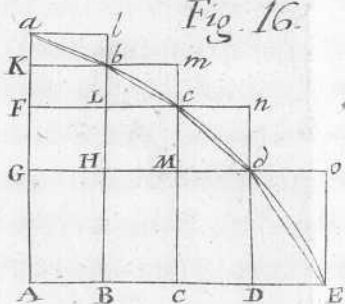


Fig. 17.

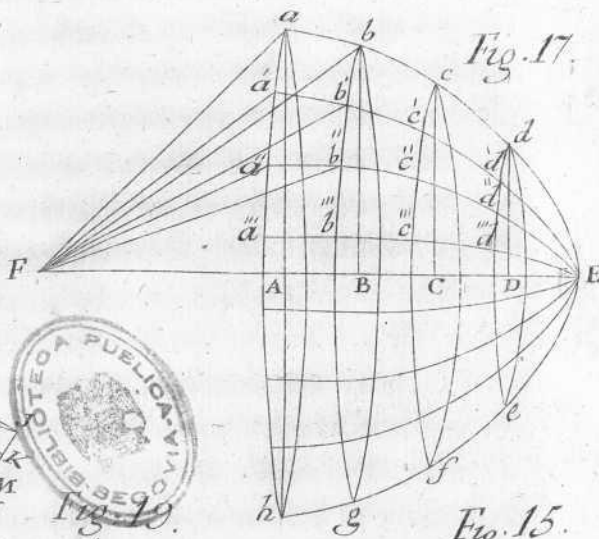


Fig. 18.

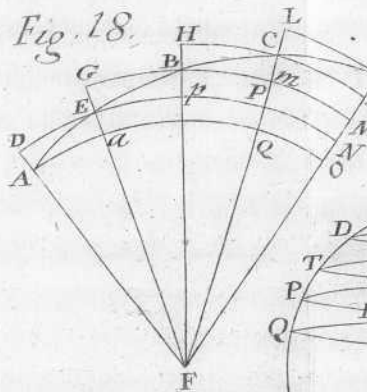


Fig. 19.

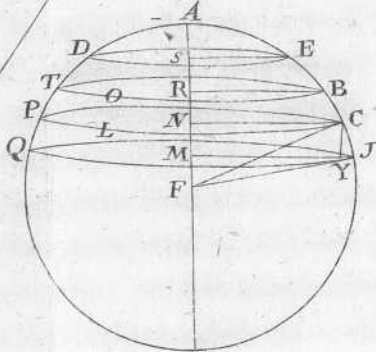


Fig. 15.

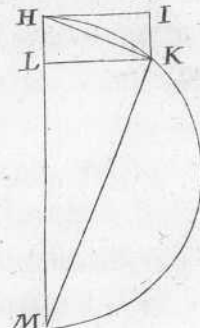


Fig. 20.



Fig. 21.

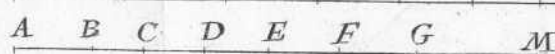


Fig. 12.



Fig. 13.



Fig. 14.



Fig. 15.

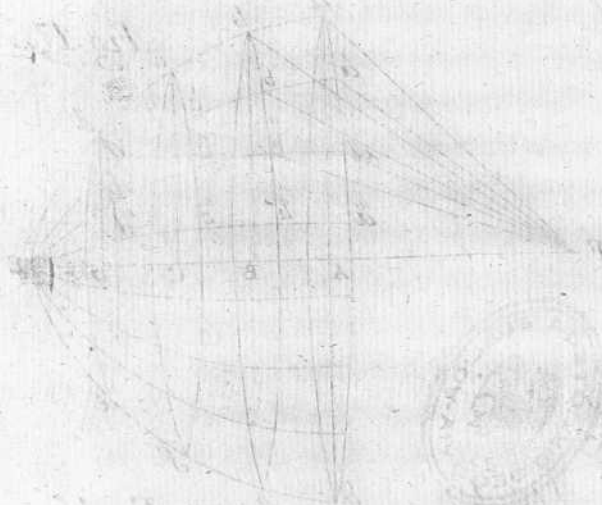


Fig. 17.

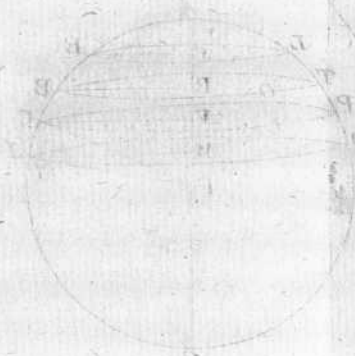


Fig. 20. A B C D E F G H I K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Fig. 21. A B C D E F G H I K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

lugar de $\overline{dx}^m$. Pero es menester hacer la distincion correspondiente, por exemplo, entre dx^2 , y d^2x , porque aunque ambas sean diferenciales del segundo orden, la primera expresa el quadrado de la diferencial dx , y la segunda indica la diferencial de la diferencial dx .

44. En qualquiera curva referida á un eje ó diámetro, se notarán con las respectivas variables x , y , s la abscisa, la ordenada y el arco de la curva, que se corresponden mutuamente. En el círculo cuyo radio r , se llamarán respectivamente p , q , u , la periferia, el quadrante, y qualquiera arco variable que se considerará tomado en el mismo quadrante; y así $\frac{p}{r}$ expresará la razon constante de la periferia de qualquier círculo al semi-diámetro que le corresponde. Finalmente en qualquiera curva referida al focus se notarán con las respectivas variables y , s , qualquiera ordenada que sale desde el focus, y el arco de la curva que corresponde á dicha ordenada; y además expresará dx el arco infinitésimo del círculo descripto con el radio igual á la ordenada y .

45. La letra S . puesta delante de una diferencial qualquiera simple ó complexa denota la integral de la misma diferencial: así $S. dx (= x)$,

S. ($2a dx + x dx$) indican las respectivas integrales de las diferenciales dx , $2a dx + x dx$.

46. Cálculo Diferencial se llama el método de hallar las diferenciales de las cantidades variables propuestas.

47. Cálculo Integral se llama el método de hallar las Sumas ó Integrales de las diferenciales propuestas.

ESCOLIO.

48. Hay muchísimas expresiones diferenciales, de las cuales hasta ahora no se saben las integrales, y de otras solo imperfectamente y por aproximación. Adviértase en general que, por ser el método del Cálculo Integral un método inverso del Diferencial, conviene hacer mucha atención á los pasos y resultados del Cálculo diferencial para llegar á los del Integral.

De las Diferenciales de las cantidades algébricas.

PROPOSICION I.

49. Si en la cantidad variable *X* compuesta de las variables simples *x*, *y*, *z*, &c. y constantes se substituyen respectivamente $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, &c. en lugar de dichas variables, y de lo que re-

sulta que llamo X' se resta la cantidad propuesta X ; el residuo será la diferencial ó el aumento evaneciente de la cantidad variable X ; esto es, $dX = X' - X$.

Expresando la X una cantidad compuesta de las variables $x, y, z, \&c.$ y constantes, y la X' una cantidad compuesta de las mismas variables aumentadas en sus diferenciales, y de las mismas constantes, será $X' - X$ la diferencia que hay entre los dos valores de la cantidad variable propuesta; pero los aumentos $dx, dy, dz, \&c.$ son evanecientes ó menores que qualquiera dado: luego dicha diferencia $X' - X$ será evaneciente ó menor que qualquiera dada, esto es, será la diferencial de la cantidad variable propuesta X , ó bien el aumento evaneciente que tiene dicha cantidad X relativamente á los aumentos $dx, dy, dz, \&c.$ Que es $\&c.$

COROLARIO I.

50. Con el mismo método se demostrará que, si mientras unas variables como $x, y, \&c.$ se aumentan, otras como $z, u, \&c.$ se disminuyen, será $dX = X' - X$, con tal que en X se substituyan dichas primeras variables aumentadas en sus diferenciales, esto es, $x + dx, y + dy, \&c.$ en lugar de las variables $x, y, \&c.$ y las otras disminuidas

de sus diferenciales, esto es, $z - dz$, $u - du$, &c. en lugar de las variables z , u , &c.

COROLARIO II.

51. Del mismo modo se demostrará que, si en la cantidad variable X se substituyen respectivamente $x - dx$, $y - dy$, $z - dz$, &c. en lugar de las variables x , y , z , &c. en la suposicion que todas se disminuyan, y lo que resulta que llamo X' se resta de la cantidad X ; el residuo $X - X'$ será la diferencial, elemento ó disminucion evaneciente de la cantidad variable propuesta X , esto es, $dX = X - X'$. Adviértase que, si mientras unas variables como x , y , &c. se disminuyen, otras como z , u , &c. se aumentan, en la cantidad X se deberán substituir $x - dx$, $y - dy$, &c. en lugar de x , y , &c. y $z + dz$, $u + du$, &c. en lugar de z , u , &c.

COROLARIO III.

52. Si la diferencia evaneciente $X' - X$ contiene algunos términos, con quienes estén los demas en una razon menor que qualquiera dada; será (42) $X' - X$ ó bien dX igual á dichos términos. Dígase lo mismo respecto á la diferencia evaneciente $X - X'$.

EJEMPLO I.

53. Se pide hallar la diferencial de la cantidad variable $by^2 + axy + x^3$.

En la cantidad propuesta substituyanse, $y + dy$ en lugar de y , $x + dx$ en lugar de x ; y se tendrá

$$\begin{aligned} & b(y + dy)^2 + 2b y dy + b dy^2 + (x + dx)^3 \\ & + axy + ay dx + a dx dy \\ & + x^3 + ax dy + 3x dx^2 \\ & + 3x^2 dx \end{aligned}$$

De esta cantidad que ha resultado, réstese la propuesta; y el residuo, esto es,

$$\begin{aligned} & 2by dy + b dy^2 + dx^3 \\ & + ay dx + a dx dy \\ & + ax dy + 3x dx^2 \\ & + 3x^2 dx \end{aligned}$$

será (49) la diferencial completa de la variable propuesta, y dicha diferencial se reducirá (42) á los términos $2by dy + ay dx + ax dy + 3x^2 dx$ contenidos en la primera columna, porque los términos de la segunda son (39. 3º.) diferenciales del segundo orden ó evanescentes respecto á los de la primera, y el término de la tercera columna es diferencial del tercer orden ó evanescente respecto á los de la segunda: luego será $D.(by^2 + axy + x^3) = 2by dy + ay dx + ax dy + 3x^2 dx$.

EXEMPLO II.

54. Dada la relación entre las cantidades variables x , y , expresada por la equacion $y^4 - 8a^2 y^3 - 12ax y^2 + 16a^2 y^2 + 48a^2 xy + 4a^2 x^2 - 64a^3 x = 0$; hallar la relación de sus diferenciales.

En la equacion propuesta substitúyanse $x + dx$, $y + dy$ en lugar de las variables x , y ; y de lo que resulta, réstese la dicha equacion: hechas estas operaciones se tendrá la equacion diferencial

$$\left. \begin{aligned} & 4y^3 dy + 6y^2 dy^2 + 4y dy^3 + dy^4 \\ & - 24a^2 y^2 dy - 24a^2 y dy^2 - 8a^2 dy^3 \\ & - 24ax y dy - 12a^2 x dy^2 - 12a dx dy^2 \\ & - 12a y^2 dx - 24a y dy dx \\ & + 32a^2 y dy + 16a^2 dy^2 + 48a^2 xy \\ & + 48a^2 y dx + 48a^2 dx dy \\ & + 48a^2 x dy + 4a^2 dx^2 \\ & + 8a^2 x dx \\ & - 64a^3 dx \end{aligned} \right\} = 0$$

Siendo los términos que forman las columnas segunda, tercera y quarta, evanescientes respecto de los de la primera, será $4y^3 dy - 24a^2 y^2 dy - 24ax y dy - 12a y^2 dx + 32a^2 y dy + 48a^2 x dy + 48a^2 y dx + 8a^2 x dx - 64a^3 dx = 0$ la diferencial de la equacion propuesta. Ahora si en dicha diferencial se trasponen todos los términos que

contienen dx , al segundo miembro, se tendrá
 $4y^3 dy - 24ay^2 dy - 24axy dy + 32a^2 y dy$
 $+ 48a^2 x dy = 12ay^2 dx - 48a^2 y dx - 8a^2 x dx$
 $+ 64a^3 dx$, de donde resulta la proporción, esto
 es, $dy : dx = 12ay^2 - 48a^2 y - 8a^2 x + 64a^3 :$
 $4y^3 - 24ay^2 - 24axy + 32a^2 y + 48a^2 x$; que
 es lo que se pedía.

Ahora si en la equación dada se supone $x=2a$,
 se hallará ser $y=2a$: luego en esta suposición será
 $dy : dx = 0 : 0$; por consiguiente se desvanecen las
 primeras diferenciales, y respecto de que en la
 misma suposición quedan las segundas, que redu-
 cidas son $8dy^2 - dx^2 = 0$, serán éstas las diferen-
 ciales de la equacion propuesta en la suposición de
 ser $x=2a$, $y=2a$. Y siendo $8dy^2 - dx^2 = 0$, se-

rá tambien $dy^2 = \frac{dx^2}{8}$, y $dy = \pm \frac{dx}{2\sqrt{2}}$; por consi-
 guiente $dy : dx = \pm 1 : 2\sqrt{2}$: luego siendo $x=2a$,
 $y=2a$, dy tendrá con dx dos razones, esto
 es, $dy : dx = 1 : 2\sqrt{2}$, $dy : dx = -1 : 2\sqrt{2}$.
 Este mismo resultado se tendrá, si en la equacion
 propuesta se substituyen $2a+dx$ y $2a+dy$ en lu-
 gar de las variables x, y . En general si una equa-
 cion formada de las variables x, y , y constantes se
 diferencia, y resulta ser $dy : dx = 0 : 0$ en la supo-
 sición que las variables x, y son iguales á cantida-

des constantes, como $x=a$, $y=b$, se hallará del mismo modo la diferencial de la equacion propuesta, si en esta se substituyen $a+dx$ en lugar de x , y $b+dy$ en lugar de y , ó bien $a+dx$ en lugar de x , y $b-dy$ en lugar de y .

ESCOLIO I.

55. Adviértase que si la diferencial segunda es la diferencial de una equacion propuesta, dy tendrá con dx dos razones, por ser dicha diferencial del segundo orden que constituye una equacion del segundo grado; asimismo si la diferencial tercera es la diferencial de una equacion dada, dy tendrá con dx tres razones, por ser esta diferencial del tercer grado; y así sucesivamente.

ESCOLIO II.

56. Obsérvese en el Exemplo antecedente que la diferencial primera de la equacion propuesta se tendrá igualmente; si dicha equacion se ordena primero por las dimensiones de una de las variables, como y , y sus términos se multiplican respectivamente por los de la serie aritmética que forman los exponentes de y , y además por $\frac{dy}{y}$; despues si esta operacion se hace separadamente

con la otra variable x de la misma equacion, el agregado de dichos productos juntos será la diferencial primera de la equacion propuesta. También si esta diferencial primera se trata del mismo modo, y el resultado se parte por 2, se tendrá la diferencial segunda; y así sucesivamente, con tal que se parta la diferencial tercera por 3, y la quarta por 4.

Equacion del Exemplo antecedente ordenada

por y ,

y

por x .

$$\begin{array}{l|l} y^4 - 8ay^3 - 12axy^2 + 48a^2xy + 4a^2x^2 & 4a^2x^2 + 48a^2yx + y^4 \\ + 16a^2y^2 & - 64a^3x - 8ay^3 \\ & - 12ay^2x + 16a^2y^2 \end{array}$$

$$\text{Series } \frac{4dy}{y}, \frac{3dy}{y}, \frac{2dy}{y}, \frac{dy}{y}, \frac{0 \times dy}{y} \quad \Bigg| \quad \frac{2dx}{x}, \frac{dx}{x}, \frac{0 \times dx}{x}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{Productos } 4y^3dy - 24ay^2dy - 24axydy + 48a^2x dy & 8a^2x dx + 48a^2y dx \\ + 32a^2y^2dy & - 64a^3dx \\ & - 12ay^2dx \end{array}$$

Es evidente que la suma de estos productos, esto es, $4y^3dy - 24ay^2dy - 24axydy + 32a^2y^2dy + 48a^2x dy + 8a^2x dx + 48a^2y dx - 64a^3dx - 12ay^2dx$, restituye la diferencial primera que se halló en el exemplo antecedente.

Ahora para hallar la diferencial segunda de la equacion propuesta, ordénese la diferencial primera

por y,	y	por x
$4y^3dy - 24ay^2dy - 24axydy + 48a^2xdy$ $- 12ay^2dx + 32a^2ydy + 8a^2xdx$ $+ 48a^2ydx - 64a^3dx$		$- 24axydy + 4y^3dy$ $+ 48a^2xdy - 24ay^2dy$ $+ 8a^2xdx + 32a^2ydy$ $+ 48a^2ydx$ $- 64a^3dx$ $- 12ay^2dx$

Multiplíquense los términos respectivamente por los de las series aritméticas

$$\frac{3dy}{y}, \quad \frac{2dy}{y}, \quad \frac{dy}{y}, \quad \frac{0xdy}{y}, \quad \left| \quad \frac{dx}{x}, \quad \frac{0xdx}{x}, \right.$$

y se tendrán los productos

$12y^2dy^2 - 48aydy^2 - 24axy^2$ $- 24aydx dy + 32a^2dy^2$ $+ 48a^2dx dy$		$- 24aydydx$ $+ 48a^2dydx$ $+ 8a^2dx^2$
---	--	---

cuya suma partida por 2 restituye la diferencial segunda $6y^2dy^2 - 24aydy^2 - 24axydx dy + 48a^2dx dy - 12axdy^2 + 16a^2dy^2 + 4a^2dx^2$, que se halló en el Exemplo antecedente. Del mismo modo se hallarán las diferenciales tercera y quarta de la equacion propuesta, con tal que se parta la tercera por 3, y la quarta por 4: como se figura á continuacion.

Diferencial segunda ordenada por y, y por x,

(51)

$$\begin{array}{r|l}
 6y^2 dy^2 - 24ay dy^2 + 48a^2 dx dy & -12a dx dy^2 + 6y^2 dy^2 \\
 -24ay dx dy - 12a dx dy^2 & -24ay dy^2 \\
 + 16a^2 dy^2 & -24ay dy dx \\
 + 4a^2 dx^2 & + 48a^2 dx dy \\
 & + 16a^2 dy^2 \\
 & + 4a^2 dx^2
 \end{array}$$

$$\text{Series } \frac{2dy}{y}, \frac{dy}{y}, \frac{0 \times dy}{y} \mid \frac{dx}{x}, \frac{0 \times dx}{x}$$

$$\text{Productos } 12y dy^2 - 24a dy^3 - 24a dx dy^2 \mid -12a dx dy^2$$

Luego partida la suma de dichos productos por 3, se tendrá $4y dy^3 - 8a dy^3 - 12a dx dy^2$, que es la diferencial tercera.

Diferencial tercera ordenada por y

$$4y dy^3 - 8a dy^3$$

$$-12a dx dy^2$$

$$\text{Serie } \frac{dy}{y}, \frac{0 \times dy}{y}$$

Producto $4 dy^4$, que partido por 4, da la diferencial quarta dy^4 de la equacion propuesta. El mismo método vale para hallar qualquiera diferencial de toda equacion algébrica: luego por lo demostrado (II. 510) si la equacion tiene dos raices iguales, su diferencial primera tendrá una de dichas raices; si la misma equacion tiene tres raices iguales, su diferencial segunda tendrá una de dichas raices; y así sucesivamente.

PROPOSICION II.

57. Hallar la diferencial de una cantidad variable aumentada ó disminuida de una cantidad constante ; como $x \pm a$.

En la cantidad propuesta $x \pm a$ substitúyase $x + dx$ en lugar de x , y de la cantidad $x + dx \pm a$ que resulta, réstese $x \pm a$; pero restada $x \pm a$ de $x + dx \pm a$, el residuo es dx : luego (49) la diferencial de $x \pm a$ es dx , esto es, $D.(x \pm a) = dx$. Que es &c.

COROLARIO I.

58. Luego una cantidad variable tiene la misma diferencial por sí sola que estando aumentada ó disminuida de una cantidad constante: como x , y $x \pm a$ tienen la misma diferencial dx , pues $D.(x \pm a) = dx$, y $D.x = dx$ (40).

COROLARIO II.

59. Por tanto la integral de la diferencial de x puede ser x ó $x \pm a$, esto es, $S.dx = x$, ó $S.dx$ igual á x mas la constante A cuyo valor puede ser positivo ó negativo. El valor de la constante A se determinará por las condiciones de los Problemas, de los cuales ha resultado la diferencial, y

su integral. Por exemplo, si debe ser $S. dx$ igual á cero, siendo $x=0$, se tendrá la constante $A=0$; esto es, $S. dx=x$; si debe ser $S. dx=0$, siendo $x=a$, se tendrá $0=a+A$, de donde $A=-a$, esto es, $S. dx=x-a$; y si debe ser $S. dx$ igual á cero, siendo $x=-a$, será $0=-a+A$, de donde $A=a$: luego $S. dx=x+a$.

ESCOLIO.

60. En la exposicion de los métodos generales para la integracion de las Fórmulas diferenciales se omitirá (quando no hay precision) dicha constante para abreviar, en la inteligencia que es menester añadirla y determinarla en los casos particulares, como se verá en lo sucesivo.

PROPOSICION III.

61. Hallar la diferencial de un producto de una cantidad constante y de una variable, y como tambien la diferencial de una fraccion que tiene el numerador variable, y el denominador constante; como ax , y $\frac{x}{a}$.

En la cantidad propuesta ax substitúyase $x+dx$ en lugar de x , y de la cantidad $ax+adx$ que resulta réstese ax ; pero restada ax de $ax+adx$, el

residuo es adx : luego (49) la diferencial de ax es adx , esto es, $D.ax = adx$. Con el mismo método se hallará que la diferencial de $\frac{x}{a}$ es $\frac{dx}{a}$, esto es, $D.\frac{x}{a} = \frac{dx}{a}$. Que es &c.

COROLARIO I.

62. Luego la diferencial de un producto de una cantidad constante y de una variable es igual á la constante multiplicada por la diferencial de la variable; y la diferencial de una fraccion que tiene el numerador variable, y el denominador constante, es igual á la diferencial del numerador partida por el denominador constante; esto es, $D.ax = adx$, y $D.\frac{x}{a} = \frac{dx}{a}$.

COROLARIO II.

63. Luego para hallar la integral de una diferencial multiplicada ó partida por una constante, se integrará la diferencial, y la integral se multiplicará ó partirá por la constante; esto es, $S.adx = a \times S.dx = ax$, y $S.\frac{dx}{a} = \frac{S.dx}{a} = \frac{x}{a}$.

PROPOSICION IV.

64. Hallar la diferencial de una cantidad compuesta de términos variables unidos con los signos mas y menos; como $x + z - y + \&c.$

En la cantidad propuesta $x + z - y + \&c.$ substitúyanse $x + dx$ en lugar de x , $z + dz$ en lugar de z , $y + dy$ en lugar de y , $\&c.$ y de la cantidad que resulta $x + dx + z + dz - y - dy + \&c.$ réstese la propuesta $x + z - y + \&c.$ pero hecha dicha resta, el residuo es $dx + dz - dy + \&c.$ luego (49) la diferencial de $x + z - y + \&c.$ es $dx + dz - dy + \&c.$ quando todas las variables se aumentan; esto es, $D.(x + z - y + \&c.) = dx + dz - dy + \&c.$ Pero si mientras se aumentan las variables, por exemplo, x , y , se disminuye la z , de suerte que vengan á ser $x + dx$, $z - dz$, $y + dy$, se hallará del mismo modo que la diferencial de la cantidad $x + z - y + \&c.$ es $dx - dz - dy + \&c.$ Que es $\&c.$

COROLARIO I.

65. Luego la diferencial de una cantidad compuesta de términos variables unidos con los signos mas y menos es igual á la suma de las diferenciales de cada término unidas con sus respectivos signos; esto es, $D.(x + z - y + \&c.) = dx + dz - dy + \&c.$

COROLARIO II.

66. Por tanto la integral de un agregado de diferenciales unidas con los signos mas y menos, serán las integrales de cada diferencial unidas con sus respectivos signos, esto es, $S. (dx + dz - dy + \&c.) = S. dx + S. dz = S. dy + \&c. = x + z - y + \&c.$

PROPOSICION V.

67. Hallar la diferencial del producto $xzy \&c.$ de qualquier número de variables $x, z, y, \&c.$

1º. Hallar la diferencial del producto xz de dos variables.

En la cantidad propuesta xz substitúyanse $x+dx$ en lugar de x , y $z+dz$ en lugar de z , y de la cantidad $xz + xdz + zdx + dx dz$ que resulta réstese xz ; pero el residuo de dicha resta es $x dz + z dx + dx dz = x dz + z dx$, por ser $dx dz$ infinitésimo respecto á los demas términos: luego (49) la diferencial del producto xz será $x dz + z dx$.

En la suposicion que la variable x se aumente, y la otra variable z se disminuya, y vengan á ser $x+dx, z-dz$, del mismo modo se hallará que la diferencial de xz es $x \times -dz + z \times dx$.

2º. Hallar la diferencial del producto xzy de tres factores variables.

Hágase $xz = u$, y será $xzy = uy$; de donde resulta ser $D. xzy = D. uy$, y $du = D. xz$; pero $D. uy = u dy + y du$, y $D. xz = x dz + z dx$, por lo demostrado en el caso primero: luego será $D. xzy = u dy + y du = xz dy + yx dz + yz dx$; si en la diferencial $u dy + y du$ se substituyen xz en lugar de u , y $x dz + z dx$ en lugar de du .

Si se supone que las variables x , z se aumentan, y se disminuye la variable y , se hallará del mismo modo que es $D. xzy = xz \times -dy + xy \times dz + zy \times dx = -xz dy + xy dz + zy dx$.

3º. Del mismo modo se hallará ser $D. xzyu = xzy \times du + xzu \times dy + xyu \times dz + zyu \times dx$, en la suposicion que todas las variables se aumenten; y así sucesivamente con el mismo orden. Que es &c.

COROLARIO I.

168. Luego la diferencial del producto xzy &c. de qualquier número de factores variables x , z , y , &c. es igual á la suma de los productos de la diferencial de cada factor variable multiplicada por todos los demas; esto es, $D. xz = x dz + z dx$, $D. xzy = xz dy + xy dz + zy dx$, $D. xzyu = xzy du + xzu dy + xyu dz + zyu dx$, &c.

COROLARIO II.

69. Por tanto si las variables x, z, y, u , &c. son iguales entre sí, serán, $D. x^2 = 2x dx$, $D. x^3 = 3x^2 dx$, $D. x^4 = 4x^3 dx$, &c. de donde resulta que supuesto m número entero y positivo, será $D. x^m = m x^{m-1} dx$, y por la misma razón $D. x^{m+1} = (m+1) \times x^m dx$.

COROLARIO III.

70. Se infiere ser $S. (x dz + z dx) = xz$, $S. (x z dy + y z dx) = xzy$, $S. (x z y du + x z u dy + x u y dz + u y z dx) = xz y u$, y así sucesivamente con el mismo orden. Es de advertir que, si en qualquier término de la diferencial complexa $x dz + z dx$ se substituye en lugar de la diferencial su integral, el resultado es la integral de dicha diferencial complexa, y así substituida x en lugar de dx en el término $z dx$, se tendrá zx que es igual á la integral de dicha diferencial complexa: asimismo substituida z en lugar de dz en el término $x dz$, se tendrá xz . Lo mismo sucede en las demas equaciones.

COROLARIO IV.

71. Tambien se infiere ser $S. (m+1) x^m dx$ ó bien (63) $(m+1) \times S. x^m dx = x^{m+1}$; y par-

tiendo por $m+1$, será si $x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, en la qual el exponente m es número entero y positivo.

PROPOSICION VI.

72. Hallar la diferencial de una fracción $\frac{a}{z}$, en la qual el numerador es constante, y variable el denominador, como tambien la diferencial de una fracción $\frac{x}{z}$, en la qual el numerador y denominador son variables.

1º. En la cantidad propuesta $\frac{a}{z}$ substitúyase $z+dz$ en lugar de z , y de la cantidad que resulta $\frac{a}{z+dz}$ réstese la propuesta $\frac{a}{z}$; pero hecha dicha resta, el residuo es $-\frac{a dz}{z^2 + z dz} = -\frac{a dz}{z^2}$; luego (49) la diferencial de $\frac{a}{z}$ será $-\frac{a dz}{z^2}$, esto es,

$$D. \frac{a}{z} = -\frac{a dz}{z^2}.$$

2º. En la cantidad $\frac{x}{z}$ substitúyanse $x+dx$, $z+dz$ en lugar de las variables x, z , y de lo que

resulta $\frac{x+dx}{z+dz}$ réstese la propuesta $\frac{x}{z}$; pero hecha

dicha resta, el residuo es $\frac{zdx-xdz}{z^2+zdz} = \frac{zdx-xdz}{z^2}$: lue-

go (49) la diferencial de $\frac{x}{z}$ será $\frac{zdx-xdz}{z^2}$, esto

es, $D. \frac{x}{z} = \frac{zdx-xdz}{z^2}$.

En la suposicion que la variable x se aumente,

y se disminuya la z , será $D. \frac{x}{z} = \frac{zdx+xdz}{z^2}$.

COROLARIO I.

73. Luego la diferencial de una fraccion $\frac{a}{z}$, en la qual el numerador es constante, y variable el denominador, es igual al producto del numerador tomado con signo contrario multiplicado por la diferencial del denominador, partido dicho producto por el quadrado del denominador de la fraccion propuesta, esto es, $D. \frac{a}{z} = -\frac{adz}{z^2}$. Y la di-

ferencial de una fraccion $\frac{x}{z}$, en la qual el numerador y denominador son variables, es igual al denominador multiplicado por la diferencial del nu-

merador, (menos el numerador multiplicado por la diferencial del denominador, partida esta diferencia por el cuadrado del denominador de la fraccion propuesta; esto es, $D. \frac{x}{z} = \frac{zdx - xdz}{z^2}$, en la suposicion que las dos variables se aumenten.

COROLARIO II.

74. Por tanto será $S. \frac{a dx}{z^2} = \frac{a}{z}$, como tambien será $S. \frac{zdx - xdz}{z^2} = \frac{x}{z}$.

PROPOSICION VII.

75. Hallar la diferencial de qualquier potencia x^m , cuyo exponente m representa qualquier cantidad constante entera ó quebrada, positiva ó negativa.

En la cantidad propuesta x^m substitúyase $x + dx$ en lugar de la variable x , y se tendrá $(x + dx)^m$ que es

igual á la serie $x^m + mx^{m-1}dx + \frac{m \cdot m-1}{2} \times x^{m-2}dx^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{2 \cdot 3} \times x^{m-3}dx^3 + \&c.$ réstese de esta serie la cantidad propuesta x^m , y el residuo $mx^{m-1}dx + \frac{m \cdot m-1}{2} \times x^{m-2}dx^2 + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{2 \cdot 3} \times x^{m-3}dx^3 + \&c.$

que es igual (142) á $m x^{m-1} dx$ será (149), la diferencial de la potencia x^m . Que es &c.

COROLARIO I.

76. Luego la diferencial de qualquier potencia x^m , que tiene su exponente constante entero ó quebrado, positivo ó negativo, será igual al mismo exponente multiplicado por la variable elevada á una unidad menos, y por la diferencial de la misma variable; esto es, $D. x^m = m \times x^{m-1} \times dx$, y $D. x^{m+1} = (m+1) \times x^m dx$.

COROLARIO II.

77. Por tanto será $S. (m+1) \times x^m dx$, ó bien (63) $(m+1) \times S. x^m dx = x^{m+1}$; y partiendo ambos miembros por $m+1$, se tendrá $S. x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$; esto es, para determinar la integral del producto de una potencia variable (que tiene su exponente constante, entero ó quebrado, positivo ó negativo) y de la diferencial de su raíz variable, se aumentará el exponente de la potencia en una unidad, y se partirá la potencia que resulta por su exponente. Se exceptua el caso de ser $m = -1$, pues entonces $x^{-1} dx$ ó bien $\frac{dx}{x}$ fiene por integral

el logaritmo hiperbólico de x , como se demostrará por medio de la Proposición siguiente.

EXEMPLOS.

$$\begin{aligned}
 78. \quad D. x^7 &= -7 \times x^{-8} dx; D. x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times x^{\frac{1}{2}-1} dx \\
 &= \frac{1}{2} \times x^{-\frac{1}{2}} dx; D. x^{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{4} \times x^{-\frac{1}{4}} dx = -\frac{1}{4} x^{-\frac{1}{4}} dx; \\
 D. (a+y)^4 &= 4 \times (a+y)^3 \times D. (a+y) = 4 \times (a+y)^3 dy; \\
 D. \sqrt{a^2 - x^2} &= D. (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \times \\
 -2x dx &= -\frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}; D. \sqrt{x^2 + a^2} = D. (x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \times (x^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} \times 2x dx = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}; D. \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\
 &= D. (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \times (a^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \times -2x dx \\
 &= \frac{x dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}; D. \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{\sqrt{x^2 + a^2}} = D. (x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \times (x^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} \times 2x dx = \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}; \\
 D. (b^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} &= \frac{3}{2} \times (b^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \times D. (b^2 + z^2) \\
 &= \frac{3}{2} \times (b^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \times 2z dz; D. (a-x)^3 \times (a+z)^{\frac{1}{2}} \\
 &= (a-x)^3 \times D. (a+z)^{\frac{1}{2}} + (a+z)^{\frac{1}{2}} \times D. (a-x)^3 \\
 &\text{por lo demostrado (68)}; \text{pero } D. (a+z)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \times (a+z)^{-\frac{1}{2}} \times dz, \text{ y } D. (a-x)^3 = 3 \times (a-x)^2 \times -dx; \\
 \text{luego será } D. (a-x)^3 \times (a+z)^{\frac{1}{2}} &= (a-x)^3 \times \frac{1}{2} (a+z)^{-\frac{1}{2}} dz \\
 &+ (a+z)^{\frac{1}{2}} \times 3 \times (a-x)^2 \times -dx = \frac{1}{2} (a-x)^3 (a+z)^{-\frac{1}{2}} dz \\
 &- 3 dx \times (a+z)^{\frac{1}{2}} \times (a-x)^2.
 \end{aligned}$$

ESCOLIO.

79. Aplíquense los principios expuestos en las Proposiciones antecedentes, para hallar las diferenciales segundas, terceras, &c. de las cantidades variables, sean sus elementos dx , dy , &c. constantes ó variables.

1.º. Si dichos elementos dx , dy , &c. son constantes; la diferencial segunda de una cantidad variable propuesta se tendrá, si se diferencia la primera por las reglas enseñadas en la suposicion que dx , dy , &c. son constantes, y el resultado se parte por 2; la diferencial tercera se tendrá, si se diferencia la segunda por las mismas reglas en la suposicion que dx , dy , &c. son constantes, y el resultado se parte por 3; la diferencial quarta se tendrá, si se diferencia la tercera segun las mismas reglas en la suposicion que dx , dy , &c. son constantes, y el resultado se parte por 4; y así sucesivamente. Por tanto las diferenciales primera, segunda, tercera, &c. de una funcion de la variable x , la qual funcion llamo en general $F. x$, estarán expresadas por los correspondientes términos de la serie $dx \times F'. x + \frac{dx^2 \times F''. x}{2} + \frac{dx^3 \times F'''. x}{2.3} + \&c.$ pues la diferencial primera de la funcion propuesta será

dx multiplicada por otra función de dicha variable x , la qual se denota con $F.x$; la diferencial segunda será igual á la diferencial de $dx \times F.x$, y por ser dx constante por la suposición, será igual á $\frac{dx^2 \times D.F.x}{2}$; pero $D.F.x$ es dx multiplicada por otra función de x , la qual se indica con $F''.x$; luego la diferencial segunda será $\frac{dx^2 \times F''.x}{2}$: la diferencial tercera será igual á la diferencial de $\frac{dx^2 \times F''.x}{2}$ partida por 3, y por ser dx constante, será también igual á $\frac{dx^2 \times D.F''.x}{2.3}$; pero $D.F''.x$ es igual á dx multiplicada por otra función de x , la qual se señala con $F'''.x$: luego será dicha diferencial tercera igual á $\frac{dx^3 \times F'''.x}{2.3}$, y así sucesivamente. Por tanto si en una función de la variable x expresada en general por $F.x$, se aumenta x en dx , se tendrá

$$F.(x+dx) = F.x + dx \times F'.x + \frac{dx^2 \times F''.x}{2} + \frac{dx^3 \times F'''.x}{2.3} + \frac{dx^4 \times F'''.x}{2.3.4} + \&c.$$

Adviértase que siempre que se trata de suponer dichas diferenciales iguales á cero, es superfluo de partirlas, según se ha dicho anteriormente.

2º. Si dichos elementos dx , dy , &c. se supo-

nen variables, la diferencial segunda de una cantidad variable propuesta se tendrá, si se diferencia la primera por las reglas enseñadas, en la suposición que dx , dy &c. son variables; y del mismo modo se procederá sucesivamente para hallar las diferenciales tercera, quarta, &c. Adviértase que es arbitrario y mas útil suponer constante uno de los elementos, y variable el otro, quando hay precision de las diferenciales segundas d^2y ó d^2x , como, por exemplo, dx constante, y dy variable; ó al contrario, dy constante, y dx variable.

EXEMPLO I.

80. Hallar la diferencial de la equacion $axy + (\frac{3a^2}{10} - xy) \times \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{3a^2}{10} = 0$, y la razon que tiene dy con dx .

La diferencial de la equacion propuesta será la misma que la diferencial de sus dos términos primeros, respecto á que el tercero es cantidad constante; y la diferencial de dichos dos términos será la diferencial del primero axy , mas la diferencial del segundo $(\frac{3a^2}{10} - xy) \times \sqrt{x^2 + y^2}$; pero

$$D.axy = axdy + aydx, D.(\frac{3a^2}{10} - xy) \times \sqrt{x^2 + y^2} =$$

$$= \left(\frac{3a^2}{10} - xy\right) \times D. (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{x^2 + y^2} \times D. \left(\frac{3a^2}{10} - xy\right) = \left(\frac{3a^2}{10} - xy\right) \times \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

+ $\sqrt{x^2 + y^2} \times (-x dy - y dx)$: luego la diferencial de la equacion propuesta será $ax dy + ay dx$

$$+ \left(\frac{3a^2}{10} - xy\right) \times \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2} \times (-x dy - y dx) = 0;$$

y trasponiendo los términos que contienen la dx al otro miembro, se tendrá la equacion $ax dy$

$$+ \left(\frac{3a^2}{10} - xy\right) \times \frac{y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - x dy \sqrt{x^2 + y^2} = -ay dx$$

$$- \left(\frac{3a^2}{10} - xy\right) \times \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2} \times y dx, \text{ de}$$

donde resulta la proporción, esto es, $dy : dx$

$$= -ay : \left(\frac{3a^2}{10} - xy\right) \times \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2} \times y : ax$$

$$+ \left(\frac{3a^2}{10} - xy\right) \times \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \sqrt{x^2 + y^2} \times x.$$

Si se supone la variable $x = \frac{a}{\sqrt{10}}$, se hallará

$$y = \frac{3a}{\sqrt{10}}; \text{ y substituidos estos valores en la pro-}$$

porción antecedente, resultará $dy : dx = 0 : 0$. Aho-

ra si la diferencial primera de la equacion pro-

puesta se diferencia en la suposición que dx, dy

son constantes, y en el resultado se substituyen

los dichos valores de x , y , se tendrá la equacion

$$\frac{3a^2}{10} \times dx^2 + a^2 dy dx + \frac{3a^2}{10} \times dy^2 = 0, \text{ la qual re-}$$

suelta da $dy = -3 dx$, $dy = -\frac{dx}{3}$: luego dy tie-
ne con dx dos razones, en la suposicion que sean

$$x = \frac{a}{\sqrt{10}}, y = \frac{3a}{\sqrt{10}},$$

EXEMPLO II.

81. Se pide hallar el valor de la ordenada $y =$
 $\frac{\sqrt{(2a^3x - x^4)} - a\sqrt{(a^2x)}}{a - \sqrt{(ax^3)}}$, siendo la abscisa $x = a$, en

cuya suposicion resulta $y = \frac{2}{3}$.

Quando el valor de la ordenada de una curva respecto á una abscisa determinada resulte igual á $\frac{2}{3}$, no se puede argüir que dicha ordenada será 0; porque puede suceder que el numerador y denominador de la fraccion tengan algunas raices iguales, en cuyo caso se tendrá el valor de la ordenada con el mismo método con que se halla el valor de la fraccion $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}$. Por lo que en el exemplo propuesto se deben diferenciar el numerador y denominador; y se tendrá

$$y = \frac{\frac{1}{2} \times (2a^3x - x^4)^{-\frac{1}{2}} \times (2a^3dx - 4x^3dx) - \frac{1}{2}a \times (a^2x)^{-\frac{1}{2}} \times a^2dx}{-\frac{1}{2} \times (ax^3)^{-\frac{1}{2}} \times 3ax^2dx}$$

luego dividiendo el numerador y denominador por dx , y substituyendo a en lugar de x , se hallará la ordenada $y = \frac{16a}{9}$.

EXEMPLO III.

82. Se propone hallar el valor de la ordenada

$$y = \frac{\sqrt{(2a^3 - 3a^2x + ax^2)}}{\sqrt{(a-x)}}, \text{ si se supone } x=a, \text{ en cuyo caso es } y = \frac{5}{3}.$$

Si se diferencian el numerador y denominador de la fraccion propuesta, como en el exemplo antecedente, nunca se llegará á determinar el valor de la misma fraccion, por ser la diferencial del orden $\frac{1}{2}$, esto es, $dx^{\frac{1}{2}}$. Por tanto substitúyase en la fraccion propuesta $a - dx$ en lugar de x ; y se tendrá

$$y = \frac{\sqrt{(2a^3 - 3a^2 + 3a^2dx + a^3 - 2a^2dx - adx^2)}}{\sqrt{(a-a+dx)}} = \frac{\sqrt{(a^2dx + adx^2)}}{\sqrt{dx}} = \sqrt{(a^2 + a dx)} = a: \text{ luego será } y = a, \text{ en la suposicion que sea } x = a.$$

EXEMPLO IV.

83. Se pide hallar las diferenciales primera y segunda de la variable $\sqrt{(x^2 - y^2)}$, en la suposicion

que dx , dy sean tambien variables.

1.º Siendo $\sqrt{x^2 - y^2} = (x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$, será

$$D. \sqrt{x^2 - y^2} = \frac{1}{2} \times (x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \times (2x dx - 2y dy)$$

$$= \frac{x dx - y dy}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

2.º Para hallar la diferencial segunda de la variable propuesta en la suposicion que dx , dy sean variables, se deberá diferenciar la primera $\frac{x dx - y dy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

en la misma suposicion ; pero es $D. \frac{x dx - y dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} =$

$$\frac{\sqrt{x^2 - y^2} \times D. (x dx - y dy) - (x dx - y dy) \times D. \sqrt{x^2 - y^2}}{x^2 - y^2},$$

$D. (x dx - y dy) = dx^2 + x d^2 x - dy^2 - y d^2 y$, y $D. \sqrt{x^2 - y^2} =$

$$\frac{x dx - y dy}{\sqrt{x^2 - y^2}}; \text{ luego será } D. \frac{x dx - y dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} =$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - y^2} \times (dx^2 + x d^2 x - dy^2 - y d^2 y) - (x dx - y dy)^2}{x^2 - y^2}$$

$$= \frac{(x^2 - y^2) \times (dx^2 + x d^2 x - dy^2 - y d^2 y) - (x dx - y dy)^2}{(x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{x^2 d^2 x - x^2 dy^2 - x^2 y d^2 y - y^2 dx^2 - x y^2 d^2 x + y^2 d^2 y + 2 x y dx dy}{(x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Si se supone dx constante, la diferencial segunda se reducirá á la expresion

$$\frac{-x^2 dy^2 - x^2 y d^2 y - y^2 dx^2 + y^2 d^2 x + 2 x y dx dy}{(x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

*De las Diferenciales de las cantidades
logarítmicas.*

PROPOSICION VIII.

84. En todo sistema hallar la diferencial del logaritmo de una cantidad variable y positiva ó negativa, supuesto el logaritmo de la unidad igual á cero.

En la cantidad propuesta L . y substitúyase $y + dy$ en lugar de y , y de lo que resulta $L.(y + dy)$ réstese dicha cantidad $L.y$; pero hecha esta res-

ta, el residuo es $L.\frac{y+dy}{y}$ ó bien $L.(1 + \frac{dy}{y})$:

luego será $D.L.y = L.(1 + \frac{dy}{y})$. Por lo demostrado (II. 335) consta ser $L.(1 + x) = A \times$

$(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \&c.)$ en quien A es el módu-

lo, y por consiguiente se tendrá $L.(1 + \frac{dy}{y})$

$= A \times (\frac{dy}{y} - \frac{dy^2}{2y^2} + \frac{dy^3}{3y^3} - \frac{dy^4}{4y^4} + \&c.) = \frac{A dy}{y}$

(42): luego será $D.L.y = \frac{A dy}{y}$. Con el mismo

método se hallará $D.L.-y = -\frac{A dy}{y}$.

De otro modo.

Tírense las ordenadas EC , GK (Fig. 11) á la asíntota MN de la logarítmica YQ , cuya subtangente constante sea A , de suerte que supuesta la recta SEL tangente á dicha curva en el punto E , será $CS=A$: en fin tírese la recta EO paralela á la asíntota MN , y nómbrense las coordenadas $FC=x$, $CE=y$. Si se considera evanecente la diferencia CK entre las abscisas variables FK , FC , será (38) CK la diferencial primera de la abscisa $FC=x$, esto es, (40) $CK=EO=dx$, y en dicha suposicion será tambien evanecente la diferencia OG entre las ordenadas KG , CE , esto es, $OG=dy$: luego (23) los triángulos GOE , LOE serán semejantes é iguales, y por consiguiente $GO=LO=dy$; pero por la semejanza de los triángulos LOE , ECS es $LO:OE=EC:CS$: luego será $dy:dx=y:A$, de donde $dx=\frac{A dy}{y}$; pero por la propiedad de la curva es $x=L.y$, y $dx=D.L.y$: luego será $D.L.y=\frac{A dy}{y}$. Si al otro lado de la asíntota MN se describe el segundo ramo g y totalmente igual al primero GY de la misma logarítmica, se hallará con el raciocinio anteriormente

expuesto que es $D.L. - y = \frac{A dy}{y}$. Que es &c.

COROLARIO I.

85. Luego la diferencial del logaritmo de una cantidad variable positiva ó negativa es igual al módulo multiplicado por la diferencial de la variable, partido este producto por la misma variable; esto es, $D.L. \pm y = \frac{A dy}{y}$. Si es $A=1$, en cuyo caso los logaritmos son hiperbólicos, la diferencial del logaritmo hiperbólico de una cantidad variable positiva ó negativa será igual á la diferencial de la variable partida por la misma variable. En el sistema de los logaritmos tabulares es (II.335) el módulo $A=0,43429448$ próximamente.

COROLARIO II.

86. Por tanto será $S. \frac{A dy}{y} = L. \pm y$ en cualquier sistema de logaritmos: y en el sistema de los logaritmos hiperbólicos será $S. \frac{dy}{y} = L. \pm y$, esto es, la integral de una fracción, cuyo numerador es la diferencial del denominador, es igual al logaritmo hiperbólico del denominador. En lo sucesivo, por evitar la confusion de signos, se omiti-

rán los $\pm$ á la variable y , esto es, $S. \frac{A dy}{y} = L.y$,

$$S. \frac{dy}{y} = L.y.$$

ESCOLIO.

87. Adviértase que en los Exemplos siguientes y en lo demas de esta Obra se entenderá (siempre que no se exprese lo contrario) que se trata de los logaritmos hiperbólicos, en quienes $L.1 = 0$, y el módulo $A=1$: luego se tendrán (85, 86) las equaciones, esto es, $D.L.y = \frac{dy}{y}$, y $S. \frac{dy}{y} = L.y$.

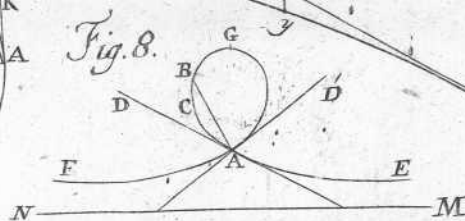
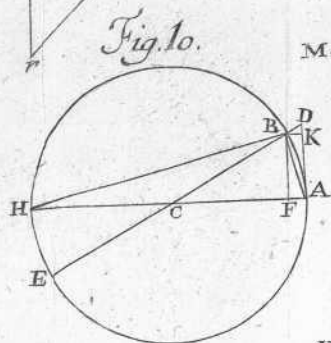
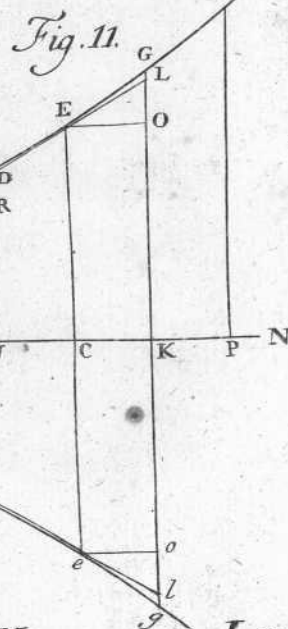
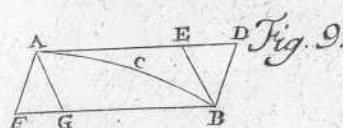
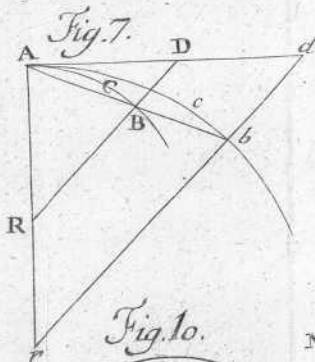
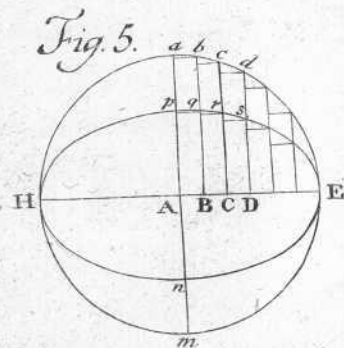
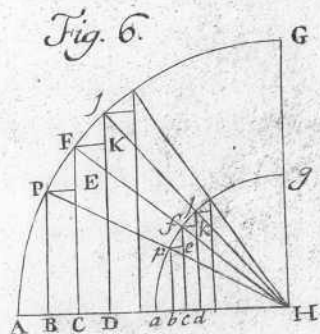
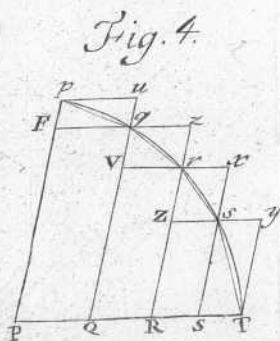
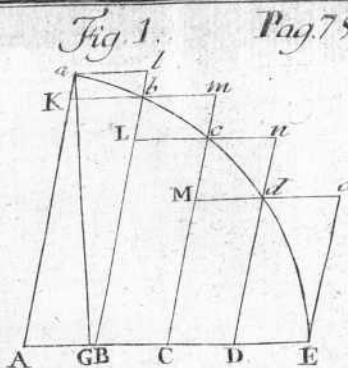
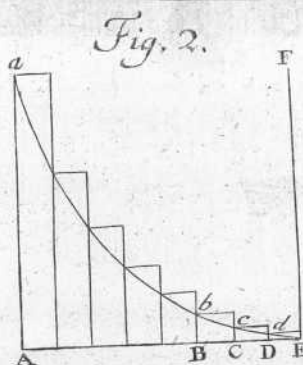
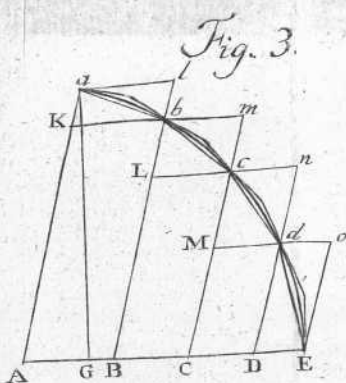
EXEMPLOS.

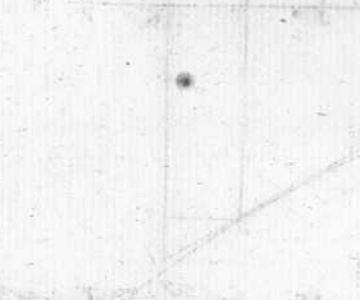
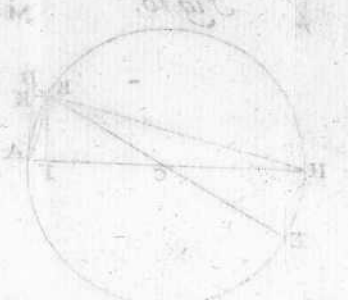
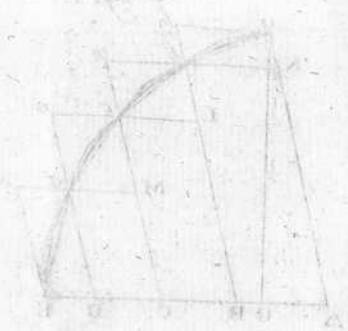
88. Se pide la diferencial de $L. \frac{1}{y}$. Siendo $L. \frac{1}{y}$

$$= L.1 - L.y, \text{ será } D.L. \frac{1}{y} = D.(L.1 - L.y) = D. - L.y \text{ (58); pero } D.L.y = \frac{dy}{y}: \text{ luego será } D.L. \frac{1}{y} = -\frac{dy}{y}. \text{ Por tanto se tendrá } S - \frac{dy}{y} = L. \frac{1}{y}.$$

2º.

Hallar la diferencial de $L.x.y$. Siendo $L.x.y = L.x + L.y$, será $D.L.x.y = D.(L.x + L.y) = D.L.x + D.L.y$ (65); pero $D.L.x = \frac{dx}{x}$, y





$$D.L.y = \frac{dy}{y}; \text{ luego será } D.L.xy = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} \\ = \frac{ydx + xdy}{xy}. \text{ Por tanto se tendrá } S. \frac{ydx + xdy}{xy} = L.xy. \\ 3^{\circ}.$$

Determinar la diferencial de $L.\frac{x}{y}$. Siendo

$$L.\frac{x}{y} = L.x - L.y, \text{ será } D.L.\frac{x}{y} = D.(Lx - Ly) \\ = D.L.x - D.L.y \text{ (65)}; \text{ pero } D.L.x = \frac{dx}{x}, y \\ D.L.y = \frac{dy}{y}; \text{ luego será } D.L.\frac{x}{y} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = \\ \frac{ydx - xdy}{xy}. \text{ Por tanto se tendrá } S. \frac{ydx - xdy}{xy} = L.\frac{x}{y}.$$

$$4^{\circ}. \\ D.L.(a+y) = \frac{D.(a+y)}{a+y}; \text{ pero } D.(a+y) = dy \\ \text{(58)}: \text{ luego será } D.L.(a+y) = \frac{dy}{a+y}. \text{ Por tanto} \\ \text{se tendrá } S. \frac{dy}{a+y} = L.(a+y).$$

$$5^{\circ}. \\ D.L.(a-y) = \frac{D.(a-y)}{a-y}; \text{ pero } D.(a-y) = -dy \\ \text{(58)}: \text{ luego será } D.L.(a-y) = -\frac{dy}{a-y}. \text{ Por} \\ \text{tanto se tendrá } S. -\frac{dy}{a-y} = L.(a-y).$$

(76)

6°.

$$D.L.\frac{a+y}{a-y} = D.(L.(a+y) - L.(a-y)) =$$

$$D.L.(a+y) - D.L.(a-y); \text{ pero } D.L.(a+y) = \frac{dy}{a+y},$$

$$\text{ y } D.L.(a-y) = -\frac{dy}{a-y}: \text{ luego será } D.L.\frac{a+y}{a-y}$$

$$= \frac{dy}{a+y} + \frac{dy}{a-y} = \frac{2ady}{a^2-y^2}. \text{ Por tanto se tendrá}$$

$$S.\frac{2ady}{a^2-y^2} = L.\frac{a+y}{a-y}.$$

7°.

$$D.L.\frac{a}{a+y} = D.(L.a - L.a+y) = -D.L.(a+y)$$

$$(58); \text{ pero } D.L.(a+y) = \frac{dy}{a+y}: \text{ luego será}$$

$$D.L.\frac{a}{a+y} = -\frac{dy}{a+y}; \text{ por consiguiente } S.-\frac{dy}{a+y} =$$

$$L.\frac{a}{a+y}.$$

8°.

$$D.L.(a^2+y^2) = \frac{D.(a^2+y^2)}{a^2+y^2}; \text{ pero (58) } D.(a^2+y^2)$$

$$= D.y^2 = 2y dy (69): \text{ luego será } D.L.(a^2+y^2)$$

$$= \frac{2y dy}{a^2+y^2}; \text{ por consiguiente } S.\frac{2y dy}{a^2+y^2} = L.(a^2+y^2).$$

9°.

$$D.L.\sqrt{a^2+y^2} = D.L.(a^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = D.\frac{1}{2}$$

$$\times L.(a^2+y^2); \text{ pero (62) } D.\frac{1}{2} \times L.(a^2+y^2) =$$

$$\frac{1}{2} \times D.L.(a^2 + y^2), \text{ y } D.L.(a^2 + y^2) = \frac{2ydy}{a^2 + y^2} :$$

$$\text{luego será } D.L.\sqrt{a^2 + y^2} = \frac{1}{2} \times \frac{2ydy}{a^2 + y^2} = \frac{ydy}{a^2 + y^2};$$

$$\text{por consiguiente } S.\frac{ydy}{a^2 + y^2} = L.\sqrt{a^2 + y^2}.$$

10°.

$$D.L.\frac{x}{\sqrt{x^2 \pm r^2}} = D.L.x - D.L.\sqrt{x^2 \pm r^2};$$

$$\text{pero } D.L.x = \frac{dx}{x}, D.L.\sqrt{x^2 \pm r^2} = \frac{xdx}{x^2 \pm r^2} :$$

$$\text{luego será } D.L.\frac{x}{\sqrt{x^2 \pm r^2}} = \frac{dx}{x} - \frac{xdx}{x^2 \pm r^2} = \pm$$

$$\frac{r^2 dx}{x(x^2 \pm r^2)}; \text{ por consiguiente } L.\frac{x}{\sqrt{x^2 \pm r^2}} = \pm r^2$$

$$\times S.\frac{dx}{x(x^2 \pm r^2)}.$$

ESCOLIO I.

89. Para que se comprendan desde ahora el uso y la utilidad de los principios expuestos, paso á determinar por medio de ellos la integral de la diferencial $\frac{2ady}{a^2 - y^2}$.

La fórmula $\frac{2ady}{a^2 - y^2}$ es equivalente á la expresion $2ady \times (a^2 - y^2)^{-1}$: redúzgase ahora el binomio $(a^2 - y^2)^{-1}$ en serie por la fórmula Newto-

niana, y será $(a^2 - y^2)^{-1} = \frac{1}{a^2} + \frac{y^2}{a^4} + \frac{y^4}{a^6} + \frac{y^6}{a^8} +$
 &c. ; multiplíquense ambos miembros de esta
 equacion por $2a dy$, y se tendrá $2a dy \times (a^2 - y^2)^{-1}$
 ó bien $\frac{2ady}{a^2 - y^2} = 2 \times \left(\frac{dy}{a} + \frac{y^2 dy}{a^3} + \frac{y^4 dy}{a^5} + \frac{y^6 dy}{a^7} + \&c. \right)$
 luego integrando será $S. \frac{2ady}{a^2 - y^2} = 2 \times S. \left(\frac{dy}{a} + \frac{y^2 dy}{a^3} \right.$
 $\left. + \frac{y^4 dy}{a^5} + \frac{y^6 dy}{a^7} + \&c. \right)$ que por lo demostrado (66)
 es igual á la suma de las integrales de cada térmi-
 no de la serie ; pero $S. \frac{dy}{a} = \frac{y}{a}$ (63), $S. \frac{y^2 dy}{a^3} =$
 $\frac{S. y^2 dy}{3a^3} = \frac{y^3}{3a^3}$ (71), $S. \frac{y^4 dy}{a^5} = \frac{S. y^4 dy}{a^5} = \frac{y^5}{5a^5}$, y así
 sucesivamente : luego será $S. \frac{2ady}{a^2 - y^2} = 2 \times \left(\frac{y}{a} + \right.$
 $\left. \frac{y^3}{3a^3} + \frac{y^5}{5a^5} + \frac{y^7}{7a^7} + \&c. \right)$, que es la misma serie
 que en el tratado de Algebra (II. 335) se halló
 igual á $L. \frac{a+y}{a-y}$, del mismo modo que se ha halla-
 do anteriormente en el Exemplo 6º. ser $S. \frac{2ady}{a^2 - y^2}$
 $= L. \frac{a+y}{a-y}$. Ahora queda solo la determinación de
 la constante que se debe añadir (59) á toda inte-
 gral, y determinar por la condicion del Problema

que en el caso presente es $L. 1 = 0$: luego suponiendo $\frac{a+y}{a-y} = 1$, la serie hallada mas la constante que llamo A será igual á cero; pero por ser $\frac{a+y}{a-y} = 1$, es $a+y = a-y$, de donde $y=0$: luego la constante A será igual á cero. Por tanto de la condicion del Problema resulta que no se debe añadir la constante á la integral de la serie que da el valor del $L. \frac{a+y}{a-y}$. Se ha manifestado en dicho tratado el método para calcular los logaritmos hiperbólicos correspondientes á números dados, como tambien los logaritmos tabulares ó los de qualquiera otro sistema.

ESCOLIO II.

90. Igualmente para manifestar el uso y la utilidad de los principios expuestos, se resolverá el Problema inverso del anterior, esto es, dado qualquier logaritmo hiperbólico, determinar el número que le corresponde.

Sea el logaritmo hiperbólico $g+x$, y el número que se busca $a+y$, de suerte que sea $L. a = g$; y será $L. (a+y) = g+x$, en cuya equacion suponiendo $x=0$, será $y=0$. Hágase $a+y = A+Bx$

$+Cx^2 + Ex^3 + Fx^4 + \&c$, siendo $A, B, C, E, F, \&c.$ cantidades constantes que se han de determinar; y diferenciando se tendrá $dy = Bdx + 2Cxdx + 3Ex^2dx + 4Fx^3dx + \&c.$ pero $L.(a+y) = g+x$, y diferenciando esta equacion, será (85, 58) $\frac{dy}{a+y}$

$$= dx : \text{luego } dx = \frac{Bdx + 2Cxdx + 3Ex^2dx + 4Fx^3dx + \&c.}{A + Bx + Cx^2 + Ex^3 + Fx^4 + \&c.}, \text{ y}$$

quitando el quebrado se tendrá

$$A dx + B x dx + C x^2 dx + E x^3 dx + F x^4 dx + \&c. = B dx + 2 C x dx + 3 E x^2 dx + 4 F x^3 dx + 5 G x^4 dx + \&c.$$

equacion que subsistirá supuestos iguales los coeficientes de los términos del primer miembro á los coeficientes de los respectivos términos del segundo, esto es, el coeficiente del primer término del primer miembro igual al coeficiente del primer término del segundo, el coeficiente del segundo término del primer miembro igual al coeficiente del segundo término del segundo, y así sucesivamente. Por medio de dichas suposiciones se determinarán los valores de las cantidades $B, C, E, F, G, \&c.$ como se figura:

$$A = B \quad \text{y} \quad B = A$$

$$B = 2C \quad \quad \quad C = \frac{B}{2}, C = \frac{A}{2}$$

$$C = 3E \quad \quad \quad E = \frac{C}{3}, E = \frac{A}{2 \cdot 3}$$

$$E = 4F, \quad \dots \quad F = \frac{E}{4}, \quad F = \frac{A}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$F = 5G, \quad \dots \quad G = \frac{F}{5}, \quad G = \frac{A}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

&c.

&c.

Substituidos los valores hallados de dichas cantidades en la equacion $a + y = A + Bx + Cx^2 + Ex^3 + Fx^4 + Gx^5 + \&c.$ se tendrá la equa-

$$\text{cion } a + y = A + Ax + \frac{Ax^2}{2} + \frac{Ax^3}{2 \cdot 3} + \frac{Ax^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{Ax^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

+ &c. pero quando es $x = 0$, tambien $y = 0$: luego será $a = A$; por consiguiente el número que se

$$\text{busca } a + y = a \times \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \right.$$

+ &c.) que es la misma serie que se ha hallado en el tratado del Algebra (II. 340) si se supone

$a = 1$. Adviértase que en el mismo tratado se ha manifestado el método para calcular los números

correspondientes á qualesquiera logaritmos hiperbólicos dados, como tambien los números que cor-

responden á qualesquiera logaritmos tabulares.

PROPOSICION IX.

91. Hallar la diferencial de $(Lx)^m$, supuesto el exponente m cantidad constante entera ó quebrada, positiva ó negativa.

Hágase $L.x = y$; y valdrán las equaciones
 $(L.x)^m = y^m$, $D.(L.x)^m = D.y^m$; pero (76)
 $D.y^m = m y^{m-1} dy$: luego será $D.(L.x)^m = m y^{m-1} dy$;
 pero siendo $L.x = y$, son $(L.x)^{m-1} = y^{m-1}$,
 $\frac{dx}{x} = dy$ (87): luego se tendrá $D.(L.x)^m = m(L.x)^{m-1}$
 $\times \frac{dx}{x}$. Que es &c.

COROLARIO I.

92. Luego la diferencial de la potencia $(L.x)^m$ es igual al producto del exponente m constante, de la potencia $(L.x)^{m-1}$, y de la diferencial del logaritmo de la variable, esto es, $D.(L.x)^m = m.(L.x)^{m-1} \times \frac{dx}{x}$, y por la misma razón $D.(L.x)^{m+1} = (m+1) \times (L.x)^m \times \frac{dx}{x}$.

COROLARIO II.

93. Por tanto se tendrá $S.(m+1) \times (L.x)^m \times \frac{dx}{x}$ ó bien $(m+1) \times S.(L.x)^m \times \frac{dx}{x} = (L.x)^{m+1}$; y partiendo ambos miembros por $m+1$, será $S.(L.x)^m \times \frac{dx}{x} = \frac{(L.x)^{m+1}}{m+1}$. Se exceptúa el caso de ser $m = -1$, ó que la diferencial sea $(L.x)^{-1} \times \frac{dx}{x}$

que equivale á la expresion $\frac{dx}{xL.x}$, cuya integral (como consta de la Proposicion siguiente independiente de ésta) es el logaritmo del logaritmo de la variable x , que se expresa para abreviar $L^2.x$ ó $L.L.x$.

PROPOSICION X.

94. Hallar la diferencial del $L^n.x$, en cuya expresion es n número entero y positivo.

1º. Sea $n=2$, y será $L^2.x$ la cantidad, cuya diferencial se pide determinar. Supóngase $L.x=y$; y se tendrán las equaciones $L.L.x$ ó bien $L^2.x = L.y$, $D.L^2.x = D.L.y$; pero $D.L.y = \frac{dy}{y}$

(87) : luego será $D.L^2.x = \frac{dy}{y}$; pero siendo $y = L.x$, es $dy = \frac{dx}{x}$ (87) : luego se tendrá $D.L^2.x = \frac{dx}{xL.x}$.

2º. Sea $n=3$, y será $L^3.x$ la cantidad cuya diferencial se busca. Supóngase $L^2.x=y$; y se tendrán las equaciones $L^3.x = L.y$, $D.L^3.x = D.L.y$; pero (87) $D.L.y = \frac{dy}{y}$: luego será $D.L^3.x = \frac{dy}{y}$; y por ser $y = L^2.x$, se tendrá por el caso

anterior $dy = \frac{dx}{xL.x}$: luego será $D.L^3.x = \frac{dx}{xL.x \times L^2.x}$.

Con el mismo método se hallará ser $D.L^4.x = \frac{dx}{xL.x \times L^2.x \times L^3.x}$, y así siempre con el mismo orden;

de lo qual resulta ser $D.L^n.x = \frac{dx}{x \times L.x \times L^2.x \times \dots \times L^{n-1}.x}$.

Que es &c.

COROLARIO.

95. Por tanto siendo $D.L^n.x = \frac{dx}{x \times L.x \times L^2.x \times \dots \times L^{n-1}.x}$, será $S. \frac{dx}{x \times L.x \times L^2.x \times \dots \times L^{n-1}.x} = L^n.x$, en cuya expresion es n número entero y positivo.

PROPOSICION XI.

96. La diferencial $x^m \times (L.x)^n \times dx$ es igual á la diferencial del producto, cuyos factores son x^{m+1} , y la serie $\frac{(L.x)^n}{m+1} - \frac{n \times (L.x)^{n-1}}{(m+1)^2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (L.x)^{n-2}}{(m+1)^3} - \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (L.x)^{n-3}}{(m+1)^4} + \&c.$

Tómese la fórmula $x^p \times (L.x)^q$, en quien los exponentes p, q pueden tener cualesquiera valores constantes; y diferenciando dicha expresion, se tendrá (68., 92.) $D.x^p \times (L.x)^q = px^{p-1} dx \times (L.x)^q$

$+ q x^p \times (L.x)^{q-1} \times \frac{dx}{x}$, de donde resulta la equacion general

$$x^{p-1} dx \times (L.x)^q = D. \frac{x^p \times (L.x)^q}{p} - \frac{q}{p} \times x^{p-1} \times (L.x)^{q-1} \times dx.$$

Si en esta equacion se hacen sucesivamente las siguientes

substituciones, se tendrán las equaciones

$$p-1=m, q=n \quad x^m \cdot (L.x)^n \cdot dx = \frac{D. x^{m+1} \cdot (L.x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \cdot x^m \cdot (L.x)^{n-1} \cdot dx$$

$$p-1=m, q=n-1 \quad x^m \cdot (L.x)^{n-1} \cdot dx = \frac{D. x^{m+1} \cdot (L.x)^{n-1}}{m+1} - \frac{n-1}{m+1} \cdot x^m \cdot (L.x)^{n-2} \cdot dx$$

$$p-1=m, q=n-2 \quad x^m \cdot (L.x)^{n-2} \cdot dx = \frac{D. x^{m+1} \cdot (L.x)^{n-2}}{m+1} - \frac{n-2}{m+1} \cdot x^m \cdot (L.x)^{n-3} \cdot dx$$

$$p-1=m, q=n-3 \quad x^m \cdot (L.x)^{n-3} \cdot dx = \frac{D. x^{m+1} \cdot (L.x)^{n-3}}{m+1} - \frac{n-3}{m+1} \cdot x^m \cdot (L.x)^{n-4} \cdot dx$$

y así sucesivamente: luego será

$$x^m \times (L.x)^n \times dx = \frac{D. x^{m+1} \times (L.x)^n}{m+1} - \frac{n}{(m+1)} \times D. x^{m+1}$$

$$\times (L.x)^{n-1} + \frac{n \cdot (n-1)}{(m+1)^2} \times D. x^{m+1} \times (L.x)^{n-2}$$

$$- \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{(m+1)^3} \times D. x^{m+1} \times (L.x)^{n-3} + \&c.$$

pero el complejo de estas diferenciales es igual (65.) á la diferencial del complejo de las cantidades finitas con sus signos correspondientes, y además en dichas cantidades se halla el factor comun x^{m+1} : luego será $x^m \times (L.x)^n \times dx =$

$$D. x^{m+1} \times \left(\frac{(L.x)^n}{m+1} - \frac{n \times (L.x)^{n-1}}{(m+1)^2} + \frac{n \times (n-1) \times (L.x)^{n-2}}{(m+1)^3} - \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (L.x)^{n-3}}{(m+1)^4} + \&c. \right). \text{ Que es } \&c.$$

COROLARIO I.

97. Luego será la integral de $x^m \times (L.x)^n \times dx$, esto es, $(A) S. x^m \times (L.x)^n \times dx = x^{m+1} \times \left(\frac{(L.x)^n}{m+1} - \frac{n \times (L.x)^{n-1}}{(m+1)^2} + \frac{n \times (n-1) \times (L.x)^{n-2}}{(m+1)^3} - \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (L.x)^{n-3}}{(m+1)^4} + \&c. \right)$; y siendo n número entero y positivo, se tendrá dicha integral en un número finito de términos por los logaritmos; como, por exemplo, si es $n=2$, será $S. x^m \times (L.x)^2 \times dx = x^{m+1} \times \left(\frac{(L.x)^2}{m+1} - \frac{2 \times L.x}{(m+1)^2} + \frac{2}{(m+1)^3} \right)$, en cuya expresion el exponente m puede tener qualquier valor. Exceptuase el caso de ser $m=-1$, porque entonces la diferencial propuesta $x^m \times (L.x)^n \times dx$ se reduce á $(L.x)^n \times \frac{dx}{x}$, cuya integral (93) es $\frac{(L.x)^{n+1}}{n+1}$; y si además es $n=-1$, la diferencial propuesta se reducirá á $\frac{dx}{xL.x}$, cuya integral (95) es $L^2.x$: pero en las demas suposiciones que se hagan respecto al

exponente n , será infinita la serie hallada; y entonces tomando en ella un número conveniente de términos, se tendrá por aproximación la integral de la diferencial propuesta.

COROLARIO II.

98. Si en la equacion A se supone $n = -1$, se tendrá $S. \frac{x^m dx}{L.x} = x^{m+1} \times \left(\frac{1}{(m+1) \times L.x} + \frac{1}{(m+1)^2 \times (L.x)^2} + \frac{2}{(m+1)^3 \times (L.x)^3} + \&c. \right)$. Si debe ser $S. \frac{x^m dx}{L.x} = 0$, supuesta $x = 0$, será también igual á cero la constante que se debe añadir á la integral; pero esta constante será infinita, si debe ser $S. \frac{x^m dx}{L.x} = 0$, supuesta $x = 1$.

COROLARIO III.

99. Se ha demostrado (96) que es $x^m \cdot (L.x)^n \cdot dx = \frac{D.x^{m+1} \times (L.x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \times x^m \times (L.x)^{n-1} \times dx$: luego integrando se tendrá $S. x^m \times (L.x)^n \times dx = \frac{x^{m+1} \times (L.x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \times S. x^m \times (L.x)^{n-1} \times dx$.

Si en esta equacion se supone que n tiene valor negativo, como $n = -p$, será también $S. \frac{x^m \times dx}{(L.x)^p}$

$$= \frac{x^{m+1}}{(m+1) \times (L.x)^p} + \frac{p}{m+1} \times S. \frac{x^m dx}{(L.x)^{p+1}}; \text{ por}$$
 consiguiente $S. \frac{x^m dx}{(L.x)^{p+1}} = -\frac{1}{p} \times \frac{x^{m+1}}{(L.x)^p} + \frac{m+1}{p} \times S. \frac{x^m dx}{(L.x)^p};$
 y haciendo $p+1=r$, se tendrá $S. \frac{x^m dx}{(L.x)^r} = -\frac{1}{r-1} \times \frac{x^{m+1}}{(L.x)^{r-1}} + \frac{m+1}{r-1} \times S. \frac{x^m dx}{(L.x)^{r-1}}$, de lo qual resulta que serán,

$$S. \frac{x^m dx}{(L.x)^{r-1}} = -\frac{1}{r-2} \times \frac{x^{m+1}}{(L.x)^{r-2}} + \frac{m+1}{r-2} \times S. \frac{x^m dx}{(L.x)^{r-2}},$$

$$S. \frac{x^m dx}{(L.x)^{r-2}} = -\frac{1}{r-3} \times \frac{x^{m+1}}{(L.x)^{r-3}} + \frac{m+1}{r-3} \times S. \frac{x^m dx}{(L.x)^{r-3}},$$

y así sucesivamente: luego si r es número entero y positivo, la integral de $\frac{x^m dx}{(L.x)^r}$ dependerá última-

mente de la integral de $\frac{x^m dx}{L.x}$: por exemplo, si es

$$r=3, \text{ será } S. \frac{x^m dx}{(L.x)^3} = -\frac{1}{2} \times \frac{x^{m+1}}{(L.x)^2} - \frac{m+1}{2} \times \frac{x^m}{(L.x)} + \frac{(m+1)^2}{2} \times S. \frac{x^m dx}{L.x},$$

mientras continuando las substituciones, resultan cantidades infinitas.

ESCOLIO.

100. El método que se ha seguido en la Propo-

sicion antecedente, es muy útil, y se sirven de él los mas grandes Matemáticos, para reducir las fórmulas diferenciales á series; con cuya operacion se logra ó de reducir dichas fórmulas á otras mas simples de las quales se conocen las integrales, ó de tener próximamente las integrales que se buscan, tomando un número conveniente de términos de las series que han resultado.

EXEMPLO I.

101. Se propone reducir la diferencial

$dx \times (a^3 + x^3)^2$ á serie.

Tómese la fórmula $x^p \times (a^3 + x^3)^q$; y será $D. x^p \times (a^3 + x^3)^q = p x^{p-1} dx \times (a^3 + x^3)^q + 3q x^{p+2} dx \times (a^3 + x^3)^{q-1}$, y por consiguiente $x^{p-1} dx \times$

$$(a^3 + x^3)^q = \frac{1}{p} \times D. x^p \times (a^3 + x^3)^q - \frac{3q}{p} \times x^{p+2} dx$$

$\times (a^3 + x^3)^{q-1}$: en esta equacion háganse las siguientes

substituciones, y se tendrán las equaciones

$$p=1, q=2 \quad \left| \quad dx \times (a^3 + x^3)^2 = D. x \times (a^3 + x^3)^2 - 3 \times 2 x^3 dx \times (a^3 + x^3) \right.$$

$$p=4, q=1 \quad \left| \quad x^3 dx \times (a^3 + x^3) = \frac{1}{4} D. x^4 \times (a^3 + x^3) - \frac{3}{4} x^6 dx \right.$$

Luego se ha reducido la diferencial propuesta á otra simple $-\frac{3}{4} x^6 dx$, de quien se tiene la integral (77). Por tanto será la diferencial propuesta

$$dx \times (a^3 + x^3)^2 = D. x \times (a^3 + x^3)^2 - \frac{3 \times 2}{4} \times D. x^4$$

$\times (a^3 + x^3) + \frac{3 \times 2}{4} \times x^6 dx$; por consiguiente $S. dx$

$$\times (a^3 + x^3)^2 = x \times (a^3 + x^3)^2 - \frac{3 \times 2}{4} \times x^4 \times (a^3 + x^3) + \frac{3 \times 2}{4 \times 7} \times x^7.$$

EXEMPLO II.

102. Se pide reducir la diferencial $\frac{dx}{a^3 + x^3}$ á serie.

Tómese la fórmula $\frac{x^p}{(a^3 + x^3)^q}$, y será

$$D. \frac{x^p}{(a^3 + x^3)^q} = \frac{px^{p-1} dx}{(a^3 + x^3)^q} - \frac{3q \times x^{p+2} dx}{(a^3 + x^3)^{q+1}}; \text{ por}$$

$$\text{consiguiente } \frac{x^{p-1} dx}{(a^3 + x^3)^q} = \frac{1}{p} \times D. \frac{x^p}{(a^3 + x^3)^q} + \frac{3q}{p}$$

$$\times \frac{x^{p+2} dx}{(a^3 + x^3)^{q+1}}. \text{ Ahora si en esta equacion general}$$

se hacen las siguientes

substituciones, se tendrán las equaciones

$$\begin{array}{l} p=1, q=1 \left| \frac{dx}{a^3 + x^3} = D. \frac{x}{a^3 + x^3} + 3 \times \frac{x^3 dx}{(a^3 + x^3)^2} \right. \\ p=4, q=2 \left| \frac{x^3 dx}{(a^3 + x^3)^2} = \frac{1}{4} \times D. \frac{x^4}{(a^3 + x^3)^2} + \frac{3 \times 2}{4} \times \frac{x^6 dx}{(a^3 + x^3)^3} \right. \\ p=7, q=3 \left| \frac{x^6 dx}{(a^3 + x^3)^3} = \frac{1}{7} \times D. \frac{x^7}{(a^3 + x^3)^3} + \frac{3 \times 3}{7} \times \frac{x^9 dx}{(a^3 + x^3)^4} \right. \\ p=10, q=4 \left| \frac{x^9 dx}{(a^3 + x^3)^4} = \frac{1}{10} \times D. \frac{x^{10}}{(a^3 + x^3)^4} + \frac{3 \times 4}{10} \times \frac{x^{12} dx}{(a^3 + x^3)^5} \right. \end{array}$$

y así sucesivamente; luego será

$$\frac{dx}{a^3+x^3} = D. \left(\frac{x}{a^3+x^3} + \frac{1}{4} \times \frac{x^4}{(a^3+x^3)^2} + \frac{3^2 \times 2}{4 \times 7} \times \frac{x^7}{(a^3+x^3)^3} \right. \\ \left. + \frac{3^3 \times 2 \times 3}{4 \times 7 \times 10} \times \frac{x^{10}}{(a^3+x^3)^4} + \frac{3^4 \times 2 \times 3 \times 4}{4 \times 7 \times 10 \times 13} \times \frac{x^{13}}{(a^3+x^3)^5} + \&c. \right);$$

y por lo tanto la integral de $\frac{dx}{a^3+x^3}$ será igual á la

$$\text{serie } \frac{x}{a^3+x^3} + \frac{1}{4} \times \frac{x^4}{(a^3+x^3)^2} + \frac{3^2 \times 2}{4 \times 7} \times \frac{x^7}{(a^3+x^3)^3} \\ + \frac{3^3 \times 2 \times 3}{4 \times 7 \times 10} \times \frac{x^{10}}{(a^3+x^3)^4} + \frac{3^4 \times 2 \times 3 \times 4}{4 \times 7 \times 10 \times 13} \times \frac{x^{13}}{(a^3+x^3)^5} +$$

&c. la qual serie podrá continuarse al infinito por ser evidente la ley que sigue.

De las Diferenciales de las cantidades

exponenciales.

PROPOSICION XII.

(103. Hallar la diferencial de la cantidad exponencial x^m , cuyo exponente m es número irracional.

(Hágase $x^m = y$; y se tendrán las equaciones $L.y = L.x^m = m L.x$, y $D.L.y = D.m L.x$; pe-

ro (87) $D.L.y = \frac{dy}{y}$, $D.m L.x = \frac{m dx}{x}$; luego se-

rá $\frac{dy}{y} = \frac{m dx}{x}$; y multiplicando ambos miembros

por y , se tendrá $dy = m \times \frac{y dx}{x}$: y por ser $y = x^m$,

será $D. x^m = m \times \frac{x^m dx}{x} = m x^{m-1} dx$. Que es &c.

COROLARIO.

104. Luego la diferencial de la cantidad exponencial x^m es la misma que la de la potencia x^m , cuyo exponente m es número racional (76). Diga-se lo mismo respecto á la integral de la fórmula

$$x^m dx, \text{ esto es, } \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

ESCOLIO.

105. Por las diferenciales de las cantidades logarítmicas, y de las exponenciales, se demuestra generalmente la fórmula newtoniana del binomio, aun quando su exponente sea número irracional positivo ó negativo. Pues, si es $(x+a)^m = x^m + m a x^{m-1} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot (m-1) \cdot a^2 x^{m-2} + \&c.$ será tambien $L. (x+a)^m = L. (x^m + m a x^{m-1} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot (m-1) \cdot a^2 x^{m-2} + \&c.)$, y $m \times L. (x+a) = L. (x^m + m a x^{m-1} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot (m-1) \cdot a^2 x^{m-2} + \&c.)$.

Si esta equacion se diferencia, se tendrá $\frac{m dx}{x+a} =$

$$\frac{m x^{m-1} dx + m \cdot (m-1) a x^{m-2} dx + \frac{1}{2} m \cdot (m-1) \cdot (m-2) a^2 x^{m-3} dx + \&c.}{x^m + m a x^{m-1} + \frac{1}{2} m \cdot (m-1) \cdot a^2 x^{m-2} + \&c.}$$

y quitando quebrados, será

$$mx^m dx + m^2 ax^{m-1} dx + \frac{1}{2} m^2 \cdot (m-1) \cdot a^2 x^{m-2} dx + \&c. = \\ mx^m dx + m \cdot (m-1) ax^{m-1} dx + \frac{1}{2} m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot a^2 x^{m-2} dx + \&c. \\ + m a x^{m-1} dx + m \cdot (m-1) \cdot a^2 x^{m-2} dx + \&c.$$

Si se suman los términos semejantes del segundo miembro, se hallarán los del primero; por consiguiente siendo idéntica y verdadera la equacion que ha resultado, subsistirá generalmente la fórmula newtoniana del binomio, aun quando su exponente sea número irracional positivo ó negativo.

PROPOSICION XIII.

106. Hallar la diferencial de la cantidad exponencial a^x , que tiene la raíz a constante, y el exponente x variable.

Supóngase $a^x = y$; y valdrán las equaciones $L. y = L. a^x = x L. a$, $D. L. y = D. x L. a$; pero $D. L. y = \frac{dy}{y}$ (87), y $D. x L. a = dx L. a$ (62): luego

será $\frac{dy}{y} = dx L. a$; y multiplicando ambos miembros por y , se tendrá $dy = y dx L. a$; pero $y = a^x$: luego será $D. a^x = a^x dx L. a$. Que es &c.

COROLARIO I.

107. Luego la diferencial de la cantidad exponencial a^x , que tiene la raíz a constante, y el

exponente x variable, será igual al producto del logaritmo de la raíz constante, de la cantidad exponencial, y de la diferencial del exponente variable, esto es, $D.a^x = L.a \times a^x dx$. Si se llama e el número, cuyo logaritmo es igual á la unidad, esto es $e = 2,71828183$ próximamente (II.341), será $D.e^x = e^x dx$.

COROLARIO II.

108. Por tanto será $S.L.a \times a^x dx$, ó bien (62) $L.a \times S.a^x dx = a^x$; y partiendo ambos miembros por $L.a$, se tendrá $S.a^x dx = \frac{a^x}{L.a}$, esto es, la integral de la cantidad exponencial a^x multiplicada por la diferencial del exponente variable es igual á la misma cantidad exponencial partida por el logaritmo de la raíz constante. Igualmente en la referida suposicion (107) de la cantidad e , será $S.e^x dx = e^x$.

PROPOSICION XIV.

109. Hallar la diferencial de la cantidad exponencial x^y , que tiene la raíz y el exponente variables.

Supóngase $x^y = z$, y se tendrán las equaciones $L.z = L.x^y = y L.x$, $D.L.z = D.y L.x$; pero

(87) $D.L.z = \frac{dz}{z}$: luego será $\frac{dz}{z} = D.y L.x$; y multiplicando ambos miembros por z , se tendrá $dz = z \times D.y L.x$; y substituyendo en lugar de z su valor x^y , será $D.x^y = x^y \times D.y L.x$. Que es &c.

COROLARIO I.

III. Luego la diferencial de la cantidad exponencial x^y será igual á la misma cantidad exponencial multiplicada por la diferencial del producto del exponente variable y del logaritmo de la raiz variable, esto es, $D.x^y = x^y \times D.y L.x$: y hecha la diferencial efectiva del producto $y \times L.x$, será tambien $D.x^y = x^y \times \left(dy L.x + \frac{y dx}{x} \right) = x^y dy L.x + y x^{y-1} dx$.

COROLARIO II.

III. Se infiere ser $D.x^{u^z} = x^{u^z} \times D.u^z L.x$: pues se ha demostrado ser $D.x^y = x^y \times D.y L.x$; y si se supone $y = u^z$, tambien será $D.x^{u^z} = x^{u^z} \times D.u^z L.x$: hecha la diferencial efectiva del producto $u^z L.x$, se tendrá $D.x^{u^z} = x^{u^z} \times \left(u^z dz L.x \times L.u + z u^{z-1} du L.x + \frac{u^z dx}{x} \right) = x^{u^z} u^z dz L.x \times L.u + x^{u^z} z u^{z-1} du L.x + \frac{x^{u^z} u^z dx}{x}$.

COROLARIO III.

112. Por tanto será $S. x^y \times D. y L. x = S. (x^y L. x \times dy + x^{y-1} \times y dx) = x^y$, como tambien se tendrá $S. x^{u^z} \times D. u^z L. x = S. (x^{u^z} \times u^z dz L. x \times L. u + x^{u^z} \times z u^{z-1} du L. x + \frac{x^{u^z} \times u^z dx}{x}) = x^{u^z}$.

De las Diferenciales de los senos, cosenos, tangentes, secantes, cotangentes, y cosecantes circulares, &c. y de las mismas fórmulas con distintos signos.

PROPOSICION XV.

113. Hallar las diferenciales del seno y del coseno de un arco circular u , esto es, $Sc. u$, y $Cc. u$.

1.º En la cantidad propuesta $Sc. u$ substitúyase $u + du$ en lugar de u ; de la cantidad que resulta $Sc. (u + du)$ réstese la propuesta; y el residuo $Sc. (u + du) - Sc. u$ será (49) la diferencial del seno del arco circular u ; pero (I. 499) $Sc. (u + du) = \frac{Sc. u \times Cc. du + Sc. du \times Cc. u}{r}$; luego será $D. Sc. u = \frac{Sc. u \times Cc. du + Sc. du \times Cc. u}{r} - Sc. u$; pero (22) el coseno del arco evaneciente du es igual al radio, esto

es, $Cc. du = r$, y el seno del arco evaneciente du es igual al mismo arco, esto es, $Sc. du = du$: luego será $D.Sc. u = \frac{r \times Sc. u + du \times Cc. u}{r} - Sc. u = \frac{du \times Cc. u}{r}$.

2º. Por la propiedad del círculo es $(Cc. u)^2 = r^2 - (Sc. u)^2$: luego diferenciando esta equacion, se tendrá $2 Cc. u \times D.Cc. u = -2 Sc. u \times D.Sc. u$; pero $D.Sc. u = Cc. u \times du : r$, por lo demostrado en el caso anterior: luego será $2 Cc. u \times D.Cc. u = -2 Sc. u \times Cc. u \times du : r$; y partiendo ambos miembros por $2 Cc. u$, se tendrá $D.Cc. u = -\frac{du \times Sc. u}{r}$.

De otro modo.

Sea AF (Fig. 22) un arco u del círculo, cuyo radio es $AC = r$. Tírense las perpendiculares FD , fd á dicho radio, la recta Fe paralela á AC , la tangente FM al punto F y el radio CF ; y prolónguense dicha tangente y la perpendicular df , hasta que concurran en el punto M . Ahora si se considera evaneciente la diferencia Dd entre los cosenos CD y Cd correspondientes á los arcos AF y Af , se tendrán $Dd = Fe = -D.Cc. u$, $Ff = du$, y $fe = D.Sc. u$; y por ser los triángulos MeF , feF iguales y semejantes (22), serán tambien $Me = fe = D.Sc. u$, y $FM = Ff = du$. Luego siendo los ángulos DFe , CFM iguales por rectos,

resultará el ángulo $DFC = e FM$; pero los ángulos en D y e son iguales por rectos: luego los triángulos $CD F$, $F e M$ serán semejantes, y tendrán proporcionales los lados $CD : CF = Me : MF$, esto es, $Cc.u:r = D.Sc.u:du$; por consiguiente será $D.Sc.u = \frac{Cc.u \times du}{r}$. Igualmente por la semejanza de dichos triángulos será $FD : CF = Fe : FM$, esto es, $Sc.u:r = -D.Cc.u:du$; por consiguiente se tendrá $D.Cc.u = -\frac{Sc.u \times du}{r}$. Que es &c.

COROLARIO I.

114. Se infiere que la diferencial del seno de un arco u del círculo, cuyo radio es r , es igual al coseno del mismo arco multiplicado por la diferencial del arco, partido este producto por el radio; y que la diferencial del coseno de un arco u es igual al seno del mismo arco multiplicado por la diferencial del arco, partido este producto tomado con el signo negativo por el radio, esto es, $D.Sc.u = \frac{Cc.u \times du}{r}$, y $D.Cc.u = -\frac{Sc.u \times du}{r}$.

COROLARIO II.

115. Luego también serán, $du = \frac{r \times D.Sc.u}{Cc.u}$,

$du = -\frac{r \times D.Cc.u}{Sc.u}$; é integrando se tendrán las equa-
ciones $u = S. \frac{r \times D.Sc.u}{Cc.u}$, $u = S. -\frac{r D.Cc.u}{Sc.u}$.

COROLARIO III.

116. Si se supone $Sc.u = x$, serán $Cc.u = \sqrt{(r^2 - x^2)}$, y $D.Sc.u = dx$: luego será $u = S. \frac{r D.Sc.u}{Cc.u} = S. \frac{r dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$.

COROLARIO IV.

117. Si se supone $Cc.u = x$, serán $Sc.u = \sqrt{(r^2 - x^2)}$, y $D.Cc.u = dx$: luego será $u = S. -\frac{r D.Cc.u}{Sc.u} = S. -\frac{r dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$.

COROLARIO V.

118. Tambien si se supone el seno verso $AD = x$, serán $Cc.u = r - x$, $Sc.u = \sqrt{(2rx - x^2)}$, $D.Cc.u = -dx$: luego se tendrá $u = S. -\frac{r D.Cc.u}{Sc.u} = S. \frac{r dx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$.

COROLARIO VI.

119. Siendo $D.x \sqrt{(r^2 - x^2)} = dx \sqrt{(r^2 - x^2)}$
 $-\frac{x^2 dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} = \frac{r^2 dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} - \frac{2x^2 dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$, será tam-

bien $\frac{x^2 dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}} = -D. \frac{x\sqrt{(r^2-x^2)}}{2} + \frac{r}{2} \times \frac{r dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}};$

luego integrando se tendrá $S. \frac{x^2 dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}} = -$

$\frac{x\sqrt{(r^2-x^2)}}{2} + \frac{r}{2} \times S. \frac{r dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}};$ por consiguiente

la integral de la fórmula $\frac{x^2 dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$ depende de un arco de círculo, que tiene el radio r , y el seno x .

COROLARIO VII.

120 De la equacion anterior $D.x\sqrt{(r^2-x^2)}$
 $= dx\sqrt{(r^2-x^2)} - \frac{x^2 dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$, resulta que es

$dx\sqrt{(r^2-x^2)} = D.x\sqrt{(r^2-x^2)} + \frac{x^2 dx}{\sqrt{(r^2-x^2)};$ por

consiguiente $S. dx\sqrt{(r^2-x^2)} = x\sqrt{(r^2-x^2)}$

$+ S. \frac{x^2 dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}} = \frac{x\sqrt{(r^2-x^2)}}{2} + \frac{r}{2} \times S. \frac{r dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$

(119): luego tambien la integral de $dx\sqrt{(r^2-x^2)}$

depende de un arco de círculo, que tiene el radio r , y el seno x .

COROLARIO VIII.

121. De un modo semejante se demostrarán las fórmulas siguientes:

$S. \frac{x dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}} = -\sqrt{(2rx-x^2)} + S. \frac{r dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}};$

$$S. \frac{x^2 dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}} = -\frac{x+3r}{2} \times \sqrt{(2rx-x^2)} + \frac{3r}{2} \times S. \frac{r dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}};$$

$$S. dx \sqrt{(2rx-x^2)} = \frac{x-r}{2} \times \sqrt{(2rx-x^2)} + \frac{r}{2} \times S. \frac{r dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}.$$

ESCOLIO.

122. El valor del arco circular u se hallará próximamente por su seno x con el método siguiente. Se ha demostrado antes (116) ser $du =$

$$\frac{r dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}} = r dx \times (r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}; \text{ luego reduciendo á se-}$$

rie por la fórmula newtoniana el binomio $(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, y multiplicando sus términos por $r dx$, se tendrá

$$du = dx + \frac{x^2 dx}{2r^2} + \frac{3x^4 dx}{2^2 \times 2r^4} + \frac{3 \times 5 x^6 dx}{2^3 \times 2 \times 3r^6} + \frac{3 \times 5 \times 7 x^8 dx}{2^4 \times 2 \times 3 \times 4r^8} +$$

$$\&c. \text{ é integrando, será } u = x + \frac{x^3}{2 \times 3r^2} + \frac{3x^5}{2^2 \times 2 \times 3r^4}$$

$$+ \frac{3 \times 5 x^7}{2^3 \times 2 \times 3 \times 7r^6} + \frac{3 \times 5 \times 7 x^9}{2^4 \times 2 \times 3 \times 4 \times 9r^8} + \&c. \text{ Y porque sien-}$$

do el seno $x=0$, también lo será el arco u , es claro que la constante, que se debe añadir á la integral hallada, será cero. Obsérvese que la serie antecedente es muy convergente, y de consiguiente útil para hallar los arcos circulares hasta el cuadrante. Si se busca éste, se tendrá el seno $x=r$,

$$\text{y por consiguiente el cuadrante } q = r \times \left(1 + \frac{1}{2 \times 3}\right)$$

$+ \frac{3}{2^2 \times 2 \times 5} + \frac{3 \times 5}{2^3 \times 2 \times 3 \times 7} + \frac{3 \times 5 \times 7}{2^4 \times 2 \times 3 \times 4 \times 9} + \&c.$). Con el mismo método se tratarán las demas fórmulas diferenciales pertenecientes á los cosenos y senos versos; pero como se tienen ya calculadas las Tablas de los senos, &c. por medio de ellas se determinarán en los casos particulares por aproximación las integrales de las fórmulas expresadas en los Corolarios antecedentes.

Tambien del mismo modo se podrá hallar próximamente la integral de la fórmula $\frac{rdx}{\sqrt{x^2 \pm r^2}}$; pero se tendrá mas expeditamente por los logaritmos hiperbólicos, como se hará ver en la Proposicion siguiente.

PROPOSICION XVI.

123. Si se supone $z = x - \sqrt{x^2 \pm r^2}$, será

$$\frac{rdx}{\sqrt{x^2 \pm r^2}} = -\frac{rdz}{z}.$$

Siendo $z = x - \sqrt{x^2 \pm r^2}$, tambien será $x - z = \sqrt{x^2 \pm r^2}$; y quadrando se tendrá $x^2 - 2xz + z^2 = x^2 \pm r^2$, de donde resulta $x = \frac{z^2 \mp r^2}{2z}$; luego será $dx = \frac{z^2 \mp r^2}{2z^2} \times dz$, y $\sqrt{x^2 \pm r^2} = x - z$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{z^2 - r^2}{2z} - z = -\frac{z^2 + r^2}{2z}. \text{ Por tanto se tendrá } \frac{r dx}{\sqrt{(x^2 + r^2)}} \\
 &= -\frac{rdz}{z}. \text{ Del mismo modo se demostrará } \frac{r dx}{\sqrt{(x^2 - r^2)}} \\
 &= -\frac{rdz}{z}, \text{ si se supone } z = x - \sqrt{(x^2 - r^2)}. \text{ Que es \&c.}
 \end{aligned}$$

COROLARIO I.

124. Luego la integral de $\frac{r dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}}$ será igual á la integral de $-\frac{rdz}{z}$, la qual integral es (87) $-r \times L. z$ ó bien $-r \times L. (x - \sqrt{(x^2 \pm r^2)})$, si se substituye en lugar de z su valor $x - \sqrt{(x^2 \pm r^2)}$: esto es, $S. \frac{r dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}} = -r \times L. (x - \sqrt{(x^2 \pm r^2)})$.

COROLARIO II.

125. Con el mismo método expresado antes (119, 120) se demostrará ser

$$\begin{aligned}
 S. \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2 + r^2)}} &= \frac{x \sqrt{(x^2 + r^2)}}{2} + \frac{r^2}{2} \times L. (x - \sqrt{(x^2 + r^2)}), \\
 \text{y } S. dx \sqrt{(x^2 + r^2)} &= \frac{x \sqrt{(x^2 + r^2)}}{2} + \frac{r^2}{2} \times L. (x - \sqrt{(x^2 + r^2)}).
 \end{aligned}$$

COROLARIO III.

126. Finalmente las fórmulas $\frac{r dy}{\sqrt{(y^2 \pm 2ry)}}$, $dy \sqrt{(y^2 \pm 2ry)}$, $\frac{y dy}{\sqrt{(y^2 \pm 2ry)}}$, $\frac{y^2 dy}{\sqrt{(y^2 \pm 2ry)}}$ se redu-

cen á las anteriores por medio de la substitution
 $y \pm r = x$.

PROPOSICION XVII:

127. Hallar la diferencial de la tangente de un arco u del círculo cuyo radio es r .

Siendo , pues , $Cc.u : Sc.u = r : Tc.u$, será

$Tc.u = \frac{r Sc.u}{Cc.u}$: luego diferenciando esta expresion,

se tendrá $D.Tc.u = \frac{Cc.u \times r D.Sc.u - r Sc.u \times D.Cc.u}{(Cc.u)^2}$; pe-

ro (114) $r \times D.Sc.u = Cc.u \times du$, y $-r D.Cc.u =$

$Sc.u \times du$: luego será $D.Tc.u = \frac{(Cc.u)^2 \times du + (Sc.u)^2 \times du}{(Cc.u)^2}$

$= \frac{r^2 du}{(Cc.u)^2}$, por ser $(Cc.u)^2 + (Sc.u)^2 = r^2$; pero

$r : Cc.u = Sec.u : r$, de donde $r^2 : (Cc.u)^2 = (Sec.u)^2 : r^2$

$= r^2 + (Tc.u)^2 : r^2$: luego será $D.Tc.u =$

$\frac{(r^2 + (Tc.u)^2) \times du}{r^2}$

De otro modo.

Tírense (Fig. 23) la tangente AE al punto A de la circunferencia del círculo cuyo radio $CA=r$, y las secantes CT, Ct ; y haciendo centro en C , con el intervalo CT describáse el arco TR . Si se considera el arco Ff evaneciente, y se llama el

arco $AF = u$, serán $Ff = du$, $Tt = D.Tc.u$, y el radio CR formará (22) con el arco evaneciente RT el ángulo CRT recto, de suerte que el ángulo TRt será igualmente recto. En el triángulo CTt , que tiene el lado Tt prolongado, será el ángulo externo $ATC = TtC + TCt$; pero el ángulo TCt es evaneciente: luego (1) será $ATC = TtR$; pero los ángulos TAC , TRt son iguales por rectos: luego los triángulos TRt , TAC serán semejantes, y en ellos proporcionales los lados, esto es, $Tt : TR = CT : CA$; pero por la semejanza de los sectores TCR , FCf es $TR : Ff = CT : CF$ ó bien CA : luego será $Tt : Ff = (CT)^2 : (CA)^2$, esto es, $D.Tc.u : du = r^2 + (Tc.u)^2 : r^2$; por consiguiente se tendrá $D.Tc.u = \frac{(r^2 + (Tc.u)^2) \times du}{r^2}$.

Que es &c.

COROLARIO I.

128. Se infiere que la diferencial de la tangente de qualquiera arco de círculo es igual á la diferencial del mismo arco multiplicada por la suma de los quadrados del radio y de la tangente de dicho arco, partido este producto por el quadrado del radio, esto es, $D.Tc.u = \frac{(r^2 + (Tc.u)^2) \times du}{r^2}$.

COROLARIO II.

129. Por tanto será $D.Tc.nu = \frac{(r^2 + (Tc.nu)^2) \times ndu}{r^2}$;

pero $n \times D.Tc.u = \frac{(r^2 + (Tc.u)^2) \times ndu}{r^2}$: luego siendo

$n > 1$, será $D.Tc.nu > n \times D.Tc.u$, y por consiguiente $Tc.nu > n \times Tc.u$, de donde resulta ser $Tc.nu : Tc.u > n : 1$, ó bien en mayor razon que $nu : u$, esto es, la tangente de un ángulo mayor á la tangente de un ángulo menor en mayor razon que dicho ángulo mayor al menor.

COROLARIO III.

130. Siendo $D.Tc.u = \frac{(r^2 + (Tc.u)^2) \times du}{r^2}$, tam-

bien será $du = \frac{r^2 \times D.Tc.u}{r^2 + (Tc.u)^2}$; por consiguiente $u =$

$S. \frac{r^2 \times D.Tc.u}{r^2 + (Tc.u)^2}$. Tambien será $Tc.u = S. \frac{(r^2 + (Tc.u)^2) du}{r^2}$,

y $Tc.u = S. \frac{r^2 du}{(Tc.u)^2}$.

COROLARIO IV.

131. Si se supone $Tc.u = x$, será $u = S. \frac{r^2 dx}{r^2 + x^2}$.

ESCOLIO I.

132. Si se pide reducir la diferencial $\frac{dx}{x^2+r^2}$ á serie infinita, se diferenciará la fórmula $\frac{x^p}{(x^2+r^2)^q}$;

y se tendrá $D. \frac{x^p}{(x^2+r^2)^q} = \frac{px^{p-1}dx}{(x^2+r^2)^q} - 2q \times \frac{x^{p+1}dx}{(x^2+r^2)^{q+1}}$; por consiguiente será

$$\frac{x^{p-1}dx}{(x^2+r^2)^q} = \frac{1}{p} \times D. \frac{x^p}{(x^2+r^2)^q} + \frac{2q}{p} \times \frac{x^{p+1}dx}{(x^2+r^2)^{q+1}};$$

en esta equacion háganse sucesivamente las siguientes substituciones, y se tendrán las equaciones

$$\begin{aligned} p=1, q=1 & \left| \frac{dx}{x^2+r^2} = D. \frac{x}{x^2+r^2} + 2 \times \frac{x^3 dx}{(x^2+r^2)^2} \right. \\ p=3, q=2 & \left| \frac{x^2 dx}{(x^2+r^2)^2} = \frac{1}{3} D. \frac{x^3}{(x^2+r^2)^2} + \frac{2 \times 2}{3} \times \frac{x^5 dx}{(x^2+r^2)^3} \right. \\ p=5, q=3 & \left| \frac{x^4 dx}{(x^2+r^2)^3} = \frac{1}{5} \times D. \frac{x^5}{(x^2+r^2)^3} + \frac{2 \times 3}{5} \times \frac{x^7 dx}{(x^2+r^2)^4} \right. \\ p=7, q=4 & \left| \frac{x^6 dx}{(x^2+r^2)^4} = \frac{1}{7} \times D. \frac{x^7}{(x^2+r^2)^4} + \frac{2 \times 4}{7} \times \frac{x^9 dx}{(x^2+r^2)^5} \right. \end{aligned}$$

y así sucesivamente: luego será

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x^2+r^2} = D. & \left(\frac{x}{x^2+r^2} + \frac{2}{3} \times \frac{x^3}{(x^2+r^2)^2} + \frac{2^2 \times 2}{3 \times 5} \times \frac{x^5}{(x^2+r^2)^3} \right. \\ & \left. + \frac{2^3 \times 2 \times 3}{3 \times 5 \times 7} \times \frac{x^7}{(x^2+r^2)^4} + \frac{2^4 \times 2 \times 3 \times 4}{3 \times 5 \times 7 \times 9} \times \frac{x^9}{(x^2+r^2)^5} + \&c. \right); \end{aligned}$$

por consiguiente será

$$S. \frac{r^2 dx}{x^2 + r^2} = u = r^2 \times \left(\frac{x}{x^2 + r^2} + \frac{1}{3} \times \frac{x^3}{(x^2 + r^2)^2} + \frac{2^2 \times 2}{3 \times 5} \right. \\ \times \frac{x^5}{(x^2 + r^2)^3} + \frac{2^3 \times 2 \times 3}{3 \times 5 \times 7} \times \frac{x^7}{(x^2 + r^2)^4} + \frac{2^4 \times 2 \times 3 \times 4}{3 \times 5 \times 7 \times 9} \times \frac{x^9}{(x^2 + r^2)^5} \\ \left. + \&c. \right).$$

Por medio de esta serie se hallará próximamente el arco circular que corresponde á una tangente dada: por exemplo, si se supone la tangente $x=r$, se tendrá el arco de 45 grados ó bien la octava parte de la circunferencia igual á la serie

$$r \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{2}{2 \times 3 \times 5} + \frac{2 \times 3}{2 \times 3 \times 5 \times 7} + \frac{2 \times 3 \times 4}{2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9} + \&c. \right);$$

por consiguiente la circunferencia será igual á la

$$\text{serie } 2r \times \left(2 + \frac{1}{3} + \frac{2 \times 2}{3 \times 5} + \frac{2 \times 2 \times 3}{3 \times 5 \times 7} + \frac{2 \times 2 \times 3 \times 4}{3 \times 5 \times 7 \times 9} + \&c. \right)$$

$= 2r \times 3,1415926505$ próximamente, si se reducen las fracciones de la serie hallada á decimales con diez notas, como se manifiesta en el cálculo siguiente (*A*), en quien *t* expresa siempre el término anterior de la misma serie. Adviértase que dicha aproximacion es uniforme hasta la novena cifra con las que tienen mayor número de notas; como es la de 3, 1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679821480865132723066470938446.

$2,0000000000 = t \times \frac{16}{33}$	$0,0000066078 = t \times \frac{16}{33}$
$6666666666 = t \times \frac{2}{3}$	$32095 = t \times \frac{17}{37}$
$2666666666 = t \times \frac{2}{7}$	$15613 = t \times \frac{18}{37}$
$1142857142 = t \times \frac{3}{7}$	$7606 = t \times \frac{19}{39}$
$507936507 = t \times \frac{4}{9}$	$3710 = t \times \frac{20}{41}$
$230880230 = t \times \frac{5}{11}$	$1811 = t \times \frac{21}{43}$
$106560106 = t \times \frac{6}{13}$	$885 = t \times \frac{22}{45}$
$49728049 = t \times \frac{7}{15}$	$433 = t \times \frac{23}{47}$
$23401434 = t \times \frac{8}{17}$	$212 = t \times \frac{24}{49}$
$11084889 = t \times \frac{9}{19}$	$103 = t \times \frac{25}{51}$
$5278518 = t \times \frac{10}{21}$	$50 = t \times \frac{26}{53}$
$2524508 = t \times \frac{11}{23}$	$24 = t \times \frac{27}{55}$
$1211763 = t \times \frac{12}{25}$	$11 = t \times \frac{28}{57}$
$583441 = t \times \frac{13}{27}$	$5 = t \times \frac{29}{59}$
$281661 = t \times \frac{14}{29}$	$2 = t \times \frac{30}{61}$
$136287 = t \times \frac{15}{31}$	$0 = t \times \frac{31}{63}$

Suma total 3, 1415926505

Si se pide hallar el valor próximo de la circunferencia circular con mayor número de cifras; para facilitar el cálculo, se dividirá el arco de cuarenta y cinco grados en dos arcos, cuyas tangentes sean racionales, con el método siguiente. Si se nombran a y b dos arcos del círculo, cuyo radio es r , serán $r : Tc. a = Cc. a : Sc. a$, y $r : Tc. b = Cc. b :$

$Sc.b$; por consiguiente se tendrá $r^2 : Tc.a \times Tc.b = Cc.a \times Cc.b : Sc.a \times Sc.b$, y $r^2 - Tc.a \times Tc.b : r^2 = Cc.a \times Cc.b - Sc.a \times Sc.b : Cc.a \times Cc.b$; pero (I. 501) $Cc.a \times Cc.b - Sc.a \times Sc.b = r \times Cc.(a+b)$,

$$\text{y } Cc.(a+b) = \frac{r \times Sc.(a+b)}{Tc.(a+b)} = \frac{Sc.a \times Cc.b + Sc.b \times Cc.a}{Tc.(a+b)}$$

$$(I. 499) : \text{luego será } r^2 - Tc.a \times Tc.b : r^2 = r \times \frac{Sc.a \times Cc.b + Sc.b \times Cc.a}{Tc.(a+b)} : Cc.a \times Cc.b = \frac{r \times Sc.a}{Cc.a} + \frac{r \times Sc.b}{Cc.b} :$$

$Tc.(a+b) = Tc.a + Tc.b : Tc.(a+b)$, de donde resulta ser $Tc.(a+b) = r^2 \times (Tc.a + Tc.b) : (r^2 - Tc.a \times Tc.b)$. Ahora si se supone $Tc.(a+b) = r$, esto es, el arco $a+b = 45^\circ$. se tendrá $r^2 - Tc.a \times Tc.b = r \times (Tc.a + Tc.b)$; y por medio de esta equacion se hallará $Tc.b = \frac{r^2 - r \times Tc.a}{r + Tc.a}$; luego si se

supone, por exemplo, $Tc.a = \frac{1}{2}r$, será $Tc.b = \frac{1}{3}r$; y por consiguiente el arco de 45° . se ha dividido en dos arcos, cuyas tangentes racionales son $\frac{1}{2}r$, $\frac{1}{3}r$. Si en la serie hallada antes se substituyen sucesivamente $\frac{1}{2}r$ y $\frac{1}{3}r$ en lugar de la tangente x , resultarán dos series racionales, y muy convergentes, y en la suma de ellas se tendrá mas expeditamente el valor próximo del arco de 45° .

Finalmente adviértase que si sobre el diámetro AB (Fig. 24) en sus extremos A y B se levantan

las perpendiculares, $BE=3AC$ radio, y $AF=Tc.30^{\circ}$. la recta FE será próximamente igual á la semicircunferencia ADB : pues, suponiendo el radio $AC=1,000000$, la recta FE se halla entre los límites $3,1415833$ y $3,1415834$; pero en la misma suposición la semicircunferencia ADB queda entre los límites $3,1415926$ y $3,1415927$: luego la diferencia entre la semicircunferencia ADB y la recta FE será menor que $0,00001$ del radio.

Con el mismo método se hallará por una serie infinita la integral de la fórmula $dx:(r^2-x^2)$; pero mas facilmente se tendrá por los logaritmos hiperbólicos, como se ha dicho (88).

ESCOLIO II.

133. Consta por el Escolio antecedente, como por medio del seno, ó del coseno, ó de la tangente de un arco circular se determina próximamente el arco. Al contrario, dado el arco se podrá determinar próximamente el seno, coseno, y tangente que le corresponde; con el método siguiente.

Se ha demostrado (116) que es $du = \frac{r dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$; y si se supone $\sqrt{r^2-x^2}=z$, se tendrán las equaciones $du = \frac{r dx}{z}$, y $dz = -\frac{r dx}{z}$; pero por

ser $du = \frac{r dx}{z}$, es $\frac{du}{r} = \frac{dx}{z}$: luego será $dz = -\frac{x du}{r}$,

y $z = S. -\frac{x du}{r}$; pero siendo $du = \frac{r dx}{z}$, será

$z = \frac{r dx}{du}$: luego se tendrá $\frac{r dx}{du} = S. -\frac{x du}{r}$; y mul-

tiplicando ambos miembros por $\frac{du}{r}$, será $dx = \frac{du}{r}$

$\times S. -\frac{x du}{r}$. Supóngase ahora $x = A + Bu + Cu^2$

$+ Eu^3 + Fu^4 + Gu^5 + Hu^6 + \&c.$ en cuya se-

rie las cantidades $A, B, C, E, F, G, \&c.$ son

constantes que se han de determinar. Si esta equa-

cion se diferencia, se tendrá $dx = B du + 2Cu du$

$+ 3Eu^2 du + 4Fu^3 du + 5Gu^4 du + 6Hu^5 du +$

$\&c.$ pero $dx = \frac{du}{r} \times S. -\frac{x du}{r} = du \times S. -\frac{x du}{r^2}$: lue-

go será $S. -\frac{x du}{r^2} = B + 2Cu + 3Eu^2 + 4Fu^3 +$

$5Gu^4 + 6Hu^5 + \&c.$ Si esta equacion se diferen-

cia, será $-\frac{x du}{r^2} = 2C du + 2 \times 3Eu du + 3 \times 4Fu^2 du$

$+ 4 \times 5Gu^3 du + 5 \times 6Hu^4 du + \&c.$ por consi-

guiente $x = -2r^2 C - 2 \times 3r^2 Eu - 3 \times 4r^2 Fu^2$

$- 4 \times 5r^2 Gu^3 - 5 \times 6r^2 Hu^4 - \&c.$ y como esta

serie debe ser idéntica á la $A + Bu + Cu^2 + Eu^3$

$+ Fu^4 + Gu^5 + \&c. = x$, se hallará por la com-

paracion de los respectivos términos

$$C = -\frac{A}{2r^2}, F = \frac{A}{2 \times 3 \times 4 r^4}, H = -\frac{A}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 r^6}, \&c.$$

$$E = -\frac{B}{2 \times 3 r^2}, G = \frac{B}{2 \times 3 \times 4 \times 5 r^4}, K = -\frac{B}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 r^6}, \&c.$$

luego será $x =$

$$A - \frac{A}{2r^2} \times u^2 + \frac{A}{2 \times 3 \times 4 r^4} \times u^4 - \frac{A}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 r^6} \times u^6 + \&c.$$

$$+ Bu - \frac{B}{2 \times 3 r^2} \times u^3 + \frac{B}{2 \times 3 \times 4 \times 5 r^4} \times u^5 - \frac{B}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 r^6} \times u^7 + \&c.$$

Tambien se llegará á esta equacion, si se supone la diferencial del arco dada por el coseno x , esto

$$\text{es, (117)} \quad du = -\frac{rdx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}.$$

Restar ahora determinar los valores de las cantidades A, B en los dos casos; para lo que es preciso notar en el primer caso las dos condiciones: 1^a. que siendo el arco $u=0$, será el seno $x=0$: luego $A=0$; por

$$\text{consiguiente el seno } x = Bu - \frac{B}{2 \times 3 r^2} \times u^3 + \&c.$$

2^a. que siendo el arco u evaneciente, será $dx=du$ (22): luego $B=1$; por consiguiente el seno $x=u$

$$= \frac{u^3}{2 \times 3 r^2} + \frac{u^5}{2 \times 3 \times 4 \times 5 r^4} - \frac{u^7}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 r^6} + \&c.$$

Y respecto al segundo caso, en quien x expresa el coseno del arco u , es preciso notar las dos condiciones: 1^a. que siendo el arco u evaneciente, será (22) dx evaneciente respecto á du : luego $B=0$; por

consiguiente el coseno $x = A - \frac{A}{2r^2} \times u^2 + \&c.$

2^a. que siendo el arco $u = 0$, será el coseno $x = r$: luego será $A = r$; por consiguiente el coseno $x = r$

$$= \frac{r^2}{2r} + \frac{u^2}{2 \times 3 \times 4r^3} - \frac{u^6}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6r^5} + \&c. \text{ Y finalmente}$$

siendo la tangente igual al radio multiplicado por el seno, partido este producto por el coseno, se tendrá la tangente x

$$= r \times \frac{u - \frac{u^3}{2 \times 3r^2} + \frac{u^5}{2 \times 3 \times 4 \times 5r^4} - \frac{u^7}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7r^6} + \&c.}{r - \frac{u^2}{2r} + \frac{u^4}{2 \times 3 \times 4r^3} - \frac{u^6}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6r^5} + \&c.}$$

PROPOSICION XVIII.

134. Hallar la diferencial de la cotangente de un arco u del círculo cuyo radio es r .

Consta ser (I. 488) $Sc. u : Cc. u = r : Ctc. u$; por

consiguiente será $Ctc. u = \frac{r Cc. u}{Sc. u}$: luego diferen-

ciando se tendrá $D. Ctc. u = \frac{Sc. u \times r D. Cc. u - r Cc. u \times D. Sc. u}{(Sc. u)^2}$;

pero (114) $r \times D. Cc. u = -Sc. u \times du$, $r \times D. Sc. u = Cc. u$

$\times du$: luego será $D. Ctc. u = \frac{-(Sc. u)^2 du - (Cc. u)^2 \times du}{(Sc. u)^2}$

$= -\frac{r^2 du}{(Sc. u)^2}$. Que es $\&c.$

COROLARIO I.

135. Se infiere que la diferencial de la cotangente de un arco u del círculo, cuyo radio r , es igual á la diferencial del mismo arco multiplicada por el quadrado del radio, partido este producto tomado con el signo negativo por el quadrado del seno del mismo arco, esto es, $D.Ctc.u = -\frac{r^2 du}{(Sc.u)^2}$.

COROLARIO II.

136. Luego será $du = -\frac{(Sc.u)^2 \times D.Ctc.u}{r^2}$; é integrando se tendrá $u = -\frac{S.(Sc.u)^2 \times D.Ctc.u}{r^2}$. Tam-

bien será $S. -\frac{r^2 du}{(Sc.u)^2} = Ctc.u$; y partiendo por $-r^2$, se tendrá $S. \frac{du}{(Sc.u)^2} = -\frac{Ctc.u}{r^2}$.

COROLARIO III.

137. Si se supone $Ctc.u = x$, serán $D.Ctc.u = dx$, $Sc.u = \frac{r^2}{Csc.u} = \frac{r^2}{\sqrt{(r^2 + x^2)}}$: luego será $u = S. -\frac{r^2 dx}{r^2 + x^2}$.

PROPOSICION XIX.

138. Hallar la diferencial de la secante de un arco u del círculo cuyo radio es r .

Consta (I. 486) ser $Cc. u : r = r : Sec. u$; por consiguiente será $Sec. u = \frac{r^2}{Cc. u}$; luego diferenciando se tendrá $D. Sec. u = -\frac{r^2 D. Cc. u}{(Cc. u)^2}$; pero (114) $D. Cc. u = -\frac{Sc. u \times du}{r}$; luego será $D. Sec. u = \frac{r Sc. u \times du}{(Cc. u)^2}$. Que es &c.

COROLARIO I.

139. Se infiere que la diferencial de la secante de un arco u del círculo cuyo radio r , es igual al producto del radio, del seno de dicho arco, y de la diferencial del mismo arco, partido dicho producto por el quadrado del coseno, esto es, $D. Sec. u = \frac{r Sc. u \times du}{(Cc. u)^2}$.

COROLARIO II.

140. Por tanto será $du = \frac{(Cc. u)^2 \times D. Sec. u}{r Sc. u}$; é integrando será $u = S. \frac{(Cc. u)^2 \times D. Sec. u}{r Sc. u}$. También será $Sec. u = S. \frac{r Sc. u \times du}{(Cc. u)^2}$.

COROLARIO III.

141. Si se supone $Sec. u = x$, serán $D. Sec. u = dx$, $Cc. u = \frac{r^2}{x}$, y $Sc. u = \sqrt{r^2 - \frac{r^4}{x^2}} = \frac{r}{x} \times \sqrt{x^2 - r^2}$:

luego será $u = S. \frac{r^2 dx}{x\sqrt{(x^2-r^2)}}.$

COROLARIO IV.

142. La integral de la diferencial $\frac{dx\sqrt{(x^2-r^2)}}{x}$ se reduce á la antecedente : pues siendo $\frac{dx\sqrt{(x^2-r^2)}}{x}$
 $= \frac{dx \times (x^2-r^2)}{x\sqrt{(x^2-r^2)}},$ se tendrá $\frac{dx\sqrt{(x^2-r^2)}}{x} = \frac{x dx}{\sqrt{(x^2-r^2)}} - \frac{r^2 dx}{x\sqrt{(x^2-r^2)}};$ é integrando será $S. \frac{dx\sqrt{(x^2-r^2)}}{x} = \sqrt{(x^2-r^2)} - u.$

PROPOSICION XX.

143. Hallar la diferencial de la cosecante de un arco u del círculo cuyo radio es $r.$

Consta (I. 488) ser $Sc. u : r = r : Csc. u;$ por consiguiente será $Csc. u = \frac{r^2}{Sc. u};$ luego diferenciando se tendrá $D. Csc. u = -\frac{r^2 D. Sc. u}{(Sc. u)^2};$ pero (114) $D. Sc. u = \frac{Cc. u \times du}{r};$ luego será $D. Csc. u = -\frac{r Cc. u \times du}{(Sc. u)^2}.$ Que es &c.

COROLARIO I.

144. Por tanto la diferencial de la cosecante de

un arco u del círculo cuyo radio es r , es igual al producto, del radio, del coseno de dicho arco, y de la diferencial del mismo arco, partido dicho producto tomado con el signo negativo por el cuadrado del seno del arco, esto es, $D.Csc.u = -$

$$\frac{rCc.u \times du}{(Sc.u)^2}.$$

COROLARIO II.

145. Luego será $du = -\frac{(Sc.u)^2 \times D.Csc.u}{rCc.u}$; é integrando se tendrá $u = S. - \frac{(Sc.u)^2 \times D.Csc.u}{rCc.u}$. También será $Csc.u = S. - \frac{rCc.u \times du}{(Sc.u)^2}$.

COROLARIO III.

146. Si se supone $Csc.u = x$, se tendrán $Sc.u = \frac{r^2}{x}$, $Cc.u = \sqrt{r^2 - \frac{r^4}{x^2}} = \frac{r}{x} \times \sqrt{x^2 - r^2}$; luego será $u = S. - \frac{r^2 dx}{x \sqrt{x^2 - r^2}}$.

PROPOSICION XXI.

147. Si se supone $\sqrt{r^2 \pm x^2} = r \pm z$, serán $\frac{dx}{x \sqrt{r^2 \pm x^2}} = \frac{dz}{2rz \pm z^2}$, $\frac{dx \sqrt{r^2 \pm x^2}}{x} = \pm dz + \frac{r^2 dz}{2rz \pm z^2}$.
Siendo $\sqrt{r^2 + x^2} = r + z$, también será $r^2 + x^2$

$= r^2 + 2rz + z^2$, de donde $x^2 = 2rz + z^2$; y diferenciando y partiendo por 2, será $xdx = r dz + z dz$:

luego se tendrá $\frac{dx}{x\sqrt{(r^2+x^2)}} = \frac{rdz + zdz}{(2rz + z^2) \cdot (r+z)} = \frac{dz}{2rz + z^2}$. Con el mismo método se demostrarán las

equaciones, $\frac{dx}{x\sqrt{(r^2-x^2)}} = \frac{dz}{2rz - z^2}$, supuesta $\sqrt{(r^2-x^2)} = r - z$; $\frac{dx\sqrt{(r^2+x^2)}}{x} = dz + \frac{r^2 dz}{2rz + z^2}$, supuesta $\sqrt{(r^2+x^2)} = r + z$; $\frac{dx\sqrt{(r^2-x^2)}}{x} = -dz + \frac{r^2 dz}{2rz - z^2}$, siendo $\sqrt{(r^2-x^2)} = r - z$. Que es &c.

COROLARIO I.

148. Por ser $\frac{dz}{2rz+z^2} = \frac{1}{2r} \times \left(\frac{dz}{z} - \frac{dz}{2r+z} \right)$, se tendrá $\frac{dx}{x\sqrt{(r^2+x^2)}} = \frac{1}{2r} \times \left(\frac{dz}{z} - \frac{dz}{2r+z} \right)$; é integrando será $S. \frac{dx}{x\sqrt{(r^2+x^2)}} = \frac{1}{2r} \times \left(L. z - L. (2r+z) \right) = \frac{1}{2r} \times L. \frac{z}{2r+z}$; y substituyendo en lugar de z su valor $-r + \sqrt{(r^2+x^2)}$, será

$$S. \frac{dx}{x\sqrt{(r^2+x^2)}} = \frac{1}{2r} \times L. \frac{-r + \sqrt{(r^2+x^2)}}{r + \sqrt{(r^2+x^2)}}.$$

COROLARIO II.

149. También siendo $\frac{dz}{2rz-z^2} = \frac{1}{2r} \times \left(\frac{dz}{2r-z} + \frac{dz}{z} \right)$,
 será $\frac{dx}{x\sqrt{(r^2-x^2)}} = \frac{1}{2r} \times \left(\frac{dz}{2r-z} + \frac{dz}{z} \right)$; é integrando,
 se tendrá $S. \frac{dx}{x\sqrt{(r^2-x^2)}} = \frac{1}{2r} \times \left(L. z - L. (2r-z) \right)$
 $= \frac{1}{2r} \times L. \frac{z}{2r-z}$: luego substituyendo en lugar de z
 su valor $r - \sqrt{(r^2-x^2)}$, será
 $S. \frac{dx}{x\sqrt{(r^2-x^2)}} = \frac{1}{2r} \times L. \frac{r-\sqrt{(r^2-x^2)}}{r+\sqrt{(r^2-x^2)}}$.

COROLARIO III.

150. Finalmente por ser $\frac{dx\sqrt{(r^2+x^2)}}{x} = dz +$
 $\frac{r^2 dz}{2rz+z^2}$, y $\frac{dx\sqrt{(r^2-x^2)}}{x} = -dz + \frac{r^2 dz}{2rz-z^2}$, se ten-
 drán las equaciones $S. \frac{dx\sqrt{(r^2+x^2)}}{x} = z + r^2 \times S. \frac{dz}{2rz+z^2}$,
 y $S. \frac{dx\sqrt{(r^2-x^2)}}{x} = -z + r^2 \times S. \frac{dz}{2rz-z^2}$: luego
 serán

$$S. \frac{dx\sqrt{(r^2+x^2)}}{x} = -r + \sqrt{(r^2+x^2)} + \frac{r}{2} \times L. \frac{r+\sqrt{(r^2+x^2)}}{r+\sqrt{(r^2+x^2)}},$$

$$S. \frac{dx\sqrt{(r^2-x^2)}}{x} = -r + \sqrt{(r^2-x^2)} + \frac{r}{2} \times L. \frac{r-\sqrt{(r^2-x^2)}}{r+\sqrt{(r^2-x^2)}}.$$

PROPOSICION XXII.

151. Hallar la diferencial del logaritmo de la tangente de un arco circular cuyo radio es r .

Diferenciase (87) el logaritmo de $Tc.u$, y se

tendrá $D. L. Tc.u = \frac{D.Tc.u}{Tc.u}$; pero (128) $D. Tc.u =$

$\frac{(r^2 + (Tc.u)^2) \times du}{r^2}$: luego será $D. L. Tc.u = \frac{(r^2 + (Tc.u)^2) \times du}{r^2 \times Tc.u}$

$= \frac{(Sec.u)^2 \times du}{r^2 \times Tc.u}$; pero (1.486) $Sc.u : r = Tc.u : Sec.u$,

y $Cc.u : r = r : Sec.u$, de donde $(Sec.u)^2 = \frac{r^3 \times Tc.u}{Sc.u \times Cc.u}$:

luego será $D. L. Tc.u = \frac{r^3 \times Tc.u \times du}{r^2 \times Tc.u \times Sc.u \times Cc.u} = \frac{r du}{Sc.u \times Cc.u}$.

Que es &c.

COROLARIO I.

152. Se infiere que la diferencial del logaritmo de la tangente de un arco u de círculo, es igual al radio multiplicado por la diferencial de dicho arco, partido este producto por el del seno y del coseno del mismo arco; esto es, $D. L. Tc.u =$

$$\frac{r du}{Sc.u \times Cc.u}$$

COROLARIO II.

153. Luego integrando se tendrá $S. \frac{r du}{Sc.u \times Cc.u} =$

$L. Tc.u$.

COROLARIO III.

154. Si se supone $Sc.u=x$, serán $Cc.u=\sqrt{(r^2-x^2)}$,
 $du = \frac{r dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$: luego será $L.Tc.u = S. \frac{r^2 dx}{x \sqrt{(r^2-x^2)}}$.

PROPOSICION XXIII.

155. Hallar la diferencial del logaritmo de la tangente de la mitad del arco circular u .

Consta ser (I. 494) $r + Cc.u : Sc.u = r : Tc. \frac{u}{2}$,
 y $Sc.u : r - Cc.u = r : Tc. \frac{u}{2}$: luego será $(Tc. \frac{u}{2})^2$
 $= r^2 \times \frac{r - Cc.u}{r + Cc.u}$; y tomando los logaritmos de am-

bos miembros , se tendrá $2 L. Tc. \frac{u}{2} = 2 L. r +$
 $L. (r - Cc.u) - L. (r + Cc.u)$: luego diferencian-

do será $2 D. L. Tc. \frac{u}{2} = - \frac{D. Cc.u}{r - Cc.u} - \frac{D. Cc.u}{r + Cc.u} =$
 $= - \frac{2r D. Cc.u}{r^2 - (Cc.u)^2} = - \frac{2r D. Cc.u}{(Sc.u)^2}$; pero (114) $D. Cc.u =$

$= - \frac{Sc.u \times du}{r}$: luego será $2 D. L. Tc. \frac{u}{2} = - \frac{2r}{(Sc.u)^2} \times$
 $= - \frac{Sc.u \times du}{r}$; por consiguiente se tendrá $D. L. Tc. \frac{u}{2}$

$= \frac{du}{Sc.u}$. Que es &c.

COROLARIO I.

156. Se infiere que la diferencial del logaritmo de la tangente de la mitad del arco circular u es igual á la diferencial de dicho arco partida por el seno del mismo arco, esto es, $D. L. Tc. \frac{u}{2} = \frac{du}{Sc. u}$.

COROLARIO II.

157. Luego será $S. \frac{du}{Sc. u} = L. Tc. \frac{u}{2}$: y si se supone $Sc. u = x$, se tendrá $du = \frac{r dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$; por consiguiente $S. \frac{r dx}{x \sqrt{(r^2 - x^2)}} = L. Tc. \frac{u}{2}$.

PROPOSICION XXIV.

158. Hallar la diferencial del logaritmo de la tangente de la mitad del arco circular compuesto del quadrante q y de un arco u .

Consta (I. 508) ser $Cc. u : r + Sc. u = r : Tc. \frac{q + u}{2}$, y $r - Sc. u : Cc. u = r : Tc. \frac{q + u}{2}$: luego será $(Tc. \frac{q + u}{2})^2 = r^2 \times \frac{r + Sc. u}{r - Sc. u}$; y tomando los logaritmos de ambos miembros, será $2L. Tc. \frac{q + u}{2} = 2L. r + L. (r + Sc. u)$

— $L. (r - Sc. u)$: luego diferenciando se tendrá

$$2D.L.Tc. \frac{q+u}{2} = \frac{D.Sc.u}{r+Sc.u} + \frac{D.Sc.u}{r-Sc.u} = \frac{2r}{(Cc.u)^2} \times D.Sc.u;$$

pero (114) $D.Sc.u = \frac{Cc.u \times du}{r}$: luego será $2D.L.$

$$Tc. \frac{q+u}{2} = \frac{2r}{(Cc.u)^2} \times \frac{Cc.u \times du}{r}; \text{ por consiguiente } D.L.$$

$$Tc. \frac{q+u}{2} = \frac{du}{Cc.u}. \text{ Que es \&c.}$$

COROLARIO I.

159. Se infiere que la diferencial del logaritmo de la tangente de la mitad del arco compuesto del cuadrante q y de un arco u , es igual á la diferencial del arco u partida por el coseno del mismo

arco, esto es, $D.L.Tc. \frac{q+u}{2} = \frac{du}{Cc.u}.$

COROLARIO II.

160. Luego será $S. \frac{du}{Cc.u} = L.Tc. \frac{q+u}{2}$; y si se

supone $Cc.u = x$, será $du = -\frac{r dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$; por con-

$$\text{siguiente } S. -\frac{r dx}{x \sqrt{(r^2 - x^2)}} = L.Tc. \frac{q+u}{2}.$$

PROPOSICION XXV.

161. La diferencial $(Sc. u)^m \times du$ es igual á

$$-\frac{r}{m} \times D.(Sc.u)^{m-1} \times Cc.u + \frac{(m-1) \cdot r^2}{m} \times (Sc.u)^{m-2} \times du; \text{ y la diferencial } (Cc.u)^m \times du = \frac{r}{m} \times D.(Cc.u)^{m-1} \times Sc.u + \frac{(m-1) \times r^2}{m} \times (Cc.u)^{m-2} \times du.$$

Diferénciese la expresion $(Sc.u)^{m-1} \times Cc.u$, y se tendrá $D.(Sc.u)^{m-1} \times Cc.u = (Sc.u)^{m-1} \times D.Cc.u + (m-1) \times (Sc.u)^{m-2} \times Cc.u \times D.Sc.u$; pero

$$(114) \quad D.Cc.u = -\frac{Sc.u \times du}{r}, \quad D.Sc.u = \frac{Cc.u \times du}{r} : \text{ lue-}$$

go será $D.(Sc.u)^{m-1} \times Cc.u = -\frac{(Sc.u)^m \times du}{r} + \frac{(m-1) \times (Sc.u)^{m-2} \times (Cc.u)^2 \times du}{r}$; y por ser $(Cc.u)^2$

$$= r^2 - (Sc.u)^2, \text{ será } D.(Sc.u)^{m-1} \times Cc.u = -\frac{(Sc.u)^m \times du}{r} + \frac{(m-1) \times r^2 (Sc.u)^{m-2} \times du}{r} - \frac{m-1}{r}$$

$$\times (Sc.u)^m \times du = -\frac{m}{r} \times (Sc.u)^m du + (m-1) \times r (Sc.u)^{m-2} \times du; \text{ por consiguiente } (Sc.u)^m \times du =$$

$$-\frac{r}{m} \times D.(Sc.u)^{m-1} \times Cc.u + \frac{(m-1) \times r^2}{m} \times (Sc.u)^{m-2} \times du. \text{ Que es lo primero.}$$

Con el mismo método por medio de la diferencial de la expresion $(Cc.u)^{m-1} \times Sc.u$ se demostrará la segunda fórmula propuesta. Que es &c.

COROLARIO I.

162. Luego integrando será (A) $S. (Sc.u)^m \times du$
 $= -\frac{r}{m} \times (Sc.u)^{m-1} \times Cc.u + \frac{(m-1) \times r^2}{m} \times S.(Sc.u)^{m-2}$
 $\times du$: de lo qual resulta que serán

$$S.(Sc.u)^{m-2} \times du = -\frac{r}{m-2} \times (Sc.u)^{m-3} \times Cc.u + \frac{(m-3) \times r^2}{m-2} \times S.(Sc.u)^{m-4} \times du,$$

$$S.(Sc.u)^{m-4} \times du = -\frac{r}{m-4} \times (Sc.u)^{m-5} \times Cc.u + \frac{(m-5) \times r^2}{m-4} \times S.(Sc.u)^{m-6} \times du,$$

y así sucesivamente. Por tanto si m es número positivo y par, la integral de $(Sc.u)^m \times du$ se tendrá en un número finito de términos, y dependerá últimamente de la $S.du = u$: y si m es número positivo é impar, la integral de $(Sc.u)^m \times du$ se tendrá tambien en un número finito de términos, y dependerá últimamente de la $S.Sc.u \times du = -r \times Cc.u$ (114).

COROLARIO II.

163. Tambien por ser $(Cc.u)^m \times du = \frac{r}{m} \times D.$

$$(Cc.u)^{m-1} \times Sc.u + \frac{(m-1) \times r^2}{m} \times (Cc.u)^{m-2} \times du,$$

será (B) $S.(Cc.u)^m \times du = \frac{r}{m} \times (Cc.u)^{m-1} \times Sc.u$
 $+ \frac{(m-1) \times r^2}{m} \times S.(Cc.u)^{m-2} \times du$, de lo qual resulta que serán

$$S.(Cc.u)^{m-2} \times du = \frac{r}{m-2} \times (Cc.u)^{m-3} \times Sc.u + \frac{(m-3) \times r^2}{m-2} \times S.(Cc.u)^{m-4} \times du,$$

$$S.(Cc.u)^{m-4} \times du = \frac{r}{m-4} \times (Cc.u)^{m-5} \times Sc.u + \frac{(m-5) \times r^2}{m-4} \times S.(Cc.u)^{m-6} \times du,$$

y así sucesivamente : luego si m es número positivo y par , la integral de la fórmula (B) dependerá de la $S. du = u$; y si m es número positivo é impar , la integral de la misma fórmula dependerá de la $S. Cc. u \times du = r \times Sc. u$ (114).

COROLARIO III.

164. Si en la fórmula (A) se supone que el número m tiene valor negativo , como $m = -p$; hecha esta substitucion en dicha fórmula, se tendrá

$$S. \frac{du}{(Sc.u)^p} = \frac{r}{p} \times \frac{Cc.u}{(Sc.u)^{p+1}} + \frac{(p+1) \times r^2}{p} \times S. \frac{du}{(Sc.u)^{p+2}} ;$$

por consiguiente será $S. \frac{du}{(Sc.u)^{p+2}} = - \frac{1}{(p+1) \times r}$

$$\times \frac{Cc.u}{(Sc.u)^{p+1}} + \frac{p}{(p+1) \times r^2} \times S. \frac{du}{(Sc.u)^p} ; \text{ y haciendo}$$

$p+2=q$, se tendrá (C) $S. \frac{du}{(Sc.u)^q} = - \frac{1}{(q-1) \times r}$

$$\times \frac{Cc.u}{(Sc.u)^{q-1}} + \frac{q-2}{(q-1) \times r^2} \times S. \frac{du}{(Sc.u)^{q-2}} . \text{ Por tanto si}$$

es q número positivo y par , la integral de la fórmula (C) se tendrá algebricamente ; y si q es nú-

mero positivo é impar , dicha integral dependerá
últimamente de la $S. \frac{du}{Sc.u} = L. Tc. \frac{u}{2}$ (157).

COROLARIO IV.

165. Con el mismo método que se ha seguido en el Corolario antecedente , se demostrará que si es $m = -p$ en la fórmula (B) , ésta se transforma

en la (D) $S. \frac{du}{(Cc.u)^q} = \frac{1}{(q-1) \times r} \times \frac{Sc.u}{(Cc.u)^{q-1}} + \frac{q-2}{(q-1) \times r^2} \times S. \frac{du}{(Cc.u)^{q-2}}$: luego si es q número positivo y par , la integral de la fórmula (D) se tendrá algebricamente ; y si q es número positivo é impar , la integral de dicha fórmula dependerá últimamente de la $S. \frac{du}{Cc.u} = L. Tc. \frac{q+u}{2}$ (160).

COROLARIO V.

166. Si en las fórmulas anteriores A, B, C, D se supone $Sc.u = x$, dichas fórmulas se transforma-

rán en las $r \times \frac{x^m dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} , (r^2 - x^2)^{\frac{m-1}{2}} \times r dx ,$
 $\frac{r dx}{x^q \times \sqrt{(r^2 - x^2)}} , \frac{r dx}{(r^2 - x^2)^{\frac{q+1}{2}}}$; y si se supone x el

seno verso del arco u , se transformarán dichas for-

mulas en las $r \times (2rx - x^2)^{\frac{m-1}{2}} \times dx$, $\frac{(r-x)^m \times r dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$,

$r dx \times (2rx - x^2)^{\frac{q+1}{2}}$, $\frac{r dx}{(r-x)^q \times \sqrt{(2rx-x^2)}}$: luego to-

das ellas se integrarán del mismo modo, con que se integraron las correspondientes fórmulas A, B, C, D .

EXEMPLO I.

167. Se proponen las diferenciales $(Sc.u)^4 \times du$,

$(Sc.u)^5 \times du$.

1º. En la fórmula (A) háganse sucesivamente las substituciones $m=4$, $m=2$; y se tendrán las equaciones,

$S.(Sc.u)^4 \times du = -\frac{1}{4}r \times (Sc.u)^3 \times Cc.u + \frac{1}{4}r^2 \times S.(Sc.u)^2 \times du$,

$S.(Sc.u)^2 \times du = -\frac{1}{2}r \times Sc.u \times Cc.u + \frac{1}{2}r^2 \times S.du$:

luego será $S.(Sc.u)^4 \times du = -\frac{1}{4}r \times (Sc.u)^3 \times Cc.u$
 $-\frac{3r^3}{2 \times 4} \times Sc.u \times Cc.u + \frac{3r^2}{2 \times 4} \times u$.

2º. En dicha fórmula (A) háganse sucesivamente las substituciones $m=5$, $m=3$; y se tendrán las equaciones,

$S.(Sc.u)^5 \times du = -\frac{1}{5}r \times (Sc.u)^4 \times Cc.u + \frac{1}{5}r^2 \times S.(Sc.u)^3 \times du$,

$S.(Sc.u)^3 \times du = -\frac{1}{3}r \times (Sc.u)^2 \times Cc.u + \frac{1}{3}r^2 \times S.Sc.u \times du$:

luego será $S.(Sc.u)^5 \times du = -\frac{1}{5}r \times (Sc.u)^4 \times Cc.u$
 $-\frac{4r^3}{3 \times 5} \times (Sc.u)^2 \times Cc.u + \frac{4 \times 2r^2}{5 \times 3} \times -r Cc.u$, por ser

$$S. Sc. u \times du = -r Cc. u.$$

EXEMPLO II.

168. Sean las diferenciales $(Cc. u)^4 \times du, (Cc. u)^5 \times du.$

1º. En la fórmula (B) háganse sucesivamente las substituciones $m=4, m=2$; y se tendrán las equaciones,

$$S. (Cc. u)^4 \times du = \frac{1}{2} r \times (Cc. u)^3 \times Sc. u + \frac{1}{2} r^2 \times S. (Cc. u)^2 \times du,$$

$$S. (Cc. u)^2 \times du = \frac{1}{2} r \times Cc. u \times Sc. u + \frac{1}{2} r^2 \times S. du: \text{ luego será }$$

$$S. (Cc. u)^4 \times du = \frac{1}{2} r \times (Cc. u)^3 \times Sc. u + \frac{1}{2} r^2 \times Cc. u \times Sc. u + \frac{1}{2} r^3 \times S. u.$$

2º. En la referida fórmula (B) háganse sucesivamente las substituciones $m=5, m=3$; y se tendrán las equaciones,

$$S. (Cc. u)^5 \times du = \frac{1}{2} r \times (Cc. u)^4 \times Sc. u + \frac{1}{2} r^2 \times S. (Cc. u)^3 \times du,$$

$$S. (Cc. u)^3 \times du = \frac{1}{2} r \times (Cc. u)^2 \times Sc. u + \frac{1}{2} r^2 \times S. Cc. u \times du:$$

$$\text{luego será } S. (Cc. u)^5 \times du = \frac{1}{2} r \times (Cc. u)^4 \times Sc. u$$

$$+ \frac{4r^2}{3 \times 5} \times (Cc. u)^2 \times Sc. u + \frac{4 \times 2 r^2}{3 \times 5} \times r Sc. u, \text{ por ser}$$

$$S. Cc. u \times du = r Sc. u.$$

EXEMPLO III.

169. Se proponen las diferenciales $\frac{du}{(Sc. u)^6}, \frac{du}{(Sc. u)^7}$

1º. En la fórmula (C) háganse sucesivamente

las substitutiones $q=6$, $q=4$, $q=2$; y se tendrán las equaciones,

$$S. \frac{du}{(Sc.u)^6} = -\frac{1}{5r} \times \frac{Cc.u}{(Sc.u)^5} + \frac{4}{5r^2} \times S. \frac{du}{(Sc.u)^5}$$

$$S. \frac{du}{(Sc.u)^4} = -\frac{1}{3r} \times \frac{Cc.u}{(Sc.u)^3} + \frac{2}{3r^2} \times S. \frac{du}{(Sc.u)^3}$$

$$S. \frac{du}{(Sc.u)^2} = -\frac{1}{r} \times \frac{Cc.u}{Sc.u} : \text{luego será}$$

$$S. \frac{du}{(Sc.u)^6} = -\frac{1}{5r} \times \frac{Cc.u}{(Sc.u)^5} - \frac{4}{3 \times 5r^3} \times \frac{Cc.u}{(Sc.u)^3} - \frac{2 \times 4}{3 \times 5r^5} \times \frac{Cc.u}{Sc.u}.$$

2º. En dicha fórmula (C) háganse sucesivamente las substitutiones $q=7$, $q=5$, $q=3$; y se tendrán las equaciones,

$$S. \frac{du}{(Sc.u)^7} = -\frac{1}{6r} \times \frac{Cc.u}{(Sc.u)^6} + \frac{5}{6r^2} \times S. \frac{du}{(Sc.u)^6}$$

$$S. \frac{du}{(Sc.u)^5} = -\frac{1}{4r} \times \frac{Cc.u}{(Sc.u)^4} + \frac{3}{4r^2} \times S. \frac{du}{(Sc.u)^4}$$

$$S. \frac{du}{(Sc.u)^3} = -\frac{1}{2r} \times \frac{Cc.u}{(Sc.u)^2} + \frac{1}{2r^2} \times S. \frac{du}{Sc.u} :$$

$$\text{luego será } S. \frac{du}{(Sc.u)^7} = -\frac{1}{6r} \times \frac{Cc.u}{(Sc.u)^6} - \frac{5}{4 \times 6r^3} \times \frac{Cc.u}{(Sc.u)^4} - \frac{3 \times 5}{2 \times 4 \times 6r^5} \times \frac{Cc.u}{(Sc.u)^2} + \frac{5 \times 3}{6 \times 4 \times 2r^6} \times L. Tc. \frac{u}{2}, \text{ por ser}$$

$$S. \frac{du}{Sc.u} = L. Tc. \frac{u}{2}.$$

EXEMPLO IV.

170. Sean las diferenciales $\frac{du}{(Cc.u)^4}$, $\frac{du}{(Cc.u)^5}$.

1º. En la fórmula (D) háganse sucesivamente las substituciones $q=4$, $q=2$; y se tendrán las equaciones,

$$S. \frac{du}{(Cc.u)^4} = \frac{1}{3r} \times \frac{Sc.u}{(Cc.u)^3} + \frac{2}{3r^2} \times S. \frac{du}{(Cc.u)^2},$$

$$S. \frac{du}{(Cc.u)^2} = \frac{1}{r} \times \frac{Sc.u}{Cc.u};$$

$$\text{luego será } S. \frac{du}{(Cc.u)^4} = \frac{1}{3r} \times \frac{Sc.u}{(Cc.u)^3} + \frac{2}{3r^2} \times \frac{Sc.u}{Cc.u}.$$

2º. En dicha fórmula háganse sucesivamente las substituciones $q=5$, $q=3$; y se tendrán las equaciones,

$$S. \frac{du}{(Cc.u)^5} = \frac{1}{4r} \times \frac{Sc.u}{(Cc.u)^4} + \frac{3}{4r^2} \times S. \frac{du}{(Cc.u)^3},$$

$$S. \frac{du}{(Cc.u)^3} = \frac{1}{2r} \times \frac{Sc.u}{(Cc.u)^2} + \frac{1}{2r^2} \times S. \frac{du}{Cc.u};$$

$$\text{luego será } S. \frac{du}{(Cc.u)^5} = \frac{1}{4r} \times \frac{Sc.u}{(Cc.u)^4} + \frac{3}{2.4r^3} \times \frac{Sc.u}{(Cc.u)^2}$$

$$+ \frac{3}{2.4r^2} \times L. Tc. \frac{q+u}{2}, \text{ por ser } S. \frac{du}{Cc.u} = L. Tc. \frac{q+u}{2}.$$

PROPOSICION XXVI.

171. La diferencial $\frac{x^m dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}}$ es igual á

$$D. \frac{x^{m-1} \times \sqrt{(x^2 \pm r^2)}}{m} + \frac{m-1}{m} \times r^2 \times \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}}; \text{ y la}$$

$$\text{diferencial } (x^2 \pm r^2)^{\frac{m-1}{2}} \times dx = \frac{1}{m} D. (x^2 \pm r^2)^{\frac{m-1}{2}} \times x$$

$$\pm \frac{m-1}{m} \times r^2 \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{m-3}{2}} \times dx.$$

1°. Diferénciese la fórmula $x^{m-1} \times \sqrt{(x^2 \pm r^2)}$; y será $D. x^{m-1} \times \sqrt{(x^2 \pm r^2)} = (m-1) \times x^{m-2} dx \times \sqrt{(x^2 \pm r^2)} + \frac{x^m dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}}$; multiplicando y partiendo el primer término del segundo miembro por $\sqrt{(x^2 \pm r^2)}$, se tendrá

$$D. x^{m-1} \times \sqrt{(x^2 \pm r^2)} = \frac{(m-1) \times x^{m-2} dx \times (x^2 \pm r^2) + x^m dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}} \\ = \frac{mx^m dx \pm (m-1) \times r^2 x^{m-2} dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}}; \text{ luego será}$$

$$\frac{x^m dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}} = \frac{1}{m} \times D. x^{m-1} \times \sqrt{(x^2 \pm r^2)} \mp \frac{(m-1) \times r^2}{m} \\ \times \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}}.$$

2°. Tómese la fórmula $(x^2 \pm r^2)^{\frac{m-1}{2}} \times x$; y diferenciando será $D. (x^2 \pm r^2)^{\frac{m-1}{2}} \times x = (x^2 \pm r^2)^{\frac{m-1}{2}} \times dx + (m-1) \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{m-1}{2}-1} \times x^2 dx$; luego $D. (x^2 \pm r^2)^{\frac{m-1}{2}} \times x = (x^2 \pm r^2)^{\frac{m-1}{2}} \times dx + (m-1) \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{m-1}{2}-1} \times (x^2 \pm r^2) \times dx \mp r^2 \times (m-1) \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{m-3}{2}} \times dx$; por consiguiente será $D. (x^2 \pm r^2)^{\frac{m-1}{2}} \times x = m \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{m-1}{2}} dx \mp r^2 \times (m-1) \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{m-3}{2}} dx$.



$\times (x^2 \pm r^2)^{\frac{m-3}{2}} \times dx$: luego será $(x^2 \pm r^2)^{\frac{m-1}{2}} \times dx$
 $= \frac{1}{m} \times D. (x^2 \pm r^2)^{\frac{m-1}{2}} \times x \pm \frac{r^2 \times (m-1)}{m}$
 $\times (x^2 \pm r^2)^{\frac{m-3}{2}} \times dx$. Que es, &c.

COROLARIO I.

172. Luego integrando la primera expresion, se tendrá la fórmula siguiente (A)

$$S. \frac{x^m dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}} = \frac{1}{m} \times x^{m-1} \times \sqrt{(x^2 \pm r^2)} + \frac{(m-1) \times r^2}{m} \times S. \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}},$$

de la qual resulta que serán,

$$S. \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}} = \frac{1}{m-2} \times x^{m-3} \times \sqrt{(x^2 \pm r^2)} + \frac{(m-3) \times r^2}{m-2} \times S. \frac{x^{m-4} dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}},$$

$$S. \frac{x^{m-4} dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}} = \frac{1}{m-4} \times x^{m-5} \times \sqrt{(x^2 \pm r^2)} + \frac{(m-5) \times r^2}{m-4} \times S. \frac{x^{m-6} dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}},$$

y así sucesivamente. Por tanto si m es número positivo y par, la integral de $\frac{x^m dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}}$ se tendrá en

un número finito de términos; y dependerá de la integral de $\frac{dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}}$ que se reduce á los logaritmos

(124); y si m es número positivo é impar, dicha integral se tendrá igualmente en un número finito de términos, y dependerá de la integral de $\frac{x dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}}$

que se tiene algebricamente.

COROLARIO II.

173. E integrando la segunda expresion de la Proposicion antecedente, se tendrá (B).

$$S. (x^2 \pm r^2)^{\frac{m-1}{2}} \times dx = \frac{1}{m} \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{m-1}{2}} \times x \pm \frac{(m-1) \times r^2}{m} \times S. (x^2 \pm r^2)^{\frac{m-3}{2}} \times dx : \text{luego si } m$$

es número positivo y par, la integral de dicha expresion dependerá últimamente de la $S. dx \sqrt{x^2 \pm r^2}$ que se tiene por los logaritmos (125); y si m es número positivo é impar, dependerá de la $S. dx = x$.

COROLARIO III.

174. Si en la fórmula (A) se supone que el número m tiene valor negativo, como $m = -p$; hecha esta substitution en la misma expresion, se

$$\text{tendrá } S. \frac{dx}{x^p \times \sqrt{x^2 \pm r^2}} = - \frac{\sqrt{x^2 \pm r^2}}{p x^{p+1}} + \frac{(p+1) \times r^2}{p} \times S. \frac{dx}{x^{p+2} \times \sqrt{x^2 \pm r^2}}, \text{ de donde}$$

$$S. \frac{dx}{x^{p+2} \times \sqrt{x^2 \pm r^2}} = \mp \frac{\sqrt{x^2 \pm r^2}}{(p+1) \times r^2 x^{p+1}} \mp \frac{p}{(p+1) \times r^2} \times S. \frac{dx}{x^p \times \sqrt{x^2 \pm r^2}}; \text{ y haciendo } p+2=q, \text{ se tendrá}$$

$$(C) S. \frac{dx}{x^q \times \sqrt{(x^2 \pm r^2)}} = \pm \frac{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}}{(q-1) \times r^2 x^{q-1}} + \frac{q-2}{(q-1) \times r^2}$$

$\times S. \frac{dx}{x^{q-2} \times \sqrt{(x^2 \pm r^2)}}$; luego si q es número positivo y par, la integral de la fórmula (C) se tendrá algebricamente; y si q es número positivo é impar, dependerá de la $S. \frac{dx}{x \sqrt{(x^2 \pm r^2)}}$, que se tiene por lo demostrado (148, 141).

COROLARIO IV.

175. Con el mismo método se demostrará que supuesta $m = -p$ en la fórmula (B), se tendrá la

$$(D) S. \frac{dx}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{q+1}{2}}} = \pm \frac{1}{(q-1) \times r^2} \times \frac{x}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{q-1}{2}}} \\ \pm \frac{q-2}{(q-1) \times r^2} \times S. \frac{dx}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{q-1}{2}}}; \text{ luego si } q \text{ es núme-}$$

ro positivo y par, se integrará algebricamente la fórmula (D); y si q es número positivo é impar, dependerá su integral de la $S. \frac{dx}{x^2 \pm r^2} \times \frac{x}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{q-1}{2}}}$, que se tiene por lo demostrado (131, 88).

COROLARIO V.

176. Si en las quatro fórmulas anteriores A, B,

C, D tomadas con los signos inferiores se supone

$x = z \pm r$, se tendrán las siguientes, $\frac{(z \pm r)^m \times dz}{\sqrt{(z^2 \pm 2rz)}}$,
 $\frac{(z^2 \pm 2rz)^{\frac{m-1}{2}} \times dz}{(z \pm r)^q \times \sqrt{(z^2 \pm 2rz)}}$, $\frac{dz}{(z^2 \pm 2rz)^{\frac{q+1}{2}}}$,
 que se integrarán del mismo modo.

EXEMPLO I.

177. Sean las diferenciales propuestas $\frac{x^4 dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}}$

$$\frac{x^4 dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}}.$$

1.º. En la fórmula (A) substitúyanse sucesivamente en lugar de m los números 4, 2; y se tendrán las equaciones,

$$S. \frac{x^4 dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}} = \frac{1}{4} \times x^3 \sqrt{(x^2 \pm r^2)} \mp \frac{1}{4} r^2 \times S. \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}},$$

$$S. \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}} = \frac{1}{2} \times x \sqrt{(x^2 \pm r^2)} \mp \frac{1}{2} r^2 \times S. \frac{dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}};$$

$$\text{luego será } S. \frac{x^4 dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}} = \frac{1}{4} \times x^3 \sqrt{(x^2 \pm r^2)} \mp$$

$$\frac{3r^2}{4 \times 2} \times x \sqrt{(x^2 \pm r^2)} + \frac{3r^4}{2 \times 4} \times -L. (x - \sqrt{(x^2 \pm r^2)}),$$

$$\text{por ser } S. \frac{dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}} = -L. (x - \sqrt{(x^2 \pm r^2)}).$$

2.º. En dicha fórmula substitúyanse sucesivamente en lugar de m los números 5, 3; y se ten-

drán las equaciones ,

$$S. \frac{x^5 dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}} = \frac{1}{7} x^4 \times \sqrt{(x^2 \pm r^2)} \mp \frac{4}{7} r^2 \times S. \frac{x^3 dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}} ,$$

$$S. \frac{x^3 dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}} = \frac{1}{3} x^2 \sqrt{(x^2 \pm r^2)} \mp \frac{2}{3} r^2 \times S. \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}} :$$

luego será $S. \frac{x^5 dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}} = \frac{1}{7} x^4 \times \sqrt{(x^2 \pm r^2)} \mp \frac{4r^2}{3 \times 5}$
 $\times x^2 \sqrt{(x^2 \pm r^2)} + \frac{2 \cdot 4 r^4}{3 \times 5} \times \sqrt{(x^2 \pm r^2)} ,$ por ser

$$S. \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}} = \sqrt{(x^2 \pm r^2)} .$$

EXEMPLO II.

178. Se propone la diferencial $(x^2 \pm r^2)^{\frac{5}{2}} \times dx$.

En la fórmula (B) substituyanse sucesivamente en lugar de m los números 6, 4; y se tendrán las equaciones ,

$$S. (x^2 \pm r^2)^{\frac{5}{2}} \times dx = \frac{1}{6} \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{5}{2}} \times x \pm \frac{5}{6} r^2 \times S. (x^2 \pm r^2)^{\frac{3}{2}} \times dx ,$$

$$S. (x^2 \pm r^2)^{\frac{3}{2}} \times dx = \frac{1}{4} \times (x^2 \pm r^2) \times x \pm \frac{3}{4} r^2 \times S. dx \sqrt{(x^2 \pm r^2)} :$$

luego será $S. (x^2 \pm r^2)^{\frac{5}{2}} \times dx = \frac{1}{6} \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{5}{2}} \times x$
 $\pm \frac{5r^2}{4 \times 6} \times (x^2 \pm r^2) \times x \mp \frac{3 \times 5 r^4}{4 \times 6} \times S. dx \sqrt{(x^2 \pm r^2)} .$

EXEMPLO III.

179. Sean las diferenciales $\frac{dx}{x^4 \times \sqrt{(x^2 \pm r^2)}} ,$

$$\frac{dx}{x^5 \times \sqrt{(x^2 \pm r^2)}} .$$

1º. En la fórmula (C) substitúyanse sucesivamente en lugar de q los números 4, 2; y se tendrán las equaciones,

$$S. \frac{dx}{x^4 \sqrt{(x^2 \pm r^2)}} = \mp \frac{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}}{3r^2 x^3} \mp \frac{2}{3r^2} \times S. \frac{dx}{x^2 \sqrt{(x^2 \pm r^2)}},$$

$$S. \frac{dx}{x^2 \sqrt{(x^2 \pm r^2)}} = \mp \frac{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}}{r^2 x} \mp \frac{2}{r^2} \times S. \frac{dx}{x \sqrt{(x^2 \pm r^2)}}.$$

$$\text{luego será } S. \frac{dx}{x^4 \sqrt{(x^2 \pm r^2)}} = \mp \frac{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}}{3r^2 x^3} \mp \frac{2\sqrt{(x^2 \pm r^2)}}{3r^2 x}.$$

2º. En dicha fórmula substitúyanse sucesivamente en lugar de q los números 5, 3; y se tendrán las equaciones, esto es,

$$S. \frac{dx}{x^5 \sqrt{(x^2 \pm r^2)}} = \mp \frac{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}}{4r^2 x^4} \mp \frac{3}{4r^2} \times S. \frac{dx}{x^3 \sqrt{(x^2 \pm r^2)}},$$

$$S. \frac{dx}{x^3 \sqrt{(x^2 \pm r^2)}} = \mp \frac{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}}{2r^2 x^2} \mp \frac{3}{2r^2} \times S. \frac{dx}{x \sqrt{(x^2 \pm r^2)}}.$$

$$\text{luego será } S. \frac{dx}{x^5 \sqrt{(x^2 \pm r^2)}} = \mp \frac{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}}{4r^2 x^4} \mp \frac{3\sqrt{(x^2 \pm r^2)}}{2 \times 4r^2 x^2}$$

$$+ \frac{3}{2 \times 4r^2} \times S. \frac{dx}{x \sqrt{(x^2 \pm r^2)}}.$$

EXEMPLO IV.

180. Se proponen las diferenciales $\frac{dx}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{5}{2}}}$.

dx

$$(x^2 \pm r^2)^{\frac{5}{2}}.$$

1º. En la fórmula (D) substitúyanse sucesiva-

mente en lugar de q los números 4, 2; y se tendrán las equaciones, esto es,

$$S. \frac{dx}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{5}{2}}} = \pm \frac{1}{3r^2} \times \frac{x}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{3}{2}}} \pm \frac{2}{3r^2} \times S. \frac{dx}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$S. \frac{dx}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{1}{r^2} \times \frac{x}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{1}{2}}} \pm \dots$$

luego será $S. \frac{dx}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{5}{2}}} = \pm \frac{1}{3r^2} \times \frac{x}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{3}{2}}} +$

$$\frac{2}{3r^4} \times \frac{x}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

2°. En dicha fórmula substitúyanse sucesivamente los números 5, 3, en lugar de q ; y se tendrán las equaciones, esto es,

$$S. \frac{dx}{(x^2 \pm r^2)^3} = \pm \frac{1}{4r^2} \times \frac{x}{(x^2 \pm r^2)^2} \pm \frac{3}{4r^2} \times S. \frac{dx}{(x^2 \pm r^2)^2},$$

$$S. \frac{dx}{(x^2 \pm r^2)^2} = \pm \frac{1}{2r^2} \times \frac{x}{x^2 \pm r^2} \pm \frac{1}{2r^2} \times S. \frac{dx}{x^2 \pm r^2}:$$

luego será $S. \frac{dx}{(x^2 \pm r^2)^3} = \pm \frac{1}{4r^2} \times \frac{x}{(x^2 \pm r^2)^2} +$

$$\frac{3}{2 \times 4r^4} \times \frac{x}{x^2 \pm r^2} + \frac{3}{2 \times 4r^4} \times S. \frac{dx}{x^2 \pm r^2}.$$

PROPOSICION XXVII.

181. La diferencial $(Sc.u)^{n-1} \times (Cc.u)^{m+1} \times du$ es igual á $\frac{r}{m+n} \times D.(Sc.u)^n \times (Cc.u)^m + \frac{mr^2}{m+n} \times (Sc.u)^{n-1}$

$$\times (Cc.u)^{m-1} \times du; y (Cc.u)^{m-1} \times (Sc.u)^{n+1} \times du = \\ - \frac{r}{m+n} \times D.(Cc.u)^m \times (Sc.u)^n + \frac{nr^2}{m+n} \times (Cc.u)^{m-1} \\ \times (Sc.u)^{n-1} \times du.$$

1º. Diferenciése la expresion $(Sc.u)^n \times (Cc.u)^m$; y será $D.(Sc.u)^n \times (Cc.u)^m = n(Sc.u)^{n-1} \times (Cc.u)^m \times D.Cc.u + m(Cc.u)^{m-1} \times (Sc.u)^n \times D.Sc.u$; pero (114) $D.Cc.u = -\frac{Sc.u \times du}{r}$, $D.Sc.u = \frac{Cc.u \times du}{r}$:

$$\text{luego se tendrá } D.(Sc.u)^n \times (Cc.u)^m = -\frac{m}{r}(Sc.u)^{n+1} \\ \times (Cc.u)^{m-1} \times du + \frac{n}{r} \times (Cc.u)^{m+1} \times (Sc.u)^{n-1} \times du; y \\ \text{substituyendo } (Sc.u)^{n-1} \times (r^2 - (Cc.u)^2) \text{ en lugar de } \\ (Sc.u)^{n+1}, \text{ será } D.(Sc.u)^n \times (Cc.u)^m = -\frac{m}{r} \times r^2 \\ (Sc.u)^{n-1} \times (Cc.u)^{m-1} \times du + \frac{m}{r} \times (Sc.u)^{n-1} \times (Cc.u)^{m+1} \\ \times du + \frac{n}{r} \times (Cc.u)^{m+1} \times (Sc.u)^{n-1} \times du = -\frac{m}{r} \\ \times r^2 (Sc.u)^{n-1} \times (Cc.u)^{m-1} \times du + \frac{m+n}{r} \times (Cc.u)^{m+1} \\ \times (Sc.u)^{n-1} \times du; \text{ por consiguiente será } (Cc.u)^{m+1} \\ \times (Sc.u)^{n-1} \times du = \frac{r}{m+n} \times D.(Sc.u)^n \times (Cc.u)^m \\ + \frac{mr^2}{m+n} (Sc.u)^{n-1} \times (Cc.u)^{m-1} \times du.$$

2º. Si se diferencia la expresion $(Cc.u)^m \times (Sc.u)^n$,

y siguiendo el método arriba expresado, se substituye sucesivamente $(Cc.u)^{m-1} \times (r^2 - (Sc.u)^2)$ en lugar de $(Cc.u)^{m+1}$, se demostrará que es $(Cc.u)^{m-1}$

$$\times (Sc.u)^{n+1} \times du = -\frac{r}{m+n} \times D.(Cc.u)^m \times (Sc.u)^n \\ + \frac{nr^2}{m+n} \times (Cc.u)^{m-1} \times (Sc.u)^{n-1} \times du. \text{ Que es \&c.}$$

COROLARIO I.

182. Luego integrando la primera expresion diferencial de la Proposicion antecedente, se tendrá la fórmula (A) $S.(Sc.u)^{n-1} \times (Cc.u)^{m+1} \times du$
 $= \frac{r}{m+n} \times (Sc.u)^n \times (Cc.u)^m + \frac{mr^2}{m+n} \times S.(Sc.u)^{n-1} \times (Cc.u)^{m-1}$
 $\times du$; por consiguiente la integral de $(Sc.u)^{n-1}$
 $\times (Cc.u)^{m+1} \times du$ depende de la integral de
 $(Sc.u)^{n-1} \times (Cc.u)^{m-1} \times du$, y por la misma razon la
 integral de esta depende de la integral de $(Sc.u)^{n-1}$
 $\times (Cc.u)^{m-3} \times du$, y así sucesivamente: luego si m
 es número positivo y par, la integral de la fórmula (A) dependerá de la $S.(Sc.u)^{n-1} \times Cc.u \times du$
 $= S.(Sc.u)^{n-1} \times r \times D.Sc.u = \frac{r}{n} \times (Sc.u)^n$ (104);

y si es m número positivo é impar, la integral de dicha fórmula dependerá de la $S.(Sc.u)^{n-1} \times du$, de cuya integral se ha tratado (162, 164). Adviértase que, si en la referida fórmula (A) el número n es

negativo é igual al número positivo m , como $n = -3$, $m = 3$; dicha fórmula quedará inútil por contener cantidades infinitas: en este caso por medio de la

equacion $D.(Sc.u)^n \times (Cc.u)^m = -\frac{m}{r} \times (Sc.u)^{n+1} \times (Cc.u)^{m-1} \times du + \frac{n}{r} \times (Cc.u)^{m+1} \times (Sc.u)^{n-1} \times du$, se tendrá la fórmula $S.(Sc.u)^{n-1} \times (Cc.u)^{m+1} \times du = \frac{r}{n} \times (Cc.u)^m \times (Sc.u)^n + \frac{m}{n} \times S.(Sc.u)^{n+1} \times (Cc.u)^{m-1} \times du$, de la qual se hará uso en dicho caso.

COROLARIO II.

183. E integrando la segunda expresion diferencial de la Proposicion antecedente, se tendrá la fórmula (B) $S.(Cc.u)^{m-1} \times (Sc.u)^{n+1} \times du =$

$$-\frac{r}{m+n} \times (Cc.u)^m \times (Sc.u)^n + \frac{nr^2}{m+n} \times S.(Cc.u)^{m-1} \times$$

$(Sc.u)^{n-1} \times du$; y con el raciocinio expuesto en el Corolario antecedente se demostrará que si n es número positivo y par, la integral (B) dependerá de la $S.(Cc.u)^{m-1} \times Sc.u \times du = S.(Cc.u)^{m-1} \times -r D.Cc.u =$

$$-\frac{r}{m} \times (Cc.u)^m \quad (104); \text{ y si } n \text{ es número posi-}$$

tivo é impar, dicha integral (B) dependerá de la $S.(Cc.u)^{m-1} \times du$, que se tiene por lo demostrado

(163, 165). Es de advertir que, si en la referida fórmula (B) el número m es negativo é igual al número positivo n ; dicha fórmula será inútil, y en este caso se hará uso de la $S.(Cc.u)^{m-1} \times (Sc.u)^{n+1} \times du$

$$= -\frac{r}{m} \times (Cc.u)^m \times (Sc.u)^n + \frac{n}{m} \times S.(Cc.u)^{m+1} \times (Sc.u)^{n-1} \times du.$$

COROLARIO III.

184. Si en la fórmula (A) se supone que los números m y n tienen valores negativos, como $m = -p$, y $n = -q$; hechas estas substituciones

en dicha fórmula, se tendrá $S. \frac{du}{(Sc.u)^{q+1} \times (Cc.u)^{p-1}} =$

$$-\frac{r}{p+q} \times \frac{1}{(Sc.u)^q \times (Cc.u)^p} + \frac{pr^2}{p+q} \times S. \frac{du}{(Sc.u)^{q+1} \times (Cc.u)^{p+1}};$$

por consiguiente se tendrá (C) $S. \frac{du}{(Sc.u)^{q+1} \times (Cc.u)^{p+1}} =$

$$\frac{1}{pr} \times \frac{1}{(Sc.u)^q \times (Cc.u)^p} + \frac{p+q}{pr^2} \times S. \frac{du}{(Sc.u)^{q+1} \times (Cc.u)^{p-1}};$$

luego si $p+1$ es número positivo y par, la integral (C) dependerá últimamente de la $S. \frac{du}{(Sc.u)^{q+1}}$

que se tiene por lo demostrado (164); y si $p+1$ es número positivo é impar, dicha integral depen-

derá de la $S. \frac{du}{(Sc.u)^{q+1} \times Cc.u}$, la qual por medio

de la fórmula siguiente (D) se reducirá á la $S. \frac{du}{Cc.u \times Sc.u}$ que se tiene por lo demostrado (153).

COROLARIO IV.

185. Con el mismo método que se ha seguido en el Corolario antecedente, se hallará que siendo $m = -p$ y $n = -q$ en la fórmula (B), ésta se

transforma en la (D) $S. \frac{du}{(Cc.u)^{p+1} \times (Sc.u)^{q+1}} = -\frac{1}{qr} \times$

$\frac{1}{(Cc.u)^p \times (Sc.u)^q} + \frac{p+q}{qr^2} \times S. \frac{du}{(Cc.u)^{p+1} \times (Sc.u)^{q-1}}$;

luego si es $q+1$ número positivo y par, la inte-

gral (D) dependerá de la $S. \frac{du}{(Cc.u)^{p+1}}$ que se tie-

ne por lo demostrado (165); y si es $q+1$ núme-

ro positivo é impar, dicha fórmula (D) depen-

derá últimamente de la $S. \frac{du}{(Cc.u)^{p+1} \times Sc.u}$, la qual

por medio de la fórmula (C) se reduce á la

$S. \frac{du}{Sc.u \times Cc.u}$ que se tiene por lo demostrado (153).

COROLARIO V.

186. Si en las fórmulas anteriores A, B, C, D

se supone $Sc.u = x$, se tendrán las $(r^2 - x^2)^{\frac{m}{2}} \times$

$$\frac{x^{n-1} \times r dx, (r^2 - x^2)^{\frac{m-2}{2}} \times x^{n+1} \times r dx,}{rdx.} ; \text{ y si se supone } x \text{ el seno verso}$$

$x^{q+1} \times (r^2 - x^2)^{\frac{p+2}{2}}$ del arco u , se tendrán las fórmulas siguientes,

$$\frac{(2rx - x^2)^{\frac{n-2}{2}} \times (r-x)^{m+1} \times r dx, (r-x)^{m-1} \times (2rx - x^2)^{\frac{n}{2}} \times r dx,}{rdx} : \text{ luego}$$

$$\frac{rdx}{(2rx - x^2)^{\frac{q+2}{2}} \times (r-x)^{p+1}}$$

go todas estas diferenciales se integrarán del modo referido en los Corolarios antecedentes.

EXEMPLO I.

187. Se proponen las diferenciales $(Sc.u)^{-8} \times (Cc.u)^5 \times du$, $(Sc.u)^{-7} \times (Cc.u)^4 \times du$.

1º. En la referida fórmula (A) substitúyanse sucesivamente en lugar de m los números 4, 2, y hágase $n = -7$; y se tendrán las equaciones,

$$S.(Sc.u)^{-8} (Cc.u)^5 du = -\frac{1}{3} r.(Sc.u)^{-7} (Cc.u)^4 - \frac{4}{3} r^2 S.(Sc.u)^{-8} (Cc.u)^3 du,$$

$$S.(Sc.u)^{-8} (Cc.u)^3 du = -\frac{1}{7} r.(Sc.u)^{-7} (Cc.u)^2 - \frac{2}{7} r^2 S.(Sc.u)^{-8} Cc.u \times du:$$

$$\text{luego será } S.(Sc.u)^{-8} \times (Cc.u)^5 \times du = -\frac{1}{3} r \times (Sc.u)^{-7} \times (Cc.u)^4 + \frac{4r^3}{3 \times 5} \times (Sc.u)^{-7} \times (Cc.u)^2 - \frac{4 \times 2r^5}{3 \times 5 \times 7} \times (Sc.u)^{-7}.$$

2º. En dicha fórmula substitúyanse sucesivamente en lugar de m los números 3, 1, y hágase

$n = -6$; y se tendrán las equaciones,

$$S.(Sc.u)^{-7} (Cc.u)^4 du = -\frac{1}{3} r.(Sc.u)^{-6} (Cc.u)^3 - r^2 S.(Sc.u)^{-7} (Cc.u)^2 du,$$

$$S.(Sc.u)^{-7} (Cc.u)^2 du = -\frac{1}{7} r.(Sc.u)^{-6} Cc.u - \frac{1}{7} r^2 \times S.(Sc.u)^{-7} \times du:$$

$$\text{luego será } S.(Sc.u)^{-7} \times (Cc.u)^4 \times du = -\frac{1}{3} r \times (Sc.u)^{-6} \times (Cc.u)^3 + \frac{1}{7} r^3 \times (Sc.u)^{-6} \times Cc.u + \frac{1}{7} r^4 \times$$

$$S. \frac{du}{(Sc.u)^7}, \text{ cuya integral se ha determinado (169).}$$

EXEMPLO II.

188. Sean las diferenciales $(Cc.u)^{-8} \times (Sc.u)^5 \times du$,
 $(Cc.u)^{-7} \times (Sc.u)^4 \times du$.

1º. En la fórmula (B) substitúyanse sucesivamente en lugar de n los números 4, 2, y hágase $m = -7$; y se tendrán las equaciones,

$$S.(Cc.u)^{-8} (Sc.u)^5 du = \frac{1}{3} r.(Cc.u)^{-7} (Sc.u)^4 - \frac{1}{3} r^2 S.(Cc.u)^{-8} (Sc.u)^3 du,$$

$$S.(Cc.u)^{-8} (Sc.u)^3 du = \frac{1}{7} r.(Cc.u)^{-7} (Sc.u)^2 - \frac{1}{7} r^2 S.(Cc.u)^{-8} Sc.u \times du:$$

$$\text{luego será } S.(Cc.u)^{-8} \times (Sc.u)^5 \times du = \frac{1}{3} r \times (Cc.u)^{-7} \times$$

$$(Sc.u)^4 - \frac{4r^2}{3 \times 5} \times (Cc.u)^{-7} \times (Sc.u)^2 - \frac{4 \times 2 r^5}{3 \times 5 \times 7} \times (Cc.u)^{-7}.$$

2º. En dicha fórmula substitúyanse sucesivamente en lugar de n los números 3, 1, y hágase $m = -6$; y se tendrán las equaciones,

$$S.(Cc.u)^{-7} (Sc.u)^4 du = \frac{1}{3} r.(Cc.u)^{-6} (Sc.u)^3 - r^2 S.(Cc.u)^{-7} (Sc.u)^2 du,$$

$$S.(Cc.u)^{-7} \times (Sc.u)^2 \times du = \frac{1}{7} r \times (Cc.u)^{-6} \times Sc.u - \frac{1}{7} r^2 \times S.(Cc.u)^{-7} \times du:$$

$$\text{luego será } S.(Cc.u)^{-7} \times (Sc.u)^4 \times du = \frac{1}{3} r \times (Cc.u)^{-6} \times (Sc.u)^3 - \frac{1}{7} r^3 \times (Cc.u)^{-6} \times Sc.u + \frac{1}{7} r^4 \times$$

$S. \frac{du}{(Cc.u)^7}$, cuya integral se determinará por el método dado (165).

Adviértase que, si en ambos casos el exponente del coseno es positivo, por medio de la misma fórmula (B) ó bien de la (A) se hallarán las integrales de las diferenciales propuestas.

EXEMPLO III.

189. Sean las diferenciales propuestas.

$$\frac{du}{(Sc.u)^3 \times (Cc.u)^4}, \quad \frac{du}{(Sc.u)^5 \times (Cc.u)^7}.$$

1°. En la fórmula (C) substitúyanse sucesivamente los números 3, 1 en lugar de p , y hágase $q=2$; y se tendrán las equaciones,

$$S. \frac{du}{(Sc.u)^3 \times (Cc.u)^4} = \frac{1}{3r} \times \frac{1}{(Sc.u)^2 \times (Cc.u)^3} + \frac{5}{3r^2} \times S. \frac{du}{(Sc.u)^3 \times (Cc.u)^2}$$

$$S. \frac{du}{(Sc.u)^5 \times (Cc.u)^7} = \frac{1}{r} \times \frac{1}{(Sc.u)^2 \times Cc.u} + \frac{3}{r^2} \times S. \frac{du}{(Sc.u)^3}$$

$$\text{luego será } S. \frac{du}{(Sc.u)^3 \times (Cc.u)^4} = \frac{1}{3r} \times \frac{1}{(Sc.u)^2 \times (Cc.u)^3}$$

$$+ \frac{5}{3r^2} \times \frac{1}{(Sc.u)^2 \times Cc.u} + \frac{3 \times 5}{3r^4} \times S. \frac{du}{(Sc.u)^3}. \text{ Consta}$$

$$(169) \text{ que es } S. \frac{du}{(Sc.u)^3} = -\frac{1}{2r} \times \frac{Cc.u}{(Sc.u)^2} + \frac{1}{2r^2} \times$$

$$L. Tc. \frac{u}{2}.$$

2º. En dicha fórmula substitúyanse sucesivamente los números 4, 2 en lugar de p , y hágase $q=2$; y se tendrán las equaciones,

$$S. \frac{du}{(Sc.u)^3 \times (Cc.u)^5} = \frac{1}{4r} \times \frac{1}{(Sc.u)^2 \times (Cc.u)^4} + \frac{6}{4r^2} \times S. \frac{du}{(Sc.u)^3 \times (Cc.u)^3},$$

$$S. \frac{du}{(Sc.u)^3 \times (Cc.u)^3} = \frac{1}{2r} \times \frac{1}{(Sc.u)^2 \times (Cc.u)^2} + \frac{4}{2r^2} \times S. \frac{du}{(Sc.u)^3 \times Cc.u} :$$

$$\text{luego será } S. \frac{du}{(Sc.u)^3 \times (Cc.u)^5} = \frac{1}{4r} \times \frac{1}{(Sc.u)^2 \times (Cc.u)^4} \\ + \frac{6}{2 \times 4r^2} \times \frac{1}{(Sc.u)^2 \times (Cc.u)^2} + \frac{6 \times 4}{2 \times 4r^2} \times S. \frac{du}{(Sc.u)^3 \times Cc.u}.$$

EXEMPLO IV.

190. Sea la diferencial propuesta $\frac{du}{(Sc.u)^3 \times Cc.u}$.

En la fórmula (D) háganse las substituciones $q=2$, $p=0$; y se tendrá

$$S. \frac{du}{Cc.u \times (Sc.u)^3} = -\frac{1}{2r} \times \frac{1}{(Sc.u)^2} + \frac{1}{r^2} \times S. \frac{du}{Cc.u \times Sc.u};$$

pero $S. \frac{du}{Cc.u \times Sc.u} = \frac{L.Tc.u}{r}$ (153): luego será

$$S. \frac{du}{Cc.u \times (Sc.u)^3} = -\frac{1}{2r} \times \frac{1}{(Sc.u)^2} + \frac{1}{r^2} \times L.Tc.u.$$

PROPOSICION XXVIII.

191. La diferencial $(x^2 \pm r^2)^{\frac{n-2}{2}} \times x^{m+1} dx$ es igual á $\frac{1}{m+n} \times D.(x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}} \times x^m + \frac{mr^2}{m+n} \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{n-2}{2}}$

$$\times x^{m-1} dx : y \text{ la diferencial } x^{m-1} \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}} \times dx \\ = \frac{D. x^m \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}}}{m+n} \pm \frac{nr^2}{m+n} \times x^{m-1} \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{n-2}{2}} \\ \times dx.$$

1º. Diferénciese la fórmula $(x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}} \times x^m$; y se tendrá $D. (x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}} \times x^m = n \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}-1} \times x^{m+1} dx + m x^{m-1} dx \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}}$; pero $m x^{m-1} dx \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}} = m x^{m-1} dx \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}-1} \times (x^2 \pm r^2) = m x^{m+1} dx \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}-1} \pm m r^2 \times x^{m-1} dx \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}-1}$: luego será $D. (x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}} \times x^m = (m+n) \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}-1} \times x^{m+1} dx \pm m r^2 \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{n-2}{2}} \times x^{m-1} dx$; por consiguiente $(x^2 \pm r^2)^{\frac{n-2}{2}} \times x^{m+1} dx = \frac{1}{m+n} \times D. (x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}} \times x^m \mp \frac{mr^2}{m+n} \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{n-2}{2}} \times x^{m-1} dx.$

2º. Si se diferencia la fórmula $(x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}} \times x^m$, y se substituye en lugar de $n \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}-1} \times x^{m+1} dx$ su equivalente $n \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}} \times x^{m-1} dx \mp n r^2 \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}-1} \times x^{m-1} dx$, se hallará ser $x^{m-1} \times$

$$(x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}} \times dx = \frac{1}{m+n} \times D. x^m \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}} \pm \frac{nr^2}{m+n} \times x^{m-1} \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{n-2}{2}} \times dx. \text{ Que es \&c.}$$

COROLARIO I.

192. Luego integrando la primera expresion diferencial de la Proposicion antecedente, se tendrá

$$(A) S. (x^2 \pm r^2)^{\frac{n-2}{2}} \times x^{m+1} dx = \frac{1}{m+n} \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}}$$

$$\times x^m = \frac{mr^2}{m+n} \times S. (x^2 \pm r^2)^{\frac{n-2}{2}} \times x^{m-1} dx. \text{ Por tan-}$$

tó si $m+1$ es número positivo y par, la integral de la fórmula (A) dependerá últimamente de la

$S. (x^2 \pm r^2)^{\frac{n-2}{2}} \times dx$, que se ha determinado (173, 175); y si $m+1$ es número positivo é impar, la integral de dicha fórmula dependerá de la

$$S. (x^2 \pm r^2)^{\frac{n-2}{2}} \times x dx = \frac{1}{n} \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}}. \text{ Excep-}$$

túase el caso de ser $n=0$: pues entonces $S. (x^2 \pm r^2)^{-1}$

$$\times x dx = S. \frac{xdx}{x^2 \pm r^2} = L. \sqrt{(x^2 \pm r^2)} \text{ (88). Adviér-}$$

tase que, si en la fórmula (A) el número n es negativo é igual al número positivo m , como $n=-4$, $m=4$; dicha fórmula quedará expresada por can-

tidades infinitas: en este caso por medio de la equacion $D. (x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}} \times x^m = n \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}-1} \times x^{m+1} \times dx + m \times x^{m-1} \times dx \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}}$, se tendrá la fórmula $S. (x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}-1} \times x^{m+1} dx = \frac{1}{n} \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}} \times x^m - \frac{m}{n} \times S. (x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}} \times x^{m-1} dx$, de la qual se hará uso.

COROLARIO II.

193. E integrando la segunda expresion diferencial de la Proposicion antecedente, se tendrá

$$(B) S. x^{m-1} \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}} \times dx = \frac{x^m \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}}}{m+n} \pm \frac{nr^2}{m+n} \times S. x^{m-1} \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{n-2}{2}} \times dx: \text{ luego si}$$

n es número positivo y par, la integral de la fórmula (B) dependerá últimamente de la $S. x^{m-1} \times$

$dx = \frac{x^m}{m}$: y si n es número positivo é impar, la

integral de la fórmula (B) dependerá últimamente

de la $S. \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{(x^2 \pm r^2)}}$, que se tiene por lo demostrado (172, 174). Es de advertir que, si en la

fórmula (B) el número m es negativo é igual al número positivo n ; dicha fórmula quedará inútil, y

$$\text{en este caso se hará uso de la S. } x^{m-1} \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}} \\ \times dx = \frac{1}{m} (x^2 \pm r^2)^{\frac{n}{2}} \times x^m - \frac{n}{m} \times \text{S. } x^{m+1} \times \\ (x^2 \pm r^2)^{\frac{n-2}{2}} \times dx.$$

COROLARIO III.

194. Si en la fórmula (A) los exponentes n, m tienen valores negativos, como $n = -p, m = -q$; dicha fórmula se transformará en la S.

$$\frac{dx}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{p+2}{2}} \times x^{q+1}} = \frac{1}{(p+q) \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{p}{2}} \times x^q} + \frac{qr^2}{p+q} \times$$

$$\text{S. } \frac{dx}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{p+2}{2}} \times x^{q+1}}, \text{ de donde resulta ser (C)}$$

$$\text{S. } \frac{dx}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{p+2}{2}} \times x^{q+1}} = \mp \frac{1}{qr^2 \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{p}{2}} \times x^q} \\ \mp \frac{p+q}{qr^2} \times \text{S. } \frac{dx}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{p+2}{2}} \times x^{q+1}} : \text{ luego si es } q+1$$

número positivo y par, la integral de la fórmula

(C) dependerá últimamente de la $S. \frac{dx}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{p+2}{2}}}$,

que se tiene por lo demostrado (175); y si es $q+1$ número positivo é impar, la integral de di-

cha fórmula dependerá de la $S. \frac{dx}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{p+2}{2}} \times x}$,

qual integral se tendrá por medio de la siguiente fórmula (D).

COROLARIO IV.

195. Con el mismo método que se ha expuesto en el Corolario antecedente se determinará que, si los exponentes n , m tienen valores negativos en la fórmula (B), ésta se transforma en la

$$(D) S. \frac{dx}{x^{q+1} \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{p+2}{2}}} = \pm \frac{1}{pr^2 \times x^q \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{p}{2}}} \\ \pm \frac{p+q}{pr^2} \times S. \frac{dx}{x^{q+1} \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{p}{2}}}$$

luego si es p número positivo é impar, la fórmula (D) dependerá últimamente de la $S. \frac{dx}{x^{q+1} \times \sqrt{(x^2 \pm r^2)}}$, que se tiene por lo demostrado (174); y si p es número positivo y par, dicha fórmula dependerá de la

$S. \frac{dx}{x^{q+1} \times (x^2 \pm r^2)}$, la qual integral se tendrá por medio de la fórmula anterior (C).

COROLARIO V.

196. Si en las referidas fórmulas A , B , C , D se substituye $z \pm r$ en lugar de x , y en ellas se toma r^2 con el signo negativo, se tendrán otras fórmulas, esto es,

$$S. (z^2 \pm 2rz)^{\frac{n-2}{2}} \times (z \pm r)^{m+1} \times dz,$$

$$S. (z \pm r)^{m-1} \times (z^2 \pm 2rz)^{\frac{n}{2}} \times dz,$$

$$S. \frac{dz}{(z^2 \pm 2rz)^{\frac{p+2}{2}} \times (z \pm r)^{q+1}},$$

las cuales se tendrán por los métodos expresados.

EJEMPLO I.

197. Se proponen las diferenciales $(x^2 \pm r^2)^{-\frac{7}{2}} \times x^4 dx$, $(x^2 \pm r^2)^{-\frac{7}{2}} \times x^5 dx$.

1º. En la fórmula (A) substitúyanse sucesivamente en lugar de m los números 3, 1, y hágase $n = -5$; y se tendrán las equaciones,

$$S. (x^2 \pm r^2)^{-\frac{7}{2}} x^4 dx = -\frac{1}{2} \cdot (x^2 \pm r^2)^{-\frac{5}{2}} x^3 \pm \frac{3}{2} r^2 S. (x^2 \pm r^2)^{-\frac{7}{2}} x^2 dx,$$

$$S. (x^2 \pm r^2)^{-\frac{7}{2}} x^2 dx = -\frac{1}{4} \cdot (x^2 \pm r^2)^{-\frac{5}{2}} x \pm \frac{1}{4} r^2 S. (x^2 \pm r^2)^{-\frac{7}{2}} dx.$$

La integral de $(x^2 \pm r^2)^{-\frac{7}{2}} \times dx$ se determinará por el método dado (175): luego &c.

2º. En la misma fórmula (A) substitúyanse sucesivamente en lugar de m los números 4, 2, y hágase $n = -7$; y se tendrán las equaciones,

$$S.(x^2 \pm r^2)^{-\frac{9}{2}} x^5 dx = -\frac{1}{2} \cdot (x^2 \pm r^2)^{-\frac{7}{2}} x^4 \pm \frac{1}{2} r^2 S.(x^2 \pm r^2)^{-\frac{9}{2}} x^3 dx,$$

$$S.(x^2 \pm r^2)^{-\frac{9}{2}} x^3 dx = -\frac{1}{2} \cdot (x^2 \pm r^2)^{-\frac{7}{2}} x^2 \pm \frac{1}{2} r^2 S.(x^2 \pm r^2)^{-\frac{9}{2}} x dx.$$

La integral de $(x^2 \pm r^2)^{-\frac{9}{2}} \times x dx$ es igual á $-\frac{1}{7} \times (x^2 \pm r^2)^{-\frac{7}{2}}$.

Adviértase que, si en las diferenciales propuestas el exponente del binomio $x^2 \pm r^2$ es positivo; las integrales de las diferenciales que resultan se tendrán igualmente por la fórmula (A) ó bien por la (B).

EXEMPLO II.

198. Sea la diferencial $x^{-6} \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{3}{2}} \times dx$.

En la referida fórmula (B) substitúyanse sucesivamente en lugar de n los números 3, 1, y hágase $m = -5$, y se tendrán las equaciones,

$$S.x^{-6} (x^2 \pm r^2)^{\frac{3}{2}} dx = -\frac{1}{2} \cdot x^{-5} (x^2 \pm r^2)^{\frac{3}{2}} \mp \frac{3}{2} r^2 S.x^{-6} (x^2 \pm r^2)^{\frac{1}{2}} dx,$$

$$S.x^{-6} (x^2 \pm r^2)^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{4} \cdot x^{-5} (x^2 \pm r^2)^{\frac{1}{2}} \mp \frac{1}{4} r^2 S.x^{-6} (x^2 \pm r^2)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

La integral de $\frac{dx}{x^6 \sqrt{(x^2 \pm r^2)}}$ se determinará

por el método dado (174): luego &c.

EXEMPLO III.

199. Sean las diferenciales $\frac{dx}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{5}{2}} \times x^4}$

$$\frac{dx}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{5}{2}} \times x^5}$$

1º. En la referida fórmula (C) substitúyanse sucesivamente en lugar de q los números 3, 1, y hágase $p=3$; y se tendrán las equaciones,

$$S. \frac{dx}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{5}{2}} \times x^4} = \mp \frac{1}{3r^2 \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{3}{2}} \times x^3} \mp \frac{6}{3r^2} \times S. \frac{dx}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{5}{2}} \times x^2},$$

$$S. \frac{dx}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{5}{2}} \times x^2} = \mp \frac{1}{r^2 \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{3}{2}} \times x} \mp \frac{4}{r^2} \times S. \frac{dx}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{5}{2}}};$$

luego &c.

2º. En la misma fórmula (C) substitúyanse sucesivamente en lugar de q los números 4, 2, y hágase $p=3$; y se tendrán las equaciones,

$$S. \frac{dx}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{5}{2}} \times x^5} = \mp \frac{1}{4r^2} \times \frac{1}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{3}{2}} \times x^4} \mp \frac{7}{4r^2} \times S. \frac{dx}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{5}{2}} \times x^3},$$

$$S. \frac{dx}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{5}{2}} \times x^3} = \mp \frac{1}{2r^2} \times \frac{1}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{3}{2}} \times x^2} \mp \frac{5}{2r^2} \times S. \frac{dx}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{5}{2}} \times x};$$

luego &c.

EXEMPLO IV.

200. Sean las diferenciales $\frac{dx}{x \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{5}{2}}}$,

$$\frac{dx}{x^3 \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{6}{2}}}.$$

1º. En la fórmula (D) substitúyanse sucesivamente en lugar de p los números 3, 1, y hágase

$q=0$; y se tendrán las equaciones,

$$S. \frac{dx}{x \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{1}{2}}} = \pm \frac{1}{3r^2} \times \frac{1}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{1}{2}}} \pm \frac{1}{r^2} \times S. \frac{dx}{x \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$S. \frac{dx}{x \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{1}{r^2} \times \frac{1}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{1}{2}}} \pm \frac{1}{r^2} \times S. \frac{dx}{x \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{1}{2}}} :$$

luego &c.

2º. En dicha fórmula (D) substitúyanse sucesivamente en lugar de p los números 4, 2, y hágase $q=2$; y se tendrán las equaciones,

$$S. \frac{dx}{x^3 \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{1}{2}}} = \pm \frac{1}{4r^2} \times \frac{1}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{1}{2}}} \pm \frac{6}{4r^2} \times S. \frac{dx}{x^3 \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$S. \frac{dx}{x^3 \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{1}{2r^2} \times \frac{1}{(x^2 \pm r^2)^{\frac{1}{2}}} \pm \frac{4}{2r^2} \times S. \frac{dx}{x^3 \times (x^2 \pm r^2)^{\frac{1}{2}}} :$$

luego la integral de la diferencial propuesta depende de la integral de $\frac{dx}{x^3 \times (x^2 \pm r^2)}$, que se tiene

por medio de la fórmula (C), si en la misma fórmula se hacen las substitutiones $p=0$, $q=2$; pues se tendrá.

$$S. \frac{dx}{(x^2 \pm r^2) \times x^3} = \pm \frac{1}{2r^2} \times \frac{1}{x^2} \mp \frac{1}{r^2} \times S. \frac{dx}{(x^2 \pm r^2) \times x},$$

cuya integral se ha determinado (88). Luego &c.

De las Diferenciales de las areas en las curvas referidas á los exes, diámetros, ó focus, de los arcos de las mismas curvas, de los sólidos descriptos por dichas areas, y de las superficies de los mismos sólidos.

PROPOSICION XXIX.

201. En qualquiera curva AMN referida al exe ó diámetro AG , hallar la diferencial de un área como ABM contenida por las coordenadas AB y BM , y el arco AM , Fig. 25 y 26.

1º. Supóngase la curva AMN referida al exe AG (Fig. 25). Tirensen, la ordenada bm , y la recta ME paralela al exe AG . Si se considera Bb infinitésima, la diferencial del área ABM será el área evaneciente $BbmM$; pero (9) el área $BbmM$ es igual al rectángulo evaneciente BE inscripto: luego será $D.ABM = BE$; pero el rectángulo $BE = BM \times Bb$, llamadas $AB = x$, $BM = y$: luego será $D.ABM = y dx$.

2º. Si la curva AMN se refiere (Fig. 26) al diámetro AG , con la misma preparacion y ratio-

cinio se hallará que la diferencial del area ABM es el paralelogramo evanecente BE . Para determinar éste, refiérase el ángulo constante ABM que llamo b , á un radio constante $BC=r$ tomado en la ordenada BM , y tírense las perpendiculares CD , MF al diámetro AG ; y por los triángulos BCD , BMF que resultan semejantes, será $BC:CD=BM:MF$, esto es, $r:Sc.b=y:MF$; por

consiguiente se tendrá $MF=\frac{Sc.bxy}{r}$; pero el paralelogramo $BE=Bb \times MF$: luego el paralelogramo evanecente BE que es la diferencial del area ABM será igual á $\frac{Sc.b}{r} \times y dx$, esto es $D.ABM = \frac{Sc.b}{r} \times y dx$. Que es &c.

COROLARIO I.

202. Se infiere que en qualquiera curva (Fig. 25) AMN referida al exe AG , la diferencial del area variable ABM será igual á la ordenada multiplicada por la diferencial de la abscisa, esto es, $D.ABM=y dx$; y que en qualquiera curva AMN referida al diámetro AG (Fig. 26), la diferencial del area variable ABM será igual al producto del seno del ángulo constante que forman

las coordenadas , de la ordenada , y de la diferencial de la abscisa , partido dicho producto por el radio constante á que se refiere dicho ángulo , esto

es , $D. ABM = \frac{Sc.b}{r} \times y dx$. Las mismas fórmulas

valen para las diferenciales de las areas $HJMB$ (Fig. 25 y 26) que empiezan á contarse desde una ordenada dada HJ ; esto es , que será en el caso primero $D. HJMB = y dx$, y en el segundo

$$D. HJMB = \frac{Sc.b}{r} \times y dx.$$

COROLARIO II.

203. Luego integrando respecto á las curvas referidas á los exes, será el area $ABM = S. y dx$, y respecto á las curvas referidas á los diámetros se tendrá la superficie ABM igual á la expresion

$$\frac{Sc.b}{r} \times S. y dx.$$

Las mismas fórmulas valen para las areas $HJMB$ con la advertencia que varían las condiciones para determinar en los casos particulares la constante que se debe añadir á toda integral ; pues , supuesta el area $ABM = 0$, serán la abscisa $AB = x = 0$, y la ordenada $BM = y = 0$; y supuesta el area $HJMB = 0$, serán la abscisa $AB = x = AH$ cantidad dada , y la orde-

dada $BM=y=HJ$ cantidad dada.

COROLARIO III.

204. Por tanto si en una curva dada AMN se determina el valor de la ordenada y por la x , ó bien el valor de dx por y , dy , y qualquiera de dichos dos valores se substituye en la $S.ydx$, se tendrá el valor exácto ó próximo del area ABM de la curva dada, segun que dicha integral se determine exácta ó próximamente.

COROLARIO IV.

205. Y por el contrario, dada el area ABM de una curva, se hallará la equacion á la misma curva, comparando la cantidad que expresa el area dada con la $S.ydx$, y diferenciando la equacion que resulta.

COROLARIO V.

206. Finalmente si qualquiera diferencial Xdx compuesta de una sola variable no se puede integrar algebricamente, se podrá construir por la Quadratura ó area de una curva referida al exe, cuya equacion es $X=y$, en la qual expresa X una funcion de la abscisa x : pues, será $Xdx=ydx$, é integrando se tendrá $S.Xdx=S.ydx$, que es el

area de una curva expresada por la equation $X=y$, cuyas coordenadas son x, y . Si en la fórmula diferencial dada la variable X no es lineal, se reducirá multiplicándola ó partiéndola por las dimensiones correspondientes de alguna cantidad conocida; y en este caso la $S. y dx$, ó bien el area, quedará multiplicada ó partida por la misma constante.

EXEMPLO I.

207. Sea la curva AMN qualquiera de las infinitas Parábolas contenidas en la equation $y^{m+n} = a^m \times x^n$; si se suponen las coordenadas $AB=x$, y $BM=y$. *Fig. 25.*

Siendo pues $y^{m+n} = a^m \times x^n$, se tendrá $y = a^{\frac{m}{m+n}} \times x^{\frac{n}{m+n}}$: luego suponiendo el ángulo ABM recto, será $S. y dx$ ó bien (203) el area ABM

$$= S. a^{\frac{m}{m+n}} \times x^{\frac{n}{m+n}} \times dx = a^{\frac{m}{m+n}} \times x^{\frac{n}{m+n} + 1} : \left(\frac{n}{m+n} + 1 \right)$$

+ A . La cantidad A es la constante que se debe añadir á toda integral, y cuyo valor se determina por la condicion del Problema: en el caso presente, si es el area $ABM=0$, lo será tambien la abscisa $AB=x=0$; por consiguiente será dicha constante $A=0$. Por tanto se tendrá el area varia-

$$ble $ABM = a^{\frac{m}{m+n}} \times x^{\frac{n}{m+n} + 1} : \left(\frac{n}{m+n} + 1 \right) = \frac{m+n}{m+2n} \times xy,$$$

porque (como hemos visto) es $y = a^{\frac{m}{m+n}} \times x^{\frac{n}{m+n}}$.

Si es $m=n=1$, se tendrá $y^2 = ax$, y el area ABM de esta Parábola Apoloniana será igual á $\frac{2}{3} \times xy$. Si se suponen $m=2$, $n=1$, se tendrá $y^3 = a^2 x$; y el area ABM de esta Parábola cúbica será igual á $\frac{3}{4} \times xy$. Si se suponen $m=1$, $n=2$, se tendrá $y^3 = ax^2$; y el area ABM de esta segunda Parábola cúbica será igual á $\frac{3}{4} \times xy$. Con el mismo método se determinarán las areas de todas las demás Parábolas.

Pero si se pide determinar el area $HJMB$, supuesta la abscisa $AH=b$, se tendrá (203) $HJMB$

$$= S. y dx = S. a^{\frac{m}{m+n}} \times x^{\frac{n}{m+n}} \times dx = a^{\frac{m}{m+n}} \times x^{\frac{n}{m+n} + 1} :$$

$(\frac{n}{m+n} + 1) + A$ constante: en este caso si es $HJMB$

$$= 0, \text{ será } x=b, \text{ y por consiguiente } 0 = a^{\frac{m}{m+n}} \times$$

$$b^{\frac{n}{m+n} + 1} : (\frac{n}{m+n} + 1) + A, \text{ de donde resulta } A =$$

$$- a^{\frac{m}{m+n}} \times b^{\frac{n}{m+n} + 1} : (\frac{n}{m+n} + 1). \text{ Por tanto será el}$$

$$\text{area } HJMB = \frac{a^{\frac{m}{m+n}} \times x^{\frac{n}{m+n} + 1} - a^{\frac{m}{m+n}} \times b^{\frac{n}{m+n} + 1}}{\frac{n}{m+n} + 1}.$$

EXEMPLO II.

208. Sea la curva NMF cualquiera de las infinitas Hipérbolas referidas á sus asíntotas AG , AF contenidas en la equacion $x^n y^m = a^{m+n}$, supuestas las coordenadas $AB = x$, $BM = y$. Fig. 27.

Siendo $x^n y^m = a^{m+n}$, se tendrá $y^m = \frac{a^{m+n}}{x^n}$; y extrayendo la raíz m de ambos miembros, será

$$y = \frac{a^{\frac{m+n}{m}}}{x^{\frac{n}{m}}} = a^{\frac{m+n}{m}} \times x^{-\frac{n}{m}}: \text{luego suponiendo el ángulo } ABM \text{ recto, será } S. y dx \text{ ó bien el area infinitamente larga } ABMF = S. a^{\frac{m+n}{m}} \times x^{-\frac{n}{m}} \times dx$$

$$= a^{\frac{m+n}{m}} \times x^{-\frac{n}{m} + 1} : \left(-\frac{n}{m} + 1\right) + A \text{ constante.}$$

En esta expresion hay que hacer tres notables diferencias, segun sea m mayor, menor ó igual á n .

1.^a. Si es $m > n$, será $\frac{n}{m}$ una fraccion propia; por consiguiente el exponente $-\frac{n}{m} + 1$ de la x en la integral hallada será positivo. Para determinar la constante en el caso presente, adviértase que

si es $ABMF=0$, será la abscisa $AB=x=0$, como su potencia de exponente positivo: luego será

$$0 = a^{\frac{m+n}{m}} \times 0 : \left(-\frac{n}{m} + 1\right) + A, \text{ de donde } A=0.$$

Por tanto siendo $m > n$, será el area infinitamente

$$\text{larga } ABMF = a^{\frac{m+n}{m}} \times x^{-\frac{n}{m} + 1} : \left(-\frac{n}{m} + 1\right)$$

$$= \frac{m}{m-n} \times yx, \text{ por ser } y = a^{\frac{m+n}{m}} \times x^{-\frac{n}{m}}. \text{ Se infiere}$$

que siendo la abscisa $AB=x=\infty$, el area infinitamente larga contenida por la curva hiperbolica,

y sus asintotas será infinita del orden $-\frac{n}{m} + 1$.

Si se suponen $n=1$, $m=2$, será $xy^2=a^3$; y el area $ABMF$ de esta Hiperbola referida á sus asintotas será igual á $2yx$.

Si se suponen $n=1$, $m=3$, será $xy^3=a^4$, y el area $ABMF$ de esta Hipérbola referida á sus asintotas, será igual á $\frac{1}{2} \times xy$.

2^a. Si es $m < n$, será $\frac{n}{m}$ una fraccion impropia;

por consiguiente el exponente $-\frac{n}{m} + 1$ de la x en la integral hallada será negativo: luego en este ca-

so será el area infinitamente larga $ABMF = -a^{\frac{m+n}{m}} :$

$(\frac{n}{m} - 1) \times x^{\frac{n}{m} - 1} + A$ constante. Para determinar el valor de dicha constante, valen las mismas condiciones arriba expresadas, esto es, quando es el area $ABMF = 0$, serán la abscisa x y su potencia de exponente positivo iguales á cero: luego se tendrá $0 = -a^{\frac{m+n}{m}} : (\frac{n}{m} - 1) \times 0 + A$, de donde $A = \infty$. Por tanto si es $m < n$, será el area infinitamente larga $ABMF = \infty$.

Si se pide en este caso el area $JHBM$, supuesta la abscisa $AH = x = b$; se tendrá como antes $JHBM = -a^{\frac{m+n}{m}} : (\frac{n}{m} - 1) \times x^{\frac{n}{m} - 1} + A$ constante; pero siendo $JHMB = 0$, será $x = b$: luego

será $A = a^{\frac{m+n}{m}} : (\frac{n}{m} - 1) \times b^{\frac{n}{m} - 1}$. Por tanto

el area $JHBM$ será igual á $- \frac{a^{\frac{m+n}{m}}}{(\frac{n}{m} - 1) \times x^{\frac{n}{m} - 1}}$

$+ \frac{a^{\frac{m+n}{m}}}{(\frac{n}{m} - 1) \times b^{\frac{n}{m} - 1}}$. De aquí se infiere que si es

$x = \infty$, será el area infinitamente larga $HJNG = a^{\frac{m+n}{m}} : (\frac{n}{m} - 1) \times b^{\frac{n}{m} - 1}$.

Si se suponen $n=2$, $m=1$, será $x^2 y = a^3$; y en esta hipérbola referida á sus asíntotas se tendrán

$$ABMF = \infty, HJMB = -\frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{b}, \text{ y el area in-}$$

$$\text{finitamente larga } HJNG = \frac{a^3}{b}.$$

$$3^{\text{a}}. \text{ Si es } m=n, \text{ será } ABMF = S. a^{\frac{m+n}{m}} \times x^{-\frac{n}{m}}$$

$$\times dx = S. \frac{a^2 dx}{x} = a^2 L. x + A \text{ constante; pero sien-}$$

do $ABMF=0$, es $x=0$, y además por la naturaleza de la Logaritmica es $L.0 = -\infty$: luego será dicha constante $A=\infty$. Por tanto si es $m=n$,

será el area infinitamente larga $ABMF=\infty$. En este caso, si se pide el area $JHBM$, supuesta

$AH=b$, se tendrá, como antes, $JHBM=a^2 L. x + A$

constante; pero siendo $JHBM=0$, es $x=b$: luego

será $0=a^2 L. b + A$, de donde $A=-a^2 \times L. b$.

Por tanto será el area $JHBM=a^2 \times L. x - a^2 \times$

$$L. b = a^2 \times L. \frac{x}{b}. \text{ De aquí se infiere que si es}$$

$x=\infty$, será el area infinitamente larga $JHGN=\infty$.

Adviértase que es el sector hiperbólico JAM

$=JHBM$; porque son $JAM + MBA = AHJ$

$+JHBM$, y $MBA = AHJ$. Por tanto será

$$JAM = a^2 \times L. \frac{x}{b}; \text{ y siendo } AH \text{ igual al lado de}$$

la potencia de la Hipérbola, y el semiexe $AI=r$, se tendrá el sector hiperbólico $JAM=\frac{r^2}{2} \times L.(x:\frac{r}{\sqrt{2}})$.

EXEMPLO III.

209. Sea la curva NAR la Hipérbola Apolonia referida á los exes SA , PQ , cuya equacion es $y^2=\frac{b^2}{r^2} \times (x^2-r^2)$, suponiendo $CB=x$, $BM=y$, $CA=r$, y $CQ=b$. Fig. 28.

Siendo $y^2=\frac{b^2}{r^2} \times (x^2-r^2)$, se tendrá $y=\frac{b}{r} \times \sqrt{(x^2-r^2)}$: luego será $S.y dx$ ó bien el area $ABM=S.\frac{b}{r} \times \sqrt{(x^2-r^2)} \times dx=\frac{b}{r} \times S.dx \sqrt{(x^2-r^2)}$; pero (125) $S.dx \sqrt{(x^2-r^2)}=\frac{x\sqrt{(x^2-r^2)}}{2} + \frac{r^2}{2} \times L.(x-\sqrt{(x^2-r^2)})$: luego será $ABM=\frac{bx\sqrt{(x^2-r^2)}}{2r} + \frac{br}{2} \times L.(x-\sqrt{(x^2-r^2)}) + A$ constante: y siendo el area $ABM=0$, es $x=r$; por consiguiente será $0=\frac{br}{2} \times L.r + A$, de donde $A=-\frac{br}{2} \times L.r$. Luego será el area $ABM=\frac{bx\sqrt{(x^2-r^2)}}{2r} + \frac{br}{2} \times L.(x-\sqrt{(x^2-r^2)}) - \frac{br}{2} \times L.r = \frac{bx}{2r} \times \sqrt{(x^2-r^2)}$

$$-\frac{br}{2} \times L. \frac{r}{x - \sqrt{(x^2 - r^2)}}.$$

Si es $b=r$, el area ABM de la Hipérbola equilátera será igual á $\frac{x}{2} \times \sqrt{(x^2 - r^2)} - \frac{r^2}{2} \times$

$L. \frac{r}{x - \sqrt{(x^2 - r^2)}}$; por consiguiente se tendrá el sector $CAM = CBM - ABM = \frac{r^2}{2} \times L. \frac{r}{x - \sqrt{(x^2 - r^2)}}$.

Ahora si se supone $u = r \times L. \frac{r}{x - \sqrt{(x^2 - r^2)}}$, será el sector $CAM = \frac{r^2}{2}$ á imitacion de los sectores cir-

culares; y si se tiran las rectas, MB perpendicular al exe SB , AL tangente de la Hipérbola en el vértice A , y QD perpendicular al semiexe CQ , se llaman $MB = Sh.u$, $CB = Ch.u$, $AL = Th.u$, $QD = Cth.u$, y CA seno total $= r$, á imitacion tambien de los senos, cosenos, &c. circulares, con quienes los hiperbólicos tienen suma analogía, como se verá á continuacion:

1º. por ser $u = r \times L. \frac{r}{x - \sqrt{(x^2 - r^2)}}$, diferenciando esta expresion, en quien $x = Ch.u$, se tendrá

$$du = \frac{r dx}{\sqrt{(x^2 - r^2)}} = \frac{r \times D.Ch.u}{Sh.u}, \text{ de donde } D.Ch.u = \frac{Sh.u \times du}{r};$$

2º. siendo $Sh.u = \sqrt{x^2 - r^2}$, se tendrá $D.Sh.u = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - r^2}}$; y substituyendo en lugar de $\frac{dx}{\sqrt{x^2 - r^2}}$

su valor $\frac{du}{r}$ hallado antes, será $D.Sh.u = \frac{Ch.u \times du}{r}$:

luego será $du = \frac{r \times D.Sh.u}{Ch.u}$, y suponiendo $Sh.u = x$,

se tendrá $du = \frac{r dx}{\sqrt{x^2 + r^2}}$:

3º. por la semejanza de los triángulos CAL , CBM será $Ch.u : Sh.u = r : Th.u$, y por consiguiente se tendrá $Th.u \times Ch.u = r \times Sh.u$; luego diferenciando será $Ch.u \times D.Th.u + Th.u \times D.Ch.u = r \times D.Sh.u$; y substituyendo en lugar de $D.Ch.u$, y $D.Sh.u$, sus valores hallados antes, se tendrá

$Ch.u \times D.Th.u + Th.u \times \frac{Sh.u \times du}{r} = Ch.u \times du$; pero

$Sh.u = \frac{Ch.u \times Th.u}{r}$: luego será $Ch.u \times D.Th.u$

$+ \frac{(Th.u)^2 \times Ch.u \times du}{r^2} = Ch.u \times du$, de donde resulta

$D.Th.u = \frac{(r^2 - (Th.u)^2) \times du}{r^2}$: luego será $du = \frac{r^2 \times D.Th.u}{r^2 - (Th.u)^2}$;

y si se supone $Th.u = x$, se tendrá $du = \frac{r^2 dx}{r^2 - x^2}$;

4º. con método semejante á el de la Proposicion XVIII. se hallará ser $D.Cth.u = \frac{r^2 du}{(Sh.u)^2}$, de

donde resulta $du = \frac{(Sh.u)^2 \times D.Ch.u}{r^2}$; y suponiendo

$$Ch.u = x, \text{ será } du = \frac{r^2 dx}{x^2 - r^2};$$

5°. con el mismo método de la Proposicion

$$XXH. \text{ se hallará ser } D.L.Th.u = \frac{(r^2 - (Th.u)^2) \times du}{r^2 \times Th.u};$$

y substituyendo en lugar de $Th.u$ su valor $\frac{r \times Sh.u}{Ch.u}$,

$$\text{será } D.L.Th.u = \frac{((Ch.u)^2 - (Sh.u)^2) \times du}{r Ch.u \times Sh.u} = \frac{r du}{Sh.u \times Ch.u}; \text{ Y}$$

suponiendo $Sh.u = x$, se tendrá $D.L.Th.u$

$$= \frac{r^2 dx}{x \times (r^2 + x^2)};$$

6°. si en la diferencial $\frac{r du}{Sh.u}$ se substituye en

lugar de du su valor $\frac{r \times D.Ch.u}{Sh.u}$, se tendrá $\frac{r du}{Sh.u} =$

$$\frac{r^2 \times D.Ch.u}{(Sh.u)^2} = \frac{r^2 \times D.Ch.u}{(Ch.u)^2 - r^2}, \text{ cuya integral depende de}$$

un sector de la Hipérbola equilátera, que tiene la cotangente igual al $Ch.u$. Ahora si se supone $Sh.u = x$,

$$\text{será } \frac{r du}{Sh.u} = \frac{r^2 dx}{x \sqrt{(x^2 + r^2)}};$$

7°. y finalmente si en la diferencial $\frac{r du}{Ch.u}$ se subs-

tituye en lugar de du su valor $\frac{r \times D.Sh.u}{Ch.u}$, se tendrá

$$\frac{r du}{Ch.u} = \frac{r^2 \times D.Sh.u}{(Ch.u)^2} = \frac{r^2 \times D.Sh.u}{r^2 + (Sh.u)^2}, \text{ la qual se integra}$$

por un arco de círculo, cuya tangente (131) es igual al *Sh. u.* Ahora si se supone $Ch. u = x$, será

$$\frac{rd u}{Ch. u} = \frac{r^2 dx}{x \sqrt{(x^2 - r^2)}}.$$

EXEMPLO IV.

210. Sea la curva AMN un arco de círculo, cuya equacion $y^2 = 2rx - x^2$, suponiendo el radio $AC = r$, y las coordenadas $AB = x$, $BM = y$.

Fig. 29.

Siendo $y^2 = 2rx - x^2$, será $y = \sqrt{(2rx - x^2)}$: luego será $S. y dx$ ó bien el área $ABM = S. dx \sqrt{(2rx - x^2)}$;

pero (121) $S. dx \sqrt{(2rx - x^2)} = \frac{x-r}{2} \times \sqrt{(2rx - x^2)}$

$+ \frac{r}{2} \times u$, siendo u un arco de círculo, cuyo seno

verso es igual á x : luego será $ABM = \frac{x-r}{2} \times$

$\sqrt{(2rx - x^2)} + \frac{r}{2} \times u + A$. La constante A es

cero: pues, siendo $ABM = 0$, serán $x = 0$, $u = 0$.

EXEMPLO V.

211. Se pide hallar la equacion á la curva que tiene su área igual al rectángulo $c \times (y - b)$, de suerte que dicha área sea cero, mientras que su ordenada $y = b$. Fig. 30.

En qualquiera curva referida al eje la expresion del area es (203) igual á $S.y dx$; pero por la condicion del Problema $c \times (y-b)$ es el area de la curva, cuya equacion se busca: luego será $S.y dx = c \times (y-b)$; y diferenciando se tendrá $y dx = c dy$; por consiguiente $dx = \frac{c dy}{y}$; luego integrando será $x = L.y$, equacion á la logarítmica, cuya subtangente $= c$. Por tanto en la logarítmica DMH descripta con la subtangente $= c$, cerca de la asíntota RG , si se tiran la ordenada $AD = b$, y otra qualquiera ordenada $BM = y$, será el area $ADMB = c \times (y-b)$.

EXEMPLO VI.

212. Se propone integrar la diferencial $\frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$ Fig. 31 y 29.

Fórmese la equacion $\frac{a \sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} = y$; y descríbase (Fig. 31) la curva AMD de la misma equacion, cuyas coordenadas son $AP = x$, $PM = y$; luego

será $S. \frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} = \frac{S.y dx}{a} = \frac{APM}{a}$.

De otro modo.

Divídase la fórmula propuesta multiplicada por

$\frac{1}{2}a$ en dos factores, de modo que uno de ellos se pueda integrar, esto es, en los factores $\frac{dx\sqrt{a}}{2\sqrt{(a-x)^2}}$

$\sqrt{ax}$; hágase el primer factor igual á dz , y el segundo igual á y , esto es $\frac{dx\sqrt{a}}{2\sqrt{(a-x)^2}} = dz$, y $\sqrt{ax} = y$.

Intégrese la primera de estas equaciones, y se tendrá $A - \sqrt{(a^2 - ax)} = z$, en la qual suponiendo la constante $A = a$, será $(a - z)^2 = a^2 - ax$, de donde resulta ser $2az - z^2 = ax$; pero $\sqrt{ax} = y$, y $ax = y^2$: luego será $2az - z^2 = y^2$, equacion al círculo que tiene (Fig. 29) el radio $AC = a$, la abscisa $AB = z$, y la ordenada $BM = y$. Por tanto será el area $ABM = S.ydz = \frac{a}{2} \times S.\frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(a-x)^2}}$; por consiguiente $S.\frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{(a-x)^2}} = \frac{2ABM}{a}$.

PROPOSICION XXX.

213. En qualquiera curva AMN referida al focus F , hallar la diferencial de un area AFM contenida por las ordenadas AF , FM , y la curva AM . Fig. 32.

Tírese la ordenada Fm , y haciendo centro en F , con el intervalo $FM = y$ descríbase el arco ME . Considerando, pues, el ángulo MFm eva-

necente, la diferencial del area AFM será MFm ; pero (28) $MFm = MFE$: luego será $D.AFM = MFE$; y siendo el sector evaneciente (22) $MFE = \frac{1}{2} \times FM \times ME$, $FM = y$, $ME = dx$ (44), se tendrá $D.AFM = \frac{ydx}{2}$. Que es &c.

COROLARIO I.

214. Se infiere que la diferencial de qualquiera figura AFM contenida por las ordenadas AF , FM y la curva AM referida al focus F , es igual á la mitad del producto de la ordenada variable $FM = y$, y del arco evaneciente $ME = dx$ descrito con el radio $= y$, esto es, $D.AFM = \frac{1}{2} \times ydx$.

COROLARIO II.

215. E integrando, se tendrá el area $AFM = \frac{1}{2} \times S. y dx$.

COROLARIO III.

216. Luego dada qualquiera curva AMN referida al focus F , y expresada por una equacion formada por y , dy , dx , si en la fórmula $S. \frac{ydx}{2}$ se substituye en lugar de dx su equivalente en y , dy , y se integra exácta ó próximamente la expresion

que resultó dada por y , dy ; se tendrá el valor exácto ó próximo del area variable AFM .

ESCOLIO.

217. Adviértase que en dicha diferencial $\frac{y dx}{2}$ no se puede substituir x , dx en lugar de y , dy : pues dx no tiene integral por ser un arco infinitésimo del círculo descrito con el radio variable $FM=y$. En este caso si se quiere reducir dicha diferencial á la de un arco u del círculo cuyo radio constante es r , se substituirá $\frac{y du}{r}$ en lugar de dx ; por consiguiente la diferencial del area AFM será igual á $\frac{y^2 du}{2r}$: é integrando se tendrá el area $AFM = \frac{1}{2r} \times S. y^2 du$. Ahora si por la equation de la curva dada se halla y por u , y se substituye en la diferencial $\frac{y^2 du}{2r}$, se tendrá dicha diferencial dada por u , du , la qual integrada, si es posible, dará el area AFM por un arco del círculo, cuyo radio es igual á r . Se ha supuesto antes $dx = \frac{y du}{r}$: pues si con el radio $FP=r$ se describe el arco PHI , y se llama el arco $PH=u$, será el arco

evaneciente $HJ = du$; y por la semejanza de los sectores MFE , HFJ será $FH:FM = HJ:ME$, esto es, $r:y = du:dx$; por consiguiente $dx = \frac{y du}{r}$.

Esta advertencia es general á las curvas referidas á los focus.

EXEMPLO.

218. Se pide hallar el area FAM de la Espiral $FAMQPR$ de Archimedes, cuya equacion es

$y = \frac{r.u}{p}$, suponiendo la ordenada $FM = y$, el radio $FH = r$, u el arco PH del círculo descripto con dicho radio, y la periferia $PHP = p$. Fig. 33.

Siendo $y = \frac{r.u}{p}$, será $u = \frac{p.y}{r}$; y diferenciando se tendrá $du = \frac{p dy}{r}$; luego será $\frac{S.y^2 du}{2r}$, ó bien el area $FAM = S. \frac{p y^2 dy}{2r^2} = \frac{p}{2r^2} \times \frac{y^3}{3}$, sin añadir cons-

tante por ser el area $AFM = 0$, quando lo es su ordenada y . Si en la $\frac{S.y^2 du}{2r}$, expresion del area

FAM , se substituye en lugar de y su valor $\frac{r.u}{p}$, se tendrá el area $FAM = S. \frac{r^2 u^2 du}{2rp^2} = \frac{r}{2p^2} \times \frac{u^3}{3}$.

Se infiere que el area $FAMQPF$ contenida en

el círculo es igual á $\frac{r}{2p^2} \times \frac{p^3}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{rp}{2}$, esto es, igual á la tercera parte del mismo círculo.

PROPOSICION XXXI.

219. Hallar la diferencial de un arco AM de qualquiera curva AMN referida tanto al exe ó diámetro AG , como al focus F . *Fig. 25, 26 y 32.*

1º. Supónganse, la curva AMN (*Fig. 25 y 32*) referida al exe AG ó al focus F , y las construcciones anteriores (201, 213); y además tírese la cuerda Mm . Si se considera Bb infinitésima ó diferencial de la abscisa $AB=x$ en la curva AMN referida al exe, y en la AMN referida al focus F se considera evanecente el arco ME de círculo descripto con el radio $FM=y$; serán Mm y mE las respectivas diferenciales del arco $AM=s$, y de la ordenada y , esto es, $Mm=ds$, $mE=dy$, y el arco Mm evanecente será igual (18) á su cuerda; pero en el triángulo rectángulo MEm es $(Mm)^2=(ME)^2+(Em)^2$: luego será $ds^2=dx^2+dy^2$, y por consiguiente $ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$.

2º. (Supónganse, la curva AMN (*Fig. 26*) referida al diámetro AG , y la construcción con las denominaciones anteriores (201); y además tírense la cuerda Mm , y la recta mH perpendicular á

la ME prolongada, si es necesario; y se tendrán los triángulos $CB D$, $m E H$ semejantes, y en ellos proporcionales los lados; esto es, $m E : E H = C B :$

$$B D = r : C c . b ; \text{ por consiguiente } E H = \frac{m E \times C c . b}{r} .$$

Si se considera $B b$ infinitésima ó diferencial de la abscisa $A B = x$, serán $M m$ y $m E$ las respectivas diferenciales del arco $A M$ y de la ordenada $B M$, esto es, $M m = ds$, $m E = dy$, y el arco $M m$ evaneciente será igual (18) á su cuerda; pero en el triángulo $M E m$ es $(M m)^2 = (M E)^2 \mp 2 M E \times E H + (E m)^2$ (se usa del signo menos, si el ángulo B es agudo, y si es obtuso, del signo mas): luego será $ds^2 = dx^2$

$$\mp 2 dx \times \frac{C c . b \times dy}{r} + dy^2, \text{ y por consiguiente } ds = \sqrt{dx^2 \mp \frac{2 dx \times C c . b \times dy}{r} + dy^2} . \text{ Que es \&c.}$$

COROLARIO I.

220. Se infiere que la diferencial de un arco de qualquiera curva referida al exe es igual á la raíz quadrada de la suma de los quadrados de la diferencial de la abscisa x , y de la diferencial de la ordenada y , esto es, $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; que en qualquiera curva referida al focus la diferencial de un arco s es igual á la raíz quadrada de la suma de los quadrados del arco infinitésimo dx del cír-

culo descripto con el radio ú ordenada $=y$, y de la diferencial de dicha ordenada, esto es, $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; y que la diferencial de un arco s de qualquiera curva referida al diámetro, esto es,

$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 \mp \frac{2Cc.b \times dy dx}{r})}$, en quien b es el ángulo constante que forman las coordenadas x, y de la curva, y que se refiere al radio r .

COROLARIO II.

221. Luego integrando será $s = S. \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ en las curvas referidas á los exes ó á los focus; y en las curvas referidas á los diámetros será $s = S. \sqrt{(dx^2 + dy^2 \mp \frac{2Cc.b \times dx \times dy}{r})}$ en cuya expresion se usa del signo menos, si el ángulo b es agudo, y si es obtuso, del signo mas. Es de notar que para hallar un arco de una curva dada, se harán las substituciones que antecedentemente se han dicho, tanto en las curvas referidas á los exes ó á los diámetros (204), como en las referidas á los focus (216, 217).

COROLARIO III.

222. Siendo en las curvas referidas á los focus $dx = \frac{y du}{r}$, será $dx^2 = \frac{y^2 du^2}{r^2}$: luego en dichas cur-

vas será tambien $ds = \sqrt{\left(\frac{y^2 du^2}{r^2} + dy^2\right)}$, y $s =$
 $S. \sqrt{\left(\frac{y^2 du^2}{r^2} + dy^2\right)}$.

EXEMPLO I.

223. Sea la curva AMN la Parábola Apolonia referida al eje, cuya equacion es $y^2 = 2ax$, supuestas las coordenadas $AB = x$, $BM = y$, y el parámetro $= 2a$. Fig. 25.

Diferénciese la equacion propuesta $y^2 = 2ax$; y se tendrá $2y dy = 2a dx$; por consiguiente $dx = \frac{y dy}{a}$, y $dx^2 = \frac{y^2 dy^2}{a^2}$; pero el arco $AM = s$

$= S. \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$: luego será el arco parabólico

$AM = S. \sqrt{\left(\frac{y^2 dy^2}{a^2} + dy^2\right)} = S. \frac{dy \sqrt{(y^2 + a^2)}}{a}$; pe-

ro (125) $S. dy \sqrt{(y^2 + a^2)} = \frac{y \sqrt{(y^2 + a^2)}}{2} - \frac{a^2}{2} \times$

$L. (y - \sqrt{(y^2 + a^2)})$: luego será $AM = \frac{y \sqrt{(y^2 + a^2)}}{2a} -$

$\frac{a}{2} \times L. (y - \sqrt{(y^2 + a^2)}) + A$. Para determinar

la constante A , adviértase que siendo el arco $AM = 0$, tambien la ordenada $y = 0$: luego será

$0 = -\frac{a}{2} \times L. -a + A$, y $A = \frac{a}{2} \times L. -a$. Por

tanto se tendrá el arco parabólico $AM = \frac{y \sqrt{(y^2 + a^2)}}{2a} -$

$$-\frac{a}{2} \times L. (y - \sqrt{y^2 + a^2}) + \frac{a}{2} \times L. -a = \frac{y \sqrt{y^2 + a^2}}{2a}$$

$$-\frac{a}{2} \times L. \frac{-y + \sqrt{y^2 + a^2}}{a}.$$

EXEMPLO II.

224. Sea la curva AMN la Hipérbola Apolonia referida á los exes AS , PQ , cuya equacion

es $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (x^2 - a^2)$, suponiendo el exe transverso $SA = 2a$, el conjugado $PQ = 2b$, la abscisa $CB = x$, y la ordenada $BM = y$. Fig. 28.

Siendo, pues, $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (x^2 - a^2)$, será $y =$

$\frac{b}{a} \times \sqrt{(x^2 - a^2)}$; y diferenciando, se tendrá dy

$= \frac{b}{a} \times \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}$; por consiguiente $dy^2 = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{x^2 dx^2}{x^2 - a^2}$; pero el arco $AM = s = S. \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$:

luego será (A) $AM = S. \sqrt{\left(dx^2 + \frac{b^2}{a^2} \times \frac{x^2 dx^2}{x^2 - a^2}\right)}$

$$= S. \frac{dx \sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2} \times x^2 - a^2\right)}}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}.$$

Por ser $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (x^2 - a^2)$, se tendrá $a^2 y^2 + b^2 a^2$

$= b^2 x^2$, de donde $x^2 = \frac{a^2}{b^2} \times (b^2 + y^2)$, y $x = \frac{a}{b} \times$

$\sqrt{(b^2 + y^2)}$: luego diferenciando será $dx = \frac{a}{b} \times$

$\frac{y dy}{\sqrt{(b^2 + y^2)}}$; por consiguiente $dx^2 = \frac{a^2}{b^2} \times \frac{y^2 dy^2}{b^2 + y^2}$; pero el arco $AM = s = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$: luego se-

rá $(B) AM = S. \sqrt{\left(\frac{a^2}{b^2} \times \frac{y^2 dy^2}{b^2 + y^2} + dy^2\right)} =$

$S. \frac{dy \sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2}{b^2} \times y^2 + b^2\right)}}{\sqrt{(y^2 + b^2)}}$. Esta integral se tendrá

por una serie infinita con el método siguiente. Su-

póngase por facilidad del cálculo $\frac{a^2 + b^2}{b^2} = n$, y

$$\frac{\sqrt{(ny^2 + b^2)}}{\sqrt{(y^2 + b^2)}} = A + By^2 + Cy^4 + Ey^6 + Fy^8 + \&c.$$

en la qual las $A, B, C, E, \&c.$ son cantidades constantes que se han de determinar. Redúzganse á series los radicales anteriores por la fórmula newtoniana del binomio, y serán

$$\sqrt{(b^2 + ny^2)} = b + \frac{ny^2}{2b} - \frac{n^2 y^4}{2^2 \cdot 2b^3} + \frac{3n^3 y^6}{2^3 \cdot 2 \cdot 3b^5} - \frac{3 \times 5 n^4 y^8}{2^4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4b^7} + \&c.$$

$$\sqrt{(b^2 + y^2)} = b + \frac{y^2}{2b} - \frac{y^4}{2^2 \cdot 2b^3} + \frac{3y^6}{2^3 \cdot 2 \cdot 3b^5} - \frac{3 \times 5 y^8}{2^4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4b^7} + \&c.$$

luego será

$$b + \frac{ny^2}{2b} - \frac{n^2 y^4}{2^2 \cdot 2b^3} + \frac{3n^3 y^6}{2^3 \cdot 2 \cdot 3b^5} - \frac{3 \times 5 n^4 y^8}{2^4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4b^7} + \&c.$$

$$b + \frac{y^2}{2b} - \frac{y^4}{2^2 \cdot 2b^3} + \frac{3y^6}{2^3 \cdot 2 \cdot 3b^5} - \frac{3 \times 5 y^8}{2^4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4b^7} + \&c. =$$

$A + By^2 + Cy^4 + Ey^6 + Fy^8 + \&c.$ y quitando el quebrado será

$$\begin{aligned}
 & b + \frac{ny^2}{2b} - \frac{n^2y^4}{2^2 \cdot 2b^3} + \frac{3n^3y^6}{2^3 \cdot 2 \cdot 3b^5} - \frac{3 \times 5n^4y^8}{2^4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4b^7} + \&c. = \\
 & Ab + Bby^2 + Cby^4 + Eby^6 + Fby^8 + \&c. \\
 & + \frac{Ay^2}{2b} + \frac{By^4}{2b} + \frac{Cy^6}{2b} + \frac{Ey^8}{2b} + \&c. \\
 & - \frac{Ay^4}{2^2 \cdot 2b^3} - \frac{By^6}{2^2 \cdot 2b^3} - \frac{Cy^8}{2^2 \cdot 2b^3} - \&c. \\
 & + \frac{3Ay^6}{2^3 \cdot 2 \cdot 3b^5} + \frac{3By^8}{2^3 \cdot 2 \cdot 3b^5} + \&c. \\
 & - \frac{3 \cdot 5Ay^8}{2^4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4b^7} - \&c. \\
 & + \&c.
 \end{aligned}$$

Siendo las cantidades $A, B, C, E, F, \&c.$ indeterminadas, se podrán suponer iguales los términos del un miembro á los correspondientes en el otro, esto es,

$$1^a. b = Ab,$$

$$2^a. \frac{n}{2b} = Bb + \frac{A}{2b},$$

$$3^a. -\frac{n^2}{2^2 \cdot 2b^3} = Cb + \frac{B}{2b} - \frac{A}{2^2 \cdot 2b^3},$$

$$4^a. \frac{3n^3}{2^3 \cdot 2 \cdot 3b^5} = Eb + \frac{C}{2b} - \frac{B}{2^2 \cdot 2b^3} + \frac{3A}{2^3 \cdot 2 \cdot 3b^5},$$

$$5^a. -\frac{3 \cdot 5n^4}{2^4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4b^7} = Fb + \frac{E}{2b} - \frac{C}{2^2 \cdot 2b^3} + \frac{3B}{2^3 \cdot 2 \cdot 3b^5} - \frac{3 \cdot 5A}{2^4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4b^7},$$

y así sucesivamente.

De la primera equation $b = Ab$, resulta ser $A = 1$:

por la 2^a. será $B = \frac{n-A}{2b^2} = \frac{a^2}{2b^4}$; por ser $n = \frac{a^2+b^2}{b^2}$, $A = 1$:

por la 3^a. será $C = \frac{A-n^2}{2^2 \cdot 2b^4} - \frac{B}{2b^2} = -\frac{a^4 + 4a^2b^2}{2^3 \cdot b^8}$:

por la 4^a. será $E = \frac{3 \cdot (n^3 - A)}{2^3 \cdot 2 \cdot 3b^6} + \frac{B}{2^2 \cdot 2b^4} - \frac{C}{2b^2} =$
 $\frac{a^6 + 4a^4b^2 + 8a^2b^4}{2^4 \cdot b^{12}} :$

por la 5^a. será $F = \frac{3 \cdot 5 \cdot (A - n^4)}{2^4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4b^8} - \frac{3B}{2^3 \cdot 2 \cdot 3b^6} + \frac{C}{2^2 \cdot 2b^4} -$
 $\frac{E}{2b^2} = -\frac{5a^8 + 24a^6b^2 + 48a^4b^4 + 64a^2b^6}{2^7 b^{16}}$, y así suce-

sivamente: luego será $A + By^2 + Cy^4 + Ey^6 + Fy^8 + \&c.$ ó bien

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2} \times y^2 + b^2} \\ \sqrt{(b^2+y^2)} = 1 + \frac{a^2}{2b^4} \times y^2 - \frac{a^4 + 4a^2b^2}{2^3 \cdot b^8} \times y^4 \\ + \frac{a^6 + 4a^4b^2 + 8a^2b^4}{2^4 \times b^{12}} \times y^6 - \frac{5a^8 + 24a^6b^2 + 48a^4b^4 + 64a^2b^6}{2^7 \times b^{16}} \times y^8$$

$\times y^8 + \&c.$ y multiplicando por dy ambos miem-

bros, é integrando, será $S. \frac{dy \sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2} \times y^2 + b^2}}{\sqrt{(b^2+y^2)}} =$

$$AM = y + \frac{a^2}{2b^4} \times \frac{y^3}{3} - \frac{a^4 + 4a^2b^2}{2^3 \cdot b^8} \times \frac{y^5}{5} + \frac{a^6 + 4a^4b^2 + 8a^2b^4}{2^4 \times b^{12}} \times \frac{y^7}{7} - \frac{5a^8 + 24a^6b^2 + 48a^4b^4 + 64a^2b^6}{2^7 \times b^{16}} \times \frac{y^9}{9} .$$

La constante que se debe añadir á la integral es cero; porque sien-

do el arco $AM = a$; lo es tambien la ordenada y .

Si en la expresion (A) del arco AM se supone $\frac{a^2 + b^2}{a^2} \times x^2 - a^2 = az$, se hallarán $dx = \frac{a^2 dz}{2\sqrt{(a^2 + b^2) \times \sqrt{(az + a^2)}}$

y $\sqrt{(x^2 - a^2)} = \frac{a\sqrt{(az - b^2)}}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$: luego será (C) el arco $AM = S. \frac{dz \sqrt{az}}{2\sqrt{(z^2 + \frac{a^2 - b^2}{a}) \times z - b^2}}$.

Por tanto si $a = b$, esto es, en el caso de la Hipérbola equi-

láterá será (D) el arco $AM = S. \frac{dz \sqrt{az}}{2\sqrt{(z^2 - a^2)}}$. Ob-

sérvese que el segundo término del trinomio z^2

+ $\frac{a^2 - b^2}{a} \times z - b^2$ será positivo ó negativo, segun

fuere $a > b$, ó $a < b$.

Finalmente si la Hipérbola JMN (Fig. 27) es-

tá referida á sus asíntotas AG , AF , se hallará con

el mismo método qualquier arco de ella, como

JM : pues que suponiendo las coordenadas $AB = x$,

$BM = y$, y ab el producto constante de dichas coor-

denadas, será $xy = ab$, de donde $y = \frac{ab}{x}$: luego di-

ferenciando se tendrá $dy = -\frac{ab dx}{x^2}$, y $dy^2 = \frac{a^2 b^2 dx^2}{x^4}$.

Por tanto será $S. \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ó bien (E) el arco

$JM = S. \sqrt{(dx^2 + \frac{a^2 b^2 dx^2}{x^4})} = S. \frac{dx \sqrt{(x^2 + \frac{a^2 b^2}{x^2})}}$.

Si en la expresion (E) del arco JM se supone $x^2 = az$, se tendrá el mismo arco (F) $JM = \frac{\sqrt{a}}{a} \times S. z^{\frac{1}{2}} dz \sqrt{(z^2 + b^2)}$.

EXEMPLO III.

225. Sea la curva ANM la Elipse Apoloniana referida á los exes, cuya equacion es $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times$

$(a^2 - x^2)$, suponiendo las coordenadas $CB = x$, $BM = y$, y los semiexes $CD = a$, $CA = b$. Fig. 34.

Siendo $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (a^2 - x^2)$, será $y = \frac{b}{a} \times \sqrt{(a^2 - x^2)}$: luego diferenciando se tendrá dy

$= \frac{b}{a} \times \frac{-x dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, y por consiguiente será dy^2

$= \frac{b^2}{a^2} \times \frac{x^2 dx^2}{a^2 - x^2}$. Por tanto se tendrá $S. \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$

ó bien el arco elíptico (A) $AM = S. \sqrt{(dx^2 + \frac{b^2}{a^2} \times$

$\frac{x^2 dx^2}{a^2 - x^2}) = S. \frac{dx \sqrt{(\frac{b^2}{a^2} \times x^2 + a^2)}}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$

Si en la expresion del arco $S. \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, se

substituye en lugar de dx su valor expresado por

y , dy , tambien se hallará ser (B) el arco DM

$$= S. \frac{dy \sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{b^2}\right) \times y^2 + b^2}}{\sqrt{b^2 - y^2}}.$$

Si en la fórmula (A) se supone $\frac{b^2 - a^2}{a^2} \times x^2 + a^2 = az$, se hallarán $dx = \frac{a^2}{2\sqrt{(b^2 - az)}} \times \frac{dz}{\sqrt{(az - a^2)}}$,

$\sqrt{(a^2 - x^2)} = \frac{a}{\sqrt{(b^2 - az)}} \times \sqrt{(b^2 - az)}$: luego será

$$(C) \quad AM = S. \frac{dz \sqrt{az}}{2\sqrt{(-z^2 + \frac{b^2 + a^2}{a})} \times \sqrt{z - b^2}}.$$

Con el mismo método expuesto en el Exemplo antecedente se hallará ser el arco $AM = x + \frac{b^2}{6a^4} \times$

$$x^3 + \frac{4a^2b^2 - b^4}{4^6a^2} \times x^5 + \frac{8a^4b^2 - 4a^2b^4 + b^6}{112a^4} \times x^7 + \frac{64a^6b^2 - 48a^4b^4 + 24a^2b^6 - b^8}{1152a^6} \times x^9 + \&c.$$

EXEMPLO IV.

At dt

226. Sea la curva FAM la Espiral de Archimedes, cuya equacion es $y = \frac{ru}{p}$. Fig. 33.

Siendo $y = \frac{ru}{p}$, será $u = \frac{p}{r} \times y$: luego diferenciando se tendrá $du = \frac{p}{r} \times dy$, y $du^2 = \frac{p^2}{r^2} \times dy^2$.

Por tanto será $S. \sqrt{\left(\frac{y^2 du^2}{r^2} + dy^2\right)}$ ó bien el arco

$$FAM = S. \sqrt{\left(\frac{p^2}{r^2} \times y^2 dy^2 + dy^2\right)} = \frac{p}{r^2} \times S. dy \sqrt{\left(y^2 + \frac{r^2}{p^2}\right)};$$

pero (125) $S. dy \sqrt{\left(y^2 + \frac{r^2}{p^2}\right)} = \frac{1}{2} y \sqrt{\left(y^2 + \frac{r^2}{p^2}\right)} - \frac{r^2}{2p^2} \times$

$L. \left(y - \sqrt{\left(y^2 + \frac{r^2}{p^2}\right)}\right)$: luego será el arco FAM

$$= \frac{p}{2r^2} \times y \sqrt{\left(y^2 + \frac{r^2}{p^2}\right)} - \frac{r^2}{2p} \times L. \left(y - \sqrt{\left(y^2 + \frac{r^2}{p^2}\right)}\right)$$

+ A . Para determinar la constante A , obsérvese que siendo el arco $FAM = 0$, lo es también la or-

denada y ; por consiguiente será $0 = -\frac{r^2}{2p} \times L. - \frac{r^2}{p}$

+ A , de donde $A = \frac{r^2}{2p} \times L. - \frac{r^2}{p}$. Por tanto se

tendrá el arco $FAM = \frac{py}{2r^2} \sqrt{\left(y^2 + \frac{r^2}{p^2}\right)} - \frac{r^2}{2p} \times$

$L. \left(y - \sqrt{\left(y^2 + \frac{r^2}{p^2}\right)}\right) + \frac{r^2}{2p} \times L. - \frac{r^2}{p} = \frac{py}{2r^2} \sqrt{\left(y^2 + \frac{r^2}{p^2}\right)}$

$- y + \sqrt{\left(y^2 + \frac{r^2}{p^2}\right)}$

$- \frac{r^2}{2p} \times L. - \frac{r^2}{p}$

PROPOSICION XXXII.

227. Qualquiera fórmula diferencial, que consta de una sola variable, y no se integra algebricamente, se puede reducir á la diferencial de diferentes curvas algebricas referidas á sus exes.

Sea Xdx la diferencial propuesta, que se supo-

ne lineal, y en ella expresa X qualquiera funcion
algébrica de x : digo que será $Xdx = D. \frac{t^3 - X^2 t}{Tt - Xv}$

$= ds$, siendo s el arco de las curvas algébricas,
cuyas coordenadas puestas en ángulo recto son

$\frac{(tt - XX)^{\frac{3}{2}}}{Tt - Xv}$, $\frac{Xt^2 - X^3}{Tt - Xv} - X'$, en las quales ex-

presa X' qualquiera funcion de x tomada á arbi-
trio, y T, t, v son tambien funciones algébricas
de x que resultan de las respectivas equaciones

$$T = \frac{dX}{dx}, t = \frac{dX'}{dx}, v = \frac{dt}{dx}.$$

Supóngase $z = \frac{aX}{\sqrt{(tt - XX)}}$; y se tendrán las

equaciones, esto es, $\sqrt{(aa + zz)} = \frac{at}{\sqrt{(tt - XX)}}$,

$$X = \frac{zt}{\sqrt{(aa + zz)}}, Xdx = \frac{ztdx}{\sqrt{(aa + zz)}} = \frac{zdX'}{\sqrt{(aa + zz)}},$$

$$dz = \frac{at^2 dX - aXt dt}{(tt - XX)^{\frac{3}{2}}} = \frac{aTttdx - aXtv dx}{(tt - XX)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{aTtdX' - aXvdX'}{(tt - XX)^{\frac{3}{2}}}, \text{ por ser } Tdx = dX, vdx = dt,$$

$$\text{y } dX' = t dx: \text{ luego serán, } \frac{adX'}{dz} = \frac{(tt - XX)^{\frac{3}{2}}}{Tt - Xv},$$

$$\frac{zdX'}{dz} - X' = \frac{Xt^2 - X^3}{Tt - Xv} - X'; \text{ por consiguiente}$$

$\frac{adX'}{dz}$, $\frac{zdX'}{dz} - X'$ serán las coordenadas de las mismas curvas algébricas expresadas de otro modo, cuyas diferenciales en la hipótesis de dz constante serán $\frac{ad^2X'}{dz}$, $\frac{zd^2X'}{dz}$: luego la suma de los cuadrados de dichas diferenciales será igual al quadrado de la diferencial del arco s de las mismas curvas, esto es, $\frac{(d^2X')^2}{dz^2} \times (a^2 + z^2) = ds^2$, y por consiguiente $\frac{d^2X'}{dz} \times \sqrt{(a^2 + z^2)} = \pm ds$; pero

$$D. \frac{dX' \sqrt{(a^2 + z^2)}}{dz} = \frac{d^2X' \sqrt{(a^2 + z^2)}}{dz} + \frac{zdX'}{\sqrt{(a^2 + z^2)}},$$

$$\text{y se ha demostrado } \frac{zdX'}{\sqrt{(a^2 + z^2)}} = Xdx, \frac{d^2X' \sqrt{(a^2 + z^2)}}{dz} = \pm ds,$$

$$\frac{dX' \sqrt{(a^2 + z^2)}}{dz} = \frac{t^3 - X^2t}{Tt - Xv}: \text{ luego será}$$

$$D. \frac{t^3 - X^2t}{Tt - Xv} = \pm ds + Xdx; \text{ por consiguiente } Xdx$$

$$= D. \frac{t^3 - X^2t}{Tt - Xv} \mp ds. \text{ Que es \&c.}$$

COROLARIO I.

228. Luego integrando la expresión antecedente, se tendrá $S. Xdx = \frac{t^3 - X^2t}{Tt - Xv} \mp s$; y respecto

á que las variables t , v pueden tener sucesivamente diferentes valores á proporcion que se señalen distintos valores á la funcion arbitraria X' con tal que resulte siempre $t > X$, es evidente que la $S. Xdx$ se podrá reducir á la rectificacion de diferentes curvas algébricas.

COROLARIO II.

(229.) Si se supone $X' = x$, serán $t = 1$, $v = 0$, por ser $t = \frac{dX'}{dx}$, $v = \frac{dt}{dx}$: luego en esta suposicion será $S. Xdx = \frac{1-X^2}{T} + s$, y las coordenadas

del arco se reducirán á $\frac{(1-XX)^{\frac{3}{2}}}{T}$, $\frac{X-X^3}{T} - x$, siendo $T = \frac{dX}{dx}$. Adviértase que la primera de dichas coordenadas es imaginaria en el caso que sea

$1 < X^2$.

EXEMPLO I.

(230.) Sea la diferencial propuesta $\frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{(x-a)}}$.

Comparando dicha diferencial con la fórmula Xdx , se tendrá $X = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(x-a)}}$; por consiguiente serán $T = \frac{dX}{dx} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}} \times (x-a)^{\frac{3}{2}}}{x-a}$, y $X^2 = \frac{x}{x-a}$. Su-

póngase $X' = \frac{2}{a} \times x^{\frac{3}{2}} \times \sqrt{x-a}$: luego se ten-

drán las equaciones, $t = \frac{dX'}{dx} = \frac{(4x-3a) \times x^{\frac{1}{2}}}{a\sqrt{x-a}}$,

$$v = \frac{dt}{dx} = \frac{8x^2 - 12ax + 3a^2}{2ax^{\frac{1}{2}} \times (x-a)^{\frac{3}{2}}}, \quad t^2 = \frac{16x^3 - 24ax^2 + 9a^2x}{a^2 \times (x-a)^3}$$

$$t^2 - X^2 = \frac{4x \times (4x-2a)}{a^2}, \quad \text{y } Tt - Xv = \frac{4x}{ax(x-a)}.$$

tanto será (A) $S. - \frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{x-a}} = \frac{(4x-2a) \times (4x-3a) \times \sqrt{(x^2-ax)}}{a^2}$

y las coordenadas serán (B) $\frac{2x(x-a) \times (4x-2a)^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{x}}{a^2}$,

(C) $-\frac{\sqrt{(x^2-ax)} \times (6x-2a)}{a}$. Para determinar el sig-

no que se debe dar al arco &c, búsquese (220) la diferencial del mismo arco, cuyas coordenadas son las variables (B) y (C); y se hallará dicha diferencial igual á $\frac{(12x^2 - 11ax + a^2) \times (4x-3a) \times dx}{a^2 \sqrt{(x^2-ax)}}$. Ahora

si se diferencia dicha equation (A), será $-\frac{dx \sqrt{x}}{\sqrt{x-a}}$

$$= \frac{(32x^2 - 20ax) \times dx \sqrt{(x^2-ax)}}{a^2} + \frac{(16x^2 - 20ax + 6a^2) \times (2x-a) \times dx}{2a^2 \sqrt{(x^2-ax)}}$$

$$= \frac{(12x^2 - 11ax + a^2) \times (4x-3a) \times dx}{a^2 \sqrt{(x^2-ax)}}, \text{ equation idéntica,}$$

si se da el signo menos á la diferencial del arco: luego &c.

EXEMPLO II.

231. Se propone la diferencial $\frac{dx\sqrt{(x^2-a^2)}}{x}$.
Fig. 35.

Comparando la diferencial dada con la fórmula Xdx , se tendrá en este caso $X = \frac{\sqrt{(x^2-a^2)}}{x}$; luego

$$T = \frac{dX}{dx} = a^2 : x^2 \sqrt{(x^2-a^2)}; \text{ y substituidos estos}$$

valores en las fórmulas del Corolario antecedente,

$$\text{se tendrá } S. \frac{dx\sqrt{(x^2-a^2)}}{x} = \sqrt{(x^2-a^2)} \mp s, \text{ y}$$

las coordenadas del arco s se hallarán iguales á

$$\frac{a\sqrt{(x^2-a^2)}}{x^2} - \frac{a^2}{x^2}. \text{ Ahora si se nombran estas coor-}$$

denadas y, z , se tendrán las equaciones $y^2 =$

$$\frac{a^2 \times (x^2-a^2)}{x^2} = a^2 - \frac{a^4}{x^2}, \quad z^2 = \frac{a^4}{x^2}; \text{ por consiguiente}$$

será $y^2 = a^2 - z^2$ equation al círculo, que tiene

el radio $CB = a$, y las coordenadas $CF = z = \frac{a^2}{x}$,

$$FD = y = \frac{a\sqrt{(x^2-a^2)}}{x}; \text{ luego tirando la tangente}$$

BE y la secante CE del arco BD , se tendrá

$$BE = \sqrt{(x^2-a^2)}; \text{ por consiguiente será } (A)$$

$$S. \frac{dx\sqrt{(x^2-a^2)}}{x} = BE \mp BD. \text{ Para determinar el}$$

signo que se debe dar al arco BD , búsquese (220) la diferencial del mismo arco, suponiendo las coor-

denadas $CF = \frac{a^2}{x}$, $FD = \frac{a\sqrt{x^2-a^2}}{x}$, y se hallará

dicha diferencial igual á $\frac{a^2 dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$. Ahora si se

diferencia la equation (A), será $\frac{dx\sqrt{x^2-a^2}}{x}$

$\frac{x dx}{\sqrt{x^2-a^2}} + \frac{a^2 dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$, equation idéntica, si se da

el signo menos á la diferencial del arco: luego se

rá S. $\frac{dx\sqrt{x^2-a^2}}{x} = BE - BD$.

PROPOSICION XXXIII.

232. Si una superficie AMB de qualquiera curva AMN referida al exe ó diámetro AG da una revolucion al rededor de AG ; hallar la diferencial del sólido descrito por dicha superficie. Fig. 25 y 36.

1.º Supóngase la curva AMN (Fig. 25.) referida al exe AG . Tírense, otra ordenada bm , y la recta ME paralela á AG . Si se considera Bb infinitésima, la diferencial del sólido formado por el area ABM será el sólido formado por el area evaneciente $BMmb$; pero (28) el sólido evaneciente descrito por el area $BMmb$ es igual al cilindro

descripto por el rectángulo BE : luego la diferencial del sólido descripto por el área ABM será igual al cilindro descripto por el rectángulo BE al rededor del lado Bb . Supuesta p la periferia del círculo cuyo radio es r , se tendrá que la periferia del círculo descripto con el radio $BM=y$ es igual á $\frac{py}{r}$, y por consiguiente el área de dicho

círculo será igual á $\frac{py^2}{2r}$; pero llamada $AB=x$, es $Bb=dx$: luego el cilindro formado por el rectángulo BE , ó bien la diferencial del sólido formado por la revolucion del área ABM al rededor del exe AG de la curva AMN será igual á $\frac{p}{2r} \times y^2 dx$.

2.º Si la curva AMN se refiere al diámetro AG (Fig. 36.) tírense, otra ordenada bm , las rectas mn y ME paralelas al diámetro AG , y las rectas MD , md , nr , y Ee perpendiculares á dicho diámetro. Siendo, pues, el sólido formado por el área AMB , que da una revolucion al rededor de AG , igual á la suma ó diferencia de los sólidos descriptos por las áreas AMD , MDB , la diferencial del primer sólido será igual á la suma ó diferencia de las diferenciales de los otros dos; pero la diferencial del sólido descripto por el área

ADM es igual al cilindro descrito por el rectángulo evaneciente DH , y por la misma razón la diferencial del sólido descrito por el área MDB es igual al cilindro descrito por el rectángulo evaneciente Do , ó bien al cilindro formado por el rectángulo $dE = Do$; luego la diferencial del sólido formado por el área AMB será igual al cilindro descrito por el rectángulo evaneciente DE que tiene por base el círculo descrito con el radio MD , y por altura la $ME = Bb$. Ahora suponiendo p la periferia del círculo cuyo radio es igual á r , las coordenadas $AB = x$, $BM = y$, y finalmente b el ángulo constante ABM referido al radio constante r , serán $Bb = dx$, $DM = \frac{Sc.bxy}{r^2}$,

y el círculo descrito con el radio MD será igual á $\frac{p \times (Sc.b)^2 \times y^2}{2r^2}$; luego la diferencial del sólido formado por el área ABM , que da una revolución al rededor del diámetro AG de la curva, será igual á $\frac{p \times (Sc.b)^2}{2r^2} \times y^2 dx$. Que es &c.

COROLARIO I.

233. Por tanto si qualquiera curva AMN se refiere al exe AG ; la diferencial del sólido for-

mado por la revolucion de un area AMB al rededor de dicho exe AG será igual al producto de

$\frac{p}{2r}$ (que es la razon constante de la periferia del círculo á su diámetro), del quadrado de la ordenada y , y de la diferencial de la abscisa; y si qualquiera curva AMN se refiere al diámetro AG , la diferencial del sólido descrito por la revolucion de un area AMB al rededor de AG será

igual al producto de la cantidad constante $\frac{p(Sc.b)^2}{2r^3}$

(que es la razon constante de la periferia al diámetro multiplicada por el quadrado del seno del ángulo constante b que forman las coordenadas x , y de la curva, partido este producto por el quadrado del radio constante), del quadrado de la ordenada y , y de la diferencial de la abscisa x .

COROLARIO II.

1234 Luego si qualquiera curva AMN se refiere al exe AG , el sólido descrito por la revolucion de un area AMB al rededor del exe AG

será igual á $\frac{p}{2r} \times 5.y^2 dx$; y si qualquiera curva AMN se refiere al diámetro AG , el sólido descrito por la revolucion de un area AMB al rededor del

dímetro AC será igual á $\frac{P(sc.b)}{2r} \times S.y^2 dx$.

EJEMPLO I.

235. Sea la curva AMN una Parábola Apolo-
miana; cuya equacion es $y^2 = 2ax$, si se suponen
las coordenadas $AB = x$, $BM = y$, y el parámetro
 $= 2a$. Fig. 235.

Por lo demostrado el sólido producido por el
area ABM al rededor del eje AC es igual á $\frac{P}{2r} \times$

$S.y^2 dx$; pero en la curva propuesta es $y^2 = 2ax$;
luego el Parabolóide formado por el area parábó-
lica AMB al rededor del eje AC será igual á
 $\frac{P}{2r} \times S. 2ax dx = \frac{Pa}{2r} \times x^2$. Es evidente que el valor

de la constante que se debe añadir á la integral,
es igual á cero. Pero si se pide determinar el só-
lido formado por el area HMB , supuesta la
abscisa $AM = x = b$, se tendrá, como antes, di-

cho sólido igual á $\frac{P}{2r} \times S.y^2 dx = \frac{P}{2r} \times S. 2ax dx$

$= \frac{Pa}{2r} \times x^2 + A$. Para determinar la constante A ,
advértase que siendo dicho sólido igual á cero,
será $x = b$; luego $0 = \frac{Pa}{2r} \times b^2 + A$, de donde $A =$

$-\frac{pa}{2r} \times b^2$. Por tanto el sólido descrito por el area $HJMB$ al rededor del exe AG de la Parábola es igual á $\frac{pa}{2r} \times x^2 - \frac{pa}{2r} \times b^2 = \frac{pa}{2r} \times (x^2 - b^2)$:

y si el punto H es el focus de la Parábola, y las rectas HB y BM son iguales á una cantidad dada c ; en este caso el parámetro $2a$ de la Parábola que

tiene dichas condiciones, será igual á $\frac{c^2}{\frac{a}{2} + c}$, de

donde $a^2 + 2ac = c^2$, y $a^2 + 2ac + c^2 = 2c^2$: luego $a + c = \sqrt{2c^2}$, y por consiguiente en la fórmula (A) será $a = c \times (\sqrt{2} - 1)$: igualmente en la

misma fórmula se tendrán, $b = \frac{c \times (\sqrt{2} - 1)}{2}$, $x = \frac{c \times (\sqrt{2} - 1)}{2}$

$+ c = \frac{c \times (\sqrt{2} + 1)}{2}$; por consiguiente $b^2 = \frac{c^2 \times (3 - 2\sqrt{2})}{4}$,

$x^2 = \frac{c^2 \times (3 + 2\sqrt{2})}{4}$, y $x^2 - b^2 = c^2 \sqrt{2}$. Por tanto

si el punto H es el focus de la Parábola AMN , y HB es igual á la ordenada $BM = c$; dicha Parábola tendrá su parámetro $2a = 2c \times (\sqrt{2} - 1)$, y el sólido formado por el area $HJMB$ al rededor del

exe AG será igual á $\frac{pa}{2r} \times (x^2 - b^2) = \frac{p}{2r} \times c \times$

$(\sqrt{2} - 1) \times c^2 \sqrt{2} = \frac{p}{2r} \times c^3 \times (2 - \sqrt{2})$.

Si la curva AMN es qualquiera de las infinitas Parábolas contenidas en la equacion $y^{m+n} = a^m x^n$;

serán, $y = a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}}$, $y^2 = a^{\frac{2m}{m+n}} x^{\frac{2n}{m+n}}$: luego $\frac{p}{2r} \times S.y^2 dx$ ó bien el sólido formado por el area ABM

será igual á $\frac{p}{2r} \times S.a^{\frac{2m}{m+n}} x^{\frac{2n}{m+n}} dx = \frac{p}{2r} \times a^{\frac{2m}{m+n}} \times x^{\frac{2n}{m+n} + 1}$

$= \frac{p \times (m+n)}{2r \times (m+n+1)} \times xy^2$. La constante que se debe añadir á la

integral, es igual á cero. Si se suponen, $m=2$, $n=1$, ó bien la Parábola de la equacion $y^3 = a^2 x$, será el sólido

que le corresponde igual á $\frac{3p}{2r \times 3} \times xy^2$. Si se suponen,

$m=1$, $n=2$, ó bien la Parábola de la equacion $y^3 = a x^2$, será el sólido que le corresponde igual

á $\frac{3p}{2r \times 3} \times xy^2$.

EXEMPLO II.

236. Sea la curva DNM la Elipse Apoloniana,

cuya equacion es $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (2ax - x^2)$, si se su-

ponen las coordenadas $DB = x$, $BM = y$, y los semiexes $CD = a$, $CA = b$. Fig. 34.

Siendo $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (2ax - x^2)$, se tendrá $\frac{p}{2r} \times$

$S. y^2 dx$, ó bien el sólido formado por el area DBM al rededor del exe DE , igual á $\frac{p}{2r} \times S. \frac{b^2}{a^2} \times (2ax dx - x^2 dx) = \frac{pb^2}{2ra^2} \times (ax^2 - \frac{x^3}{3})$. Es evidente que la constante que se debe añadir á la integral es igual á cero.

Si se supone $x=2a$, el esferóide formado por la semielipse DAE al rededor del exe $DE=2a$ será igual á $\frac{2pab^2}{3r}$.

EXEMPLO III.

237. Sea la curva AMN la Hipérbola Apolonia referida á los exes, cuya equacion es $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (2ax + x^2)$, si suponen las coordenadas $AB=x$, $BM=y$, y los semiexes $CA=a$, $CP=b$. Fig. 28.

Siendo $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (2ax + x^2)$, se tendrá $\frac{p}{2r} \times S. y^2 dx$, ó bien el sólido formado por la revolucion del area ABM al rededor del exe AG , igual á $\frac{p}{2r} \times S. \frac{b^2}{a^2} \times (2ax dx + x^2 dx) = \frac{pb^2}{2ra^2} \times (ax^2 + \frac{x^3}{3})$. Es evidente que la constante que se debe añadir á la integral, es igual á cero.

EXEMPLO IV.

238. Sea la curva NMF la Hipérbola Apolonia referida á las asíntotas AF , AG , cuya equacion es $xy = ab$, si se suponen las coordenadas $AB = x$, $BM = y$, y ab el producto constante de las mismas coordenadas. *Fig. 27.*

Siendo $xy = ab$, diferenciando se tendrá $y dx - x dy = 0$, porque mientras se aumenta la abscisa x , se disminuye la ordenada y : luego será $y dx = x dy$, de donde $dx = \frac{xdy}{y}$. Por tanto será $\frac{p}{2r} \times S. y^2 dx$, ó bien el sólido formado por la revolucion del area $ABMF$ al rededor de la asíntota AG , igual á $\frac{p}{2r} \times S. \frac{y^2 x dy}{y} = \frac{p}{2r} \times S. y x dy$; pero $xy = ab$: luego será dicho sólido igual á $\frac{p}{2r} \times S. ab dy = \frac{pab}{2r} \times -y + A$ constante. Es evidente que la constante A , que se debe añadir á la integral, es igual á ∞ ; porque siendo dicho sólido igual á cero, es $y = \infty$. Por tanto el sólido formado por el area infinitamente larga $ABMF$ al rededor de la asíntota AG tiene valor infinito, ó mayor que qualquiera dado. En este caso, si se pide el sólido formado por el area $HJMB$ al rededor de la asíntota

AG, supuesta la ordenada $HJ=c$, se tendrá como antes dicho sólido igual á $\frac{pab}{2r} \times -y + A$: y siendo este sólido igual á cero, quando es la ordenada $y=c$, se tendrá $0 = \frac{pab}{2r} \times -c + A$, de donde $A = \frac{pab}{2r} \times c$. Por tanto el sólido descripto por el area *HJMB* al rededor de la asíntota *AG* será igual á $\frac{pab}{2r} \times -y + \frac{pab}{2r} \times c = \frac{pab}{2r} \times (c-y)$. Si se supone $y=0$, el sólido formado por el area infinitamente larga *JHGN* al rededor de la asíntota *AG* será igual á $\frac{pab}{2r} \times c$; pero $ab=AH \times HJ$: luego será dicho sólido igual á $\frac{p}{2r} \times AH \times (HJ)^2$; y siendo esta expresion igual al cilindro formado por el rectángulo *AJ* al rededor de *AH*, se tendrá que el sólido formado por el area infinitamente larga *JHGN* al rededor de la asíntota *AG* es igual al cilindro formado por el rectángulo *AJ* al rededor de la misma asíntota.

Si se pide determinar el sólido formado por el area *CDEJ* al rededor de la asíntota *AF*, llamadas $AD=x$, $DE=y$, $CJ=c$, se hallará con el mismo método expuesto anteriormente que dicho

sólido es igual á $\frac{pab}{2r} \times (c-y)$, y que el sólido formado por el área infinitamente larga $CFEJ$ al rededor de la asíntota AF es igual al cilindro descrito por el rectángulo AJ al rededor de la misma asíntota.

EXEMPLO V.

239. Se pide hallar la equacion á la curva, cuya área dando una revolucion al rededor de su eje,

produce un sólido igual á $\frac{px^2}{2} - \frac{px^3}{6r}$. Fig. 29.

Hágase $\frac{p}{2r} \times S. y^2 dx = \frac{px^2}{2} - \frac{px^3}{6r}$; y diferenciando esta equacion, se tendrá $\frac{p}{2r} \times y^2 dx = px dx - \frac{px^2 dx}{2r} = \frac{2prx dx - x^2 dx}{2r}$: de donde resulta ser $y^2 = 2rx - x^2$, equacion al círculo que tiene el diámetro $AF = 2r$, y las coordenadas $AB = x$, $BM = y$.

PROPOSICION XXXIV.

240. Si el área AFM de qualquiera curva AMN referida al focus F da una revolucion al rededor de la ordenada FA como eje; hallar la diferencial del sólido descrito por dicha área. Fig. 32.

Tírese la ordenada Fm , y haciendo centro en F con el intervalo $FP=r$ describese el arco PHJ , y bájense las perpendiculares MB , HC á la recta AF . Llámense, la ordenada $FM=y$, el arco $HP=u$; y será $MB=\frac{Sc.u \times y}{r}$; por consiguiente la circunferencia del círculo descrito con el radio

MB será igual $\frac{p \times Sc.u \times y}{r^2}$. Ahora si se considera el

ángulo MFm infinitésimo, la diferencial del sólido formado por el area AFM al rededor de AF será el sólido formado por el triángulo evanecente MFm al rededor de la misma AF ; pero este sólido (28) es igual al triángulo evanecente MFm multiplicado por dos tercios de la circunferencia del círculo cuyo radio es MB ; luego la diferencial del sólido que se busca será igual al triángulo evanecente MFm multiplicado por dos tercios de la circunferencia del círculo cuyo radio es MB ; y por

ser (214) el triángulo evanecente $MFm=\frac{ydx}{2}$, y los dos tercios de dicha circunferencia iguales á $\frac{2pSc.u \times y}{3r^2}$, se tendrá la diferencial del sólido des-

cripto por la revolucion del area AFM al rededor de la ordenada AF , como exe, igual á $\frac{ydx}{2} \times$

$$\frac{2pSc.uxy}{3r^2} = \frac{p}{3r^2} \times Sc.u \times y^2 dx. \text{ Que es \&c.}$$

COROLARIO I.

241. Si en la expresion $\frac{p}{3r^2} \times Sc.u \times y^2 dx$ de la diferencial del sólido formado por el area AFM al rededor de AF se substituye (217) $\frac{ydu}{r}$ en lugar

de dx , se tendrá dicha diferencial igual á $\frac{p}{3r^2} \times \frac{Sc.uxy^3 du}{r}$; pero (114) $D.Cc.u = -\frac{Sc.u \times du}{r}$: luego

la diferencial de dicho sólido será tambien igual á $\frac{p}{3r^2} \times -y^3 D.Cc.u$.

COROLARIO II.

242. Luego el sólido formado por la revolucion del area AFM al rededor de la ordenada AF ,

como exe, será igual á $\frac{p}{3r^2} \times S.y^2 Sc.u \times dx$, ó bien igual á $\frac{p}{3r^2} \times S.-y^3 D.Cc.u$.

EXEMPLO.

243. Sea la curva AM un arco del círculo, cuyo radio es $AC=r$. Fig. 29.

Tírese el radio CM ; y el sólido formado por el área ACM al rededor de AC será $\frac{p}{3r^2} \times S$.

— $y^3 D.Cc.u$; pero en el círculo qualquiera ordenada CM , que sale del focus ó centro C , es igual al radio que se nombra r : luego será dicho sólido

igual á $\frac{p}{3r^2} \times S. - r^3 D.Cc.u = -\frac{pr}{3} \times Cc.u + A$.

Para determinar la constante A se tiene que siendo el área $ACM = 0$, será su sólido igual á cero, y el $Cc.u$ será igual al radio r : luego será $0 =$

$-\frac{pr}{3} \times r + A$, de donde $A = \frac{pr^2}{3}$. Por tanto el

sector esférico formado por la revolucion del sector circular ACM al rededor del radio CA es igual

á $-\frac{pr}{3} \times Cc.u + \frac{pr^2}{3} = \frac{pr}{3} \times (r - Cc.u) = \frac{pr}{3} \times AB$.

PROPOSICION XXXV.

244. Si qualquiera curva AMN da una revolucion al rededor de su exe ó diámetro AG ; hallar la diferencial de la superficie descripta por un arco AM de la misma curva. *Fig. 25 y 26.*

1º. Supóngase que la curva AMN se refiere al exe AG . Tírense las ordenadas MB , mb á dicho exe; y si se considera Bb infinitésima ó diferencial

de la abscisa $AB = x$, la diferencial de la superficie descrita por el arco AM al rededor del exe AG será la superficie descrita por el arco evaneciente Mm al rededor del mismo exe; pero (28) esta superficie es igual á Mm multiplicado por la circunferencia del círculo, cuyo radio es $MB = y$: luego la diferencial de la superficie descrita por el arco AM al rededor de AG será igual al arco evaneciente Mm multiplicado por la circunferencia del círculo, cuyo radio es $MB = y$; y por ser $Mm = ds$, y $\frac{py}{r}$ la circunferencia del círculo cuyo radio es $BM = y$, se tendrá la diferencial de la superficie descrita por el arco AM al rededor del exe AG igual á $\frac{p}{r} \times y ds$.

2º. Supóngase la curva AMN referida al diámetro AG . Tírense las ordenadas MB , mb al mismo diámetro; y tomado el radio constante $BC = r$, desde los puntos C y M báxense las perpendiculares CD y MF á AG : y con el mismo raciocinio expuesto en el caso antecedente se demostrará que la diferencial de la superficie descrita por el arco AM , que da una revolucion al rededor del diámetro AG de la curva, es igual al arco evaneciente Mm multiplicado por la circunferencia del círculo, cu-

yo radio es MF : y suponiendo b el ángulo constante ABM de las coordenadas referido al radio $BC = r$, $BM = y$, $AM = s$, serán $Mm = ds$, $MF = \frac{Sc.b \times y}{r}$, y $\frac{pSc.b \times y}{r^2}$ la circunferencia del círculo cuyo radio es MF : luego la diferencial de la superficie descrita por el arco AM , que da una revolución al rededor del diámetro AG de la curva, será igual á $\frac{pSc.b}{r^2} \times y ds$. Que es &c.

COROLARIO I.

245. Por tanto si un arco AM de qualquiera curva AMN da una revolución al rededor del exe de la misma curva, la diferencial de la superficie descrita por dicho arco es igual al producto de $\frac{p}{r}$ (que es la razón constante de la circunferencia del círculo al radio), de la ordenada y , y de ds diferencial de dicho arco: y si la curva AMN se refiere al diámetro AG , la diferencial de la superficie descrita por un arco AM será igual al producto de la cantidad constante $\frac{pSc.b}{r^2}$, de la ordenada y , y de ds diferencial del mismo arco AM .

COROLARIO II.

246. Luego si una curva AMN se refiere al eje AG (*Fig. 25.*), la expresion de la superficie producida por la revolucion de un arco AM al rededor de AG será igual á $\frac{p}{r} \times S. y ds$: y si una curva AMN se refiere (*Fig. 26.*) al diámetro AG , la expresion de la superficie producida por la revolucion de un arco AM al rededor de AG será igual á $\frac{pSc.b}{r^2} \times S. y ds$, si se supone el ángulo $ABM = b$ referido al radio constante r .

EJEMPLO I.

247. Sea la curva AMN una Parábola Apoloniana referida al eje AG , cuya equacion es $y^2 = 2ax$, si se suponen las coordenadas $AB = x$, $BM = y$, y el parámetro $= 2a$. *Fig. 25.*

Siendo la equacion $y^2 = 2ax$, se tendrá (223) $ds = \frac{dy \sqrt{y^2 + a^2}}{a}$: luego $\frac{p}{r} \times S. y ds$, ó bien la superficie descrita por el arco parabólico AM al rededor del eje AG , será igual á $\frac{p}{ar} \times S. y dy \sqrt{y^2 + a^2}$ $= \frac{p}{3ar} \times (y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} + A$. Dicha superficie es ce-

ro, quando la ordenada y es cero; de donde resulta $o = \frac{p}{3ar} \times (a^2)^{\frac{3}{2}} + A$, y por consiguiente la

constante $A = -\frac{pa^2}{3r}$. Por tanto la superficie descrita por el arco parabólico AM al rededor del exe AG será igual á $\frac{p}{3ar} \times (y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{pa^2}{3r}$.

EXEMPLO II.

248. Sea la curva DAE una Elipse Apoloniana referida á los exes, cuya equation es $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (a^2 - x^2)$, si se suponen las coordenadas $CB = x$, $BM = y$, y los semiexes $CD = a$, $CA = b$. Fig. 34.

Siendo la equation á la Elipse $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (a^2 - x^2)$,

se tendrá (225) $dx \sqrt{\left(\frac{b^2 - a^2}{a^2} \times x^2 + a^2\right)}$

$\frac{\sqrt{(b^2 - a^2)}}{a} \times \frac{dx \sqrt{\left(x^2 + \frac{a^4}{b^2 - a^2}\right)}}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, si es $b > a$, y sien-

do $b < a$, será $ds = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a} \times \frac{dx \sqrt{\left(\frac{a^4}{a^2 - b^2} - x^2\right)}}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$: lue-

go $\frac{p}{r} \times S$. y ds , ó bien la superficie producida por la revolucion del arco AM al rededor del exe DE

será en el primer caso de ser $b > a$ igual á $\frac{p\sqrt{(b^2-a^2)}}{ar} \times$

$$S. \frac{b}{a} \times \sqrt{(a^2-x^2)} \times \frac{dx\sqrt{(x^2+\frac{a^4}{b^2-a^2})}}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \frac{pb\sqrt{(b^2-a^2)}}{a^2r} \times$$

$$S. dx\sqrt{(x^2+\frac{a^4}{b^2-a^2})}; \text{ pero (125) } S. dx\sqrt{(x^2+\frac{a^4}{b^2-a^2})}$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{(x^2+\frac{a^4}{b^2-a^2})} - \frac{a^4}{2.(b^2-a^2)} \times L. \left(x - \sqrt{(x^2+\frac{a^4}{b^2-a^2})} + A \right); \text{ luego será dicha superficie igual}$$

$$\text{á } \frac{pb\sqrt{(b^2-a^2)}}{a^2r} \times \left(\frac{x}{2}\sqrt{(x^2+\frac{a^4}{b^2-a^2})} - \frac{a^4}{2x(b^2-a^2)} \times \right.$$

$$L. \left(x - \sqrt{(x^2+\frac{a^4}{b^2-a^2})} + A \right); \text{ y porque siendo el arco } AM = 0, \text{ la dicha superficie y la abscisa } x$$

$$\text{son cero, se tendrá la constante } A = \frac{a^4}{2.(b^2-a^2)} \times$$

$$L. - \frac{a^2}{\sqrt{(b^2-a^2)}}. \text{ Por tanto si es } b > a, \text{ la superficie}$$

descripta por el arco AM al rededor del exe DE

$$\text{será igual á } \frac{pb\sqrt{(b^2-a^2)}}{a^2r} \times \left(\frac{x}{2}\sqrt{(x^2+\frac{a^4}{b^2-a^2})} - \right.$$

$$\left. - \frac{a^4}{2x(b^2-a^2)} \times L. - \frac{x + \sqrt{(x^2+\frac{a^4}{b^2-a^2})}}{a^2 : \sqrt{(b^2-a^2)}} \right). \text{ Y en el se-}$$

gundo caso, esto es, quando sea $b < a$, $\frac{p}{r} \times S. yds,$

ó bien la superficie descripta por el arco AM al

rededor del eje DE será igual á $\frac{p\sqrt{(a^2-b^2)}}{ar} \times S. \frac{b}{a} \times$

$$\sqrt{(a^2-x^2)} \times \frac{dx \sqrt{(\frac{a^4}{a^2-b^2}-x^2)}}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \frac{pb\sqrt{(a^2-b^2)}}{a^2r} \times$$

$$S. dx \sqrt{(\frac{a^4}{a^2-b^2}-x^2)}; \text{ pero (120) } S. dx \sqrt{(\frac{a^4}{a^2-b^2}-x^2)}$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{(\frac{a^4}{a^2-b^2}-x^2)} + \frac{a^2}{2\sqrt{(a^2-b^2)}} \times u + A, \text{ sien-}$$

do u un arco del círculo, que tiene el seno x , y el radio $= \frac{a^2}{\sqrt{(a^2-b^2)}}$: luego siendo $a > b$, la superfi-

cie descripta por el arco AM al redor del eje

$$DE \text{ será igual á } \frac{pb\sqrt{(a^2-b^2)}}{a^2r} \times \left(\frac{x}{2} \sqrt{(\frac{a^4}{a^2-b^2}-x^2)} \right.$$

$$\left. + \frac{a^2}{2\sqrt{(a^2-b^2)}} \times u + A \right); \text{ y porque si es el arco}$$

$AM = 0$, tambien la dicha superficie, la x , y el arco circular u son cero, se tendrá la constante

$$A = 0.$$

EXEMPLO III.

249. Sea la curva AMN la Hipérbola Apolonia referida á los exes SA , PQ , cuya equacion

es $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (x^2 - a^2)$, si se suponen las coordena-

das $CB = x$, $BM = y$, y los semiexes $CA = a$,

$CQ = b$. Fig. 28.

× Siendo la equacion á la Hipérbola $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times$

$$(x^2 - a^2), \text{ será (224) } ds = \frac{dx \sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2} \times x^2 - a^2\right)}}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{a} \times \frac{dx \sqrt{\left(x^2 - \frac{a^4}{a^2 + b^2}\right)}}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} : \text{ luego } \frac{p}{r} \times S. y ds,$$

ó bien la superficie descripta por el arco AM al rededor del exe CB será igual á $\frac{p \sqrt{(a^2 + b^2)}}{ar} \times S. \frac{b}{a} \times$

$$\sqrt{(x^2 - a^2)} \times \frac{dx \sqrt{\left(x^2 - \frac{a^4}{a^2 + b^2}\right)}}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} = \frac{pb \sqrt{(a^2 + b^2)}}{a^2 r} \times$$

$$S. dx \sqrt{\left(x^2 - \frac{a^4}{a^2 + b^2}\right)}; \text{ pero (125) } S. dx \sqrt{\left(x^2 - \frac{a^4}{a^2 + b^2}\right)}$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{\left(x^2 - \frac{a^4}{a^2 + b^2}\right)} + \frac{a^4}{2 \times (a^2 + b^2)} \times L. \left(x -$$

$$\sqrt{\left(x^2 - \frac{a^4}{a^2 + b^2}\right)}\right); \text{ luego dicha superficie será igual}$$

$$\text{á } \frac{pb \sqrt{(a^2 + b^2)}}{a^2 r} \times \left(\frac{x}{2} \sqrt{\left(x^2 - \frac{a^4}{a^2 + b^2}\right)} + \frac{a^4}{2 \times (a^2 + b^2)} \times$$

$$L. \left(x - \sqrt{\left(x^2 - \frac{a^4}{a^2 + b^2}\right)}\right) + A\right); \text{ y porque si}$$

es el arco $AM = 0$, la dicha superficie es cero, y

la abscisa $x = a$, será la constante $A = -\frac{a^2 b}{2 \sqrt{(a^2 + b^2)}}$

$$- \frac{a^4}{2 \times (a^2 + b^2)} \times L. \left(a - \frac{ab}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}\right). \text{ Por tanto la su-}$$

perficie descripta por el arco AM al rededor del

exe CB será igual á $\frac{pb\sqrt{(a^2+b^2)}}{a^2r} \times \left(\frac{x}{2} \sqrt{(x^2 - \frac{a^2}{a^2+b^2})} - \frac{a^2b}{2\sqrt{(a^2+b^2)}} + \frac{a^2}{2x(a^2+b^2)} \times L. \frac{x - \sqrt{(x^2 - \frac{a^2}{a^2+b^2})}}{a - ab : \sqrt{(a^2+b^2)}} \right)$.

EXEMPLO IV.

250. Se pide hallar la superficie del Cono $BADC$.

Fig. 37 y 38.

1º. Supóngase $BADC$ un cono recto (*Fig. 37.*) que tiene su exe BL perpendicular á la base DI . Considérese el lado BC del triángulo rectángulo BLC en las posiciones BE y BD : y siendo el arco DE evanecente, será el triángulo BDE rectángulo en D igual á $\frac{1}{2}DE \times BD$ ó bien á $\frac{1}{2}DE \times BC$: luego si se considera la superficie de dicho cono dividida en triángulos evanecentes, cuyas bases son los arcos evanecentes de la periferia DI , se tendrá que la superficie del cono recto es igual á $\frac{1}{2}BC \times DI$ circunferencia de la base.

2º. Sea el cono $BADC$ escaleno (*Fig. 38.*) cuyo exe BL es obliquo á la base DI . Córtese dicho cono con el plano triangular ABC , que pase por el exe BL , y sea perpendicular á la base DI . Tírense, la perpendicular BG al plano DI

prolongado, si es necesario, la tangente HDF á qualquiera punto D de la circunferencia DI , la recta GF perpendicular á HF , las rectas BD y BE , el radio LD , y la DK perpendicular al diámetro CA . Nómbrense, el radio $LA = a$, $LG = b$, la altura $BG = c$, y $LK = x$. Siendo, pues, BG perpendicular al plano HGF , será tambien el plano FBG perpendicular á dicho plano HGF , pero HF es perpendicular á GF comun seccion de dichos dos planos: luego será HF perpendicular á FB en el punto F . Por tanto, si se considera el arco DE evanecente, el triángulo evanecente DBE elemento de la superficie cónica será igual á $\frac{1}{2} DE \times BF$. Por la semejanza de los triángulos DKL , HDL son proporcionales LK : $LD = LD : LH$, esto es, $x : a = a : LH = \frac{a^2}{x}$; y por la semejanza de los triángulos LDH , GFH son proporcionales $HL : LD = HG : GF$, esto es, $\frac{a^2}{x} : a = \frac{a^2}{x} + b : GF = \frac{a^2 + bx}{x}$; luego será $BF = \frac{a^2 + bx}{x}$; luego el triángulo evanecente DBE elemento de

$$= \sqrt{((BG)^2 + GF)^2} = \sqrt{c^2 + \left(\frac{a^2 + bx}{x}\right)^2};$$

pero (117) el arco evanecente $DE = - \frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$; luego el triángulo evanecente DBE elemento de

la superficie cónica será igual á $\frac{adx}{2\sqrt{(a^2-x^2)}} \times \sqrt{(c^2 + \frac{(a^2+bx)^2}{a^2-x^2})}$; é integrando se tendrá la superficie cónica igual á $S. \frac{dx\sqrt{(a^2c^2 + (a^2+bx)^2)}}{2\sqrt{(a^2-x^2)}} = S. \frac{dx\sqrt{(a^2c^2 + a^4 + 2a^2bx + b^2x^2)}}{2\sqrt{(a^2-x^2)}}$. Adviértase que esta in-

tegral no se ha podido reducir ni á las quadraturas, ni á las rectificaciones de las Secciones cónicas.

EXEMPLO V.

251. Se pide hallar la superficie del Cilindro AKC . Fig. 39 y 40.

1º. Supóngase AKC un cilindro recto (Fig. 39.) que tiene su exe HG perpendicular á la base BKC . Considérese el lado DC del rectángulo HC en las posiciones PL y OK , mientras dicho lado describe la superficie cilíndrica: luego serán las rectas OK , PL perpendiculares á la base KR del cilindro; y considerando el arco KL evaneciente, resultará el rectángulo OL igual á $PL \times LK$, ó bien á $DC \times LK$. Por tanto si se considera la superficie de dicho cilindro dividida en rectángulos evanecientes, cuyas bases son los arcos evanecientes de la periferia del círculo $BRCK$, se tendrá que la superficie del cilindro recto es igual

á $DC \times CKBRC$ circunferencia de la base.

2º. Sea AKC un cilindro escaleno (*Fig. 40.*) cuyo exe HG es obliquo á la base RK . Córtese dicho cilindro con un plano MQ perpendicular á dicho exe; y la linea $EMFQ$, comun seccion del plano MQ y de la superficie cilindrica, será una Elipse, lo qual se demuestra con el mismo método expuesto (I. 613.) relativamente al cono. Ahora considérese la recta DC , que describe la superficie cilindrica en las posiciones PL y OK , las quales serán perpendiculares á la Elipse MQ , por ser paralelas al exe HG : luego si se considera el arco MN evanecente, será el paralelógramo OL evanecente igual á $PL \times MN$ ó bien á $DC \times MN$: y así dividida la superficie de dicho cilindro en paralelógramos evanecentes cuyas alturas son los arcos evanecentes de la Elipse MQ , será la superficie del cilindro escaleno igual á $DC \times MQ$ perímetro de la referida Elipse.

EXEMPLO VI.

252. Se pide determinar la equacion á la curva que, dando una revolucion al rededor de su exe, produce una superficie igual á $\frac{P}{r} \times (a^2 - ay)$.

Fórmese la equacion $\frac{P}{r} \times S$. y $ds = \frac{P}{r} \times (a^2 - ay)$:

luego será $y ds = -a dy$; pero (220) $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$: luego $y \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = -a dy$; y elevando ambos miembros al quadrado, se tendrá $y^2 dx^2 + y^2 dy^2 = a^2 dy^2$, de donde $dx^2 = \frac{(a^2 - y^2) \times dy^2}{y^2}$, y $dx = \pm \frac{dy \sqrt{(a^2 - y^2)}}{y}$ equacion á la curva llamada Tratoria, de la qual se hablará en lo sucesivo.

PROPOSICION XXXVI.

253. Si qualquiera curva AMN referida al focus F da una revolucion al rededor de la ordenada AF como exe, hallar la diferencial de la superficie descripta por un arco AM de dicha curva. *Fig. 32.*
 Supónganse, la construccion y las denominaciones dadas antes (240), esto es, $FP = r$, el arco circular $PH = u$, la ordenada $FM = y$: y considerando el ángulo MFm infinitésimo, la diferencial de la superficie descripta por el arco AM al rededor de AF será la superficie descripta por el arco evanecente Mm al rededor de la misma AF ; pero (28) esta superficie es igual al arco evanecente Mm multiplicado por la circunferencia del circulo cuyo radio es MB : luego la diferencial de la superficie descripta por el arco AM al rededor de AF será igual al arco evanecente Mm mul-

tiplicado por la circunferencia del círculo cuyo radio es MB ; y siendo $Mm = ds$, y $\frac{p \times Sc. uxy}{r^2}$ la circunferencia del círculo cuyo radio es $MB = \frac{Sc. uxy}{r}$, se tendrá que la diferencial de la superficie descripta por el arco AM al rededor de AF es igual á $\frac{p}{r^2} \times Sc. u \times y ds$. Que es &c.

COROLARIO I.

254. Si en la expresión $\frac{p}{r^2} \times Sc. u \times y ds$ de la diferencial de la superficie descripta por el arco AM al rededor de AF se substituye (222) en lugar de ds su valor $\sqrt{\left(\frac{y^2 du^2}{r^2} + dy^2\right)} = \frac{\sqrt{(y^2 du^2 + r^2 dy^2)}}{r}$, se tendrá la diferencial igual á $\frac{p}{r^3} \times y Sc. u \times \sqrt{(y^2 du^2 + r^2 dy^2)}$.

COROLARIO II.

255. Luego la superficie descripta por un arco AM de qualquiera curva AMN referida al focus F al rededor de la ordenada AF será igual á $\frac{p}{r^2} \times S. Sc. u \times y ds$, ó bien igual á $\frac{p}{r^2} \times S. y Sc. u \times \sqrt{(y^2 du^2 + r^2 dy^2)}$.

EJEMPLO.

256. Sea la curva AM un arco de círculo, cuyo radio AC es igual á r . Fig. 29.

Por lo demostrado la superficie descripta por el arco AM al rededor de AC es igual á $\frac{p}{r^2} \times S. Sc. u \times y ds$; pero en el círculo $CAMN$ qualquiera ordenada y , que sale del focus ó centro C , es igual al radio r , y ademas es $ds = du$: luego

será la superficie que se pide igual á $\frac{p}{r^2} \times S. r Sc. u \times du = p \times S. \frac{Sc. u \times du}{r}$; pero (114) $-\frac{Sc. u \times da}{r} = D. Cc. u$:

luego la superficie descripta por el arco AM al rededor del radio AC será igual á $p \times S. - D. Cc. u = -p \times Cc. u + A$. La constante A es igual á pr ; porque es $Cc. u = r$, siendo dicha superficie igual á cero. Por tanto la superficie esférica descripta por el arco circular AM al rededor del radio AC será igual á $-p \times Cc. u + pr = p \times (r - Cc. u)$, esto es, igual á la periferia del círculo máximo multiplicada por AB seno verso del arco $AM = u$.

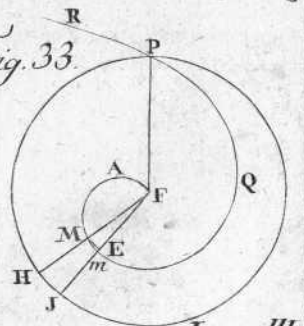
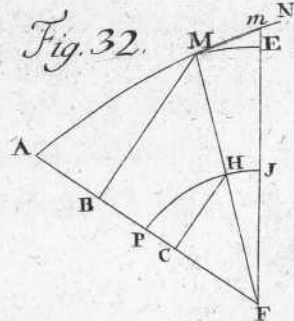
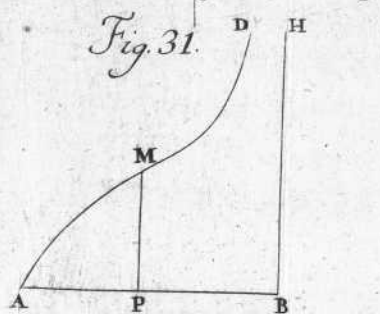
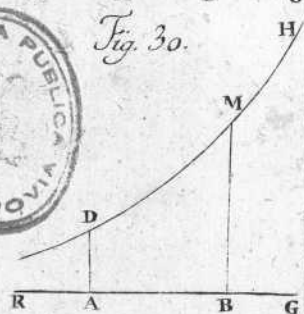
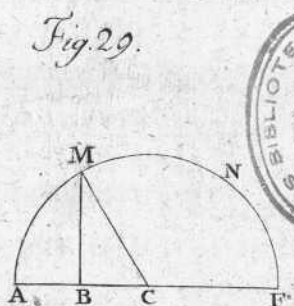
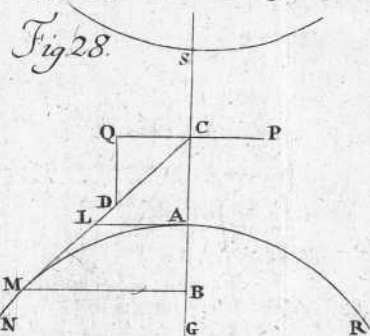
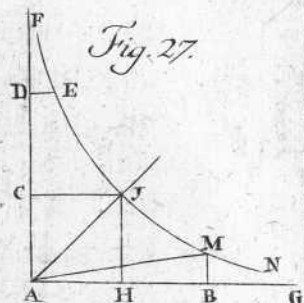
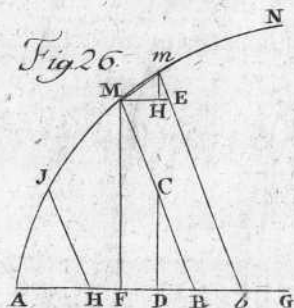
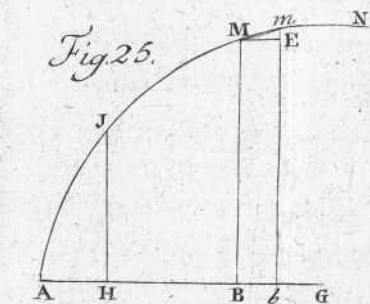
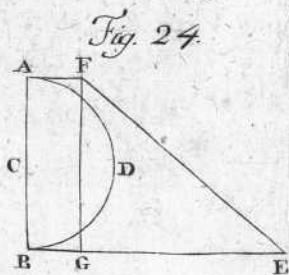
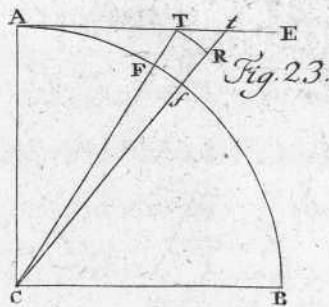
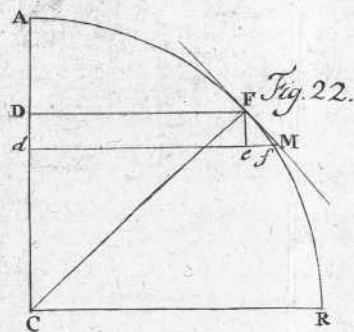
De las Fórmulas diferenciales, con las quales se determinan las Subtangentes, Tangentes, Normales, Subnormales, Radios del Osculo, Evolutas, y las Máximas ó Mínimas Ordenadas, en las Curvas referidas á los exes, diámetros, ó focus.

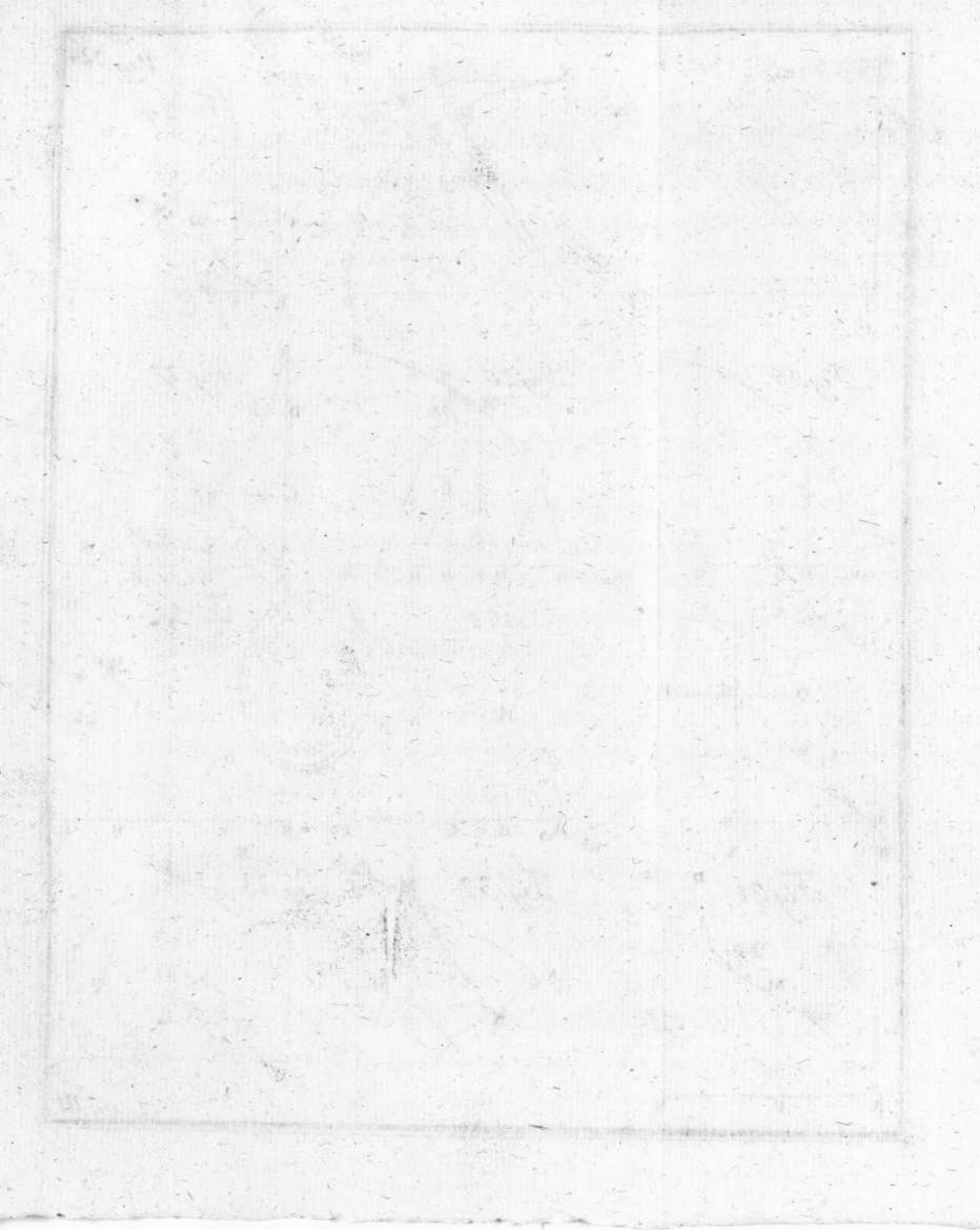
PROPOSICION XXXVII.

257. Si en un punto M de qualquiera curva AMN referida al exe ó diámetro AG es tangente la recta QMT prolongada hasta encontrar AG en T , y la recta MB es ordenada á dicho exe ó diámetro: digo que llamadas $AB = x$, $BM = y$, $AM = s$, la subtangente BT es igual á la expresion diferencial $\frac{ydx}{dy}$, y la tangente $MT = \frac{yds}{dy}$.

Fig. 41 y 42.

Tírense, la ordenada $b m$ prolongada, si es necesario, hasta encontrar la tangente en Q , y la recta ME paralela á AG . Si se considera Bb evanescente ó diferencial de la abscisa AB , serán, $ME = Bb = dx$, $Em = dy$, $Mm = ds$, y (24) la razon de $mE : ME$ igual á la de $QE : EM$; pero





por la semejanza de los triángulos QEM , MBT es $QE:EM=MB:BT$: luego será $mE:ME=MB:BT$, esto es, $dy:dx=y:BT$; por con-

siguiente se tendrá $BT=\frac{ydx}{dy}$ en la suposicion que

se aumentan las variables x , y ; y si mientras se aumenta la variable x , se disminuye la y , será BT

$=\frac{ydx}{-dy}=-\frac{ydx}{dy}$. Con el mismo método se de-

mostrará ser $Em:Mm=BM:MT$, esto es, $dy:$

$ds=y:MT$, y por consiguiente $MT=\frac{yds}{dy}$. Que

es &c.

COROLARIO I.

258. Luego dada la curva AMN , se determinará la subtangente BT , si por medio de la equacion á la curva se halla el valor de la fraccion

$\frac{dx}{dy}$ por las variables x , y , y dicho valor se substituye en la expresion de la subtangente $\frac{ydx}{dy}$. Igual-

mente si se determina el valor de $\frac{ds}{dy}$ por las varia-

bles finitas x , y , y se substituye en la expresion $\frac{yds}{dy}$, se tendrá la tangente MT .

COROLARIO II.

259. En una curva dada, hallada la razon de $dy : dx$, que llamo en general $X : Z$, se determinará la posicion de la tangente MT en qualquier punto M de la misma curva, esto es, los ángulos BMT y BTM , que forman la ordenada y el diámetro con la tangente; porque siendo $dy : dx = X : Z$, y por lo demostrado (257) $dy : dx = MB : BT$, será $X : Z = MB : BT$: luego si se forma el triángulo CDF con el ángulo $CDF = TBM$, y con los lados $DF = X$, $CD = Z$, resultará el triángulo CDF semejante al triángulo TBM , y en dicho triángulo se determinarán los senos de los ángulos CFD , DCF , que son respectivamente iguales á los BMT , BTM .

COROLARIO III.

260. Si se pide hallar la posicion de la tangente MT respecto á un punto determinado en una curva dada, en la razon que tiene $dy : dx$, y que se ha llamado antes $X : Z$, se substituirán los valores de las coordenadas x , y , que tienen respecto de dicho punto; y si hechas estas substituciones, resulta,

1º. $dy : dx = a : b$, esto es, como qualquier

cantidad finita á otra , se determinará la posicion de la tangente ; y siendo finito el valor de la ordenada , será finita la subtangente que pertenece al punto dado en la curva propuesta :

2°. $dy : dx = 0 : a$, será infinita dicha subtangente , y por consiguiente la tangente será paralela al diámetro de la curva , ó este diámetro será tangente á la curva , si la ordenada y es cero :

3°. $dy : dx = a : 0$, la subtangente será cero , y por consiguiente la ordenada dada será tangente á la curva , ó la tangente será paralela á las ordenadas , si la ordenada dada es cero :

4°. $dy : dx = 0 : 0$, se hallarán por el método dado (54) las razones que tiene $dy : dx$, y se determinarán las subtangentes al punto que pertenece á dos , tres , &c. ramos de la curva propuesta , si $dy : dx$ tiene dos , tres , &c. razones.

COROLARIO IV.

261. Del segundo caso del Corolario antecedente se infiere el método para determinar en una curva dada el punto que tiene la tangente paralela al diámetro ; esto es , se diferenciará la equacion á la curva , y se supondrá $dy = 0$, y despues por medio de la equacion que resulta , y de la equacion á la curva , se determinarán los valores de

la abscisa y de la ordenada correspondientes al punto que se busca en la curva propuesta. Si el valor de la ordenada ha resultado igual á cero, el mismo diámetro será tangente á la curva.

COROLARIO V.

262. También del caso tercero del Corolario III. se infiere el método para determinar en una curva dada el punto del que es tangente la ordenada que le corresponde, ó bien el punto que tiene su tangente paralela á las ordenadas; esto es, se diferenciará la equacion á la curva, y se supondrá $dx = 0$, y despues por medio de la equacion que resulta, y de la equacion á la curva, se determinarán los valores de la ordenada y de la abscisa correspondientes al punto que se busca en la curva propuesta. Si el valor de la ordenada es cero, el valor de la abscisa x dará el punto de la curva que tiene la tangente paralela á las ordenadas.

ESCOLIO.

263. Obsérvese que, determinada la subtangente BT en términos finitos, se determinará el valor de la tangente MT por la resolucion del triángulo MBT : pues en él son dados los lados MB , BT , y el ángulo B formado por las coordenadas

de la curva. Si dicho ángulo B es recto, será $MT = \sqrt{((MB)^2 + (BT)^2)}$. También obsérvese que, si se llaman t la subtangente, y T la tangente, se tendrán las equaciones $\frac{ydx}{dy} = t$, $\frac{yds}{dy} = T$: luego serán $ydx = tdy$, $ds = \frac{Tdy}{y}$; por consiguiente $S.ydx = S.tdy$, $s = S.\frac{Tdy}{y}$, cuyas fórmulas pueden ser útiles en los casos particulares para determinar el area y el arco de una curva dada, en quien las cantidades t , T están dadas por y , ó bien son iguales á cantidades constantes.

EXEMPLO I.

264. Sea la curva AMN la Parábola Apoloniana referida al diámetro AG , cuya equacion es $y^2 = 2ax$, si se suponen la abscisa $AB = x$, la ordenada $BM = y$, y la quadrupla distancia del vértice A al focus F , esto es, $4AF = 2a$. Fig. 43.

Siendo $y^2 = 2ax$, será $2ydy = 2adx$; por consiguiente se tendrá $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{a}$. Por tanto si se substituye $\frac{y}{a}$ en lugar de $\frac{dx}{dy}$ en la expresion de la subtangente $\frac{ydx}{dy}$, se tendrá la subtangente $BT = \frac{y^2}{a} = 2x$, por ser $y^2 = 2ax$: luego la subtangente en

la Parábola siempre es dupla de la abscisa.

Por ser $y dy = a dx$, será $dy : dx = a : y$; pero $dy : dx = BM : BT$; luego será $BM : BT = a : y$. Ahora si se forma el triángulo YSZ , de suerte que sean $SY = a$, $SZ = BM = y$, y el ángulo $YSZ = MBT$, resultará el triángulo YSZ semejante al triángulo MBT , y en él será $Sc. SYZ =$

$$\frac{Sc.b \times y}{\sqrt{(a^2 + \frac{2aCc.b}{r} \times y + y^2)}}, \quad Sc. SZY = \frac{a \times Sc.b}{\sqrt{(a^2 + \frac{2aCc.b}{r} \times y + y^2)}},$$

si se llama b el ángulo formado por las coordenadas: luego en qualquier punto M de la curva propuesta, quedarán determinados los ángulos BMT , BTM , por ser estos respectivamente iguales á los ángulos SYZ , SZY . Por exemplo, si se piden los ángulos BMT , BTM , supuesta la ordenada $BM = y = a$, será $Sc. BMT =$

$$\frac{a \times Sc.b}{\sqrt{(a^2 + \frac{2a^2Cc.b}{r} + a^2)}} =$$

$$\frac{Sc.b}{\sqrt{(2 + \frac{2Cc.b}{r})}}, \quad \text{y} \quad Sc. BTM = \frac{a \times Sc.b}{\sqrt{(a^2 + \frac{2a^2Cc.b}{r} + a^2)}}$$

$$= \frac{Sc.b}{\sqrt{(2 + \frac{2Cc.b}{r})}}; \text{ por consiguiente en dicha supo-}$$

sición serán iguales los ángulos BMT , BTM .

Finalmente por la semejanza de los triángulos

YSZ, *MBT* será $SY:YZ = BM:MT$, esto es,

$$a: \sqrt{\left(a^2 + \frac{2aCc.b}{r} \times y + y^2\right)} = y:MT; \text{ por con-}$$

siguiente se tendrá la tangente $MT = \frac{y}{a} \sqrt{\left(a^2 + \frac{2aCc.b}{r} \times y + y^2\right)}$.

EXEMPLO II.

265. Sea la curva *AMN* la Elipse Apoloniana referida á los diámetros conjugados *AG*, *SH*, cuya equacion es $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (2ax - x^2)$, si se suponen la ábscisa $AB = x$, la ordenada $BM = y$, $AG = 2a$, $HS = 2b$. *Fig. 44.*

Diferenciando la equacion dada, se tendrá $2ydy = \frac{b^2}{a^2} \times (2adx - 2xdx)$, por consiguiente $\frac{dx}{dy} =$

$\frac{a^2}{b^2} \times \frac{y}{a-x}$. Por tanto si se substituye el valor ha-

llado de $\frac{dx}{dy}$ en la fórmula $\frac{ydx}{dy}$, se tendrá la sub-

tangente $BT = \frac{a^2}{b^2} \times \frac{y^2}{a-x} = \frac{2ax - x^2}{a-x}$, por ser $y^2 =$

$\frac{b^2}{a^2} \times (2ax - x^2)$: luego será $a-x:2a-x = x:$

BT , esto es, $BC:BG = AB:BT$.

Si se pide determinar en la curva propuesta el

punto que tiene la tangente paralela al diámetro AG , en la equacion diferenciada de dicha curva se supondrá $dy = 0$; por consiguiente se tendrá

$$0 = \frac{b^2}{a^2} \times (2a dx - 2x dx); \text{ de donde } a = x; \text{ y}$$

substituyendo a en lugar de x en la equacion á la curva, será $y = \pm b$: luego á las coordenadas $x = a$, $y = \pm b$ corresponde el punto que se busca, esto es, las tangentes en los puntos H y S son paralelas al diámetro AG .

EXEMPLO III.

266. Sea la Hipérbola AMN referida á los diámetros conjugados AG , HE , cuya equacion es

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (2ax + x^2), \text{ si se suponen } AB = x,$$

$$BM = y, AG = 2a, HE = 2b. \text{ Fig. 45.}$$

Diferenciando la equacion á la curva propues-

$$\text{ta, se tendrá } 2y dy = \frac{b^2}{a^2} \times (2a dx + 2x dx); \text{ por}$$

$$\text{consiguiente } \frac{dx}{dy} = \frac{a^2}{b^2} \times \frac{y}{a+x} : \text{ luego substituyendo}$$

$$\text{este valor en la expresion } \frac{y dx}{dy}, \text{ se tendrá } \frac{y dx}{dy} \text{ ó}$$

$$\text{bien la subtangente } BT = \frac{a^2}{b^2} \times \frac{y^2}{a+x} = \frac{2ax + x^2}{a+x},$$

$$\text{por ser } y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (2ax + x^2); \text{ por consiguiente}$$

Fig. 34.

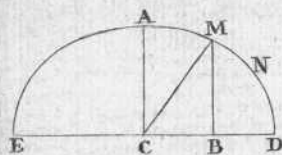


Fig. 35.

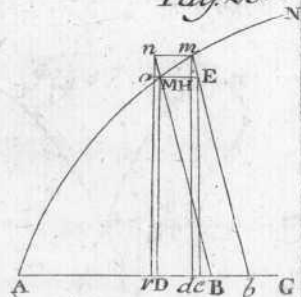
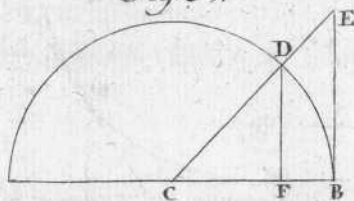


Fig. 37.

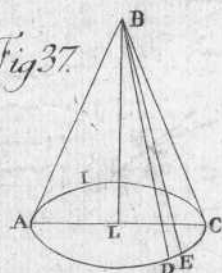


Fig. 38.

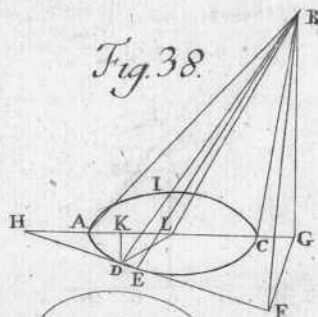


Fig. 36.

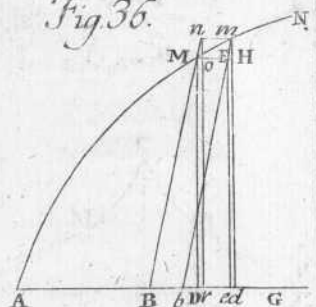


Fig. 39.

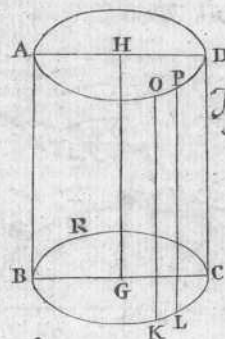


Fig. 40.

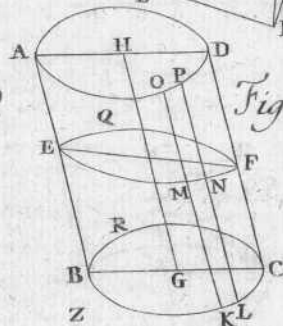


Fig. 41.

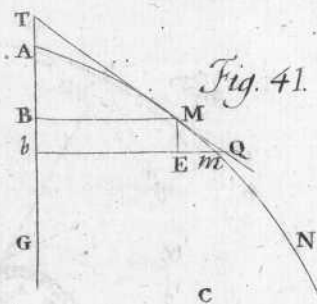


Fig. 44.

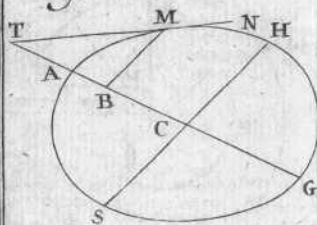


Fig. 43.

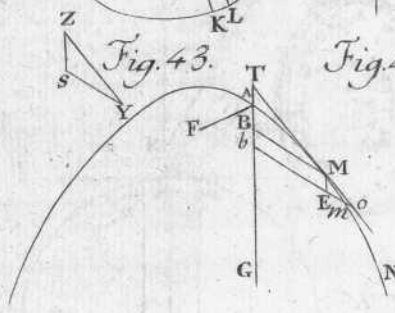
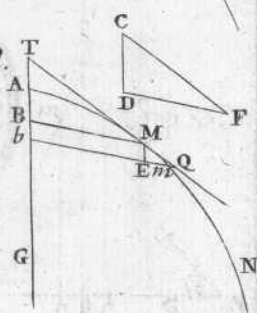
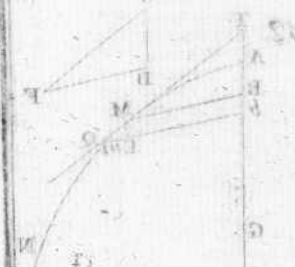
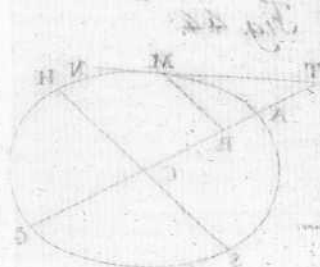
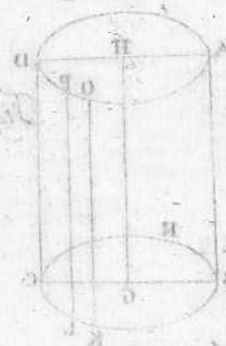
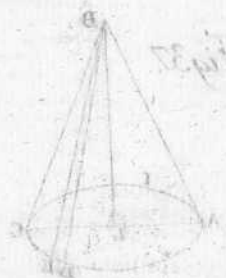
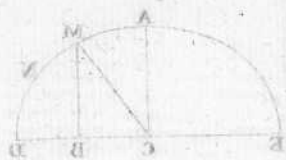


Fig. 42.





$a+x:2a+x=x:BT$, esto es, $CB:GB=AB:BT$.

Si en la equacion diferenciada de la curva se supone $dx=0$, resultará $y=0$: y siendo $y=0$, serán $x=a$, $x=-2a$: luego los puntos A y G de las Hipérbolas opuestas tendrán sus tangentes paralelas á las ordenadas.

EXEMPLO IV.

267. Sea la curva NMF la Hipérbola Apoloniana referida á las asíntotas AF , AG , cuya equacion es $xy=ab$, si se suponen las coordenadas $AB=x$, $BM=y$, y ab el producto constante de ellas. *Fig. 46.*

Diferenciando la equacion á la curva propuesta, se tendrá $x \times -dy + ydx = 0$: se pone el signo menos á la dy ; porque creciendo la abscisa x , se disminuye la ordenada y : luego será $ydx = xdy$, y por consiguiente $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$: luego substituyendo este valor en la expresion $-\frac{ydx}{dy}$, se tendrá $-\frac{ydx}{dy}$ ó bien la subtangente $BT = -x$, esto es, dicha subtangente será igual á la abscisa, pero tomada en parte contraria.



EXEMPLO V.

268. Sea la curva $MANAm$ de la equacion $x^4 - a y x^2 + b y^3 = 0$, la qual curva tiene tres ramos MAN , mAn , nAN , que se cortan en el punto A ; y sea Gg el exe de la misma curva, en quien las abscisas x positivas empiezan desde el punto A hácia G . Fig. 47.

Diferenciando la equacion propuesta, será $4x^3 dx - 2a y x dx - a x^2 dy + 3b y^2 dy = 0$, de donde resulta $\frac{dx}{dy} = \frac{ax^2 - 3by^2}{4x^3 - 2ayx}$; y substituido este valor en la expresion $\frac{y dx}{dy}$, se tendrá la subtangente igual

$$\frac{ax^2 y - 3by^3}{4x^3 - 2ayx}.$$

Ahora si se pide determinar la posicion de la tangente en el punto A , el valor hallado de la fraccion $\frac{dx}{dy}$ será igual á 0, porque en el punto A son $x = 0$, $y = 0$: luego para determinar en este caso el valor de $\frac{dx}{dy}$ se diferenciará (54) la equacion $4x^3 dx - 2a y x dx - a x^2 dy + 3b y^2 dy = 0$ en la suposicion que dx , dy son constantes; por lo que se tendrá la equacion $12x^2 dx^2 - 2a y dx^2 - 4a x dx dy + 6b y dy^2 = 0$, de la qual se deduce

tambien $\frac{dx}{dy} = 0$, en la misma suposicion que x , y son iguales á cero. Finalmente si se diferencia esta última equacion en la suposicion que dx , dy son constantes, se tendrá $24xdx^3 - 6ady \times dx^2 + 6bdy^3 = 0$, en la qual supuesta $x=0$, se desvanece el primer término, y queda la equacion $-6a dy \times dx^2 + 6bdy^3 = 0$, ó bien $bdy^3 = a dy \times dx^2$: luego será $dy = 0$, y $dy = \pm \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \times dx$; por consiguiente $dy:dx$ tiene tres razones, por las quales se determina la posicion de las tres tangentes correspondientes al punto A : pues, siendo $dy=0$, el exe Gg será (261) tangente del ramo nAN en el punto A ; y por ser $dy:dx = \sqrt{a}:\sqrt{b}$, tomada $AP = \sqrt{b}$, y sobre AG levantada la perpendicular $PT = \sqrt{a}$, y la recta AT tirada por los puntos A y T será tangente del ramo nAm en el punto A ; y finalmente por ser $dy:dx = -\sqrt{a}:\sqrt{b}$, hecha la dicha construccion hácia la parte de las abscisas negativas, se tendrá la tangente At del ramo MAN en el punto A .

EXEMPLO VI.

269. Se pide hallar la equacion á las curvas referidas á los exes, que tienen la tangente cons-

tante, ó la subtangente constante. *Fig. 48.*

1º. Si se llaman x , y las coordenadas, y a la tangente constante de la curva que se busca, será por la condicion del Problema $\frac{y dx}{dy} = a$; pero (220)

$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$: luego se tendrá $\frac{y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy} = a$; y elevando ambos miembros al quadrado, será $y^2 dx^2 + y^2 dy^2 = a^2 dy^2$, de donde $y^2 dx^2 =$

$(a^2 - y^2) \times dy^2$: luego $dx = \pm \frac{dy \sqrt{(a^2 - y^2)}}{y}$ equa-

cion á la Tratoria eCE , que tiene. (*Fig. 48.*) los dos ramos Ce , CE perfectamente iguales, las tangentes al punto C y á qualquiera otro punto M iguales á a , esto es, $AC = MD = a$, y las coordenadas $AB = x$, $BM = y$.

2º. Si se llaman x , y las coordenadas, y a la subtangente constante de la curva que se busca, será por la condicion del Problema $\frac{y dx}{dy} = a$, de donde $dx = \frac{a dy}{y}$: luego integrando se tendrá $x = L.y$, equacion á la Logarítmica.

PROPOSICION XXXVII.

270. Si en un punto M de qualquiera curva AMN referida al exe ó diámetro AG es la recta

MR perpendicular á la tangente MT en el punto del contacto M , y la recta MB es ordenada á dicho eje ó diámetro: digo que en el caso de la curva referida al eje, serán la Normal $MR = \frac{yds}{dx}$, y

la Subnormal $BR = \frac{ydy}{dx}$, y que en el otro caso

serán la Normal $MR = \frac{rxyds}{rdx - Cc.b \times dy}$, y la Subnor-

mal $BR = \frac{Sc.b \times ydy}{rdx - Cc.b \times dy} + \frac{Cc.b \times y}{r}$, si se suponen AB

$= x$, $BM = y$, $AM = s$, y b el ángulo agudo ABM referido al radio constante $BD = r$. Fig. 49 y 50.

1.º. Tírense (Fig. 49.) la ordenada $b m$ prolongada, si es necesario, hasta encontrar la tangente en Q , y la recta ME paralela á AG ; y si se considera Bb evaneciente ó diferencial de la abscisa AB , serán $ME = Bb = dx$, $Em = dy$, y $Mm = ds$. Ahora siendo en la curva AMN referida al eje AG los ángulos RMQ , BME iguales por rectos, será el ángulo $EMQ = RMB$; pero los ángulos E y B son rectos: luego los triángulos MEQ , $RB M$ serán semejantes, y tendrán proporcionales los lados, esto es, $ME : MQ = BM : MR$; pero (23) $ME : MQ = ME : Mm$: luego será $ME : Mm = BM : MR$, esto es, $dx : ds = y :$

MR , y por consiguiente se tendrá $MR = \frac{yds}{dx}$.

Con el mismo método se demostrará ser $ME : EQ = BM : BR = ME : Em$, esto es, $y : BR = dx :$

dy , y por consiguiente la subnormal $BR = \frac{ydy}{dx}$.

2º. Suponiendo la construcción del caso anterior, tírense además (*Fig. 50.*) las rectas MC y DF perpendiculares al diámetro AG , y la QH perpendicular á ME . Considérese que Bb es evaneciente ó la diferencial del abscisa AB , y serán los triángulos MEQ , ME_m iguales y semejantes: luego se tendrán, $MQ = M_m = ds$, $EQ = Em = dy$, $ME = Bb = dx$. Y por ser las rectas QE , EH respectivamente paralelas á las DB , BF , será el ángulo $QEH = DBF$; pero los ángulos en H y F son iguales por rectos: luego serán semejantes los triángulos QEH , DBF ; y en ellos proporcionales los lados, esto es, $DB : DF = QE : QH$, $DB : BF = QE : EH$; y dando valores, serán

$$r : Sc.b = dy : QH = \frac{Sc.b \times dy}{r}, \quad r : Cc.b = dy : EH = \frac{Cc.b \times dy}{r},$$

de donde $MH = dx - \frac{Cc.b \times dy}{r} = \frac{r dx - Cc.b \times dy}{r}$.

Asimismo por la semejanza de los triángulos DBF ,

$$MBC, \text{ serán } r : Sc.b = y : MC = \frac{Sc.b \times y}{r}, \text{ y } r : Cc.b$$

$= y : BC = \frac{Cc.bxy}{r}$. Y finalmente por la semejanza de los triángulos QHM , MCR serán proporcionales, esto es, $MH : MQ = MC : MR$, $MH : HQ = MC : CR$; y dando valores, $\frac{r dx - Cc.bxy}{r} : ds$
 $= y : MR = \frac{rxy ds}{r dx - Cc.bxy} \cdot \frac{r dx - Cc.bxy}{r} : \frac{Sc.bxy}{r} =$
 $y : CR = \frac{Sc.bxy dy}{r dx - Cc.bxy}$, de donde $BR = \frac{Sc.bxy dy}{r dx - Cc.bxy}$
 $= \frac{Cc.bxy}{r}$. Si el ángulo b es obtuso, valen las mismas fórmulas de la normal y subnormal, con tal que se mude en ellas el signo del coseno del ángulo b . Que es &c.

ESCOLIO.

271. Adviértase que determinada la subtangente BT en términos finitos respecto á una curva dada, se determinarán del mismo modo la subnormal y la normal: pues, si el ángulo B es recto (*Fig. 49.*) será la subnormal BR tercera proporcional á la subtangente BT y á la ordenada BM , y la normal MR será igual á $\sqrt{(BR)^2 + (BM)^2}$; y si el ángulo B no es recto (*Fig. 50.*), por la resolución del triángulo BMT se hallará el ángulo BMT , y por consiguiente el ángulo BMR

que con BM forma un recto: luego por la resolución del triángulo MBR , en el qual el lado MB y los ángulos adyacentes á dicho lado son dados, se determinarán la subnormal BR y la normal MR . Tambien adviértase que, si en las curvas referidas á sus exes se supone la normal $= X$,

será $\frac{yds}{dx} = X$, y por consiguiente $ds = \frac{Xdx}{y}$: lue-

go integrando será $s = S. \frac{Xdx}{y}$, fórmula que puede ser útil para la rectificación de las curvas referidas á los exes, en las cuales está dada X por x ó por y .

EXEMPLO I.

272. Sea la curva AMN la Parábola Apoloniana referida al exe AG , cuya equacion es $y^2 = 2ax$. Fig. 49.

Diferenciando la equacion propuesta, será $2ydy = 2adx$, y por consiguiente $dx = \frac{ydy}{a}$; pero

(223) $ds = \frac{dy\sqrt{(y^2 + a^2)}}{a}$: luego será $\frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{(y^2 + a^2)}}{y}$;

y substituyendo este valor en la expresion $\frac{yds}{dx}$, se tendrá $\frac{yds}{dx}$ ó bien la normal $MR = \sqrt{(y^2 + a^2)}$.

Asimismo por ser $2ydy = 2adx$, será $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{y}$; y

substituyendo este valor en la expresion $\frac{ydy}{dx}$, se tendrá $\frac{ydy}{dx}$ ó bien la subnormal $BR = a$, esto es, igual á la mitad del parámetro de la Parábola.

EXEMPLO II.

273. Sea la curva AMN la Elipse Apoloniana referida á sus exes, cuya equacion es $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (2ax - x^2)$, si se suponen $AB = x$, $BM = y$, $AC = a$, $CE = b$. Fig. 51.

Diferenciando la equacion propuesta, será $2ydy = \frac{b^2}{a^2} \times (2a dx - 2x dx)$; por consiguiente se tendrá $\frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{a-x}{y}$; luego substituyendo este valor en la expresion $\frac{ydy}{dx}$, se tendrá $\frac{ydy}{dx}$ ó bien la subnormal $BR = \frac{b^2}{a^2} \times (a-x)$. Ahora para determi-

nar la normal MR por medio de su fórmula $\frac{yds}{dx}$, tenemos que en las curvas referidas á los exes es $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, y substituyendo en esta en

lugar de dy^2 su valor $\frac{b^4}{a^4} \times \frac{(a-x)^2 \times dx^2}{y^2}$, será en la curva propuesta $ds = \sqrt{dx^2 + \frac{b^4}{a^4} \times \frac{(a-x)^2 \times dx^2}{y^2}} =$

$\frac{dx\sqrt{(a^4y^2 + b^4 \times (a-x)^2)}}{a^2y}$: luego será $\frac{yds}{dx}$ ó bien la normal $MR = \frac{\sqrt{(a^4y^2 + b^4 \times (a-x)^2)}}{a^2} = \frac{b}{a^2} \sqrt{(a^2 \times (2ax - x^2) + b^2 \times (a-x)^2)}$.

Con el mismo método se hallará que en la Hipérbola referida á los exes de la equation $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (2ax + x^2)$ son (Fig. 52.) la subnormal $BR = \frac{b^2}{a^2} \times (a+x)$, y la normal $MR = \frac{b}{a^2} \times \sqrt{(a^2 \times (2ax + x^2) + b^2 \times (a+x)^2)}$.

EXEMPLO III.

274. Se pide hallar la equation á las curvas referidas á los exes, que tienen la normal constante, ó la subnormal, ó la suma de la subtangente y de la subnormal.

1º. Si se expresan las coordenadas por x, y , y la normal constante por a , se tendrá $\frac{yds}{dx} = a$; pero $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$: luego será $\frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx} = a$; y elevando ambos miembros al quadrado, se tendrá $y^2 dx^2 + y^2 dy^2 = a^2 dx^2$, de donde $y^2 dy^2 = (a^2 - y^2) \times dx^2$: luego $dx = \frac{ydy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$, é inte-

grando será $x = -\sqrt{(a^2 - y^2)} + A$; por consiguiente $\sqrt{(a^2 - y^2)} = A - x = z$; y elevando ambos miembros al cuadrado, será $a^2 - y^2 = z^2$, equacion al círculo.

2º. Si se llaman x , y las coordenadas, y a la subnormal constante, se tendrá por la condicion del Problema $\frac{ydy}{dx} = a$, y multiplicando ambos miembros por dx , será $ydy = a dx$: luego integrando se tendrá $\frac{y^2}{2} = ax + A$ constante; por consiguiente $y^2 = 2a \times (x + \frac{A}{a}) = 2az$, equacion á la Parábola Apoloniana.

3º. Finalmente si se pide hallar la equacion á la curva que tiene la suma de la subnormal y de la subtangente igual á una cantidad constante a , se

supondrá $\frac{ydx}{dy} + \frac{ydy}{dx} = a$. Hágase $dx = t dy$, y se-

rá $\frac{tydy}{dy} + \frac{ydy}{tdy} = a$, de donde $ty + \frac{y}{t} = a$, y (A)

$y = \frac{at}{t^2 + 1}$: luego diferenciando esta expresion, será

$dy = \frac{(a - at^2) \times dt}{(t^2 + 1)^2}$, y por consiguiente $dx = \frac{atdt}{(t^2 + 1)^2}$

$= \frac{at^3 dt}{(t^2 + 1)^2}$; pero (192) $\frac{t^3 dt}{(t^2 + 1)^2} = -\frac{1}{2} \times D. \frac{t^2}{t^2 + 1}$

$+ \frac{t dt}{t^2 + 1}$: luego se tendrá $dx = \frac{atdt}{(t^2 + 1)^2} + \frac{a}{2} \times D. \frac{t^2}{t^2 + 1}$

$$-\frac{atdt}{t^2+1}; \text{ é integrando será } x = -\frac{a}{2 \times (t^2+1)} - \frac{a}{2} \times L.(t^2+1) + \frac{a}{2} \times \frac{t^2}{t^2+1} = \frac{a}{2} \times \frac{t^2-1}{t^2+1} - \frac{a}{2} \times L.(t^2+1);$$

ahora si en esta equacion se substituye en lugar de t su valor dado por y , cuyo valor se determina por medio de la equacion (A), se tendrá la equacion á la curva que se pide.

PROPOSICION XXXIX.

275. Si en un punto M de qualquiera curva AMN referida al focus F es tangente la recta TMQ , y en dicho punto la recta MR es perpendicular á la misma tangente; tirada la recta TFR perpendicular á la ordenada FM en el punto F , y prolongada hasta que concorra con las MT y TR en los puntos T y R , serán la subtangente $FT = \frac{ydx}{dy}$, la tangente $MT = \frac{yds}{dy}$, la normal $MR = \frac{yds}{dx}$, y la subnormal $FR = \frac{ydy}{dx}$, suponiendo la ordenada $FM = y$, el arco $AM = s$, y dx el arco evaneciente del círculo descripto con la ordenada y . Fig. 53.

Tírese la ordenada Fm , y prolónguese, si es necesario, hasta encontrar la tangente TMQ en Q ; y

haciendo centro en F con el intervalo FM describase el arco ME . Ahora si se considera el ángulo MFm evaneciente, serán $ME = dx$, $Em = dy$, $Mm = ds$, y el triángulo QEM será (23) semejante é igual al triángulo mEM . Y siendo los ángulos RMQ y FME (22) iguales por rectos, será $EMQ = FMR$; pero los ángulos E , MFR son iguales por rectos: luego los triángulos QEM , MFR serán semejantes; y por ser los ángulos TMR , MFR rectos, será el triángulo TMF semejante al triángulo MFR : luego todos los referidos triángulos serán semejantes entre sí; por lo que se tendrán las proporciones, esto es, $mE : EM = QE : EM = MF : FT$, $mE : Mm = QE : QM = MF : MT$, $ME : Mm = ME : MQ = FM : MR$, $ME : Em = ME : EQ = FM : FR$; y dando valores, serán $dy : dx = y : FT = \frac{y dx}{dy}$, $dy : ds = y : MT = \frac{y ds}{dy}$, $dx : ds = y : MR = \frac{y ds}{dx}$, $dx : dy = y : FR = \frac{y dy}{dx}$. Que es &c.

COROLARIO I.

276. Siendo en las curvas referidas á los focus (217) $dx = \frac{y du}{r}$, será tambien la subtangente $FT = \frac{y^2 du}{r dy}$: asimismo se determinarán, si es menester,

las demas expresiones relativas á la tangente , normal y subnormal , advirtiendo que en las curvas referidas á los focus (222) es $ds = \frac{1}{r} \times \sqrt{(y^2 du^2 + r^2 dy^2)}$.

COROLARIO II.

277. Dada la curva AMN , se determinará la subtangente BT perteneciente á qualquiera punto M de dicha curva , si por medio de su equacion se halla el valor de $\frac{dx}{dy}$ ó bien él de $\frac{du}{dy}$ por la variable y , y dicho valor se substituye en la fórmula $\frac{y dx}{dy}$, ó bien en la $\frac{y^2 du}{r dy}$. Con el mismo método se determinarán los valores de la tangente , normal y subnormal ; pero determinada la subtangente BT en términos finitos , se hallarán las demas rectas por el método dado (263 , 271) relativamente á las curvas referidas á los exes.

ESCOLIO.

278. Repítanse aqui , segun corresponda , los métodos enseñados (260) respecto á las curvas referidas á los exes para determinar la posicion de la tangente á qualquiera punto , ó á un punto determinado en una curva dada referida al focus: como,

si suponiendo la ordenada $y = a$ que expresa qualquiera cantidad finita, resulta que $dy : dx$ tiene una razon menor que qualquiera dada, el punto en la curva correspondiente á dicha ordenada tendrá la subtangente y tangente infinitas; y por ser la subtangente perpendicular á la ordenada, lo será tambien la tangente: pero si en dicha suposicion de la ordenada $y = a$, resulta que $dx : dy$ tiene una razon menor que qualquiera dada, dicha ordenada será tangente á la curva.

EXEMPLO.

279. Sea la curva $FAMNPS$ la Espiral de Archimedes, cuya equacion es $y = \frac{ru}{p}$, suponiendo la ordenada $FM = y$, el arco circular $PH = u$, el radio $FP = r$, y la periferia $PHP = p$. Fig. 54.

Diferenciando la equacion propuesta, será $dy = \frac{r du}{p}$, y por consiguiente $\frac{du}{dy} = \frac{p}{r}$: luego substituyendo este valor en la fórmula $\frac{y^2 du}{r dy}$, se tendrá $\frac{y^2 du}{r dy}$ ó bien la subtangente $FT = \frac{p}{r^2} \times y^2$: luego serán, la tangente $MT = \sqrt{(FM)^2 + (FT)^2} = \sqrt{y^2 + \frac{p^2}{r^2} \times y^4} = \frac{py}{r^2} \times \sqrt{y^2 + \frac{r^4}{p^2}}$, la sub-

normal $FR = \frac{(FM)^2}{FL} = y^2 : \frac{py^2}{r^2} = \frac{r^2}{p}$ cantidad constante, y la normal $MR = \sqrt{y^2 + \frac{r^2}{p^2}}$.

Finalmente si por medio de la equation á la curva se pide determinar la razon de $dy : dx$, adviértase que en las curvas referidas á los focus es dx

$= \frac{y du}{r}$, y que por la diferencial de la equation á la curva propuesta es $dy = \frac{r du}{p}$: luego se tendrá

$$dy : dx = \frac{r^2}{p} : y.$$

PROPOSICION XL.

280. Determinar, si una curva AMN referida al exe ó diámetro AG tiene máxima ó mínima ordenada. *Fig. 55 y 56.*

Si la curva AMN tiene una ordenada BM máxima ó mínima, esta ordenada tendrá precisamente dos propiedades, es á saber, 1.^a. que la tangente en el punto M (*Fig. 55.*) será paralela al exe ó diámetro AG , ó bien la misma ordenada BM (*Fig. 56.*) será tangente á la curva en M : luego en el caso de ser la ordenada BM máxima ó mínima, ó será (*Fig. 55.*) $dy = 0$ (260. 2.^o.), ó será (*Fig. 56.*) $dx = 0$ (260. 3.^o.): 2.^a. que las or-

denadas b_m , b_m infinitamente próximas á la ordenada BM serán ambas menores que la ordenada máxima BM intermedia, ó ambas mayores que la ordenada mínima intermedia. Luego para determinar la máxima ó mínima ordenada en una curva dada referida al eje ó diámetro, se diferenciará la equacion á la curva; se supondrá $dy = 0$; por medio de la equacion que resulta y de la equacion á la curva se determinarán los valores de las coordenadas x , y , y sean, por exemplo, $x = a$, $y = b$; en la equacion á la curva se substituirá $a + dx$ en lugar de x , y se determinará el valor de la ordenada y correspondiente á dicha abscisa $a + dx$; después en la misma equacion á la curva se substituirá $a - dx$ en lugar de x , y se determinará el valor de la ordenada y correspondiente á la abscisa $a - dx$: ahora si los valores de las dos ordenadas correspondientes á las abscisas $a + dx$, $a - dx$, resultan ambos menores que la ordenada $y = b$, la curva tendrá una ordenada máxima b correspondiente á la abscisa $x = a$; y si los valores de dichas dos ordenadas resultan ambos mayores que la ordenada $y = b$, la curva tendrá una ordenada mínima b correspondiente á la abscisa $x = a$; y finalmente si el valor de una de dichas dos ordenadas es mayor que b , y el de la otra es menor que b , la curva no tendrá ni

máxima ni mínima ordenada.

Si en la diferencial de la equation á la curva se supone $dx=0$, se determinará con el mismo método, si una curva dada referida al eje ó diámetro tiene ordenada máxima ó mínima tangente á la misma curva. Que es &c.

COROLARIO.

281. Se infiere el método para determinar el máximo ó mínimo en una funcion dada por una variable x : pues, supuesta dicha funcion igual á y , y tratada la equation que resulta con el método dado antes, se tendrá el máximo ó mínimo que tiene dicha funcion.

EXEMPLO I.

282. Se pide hallar, si la curva de la equation $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{y}{a}$ tiene máxima ó mínima ordenada.

Diferenciando la equation propuesta se tendrá $\frac{dx}{a} - \frac{adx}{x^2} = \frac{dy}{a}$; y si en esta equation se supone $dy=0$, será $\frac{dx}{a} - \frac{adx}{x^2} = 0$, de donde $x^2 - a^2 = 0$; por consiguiente $x = \pm a$. Siendo $x=a$, se hallará por la equation á la curva la ordenada $y=2a$.

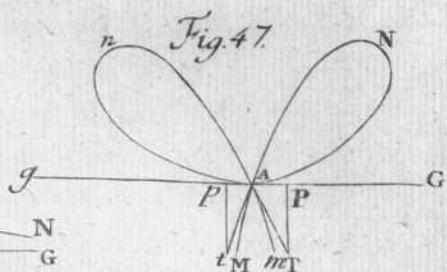
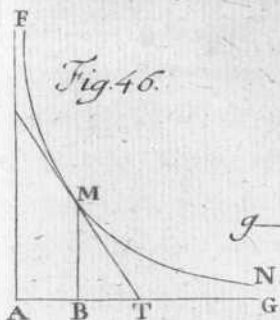
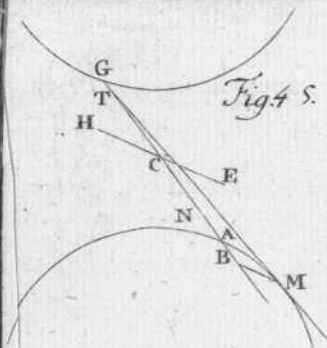


Fig. 50.

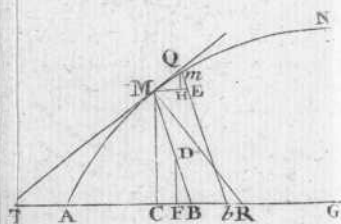


Fig. 49.

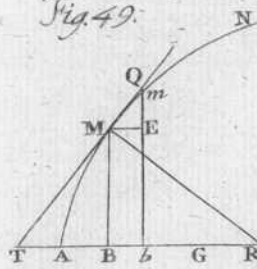


Fig. 48.

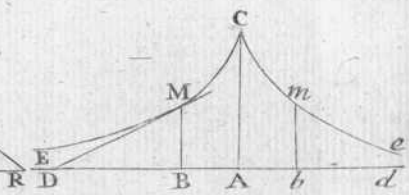


Fig. 51.

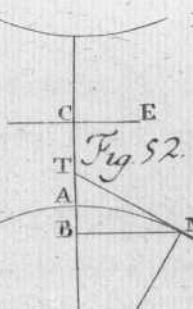
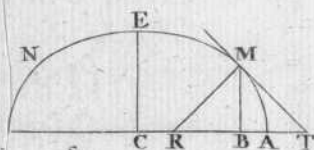


Fig. 53.

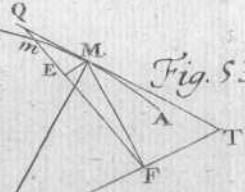


Fig. 54.

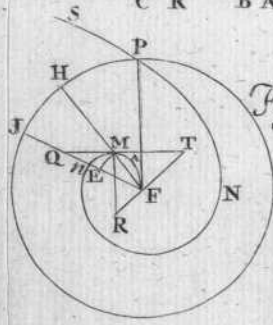


Fig. 55.

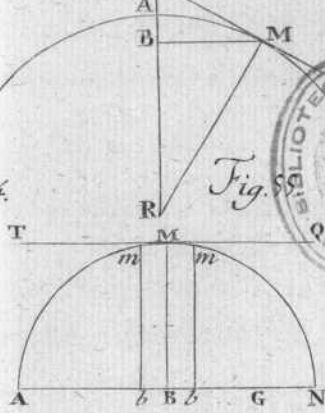
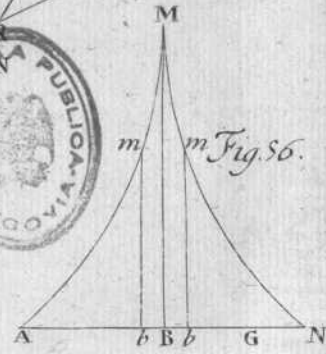
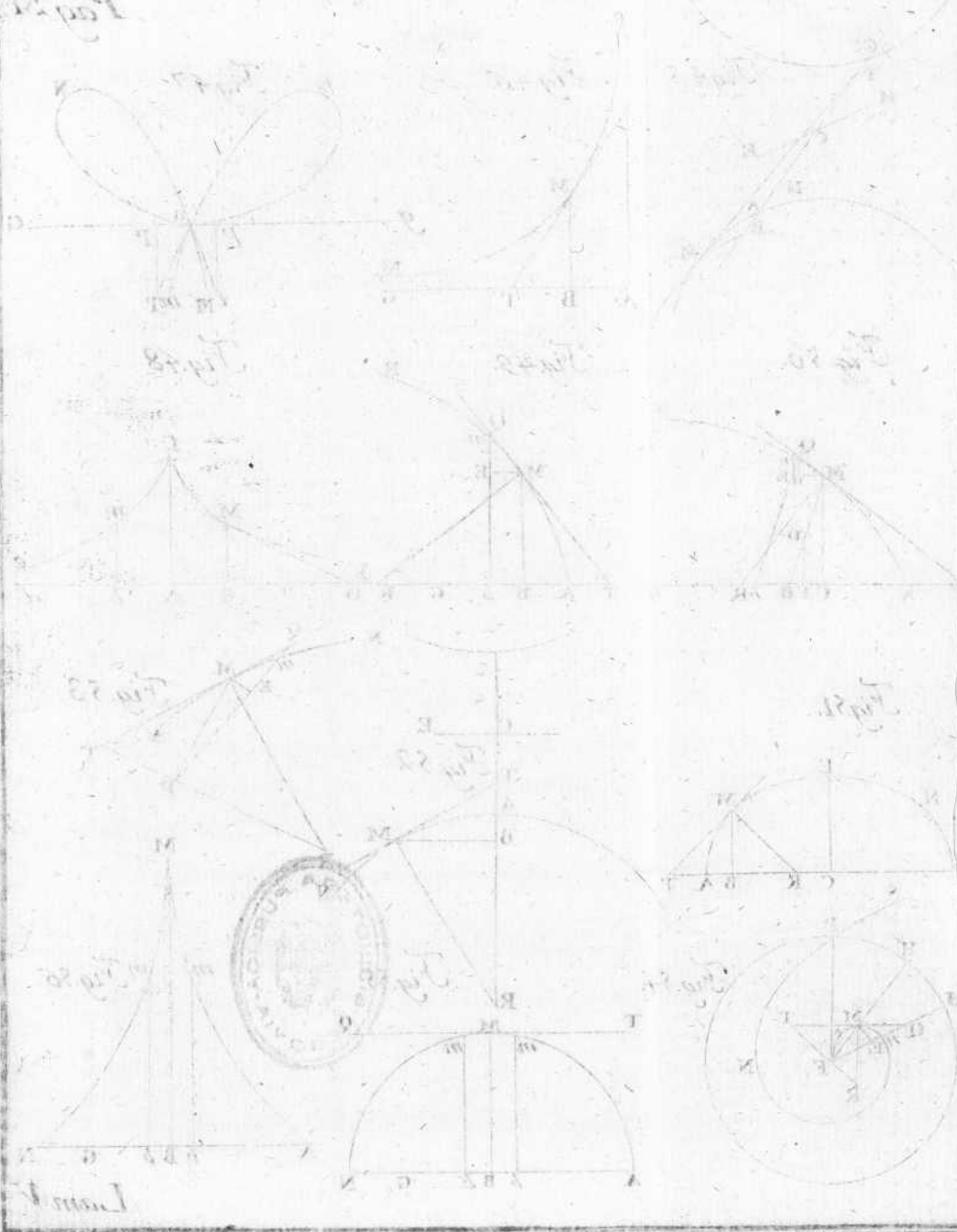


Fig. 56.





Ahora para determinar si esta ordenada es máxima ó mínima, será preciso hallar si á las abscisas $a+dx$, $a-dx$ corresponden ordenadas mayores ó menores que la intermedia $2a$. Para esto, en la equacion á la curva $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{y}{a}$ se substituirán sucesivamente $a+dx$, $a-dx$ en lugar de x ; y por la primera substitution se tendrá la equacion $\frac{a+dx}{a} + \frac{a}{a+dx} = \frac{y}{a}$, ó bien $\frac{2a^2 + 2adx + dx^2}{a+dx} = 2a + \frac{dx^2}{a+dx} = y$; y por la substitution segunda se hallará del mismo modo $2a + \frac{dx^2}{a-dx} = y$: luego las ordenadas correspondientes á las abscisas $a+dx$, $a-dx$ son ambas mayores que la ordenada intermedia $2a$; por consiguiente esta ordenada, que corresponde á la abscisa $x=a$, será mínima. Del mismo modo se hallará que á la abscisa $x=-a$ corresponde la ordenada mínima $-2a$ entre las negativas.

EXEMPLO II.

283. Si la recta dada AB se divide en dos partes cualesquiera AD , DB , y éstas se elevan á las respectivas potestades dadas m , n , y se forman los productos $(AD)^m \times (DB)^n$; se pide determinar el

máximo entre todos ellos. *Fig. 57.*

Llámense, $AB = a$, $AD = x$; y será $BD = a - x$; luego se tendrá $(AD)^m \times (DB)^n = x^m \times (a-x)^n$; y si esta funcion de x se supone igual á y , se tendrá $x^m \times (a-x)^n = y$ equacion á una curva, en la qual se determinarán por el método dado los valores de la ordenada y máxima, y de la x que le corresponde; y así determinado el valor de la x , se cortará en AB una parte AR igual á dicho valor, y se tendrá que $(AR)^m \times (RB)^n$ es el producto máximo entre los infinitos productos $(AD)^m \times (DB)^n$. Para esto, diferénciese la equacion que ha resultado $x^m \times (a-x)^n = y$, y se tendrá $m x^{m-1} \times dx \times (a-x)^n + n x^m \times (a-x)^{n-1} \times -dx = dy$; supóngase ahora $dy = 0$, y será $m x^{m-1} \times dx \times (a-x)^n - n x^m \times (a-x)^{n-1} \times dx = 0$; y finalmente partiendo esta equacion por $(a-x)^{n-1} \times x^{m-1} dx$, resultará $m \times (a-x) - n x = 0$, de donde $x = \frac{ma}{m+n}$. Por tanto queda determinado el va-

lor de la recta AR , que es quarta proporcional á las cantidades dadas $m+n$, m , a ; y si se pide el valor del producto $(AR)^m \times (RB)^n$, será éste igual á $\left(\frac{ma}{m+n}\right)^m \times \left(a - \frac{ma}{m+n}\right)^n = \frac{m^m n^n a^{m+n}}{(m+n)^{m+n}}$.

Si es $m=n=1$, será $x = \frac{a}{2}$, y el rectángulo má-

xímo entre todos los rectángulos $AD \times DB$ será igual á $\frac{a^2}{4}$, esto es, al cuadrado de la mitad de la recta dada.

Si se suponen $m=1$, $n=2$, será $x=\frac{a}{3}$, y el producto máximo entre todos los productos $AD \times (DB)^2$ será igual á $\frac{4a^3}{27}$.

EXEMPLO III.

284. Entre todos los triángulos, que tienen iguales bases, y constante la suma de los otros dos lados, se pide determinar el máximo triángulo.

Fig. 58.

Tírese la perpendicular CK á la base AB ; y llámense, $AB=a$, $AC+CB=b$, $BK=x$, y $CK=z$; por consiguiente serán, $AK=a-x$, $AC=\sqrt{z^2+(a-x)^2}$, $CB=\sqrt{x^2+z^2}$; pero es $AC+CB=b$: luego será $\sqrt{z^2+(a-x)^2} + \sqrt{x^2+z^2}=b$; y diferenciando esta equacion se tendrá $(A) \frac{-adx+xdx+zdz}{\sqrt{z^2+(a-x)^2}} + \frac{xdx+zdz}{\sqrt{x^2+z^2}}=0$; y por ser el area del triángulo ACB igual á $\frac{az}{2}$, será en el caso de la máxima area $\frac{adz}{2}=0$, de donde

$dz = 0$: luego en dicho caso la equacion (*A*) se

reducirá á $\frac{-adx + xdx}{\sqrt{(x^2 + (a-x)^2)}} + \frac{xdx}{\sqrt{(x^2 + z^2)}} = 0$, de don-

de $x \times \sqrt{(x^2 + (a-x)^2)} = (a-x) \times \sqrt{(x^2 + z^2)}$;

y elevando al quadrado ambos miembros y multiplicando, será $x^2 z^2 + a^2 x^2 - 2ax^3 + x^4 = a^2 x^2 + a^2 z^2 - 2ax^3 - 2axxz^2 + x^4 + x^2 z^2$, de la qual resulta

$x = \frac{a}{2}$: luego el triángulo máximo que se busca

será el triángulo isósceles *ACB* que tiene los lados

$$AC = CB = \frac{b}{2}.$$

Se infiere que entre todos los triángulos que tienen igual perímetro, el triángulo equilátero contiene la máxima area: pues si se niega, será máximo (*Fig.* 59.) otro triángulo *ABC*, que tenga dos lados, como *AB* y *BC*, desiguales; y construido sobre el tercer lado *AC* el triángulo isósceles *ADC*, de modo que sea $AD + DC = AB + BC$, será por lo demostrado $ADC > ABC$ contra la hipótesis: luego &c.

Tambien se infiere que entre todas las figuras rectilíneas contenidas por un mismo número de lados, y por igual perímetro, la figura equilátera es mayor que la no equilátera: pues si se niega, será mayor entre las figuras pentágonas (*Fig.* 60.), por

exemplo, la $ABCDE$ que tenga los lados desiguales, como AB y BC ; y tirada la recta AC , y sobre ésta construido el triángulo isósceles AFC , de modo que sea $AF + FC = AB + BC$, será por lo demostrado $AFC > ABC$, y añadiendo $AEDC$, será $AFCDE > ABCDE$ contra la hipótesis: luego &c.

EXEMPLO IV.

285. Sobre las bases AB , CD dadas formar los triángulos ABE , CDF , de suerte que la suma de ellos sea máxima, supuesta la suma de los lados AE y CF igual á una cantidad dada. Fig. 61.

Liámense, $AB = a$, $CD = b$, $AE + CF = c$, $BE = x$, y $DF = z$; y serán $AE = \sqrt{a^2 + x^2}$, y $CF = \sqrt{b^2 + z^2}$: luego se tendrá $\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + z^2} = c$; y diferenciando será (A)

$$\frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{z dz}{\sqrt{b^2 + z^2}} = 0. \text{ Por ser el triángulo } ABE = \frac{ax}{2}, \text{ y el triángulo } CDF = \frac{bz}{2}, \text{ será } \frac{ax + bz}{2}$$

la suma de dichos triángulos; y como esta suma debe ser máxima, será $\frac{adx + bdz}{2} = 0$, de donde resulta $dx = -\frac{bdz}{a}$. Por tanto si en la equacion (A)

se substituye $-\frac{bdz}{a}$ en lugar de dx , se tendrá.

$$-\frac{bx dz}{a\sqrt{(a^2+x^2)}} + \frac{z dz}{\sqrt{(b^2+z^2)}} = 0, \text{ y por consiguiente}$$

será $a:b = \frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)}} : \frac{z}{\sqrt{(b^2+z^2)}}$; pero es *Sc.*

$$EAB : Sc. FCD = \frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)}} : \frac{z}{\sqrt{(b^2+z^2)}}; \text{ luego será}$$

Sc. EAB : Sc. FCD = $a:b$; por consiguiente la suma de los triángulos *ABE*, *CDF* será máxima, quando los senos de los ángulos *EAB*, *FCD* sean como los lados *AB*, *CD*.

Por tanto si se prolongan los lados *AB*, *CD* de dichos triángulos cuya suma es máxima, de suerte que sean $BP = AB$, $DQ = CD$, y se tiran las rectas *EP*, *QF*; la suma de los triángulos *AEP*, *CFQ* será máxima entre la de los triángulos formados sobre las bases *AP*, *CQ*, y que tienen la suma de los demas lados igual á $AE + EP + CF + FQ$. Por tanto si es $AP = CQ$, será el ángulo *EAP* = *FCQ*; y si es $AP > CQ$, será el ángulo *EAP* > *FCQ*.

Infiérese que entre las figuras rectilíneas equiláteras contenidas por igual número de lados é igual perímetro, la figura equiángula contiene la máxima area: pues si se niega, será máxima entre las figuras hexágonas equiláteras (*Fig. 62.*), por exem-

plo, la $BACDE$ que tenga dos ángulos BAC y FED desiguales; y si se supone el ángulo $BAC > FED$, tiradas las rectas BC y FD , será el ángulo $ABC < DFE$, y por lo tanto el lado $BC > FD$: luego construyendo sobre las bases BC , FD los triángulos isóseles BaC , FbD , de suerte que sean $Ba + aC + Db + bF = BA + AC + DE + EF$, y $Sc. aBC : Sc. D Fb = BC : FD$, será por lo demostrado $BaC + FbD > BAC + FED$, y por consiguiente $BaC D b F > BACDEF$ contra la hipótesis: luego entre las figuras equiláteras que tienen el mismo número de lados é igual perímetro, la figura equilátera y equiángula contiene la máxima area; pero se ha demostrado (284) que entre las figuras rectilíneas contenidas por igual número de lados é igual perímetro, la equilátera contiene la mayor area: luego entre todas las figuras rectilíneas contenidas por igual número de lados é igual perímetro, la figura equilátera y equiángula contendrá la máxima area: y respecto á que entre los polígonos regulares que tienen igual perímetro, el polígono que tiene un mayor número de lados contiene la mayor area, como se demostrará á continuacion, el círculo que es últimamente igual al polígono equilátero y equiángulo inscripto en él, y contenido por un infinito número de lados,

contendrá la máxima area entre los polígonos que tienen su perímetro igual á la circunferencia del círculo.

Si los polígonos MP , LH son regulares, y tienen igual perímetro (*Fig. 63*), el polígono MP de mayor número de lados contendrá mayor area que el polígono LH de menor número de lados. Supónganse en los puntos B y E los centros de los círculos circunscriptos á dichos polígonos; y tírense las rectas BA , BG , ED , EQ , y además las BC y EF respectivamente perpendiculares á las AG y DQ . Siendo, pues, $AG:AGHKL$ como el ángulo ABG á quatro rectos, y $DQPONM:DQ$ como quatro rectos al ángulo DEQ , será por igualdad ordenada $AG:DQ=ABG:DEQ$, y tomando sus mitades se tendrá $AC:DF=ABC:DEF$; pero cortada en la recta CA la parte $CR=FD$, y tirada la recta BR , es (129) $CA:CR > ABC:RBC$; luego será $ABC:DEF > ABC:RBC$, de donde $RBC > DEF$: luego cortada $CS=FE$, y tirada RS , estará el punto S en la prolongacion de la perpendicular CB , y por consiguiente CS ó bien su igual EF será mayor que CB ; pero el polígono $MP=DQPONM \times \frac{EF}{2}$, y el polígono $LH=AGHKL \times \frac{BC}{2}$: lue-

go será $MP > LH$.

EXEMPLO V.

286. En un círculo dado ACB , cuyo centro es C , inscribir un triángulo ADB que sea el máximo de los que se pueden inscribir en el mismo círculo. *Fig. 64.*

Siendo el triángulo isósceles ADB mayor que cualquiera de los triángulos inscriptos AMB hacia una misma parte, y sobre la misma base AB , el Problema propuesto se reducirá á buscar un triángulo isósceles ADB inscripto que sea el máximo de los isósceles que se pueden inscribir en el círculo dado. Para esto tírese el diámetro DFE , que dividirá por medio la cuerda AB , y le será perpendicular; y llamadas $CD=r$, $CF=x$, se tendrán $FD=r+x$, y $AF=\sqrt{(r^2-x^2)}$: luego será el triángulo $ADB=(r+x) \times \sqrt{(r^2-x^2)}$; y diferenciando se tendrá $dx \sqrt{(r^2-x^2)} - \frac{x dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}} \times (r+x) = 0$ en el caso del máximo triángulo, de donde $r^2-x^2=x \times (r+x)$; por consiguiente $r-x=x$, y $x=\frac{r}{2}$. Por tanto si se divide el radio CE por medio en F , y por este punto se tira la cuerda AB perpendicular al diámetro DE ; tiradas

las cuerdas AD y DB , el triángulo ADB que resulta será el máximo que se pedia. Adviértase que dicho triángulo ADB es equilátero; porque siendo $AD = \sqrt{ED \times DF} = \sqrt{3r^2}$, y $AB = 2\sqrt{DF \times FE} = \sqrt{3r^2}$, será $AB = AD = DB$.

EXEMPLO VI.

287. Entre todos los rectángulos AM inscriptos en un círculo dado ACM , determinar el máximo. *Fig. 65.*

Tírese el diámetro DE perpendicular al lado AB , que quedará dividido en dos partes iguales en F . Llámense, el radio $CD = r$, $CF = x$; por consiguiente será $FB = \sqrt{r^2 - x^2}$: luego se tendrá el rectángulo $AM = 2\sqrt{r^2 - x^2} \times 2x$; y diferenciando será, $4dx\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{4x^2dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0$ en el caso del máximo rectángulo. De la equation anterior resulta ser $r^2 - x^2 = x^2$; por consiguiente $x^2 = \frac{r^2}{2}$, y $x = \sqrt{\frac{r^2}{2}}$; luego será $CF = FB$, como tambien sus duplos PF y AB serán iguales. Por tanto el quadrado AM es el máximo entre los rectángulos que se pueden inscribir en el círculo $CADB$.

EXEMPLO VII.

288. Entre todos los paralelepípedos FA iguales á una cantidad dada, hallar él que tiene la mínima superficie convexa. *Fig. 66.*

Entre los paralelepípedos que insisten sobre una misma base y entre planos paralelos, el paralelepípedo recto tiene la menor superficie; por consiguiente el Problema propuesto se reducirá á buscar entre los paralelepípedos rectos iguales á una cantidad dada él que tiene la mínima superficie; y

para esto, se considerarán primero los paralelepípedos rectos que tienen iguales alturas. Supónganse, el paralelepípedo dado $FA = a^3$, su altura $AB = b$, y $BC = x$; por consiguiente se tendrán los

rectángulos, esto es, $AC = bx$, $BF = \frac{a^3}{b}$, $AD = \frac{a^3}{x}$; luego será toda la superficie del paralelepí-

pedo AF igual á $2bx + \frac{2a^3}{b} + \frac{2a^3}{x}$; y diferen-

ciando se tendrá $2b dx - \frac{2a^3 dx}{x^2} = 0$ en el caso de

la mínima superficie. De la equation anterior resulta ser $x^2 = \frac{a^3}{b}$, de donde $x = \sqrt{\frac{a^3}{b}} = BC$; pero

el rectángulo $BF = \frac{a^3}{b}$; luego será $FC = \frac{a^3}{b} : \sqrt{\frac{a^3}{b}}$

$= \sqrt{\frac{a^3}{b}}$, esto es, $FC = CB$; por consiguiente en-

tre todos los paralelepípedos iguales que tienen iguales alturas, el paralelepípedo que tiene la base quadrada tendrá la mínima superficie. Supues-

to este Teorema, se pasa á determinar entre todos los paralelepípedos que tienen bases quadradas el que tiene la mínima superficie. Ahora supónganse, $AF = a^3$, y la altura $AB = x$; por consi-

guiente será el quadrado $BF = \frac{a^3}{x}$, el lado BD

$= BC = \sqrt{\frac{a^3}{x}}$, y el rectángulo $AC = x \sqrt{\frac{a^3}{x}} = \sqrt{a^3 x}$:

luego toda la superficie del paralelepípedo AF será

igual á $\frac{2a^3}{x} + 4\sqrt{a^3 x}$; y diferenciando, se tendrá

$-\frac{2a^3 dx}{x^2} + 2\sqrt{a^3} \times \frac{dx}{\sqrt{x}} = 0$ en el caso de la mí-

nima superficie: de esta equacion resulta ser $x^{\frac{3}{2}}$

$= \sqrt{a^3}$, de donde $x^3 = a^3$, y $x = a$. Por tanto

el cubo tiene la mínima superficie entre todos los paralelepípedos iguales.

EXEMPLO VIII.

289. Entre todos los conos rectos $AEBD$ iguales á una cantidad dada, determinar el que

tiene la mínima superficie convexa. *Fig. 67.*

Supónganse, el cono recto $AEBD = a^3$, $\frac{p}{r}$ la razón constante de la periferia al radio, y el radio de la base de dicho cono, esto es, $CA = x$; por consiguiente se tendrán, la circunferencia $EAFB = \frac{px}{r}$, y el círculo $ECF = \frac{px^2}{2r}$: luego será $\frac{CD}{3} \times \frac{px^2}{2r} = a^3$, de donde $CD = \frac{6ra^3}{px^2}$, y $(CD)^2 = \frac{36r^2a^6}{p^2x^4}$; por consiguiente $BD = \sqrt{((CD)^2 + (CB)^2)} = \sqrt{\left(\frac{36r^2a^6}{p^2x^4} + x^2\right)}$; pero $\frac{DB}{2}$ multiplicado por la circunferencia del círculo $EAFB$ es igual (250) á la superficie del cono: luego esta superficie será igual á $\frac{1}{2} \times \sqrt{\left(\frac{36a^6r^2}{p^2x^4} + x^2\right)} \times \frac{px}{r} = \frac{1}{2} \times \sqrt{\left(\frac{36a^6}{x^2} + \frac{p^2x^4}{r^2}\right)}$. Supóngase $\frac{1}{2} \times \sqrt{\left(\frac{36a^6}{x^2} + \frac{p^2x^4}{r^2}\right)} = y$; y quadrando esta expresion, será $\frac{1}{4} \times \left(\frac{36a^6}{x^2} + \frac{p^2x^4}{r^2}\right) = y^2$: luego diferenciando se tendrá $\frac{1}{4} \times \left(-\frac{72a^6dx}{x^3} + \frac{4p^2x^3dx}{r^2}\right) = 2ydy = 0$ en el caso de la mínima superficie convexa del cono: de la equacion anterior resulta $\frac{p^2x^3}{r^2} = \frac{18a^6}{x^3}$, ó bien $x^6 = \frac{18r^2a^6}{p^2}$; por

consiguiente $x = a \sqrt[3]{\left(\frac{3r\sqrt{2}}{p}\right)}$.

EXEMPLO IX.

290. Entre los infinitos conos rectos inscriptos en una esfera dada, determinar él que tiene la máxima superficie convexâ. *Fig. 64.*

Sea el semicírculo DBE , cuyo radio CD es igual á él de la esfera dada. Tírense, qualquiera cuerda DB , y la perpendicular BF al diámetro DE ; y dando el semicírculo DBE una revolucion al rededor del diámetro DE , el triángulo rectángulo DFB producirá un cono recto inscripto en la esfera dada. Llámense, $CD=r$, p la circunferencia ADB , $CF=x$; y se tendrán, FB

$=\sqrt{(r^2-x^2)}$, $\frac{p}{r} \times \sqrt{(r^2-x^2)}$ la circunferencia

del círculo descripto con el radio FB , y finalmente $DB = \sqrt{(2r \times (r+x))}$; pero la superficie convexâ del cono formado por dicho triángulo

DFB es (250) igual á $\frac{DB}{2}$ multiplicada por

la circunferencia del círculo cuyo radio es BF ; luego dicha superficie convexâ será igual á $\frac{1}{2} \times$

$\sqrt{(2r \times (r+x))} \times \frac{p}{r} \times \sqrt{(r^2-x^2)}$, ó bien á $\frac{p}{\sqrt{2r}} \times$

$(r+x) \times \sqrt{r-x}$; y diferenciando se tendrá

$$\frac{p}{\sqrt{2r}} \times \left(dx \sqrt{r-x} + (r+x) \times \frac{-dx}{2\sqrt{r-x}} \right) = 0$$

en el caso de la máxima superficie que se busca: de esta equacion resulta ser $2 \times (r-x) - (r+x) = 0$,

de donde $x = \frac{r}{3}$; luego para que la superficie convexa del cono inscripto en la esfera dada sea máxima, ha de ser CF igual á la tercera parte del radio CE .

EXEMPLO X.

291. Entre todos los cilindros rectos inscriptos en una esfera dada, hallar el que tiene la máxima superficie convexa. *Fig. 65.*

Sea el semicírculo DBE , cuyo radio CE es igual á el de la esfera dada. Térese qualquiera ordenada BF perpendicular al diámetro DE , y fórmese el rectángulo FM inscripto en dicho semicírculo; y dando el semicírculo DBE una revolucion al rededor del diámetro DE , el rectángulo FM describirá un cilindro recto inscripto en la esfera dada. Llámense, $CD = r$, p la circunferencia $ANDMB$, y $CE = x$; y serán, $FB = \sqrt{r^2 - x^2}$, $\frac{p}{r} \times \sqrt{r^2 - x^2}$ la circunferencia del círculo cuyo radio es FB , y finalmente $FP = BM = 2x$:

luego la superficie convexâ del cilindro formado por el rectángulo FM al rededor del diámetro DE será (251) igual á $\frac{p}{r} \times \sqrt{(r^2 - x^2)} \times 2x$; y diferenciando, se tendrá $\frac{2p}{r} \times \left(\frac{-x^2 dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} + dx \times \sqrt{(r^2 - x^2)} \right) = 0$ en el caso de la máxima superficie convexâ que se busca: de esta equacion resulta ser $-x^2 + r^2 - x^2 = 0$, ó bien $x^2 = \frac{r^2}{2}$, de donde $x = \sqrt{\frac{r^2}{2}}$: luego será $CF = FB$, y el rectángulo FM será la mitad del quadrado AM inscripto en el círculo NCM .

PROPOSICION XLI.

292. Determinar, si una curva dada referida al focus tiene máxima ó mínima ordenada.

En la equacion á la curva supóngase cero la diferencial de la ordenada, esto es, $dy = 0$; por la equacion que resulta determínese el valor de la ordenada y , y sea, por exemplo, $y = b$; despues transférase la equacion á la curva á un arco circular descripto con el radio constante r , substituyendo (217) $\frac{y du}{r}$ en lugar de dx ; por la equa-

Fig. 57.

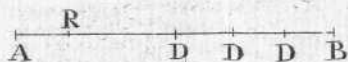


Fig. 58.

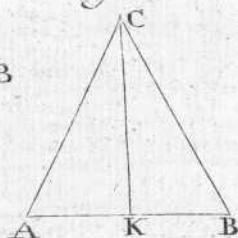


Fig. 59. Pag. 267.

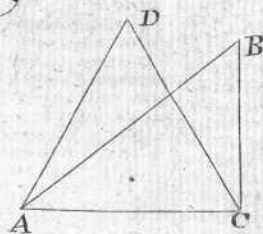


Fig. 60.

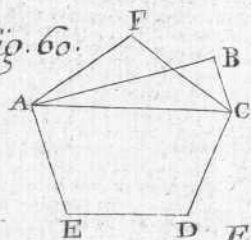


Fig. 61

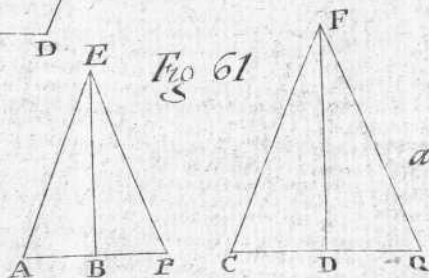


Fig. 62.

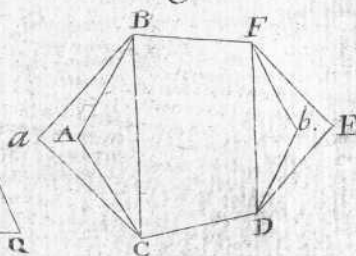


Fig. 63.

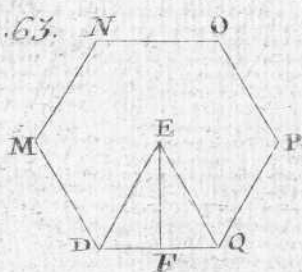


Fig. 64.

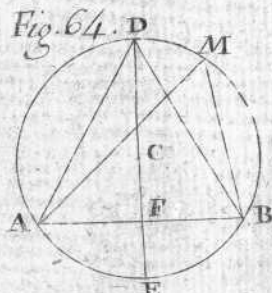


Fig. 65.

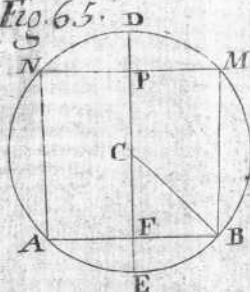


Fig. 66.

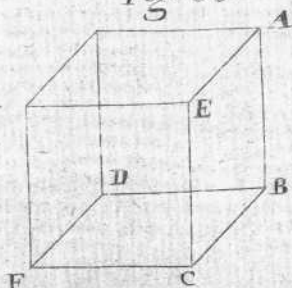
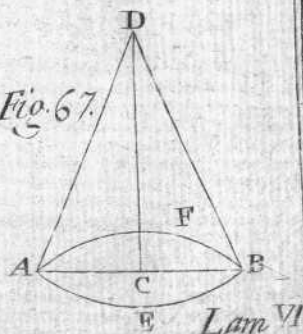
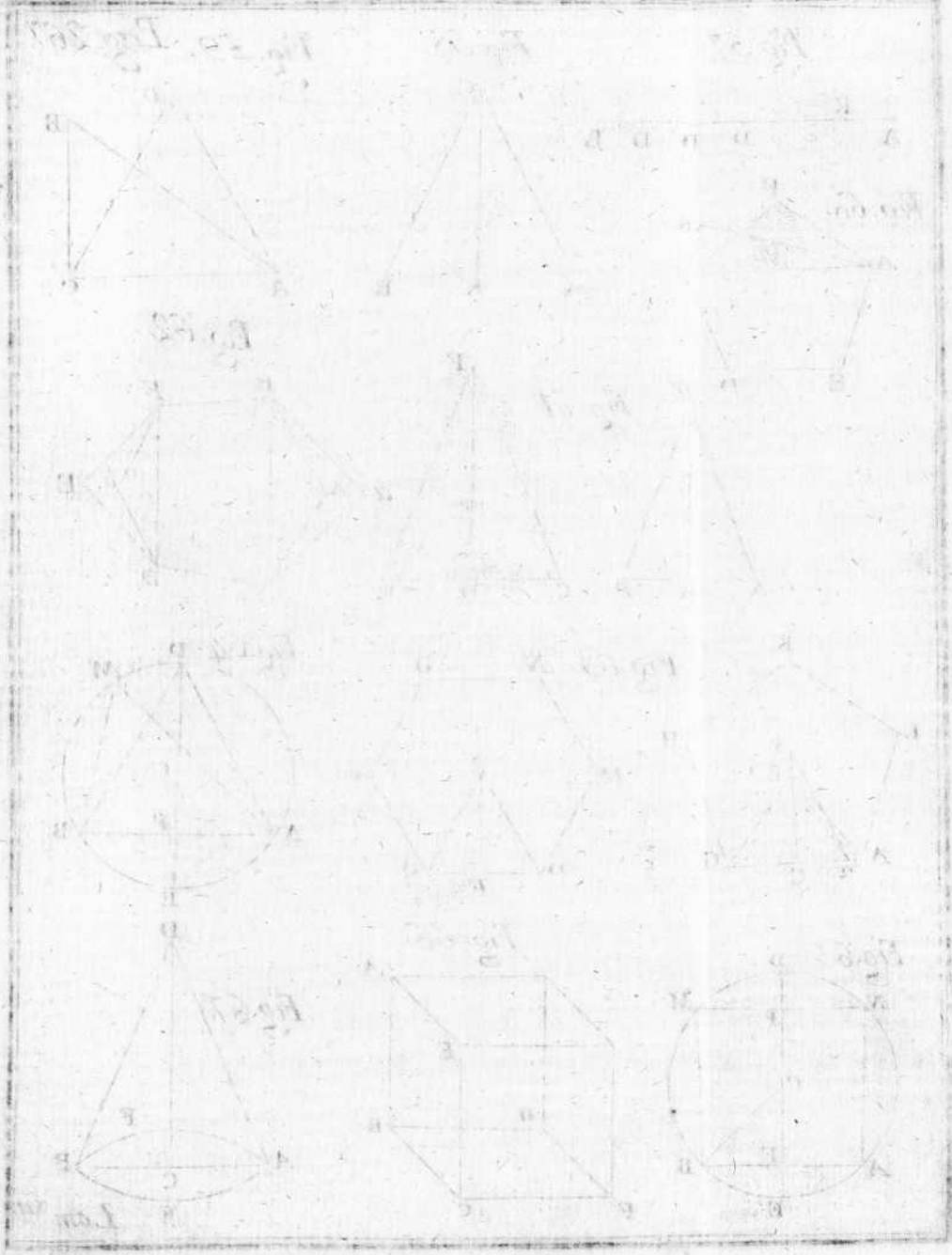


Fig. 67.





cion que resulta hállese el valor de du por y , dy , y dicho valor intégrese algébricamente, si se puede, sino por las quadraturas ó por las rectificaciones; en la equacion integrada substitúyase en lugar de la y su valor hallado b , y determínese el valor de la u , que llamo a ; despues en dicha equacion integrada substitúyanse sucesivamente $a+du$, $a-du$ en lugar de u , y determínense por constantes y du los valores de las dos ordenadas infinitamente próximas á la ordenada $y=b$ correspondiente al arco $u=a$: ahora si los valores de las dos ordenadas correspondientes á los arcos $a+du$, $a-du$, resultan ambos menores que la ordenada $y=b$, la curva tendrá una ordenada máxima b correspondiente al arco $u=a$; y si los valores de dichas dos ordenadas resultan ambos mayores que la ordenada $y=b$, la curva tendrá una ordenada mínima b correspondiente al arco $u=a$; y finalmente si el valor de una de dichas dos ordenadas es mayor que b , y él de la otra es menor que b , la curva no tendrá ni máxima ni mínima ordenada. La suposicion de $dy=0$ da la ordenada máxima ó mínima $y=b$, correspondiente (278) al punto de la curva que tiene la tangente perpendicular á dicha ordenada: pero si en la diferencial de la equacion á la curva se supone $dx=0$, y el valor de la orde-

nada y es finito, se determinará con el mismo método, si una curva dada referida al focus tiene ordenada máxima ó mínima tangente á la misma curva. Que es &c.

EXEMPLO.

293. Sea $dx = \frac{y dy}{2\sqrt{r^2 - y^2}}$ la equation á una curva referida al focus.

Si en la equation propuesta se supone $dy = 0$, se hallará que la tangente es perpendicular á la ordenada, quando sea $y = \pm r$. Para determinar si dicha ordenada es máxima ó mínima, substitúyase $\frac{y du}{r}$ en lugar de dx ; y se tendrá la equation $\frac{y du}{r}$

$= \frac{y dy}{2\sqrt{r^2 - y^2}}$, de donde resulta $du = \frac{1}{2} \times \frac{r dy}{\sqrt{r^2 - y^2}}$;

luego integrando será u igual (116) á la mitad de un arco circular, que tiene el radio r , y el seno igual á y ; por consiguiente en la hipótesis de $y = \pm r$, será u igual á la mitad del quadrante q , ó á la mitad de los tres quadrantes, &c. pero aumentado ó disminuido el quadrante q en una cantidad infinitésima, su seno igual á y siempre se disminuye: luego la ordenada $y = r$ será máxima. Dígase lo mismo, si fuese $u = \frac{3}{2}q, \frac{5}{2}q$, &c.

PROPOSICION XLII.

294. Determinar, si una curva PM referida al exe ó diámetro AG tiene asíntotas. Fig. 68, 69 y 70.

Por ser las asíntotas tangentes á la curva en una distancia infinita, resultan las propiedades siguientes en los tres casos; es á saber, 1.^o si la asíntota (Fig. 68.) es la recta TM paralela al diámetro de la curva, ó es el mismo diámetro AG , serán la abscisa x infinita, $dy = 0$ (260. 2.^o), y la ordenada y finita ó cero; 2.^o si la asíntota es (Fig. 69.) la recta TM paralela á las ordenadas de la curva, ó la ordenada AN que sale del mismo origen A de las abscisas, serán la ordenada y infinita, $dx = 0$ (260. 3.^o), y la abscisa x finita ó cero; 3.^o si la asíntota (Fig. 70.) es la recta TM inclinada á las coordenadas de la curva, ó su paralela AR que pasa por el origen A de las abscisas, será dy á dx en una razón finita, esto es, como AB á AT , en la suposición de la abscisa x infinita, y la diferencia entre la subtangente infinita y la abscisa x infinita será finita ó cero. Luego para determinar las asíntotas de una curva referida al exe ó diámetro, se supondrá $\pm x$ infinita, y se hallará por medio de la equacion á la curva el va-

lor de la correspondiente ordenada y : despues se diferenciará la equacion á la curva, y en la razon que tiene dx á dy se supondrá x infinita, y por la y se substituirá su valor hallado: y si la razon de dx á dy es como la unidad á cero, esto es $dy = 0$, será asíntota de la curva (*Fig. 68.*) el mismo diámetro AG , si el valor hallado de la y es cero, y si dicho valor es finito, será asíntota de la curva una paralela TM al mismo diámetro en una distancia AT igual al valor de la y ; pero si la razon de dx á dy es finita, búsquese la diferencia entre la subtangente infinita y la abscisa x infinita, y será asíntota de la curva (*Fig. 70.*) la recta AR tirada desde el origen de las abscisas en aquel ángulo determinado por la razon hallada de dy á dx , si dicha diferencia es cero; y si es finita, será asíntota de la curva una paralela TM á la referida recta AR tirada por el extremo de la x determinada por dicha diferencia.

En la equacion de la misma curva referida al eje ó diámetro, supóngase tambien $\pm$ y infinita, y del mismo modo se determinarán las asíntotas de la curva en esta nueva suposicion. Que es &c.

EXEMPLO.

295. Se pide hallar las asíntotas de la curva

expresada por la equacion $x^2 + 3xy = a^2$. Fig. 71.

Hállese primero el valor de la ordenada y por

x , y se tendrá $y = \frac{a^2}{3x} - \frac{x}{3}$; despues supóngase

$x = \infty$, por lo qual resulta la ordenada $y = -\frac{x}{3}$.

Ahora diferénciese la equacion á la curva, y se

tendrá $2x dx + 3x dy + 3y dx = 0$; del donde $dy:dx$

$= 2x + 3y : -3x$; pero en la suposicion que sea

$x = \infty$, es $y = -\frac{x}{3}$: luego en dicha suposicion será

$dy:dx = 2\infty + 3 \times -\frac{x}{3} : -3\infty = 1 : -3$. Por tan-

to si son AD las abscisas, DE las ordenadas po-

sitivas de la curva propuesta, y hácia la parte de

las ordenadas negativas se tira la recta BC parale-

la á ellas, y se corta de modo que sea $BC:BA$

$= 1:3$, la recta ACM tirada por los puntos A y

C , ó será asíntota de la curva, ó paralela á la asín-

tota. Para determinar, si la recta ACM es asín-

tota de la curva, ó paralela á la asíntota, hállese

el valor de la subtangente $\frac{y dx}{dy}$, y se tendrá $\frac{y dx}{dy} =$

$-\frac{3xy}{2x+3y}$; de este valor réstese x , y será la dife-

rencia $-\frac{6xy+2x^2}{2x+3y}$, la qual diferencia es cero, sien-

do $x = \infty$, $y = -\frac{x}{3}$: luego la recta ACM será asín-

tota de la curva propuesta. Del mismo modo se ha-

llará que si se supone $x = -\infty$, la recta CA pro-

longada hácia N será también asíntota de la curva.
 Supóngase ahora la ordenada y infinita; y siendo la equacion á la curva $x^2 + 3xy = a^2$, será $x = -\frac{3y}{2} \pm \sqrt{(\frac{9y^2}{4} + a^2)}$; luego en dicha suposicion se tendrán $x = -3\infty$, $x = 0$. El primer valor de la x es el mismo que se halló antes, y da la asíntota ACM : del segundo valor de la x resulta que siendo $dy : dx = 2x + 3y : -3x$, será $dy : dx = y : 0$, y por consiguiente $dx = 0$: luego la recta AP tirada desde el origen de las abscisas y paralela á las ordenadas será asíntota de la curva. Del mismo modo se hallará que prolongada la recta PA hácia Q , será también AQ asíntota de la curva propuesta.

PROPOSICION XLIII.

296. Determinar, si una curva referida al focus tiene alguna ordenada que le sea asíntota.

En la equacion á la curva supóngase la ordenada y infinita, y en esta suposicion búsquese la razon de dx á dy : si esta razon resulta igual á la de cero á la unidad, y la subtangente de la curva en la misma suposicion de y infinita es cero ó finita, la curva tendrá por asíntota la ordenada y infinita, ó una paralela á la misma ordenada en la distan-