ENCICLOPÉDIA HISPANO-AMERICANA.

MANUAL

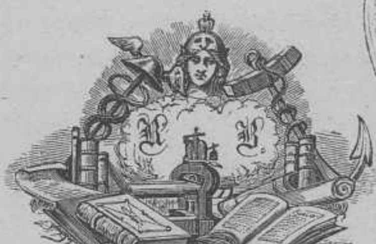
DE

ARITMÉTICA COMERCIAL

EN TREINTA LECCIONES,

DISPUESTAS EN FORMA DE CATECISMO, Y DEDICADAS A LA JUVENTUD,

Por SIMON DE LAVALLE.



PARIS

LIBRERIA DE ROSA Y BOURET.

1857

ADVERTENCIAS.

1ª Este tratado se ha dividido en *lecciones* y despues de cada una se encuentra la correspondiente coleccion de *explicaciones y ejemplos* de lo que en ella se ha enseñado, para servir de *materia* á los maestros, de *ejercicio* á los principiantes, y de *modelo* en el planteo y resolucion de las cuestiones.

2ª Las lecciones *pueden* aprenderse de memoria; pero *de ningun modo* los ejemplos, que una vez entendidos, deberán variarse por los preceptores.

3ª Los números puestos á la cabeza de cada explicacion ó ejemplo, corresponden á los de las preguntas á que hacen referencia.

PROLOGO.

Son muchos los Tratados que en estos últimos tiempos se han dado á luz sobre diversos ramos de las Matemáticas, y muchos por consiguiente los libros de Aritmética que se han escrito para servir de base á dichas obras de que hacen parte; pero el plan rigurosamente filosófico que en ellos se ha seguido, los pone fuera del alcance de aquellos jóvenes que por la vez primera reciben los rudimentos de esta ciencia importante.

Para tan preciosa é interesante parte de la sociedad, he escrito las presentes lecciones, y despues de haber empleado mis borradores en la enzeñanza con buen éxito, me he decidido á publicarlas.

En ellas encontrará el jóven principiante un fondo de conocimientos que le habiliten para desempeñarse en los diferentes casos que pueden ocurrir en la vida privada, en la contabilidad de cualquier establecimiento industrial ó rural, en las administraciones públicas y en las transacciones del comercio.

Separadas las lecciones de las explicaciones y ejemplos, creo haber eliminado la dificultad que á muchos jóvenes se presenta en el estudio por la mezcla de unas y otros.

Los problemas ó cuestiones que he elegido para practicar en ellos las reglas establecidas son numerosos, algunos de los mas difíciles, y todos de un uso muy frecuente en las diversas posiciones que el hombre puede ocupar en la sociedad.

En fin, yo he procurado que mis lecciones reunan la claridad, concision, generalidad y exactitud necesarias, para hacerlas igualmente útiles á toda clase de personas, y facilitar su estudio á la juventud; y si el resultado corresponde á mis buenos deseos, me consideraré bien compensado del pequeño trabajo que he tenido al formar la presente obrita.

SIMON DE LAVALLE.

MANUAL

DE

ARITMÉTICA COMERCIAL.

LECCION PRIMERA.

NOCIONES PRELIMINARES.

1. *P*. Qué son Matemáticas?

R. Las ciencias que tratan de la cantidad.

2. *P*. En qué se dividen las Matemáticas?

R. En puras y mixtas.

3. *P*. Qué son Matemáticas puras?

R. Las que tratan de la cantidad en general.

4. *P*. Qué son Matemáticas mixtas?

R. Las que tratan de la cantidad considerada en los cuerpos ó en las propiedades de ellos.

5. *P*. Y qué es cantidad?

R. Todo lo que es capaz de aumento ó diminucion; pero las Matemáticas solo tratan de aquellas cantidades que pueden medirse ó compararse con otra de su especie.

6. *P*. En qué se divide la cantidad?

R. En discreta y continua.

7. *P*. Qué es cantidad discreta?

R. La que se considera como la reunion de otras menores ó como parte de otra mayor.

8. *P*. Qué es cantidad continua?

R. La que se considera como un todo sin interrupcion ni separacion alguna de partes.

9. *P*. Qué es Aritmética?

R. La ciencia que trata de la cantidad discreta expresada por números.

10. Qué es número?

R. Es el resultado de la comparacion de la unidad con la cantidad.

11. *P*. Y qué es unidad?

R. Es la cantidad que se toma por término de comparacion para formarnos una idea del valor de otra de su misma especie.

12. *P*. De cuántos modos puede ser la cantidad respecto de la unidad?

R. La cantidad puede ser mayor, igual ó menor que la unidad con quien se compara.

13. *P*. Qué es número entero?

R. Es el que expresa la relacion entre la unidad y una cantidad que la contenga una ó mas veces exactamente.

14. *P*. Qué es número quebrado?

R. El que expresa la relacion entre la unidad y una cantidad menor que ella.

15. *P*. Qué es número mixto?

R. El que expresa la relacion entre la unidad y una cantidad mayor, que la contenga una ó mas veces, y parte de otra.

16. *P.* Qué es número abstracto?

R. El que se enuncia sin determinar su especie.

17. *P.* Qué es número concreto?

R. El que se enuncia determinando su especie.

Explicaciones y Ejemplos.

1.

Ciencia es el conocimiento cierto, fundado y evidente que se tiene de una cosa, y como las Matemáticas poseen en alto grado estas cualidades, se han llamado por excelencia ciencias exactas.

2, 3, 4.

Pertenecen á las Matemáticas puras la Aritmética, la Geometría y otras ciencias derivadas de ellas; y se llaman mixtas la Mecánica, la Astronomía, y en general todas las ciencias en que se aplican las Matemáticas puras al descubrimiento de las propiedades de los cuerpos. Por esto las Matemáticas mixtas se han llamado tambien Físico-matemáticas.

5.

Un caudal es cantidad y lo mismo un camino y un jardin. Tambien un dolor, una pasion y una necesidad como la sed, son cantidades; porque todas estas cosas son capaces de aumento y diminucion: pero el caudal puede compararse con cierta cantidad de dinero, el camino con cierta medida, y el jardin con alguna extension, de modo que venga á averiguarse cuánto dinero tiene el caudal, cuántas medidas el camino, y cuántas extensiones el jardin; por cuya razon estas cantidades podrán considerarse en las Matemáticas, no sucediendo lo mismo con el dolor, la pasion y la sed; porque no es posible averiguar cuántas veces cabe un dolor en otro, una pasion en otra, etc., y por lo tanto esta clase de cantidades no serán el objeto de las Matemáticas.

6, 7, 8.

La division de la cantidad en discreta y continua se comprende fácilmente considerando que un camino le puedo ver simplemente bajo el aspecto de una distancia ó como una reunion de distancias menores que llamaré leguas ó millas : otro camino mas corto le puedo considerar tambien como una distancia ó como una parte de legua. Los dos primeros modos de considerar la distancia conducen á la idea de la cantidad continua, y los dos segundos á la idea de la cantidad discreta.

9.

Tambien puede definirse la Aritmética diciendo que es la ciencia que trata de la naturaleza y uso de los números.

10, 11.

Una porcion de libros es sin duda una cantidad, y si para averiguar cuántos hay voy contando : un libro, dos libros, etc., es libro la unidad; y suponiendo que he llegado á contar hasta doce libros, es doce el número que expresa la relacion entre la unidad libro y el monton de libros.

La unidad es arbitraria; porque si mi objeto es averiguar los hombres que tiene una compañía, es hombre la unidad; si deseo saber las compañías de que consta un batallon, es compañía la unidad : si mi intento es averiguar los batallones que hay en una division, ya es batallon la unidad, y así hasta el infinito.

12.

Al medir un pedazo de paño, por ejemplo, con la vara que se usa al efecto, la longitud del paño es la cantidad y la longitud de la vara es la unidad; y como el paño puede tener mas de una vara, una vara justa ó menos de una vara, se sigue que la cantidad puede ser mayor, igual ó menor que la unidad.

13, 14, 15.

Al medir varios retazos de paño se han hallado los resultados siguientes :

En el primero cupo la extension de la vara doce veces justas.

En el segundo una vez exactamente. Deduzco, pues, que doce y uno son los números enteros que expresan la relacion entre la extension de los retazos y la extension de la unidad de medida.

En el tercero no ha cabido la vara, antes bien el retazo ha quedado por la mitad y digo que tiene media vara, siendo medio el número quebrado que expresa la relacion entre el retazo como cantidad y la vara como unidad.

En el cuarto retazo finalmente ha cabido la vara dos veces, y media vez mas : luego este retazo tiene dos y media varas, y es dos y medio el número mixto que resulta de comparar la unidad de medida con la extension del retazo.

16, 17.

Doce, medio, uno, dos, son números abstractos, porque no se expresa la unidad á que se refieren. Doce hombres, una vara, medio peso, dos libros son números concretos, porque se ha expresado la clase de unidades á que se refieren. Nótese que una vara ha sido á la vez unidad y número, á saber, unidad cuando se eligió para medir, y número cuando se expresó de este modo la longitud del retazo que no contenia ni mas ni menos. (Ej. 13, 14, 15.)

LECCION II.

SISTEMA DE LA NUMERACION.

18. *P*. Qué entendemos por sistema de numeracion?

R. La parte de la Aritmética que enseña á enunciar y representar con cifras todos los números posibles.

19. *P*. Cuáles son las cifras que nosotros usamos y sus nombres?

R. Las cifras, guarismos ó caracteres de que nosotros usamos para representar todos los números y los nombres que les damos son los siguientes:

1	2	3	4	5
Uno:	dos:	tres:	cuatro:	cinco:
6	7	8	9	0
seis:	siete:	ocho:	nueve:	cero:

20. *P*. Cuáles son los valores de estas cifras?

R. La primera 1 representa singularidad, es decir, una cosa sola: la otra 2, la reunion de una y una: la otra 3, la reunion de una, una y una, ó de dos y una, y asi hasta esta cifra 9 que representa la reunion de ocho y una.

21. *P*. Y la cifra 0 para qué sirve y qué vale?

R. Esta cifra nada vale por sí; pero sirve para hacer valer á otras, y para ocupar en las combinaciones de los números los lugares que de otro modo quedarian vacíos.

22. *P*. A cuáles de estas cifras se llama significantes?

R. A todas excepto el 0, y se les da este nombre no solo para distinguirlas de él, sino para expresar que tienen valor propio.

23. *P*. Y cómo con solo las cifras expresadas se pueden representar todos los números?

R. Porque se ha establecido que cada cifra, además del valor que tiene por sí sola, valga diez veces mas si ocupa el segundo lugar de la derecha hácia la izquierda, cien veces mas si ocupa el tercer lugar, mil veces mas si ocupa el cuarto, diez mil veces mas si ocupa el quinto lugar; y en general cualquier cifra vale diez veces mas de lo que valdria si estuviera en el inmediato lugar de la derecha.

24. *P.* Segun esto cuántos valores tiene ó pueden considerarse en cada cifra?

R. Cada cifra en una combinacion tiene dos valores: uno el que representaria si estuviese sola, y otro el que representa por razon del lugar que ocupa.

25. *P.* Despues del nombre natural de cada cifra, qué otro se les da para manifestar el lugar que ocupan en una combinacion?

R. A las que ocupan el primer lugar de la derecha se las llama unidades, á las del segundo lugar decenas, las del tercero centenas, y asi de los demás como se manifiesta en estas dos series de lugares y nombres.

13°	12°	11°	10°	9°	8°	7°	6°	5°	4°	3°	2°	1° lugares.
unidad de billon.	centena de millar de millon.	decena de millar de millon.	unidad de millar de millon.	centena de millon.	decena de millon.	unidad de millon.	centena de millar.	decena de millar.	unidad de millar.	centena simple.	decena simple.	unidad simple.

26. *P.* Cómo se consideran compuestas las decenas, centenas, etc.?

R. Cada diez unidades componen una decena : cada diez decenas una centena : cada diez centenas un millar : cada diez millares una decena de millar, etc.; de modo que nunca se ofrece decir mas de nueve unidades, nueve decenas, etc.; porque en llegando á diez de una especie, ya componen una de la inmediata superior.

27. *P.* Cómo se llama este sistema?

R. Se llama décuplo, no solo porque segun él se expresan todos los números con diez cifras, sino porque cada diez unidades de una clase componen una de la superior, ó á la inversa cada unidad de una clase hacen diez de su inmediata inferior.

28. *P.* Qué deberá tenerse presente despues de colocada una cifra cualquiera respecto al lugar que ocupa y á los que faltan por escribir?

R. Despues de estar cierto del lugar que la cifra escrita ocupa en la combinacion, deberá tenerse presente que si ella ocupa, por ejemplo, el sétimo lugar, faltan seis lugares por escribir; si ocupa el sexto lugar faltan cinco, si el quinto, cuatro, y en general siempre faltarán tantos lugares como el número que expresa el lugar ocupado por la primera escrita, menos uno.

29. *P.* Al enunciar las cantidades compuestas de diversas especies de unidades hemos de decir tantos millares, tantas decenas, etc.?

R. Al enunciar las cantidades se expresan las unidades por sus nombres naturales, uno, dos, tres hasta nueve: á las decenas se les llama diez, veinte, treinta hasta noventa; á las centenas ciento, doscientos hasta novecientos, de modo que podrémos decir que

Unidades son de uno hasta nueve.
Decenas . . de diez á noventa.
Centenas . . de ciento á novecientos.
Millares . . de mil á nueve mil.
Decenas de millar - de diez mil á noventa mil.
Centenas de millar - de cien mil á novecientos mil.
etc. etc. etc.

30. *P.* Cómo se escribe con cifras una cantidad enunciada?

R. Se escribe la cifra del órden mas elevado, y teniendo bien presente las que faltan por escribir y el lugar que corresponde á cada una de las otras cifras expresadas en la combinacion, irémos escribiendo estas en sus respectivos lugares y llenando con ceros los que falten.

31. *P.* Y cómo se lee una cantidad representada por cifras ó guarismos?

R. Primero se separan las cifras de tres en tres de la derecha hácia la izquierda, poniendo en la primera division un punto, en la segunda un uno, en la tercera un punto, eu la cuarta un dos, etc. Luego se lee cada combinacion de las separadas como si estuviese sola diciendo mil al llegar á cada punto, trillon, billon, millon, al llegar al tres, al dos y al uno, y expresando la clase de unidades al llegar á las últimas cifras de la derecha.

32. *P.* Qué son números simples y compuestos?

R. Se llaman números dígitos ó simples á los que se escriben con una sola cifra, y compuestos á los que se representan por dos ó mas.

Explicaciones y Ejemplos.

18 á 27.

Como una agregacion á lo que hemos dicho sobre sistema de numeracion, expondrémos nuestro método de enseñar á escribir las cantidades ó de traducirlas del dioma vulgar al lenguaje aritmético.

Para esto nos valemos del siguiente cuadro que hacemos copiar en la pizarra, y debajo de él se van escribiendo diversas cantidades del modo que explicarémos á continuacion :

CUADRO SINÓPTICO DE LA NUMERACION.

	3er GÉNERO billones		2° GÉNERO millones		1er GÉNERO unidades simples.	
	2a clase millares	1a clase unidades	2a cl. millares	1a cl. unidades	2a cl. millares	1a cl. unidades
Especies	3a 2a 1a	3a 2a 1a	3a 2a 1a	3a 2a 1a	3a 2a 1a	3a 2a 1a
						4 0 0
					7 0	0 0 0
				8	0 0 0	0 0 0
			9	0 0 8	0 7 0	4 0 0
		8	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0
		3 0 8	0 0 9	0 8 0	7 0 0	0 4 0
	5	0 0 0	3 0 0	4 0 0	6 0 6	0 0 3
	7 9 0	0 4 0	0 0 0	0 5 3	0 4 4	3 3 2

Las preguntas que nosotros hacemos relativamente á este cuadro y á lo explicado sobre sistema de numeracion, son estas ú otras semejantes, á las cuales exigimos las respuestas siguientes:

P. En qué se dividen las colecciones de cifras?

R. En géneros.

P. En qué se dividen los géneros?

R. En clases.

P. Y las clases?

R. En especies.

P. Cuántas clases tiene cada género?

R. Dos.

P. Y cúantas especies tiene cada clase?

R. Tres, y á cada especie ha de corresponder precisamente una cifra significante ó un cero.

P. Cuál es el primer género?

R. El de las unidades simples.

P. Cuál es el segundo género?

R. El de los millones.

P. Y el tercero?

R. El de los billones, y así en seguida.

P. Explicadme la descomposicion del primer género.

R. El primer género que, como he dicho, es el de las unidades simples, se divide en tres clases, á saber: la primera de unidades, que contiene tres especies que son: unidad, decena y centena simples; y la 2ª clase es de millares y contiene unidad, decena y centena de millar, que son sus tres especies.

P. Analizadme el segundo género.

R. Es de millones, se divide en 1ª clase de millones y la 2ª de millares, y la primera de estas contiene las unidades, decenas y centenas de millon que son sus tres especies; y la 2ª las unidades, decenas y centenas de millar de millon que son las segundas. Del mismo modo analizaria cualquier género.

P. Qué se sigue de la existencia de una especie 2ª ó 3ª, de una clase 2ª, ó de un género 2º, 3º, etc.

R. Cuando hay género 4º se deduce que hay 3º, 2º y 1º; si hay 3º, que existen el 2º y 1º, y si hay 2º que tambien hay 1º. Por lo que hace á las clases, las segundas suponen que hay primeras, y en cuanto á las especies no puede haber tercera sin segunda y primera, ni segunda sin primera.

P. Luego si V. sabe la especie, clase y género de una cifra, conocerá V. todas las que faltan por escribir á su derecha?

R. Sí, señor; porque averiguaré primero las que faltan para completar su clase, luego su género y luego los géneros que deban quedar á la derecha si no se trata del primero.

P. Cómo escribirémos cuatrocientas unidades simples?

R. La única cifra significante que se me da es 4 y corresponde por ser centenas simples á la 3ª especie de 1ª clase del primer género; luego no está seguida de otra clase ni de otro género sino solo de dos especies cuyos lugares supliré con ceros así: 400, y lo mismo me hubiera dicho el cuadro si hubiera colocado la cifra 4 en el lugar que le corresponde por su especie, clase y género.

P. Cómo escribirá V. setenta mil unidades simples?

R. Expresando la cifra 7, que he de escribir, decenas de millares simples, pertenece á la 2ª especie, de la 2ª clase, del primer género; luego falta agregarle una especie para hacerla de 2ª, y despues una clase para que la suya sea 2ª, y ningun género por ser del primero.

Al añadir á la cifra 7 la especie que le falta, quedará así : 70, y al agregarle la clase así : 70,000 que es lo que se me pidió. Lo mismo me hubiera indicado el cuadro.

P. Escriba V. ocho millones.

R. La cifra 8 que he de poner pertenece á la 1ª especie, 1ª clase y 2º género, luego no tengo que pensar en añadirle especie ni clase, sino solo un género de este modo :

$$8_{1}000.000$$

P. Y cómo se escribirán en el cuadro las cantidades que tengan mas de una cifra significante ?

R. Se van escribiendo en el lugar que les correspondan las cifras significantes principiando por la de un órden mas elevado y luego se llenan con ceros los lugares intermedios.

P. Escriba V. nueve mil y ocho millones, setenta mil y cuatrocientas unidades simples.

R. Colocaré en el cuadro las cifras significantes de esa cantidad en esta forma :

$$9.,,\ 8_{1},\ 7,.4,,$$

y llenando los lugares vacios con ceros resultará bien expresa la cantidad.

$$9,008_{1}070.400$$

P. Escriba V. ocho billones.

R. Primero lo pondré en el cuadro así :

$$8_{2},,,\cdot,,,_{1},,,\cdot,,,$$

y luego llenando los lugares resultará

$$8_{2}\,000.\,000_{1}\,000.\,000$$

P. Cómo se escribirán trescientos ocho billones, nueve mil ochenta millones, setecientas mil cuarenta unidades simples ?

R. Primeramente aparecerán en el cuadro en esta forma:

$$3,\,8_{2},,\,9.,\,8,\,_{1}\,7,,.,\,4,$$

y luego así :

$$308_{2}\,009.\,080^{1}\,700.040$$

Y lo mismo haria con otra cualquier cantidad.

P. Y no podrá escribirse una cantidad sin trasferirla al cuadro ?

R. Sí señor : pero es porque insensiblemente á fuerza de considerar sobre él el órden, y dependencia de las cifras en varias combinaciones, donde quiera que vemos una cantidad, ó cuando tratamos de escribirla, imaginamos un cuadro anexo, que en el primer caso nos suministra el modo de leerla, y en el segundo el de conocer si hemos cometido alguna equivocacion al representarla en cifras.

28 á 30.

Dejando á la eleccion de los profesores el instruir ó no á los alumnos en los ejercicios anteriores sobre el cuadro sinóptico, expondrémos aquí algunos ejemplos independientes de él acerca de la escritura de cantidades.

1° Se nos dice que escribamos ochenta que son ocho decenas — Escribo el 8; pero como son decenas deben tener á su derecha unidades, y no habiéndolas en el número dado las suplo con un cero y escribo 80.

2° Propongamos escribir cuatro mil y cinco unidades — Escribo el 4 y como despues de los millares á la derecha debe haber centenas, decenas y unidades, no habiéndome dado mas de cinco unidades supliré con ceros las centenas y decenas, y escribiré. . . . 4,005.

3° Si se me mandan escribir sesenta mil diré: el 6 que he de poner son decenas de millar, luego faltan los millares, centenas, decenas y unidades que supliré con ceros de este modo. . . . . 60,000.

4° La cantidad: ocho millones, cuarenta mil doscientos tres se principiará á escribir por los 8ı millones, luego por la clase de millares de este modo 040, y finalmente la clase de unidades 203 y todo reunido hace 8ı 040,203.

5° Siete mil millones, ocho mil cuarenta lo escribo así: siete mil 7., millones 000ı, ocho mil 008., y cuarenta 040, y reunidos así: 7.000ı008.040.

6° Escribir con tres figuras ó cifras los números siguientes ó semejantes:

Ocho.	008
Noventa.	090
Setecientos.	700
Doscientos uno.	201

Trescientos cuarenta y nueve. . . .	349
Cuarenta y cinco.	045
Ciento diez.	110
Uno.	001
Nada.	000
Diez.	010

El objeto de este último ejemplo es facilitar la escritura de cada período de tres cifras que es como se van escribiendo las cantidades.

31.

La cantidad 9$_2$003.040$_1$036.010 se leerá diciendo: nueve billones, tres mil cuarenta millones, treinta y seis mil y diez unidades simples.

32.

Qué clase de números serán 12, 306 y 90?

Digo que compuestos porque constan de mas de una cifra.

Y los números 1, 5 y 9? Respondo que simples, porque se expresan por una. En realidad todos los números enteros excepto el uno son compuestos, los unos de varias unidades, los otros de decenas y unidades, etc., de modo que al llamar á los unos simples y los otros compuestos solo se ha atendido al modo mas sencillo con que están escritos. Yo hubiera dicho, cuáles son los números simples por su figura? Y hubiera contestado del 1 al 9. Y compuestos por su figura? Desde 10 inclusive en adelante.

NOTA.

Corresponde á los maestros insistir en la escritura de las cantidades enunciadas con repetidos ejemplos; pues sucede comunmente que por la poca atencion que se presta á esta interesante parte de la Aritmética, se cometen errores de consideracion muy particularmente al tiempo de plantar cuestiones con números algo crecidos ó compuestos de pocas cifras significantes con ceros intermedios.

LECCION III.

ADICION DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

33. *P*. Cuáles son las operaciones que se ejecutan con los números?

R. En sustancia solo dos, que son sumar y restar; pero de los diferentes modos que hay de hacer estas operaciones se han deducido otras que son multiplicar y dividir, y de estas otras dos que son las de elevar á potencia y extraer raices.

34. *P*. Qué es adicion?

R. Es la operacion por la cual se reunen varios números de una misma especie en uno solo.

35. *P*. Cómo se llaman los números que entran en esta operacion?

R. Los que se dan para sumar se llaman sumandos ó partidas, y el resultado suma.

36. *P*. Qué signo se usa para esta operacion?

R. Este + que se lee *mas*, el cual se escribe entre los sumandos, y para el resultado de esta ú otras operaciones, este otro que se lee *igual* =; como $3 + 2 = 5$; 3 mas 2 igual 5.

37. *P*. Qué debe saberse para sumar?

R. Lo que componen los números dígitos de dos en dos, cuyas sumas deben aprenderse de memoria.

38. *P*. Cómo se ejecuta la adicion de los números enteros?

R. Se escriben en columna los sumandos de modo que las unidades estén bajo las unidades, las decenas bajo las decenas etc., y se tira una raya por debajo. Despues se suman las unidades escribiendo las que sobren y llevando por cada diez una para agregarla á la columna de las decenas; se suman estas escribiendo solamente las que sobren y llevando por cada diez una para agregarla á la columna de las centenas, y así sucesivamente hasta acabar.

39. *P*. A qué cuestiones se aplica la adicion?

R. A todas las que tienen por objeto averiguar lo que componen juntos varios números que antes estaban ó se consideraban separados.

40. *P*. De qué especie es la suma en una operacion de números concretos?

R. Siempre de la especie de los sumandos.

Explicaciones y Ejemplos.

33 á 36.

El uso de los signos para indicar las operaciones que se ejecutan con los números es de la mayor utilidad, porque recuerda al calculador la relacion que existe entre ellos.

Supongamos que se diga que de las edades de Juan que tiene 7 años, y Pedro que tiene 6 años juntas no hay diferencia con las de Diego que tiene 8, y Francisco que tiene 5 si tambien se juntan.

El aritmético expresará esta circunstancia escribiendo :

$$7 + 6 = 8 + 5$$

De varios niños que daban leccion, se apuntaron por yerros que cometió el primero 3 puntos, 5 al segúndo y 9 al tercero; pero el cuarto cometió 17 puntos; esto es, tantos como los otros tres reunidos.

No hay duda que esta circunstancia estará muy bien expresada de este modo:

$$3 + 5 + 9 = 17$$

En este último caso 3, 5 y 9 son los sumandos, y 17 la suma.

37.

Para ejercicio de los principiantes pondrémos aquí la siguiente tabla que deben aprender de memoria como el medio mejor de evitar el entorpecimiento que sufren en esta operacion aun las personas versadas en otros cálculos.

TABLA DE SUMAR.

1	y 1	son	2	4	y 1	son	5	7	y 1	son	8
1	2		3	4	2		6	7	2		9
1	3		4	4	3		7	7	3		10
1	4		5	4	4		8	7	4		11
1	5		6	4	5		9	7	5		12
1	6		7	4	6		10	7	6		13
1	7		8	4	7		11	7	7		14
1	8		9	4	8		12	7	8		15
1	9		10	4	9		13	7	9		16
2	y 1	son	3	5	y 1	son	6	8	y 1	son	9
2	2		4	5	2		7	8	2		10
2	3		5	5	3		8	8	3		11
2	4		6	5	4		9	8	4		12
2	5		7	5	5		10	8	5		13
2	6		8	5	6		11	8	6		14
2	7		9	5	7		12	8	7		15
2	8		10	5	8		13	8	8		16
2	9		11	5	9		14	8	9		17
3	y 1	son	4	6	y 1	son	7	9	y 1	son	10
3	2		5	6	2		8	9	2		11
3	3		6	6	3		9	9	3		12
3	4		7	6	4		10	9	4		13
3	5		8	6	5		11	9	5		14
3	6		9	6	6		12	9	6		15
3	7		10	6	7		13	9	7		16
3	8		11	6	8		14	9	8		17
3	9		12	6	9		15	9	9		18

Para hacer extensivo el uso de esta tabla á cualquier número, basta observar que descomponiéndole mentalmente, siempre se estará en el caso de agregar las unidades que contenga á otras unidades.

Por ejemplo: al querer sumar 12 y 3, considerando al 12 descompuesto en 10 y 2, hallaré la suma diciendo mentalmente: 2 y 3 son 5, y como dejé 10 separados son 15.

Si fueren 34 y 8 digo: el 34 se compone de 30 y 4; pero 4 y 8 son 12; luego 34 y 8 son 42.

Si acaeciere sumar 99 con 7, digo: 9 y 7 16, luego 99 y 7 son 106, y así de los demás.

38.

Con el fin de poner en práctica la regla de sumar, propondrémos una operacion en que los sumandos sean 4.046, 3.999 y 2.205.

$$\left.\begin{array}{r} 4.046 \\ 3.999 \\ 2.205 \end{array}\right\} \text{sumandos.}$$
$$\overline{10.250} \text{ suma.}$$

Despues de escritos en columna los sumandos y tirada la raya, empezaré á sumar por las unidades diciendo:

6 y 9 son 15 y 5 son 20: escribo 0 y llevo 2; luego pasaré á las decenas de este modo:

2 que llevaba y 4 son 6 y 9 son 15: escribo 5 y llevo 1.

Luego seguiré á las centenas:

1 que llevo y 9 son 10 y 2 son 12: escribo 2 y llevo 1.

Pasaré á los millares diciendo :

1 que llevaba y 4 son 5, y 3 son 8, y 2 son 10 : escribo 0, y llevo 1 que escribo bajo las decenas de millar.

Estos ejemplos que siguen pueden copiarse por los principiantes sin trasladar las sumas á la pizarra ó papel, y despues de ejecutadas las operaciones se comparan con las sumas de los ejemplos, volviendo á repasarlas en caso de no estar iguales.

3.045	36	360
520	1.528	2.100
800	345	789
99	9	4.001
4.464	1.918	7.250
5.008	7.502	3.210
333	305	3.102
45	90	3.012
36.002	2.103	3.201
41.388	10.000	12.525

39 y 40.

Cuestiones á que es aplicable la adicion.

Cuestion primera. — Se reunen varios niños para dar un refresco en su certámen que consta de Constitucion, Gramática y Aritmética. Los niños de la clase de Constitucion han reunido 72 reales, los de Gramática 27 y los de Aritmética 50 reales. Deseamos saber con cuánto se cuenta para el refresco.

Resolucion. — Tratándose de reunir reales que antes estaban separados, la operacion es de sumar, y colocados los sumandos en el órden conveniente; á saber:

De la clase de Constitucion. . . .	72	reales.
— de Gramática.	27	
— de Aritmética.	50	
Total.	149	reales.

Y verificada la suma hallaré que son 149 reales con los que se puede contar para el refresco, y la suma son reales porque los sumandos fueron reales.

Cuestion segunda. — Un comerciante forma inventario de lo que constituye su capital, y halla que tiene en dinero 3.456 pesos, en mercancías 9.345, en casas 50.030, y en créditos contra varias personas 999 pesos. Quiere saber á cuánto asciende todo junto.

Resolucion. — Pondrémos los sumandos en columna, á saber:

Dinero efectivo.	3.456	pesos.
Mercancías.	9.345	
Casas.	50.030	
Créditos.	999	
y será el capital total.	63.830	pesos.

Cuestion tercera. — Segun el censo, una de las parroquias de cierta poblacion tiene 7.000 habitantes, otra de las parroquias tiene 2.999 y otra 10.001 habitantes. ¿Cuántos tendrá toda la poblacion?

Resolucion. — Puestos los sumandos en columna,

1ª parroquia.	7.000	habitantes.
2ª —	2.999	
3ª —	10.001	
hallaré total de poblacion. . . .	20.000	habitantes.

Cuestion cuarta. — Con el objeto de concluir pronto el recibo de unas pacas de algodon que se habian comprado, tres individuos se ocupaban de recibirlas y pesarlas, y cada uno tomó razon del número de sus pacas y de las libras que pesaron. El 1º recibió 20 pacas con peso total de 2.725 libras, el 2º recibió 15 pacas con 2.236 libras, y el 3º recibió 25 pacas con 3.756 libras. ¿Cuántas pacas se han recibido y cuántas libras de algodon en ellas?

Resolucion. — Planteo los sumandos de pacas y libras en esta forma:

1º.	20	pacas con	2.725 libras.
2º.	15	—	2.236
3º.	25	—	3.756
Totales. . . .	60	pacas. . .	8.717 libras.

LECCION IV.

DE LA SUSTRACCION.

41. *P*. Qué es sustraccion?

R. Es la operacion por la cual se averigua la diferencia que hay entre dos números de una misma especie.

42. *P*. Cómo se llaman los números que entran en esta operacion?

R. El mayor se llama minuendo, el menor sustraendo y la diferencia residuo.

43. *P*. Cuál es el signo de restar ó de la sustraccion?

R. Este — que se pronuncia *menos* y se antepone al sustraendo; como $3 - 2 = 1$, que se lee 3 menos 2 igual 1.

44. *P*. Qué debe saberse para ejecutar la sustraccion con prontitud?

R. Las diferencias que hay de cada número dígito á sus superiores hasta diez y ocho que es el mayor minuendo que se presenta en el curso de la operacion, y esto debe saberse bien de memoria.

35. *P*. Cómo se restan los números enteros cuando todas las cifras del sustraendo son menores que sus correspondientes del minuendo?

R. Se coloca el sustraendo debajo del minuendo como para sumar y se tira una raya. Luego se va restando cada cifra del sustraendo de su correspondiente del minuendo principiando por las unidades y debajo se van escribiendo los residuos ó ceros cuando no los haya.

46. *P.* Y si alguna cifra del minuendo es menor que su correspondiente del sustraendo?

R. Entonces se toma mentalmente una unidad de la clase inmediata superior, que contiene diez de la inferior, se agregan á estas para poderlas restar, y se tiene presente que la clase siguiente está disminuida de una unidad.

47. *P.* Y si en la clase de donde voy á tomar la unidad solo hay cero y lo mismo en la que sigue?

R. Se continúa en buscar la unidad superior donde haya cifra significante : esta compondrá diez de su inmediata; si esta es cero dejaré alli nueve y la una que queda compondrá diez de su inmediata menor; si tambien es cero dejaré alli nueve, y así seguiré hasta la cifra que no se pudo restar, habiendo quedado todos los ceros como nueves y la cifra significante disminuida de una unidad.

48. *P.* Cómo se resta una cantidad de 10, 100, 1.000, 10.000, etc.?

R. Se puede ejecutar, si se quiere, principiando por la izquierda restando todas sus cifras de 9 y la última significante de 10.

49. *P.* A qué casos se aplica la sustraccion?

R. A todos aquellos en que se quiere saber la diferencia entre dos cosas que pueden expresarse por números, o que queda de la mayor quitando una menor ó lo que excede la mayor á la menor.

50. *P*. De qué especie es el residuo?

R. De la misma que el sustraendo y minuendo.

Explicaciones y Ejemplos.

41, 42, 43.

La diferencia que hay entre las edades de Antonio y Juan es la misma que la que existe entre las de Rosa y Ana, porque Antonio tiene 12 años y Juan tiene 5, en tanto que Rosa tiene 15 y Ana 8 años. Esto lo expresaríamos aritméticamente de este modo :

$$12 - 5 = 15 - 8$$

De una cantidad de 50 pesos que nos entregaron para gastos se han distribuido en limosnas 15 pesos, en comida 30 pesos y nos quedan 5 pesos. Lo expresarémos aritméticamente :

$$50 - 30 - 15 = 5$$

en cuyo ejemplo 50 es minuendo, 30 y 15 sustraendos y 5 el resíduo.

Tenia yo 6 pesos, los gasté y nada queda. Lo expreso así :

$$6 - 6 = 0$$

donde 6 es el minuendo, 6 sustraendo y 0 residuo.

44.

Muy raros son los niños que no cometen errores de consideracion en las restas por no saber de memoria los residuos que contiene la siguiente tabla, que bien aprendida les será muy útil. Bien sabemos que estos residuos se podrian buscar en la de sumar: pero queremos acomodar el conocimiento de esta tabla á la capacidad de cualquier niño, poniendo minuendo, sustraendo y residuo en el mismo órden en que los han de enunciar:

TABLA DE RESTAR.

sust.		min.	res.	sust.		min.	res.	sust.		min.	res.
1	de	2	1	3	de	4	1	5	de	6	1
1		3	2	3		5	2	5		7	2
1		4	3	3		6	3	5		8	3
1		5	4	3		7	4	5		9	4
1		6	5	3		8	5	5		10	5
1		7	6	3		9	6	5		11	6
1		8	7	3		10	7	5		12	7
1		9	8	3		11	8	5		13	8
1		10	9	3		12	9	5		14	9

sust.		min.	res.	sust.		min.	res.	sust.		min.	res.
2	de	3	1	4	de	5	1	6	de	7	1
2		4	2	4		6	2	6		8	2
2		5	3	4		7	3	6		9	3
2		6	4	4		8	4	6		10	4
2		7	5	4		9	5	6		11	5
2		8	6	4		10	6	6		12	6
2		9	7	4		11	7	6		13	7
2		10	8	4		12	8	6		14	8
2		11	9	4		13	9	6		15	9

sust.		min.	res.	sust.		min.	res.	sust.		min.	res.
7	de	8	1	8	de	9	1	9	de	10	1
7		9	2	8		10	2	9		11	2
7		10	3	8		11	3	9		12	3
7		11	4	8		12	4	9		13	4
7		12	5	8		13	5	9		14	5
7		13	6	8		14	6	9		15	6
7		14	7	8		15	7	9		16	7
7		15	8	8		16	8	9		17	8
7		16	9	8		17	9	9		18	9

45.

Tratemos de poner en práctica la regla de restar, cuando las cifras del minuendo son mayores que las del sustraendo.

Veamos la diferencia entre los números

```
   129.450 minuendo
y   18.340 sustraendo
  --------
   111.110 resíduo.
```

Hemos escrito el sustraendo debajo del minuendo como si lo fuéramos á sumar : hemos tirado una raya y dicho así :

0 de 0 es 0, 4 de 5 es 1, 3 de 4 es 1, 8 de 9 es 1, 1 de 2 es 1, nada de 1 es 1 : y colocando cada residuo en el lugar correspondiente ha resultado 111.110

46.

En este caso en que hay cifras en el minuendo menores que las del sustraendo hemos procedido del modo siguiente:

minuendo.	30.936
sustraendo..	19.845
resíduo.	11.091

Bien colocados minuendo y sustraendo, digo: 9 de 6 es 1, 4 de 3 no puede ser: (tomo una centena que son diez decenas y tres que tengo son trece) 4 de 13 son 9, 8 de 8 (porque las centenas están disminuidas) es 0, 9 de 0 no puede ser (tomo una decena de millar que reduzco á millares y son diez millares) 9 de 10 es 1, 1 de 2 (porque las decenas de millar están disminuidas) es 1, y hallo ser el residuo 11.091.

47.

Hablemos del caso en que la cifra de que se va á tomar la unidad es 0 y lo mismo la que sigue, proponiéndonos para ello ver la diferencia entre los siguientes números:

200.003	minuendo
89.745	sustraendo
110.258	residuo.

Emprenderé mi operacion diciendo:

5 de 3 no puede ser (voy á tomar una decena, no hay: una centena, tampoco: un millar, menos: en fin sigo hasta las centenas de millar y tomo una que hace diez

decenas de millar : dejo nueve y tomo una que hace diez millares: dejo nueve y tomo una que hace diez centenas: dejo nueve y tomo una que hace diez decenas : dejo nueve y tomo una que hace diez unidades) entonces diré 5 de 13 (porque reuní las tres que tenia) son 8; 4 de 9 porque son las que dejé) son 5; 7 de 9 (por igual razon) son 2; 9 de 9 es 0, 8 de 9 es 1, y nada de 1 (porque está disminuida) es 1, con lo que habré concluido la operacion.

48.

Bien entendidos los ejemplos anteriores nada mas fácil que comprender la razon porqué, cuando hay que restar un número de otro expresado por la unidad seguida de ceros, se pueden restar cada una de sus cifras de 9 y la última significante de 10. Nos propondrémos la cuestion siguiente :

minuendo.	10.000
sustraendo..	9.836
resíduo.	164

Con efecto, tomada la unidad en la única cifra significante que hay, no dejamos nada de ella, se van dejando nueve en cada lugar donde habia un cero, y al llegar al último se tienen diez unidades. Se restaria diciendo :

6 de 10 son 4, 3 de 9 son 6, 8 de 9 es 1, 9 de 9 es nada, y nada de nada es nada.

Tambien así, principiando por la izquierda : 9 de 9 nada, 8 de 9 es 1, 3 de 9 es 6, y 6 (última significante) de 10 es 4, con lo que el residuo seria 164.

Los siguientes ejemplos de que solo copiarán los principiantes los minuendos y sustraendos pueden servirles de práctica, comparando despues los resultados:

$987_1654.321$	$23_1456.789$
$876_1543.210$	$11_1003.102$
$111_1111.111$	$12_1453.687$
$6_1543.852$	$50_1000.040$
$3_1635.762$	$43_1652.092$
$2_1908.090$	$6_1347.948$
$1_1000.000$	$10_1000.000$
320.945	$9_1720.400$
679.055	279.600

49 y 50.

Solo nos falta hablar de aquellos casos en que es aplicable la sustraccion.

Cuestion primera. — Se desea saber la diferencia de edades entre dos ancianos que tienen el uno 100 años y el otro 93.

Res. — El número mayor es minuendo 100 años.
El menor sustraendo. 93

El residuo ó diferencia de edades. . . . . 7 años;

y son años, porque esta es la especie del minuendo y sustraendo.

Cuestion segunda. — En una escuela donde habia estudiando 106 niños, ¿cuántos quedarán habiendo salido 59 niños que ya han concluido sus estudios?

Resolucion. —	Minuendo	106 niños
	sustraendo	59
quedan.	residuo	47 niños.

Cuestion tercera. — Un niño tiene 96 premios obtenidos por su aplicacion y otro tiene 47; ¿cuántos premios tiene el primero mas que el segundo?

Resolucion. —	Minuendo	96 premios
	sustraendo	47
	exceso ó residuo	49 premios.

Cuestion cuarta. — Un individuo que tenia 3.000 pesos no pudiendo trabajar en cuatro años gastó en el primer año 999 pesos, en el 2º 888, en el 3º 777 y en el 4º 336; ¿cuánto le iba quedando en cada año?

Resolucion. — Tenia el individuo. . . .	3.000 pesos
gastó.	999
Le quedó al fin del primer año. .	2.001 pesos
gastó.	888
Le quedó al fin del 2º.	1.113 pesos
gastó.	777
Le quedó al fin del 3º.	336 pesos
gastó.	336
Luego no le quedó nada.	000

LECCION V.

MULTIPLICACION DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

51. *P.* Qué es multiplicacion?

R. Es la operacion por la cual dando conocidos dos números, se busca un tercero que sea con respecto á uno de ellos lo que el otro es respecto de la unidad.

52. *P.* Qué nombre se da á los números que entran en esta operacion?

R. El número que se da para multiplicar se llama multiplicando, aquel por quien se multiplica multiplicador, y el resultado de la operacion producto.

53. *P.* De cuántos modos pueden ser los productos respecto del multiplicando?

R. Si el multiplicador es mayor que la unidad, el producto será mayor que el multiplicando: si el multiplicador es igual á la unidad, el producto será igual al multiplicando, y si el multiplicador es menor que la unidad, el producto será menor que el multiplicando.

54. *P.* Podeis darme otra definicion mas sencilla de la multiplicacion?

R. Tambien puede decirse que es tomar un número, que se llama multiplicando, las veces que exprese otro que se llama multiplicador.

55. *P.* Qué otros nombres se dan al multiplicando y multiplicador?

R. Tambien se les llama indistintamente factores del producto.

56. *P.* Con qué signo se indica la multiplicacion?

R. Con este signo × que se lee *multiplicado por*, ó simplemente *por*, y se pone entre los factores, como $2 \times 3 = 6$, dos por tres igual seis.

57. *P.* Pueden considerarse en una multiplicacion tres ó mas factores?

R. Aunque en realidad serian mas de una multiplicacion aquellas en que entran mas de dos factores, suelen considerarse tres y mas factores que compongan un solo producto.

58. *P.* Qué debe saberse para multiplicar?

R. Los productos de los números dígitos de dos en dos, los cuales deben aprenderse de memoria.

59. *P.* Cómo se multiplica un número compuesto por uno dígito?

R. Se coloca el dígito debajo de las unidades del compuesto y se tira una raya por debajo. Luego se van multiplicando por el dígito las unidades del compuesto, despues las decenas, en seguida las centenas, etc.; pero solo se van escribiendo las que sobran deducidos los dieces, pues por cada diez se reserva una para agregarla al producto siguiente, y cuando deducidos los dieces no sobra nada, se escribe cero en el lugar que corresponda.

60. *P.* Cómo se multiplica un número dígito por uno compuesto?

R. Escribiendo el dígito debajo del compuesto y ejecutando la operacion como la de un compuesto por un digito.

61. *P*. Porqué ha alterado V. de este modo el órden de los factores?

R. Para mayor comodidad en la operacion, y porque el producto es el mismo, aunque se invierta el órden de los factores.

62. *P*. Cómo se multiplica un número compuesto por otro compuesto?

R. Despues de escrito el factor de menos cifras debajo del que tenga mas, multiplico todo el primer factor por las unidades del segundo, luego por las decenas, etc., teniendo cuidado de empezar á escribir cada producto debajo de la cifra por que se multiplica, y sumando estos productos parciales, se obtendrá el producto total.

63. *P*. Y si alguna de las cifras del factor que hace las veces de multiplicador es cero?

R. No se multiplica por ellas, sino que se sigue á formar á la izquierda el producto parcial de la cifra significante que hubiere.

64. *P*. Qué se hace cuando uno de los factores es la unidad seguida de ceros?

R. Se agregan al un factor tantos ceros como acompañen á la unidad en el otro.

65. *P*. Y si el multiplicando, ó el multiplicador ó ambos factores tienen ceros á su derecha?

R. Se prescinde de los ceros durante la operacion, y al producto se agregan tantos cuantos haya en el multiplicando y multiplicador juntos.

66. *P*. A qué cuestiones se aplica la operacion de multiplicar?

R. A aquellas que tienen por objeto: 1º hacer una cantidad cierto número de veces mayor; 2º cuando conocido el valor de una cosa se quiere saber el de varias de la misma especie; 3º cuando se reducen unidades de especie superior á inferior, y 4º siempre que se haya de tomar un número las veces que exprese otro.

67. *P.* Antes de ejecutada la multiplicacion, cómo se conocerá cuál de los factores es el multiplicando?

R. Se conocerá siempre al multiplicando en que este ha de ser de la especie del producto, la cual debe saberse por la naturaleza de la cuestion.

68. *P.* Y despues de ejecutada la operacion, cómo se conocerá la especie del producto?

R. Por la misma naturaleza de la cuestion, y porque ha de ser de la especie del multiplicando.

69. *P.* Y en todo caso, cómo puede considerarse al multiplicador?

R. Como un número abstracto, que solo expresa las veces que se ha de tomar el multiplicando.

70. *P.* Cómo se llaman los números que contienen á otro dos veces, tres veces, etc.?

R. Un número se llama duplo de otro, cuando le contiene dos veces exactamente; triplo, cuádruplo, quíntuplo, etc., si le contiene tres, cuatro, cinco veces, y en general múltiplo si le contiene varias veces.

Explicaciones y Ejemplos.

51 y 52.

La definicion que hemos dado de la multiplicacion, nos parece la mas elegante y la mas exacta de cuantas se hallan diseminadas en varios Tratados de Matemáticas. Con efecto, si se dijese que multiplicar es hacer un número tantas veces mayor como unidades contiene otro, si se explicase diciendo que era una suma abreviada, etc., etc., tales definiciones convendrian solo á la multiplicacion por números enteros y mayores que la unidad, porque ¿cuántas veces mayor se hace un número cuando se le multiplica por 1, ó por una cantidad menor que 1, ó en fin cuando se la multiplica por 0? Y si esto no es multiplicar, ¿qué otro nombre tiene ó puede dársele? Es menester convenir en que, prescindiendo del significado que la palabra multiplicar tenga en lenguaje comun, debe considerársela aritméticamente segun la definicion que hemos dado de ella, si no se quiere incurrir en mil contradicciones, cuando se haya de aplicar á otra clase de números iguales ó menores que la unidad.

53.

Para explicar cómo aumentan y disminuyen los productos, segun aumenta ó disminuye el multiplicador, y cómo el producto tiene respecto del multiplicando la misma relacion que el multiplicador respecto de la unidad, nos valdrémos del siguiente ejemplo.

Sea el número 4 el que nos proponemos multiplicar por 2, por 1, por $\frac{1}{2}$, y por 0.

Como multiplicar al 4 por 2 es hacerle duplo, porque 2 es duplo de la unidad, el resultado será 8, es decir que: $4 \times 2 = 8$.

Como multiplicar 4 por 1 es hacerlo igual, porque el 1 es igual á la unidad, el producto será el mismo 4, luego $4 \times 1 = 4$.

Como multiplicar al 4 por $\frac{1}{2}$ es hacerle mitad, porque $\frac{1}{2}$ es mitad de la unidad, el resultado será 2, de modo que $4 \times \frac{1}{2} = 2$.

Como multiplicar al 4 por 0 es volverle nada, porque 0 es nada respecto de la unidad, el resultado es 0, y $4 \times 0 = 0$.

Y comparando los resultados:

$$4 \times 2 = 8 \quad 4 \times 1 = 4 \quad 4 \times \tfrac{1}{2} = 2 \quad 4 \times 0 = 0$$

verémos: que un producto puede ser mayor, igual ó menor que el multiplicando, segun que el multiplicador sea mayor, igual ó menor que la unidad.

Nota. — $\frac{1}{2}$ significa media unidad, y he tenido que usar de esta expresion antes de hablar de la clase de números á que pertenece, por convenir así á la claridad de la anterior explicacion que de otro modo hubiera quedado incompleta.

54.

La definicion á que se refiere esta pregunta puede explicarse asi :

Multiplicar 4 por 2 es hacerle mayor tomándole dos veces.

Multiplicar 4 por 1 es hacerle igual tomándole una vez.

Multiplicar 4 por $\frac{1}{2}$ es hacerle menor tomándole media vez.

Y multiplicar 4 por 0 es anularle tomándole ninguna vez ó, lo que es lo mismo, no tomándole.

55, 56, 57.

Multiplicar 7 por 2 es tomar al 7 las veces que expresa el número 2, y el resultado es 14, en cuyo caso serán : 7 el multiplicando, 2 el multiplicador y 14 el producto; pero al 7 y al 2 se les puede llamar indistintamente factores del producto 14.

Esta operacion se indicaria del modo siguiente :

$$7 \times 2 = 14$$

Se puede decir que los números 2, 3 y 4 son factores de 24, porque multiplicados entre sí le producen.

$$2 \times 3 \times 4 = 24.$$

58.

Debiendo saberse de memoria los productos de los números dígitos, agregamos aquí la coleccion de ellos aumentada de los productos de 10, 11 y 12, por el mucho uso que tienen en la práctica, y no la presentamos en la forma pitagórica, porque en la que está, creemos se facilite mas su estudio.

TABLA DE MULTIPLICAR.

1	por 1,	1	2	por 1,	2	3	por 1,	3
1	2,	2	2	2,	4	3	2,	6
1	3,	3	2	3,	6	3	3,	9
1	4,	4	2	4,	8	3	4,	12
1	5,	5	2	5,	10	3	5,	15
1	6,	6	2	6,	12	3	6,	18
1	7,	7	2	7,	14	3	7,	21
1	8,	8	2	8,	16	3	8,	24
1	9,	9	2	9,	18	3	9,	27
1	10,	10	2	10,	20	3	10,	30
1	11,	11	2	11,	22	3	11,	33
1	12,	12	2	12,	24	3	12,	36

4	por 1,	4	5	por 1,	5	6	por 1,	6
4	2,	8	5	2,	10	6	2,	12
4	3,	12	5	3,	15	6	3,	18
4	4,	16	5	4,	20	6	4,	24
4	5,	20	5	5,	25	6	5,	30
4	6,	24	5	6,	30	6	6,	36
4	7,	28	5	7,	35	6	7,	42
4	8,	32	5	8,	40	6	8,	48
4	9,	36	5	9,	45	6	9,	54
4	10,	40	5	10,	50	6	10,	60
4	11,	44	5	11,	55	6	11,	66
4	12,	48	5	12,	60	6	12,	72

7 por	1,	7	8 por	1,	8	9 por	1,	9
7	2,	14	8	2,	16	9	2,	18
7	3,	21	8	3,	24	9	3,	27
7	4,	28	8	4,	32	9	4,	36
7	5,	35	8	5,	40	9	5,	45
7	6,	42	8	6,	48	9	6,	54
7	7,	49	8	7,	56	9	7,	63
7	8,	56	8	8,	64	9	8,	72
7	9,	63	8	9,	72	9	9,	81
7	10,	70	8	10,	80	9	10,	90
7	11,	77	8	11,	88	9	11,	99
7	12,	84	8	12,	96	9	12,	108

10 por	1,	10	11 por	1,	11	12 por	1,	12
10	2,	20	11	2,	22	12	2,	24
10	3,	30	11	3,	33	12	3,	36
10	4,	40	11	4,	44	12	4,	48
10	5,	50	11	5,	55	12	5,	60
10	6,	60	11	6,	66	12	6,	72
10	7,	70	11	7,	77	12	7,	84
10	8,	80	11	8,	88	12	8,	96
10	9,	90	11	9,	99	12	9,	108
10	10,	100	11	10,	110	12	10,	120
10	11,	110	11	11,	121	12	11,	132
10	12,	120	11	12,	132	12	12,	144

59.

Hablemos de la regla para multiplicar un número compuesto por un dígito, y para practicarla nos propondrémos multiplicar 63.973 por 3.

Principiaré por colocar el multiplicador 3 debajo de las unidades del multiplicando y pasaré una raya por debajo.

63.973 multiplicando.
3 multiplicador.

191.919 producto.

Hecho esto, multiplicaré todas las cifras del multiplicando por el multiplicador empezando por las unidades en esta forma :

3 por 3 son 9 : que escribo.
3 por 7 son 21 : escribo 1 y llevo 2.
3 por 9 son 27 y 2 son 29 : pongo 9 y llevo 2.
3 por 3 son 9 y 2 son 11 : pongo 1 y llevo 1.
3 por 6 son 18 y 1 son 19 : pongo 9 y llevo 1.

Y no habiendo mas cifras que multiplicar, escribo la cifra 1 que llevaba del último producto.

60 y 61.

El producto es el mismo aunque se inviertan los factores : $3 \times 4 = 4 \times 3$.

Con efecto, descomponiendo al 3 y al 4 en unidades, verémos que 3 filas de 4 unos es lo mismo que 4 filas de á 3 unos.

1 1 1 1	4
1 1 1 1	4
1 1 1 1	4
3 3 3 3	12

Esto supuesto, cuando se ha de multiplicar un número dígito por otro compuesto, invierto el órden de los factores para mayor comodidad, supuesto que esta inversion no altera el valor del producto.

Supongamos que se ha de multiplicar 6 por 13.468 — é invirtiendo los factores será :

13.468	multiplicador.
6	multiplicando.
80,808	producto.

Donde empezamos á ver, que no es el lugar que ocupa lo que constituye á un número multiplicando ó multiplicador, sino la naturaleza de la cuestion.

62.

Pasemos á la multiplicacion de dos números compuestos, y sea el número 26.936 el que se ha de multiplicar por 24.

Escribo el menor debajo del mayor.

26.936 24	Factores.
107.744 538.72	Productos parciales.
646.464	Producto total.

Despues de multiplicado todo el multiplicando por las 4 unidades del multiplicador, principiando á escribir los productos bajo de ellas, y luego por las decenas con el mismo órden, he sumado los productos parciales y obtenido el producto total.

63.

Algunas veces suele haber ceros entre las cifras del que hace las veces de multiplicador, por ejemplo : si se quiere multiplicar 37.037 por 108.

Despues de planteada la operacion.

$$\begin{array}{r} 37.037 \\ 108 \\ \hline 296296 \\ 37037 \\ \hline 3.999.996 \end{array}$$

he formado el producto del multiplicando por las 8 unidades del multiplicador, y siendo 0 las decenas de este, pasé á la 1 centena por la que multipliqué igualmente al multiplicando : por último he sumado los productos parciales para obtener el total.

64.

Tratándose de multiplicar 356 por 10, 100, 1000, etc., no habrá mas que añadir uno, dos, tres ceros, etc., al dicho número de este modo :

$$356 \times 10 = 3560$$
$$356 \times 100 = 35600$$
$$356 \times 1000 = 356000$$

Donde se ve, que el añadir uno, dos ó mas ceros es hacerle diez, ciento, mil veces mayor, y la inversa sucederia si teniendo ceros á la derecha un número cualquiera, se le quitasen uno, dos ó mas para hacerle diez, ciento, mil veces menor.

65.

Hablarémos de una operacion de multiplicar en que ambos factores tienen ceros á la derecha, por ejemplo: sea el número 36.000 que se ha de multiplicar por 4.500, y planteada la operacion:

36,000
4500
———
180
144
———
162000000

he prescindido de los ceros: multipliqué 36 por 5, luego por 4, sumé los productos parciales y agregué cinco ceros, que son los que habia á la derecha de ambos factores.

Los siguientes ejemplos abstractos servirán de práctica de todas las reglas anteriores.

34558	37000	7003
2002	4080	460
69116	296	42018
69116	148	28012
$69_{1}185,116$	$150_{1}960,000$	$3_{1}221,380$

$$
\begin{array}{r}
4,587 \\
1,000 \\
\hline
4_1587,000
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
10,000 \\
100 \\
\hline
1_1000,000
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
70,000 \\
400 \\
\hline
28_1000,000
\end{array}
$$

66, 67, 68, 69.

Hablarémos de la aplicacion de la regla de multiplicar á los diferentes casos que ocurren en la práctica.

Cuestion primera. Una casa que tiene de largo 9 varas se quiere hacer 4 veces mayor : ¿qué largo se le dará á la casa?

Resolucion. —Esta cuestion da lugar á una multiplicacion, porque se quiere hacer un número mayor de lo que es. El largo de la casa es el multiplicando, porque es el número que se va á tomar algunas veces. Tambien conozco que 4 es el multiplicador, porque expresa las veces que el largo de la casa debe tomarse. Plantearé pues la operacion en esta forma :

$$
\begin{array}{r}
9 \text{ varas.} \\
4 \phantom{\text{ varas.}} \\
\hline
36 \text{ varas.}
\end{array}
$$

Y hallo de este modo en el producto el largo que se le dará á la casa.

Cuestion segunda. — Cuánto importarán 326 quintales de cacao á 20 pesos quintal?

Resolucion. —Conocido el precio de un quintal de cacao, quiero averiguar el valor de varios, y por lo tanto la cuestion da lugar á una operacion de multiplicar : el precio es el multiplicando, porque es el que se ha de tomar varias veces, y el número de quintales es el multiplicador, porque expresa las veces que el precio se ha de tomar. Sin embargo, como el número de los pesos es menor que el de los quintales, plantearé así la operacion.

$$\begin{array}{r} 326 \\ 20 \text{ pesos.} \\ \hline 6520 \text{ pesos.} \end{array}$$

Y hallaré en el producto el total importe del cacao.

En este caso volvemos á hacer notar que es la naturaleza de la cuestion la que nos ilustra acerca de cuál de los números es el verdadero multiplicando y no el lugar que en la operacion ocupa.

Cuestion tercera. — 36 arrobas ¿cuántas libras serán?

Resolucion. — Siendo el objeto de la cuestion reducir unidades de especie superior á inferior, la operacion por la cual se resuelve es de multiplicar, y como busco libras el multiplicando son libras. Lo haré así.

$$\begin{array}{l} 36 \\ 25 \text{ libras.} \\ \hline 180 \\ 72 \\ \hline 900 \text{ libras.} \end{array}$$

Luego 36 arrobas hacen 900 libras.

Cuestion cuarta. — Un hacendado que tenia 500 cabezas de ganado, le ha aumentado en el primer año de modo que tiene dos tantos de lo que tenia al principio : en el segundo año tres tantos de lo que tenia al fin del primero, y al concluir el tercer año tiene cinco tantos de los que tenia al fin del segundo. Se pregunta : ¿cuántas cabezas de ganado tendrá?

Resolucion. — Esta se reduce á varias multiplicaciones en el órden siguiente :

Tenia al principio.	500 cabezas.
	2
Al fin del primer año.	1,000
Al fin del segundo.	3,000
	5
Y al fin de tercero.	15,000 cabezas.

Cuestion quinta. — Se han comprado 200 pesos en azúcar á un tratante que la vende á razon de 5 libras por cada un peso. ¿Cuántas libras debe entregar?

Resolucion. — 200
5 libras.
1,000 libras.

Planteada la operacion y resuelta, hallo que ha de entregar 1.000 libras de azúcar; cuyo resultado me da á conocer que no siempre es dinero el producto aunque lo sea uno de los factores.

Cuestion sexta. — Se desea saber cuántos minutos tienen dos dias.

Resolucion. — Como cada dia tiene 24 horas, y cada hora 60 minutos, multiplicaré los 2 dias primero por 24 y lo que resulte por 60 en esta forma :

	24 horas.
Los.	2 dias.
hacen.	48 horas.
	60 minutos.
y dichas horas hacen.	2880 minutos.

Se debe prestar mucha atencion en las cuestiones que dan lugar á la multiplicacion, para conocer cuál de los factores es el multiplicando; porque este ha de dar su nombre al producto, mientras que el multiplicador se puede considerar como un número abstracto, y á fin de no sufrir equivocacion, una vez conocido el multiplicando, se le escribe la clase de unidades á que pertenece, aunque no se haga lo mismo con el multiplicador. Asi lo hemos procurado observar en la resolucion de las cuestiones anteriores.

70.

Se ha dicho ya lo que es un número duplo, triplo, cuádruplo, y en general múltiplo de otro. Resta, pues, hacerlo mas patente con los ejemplos.

El número 60 es duplo de 30, porque le contiene dos veces : triplo de 20, porque le contiene tres veces : cuádruplo de 15, porque le contiene cuatro veces : quíntuplo de 12, porque le contiene cinco veces, y séxtuplo de 10, porque le contiene seis veces. Tambien es 60 múltiplo de 5, de 4, de 3, y de 2, porque los contiene varias veces. Todo número entero es múltiplo de 1, porque el uno se contiene en cualquier número entero una ó mas veces exactamente, y se llaman factores de un número los que multiplicados por otro le producen. Por consiguiente, todo número es múltiplo de cualquiera de sus factores.

Tambien los números y sus factores se llaman simples, cuando no tienen otro factor que la unidad, y compuestos, cuando tienen otros.

El número 5 es simple, porque no contiene mas factor que la unidad.

El número 6 es compuesto, porque tiene los factores 2 y 3, pues $2 \times 3 = 6$.

Los números 4 y 6 son factores de 24, y son factores compuestos el 1º de 2×2, y el 2º de 2×3.

Es muy útil ejercitarse en la composicion y descomposicion de los números en factores.

LECCION VI.

DIVISION DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

71. *P*. Qué es division?

R. Es la operacion por la cual, conocidos dos números, se busca un tercero que sea respecto al uno lo que la unidad es respecto del otro.

72. *P*. Cómo se llaman los números que entran en esta operacion?

R. El que se ha de dividir, se llama dividendo; aquel por el cual se ha de dividir, divisor, y el resultado cuociente.

73. *P*. De cuántos modos puede ser el cuociente respecto del dividendo?

R. Por la naturaleza de la division, puede ser menor, igual ó mayor que el dividendo; porque si la unidad es menor que el divisor, el cuociente será menor que el dividendo : si la unidad es igual al divisor, el cuociente será igual al dividendo; y si la unidad es mayor que el divisor, tambien el cuociente será mayor que el dividendo.

74. *P*. Cómo se define generalmente la division?

R. Diciendo, que es la operacion por la cual se averigua las veces que el divisor está contenido en el dividendo.

75. *P*. Qué signo se usa para indicar esta operacion?

R. Unas veces se pone el dividendo encima y el divisor debajo de una raya, y otras el dividendo á la izquierda y el divisor á la derecha de dos puntos. Por ejemplo : 4/2 , ó 4 : 2 quieren decir, 4 dividido por 2.

76 *P*. Qué relacion tiene la operacion de multiplicar con la de partir?

R. Que puede considerarse al dividendo como un producto, al divisor como uno de los factores, y á la division como una operacion que tiene por objeto hallar el otro factor.

77. *P*. Qué debe saberse para dividir con prontitud?

R. Los cuocientes exactos ó aproximados de los números comprendidos del 1 al 89 por los números digitos, y en esto se debe adquirir bastante destreza.

78. *P.* Cómo se divide un número compuesto por uno digito ó compuesto?

R. Se escribe el divisor á la derecha del dividendo, y se separan por una raya que se continúa por debajo del divisor. Se separan en el dividendo las cifras que basten para contener al divisor. Se busca el número que multiplicado por el divisor se aproxima á la porcion separada del dividendo. Se escribe dicho número al cuociente, y multiplicándole por el divisor, se resta el producto de la porcion separada. A la derecha del residuo se baja la siguiente cifra. Se divide esta nueva porcion por el divisor y se continúa así hasta acabar.

79. *P.* Y si algun residuo despues de agregada la siguiente cifra no basta para contener al divisor?

R. Se pone al cuociente un cero, se baja otra cifra y se continúa la operacion.

80. *P.* Qué regla hay para saber la cifra que se ha de poner al cuociente?

R. Por lo regular se halla, considerando como divisor á la primera cifra de la izquierda de este número; y como dividendo, á las que quedan á la izquierda de la porcion que se quiere partir, despues de prescindir de otras tantas cifras, cuantas se dejaron de considerar en el divisor.

81. *P.* Y cuando la segunda cifra del divisor es 8 ó 9, qué deberá tenerse presente?

R. Que será prudente en tales casos considerar á la primera cifra como si tuviese una unidad mas.

82. *P.* Y en todo caso, cómo se conocerá si se ha puesto

mas ó menos en el cuociente de lo que realmente corresponde?

R. Se conocerá que se ha puesto de mas, cuando el producto no se puede restar de la porcion separada, y de menos, cuando la resta es igual ó mayor que el divisor.

83. *P*. Qué se hace cuando la cifra puesta al cuociente es mayor ó menor de lo que debia ser?

R. En estos casos se borra la cifra hallada y se escribe otra menor ó mayor, á cuya operacion llamamos tanteo; algunos suelen hacerlo de memoria antes de escribir la cifra del cuociente.

84. *P*. Cómo se ejecuta una division cuando el divisor es la unidad seguida de ceros?

R. Se separan del dividendo tantas cifras de la derecha como ceros acompañen á la unidad en el divisor.

85. *P*. Qué abreviacion tiene lugar cuando el divisor acaba por uno ó mas ceros?

R. Se separan estos ceros con una coma, y en el dividendo se separan de la derecha tantas cifras como ceros habia en el divisor. Se hace la division sin hacer caso de lo separado, y á la derecha del último residuo se bajan las cifras separadas, restituyendo tambien los ceros al divisor, lo cual se consigue borrando ó tachando la marca ó coma con que se habian separado.

86. P. Y qué se hace cuando dividendo y divisor tienen ceros á su derecha?

R. Se separa en el dividendo y divisor un número igual de ceros y se hace la operacion con las cifras que quedan á la izquierda, sin necesidad de tomarlos mas en consideracion.

87. *P*. Qué se hace con la resta que queda al dividir la última porcion del dividendo, ó con las cifras separadas cuando se parte por 10, 100, 1000, etc.?

R. Se pone la resta ó cifras separadas á la derecha del cuociente entero sobre una raya, y debajo de la raya se escribe el divisor, lo cual no es mas que dejar indicado lo que no podemos ejecutar.

88. *P*. En qué casos se debe hacer uso de la division?

R. Cuando se quiere saber las veces que un número está contenido en otro : cuando hay que distribuir un número entre otro : cuando se quiere dividir una cantidad en cierto número de partes iguales : cuando conociendo el valor de varias cosas de la misma especie, se quiere averiguar el valor de una; y cuando se quieren reducir unidades de especie inferior á especie superior.

89. *P*. Cómo se conocerá el dividendo y divisor en una division?

R. Si son de una misma especie, por la naturaleza de la cuestion; pero si son de distinta, el dividendo se conocerá, porque ha de ser de la especie que se busca.

90. *P*. En qué se conocerá la especie del cuociente, suponiendo conocidas las del dividendo y divisor?

R. Si el dividendo y divisor son de una misma especie, el cuociente es un número abstracto, que se concretará segun la naturaleza de la cuestion; pero si dividendo y divisor son de distinta especie, el cuociente será de la especie del dividendo.

91. *P*. Es indiferente tomar al dividendo por divisor y al contrario?

R. No, señor; pues aunque así se dijo del multiplicando y multiplicador, fué porque ambos factores concurren de un mismo modo en el producto; pero el dividendo y divisor ejercen en el cuociente un efecto enteramente opuesto, y por lo tanto conviene distinguirlos y saberlos colocar.

92. *P*. Qué alteracion sufrirá un cuociente si aumenta ó disminuye el dividendo?

R. Si aumenta el dividendo, aumenta el valor del cuociente, y si disminuye el dividendo disminuye el valor del cuociente.

93. *P*. Y qué alteracion experimentaria el cuociente por el aumento ó disminucion del divisor?

R. Si aumenta el divisor disminuye el cuociente, y si disminuye el divisor aumenta el cuociente.

94. *P*. Y si el dividendo y divisor se aumentan ó disminuyen á la vez por medio de la multiplicacion ó division por un mismo número?

R. El cuociente no se altera aunque dividendo y divísor se multipliquen ó dividan por una misma cantidad, pues obrando de un modo contrario en el valor del cuociente, se destruyen sus efectos y el cuociente queda igual.

95. *P*. Por quién son divisibles todos los números?

R. Todo número es divisible exactamente por sí mismo y por la unidad.

96. *P*. Qué son números compuestos y primos, por cuanto á su divisibilidad entre otros?

R. Se llaman compuestos, los que pueden ser divisibles exactamente por otros números, que vienen siendo sus factores; y primos, los que no son divisibles mas que por ellos mismos ó por la unidad.

Explicaciones y Ejemplos.

71, 72, 73.

La definicion que hemos dado de la division es tan exacta como la que adoptamos para la multiplicacion, y fundada en el principio general de estas reglas para toda clase de números. Ahora procurarémos esclarecer, cómo es el cuociente menor, igual ó mayor que el dividendo, segun la unidad sea menor, igual ó mayor que el divisor; y sea el número 4 el que nos propondrémos dividir por 2, por 1 y por $\frac{1}{2}$.

Al dividir 4 por 2; como la unidad es mitad de 2, así el cuociente será mitad de 4 y por lo tanto, $4 : 2 = 2$.

Al dividir 4 por 1; como la unidad es igual á 1, así el cuociente será igual á 4, y resultará $4 : 1 = 4$.

Y al dividir 4 por $\frac{1}{2}$, como la unidad es dupla de $\frac{1}{2}$, así el cuociente será duplo de 4, y tendrémos, $4 : \frac{1}{2} = 8$.

Comparando los resultados

$$4 : 2 = 2 \quad 4 : 1 = 4 \quad 4 : \tfrac{1}{2} = 8$$

verémos que un cuociente puede ser igual, menor ó mayor que el dividendo, segun el divisor sea igual, mayor ó menor que la unidad.

En este ejemplo ha sido siempre 4 el dividendo: 2, 1, $\frac{1}{2}$ han hecho las veces de divisores, y 2, 4 y 8 han sido los cuocientes.

74, 75.

La definicion de la P. 74 puede entenderse así :

Dividir 4 por 2, es averiguar las veces que el 2 está contenido en 4, y resulta por cuociente 2.

Dividir 4 por 1, es averiguar las veces que el 1 está contenido en 4, y resulta por cuociente 4.

Y dividir 4 por $\frac{1}{2}$, es ver las veces que $\frac{1}{2}$ cabe en 4, y claro esto que cabe ocho veces, luego el cuociente es 8.

76.

Es muy conveniente considerar la division en sus relaciones con la multiplicacion. Por ejemplo : despues de haber multiplicado 3 por 6 y obtenido el producto 18, si se supone desconocido el primero de aquellos factores, se hallará dividiendo 18 por 6, y si se desconociese el segundo, se encontraria dividiendo 18 por 3.

Esto es : que, si suponemos que

$$3 \times 6 = 18$$

Serán $3 = \frac{18}{6}$ y $6 = \frac{18}{3}$

77.

Para adquirir destreza en la averiguacion á primera vista de la cifra que se ha de poner al cuociente cuando se divide por un número digito, se harán á los alumnos varias preguntas sobre sus resultados, á las cuales se debe exigir una pronta contestacion. Sirvan de ejemplo las siguientes :

P. 89 entre 9	R. Á 9
P. 87 entre 9	R. Á 9
P. 72 entre 8	R. Á 9
P. 59 entre 7	R. Á 8
P. 55 entre 6	R. Á 9
P. 45 entre 6	R. Á 7
P. 17 entre 4	R. Á 4
etc.	etc.

78 á 83.

Las reglas dadas en estas preguntas se ven practicadas en los ejemplos siguientes.

Sea primero : el número compuesto 43,864 el que he de dividir por 8.

Y despues de colocado el divisor á la derecha del dividendo y tirada la raya del modo que aquí se ve :

```
Dividendo  43,'8'6'4' ( 8    divisor.
           40         ( 5,483  cuociente.
           ---
           038
            32
           ---
            066
             64
            ---
             024
              24
             ---
              00
```

Como la primera cifra del dividendo no basta para contener al divisor, marco el 3 y digo :

43 entre 8 á 5 que escribo al cuociente :

5 por 8 son 40 que pongo debajo de la porcion separada. Y restando, quedan 3 á cuyo lado bajo el 8 que marco :

38 entre 8 á 4, que escribo á la derecha del 5 :

4 por 8 son 32 que resto ; quedan 6, y bajo el 6 :

66 entre 8, á 8, que escribo al cuociente :

8 por 8 son 64 que resto; quedan 2, y bajo el 4 :

24 entre 8, á 3 que pongo al cuociente :

3 por 8 son 24 que resto; y no queda nada. Luego el cuociente es 5,483.

Para el caso en que alguna porcion del dividendo no contenga al divisor, nos propondrémos el siguiente ejemplo :

Se quiere dividir 320,424 por 8, y despues de planteada la operacion :

```
320424 | 8
32     |------
------ | 40053
00042
   40
 -----
  024
   24
  ----
   00
```

Como despues de dividir la primera porcion del dividendo y restado el producto no queda nada, y bajada la cifra siguiente 0, no puede partirse entre 8, escribo 0 al cuociente y bajo la cifra siguiente del dividendo que es 4;

pero como esta cifra tampoco es divisible entre 8, pongo al cuociente otro 0, y bajando la siguiente cifra 2 del dividendo, diré 42 entre 8, á 5, y continuaré la operacion.

Solamente en la division por un número digito, se puede conocer á primera vista cuál es la cifra que se ha de poner al cuociente; mas en las divisiones por un número compuesto se prescinde para dicha averiguacion de todas las cifras del divisor menos una, y de tantas en el dividendo como se dejaron de considerar en el divisor.

Supongamos que en el curso de una division se presente el siguiente caso :

$$\begin{array}{r|l} 12(874 & 6(162 \\ \cline{2-2} 12\,324 & 2 \\ \cline{1-1} 550 & \end{array}$$

Para considerar al divisor como 6 he prescindido de tres cifras, y de otras tantas debo prescindir en el dividendo, lo cual se expresa en la práctica diciendo :

12874 entre 6162, ó bien, 12 entre 6 á 2; pero como la cifra hallada hay que multiplicarla por todo el divisor, no siempre sucede como en el presente caso, que el producto pueda restarse de la porcion correspondiente del dividendo.

En el caso de que el dividendo parcial fuese 12874 y el divisor 6762:

$$\begin{array}{r|l} 12(874 & 6(762 \\ \cline{2-2} 13\,524 & 2 \end{array}$$

hechas las mismas consideraciones que en el anterior ejemplo, diria :

12874 entre 6762, ó bien, 12 entre 6 á 2; pero el producto que resulta de multiplicar esta cifra por todo el divisor es 13524, el cual no puedo restar del dividendo; luego debo poner una cifra menor al cuociente.

Otras veces, por el contrario, queriendo evitar un resultado semejante al anterior incurrimos en el defecto contrario, por ejemplo :

36(989	9(125
27 375	3
9 614	

He dicho : 36989 entre 9125, ó bien, 36 entre 9 á 4; pero prudencialmente á 3, y lo pongo al cuociente; mas despues de hecha la multiplicacion y la resta, observo que sobra una cantidad mayor que el divisor; luego debo aumentar la cifra del cuociente.

Por muchas reglas que diéramos para evitar estos tanteos, ninguna de ellas seria bastante general para comprender todos los casos que pueden ocurrir en la division, y lo único que podemos aconsejar, es no escribir la cifra del cuociente, ni el producto, hasta no estar ciertos de que se ha de poder restar de la porcion del dividendo, sin sobrar nada, ó sobrando una cantidad menor que el divisor; bien haciendo los productos en papel separado, ó bien mentalmente cuando se haya adquirido práctica.

Pasemos ya á la division de un número compuesto por otro compuesto, y sea el número 106893 que se ha de dividir por 333.

Despues de planteada la operacion,

```
1068'9'3' | 333
 999      |-----
          | 321
-----
 0069 9
   66 6
 ------
   03 33
    3 33
   -----
    0 00
```

he separado del dividendo cuatro cifras por ser las que bastan para contener al divisor, y he dicho :

1068 entre 333, ó bien, 6 entre 3 á 2, y habiendo efectuado la multiplicacion por el divisor y restado el producto del dividendo, bajé la siguiente cifra 9 y he dicho :

699 entre 333, ó bien, 6 entre 3 á 2, y habiendo efectuado la multiplicacion y la resta, he bajado la otra cifra 3 y concluí diciendo :

333 entre 333, ó bien, 3 entre 3 á 1, que multiplicado por el divisor y restado el producto de la última porcion del dividendo, no sobra nada; luego el cuociente es 321.

84.

Cuando el divisor es 10, 100, 1000, etc. como, si 34527 se quisiera dividir por dichos números, separaria con una coma tantas cifras como ceros hubiese á la derecha de la unidad de este modo :

$$34527 : 10 = 3452{,}7$$

donde el cuociente es 3452 y la resta es 7.

$$34527 : 100 = 345{,}27$$

donde es el cuociente 345 y la resta 27.

$$34527 : 1000 = 34{,}527$$

donde el cuociente es 34 y la resta 527, y así de los demás.

85.

Cuando el divisor acaba en ceros, los separo, y separo otras tantas cifras del dividendo; por ejemplo: si quiero dividir 36123 por 40.

Despues de colocados dividendo y divisor en sus correspondientes lugares y separados dos ceros en el divisor y dos cifras en el dividendo,

```
361(23 { 4(00
36     { 90
------
001 23
```

diré: 36 entre 4 á 9, multiplico, resto y no sobra nada: bajo el 1 y como uno entre 4 á 0 lo pongo al cuociente.

Resulta, pues, que el cuociente total es 90 y la resta 123, bajando para esto las cifras que estaban separadas.

86.

Presentemos el caso en que dividendo y divisor tienen ceros á su derecha, y sea 34500 que se ha de dividir por 3000.

Despues de planteada la operacion, y separados dos ceros en el dividendo y otros tantos en el divisor,

$$\begin{array}{r|l} 345(00 & 30(00 \\ \cline{2-2} 30 & 11 \\ \cline{1-1} 045 & \\ 30 & \\ \cline{1-1} 15 & \end{array}$$

la he calculado sin hacer caso de los ceros, y hallo por cuociente 11, y por resta 15.

87.

Se ha dicho que en las operaciones de dividir se escribe la resta ó cifras separadas á la derecha del cuociente sobre una raya, y debajo de la misma raya se escribe el divisor, por ejemplo, si despues de partir 9 entre 6 les cabe á 1 y sobran 3, se expresará asi :

$$9 : 6 = 1 + \tfrac{3}{6}$$

Por el mismo estilo los cuocientes y restas del ejemplo 84 se escribirán asi :

$$\begin{array}{l} 34527 : \ \ 10 = 3452\ \tfrac{7}{10} \\ 34527 : \ 100 = \ 345\ \tfrac{27}{100} \\ 34527 : 1000 = \ \ 34\ \tfrac{527}{1000} \end{array}$$

El cuociente y resta del ejemplo 85 se expresaria así :

$$36123 : 400 = 90 + \tfrac{123}{400};$$

porque al bajar las cifras separadas se han debido restituir los ceros al divisor.

Y en el ejemplo 86 se expresarian el cuociente y resta de este modo :

$$34500 : 3000 = 11 + \tfrac{15}{30};$$

porque cuando se han separado al dividendo y divisor un número igual de ceros, no hay para qué volverlos á tomar en consideracion.

Todo esto no ha sido mas que dejar indicada una operacion que no podiamos ejecutar.

88 á 90.

Para la práctica de la division nos propondrémos las siguientes cuestiones que comprenden los cinco casos en que tiene lugar dicha operacion.

Cuestion primera. Un individuo tiene 1452 pesos, y habiéndose propuesto gastar 121 pesos al mes, pregunta : ¿cuántos meses podrá subsistir con esta suma?

Resolucion. — Esta cuestion es de dividir, porque se quiere saber las veces que un número cabe en otro, y por la naturaleza de la cuestion es 1452 pesos el dividendo, porque se va á buscar las veces que contiene á 121 pesos; luego plantearé así la operacion :

```
Pesos 145'2' ⎰ 121 pesos.
       121   ⎱ 12  meses.
      ────
      0242
       242
      ────
       000
```

y concluida hallaré al cuociente 12, que segun la cuestion son los meses que dura la cantidad.

Aquí vemos que siendo el dividendo y divisor de una misma especie, el cuociente ha sido un número abstracto que se ha concretado deduciendo su especie del objeto de la cuestion.

Cuestion segunda. —Se quieren distribuir 2000 pesos entre 80 individuos; ¿cuánto corresponderá á cada uno?

Resolucion. —La cuestion es simplemente de repartir un número entre otro; luego se resolverá por medio de la division. El dividendo es pesos por ser de la especie que se busca, y planteada la operacion,

```
Pesos 200(0 ⎰ 8(0 individuos.
       16   ⎱ 25  pesos.
      ────
      040
       40
      ────
       00
```

hallaré que á cada individuo corresponden 25, y son pesos, porque esta es la especie del dividendo.

Cuestion tercera.—Deseando distribuir 648 hombres de tropa en 12 partes iguales para atender con ellos á otros tantos objetos diferentes, se pregunta: ¿cuántos hombres corresponderán á cada una de estas partes?

Resolucion. — La cuestion es de dividir, porque se trata de hacer partes iguales, y los hombres son el dividendo, porque es la especie que busco ; luego la plantearé así :

$$
\begin{array}{rr|l}
\text{hombres} & 648 & 12 \text{ divisor abstracto.} \\
 & 60 & \overline{54} \text{ hombres.} \\ \cline{2-2}
 & 048 & \\
 & 48 & \\ \cline{2-2}
 & 00 &
\end{array}
$$

y ejecutada la operacion hallaré 54, que son los que corresponden á cada porcion ; y son hombres, porque esta es la especie del dividendo.

Cuestion cuarta. — Hemos invertido 12,348 reales en comprar 36 quintales de algodon. ¿Cuánto ha costado cada quintal ?

Resolucion. — Como sabiendo el valor de varias cosas quiero averiguar el valor de una, la operacion se resuelve dividiendo ; y como busco el valor en reales, el dividendo son los reales ; luego plantearé la operacion de este modo :

$$
\begin{array}{rr|l}
\text{reales} & 12348 & 36 \text{ quintales.} \\
 & 108 & \overline{343} \text{ reales.} \\ \cline{2-2}
 & 0154 & \\
 & 144 & \\ \cline{2-2}
 & 0108 & \\
 & 108 & \\ \cline{2-2}
 & 000 &
\end{array}
$$

y hallo por valor de cada quintal 343, que son reales, por ser la especie del dividendo.

Cuestion quinta. — Deseamos reducir 3,697 cuartillos á reales, luego á pesos y luego á onzas.

Resolucion. — Esta cuestion en que se procura reducir unidades de especie inferior á superior, es de partir. Los dividendos son las especies inferiores, y los divisores el número de las unidades inferiores que contiene cada inmediata superior.

Diré primero : como cada real tiene 4 cuartillos, dividiré los cuartillos por 4 para reducirlos á reales :

$$
\begin{array}{lr|l}
\text{cuartillos} & 3697 & 4 \ \text{cuartillos que tiene un real.} \\
 & 36 & 924 \ \text{reales.} \\
\hline
 & 009 & \\
 & 8 & \\
\hline
 & 17 & \\
 & 16 & \\
\hline
 & 01 &
\end{array}
$$

y hallo 924 reales y sobra un cuartillo.

Mas como cada peso tiene 8 reales, dividiré los 924 reales por 8 para reducirlos á pesos :

$$
\begin{array}{lr|l}
\text{reales} & 924 & 8 \ \text{reales que tiene un peso.} \\
 & 8 & 115 \ \text{pesos.} \\
\hline
 & 12 & \\
 & 8 & \\
\hline
 & 044 & \\
 & 40 & \\
\hline
 & 04 &
\end{array}
$$

y hallo 115 pesos y sobran 4 reales.

Por último, como cada onza tiene 16 pesos, divido los pesos por 16 para reducirlos á onzas :

$$\begin{array}{r|l} 115 & \underline{16} \text{ pesos que tiene cada onza.} \\ \underline{112} & \ \ 7 \text{ onzas.} \\ 003 & \text{pesos.} \end{array}$$

y encuentro 7 onzas, sobrando 3 pesos.

Reuniendo ahora las onzas con los demás residuos, obtendré el resultado siguiente :

3697 cuartillos = 7 onzas, 3 pesos, 4 reales, y 1 cuartillo.

91 á 94.

De la naturaleza de la division se infiere que mientras mayor es la cantidad que se divide, ó mientras mayor es el dividendo, mayor será el cuociente, y mientras menor sea el dividendo, menor será el cuociente; por ejemplo : 12 manzanas y 8 manzanas repartidas entre un número igual de niños darán mayor cuociente en el primer caso y menor en el segundo.

Suponiendo ahora un mismo número de manzanas á repartir primero entre 6 y luego entre 9 niños, les corresponderán á mas cuando hay menos niños, y á menos cuando hay mas niños.

Estas consideraciones se reducen á los cuatro casos siguientes :

Si aumenta el dividendo, aumenta el cuociente :

Si disminuye el dividendo, disminuye el cuociente :

Si aumenta el divisor, disminuye el cuociente :

Si disminuye el divisor, aumenta el cuociente.

Tambien es evidente que si 12 manzanas entre 6 niños les cupieron á 2 manzanas, doble número de manzanas entre doble número de niños ó la mitad de las manzanas entre la mitad de los niños les tocarán siempre á las mismas 2 manzanas; es decir, que si

12 : 6 = 2, tambien será 24 : 12 = 2, ó 6 : 3 = 2, lo cual se expresa diciendo : que el cuociente no se altera porque dividendo y divisor se multipliquen ó partan por un mismo número, cuya propiedad de la division bien aplicada es de mucho uso en la práctica.

95 y 96.

Estos números :

30, 48, 56, 45, 16, 4, 6, etc.

se llaman compuestos porque se pueden dividir exactamente por otros menores que ellos.

Y estos otros :

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, etc.

se llaman primos porque no se pueden dividir exactamente si no es por sí mismos ó por la unidad.

LECCION VII.

PRUEBAS DE LA ADICION, SUSTRACCION, MULTIPLICACION Y DIVISION DE LOS NÚMEROS ENTEROS Y ABREVIACION DE ALGUNAS OPERACIONES.

97. *P*. Qué se entiende por probar una operacion?

R. Es hacer otra que, por sus relaciones con la primera, nos manifieste si en ella hubo algun error.

98. *P*. Cuál es la prueba de sumar?

R. La que está mas en uso es la de separar uno de los sumandos, se vuelven á sumar los demás, esta nueva suma se resta de la primera, y el residuo debe ser igual al sumando que se separó si la operacion está bien hecha.

99. *P*. Cómo se prueba la sustraccion?

R. Sumando el sustraendo con el residuo y ha de resultar el minuendo.

100. *P*. Cuál es la prueba de multiplicar?

R. Dividir el producto por uno de los factores y ha de resultar el otro factor.

101. *P*. Cuál es la prueba de la division?

R. La multiplicacion del divisor por el cuociente, cuyo producto por sí solo, ó agregándole la resta que pueda haber quedado, compondrá el dividendo.

102. *P*. Se pueden aplicar estas mismas pruebas á otros números que no sean enteros?

R. Sí, señor : ellas son aplicables á las operaciones de sumar, restar, multiplicar y partir, cualquiera que sea la clase de los números con que se hayan hecho las operaciones.

103. *P.* De qué abreviacion es susceptible la multiplicacion?

R. Se puede evitar un producto parcial y una suma cuando uno de los factores es 11 ó 12, efectuando la multiplicacion como si fuera por uno de los números dígitos, valiéndonos de los productos de estos números que se hallan en la tabla de multiplicar, y escribiendo de una vez y en un solo renglon el producto.

104. *P.* Qué medios hay de abreviar la division cuando el divisor es número digito?

R. Cuando el divisor es número dígito, y hasta los números 10, 11 y 12, se puede efectuar la division escribiendo por debajo del dividendo la cifra que exprese las veces que el divisor está contenido en la primera porcion de la izquierda, y considerando las que sobren como dieces, se agregan mentalmente á la cifra siguiente, se escribe debajo de esta el número que expresa las veces que el divisor está contenido en esta nueva porcion, y así hasta concluir.

105. *P.* Qué medios hay de abreviar la division cuando el divisor es compuesto de dos ó mas cifras?

R. Se abrevia la division efectuando las restas de los productos del divisor por el cuociente de memoria, y sin escribir dichos productos debajo de las correspondientes porciones del dividendo.

106. *P.* Cómo se multiplica por 5, 25, 50, 250 y otros

números que sean partes exactas de 10, 100, 1000?

R. Para multiplicar por 5 se agrega un 0 y se saca la mitad, por 25 se agregan dos ceros y se saca cuarta parte, por 50 se agregan dos ceros y se saca la mitad, por 125 se agregan tres ceros y se saca octava parte, por 250 se agregan tres ceros y se saca cuarta parte, etc.

Explicaciones y Ejemplos.

97.

Las pruebas que se aconsejan en esta leccion son recomendables para un calculador solo; mas cuando hay dos, lo mejor es hacer cada uno la operacion directamente y comparar los resultados.

98.

Despues de hecha la siguiente suma

3456	sumando separado.
1234	
2100	
2209	
1000	
9999	suma 1ª.
6543	suma 2ª.

Residuo 3456 igual al sumando separado.

He separado un sumando, y como la suma de los demás, restada de la primera, da por residuo el mismo sumando, la primera suma fué bien hecha.

99.

Habiendo ejecutado esta resta :

303030	minuendo.
90909	sustraendo.
212121	residuo.
303030	prueba

He sumado el sustraendo con el residuo, y como la suma es igual al minuendo, deduzco que la operacion está bien hecha.

100.

Despues de ejecutada esta multiplicacion

45078 42	factores del producto.	
90156 180312		
1893276	45078	factor divisor.
180312	42	factor hallado.
0090156		
90156		
00000		

He dividido el producto por uno de los factores y ha resultado el otro factor; luego la operacion primitiva estuvo bien ejecutada.

101 y 102.

Habiendo hecho esta operacion :

```
Dividendo  5395 { 25   divisor.
           50   } 215  cuociente.
           ----
           039      25 divisor
            25     ----
           ---     1075
            145    430
            125     20 resta.
           ----    ----
resta. . .  020    5395 prueba.
```

He multiplicado el cuociente por el divisor, y como añadiéndole la resta, la suma resulta igual al dividendo, la operacion fué bien hecha.

103.

A las várias abreviaciones que hemos indicado, hablando de la multiplicacion, puede agregarse la que resulta de multiplicar por 11 y 12 en una sola línea ó renglon, valiéndonos de los productos de estos números contenidos en la tabla. Sea el número 538207 que se quiere multiplicar por 11 y lo ejecutaré así :

$$\begin{array}{r} 538{,}207 \\ 11 \\ \hline 5{,}920{,}277 \end{array}$$

diré : 11 por 7 son 77, escribo 7, llevo 7.
11 por 0 es 0 y 7 son 7, y lo escribo.
11 por 2 son 22, escribo 2 y llevo 2.
11 por 8 son 88 y 2 90, escribo cero y llevo 9.
11 por 3 son 33 y 9 son 42, escribo 2 y llevo 4.
11 por 5 son 55 y 4 son 59, que escribo.

Por el mismo estilo se harán estas multiplicaciones :

$$\begin{array}{r} 59{,}723 \\ 11 \\ \hline 656{,}953 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 45{,}256 \\ 11 \\ \hline 497{,}816 \end{array}$$

Si quiero multiplicar por 12 el número 259,708 lo ejecutaré así :

$$\begin{array}{r} 259{,}708 \\ 12 \\ \hline 3{,}116{,}496 \end{array}$$

diré : 12 por 8 son 96, escribo 6 y llevo 9.
12 por 0 es 0 y 9 es 9.
12 por 7 son 84, escribo 4 y llevo 8.
12 por 9 son 108 y 8 son 116, escribo 6 y llevo 11.
12 por 5 son 60 y 11 son 71, escribo 1 y llevo 7.
12 por 2 son 24 y 7 son 31, que escribo.

Del mismo modo ejecutaré las siguientes :

$$\begin{array}{r} 590{,}203 \\ 12 \\ \hline 7{,}082{,}436 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4{,}052{,}107 \\ 12 \\ \hline 48{,}625{,}284 \end{array}$$

104.

El modo de dividir por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12, que tambien se llama sacar la mitad, tercera, cuarta parte, etc., se comprenderá mas fácilmente son los ejemplos.

Vamos á proponernos dividir por 5 el número 37,528 que es lo mismo que sacarle 5ª parte.

dividendo	37,528
5ª parte	$7,505 + \frac{3}{5}$

En la práctica se dice asi : 5ª de 37 es 7 y sobran 2, 5ª de 25 es 5, 5ª de 0 es 0, 5ª de 28 es 5 y sobran 3, las que escribo como se ha dicho para las restas.

Si se quiere sacar la 11ª parte del número 28,954 lo que equivale á partirle por 11.

dividendo	28954
11ª parte	$2632 + \frac{2}{11}$

diré : 11 en 28 á 2 y sobran 6 : 11 en 69 á 6 y sobran 3, 11 en 35 á 3 y sobran 2, 11 en 24 á 2 y sobran 2 que es la resta.

Sea el número 13456 que se ha de partir por 4,

dividendo	13456
4ª parte	3364

diré : 4ª de 13 es 3 y sobra 1, 4ª de 14 es 3 y sobran 2, 4ª de 25 es 6 y sobra 1, 4ª de 16 es 4 y no sobra nada.

Finalmente, nos propondrémos dividir por 12, ó lo que es lo mismo, sacar la 12ª parte del número 253,850,431, y lo plantearé así :

dividendo	253,850.431
12ª parte	21,154.202 + $\frac{7}{12}$

lo expresaré así : 12 en 25 á 2 y sobra 1, 12 en 13 á 1 y sobra 1, 12 en 18 á 1 y sobran 6, 12 en 65 á 5 y sobran 5, 12 en 50 á 4 y sobran 2, 12 en 24 á 2, 12 en 3 á 0 y sobran 3, 12 en 31 á 2 y sobran 7 que es la resta.

Este método es muy socorrido para reducir cuartillos á reales, estos á pesos, las pulgadas á piés, estos á varas, y se aprovecharán en el Tratado de los números denominados ó concretos las ocasiones de hacer uso de ellos.

105.

La division por números compuestos de dos ó mas cifras se abrevia, restando cada producto parcial de la correspondiente porcion del dividendo de memoria y escribiendo solo los residuos.

Creemos que baste un ejemplo para dar á conocer esta práctica, y sea la siguiente division :

$$\begin{array}{l|l} 364'5'8'4' & 236 \\ \cline{2-2} 128.5 & 1544 + \frac{200}{236} \\ 010\,5.8 & \\ \;\;01\,1\,4.4 & \\ \;\;\;0\,2\,0\,0 & \end{array}$$

en ella en vez de escribir debajo de las cifras tomadas en el dividendo el producto del divisor por la cifra del cuociente, hice la resta mentalmente y escribí solo el residuo de este modo : 1 por 6 es 6, de 14 es 8 que escribí y llevo 1, 1 por 3 es 3 y 1 son 4, de 6 es 2 que escribí y no llevo nada, 1 por 2 es 2, de 3 es 1, que tambien escribí y es la resta 128 á cuyo lado bajo la siguiente cifra 5, y al dividir la nueva porcion 1285 por el divisor, vuelvo á restar de memoria y queda un residuo 105 á cuyo lado bajo el 8, vuelvo á dividir la porcion 1058, hallo el cuociente 4 y la resta es 114, bajo el 4 y dividiendo la última porcion 1144 por el divisor, hallo 4 al cuociente y la resta es 200, que escribo como se ha enseñado.

Este método, aunque mas breve, le creemos mas expuesto á equivocaciones, y solo es recomendable para los que tengan bastante práctica.

106.

Como 5 es mitad de 10, 25 la cuarta parte de 100, 125 la octava parte de 1000; cuando al multiplicar por alguno de dichos números se agregan uno, dos, tres ceros, resultan productos dos, cuatro y ocho veces mayores, que se corrigen sacando despues mitad, cuarta ú octava parte, de este modo :

Si es el número 24528 el que se ha de multiplicar por 5, como 5 es mitad de 10 multiplicaré por 10 y sacaré la mitad, así :

multiplicando	24528.0	agrego un cero.
la mitad. . .	12264.0	es el producto.

Si el mismo número le he de multiplicar por 25, como 25 es 4ª parte de 100, agregaré dos ceros y sacaré la 4ª parte.

multiplicando	24528.00	ceros agregados.
4ª parte. . .	6132.00	producto.

Y si el mismo número le he de multiplicar por 125, como 125 es 8ª parte de 1000, agrego tres ceros y saco la 8ª parte.

multiplicando	24528.000	ceros agregados.
la 8ª parte. .	3066.000	producto.

Para multiplicar el mismo número por 50, como 50 es la mitad de 100, agrego dos ceros y saco la mitad.

multiplicando	24528.00	ceros agregados.
la mitad. . .	12264.00	producto.

Para multiplicar el dicho número por 250, como 250 es cuarta parte de 1000, agrego tres ceros y tomo 4ª parte.

multiplicando	24528.000	ceros agregados.
4ª parte. . .	6132.000	producto.

Prescindimos de hablar de otras abreviaciones, por no considerarlas útiles como las precedentes.

LECCION VIII.

DE LAS FRACCIONES Ó QUEBRADOS EN GENERAL.

107. *P*. Qué son fracciones ó quebrados?

R. Son números que representan cantidades menores que las unidades; pero por extension se llaman quebrados á todos los números que se refieren á partes de la unidad, ya sean menores, iguales ó mayores que ellas.

108. *P*. Qué nombres se da á las partes de la unidad?

R. Cuando la unidad se divide en dos partes, las partes se llaman medios; si en tres, tercios; si en cuatro, cuartos; si en cinco, quintos; si en seis, sextos; y así hasta los décimos; pero si se divide en once partes, se llaman onzavos, si en doce, trece, etc., dozavos, trezavos, etc.

109. *P*. Con cuántos números se expresa un quebrado?

R. Con dos números; uno para expresar las partes en que está dividida la unidad, y otro para expresar las partes que se toman.

110. *P*. Cómo se llaman los dos números con que se expresa un quebrado, y cómo se escriben?

R. El número que expresa las partes en que se divide la unidad, se llama denominador y se escribe debajo de una raya, y el número que expresa las partes que se toman, se llama numerador y se escribe encima de la raya.

111. *P*. Qué nombre general se da al numerador y denominador?

R. Tambien al numerador y denominador se les llama indistintamente términos del quebrado.

112. *P*. Cómo se leen los quebrados?

R. Se expresa primero el numerador por su nombre natural, y despues el denominador diciendo medios, tercios, hasta décimos si no pasa de diez, ó añadiendo la partícula avos si pasa de dicho número.

113. *P*. Qué es quebrado propio y en qué se conoce?

R. Quebrado propio es el que expresa una cantidad menor que la unidad, y se conoce en que el numerador es menor que el denominador.

114. *P*. Qué es quebrado impropio y en qué se conoce?

R. Es el que representa una cantidad igual ó mayor que la unidad, y se conoce en que el numerador es igual ó mayor que el denominador.

115. *P*. Cómo se reducen los quebrados impropios á enteros?

R. Partiendo el numerador por el denominador: el cuociente serán los enteros, y si queda alguna resta, se agrega á los enteros un quebrado que tenga por numerador dicha resta y por denominador el del quebrado.

116. *P*. Cómo se expresan los enteros en forma de quebrado?

R. Poniéndoles por denominador la unidad.

117. *P*. Cómo se reduce un entero á quebrado de una denominacion cualquiera?

R. Se multiplica el entero por el denominador dado y el producto se escribe por numerador de un quebrado impropio, y por denominador el dado.

118. *P*. Cómo se reduce un entero y quebrado á la especie de su quebrado.

R. Se multiplica el entero por el denominador del quebrado, al producto se le agrega el numerador del mismo quebrado, y la suma será el numerador del nuevo quebrado impropio, cuyo denominador será el del quebrado.

119. *P*. Qué es quebrado simple?

R. El que se refiere á la unidad.

120. *P*. Qué es quebrado compuesto?

R. El que se refiere á mas ó menos de la unidad, y se llama quebrado de quebrado cuando se refiere á otro quebrado.

121. *P*. De dos quebrados que tienen el mismo denominador, cuál será mayor?

R. El que tenga mayor numerador.

122. *P*. De dos quebrados que tengan el mismo numerador, cuál será mayor?

R. El que tenga menor denominador.

123. *P*. Cómo se puede considerar todo quebrado?

R. Como el cuociente de una division en que el numerador es dividendo y el denominador el divisor.

124. *P*. Cómo aumentan y disminuyen los quebrados segun aumentan y disminuyen sus términos?

R. Si aumenta el numerador, aumenta el valor del quebrado. Si disminuye el numerador, disminuye el valor del quebrado. Si aumenta el denominador, disminuye el valor del quebrado, y si disminuye el denominador aumenta el valor del quebrado.

125. *P.* Y si ambos términos se multiplican ó parten por una misma cantidad?

R. El quebrado no muda de valor, aun cuando sus dos términos se multipliquen ó dividan por un mismo número.

Explicaciones y Ejemplos.

107 á 114.

Si queremos expresar que una vara se divide en cuatro partes y de ellas hemos tomado tres, lo expresarémos así : $\frac{3}{4}$ varas : leyendo tres cuartos de vara. Es quebrado, porque expresa partes de la unidad : 3 es el numerador porque expresa las partes que se toman : 4 el denominador, porque expresa las partes en que se ha dividido la unidad : 3 y 4 son los términos del quebrado : es propio, porque representa una cantidad menor que la unidad, y se conoce en que el numerador es menor que el denominador.

—

Si con una pesa de media libra tomamos, por ejemplo, nueve pesadas de azúcar, dirémos que hemos tomado nueve medias libras, y lo expresarémos así : $\frac{9}{2}$ libras, el cual es un quebrado impropio, mayor que la unidad, porque su numerador es mayor que el denominador.

—

Si despues tomamos cuatro pesadas mas, lo expresarémos así : $\frac{4}{2}$ libras, que es otro quebrado impropio tambien mayor que la unidad, porque el numerador es mayor que el denominador.

—

Finalmente, si vuelvo á tomar dos pesadas de media libra, diré que he tomado $\frac{2}{2}$ libras, quebrado impropio igual á la unidad, porque el numerador es igual al denominador.

Los siguientes quebrados se leen así : $\frac{2}{3}$ dos tercios : $\frac{5}{7}$ cinco séptimos : $\frac{1}{9}$ un noveno : $\frac{12}{25}$ doce veinte y cinco avos : $\frac{48}{32}$ cuarenta y ocho treinta y dos avos : $\frac{40}{40}$ cuarenta cuarenta avos : $\frac{3}{116}$ tres ciento diez y seis avos, etc.

115.

Si se nos dieren los quebrados impropios $\frac{9}{2}$ libras, $\frac{4}{2}$ libras, $\frac{2}{2}$ libras para reducirlos á enteros, partiendo los numeradores por los denominadores hallaré los resultados siguientes :

$\frac{9}{2}$ libras $= 4 + \frac{1}{2}$ libras : reducido á número mixto :
$\frac{4}{2}$ libras $= 2$ libras : reducido á entero.
$\frac{2}{2}$ libras $= 1$ libra : entero é igual á la unidad. Del mismo modo :

$$\tfrac{19}{13}=1+\tfrac{6}{13},\ \tfrac{45}{20}=2+\tfrac{5}{20},\ \tfrac{7}{4}=1+\tfrac{3}{4}$$
$$\tfrac{40}{5}=8,\ \tfrac{56}{7}=8,\ \tfrac{32}{8}=4,\ \tfrac{24}{8}=3$$

116.

Si los números 15 pesos, 12 arrobas los queremos expresar en forma de quebrados, tendrémos :

$$15 \text{ pesos} = \tfrac{15}{1} \text{ pesos. } 12 \text{ arrobas} = \tfrac{12}{1} \text{ arr.}$$

117.

Si deseamos expresar 120 libras en cuartos ó darles el denominador 4, las multiplicarémos por dicho número, y al producto se le pondrémos por denominador ; así :

$$120 \text{ libras} = \tfrac{480}{4} \text{ libras.}$$

Si 15 pesos quiero expresarlos en medios, diré : 2 por 15 son 30, y este será el numerador, y el denominador 2.

$$15 \text{ pesos} = \tfrac{30}{2} \text{ pesos.}$$

118.

Si el número mixto $3 + \frac{3}{4}$ pesos lo he de reducir á la especie de su quebrado, diré : 4 por 3 son 12 y 3 son 15, y este es el numerador, y el denominador es 4.

$$3 + \tfrac{3}{4} \text{ p.} = \tfrac{15}{4} \text{ ps.}$$

Si $3 + \frac{2}{16}$ de libra los quiero reducir á diez y seis avos, diré así : 16 por 3 son 48 y 2 son 50, que es el numerador, y el denominador es 16.

$$3+\frac{2}{16} \text{ libras}=\frac{50}{16} \text{ libras.}$$

119 y 120.

$\frac{3}{4}$ pesos, $\frac{2}{8}$ libras, son quebrados simples porque se refieren á las unidades peso y libra.

—

$\frac{3}{4}$ de 12 pesos, $\frac{2}{8}$ de 24 libras, son quebrados compuestos porque se refieren á varios pesos, á varias libras.

$\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{2}$ peso, $\frac{2}{8}$ de $\frac{3}{4}$ de libra, son quebrados de quebrados porque se refieren á otros quebrados.

—

Los quebrados compuestos de enteros, y los quebrados de quebrados, se llaman indistintamente compuestos, para distinguirlos de los simples.

121 y 122.

De los dos quebrados $\frac{10}{8}$, $\frac{7}{8}$, el primero es mayor porque tiene mayor numerador, y los denominadores son iguales.

—

De los dos quebrados $\frac{9}{15}$, $\frac{9}{10}$, que tienen el mismo numerador, el segundo será mayor porque tiene menor denominador.

123.

Si he de partir 8 entre 5 lo puedo expresar como un quebrado $\frac{8}{5}$ cuyo valor representa el cuociente.

Si he de partir 9 entre 9, tambien lo puedo expresar asi $\frac{9}{9}$, y este quebrado representa el cuociente.

Finalmente, si un número cualquiera se ha de partir por otro mayor, el cuociente estará bien representado por un quebrado en que el numerador es el menor y el denominador el mayor :

$$3 \text{ entre } 4 = \tfrac{3}{4},\ 1 \text{ entre } 9 = \tfrac{1}{9},\ 8 \text{ entre } 17 = \tfrac{8}{17}$$

Y esta fué la razon que tuvimos para escribir de este modo los residuos que sobraban en la division, pues no eran mas que números menores que el divisor que debian partirse por él.

124 y 125.

Como mientras mas partes se toman de aquellas en que está dividida una cosa cualquiera, mayor es la cantidad tomada, y mientras menos partes se toman, menor es la cantidad tomada, por eso sigue el valor del quebrado los aumentos ó diminuciones de su numerador en el mismo sentido.

Por ejemplo : una manzana la divido en 6 partes iguales y de ellas doy á tres individuos en este órden : al primero una parte, al segundo dos partes y al tercero tres partes, lo que representaré así:

$$\frac{1}{6} \quad \frac{2}{6} \quad \frac{3}{6}$$

y no hay duda que siendo las partes como se han supuesto iguales, $\frac{1}{6}$ será menor que $\frac{2}{6}$ y $\frac{3}{6}$ será mayor que $\frac{2}{6}$.

—

Supongamos ahora que la manzana se divide primero en doce pedazos, luego en ocho y luego en seis, y que siempre se toman cuatro de ellos, lo que representaré así:

$$\frac{4}{12} \quad \frac{4}{8} \quad \frac{4}{6}$$

y no hay duda que cuando se dividió en doce partes serian mas chicas, y cuando se dividió en seis mas grandes; luego si siempre se toma un mismo número, resultará que se toma mas cuanto menor es la division, y menos cuanto mayor es la division de las partes.

—

Segun esto, un quebrado se hace duplo, triplo, etc. duplicando, triplicando, etc., su numerador ó dividiendo su denominador por 2, 3, etc. Y un quebrado se hace mitad, tercera ó cuarta parte, sacándolas al numerador ó multiplicando al denominador por 2, 3, 4, etc.

—

Como no siempre se puede dividir exactamente y siempre se puede multiplicar exactamente, estableceré-mos que :

Un quebrado se hace mayor ó se multiplica, multiplicando su numerador.

—

Un quebrado se hace menor, se divide, ó se le saca mitad, tercera, cuarta parte, etc., multiplicando su denominador.

—

El triplo de $\frac{2}{3}$ es $\frac{6}{3}$	multiplicaudo por 3 su numerador.
La mitad de $\frac{2}{3}$ es $\frac{2}{6}$	multiplicando por 2 su denominador.
Cuatro veces $\frac{7}{8}$ es $\frac{28}{8}$	multiplicando por 4 el numerador.
La 4ª parte de $\frac{3}{9}$ es $\frac{3}{36}$	multiplicando por 4 el denominador.

Por último : tomar dos, tres veces, etc., una cantidad dos ó tres veces menor es lo mismo que tomar la primitiva cantidad; porque si habiendo tomado primero $\frac{2}{3}$ de manzana tomo luego $\frac{4}{6}$, ¿ qué importa que haya tomado un número dos veces mayor, si las partes son dos veces menores? Luego $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ que resulta de multiplicar por 2 los dos términos del primero.

Si se toma la mitad, tercera, cuarta parte de una cantidad dos, tres, cuatro veces mayor que antes, es lo mismo que tomar la cantidad primera; porque si despues de haber tomado $\frac{6}{8}$ de manzana, divido por 2 sus términos y tomo solos $\frac{3}{4}$, ¿qué importa que haya tomado la mitad de las partes, cuando estas partes son duplas? Luego $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ que resulta de dividir por 2 los términos del primero.

LECCION IX.

SIMPLIFICACION DE LOS QUEBRADOS POR MEDIO DE LOS DIVISORES COMUNES A SUS TÉRMINOS; MODO DE HALLAR EL MÁXIMO COMUN DIVISOR Y DE REDUCIR LOS QUEBRADOS Á UN COMUN DENOMINADOR.

126. *P*. Qué se entiende por simplificar un quebrado?

R. Es reducirle á términos mas sencillos.

127. *P*. Cómo se simplifican los quebrados?

R. Dividiendo por un mismo número su numerador y denominador.

128. *P*. Qué es divisor comun?

R. El número que divide exactamente á otros dos ó á mas.

129. *P*. En qué se conoce que los números son divisibles por dos?

R. En que su última cifra sea cero, dos, cuatro, seis ú ocho, á las cuales llamamos pares.

130. *P*. Cuándo es un número divisible por tres?

R. Cuando sumadas todas sus cifras como si fueran unidades, dan por suma tres ó cualquier número justo de veces tres.

131. *P*. Cuándo es un número divisible por cuatro?

R. Cuando la combinacion de sus dos últimas cifras es un producto de cuatro ó son ceros.

132. *P*. Cuándo es un número divisible por cinco?

R. Cuando su última cifra es cinco ó cero.

133. *P*. Y cuándo es un número divisible por seis?

R. Cuando reune las condiciones necesarias para serlo por dos y por tres.

134. *P*. Cuándo es un número divisible por ocho?

R. Cuando sus tres últimas cifras son ceros ó divisibles exactamente por ocho.

135. *P*. Cuándo es un número divisible por nueve?

R. Cuando sumadas sus cifras, dan por suma nueve ó cierto número justo de veces nueve.

136. *P*. Cuándo es un número divisible por diez?

R. Cuando su última cifra es cero.

137. *P*. En qué se conoce que un número es divisible por once?

R. Cuando las sumas de sus cifras tomadas alternativamente se diferencian en cero, once ó un número exacto de veces once?

138. *P*. Y cuándo será un número divisible por doce?

R. Cuando lo sea á la vez por tres y por cuatro.

139. *P*. Y cuándo serán los números divisibles por diez, ciento, mil, etc.?

R. Cuando acaben por uno, dos, tres, cuatro ceros, etc.

140. *P*. Y cuando á primera vista no se conocen los

divisores comunes á los términos de un quebrado, qué se hace para simplificarle?

R. Se busca directamente el máximo comun divisor?

141. *P.* Qué se entiende por máximo comun divisor?

R. El número mayor de los que pueden dividir exactamente á dos ó mas números.

142. *P.* Cómo se halla el máximo comun divisor?

R. Se divide el número mayor por el menor, y si nada sobra el menor es el máximo comun divísor; mas si queda alguna resta, se divide el menor por la resta, y si aun queda otra resta, se divide la primera resta por la segunda, y así hasta que no sobre nada; y el que sirvió de último divisor será el máximo comun divisor de los dos números; pero si el último divisor fué la unidad, los números no tendrán divisor comun.

143. *P.* Cómo se llaman los números que no tienen mas divisor comun que la unidad?

R. Se llaman primos entre sí.

144. *P.* Y á cuáles se llaman entre sí compuestos?

R. A los que tienen algun divisor comun.

145. *P.* Cómo se reducen dos ó mas quebrados á un comun denominador?

R. Se multiplica el numerador de cada uno por los denominadores de los demás, y el producto es el numerador de aquel quebrado, y formados así los numeradores, se multiplican despues los denominadores entre sí y el producto es el denominador comun.

146. *P.* Qué alteracion sufren los quebrados cuando se simplifican ó se reducen á comun denominador?

R. Varían de forma, pero no de valor; pues no se ha hecho otra cosa al simplificarlos que dividir sus dos términos; y al reducirlos, que multiplicar sus términos siempre por unos mismos números, lo cual no los hace mayores ni menores de lo que eran antes.

147. *P.* Para qué se reducen los quebrados á comun denominador?

R. Para sumarlos y restarlos, porque las cantidades que entran en estas operaciones deben ser de una misma especie.

148. *P.* De qué abreviacion es susceptible la simplificacion de los quebrados?

R. Desde luego que se conoce que el numerador de un quebrado es mitad, tercera, cuarta parte del denominador, se puede decir que el tal quebrado es igual á $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$, etc., sin necesidad de mas simplificacion.

149. *P.* De qué abreviacion es susceptible la reduccion á un comun denominador?

R. Cuando los denominadores tienen algun divisor ó factor comun, se multiplica cada numerador por los factores no comunes que se hallan en los otros denominadores, y el denominador se forma del producto de todos los factores no comunes multiplicados por el factor comun.

150. *P.* Qué otra abreviacion admite esta operacion?

R. A veces se pueden reducir los quebrados á un mismo denominador con solo multiplicar los términos de cada uno por números que se conocen á primera vista.

Explicaciones y Ejemplos.

126 y 127.

Para simplificar el quebrado . . . . $\frac{8}{16}$
se dividen por 2 sus dos términos y quedará reducido á . . . . $\frac{4}{8}$

Se dividen otra vez por 2 y será . . . . . . $\frac{2}{4}$

Se vuelven á dividir por 2 y resultará. . . . $\frac{1}{2}$.
Lo mismo hubiera resultado dividiendo de una vez sus dos términos por 8.

128.

El número 7 es divisor comun de los números 35, 14, 21, 28, porque todos ellos, si se dividen por 7, dan cuocientes exactos.

—

Los números 12, 16, 40, 8, tienen un divisor comun que es 2, y otro mayor que es 4, porque todos son divisibles exactamente por cualquiera de estos dos números.

129.

El número. 3656846
es divisible por 2 porque su última cifra es par; y el número. 4603430

tambien lo es porque su última cifra es cero

núm. dado	3656846	núm. dado	4603430
la mitad. .	1828423	la mitad. .	2301715

130.

Los números 1425 y 2310 son divisibles por 3 porque $1 + 4 + 2 + 5 = 12$ que es divisible por 3, y tambien $2 + 3 + 1 + 0 = 6$ que puede dividirse por 3.

núm. dado	1425	núm. dado	2310
3ª parte. .	475	3ª parte. .	770

131.

Los números 1304, 2128 y 23100 son divisibles por 4 porque sus dos últimas cifras 04, 28 y 00 se pueden dividir exactamente por 4 ó son ceros.

nº dado	1304	nº dado	2128	nº dado	23100
4ª parte	326	4ª parte	532	4ª parte	5775

132.

Los números 1750 y 7235 son divisibles por 5, porque acaban en 0 y en 5.

número dado	1750	número dado	7235
5ª parte. . .	350	5ª parte. . .	1447

133.

Los números 2370 y 1218 son divisibles por 6, porque lo son por 2 y por 3.

número dado	2370	número dado	1218
6ª parte. . .	395	6ª parte. . .	203

134.

Los números 1400, 3824 y 21000 son divisibles por 8, porque sus tres últimas cifras 400, 824 y 000 son divisibles por 8 ó ceros.

nº dado	1400	nº dado	3824	nº dado	21000
8ª parte	175	8ª parte	478	8ª parte	2625

135.

Los números 1350 y 2718 son divisibles por 9, porque $1+3+5+0=9$, y $2+7+1+8=18$, que es divisible por 9.

número dado	1350	número dado	2718
9ª parte. . .	150	9ª parte. . .	302

136.

El número 3540 es divisible por 10 porque acaba en cero, y como para dividir por 10 no hay mas que separar una cifra, será

número dado. . . . 3540
10ª parte. 354

137.

Sea el número dado 3564 que voy á examinar si es divisible por 11, y para esto marco una sí y otra no las cifras de este modo: 3 5′ 6 4′, y como las cifras marcadas dan por suma 9 y las no marcadas tambien 9, deduzco que no habiendo diferencia entre estas sumas el número es divisible por 11.

—

Sea este otro número que marcaré del mismo modo. . . . . 7′ 12′ 49′ 79′ 62′ y como la suma de las marcadas es 29 y la suma de las no marcadas 18, habiendo de diferencia entre estas sumas 11, el número es divisible por 11.

—

Sea, por fin, este otro número que marcaré como los anteriores. . . . . 7′ 09′ 25′ 14′, cuyas cifras marcadas suman 25 y las no marcadas 3, entre cuyas sumas hay de diferencia 22 ó dos veces 11; luego este número tambien es divisible por 11.

nº dado, 3′56′4 nº 7′12′49′79′62′ nº 7′09′25′14′ 11ᵃˢ. partes, 324; 11ª 64772542; 11ª 644774.

138.

Los números 6324 y 3720 son divisibles por 12 porque lo son por 3 y por 4.

número dado	6324	número dado	3720
12ª parte. . .	527	12ª parte. . .	310

139.

Los números 3600, 45000 y 170000 son divisibles por 100, 1000 y 10000 y los cuocientes son 36, 45 y 17.

140 á 142.

El modo de plantear la operacion para hallar el máximo comun divisor de dos números es como sigue :

Sean los números 17875 y 1155

cuocientes. . . .	15. . .	2. .	10	
	17875	1155	550	55 divisor.
	1155	1100	55	
	06325	0055	000	
	5775			
1ª resta.	550	2ª res.		

He dividido el número mayor por el menor, escribiendo arriba los cuocientes, y como quedó una resta 550, dividí el menor por dicha resta, y como quedó otra resta 55 dividí la primera resta por dicho número, y como no sobró nada deduzco que es 55 el máximo comun divisor de los números dados.

—

Hechas las mismas operaciones con los números 74 y 23 para hallar su máximo comun divisor

cuocientes. 3. 4 . 1 . 1 . 2

74	23	5	3	2	1 divisor.
69	20	3	2	2	
05	03	2	1	0	

hallo por último divisor 1, de que deduzco que los números propuestos no tienen divisor comun.

143.

Los números 13 y 15 son primos entre sí porque no tienen mas divisor comun que la unidad.

144.

Los números 30 y 24 son compuestos porque ambos se pueden dividir por 6, ó por 3, ó por 2.

—

Los niños pueden ejercitarse en simplificar estos quebrados por cualquiera de los medios indicados, y solo pondrémos los resultados para que los comparen con los que ellos obtengan despues de reducidos á la mas simple expresion.

$\frac{17528}{52584}$ simplificado es $\frac{1}{3}$

$\frac{468}{702}$ simplificado es $\frac{2}{3}$

$\frac{1716}{2145}$ simplificado es $\frac{4}{5}$

$\frac{384}{512}$ simplificado es $\frac{3}{4}$

145 á 147.

De dos modos se escriben los quebrados para reducirlos á un comun denominador, segun aquí se ve :

$$\frac{2}{3}=\frac{40}{60}\qquad \frac{3}{4}=\frac{45}{60}\qquad \frac{4}{5}=\frac{48}{60}$$

$$\underbrace{\overset{40}{\tfrac{2}{3}}\quad \overset{45}{\tfrac{3}{4}}\quad \overset{48}{\tfrac{4}{5}}}_{60}$$

Dejando á la eleccion de los maestros el modo de plantear estas operaciones, dirémos que se ejecuta diciendo :

1r. quebrado $2 \times 4 = 8 \times 5 = 40$ y es su numerador
2o. . . . $3 \times 3 = 9 \times 5 = 45$ y es su numerador
3o. . . . . $4 \times 3 = 12 \times 4 = 48$ y es su numerador
y luego . . $3 \times 4 = 12 \times 5 = 60$ y es el denominador comun.

148.

La simplificacion de estos quebrados seria inoficiosa por el método comun :

$$\frac{7}{21},\ \frac{16}{32},\ \frac{4}{20},\ \frac{13}{52},\ \frac{9}{45}$$

porque á primera vista se conoce que 7 es 3ª parte de 21; 16 mitad de 32; 4, 5ª parte de 20; 13, 4ª parte de 52, y 9, 5ª parte de 45, luego:

$$\frac{7}{21}=\frac{1}{3},\ \frac{16}{32}=\frac{1}{2},\ \frac{4}{20}=\frac{1}{5},\text{etc.}$$

y claro es que lo mismo resulta de dividir la unidad en 21 partes y tomar 7, que de dividirla en 3 partes y de ellas tomar una, porque siempre se toma la tercera parte de la unidad, y lo mismo podria decirse de los demás quebrados.

149.

La abreviacion que resulta de la reduccion á comun denominador cuando hay factores comunes en los quebrados es muy útil en la práctica. Sean los quebrados

$$\frac{2}{6},\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{9},\ \frac{5}{12}$$

cuyos denominadores tienen un factor comun 3, pudiéndose considerar al $6 = 3 \times 2$, al $3 = 3 \times 1$, al $9 = 3 \times 3$ y al $12 = 3 \times 4$, y aprovechándonos de esta circunstancia escribiré debajo de cada denominador el factor comun como aquí se ve:

$$\underbrace{\begin{array}{cccc}36 & 48 & 32 & 30\\ \frac{3}{6} & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{5}{12}\\ 2 & 1 & 3 & 4\end{array}}_{72}\ \text{factor comun } 3$$

y formaré el numerador de cada quebrado del producto de su numerador por los factores no comunes de los otros, así :

Primer quebrado $3 \times 1 \times 3 \times 4 = 36$
2°. . . . . . . $2 \times 2 \times 3 \times 4 = 48$
3°. . . . . . . $4 \times 2 \times 1 \times 4 = 32$
4°. . . . . . . $5 \times 2 \times 1 \times 3 = 30$

y el denominador se forma del factor comun por los factores no comunes, así :

denominador comun $3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 4 = 72$.
Siguiendo el método comun hubiera sido denominador comun 1944 y á propòrcion los numeradores.

Bien se podrá observar que el numerador y denominador de cada quebrado se han multiplicado por unos mismos números que es lo que se hacia por el método general.

150.

En muchas operaciones se presentan quebrados que pueden reducirse á comun denominador con solo multiplicar sus términos por números que pueden conocerse á primera vista; por ejemplo :

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{9}{12}$$

fácilmente se conoce que todos pueden reducirse á dozavos multiplicando los dos términos del primero por 4, los del segundo por 2, los del tercero por 3 y los del cuarto por 1 si se desea hablar con generalidad, resultando los quebrados así reducidos :

$$\frac{8}{12}, \quad \frac{10}{12}, \quad \frac{9}{12}, \quad \frac{9}{12}$$

mientras que por el método comun se hubiera obtenido por denominador 864 y á proporcion los numeradores.

—

Del mismo modo los quebrados

$$\frac{3}{5}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{2}{10}, \quad \frac{1}{2}$$

se pueden reducir á veinte avos multiplicando los términos del primero por 4, los del segundo por 5, los del tercero por 2 y los del cuarto por 10 y resultarán

$$\frac{12}{20}, \quad \frac{5}{20}, \quad \frac{4}{20}, \quad \frac{10}{20}$$

La siguiente consideracion es de mucho auxilio en esta práctica : ¿Por qué número debo multiplicar al denominador de $\frac{3}{5}$ para hacerle veinte avos? y hallado que es por 4 diré : pues para que subsista la igualdad debo multiplicar por el mismo 4 á su numerador. ¿Por qué número debo multiplicar al denominador de $\frac{1}{4}$ para hacerle veinte avos? y hallado que es 5, diré : pues por el mismo 5 multiplicaré á su numerador, y así de los demás.

———

LECCION X.

ADICION DE LOS QUEBRADOS Y DE LOS NÚMEROS MIXTOS.

151. *P.* Cómo se suman los quebrados que tienen un mismo denominador?

R. Se suman los numeradores y resultará el numerador de la suma á la cual se pondrá el denominador comun.

152. *P.* Cómo se suman los quèbrados que tienen distintos denominadores?

R. Se reducen primero á un comun denominador, se suman los numeradores y el resultado será el numerador de la suma á la que se pondrá el denominador comun.

153. *P.* Qué se hace cuando la suma es un quebrado impropio?

R. Se reduce á entero ó á entero y quebrado partiendo el numerador por el denominador.

154. *P.* Cómo se suman los enteros y quebrados?

R. Si los quebrados tienen un mismo denominador, se suman los numeradores y la suma se divide por el denominador comun, dejando debajo de los quebrados el que quedase de esta division y agregando los enteros que resulten á la suma de los enteros que se hará en seguida;

pero si los quebrados no tienen un mismo denominador, se reducirán primero para que la tengan y despues se operará del mismo modo.

Ejemplos para la práctica.

151.

Cierto individuo ha trabajado para hacer una obra $\frac{3}{4}$ de hora, luego $\frac{1}{4}$ de hora y despues $\frac{2}{4}$ de hora ¿cuántas horas ha trabajado?

$$\begin{array}{l} \frac{3}{4} \text{ horas} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{2}{4} \\ \hline \frac{6}{4} = 1 + \frac{2}{4} \text{ de hora.} \end{array}$$

Sumando los numeradores resultan 6, puesto el denominador comun son $\frac{6}{4}$, y reducidos á enteros dan 1 hora y $\frac{2}{4}$ de hora que es el total del tiempo que ha invertido.

152 y 153.

Tomando razon de varios retazos de un mismo género se ha encontrado uno de $\frac{3}{4}$ de vara, otro de $\frac{2}{5}$ de vara y otro de $\frac{1}{2}$ vara, ¿cuántas varas habrá entre todos ellos?

$$\begin{array}{ll} \frac{3}{4} = \frac{30}{40} \text{ de vara.} & \\ \frac{2}{5} \quad \frac{16}{40} & \\ \frac{1}{2} \quad \frac{20}{40} & \\ \hline & \frac{66}{40} = 1 + \frac{26}{40} \text{ de vara.} \end{array}$$

Planteada la operacion, hallo que es necesario reducir los quebrados á comun denominador, lo cual verificado, hecha la suma de los quebrados y hallados los enteros, resulta haber entre todos los retazos 1 vara y $\frac{26}{40}$ de vara.

154.

Recibe un mercader varias piezas de raso y resultan cada una con el siguiente número de varas. Desea saber cuántas varas hay entre todas.

$$\text{varas. . . . } \left.\begin{array}{l} 12 + \frac{3}{4} \\ 12 + \frac{1}{4} \\ 13 + \frac{2}{4} \\ 11 + 0 \\ 10 + \frac{2}{4} \end{array}\right\} \frac{8}{4} = 2 \text{ que paso á los enteros.}$$

$$\overline{60 + 0 \text{ varas.}}$$

Planteada la operacion, se han sumado los quebrados, cuya suma reducida á enteros dió 2 y agregados á las unidades; concluida la suma han resultado 60 varas, que recibió el mercader.

—

De unos bastones puestos á vender se han perdido 2 docenas y $\frac{2}{3}$ de docena, se han vendido 5 y $\frac{1}{4}$ docenas y existen aun 7 y $\frac{1}{2}$ docenas, ¿cuántos eran los bastones?

$$\left.\begin{array}{r} 5+\frac{1}{4}=\frac{6}{24} \\ 2+\frac{2}{3}=\frac{16}{24} \\ 7+\frac{1}{2}=\frac{12}{24} \end{array}\right\} \frac{34}{24}=1+\frac{10}{24}$$

$$\text{dnas.}\ .\ 15+\frac{10}{24}\ \text{ó}\ \frac{5}{12}$$

Reducidos los quebrados y sumados dan $\frac{34}{24}$, que reducidos á enteros son 1 y $\frac{10}{24}$, y agregando el 1 á los enteros y hecha la suma, resultan 15 docenas y $\frac{10}{24}$ ó $\frac{5}{12}$ de docena.

LECCION XI.

SUSTRACCION DE LOS QUEBRADOS Y DE LOS NÚMEROS MIXTOS.

155. *P.* Cómo se restan los quebrados?

R. Si los quebrados tienen un mismo denominador, se restan los numeradores, y la resta será el numerador del residuo, á la cual se pondrá el donominador comun; pero si los quebrados no tienen el mismo denominador, se reducirán primero para que le tengan, y se operará de igual modo.

156. *P.* Cómo se restan los enteros y quebrados de los enteros y quebrados?

R. Se restan primero los quebrados reduciéndolos á comun denominador si fuere necesario, y luego se restan los enteros.

157. *P.* Qué se hace cuando el quebrado del minuendo es menor que el del sustraendo?

R. Se toma una unidad del minuendo que se reduce á la especie de los quebrados y se agrega al suyo, hecho lo cual bien se puede restar el del sustraendo, teniendo presente al pasar á la resta de los enteros que las unidades del minuendo están disminuidas de la que se tomó para el quebrado.

158. *P.* Y qué se ejecutará cuando en el sustraendo haya quebrado y no le haya en el minuendo?

R. Se tomará una unidad del minuendo, la cual reducirémos á quebrado de la especie del sustraendo, restarémos el quebrado sustraendo de aquella unidad reducida, y se tendrá presente que los enteros del minuendo están disminuidos de la unidad que se separó.

Ejemplos para la práctica.

155.

Si de $\frac{3}{4}$ de vara doy $\frac{1}{4}$ de vara, ¿cuánto me quedará?

$$\begin{array}{rl} \text{varas } \frac{3}{4} & \text{minuendo} \\ \frac{1}{4} & \text{sustraendo} \\ \hline \text{varas } \frac{2}{4} & \text{residuo.} \end{array}$$

Restando los numeradores de estos quebrados que tienen el mismo denominador hallo que quedan $\frac{2}{4}$ de vara.

—

Las $\frac{4}{5}$ partes del año, menos $\frac{2}{3}$ de año ¿ qué parte del año será?

$$\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$$
$$\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$$

quedan. . . $\frac{2}{15}$ de año.

Como los quebrados tenian distintos denominadores, los reduje á comun denominador, he restado luego los numeradores, y hallo que quedan $\frac{2}{15}$ de año.

156.

De cien pesos y medio que tenia he gastado noventa pesos; ¿cuánto me queda?

pesos $100 + \frac{1}{2}$
90

pesos $10 + \frac{1}{2}$.

Resto los quebrados, ó mejor dicho, bajo el quebrado del minuendo, resto los enteros y me quedan 10 y $\frac{1}{2}$ pesos.

—

Uno ha vivido 100 años y $\frac{2}{3}$ de año, y otro ha vivido 50 años y $\frac{1}{3}$ de año, ¿ cuántos años vivió el primero mas que el segundo?

$$\begin{array}{rr} \text{años} & 100 + \frac{2}{3} \\ & 50 + \frac{1}{3} \\ \hline \text{años} & 50 + \frac{1}{3} \end{array}$$

Restando primero los quebrados y luego los enteros, hallo que el primero vivió mas que el segundo 50 años y $\frac{1}{3}$.

—

Debiéndome cierto individuo 98 pesos y $\frac{1}{2}$ y habiéndome pagado 36 y $\frac{1}{4}$ pesos, ¿ cuánto me resta?

$$\begin{array}{rr} \text{pesos} & 98 + \frac{1}{2} \text{ ó } \frac{4}{8} \\ & 36 + \frac{1}{4} \text{ ó } \frac{2}{8} \\ \hline \text{pesos} & 62 + \quad \frac{2}{8} \text{ ó } \frac{1}{4} \end{array}$$

Reduciendo primero los quebrados, restando estos y luego los enteros, hallo que me resta 62 pesos y $\frac{1}{4}$ de peso.

157.

Un niño tiene 7 y $\frac{1}{4}$ reales y da de limosna á un pobre 2 y $\frac{3}{4}$ reales, ¿ cuánto le quedará?

$$\begin{array}{rr} \text{reales} & 7 + \frac{1}{4} \\ & 2 + \frac{3}{4} \\ \hline \text{reales} & 4 + \frac{2}{4} \end{array}$$

Como no puedo restar $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{4}$, tomo una unidad del minuendo que hacen $\frac{4}{4}$ y digo: $\frac{4}{4}$ y $\frac{1}{4}$ son $\frac{5}{4}$ y de ellos restando los $\frac{3}{4}$ quedan $\frac{2}{4}$, y resto despues los enteros que son 6 en el minuendo por la unidad que se separó. Le quedan al niño 4 y $\frac{2}{4}$ reales.

—

De mi casa á la iglesia hay 100 y $\frac{1}{2}$ pasos, he caminado 50 y $\frac{3}{4}$ pasos, ¿cuánto me falta para llegar?

$$\begin{array}{lr} \text{pasos} & 100 + \frac{1}{2} \text{ ó } \frac{4}{8} \\ & 50 + \frac{3}{4} \text{ ó } \frac{6}{8} \\ \hline \text{pasos} & 49 + \frac{6}{8} \text{ ó } \frac{3}{4} \end{array}$$

Reducidos los quebrados, como no puedo restar $\frac{6}{8}$ de $\frac{4}{8}$, tomo una unidad que son $\frac{8}{8}$ y digo, $\frac{8}{8}$ y $\frac{4}{8}$ son $\frac{12}{8}$, resto $\frac{6}{8}$ y quedan $\frac{6}{8}$ ó $\frac{3}{4}$, resto despues los enteros y hallo que me faltan 49 y $\frac{3}{4}$ pasos para llegar á la iglesia.

—

Tiene un trabajador que hacer 18 y $\frac{1}{4}$ varas de obra, y lleva hechas $\frac{3}{4}$ de vara de obra, ¿cuántas varas le faltan por hacer?

$$\begin{array}{lr} \text{varas} & 18 + \frac{1}{4} \\ & 0 + \frac{3}{4} \\ \hline \text{varas} & 17 + \frac{2}{4} \text{ ó } \frac{1}{2} \end{array}$$

Tomando la unidad reducida á cuartos, agregándola al quebrado minuendo y restando, hallo que faltan 17 y $\frac{2}{4}$ ó $\frac{1}{2}$ varas.

158.

Tengo órden de entregar á cierto sugeto 100 libras de pólvora y le he dado 80 y $\frac{3}{4}$ libras, ¿cuántas le faltan por recibir?

$$\begin{array}{lr} \text{libras} & 100 \\ & 80 + \frac{3}{4} \\ \hline \text{libras} & 19 + \frac{1}{4} \end{array}$$

No habiendo quebrado en el minuendo tomo una unidad que son $\frac{4}{4}$ y digo: quien de $\frac{4}{4}$ quita $\frac{3}{4}$ queda $\frac{1}{4}$, sigo á los enteros que en el minuendo están disminuidos de una unidad, y hallo que faltan por entregar 19 y $\frac{1}{4}$ libras.

LECCION XII.

MULTIPLICACION DE LOS QUEBRADOS Y DE LOS NÚMEROS MIXTOS, REDUCCION DE LOS QUEBRADOS COMPUESTOS Á SIMPLES Y MODO DE VALUAR LOS QUEBRADOS.

159. *P.* Cómo se multiplica un quebrado por otro?

R. Multiplicando los numeradores se obtendrá el numerador del producto, y multiplicando los denominadores se obtendrá el denominador.

160. *P.* Cómo se multiplica un quebrado por un entero ó un entero por un quebrado?

R. Multiplicando el numerador del quebrado por el entero se obtendrá el numerador del producto, al cual se pondrá por denominador el que antes tenia el quebrado.

161. *P.* Cómo se multiplica entero y quebrado por entero, ó entero por entero y quebrado?

R. El número mixto se reduce á la especie de su quebrado, y en esta forma se le multiplica por el entero.

162. *P.* Cómo se multiplica entero y quebrado por quebrado, y quebrado por entero y quebrado?

R. El entero y quebrado se reduce á la especie de su quebrado, y en esta forma se multiplica por el quebrado.

163. *P.* Cómo se multiplica entero y quebrado por entero y quebrado?

R. Se reducen ambos factores á la especie de sus quebrados, y se hace la multiplicacion con los quebrados que resulten.

164. *P.* Puede Vd. darme una regla general para la multiplicacion de enteros por quebrados, números mixtos por enteros ó por quebrados, y por otros números mixtos?

R. El factor que sea entero se pone en forma de quebrado dándole la unidad por denominador : el factor que sea número mixto se reduce á la especie de su quebrado : el factor que sea quebrado se deja como está; y haciendo esta operacion preparatoria, queda reducida la multiplicacion á la de un quebrado por otro.

165. *P.* Cómo se reducen á simples los quebrados de quebrados?

R. Multiplicando numeradores y denominadores entre sí, y el quebrado formado por los dos productos será simple.

166. *P*. Cómo se toma de un número cualquiera la parte que expresa un quebrado?

R. Multiplicando dicho número por el numerador y dividiendo el producto por el denominador del quebrado: el cuociente que resulte será la parte buscada.

167. *P*. Cómo se valúa un quebrado?

R. Se multiplica el numerador por el número de unidades de la especie á que se quiere reducir, contenidas en la unidad superior á que antes se referia el quebrado: el producto se parte por el denominador del quebrado, y el cuociente será unidades de la especie inferior; mas si queda otro quebrado, puede valorarse en unidades de la especie siguiente y así hasta donde se pueda, refiriéndose el último quebrado, si lo hubiere, á la última especie hallada.

Explicaciones y Ejemplos.

159.

No estará de mas advertir á los alumnos que cuando el multiplicador es un quebrado propio, resulta el producto menor que el multiplicando, lo cual debe ser así; porque expresando el multiplicador las veces que se ha de tomar el multiplicando, cuando aquel es menor que la unidad, necesario es tomar á este menos de una vez.

—

Esto supuesto, pasarémos á presentar varios ejemplos de multiplicacion de quebrados y factores en que entre esta clase de números, las cuales ejecutarémos con números concretos para facilitar la aplicacion de estas operaciones á los casos prácticos que puedan ocurrir.

Sea el primero averiguar cuánto importan $\frac{2}{3}$ de la vara de un género que se vende á $\frac{3}{4}$ de peso la vara.

$$\tfrac{3}{4} \text{ pesos} \times \tfrac{2}{3} \text{ varas} = \tfrac{6}{12} \text{ ó } \tfrac{1}{2} \text{ peso.}$$

En estas cuestiones es costumbre escribir el multiplicando á la izquierda y el multiplicador á la derecha como se ha hecho. Luego he multiplicado los numeradores y resultó 6 para numerador del producto : despues multipliqué los denominadores y resultó 12 que puse por denominador al producto : finalmente, simplifiqué el quebrado $\frac{6}{12}$ y resultó $\frac{1}{2}$ peso que es el valor que se solicitaba.

160.

Si se quiere averiguar cuánto deberá ganar en $\frac{3}{4}$ de dia un artista que al dia ganaba 20 reales, plantearé la opecion de este modo :

$$20 \text{ reales} \times \tfrac{3}{4} \text{ dia} = \tfrac{60}{4} \text{ ó } 15 \text{ reales.}$$

He multiplicado el entero por el numerador del quebrado y resultó 60 para numerador, le puse luego por denominador al producto el mismo 4 que tenia el quebrado, y reduciéndole á enteros hallé 15 reales que era lo que se me pedia.

—

Repartiendo á 50 trabajadores á $\frac{3}{4}$ de real cada uno, ¿á cuánto asciende lo entregado?

$\frac{3}{4}$ reales $\times$ 50 trab. $= \frac{150}{4} = 37 + \frac{2}{4}$ reales.

Esta operacion la he ejecutado por el mismo estilo que la anterior.

161.

¿Cuánto habrá ganado Juan en 2 meses y $\frac{2}{3}$ suponiendo que al mes gana 30 pesos?

30 pesos $\times$ $2 + \frac{2}{3}$ meses

30 pesos $\times$ $\frac{8}{3}$ meses $= \frac{240}{3} = 80$ pes.

Para convertir la operacion al caso de la pregunta 160, reduje el entero y quebrado á la especie de su quebrado, y en lo demás he seguido un método análogo al anterior.

Se reunen 8 individuos para un negocio, y cada uno ofrece dar 10 y $\frac{3}{4}$ pesos; ¿cuánto se reunirá?

$10 + \frac{3}{4}$ pesos $\times$ 8

$\frac{43}{4}$ pesos $\times$ 8 h. $= \frac{344}{4} = 86$ pesos

En esta operacion he seguido el mismo método que en la precedente.

162.

Sabiéndose que la libra de queso está ó vale á 7 y $\frac{1}{2}$ reales, ¿cuánto se pagará por $\frac{3}{4}$ de libra?

$$7 + \frac{1}{2} \text{ reales} \times \frac{3}{4} \text{ libra.}$$
$$\frac{15}{2} \text{ reales} \times \frac{3}{4} \text{ libra} = \frac{45}{8} = 5 + \frac{5}{8} \text{ reales.}$$

He reducido el número mixto de reales á la especie de su quebrado, y he ejecutado luego la multiplicacion como en la pregunta 159.

—

Hace siete semanas y media que Pedro está ganando $\frac{7}{8}$ de onza por semana, ¿cuántas onzas habrá devengado?

$$\frac{7}{8} \text{ onza} \times 7 + \frac{1}{2} \text{ semanas.}$$
$$\frac{7}{8} \text{ onza} \times \frac{15}{2} \text{ semanas} = \frac{105}{16}\ 6 + \frac{9}{16} \text{ onza.}$$

La operacion manifiesta haberse hecho por el mismo método de la anterior.

163.

Cuánto importan 7 varas y dos tercias de género á razon de 4 pesos y $\frac{1}{2}$ la vara?

$$4 + \frac{1}{2} \text{ pesos} \times 7 + \frac{2}{3} \text{ varas.}$$
$$\frac{9}{2} \text{ pesos} \times \frac{23}{3} \text{ varas} = \frac{207}{6} = 34 + \frac{3}{6} \text{ pesos.}$$

Reduciendo el multiplicando y multiplicador á la especie de sus quebrados, y efectuando la operacion como la de dos quebrados, he hallado lo que se me pedia.

164.

Para poner en práctica la regla general á que se refiere esta pregunta, nos propondrémos la cuestion siguiente:

Un mercader tenia 6 varas de raso que las cambió por azúcar dándole por cada vara 3 y $\frac{1}{2}$ libras; luego vendió cada libra de azúcar á $\frac{3}{4}$ de real y se pregunta, ¿cuántos reales importaron?

Cuestion original. 6 vars. $\times$ 3 + $\frac{1}{2}$ libs. $\times$ $\frac{3}{4}$ de rl.

Trasformada y resuelta. $\left\{ \frac{6}{1} \times \frac{7}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{126}{8} = 15 + \frac{6}{8} \right.$ reales.

El entero 6 lo puse como quebrado dándole por denominador la unidad, el número mixto lo reduje á la especie de su quebrado, de que resultó $\frac{7}{2}$, y dejando el quebrado $\frac{3}{4}$ como estaba, los multipliqué por el método de la pregunta 159, con lo cual, despues de reducido el quebrado impropio á entero y quebrado, hallé por resultado 15 y seis octavos de real, que es lo que buscaba.

165.

Parece que antes se ha dicho que cuando un quebrado se refiere á mas ó menos de la unidad se llama compuesto, y simple cuando se refiere á ella, por manera que $\frac{2}{3}$ de peso es simple, pero $\frac{2}{3}$ de 6 pesos ó $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$ peso son compuestos, y de estos el último se llama quebrado de quebrado por referirse á otro : resta poner algun ejemplo del modo de simplificarlos:

Supongamos que un pobre hombre le da á su hijo la mitad de un pan que habia conseguido; pero que el hijo le cedió á otro hermano suyo dos terceras partes de lo que recibió de su padre, y por último el hermano le da á otro muchacho dos quintos de lo que él habia conseguido, ¿qué parte del pan recibió el último?

No hay duda que él tomó las dos quintas partes de los dos tercios de la mitad de un pan, lo cual expresaré así :

$$\frac{2}{5} \text{ de } \frac{2}{3} \text{ de } \frac{1}{2} \text{ pan} = \frac{4}{30} \text{ ó } \frac{21}{15} \text{ del pan}$$

cuyo último resultado es el quebrado formado por los productos de numeradores y denominadores.

—

Una niña para su calzado necesita la mitad de las dos terceras partes de media vara de tela, ¿qué parte de la vara debe corresponderle?

$$\frac{1}{2} \text{ de } \frac{2}{3} \text{ de } \frac{1}{2} \text{ vara} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \text{ de vara.}$$

Este preblema se ha resuelto como el anterior.

166.

Tomar de un número la parte que expresa un quebrado no es otra cosa que reducir á simple un quebrado compuesto de entero ó de entero y quebrado.

Los siguientes ejemplos aclaran mas esta doctrina.

Habiendo ganado en cierta especulacion 126 pesos y convenido en ceder á un individuo que nos prestó el auxilio de sus conocimientos para el negocio las dos terceras partes, se pregunta ¿cuánto debe corresponderle?

$$\tfrac{2}{3} \text{ de } 126 \text{ pesos} = \tfrac{252}{3} = 84 \text{ pesos.}$$

He multiplicado el entero por el numerador, partido el producto por el denominador, y hallado el resultado que buscaba.

¿Cuánto serán los $\frac{2}{3}$ de 1 y $\frac{1}{2}$ pesos?

$$\tfrac{2}{3} \text{ de } 1 + \tfrac{1}{2} \text{ pesos.}$$
$$\tfrac{2}{3} \text{ de } \tfrac{3}{2} \text{ pesos} = \tfrac{6}{6} = 1 \text{ peso.}$$

Trasformado el número mixto en quebrado, la cuestion quedó reducida á convertir en simple un quebrado de quebrado, lo que ejecuté por el método de la pregunta 165.

167.

Se desea reducir á meses, dias y horas ó lo que es lo mismo, se quiere valuar el quebrado $\frac{7}{19}$ del año.

$$\begin{array}{r} 12 \text{ meses} \\ 7 \\ \hline 84 \\ 76 \\ \hline 8 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 19 \\ \hline 4 \text{ meses} \end{array} \right. \qquad \begin{array}{r} 30 \text{ dias} \\ 8 \\ \hline 240 \\ 19 \\ \hline 50 \\ 38 \\ \hline 12 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 19 \\ \hline 12 \text{ ds.} \end{array} \right. \qquad \begin{array}{r} 24 \text{ horas} \\ 12 \\ \hline 288 \\ 19 \\ \hline 98 \\ 95 \\ \hline 3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 19 \\ \hline 15 \text{ h.} \end{array} \right.$$

$\frac{7}{19}$ de año = 4 meses 12 dias + 15 hor. + $\frac{3}{19}$ h.

Como un año tiene 12 meses, multipliqué el numerador por este número, y dividiendo el producto por el denominador, hallé al cuociente 4 que son meses y quedó de resta 8; mas como un mes tiene 30 dias, multipliqué 8 por 30, y partiendo el producto por el denominador, hallé 12 que son dias y sobraron 12; pero como cada dia tiene 24 horas, multipliqué la resta por este número, y volviendo á dividir por 19, resultó al cuociente 15 que son las horas; y no queriendo continuar mas allá mi investigacion, le agrego á las horas un quebrado cuyo numerador es la última resta y el denominador el que lo fué del quebrado primitivo.

LECCION XIII.

DE LA DIVISION DE LOS QUEBRADOS Y DE LOS NÚMEROS MIXTOS.

168. *P.* Cómo se divide un quebrado por otro quebrado?

R. Multiplicándolos en cruz, es decir : el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y este será el númerador del cuociente, y luego el denominador del dividendo por el numerador del divisor, y será el denominador del cuociente.

169. *P*. Cómo se divide un quebrado por un entero?

R. Multiplicando el denominador del quebrado por el entero, dejando intacto su numerador.

170. *P*. Cómo se divide un entero por un quebrado?

R. Multiplicando el entero por el denominador del quebrado, el producto será numerador del cuociente, al cual se pondrá por denominador el numerador del quebrado.

171. *P*. Cómo se divide entero y quebrado por entero, ó entero por entero y quebrado?

R. El numerador misto se reduce á la especie de su quebrado, y se ejecuta despues la division como la de quebrado por entero, ó la de entero por quebrado.

172. *P*. Cómo se divide entero y quebrado por quebrado, ó quebrado por entero y quebrado?

R. El número mixto se reduce á la especie de su quebrado, y luego se ejecuta la division como la de un quebrado por otro.

173. *P*. Y cómo se divide entero y quebrado por entero y quebrado?

R. Se reducen dividendo y divisor á la especie de sus quebrados, con lo cual queda reducida la operacion á la division de un quebrado por otro.

174. *P*. Me puede Vd. dar una regla general que comprenda todos los casos?

R. Sí, señor; se coloca el dividendo á la izquierda y el divisor á la derecha, y debajo se escribe la operacion trasformada de este modo: los enteros se ponen en forma de quebrados dándoles la unidad por denominador; los números mixtos se reducen á la especie de sus quebrados; los quebrados se copian como estén, con lo cual queda siempre reducida la division á la de un quebrado por otro.

Ejemplos para la práctica.

168.

Con el fin de poner en práctica la regla contenida en esta pregunta, nos propondrémos resolver la cuestion siguiente :

Habiendo gastado $\frac{3}{4}$ de peso en $\frac{1}{2}$ libra de dulce, ¿á cómo cuesta la libra?

$$\tfrac{3}{4} \text{ pesos} : \tfrac{1}{2} \text{ libra} = \tfrac{6}{4} \text{ ps.} = 1 + \tfrac{1}{2} \text{ ps.}$$

El dividendo es pesos por ser de la especie del cuociente, luego le escribo á la izquierda : el divisor libras le escribo á la derecha, y luego digo : $3 \times 2 = 6$ que es el numerador del cuociente y $4 \times 1 = 4$ que es el denominador, y hallo por cuociente $\frac{6}{4}$ de peso $= 1 + \frac{1}{2}$ ps. que es lo que cuesta la libra de dulces.

169.

Supongamos que $\frac{2}{3}$ de raso se quieren repartir á tres señoritas, ¿qué parte de la vara corresponderá á cada una?

$$\tfrac{2}{3} \text{ vara} : 3 = \tfrac{2}{9} \text{ vara.}$$

He multiplicado el denominador del quebrado por el entero dejando intacto al numerador, y hallo que á cada señorita corresponden $\frac{2}{9}$ de vara.

170.

Habiendo recibido cierto individuo por su trabajo en las tres cuartas partes del año 90 pesos, ¿cuánto ganaba por año?

$$90 \text{ ps.} : \tfrac{3}{4} = \tfrac{360}{3} \text{ ps.} = 120 \text{ ps.}$$

Multiplicando el entero por el denominador del divisor he formado el numerador del cuociente 360, le he puesto por denominador el numerador 3 del divisor, reducido el cuociente á enteros, y hallo que ganaba 120 pesos por año.

171.

Quiero repartir $7 + \frac{1}{2}$ reales entre 8 niños, ¿cuánto corresponde á cada uno?

$$7 + \tfrac{1}{2} \text{ rs.} : 8 \text{ niños}$$
$$\tfrac{15}{2} \text{ rs.} : 8 = \tfrac{15}{16} \text{ rs.}$$

Reduciendo el dividendo á la especie de su quebrado resultó $\frac{15}{2}$ rs., que divididos entre 8 dan por cuociente $\frac{15}{16}$ reales, siendo esto lo que corresponde á cada uno.

—

He pagado 9 ps. por $1 + \frac{1}{2}$ varas de terciopelo, ¿á cómo cuesta cada vara?

$$9 \text{ pesos} : 1 + \tfrac{1}{2} \text{ vs.}$$
$$9 \text{ pesos} : \tfrac{3}{2} = \tfrac{18}{3} \text{ ps.} = 6 \text{ ps.}$$

Reducido el divisor á la especie de su quebrado y dividiendo 9 ps. entre los $\frac{3}{2}$ que resultaron, hallo al cuociente $\frac{18}{3}$ ps. ó 6 ps. que es el valor de cada vara.

172.

Nos piden $2 + \frac{3}{4}$ ps. por desmontar $\frac{1}{2}$ cabuya de terreno, ¿cuánto cuesta la labor de una cabuya?

$$2 + \tfrac{3}{4} \text{ ps.} : \tfrac{1}{2} \text{ cabuya.}$$
$$\tfrac{11}{4} \text{ ps.} : \tfrac{1}{2} = \tfrac{22}{4} \text{ ps.} = 5 + \tfrac{1}{2} \text{ ps.}$$

Reduciendo el dividendo á la especie del quebrado resultan $\frac{11}{4}$ que divididos por $\frac{1}{2}$ dan al cuociente despues de reducidos $5 + \frac{1}{2}$ ps. que es lo que vale el trabajo de cada cabuya.

—

He comprado en $\frac{7}{8}$ peso, $3 \frac{1}{2}$ botellas de tinta, ¿cuál es el valor de cada botella?

$$\tfrac{7}{8} \text{ ps.} : 3 + \tfrac{1}{2} \text{ botellas.}$$
$$\tfrac{7}{8} \text{ ps.} : \tfrac{7}{2} = \tfrac{14}{56} \text{ ps.} = \tfrac{1}{4} \text{ ps.}$$

Reduciendo el divisor á la $\frac{7}{2}$ especie de su quebrado, divido $\frac{7}{8}$ ps. por los que resultaron, y encuentro, hechas las reducciones necesarias, que la botella de tinta costó á $\frac{1}{4}$ ps.

173.

Se desea saber el valor de una arroba de azúcar en la suposicion de que por un pilon que pesa $2 + \frac{1}{2}$ arrobas exigen $6 + \frac{1}{4}$ pesos.

$$6 + \tfrac{1}{4} \text{ pesos} : 2 + \tfrac{1}{2} \text{ arrobas.}$$

$$\tfrac{25}{4} \text{ ps.} : \tfrac{5}{2} = \tfrac{50}{20} \text{ ps.} = 2 + \tfrac{1}{2} \text{ ps.}$$

He reducido dividendo y divisor á la especie de sus quebrados, y ejecutada la division en esta nueva forma, encuentro por valor de cada arroba de azúcar $2 + \frac{1}{2}$ ps.

174.

Hemos presentado ya todos los casos que pueden ofrecerse en la division de quebrados y números mixtos, y como para presentar la práctica de la regla establecida en esta pregunta, deberíamos repetirlos uno por uno, lo cual haria demasiado larga esta leccion, nos contraerémos á los siguientes ejemplos abstractos :

$$\tfrac{2}{3} : \tfrac{4}{5} = \tfrac{10}{12} = \tfrac{5}{6}$$

Esta operacion no necesita trasformarse, porque está reducida á dividir un quebrado por otro.

—

Cuestion primitiva. . $\frac{2}{3} : 4$
Cuestion trasformada. $\frac{2}{3} : \frac{4}{1} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

—

Cuestion primitiva. . $2 : \frac{4}{5}$
Cuestion trasformada. $\frac{2}{1} : \frac{4}{5} = \frac{10}{4} = 2 + \frac{1}{2}$

Cuestion primitiva. . $2 + \frac{2}{3} : 4$
Cuestion trasformada. $\frac{8}{3} : \frac{4}{1} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

—

Cuestion primitiva. . $6 : 3 + \frac{1}{2}$
Cuestion trasformada. $\frac{6}{1} : \frac{7}{2} = \frac{12}{7} + 1 + \frac{5}{7}$

—

Cuestion primitiva. . $2 + \frac{3}{4} : \frac{2}{3}$
Cuestion trasformada. $\frac{11}{4} : \frac{2}{3} = \frac{33}{8} = 4 + \frac{1}{8}$

—

Cuestion primitiva. . $\frac{4}{7} : 2 + \frac{1}{2}$
Cuestion trasformada. $\frac{4}{7} : \frac{5}{2} = \frac{8}{35}$

—

Cuestion primitiva. . $6 + \frac{2}{3} : 3 + \frac{1}{4}$
Cuestion trasformada. $\frac{20}{3} : \frac{13}{4} = \frac{80}{39} = 2 + \frac{2}{39}$

En todos estos ejemplos no hemos hecho otra cosa que trasformar las cuestiones que se nos han propuesto de manera que quedasen reducidas á la division de un quebrado por otro.

LECCION XIV.

DE LAS FRACCIONES DECIMALES.

175. *P.* Qué se entiende por fracciones decimales y cantidades decimales?

R. Las fracciones decimales son unos quebrados que tienen por denominador la unidad seguida de ceros; y las cantidades donde las hay, tengan ó no enteros, se llaman cantidades decimales.

176. *P.* Cómo se forman las clases decimales?

R. De un modo contrario al que se forman las decenas, centenas, etc.; porque cada unidad se considera dividida en diez partes que se llaman *décimas*, cada décima en otras diez partes que se llaman *centésimas*, cada centésima en otras diez que se llaman *milésimas*, y asi sucesivamente.

177. *P.* Cómo se escriben las cantidades decimales?

R. A la derecha de los enteros separadas por una coma, y si no hay enteros se escribe un cero en el lugar correspondiente á las unidades, luego la coma y despues las cifras decimales.

178. *P.* Y en qué órden se escriben estas cifras decimales?

R. En el primer lugar despues de las unidades se escriben las décimas, en el segundo las centésimas, en el tercero las milésimas, en el cuarto las diez milésimas, y así de las demás.

179. *P.* Y qué se observará cuando haya algunas clases decimales de órden inferior y no las haya de otro superior?

R. Se ocuparán con ceros aquellos lugares en donde no haya cifras decimales significantes.

180. *P.* Qué consideraciones deben hacerse al escribir una cantidad decimal?

R. Dos muy esenciales, á saber : cuántas cifras tiene el numerador de la fraccion decimal, y qué lugar debe ocupar la última de dichas cifras.

181. *P.* Para qué?

R. Para escribir, en caso necesario, despues de la coma y antes de las cifras decimales, los ceros que basten á efecto de que la última tenga la denominacion requerida.

182. *P.* Y si la expresion decimal tiene mas cifras de las necesarias para quedar á la derecha de la coma?

R. Entonces se colocará la coma en el lugar conveniente al nombre que ha de recibir la última cifra.

183. *P.* Cómo se enuncian las cantidades decimales?

R. Al enunciar una cantidad decimal no se dice, tantas décimas, tantas centésimas y tantas milésimas, sino que se expresa el número que representa el numerador y la clase decimal á que ha de corresponder la última cifra.

184. *P.* Cómo se leen las fracciones decimales?

R. Se enuncia el número que está á la derecha de la coma como si fuesen enteros, y luego se expresa la clase correspondiente á la última decimal de la derecha, es decir, á la mas distante de la coma.

185. *P.* Y cómo se lee una cantidad que consta de enteros y decimales?

R. Se leen primero los enteros y luego los decimales, ó bien se lee toda la cantidad como enteros, expresando despues la clase de la última cifra decimal.

186. *P.* Cómo se deben considerar en todo caso las clases decimales?

R. Como una continuacion del sistema de enteros.

187. *P.* Qué utilidad resulta del conocimiento del sistema decimal?

R. La de poder ejecutar con suma facilidad, por su medio, varias operaciones que serian muy complicadas usando de las fracciones comunes.

188. *P.* Cómo se conseguirá que dos ó mas cantidades decimales tengan una misma denominacion?

R. Añadiendo á la derecha de las que tengan menos cifras decimales, los ceros necesarios para igualar.

189. *P.* Y no se altera por esto el valor efectivo de estas cantidades?

R. No, señor; porque equivale á multiplicar numerador y denominador por un mismo número.

190. *P.* Y cuál es el denominador que se supone á la fraccion decimal?

R. De su definicion se deduce, que es la unidad con tantos ceros como cifras haya á la derecha de la coma, que tambien se llama signo decimal.

191. *P.* Qué alteracion sufren las fracciones decimales por la variacion de lugar del signo ó coma?

R. Se hacen diez, ciento, mil veces mayores si se pasa el signo decimal uno, dos, tres lugares á la derecha, y diez, ciento, mil veces menores si se pasa uno, dos, tres lugares hácia la izquierda.

192. *P.* Dónde puede suponerse en todo caso la existencia del signo decimal en los números enteros?

R. Siempre existe tácitamente á la derecha de las unidades, de modo que un número entero no sufrirá alteracion por colocar una coma despues de las unidades y luego uno ó mas ceros á la derecha.

193. *P.* Cómo se expresa una fraccion decimal en forma de quebrado comun?

R. Poniendo por numerador el número que esté á la derecha del signo decimal, y por denominador la unidad acompañada de tantos ceros como decimales haya.

194. *P.* Y cómo se expresa un número que tenga enteros y decimales en forma de quebrado?

R. Poniendo por numerador toda la cantidad sin signo decimal y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales habia en la cantidad.

Explicaciones y Ejemplos.

175.

Las fracciones siguientes son decimales.

$$\frac{8}{10}, \qquad \frac{16}{100}, \qquad \frac{45}{1000}$$

porque tienen por denominador la unidad acompañada de ceros.

—

Los números siguientes :

$$4 + \frac{2}{10}, \qquad 6 + \frac{8}{100}, \qquad 3 + \frac{16}{1000}$$

tambien son cantidades decimales en cuanto pueden reducirse á estos otros :

$$\frac{42}{10}, \qquad \frac{608}{100}, \qquad \frac{3016}{1000}$$

bajo cuya forma tienen la condicion requerida.

176.

Tambien pudiera decirse: diez milésimas hacen una centésima, diez centésimas componen una décima, y diez décimas una unidad, así como diez unidades componen una decena, etc.

177 y 178.

Supongamos que se haya de escribir seis enteros y nueve décimas, lo haré así.... 6, 9 escribiendo primero el 6, despues la coma y luego las décimas.

—

Mas si hubieran sido solo nueve décimas, lo escribiria de esta manera.... 0, 9
escribiendo un cero en el lugar de los enteros, despues la coma y luego la cifra decimal.

—

Supongamos que se quieren escribir cuatro enteros, ocho décimas, cuatro centésimas, nueve milésimas: lo ejecutaré de este modo... 4,849
donde observo que cada cifra ocupa el lugar respectivo.

179.

Si se desea escribir dos enteros y cuatro milésimas lo ejecutaré de este modo.... 2,004 donde observo que á fin de que las milésimas estén en el tercer lugar, he ocupado con ceros los lugares de décimas y centésimas.

180 y 181.

Si se pidiese escribir *dos enteros y treinta y nueve milésimas* haria estas reflexiones : treinta y nueve se escribe con dos cifras; mas para que la última de ellas sea milésima ha de estar en tercer lugar, luego debo escribir un cero despues de la coma y antes del número treinta y nueve, de este modo.... 2,039.

182.

Si la expresion decimal fuese *trescientas cuarenta y ocho centésimas*, haria esta reflexion : el número dado tiene tres cifras, y para que la última sea centésima ha de ocupar el segundo lugar de la derecha de la coma, luego colocaré este signo antes de las dos últimas cifras de esta manera.... 3,48.

183.

Para decir *ocho décimas, nueve centésimas y cuatro milésimas* se expresará de este modo : *ochocientas noventa y cuatro milésimas.*

Para decir *tres enteros, cuatro décimas, nueve centésimas*, puedo expresarme así : *tres enteros y cuarenta y nueve centésimas*, ó de este otro modo : *trescientas cuarenta y nueve centésimas.*

184.

Siguiendo la regla establecida, leeré las siguientes fracciones decimales del modo siguiente :

0,049

cero enteros, cuarenta y nueve milésimas.

—

0,04083

cero enteros, cuatro mil y ochenta y tres cien milésimas.

—

0,324567

cero enteros, trescientas veinte y cuatro mil quinientas sesenta y siete millonésimas.

185.

Las siguientes cantidades que constan de enteros y decimales se podrán leer de cualquiera de los dos modos escritos bajo de ellas.

36,049

treinta y seis enteros y cuarenta y nueve milésimas.

O tambien : treinta y seis mil cuarenta y nueve milésimas.

—

6,4708

seis enteros , cuatro mil setecientas ocho diezmilésimas.

O bien : sesenta y cuatro mil setecientas ocho diez milésimas.

186 y 187.

La prolijidad del cálculo de los quedrados y muy particularmente cuando tienen numeradores y denominadores algo crecidos, dió orígen á la division de la unidad en partes decimales, para reducir de esta manera el cálculo de las fracciones al sencillo método de los enteros, pues estando fundadas las reglas que se dieron para estos en el sistema décuplo, es evidente que las mismas reglas con algunas modificaciones podrán servir en el cálculo de las fracciones, siempre que se sujeten al mismo sistema.

Procediendo, pues, desde una clase superior de los enteros, por ejemplo, de los millares, se dijo así : del mismo modo que un millar tiene diez centenas, y una centena diez decenas, y una decena diez unidades, podrémos continuar diciendo que una unidad tiene diez décimas, una décima diez centésimas, una centésima diez milésimas, etc., y formar un sistema decimal como continuacion del de enteros, y sujetas las cifras escritas segun él á las mismas leyes que aquellos.

Los nombres que toman las cifras decimales segun el lugar que ocupan son

0	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	etc.
enteros	décimas	centésimas	milésimas	diez milésimas	cien milésimas	millonésimas	diez millonésimas	cien millonésimas	mil millonésimas	etc. etc.

188, 189 y 190.

Sean las siguientes cantidades decimales

49,5
18,064
0,03

Para hacer que todas tengan una misma denominacion no habrá mas que añadir á la primera dos ceros y á la tercera uno de este modo

49,500
18,064
0,030

donde se ve que todas estas expresiones están reducidas á una sola denominacion, esto es á, milésimas sin que se haya alterado su valor.

191 y 192.

Siendo la coma el signo que separa los enteros de las decimales, claro está que cualquiera cifra representa una cantidad tanto mayor cuanto mas lejos está de dicho hácia la izquierda, y tanto menor cuanto mas distante se halla de él hácia la derecha.

Si en la expresion decimal siguiente :

345,694

corro la coma dos lugares á la derecha

34569,4

la habré hecho cien veces mayor, y si hubiera corrido dos lugares hácia la izquierda

3,45.694

la habria hecho cien veces menor.

—

En esta cantidad 549 se debe suponer la coma así 549, y bien se ve que ninguna alteracion sufriria por expresarla tambien de este modo 549,000

Esto supuesto, si al número

549

le quiero hacer cien veces menor, le pondré un signo decimal de este modo

5,49

lo que equivale á correr hácia la izquierda el signo tácito, que supongo á la derecha del 9 : y si le quiero hacer cien veces mayor le representaré así :

54900,

lo que equivale á correr á la derecha el mismo signo tácito, supliendo con ceros los lugares necesarios.

193 y 194.

Esta expresion decimal 0,048 se escribirá en forma de quebrado $\frac{48}{1000}$.

Esta otra que contiene enteros y decimales 4,048 podrá escribirse . . . . $\frac{4048}{1000}$

—

Concluirémos exponiendo varios ejemplos de cantidades decimales para que los alumnos procuren escribirlas en cifras numéricas, confrontando despues con nuestros resultados para ver si han cometido error.

Cantidades enunciadas.

A. Siete milésimas.
B. Cuarenta y nueve millonésimas.
C. Ocho mil novecientas dos centésimas.
D. Cuarenta mil y seis milésimas.
E. Nueve millones, dos mil y tres cienmilésimas.
F. Cuatro enteros y seis milésimas.
G. Ciento seis mil enteros y cuatro millonésimas.
H. Cuarenta mil y novecientas billonésimas.

Las mismas cantidades escritas con cifras numéricas.

A.	0,007
B.	0,000049
C.	89,02
D.	40,006
E.	90,02003
F.	4,006
G.	106000,000004
H.	0,000000040900

LECCION XV.

ADICION Y SUSTRACCION DE LAS CANTIDADES DECIMALES.

195. *P.* Cómo se suman las cantidades decimales?

R. Se colocan los sumandos los únos debajo de los otros, de modo que se correspondan las unidades, décimas, centésimas, milésimas, etc., y se ejecuta la operacion como en los números enteros.

196. *P.* Cómo se restan las cantidades decimales?

R. Se escribe el sustraendo debajo del minuendo, de manera que se correspondan las unidades, décimas, centésimas, etc., y se ejecuta la resta como en los números enteros.

197. *P.* Qué será bueno ejecutar para el mejor arreglo de las operaciones de sumar y restar decimales?

R. Poner á la derecha de las cantidades que tengan menos cifras decimales, los ceros que basten para igualar á las que tengan mas.

198. *P.* Qué colocacion se da al signo decimal en la suma?

R. Debajo de los signos de los sumandos.

199. *P.* Qué lugar se da á la coma decimal en un residuo?

R. Debajo de las del minuendo y sustraendo.

Ejemplos para la práctica.

195.

Se desean ejecutar la sumas de estas colecciones de enteros y decimales

$$\begin{array}{r} 3{,}04 \\ 0{,}096 \\ 8 \\ 3{,}4 \\ \hline 14{,}536 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}0004 \\ 9{,}64 \\ 6 \\ 0{,}036 \\ \hline 15{,}6764 \end{array}$$

Colocados los sumandos de modo que se correspondan todos los órdenes de sus unidades, he sumado y hallado los resultados correspondientes.

196.

Se han de efectuar las dos restas de las cantidades decimales siguientes

$$\begin{array}{r} 3{,}0004 \\ -\ 0{,}99 \\ \hline =2{,}0104 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4{,}0302 \\ -\ 3{,}99999 \\ \hline =0{,}03021 \end{array}$$

y habiendo colocado los minuendos y sustraendos en el órden establecido en esta pregunta, he hallado los residuos que se expresan.

197, 198 y 199.

Las mismas cuatro operaciones igualando el número de decimales.

Sumar.

3,040	0,0004
0,096	9,6400
8,000	6,0000
3,400	0,0360
14,536	15,6764

Restar.

3,0004	4,03020
— 0,9900	— 3,99999
= 2,0104	= 0,03021

En unas y otras se han colocado los signos decimales segun se explica en las preguntas 198 y 199.

LECCION XVI.

MULTIPLICACION DE LAS CANTIDADES DECIMALES, MODO DE VALUARLAS Y DE TOMAR DE UN ENTERO LA PARTE QUE UNA DECIMAL EXPRESA.

200. *P*. Cómo se multiplica una cantidad decimal por un entero, y un entero por una cantidad decimal?

R. Se colocan multiplicando y multiplicador como si fueran enteros, sin hacer caso del signo decimal durante la operacion; pero en el producto se separan tantas cifras de la derecha hácia la izquierda como decimales haya en el factor que las tenga.

201. *P*. Cómo se multiplica una cantidad decimal por otra tambien decimal?

R. Se colocan y multiplican como si fueran enteros, prescindiendo de los signos decimales durante la operacion, y del producto se separan tantas cifras como haya decimales entre el multiplicando y multiplicador juntos.

202. *P*. Cómo se multiplica una cantidad decimal por 10, 100, 1000, etc.

R. Corriendo el signo decimal tantos lugares á la derecha como ceros acompañen á la unidad, supliendo con ceros los lugares que falten.

203. *P*. Puede hacerse extensiva esta regla á la multiplicacion de enteros por 10, 100, 1000, etc.?

R. Ciertamente; porque á la derecha de las unidades siempre está tácito el signo decimal.

204. *P*. Cómo se valúa una fraccion decimal?

R. Multiplicándola por el número de unidades á que se quiere reducir, y separando del producto tantas cifras como las que tenia la decimal: las de la izquierda serán unidades de la especie que se busca, y las de la derecha decimales que se reducirán por el mismo estilo á otras unidades inferiores, ó se dejan como decimales de las halladas.

205. *P*. Cómo se toma de un entero la parte que expresa una cantidad decimal?

R. Multiplicando el entero por la decimal y separando del producto tantas cifras como decimales tenga : los enteros, ó enteros y decimales que resulten, serán las partes del entero que buscamos.

Ejemplos para la práctica.

200.

Se han comprado 17,25 quintales azúcar á 8 pesos quintal, y pregunto : ¿ cuánto importan?

$$\begin{array}{r} 17{,}25 \text{ qs.} \\ \times \quad 8 \text{ ps.} \\ \hline 138{,}00 \text{ ps.} \end{array}$$

He multiplicado como si fueran enteros, he separado dos cifras para decimales por ser las que tenia uno de los factores, y hallo que importan 138 pesos.

¿ Cuánto deberán darle á un individuo por 157 dias de trabajo, suponiendo que al dia gana 1,25 pesos?

$$\begin{array}{r} 1{,}57 \text{ dias} \\ \times\ 1{,}25 \text{ pesos} \\ \hline 785\phantom{\text{ pesos}} \\ 314\phantom{0\text{ pesos}} \\ 157\phantom{00\text{ pesos}} \\ \hline 196{,}25 \text{ pesos.} \end{array}$$

Despues de colocados los factores en el órden que ha parecido mas conveniente, se ha hecho la multiplicacion como enteros; mas del producto se han separado dos cifras para decimales, por ser las que habia en un factor, y resulta que han de darle 196,25 pesos.

201.

¿Cuánto dinero se necesitará para comprar 80,75 quintales cacao á razon de 14,05 pesos el quintal?

$$
\begin{array}{r}
14{,}05 \text{ ps.} \\
\underline{80{,}75} \text{ qs.} \\
7025 \phantom{\text{ qs.}} \\
9835 \phantom{0\text{ qs.}} \\
11240 \phantom{00\text{ qs.}} \\
\hline
1134{,}5375 \text{ ps.}
\end{array}
$$

En esta operacion he procedido sin hacer caso de los signos decimales; pero en el producto he separado cuatro cifras, que son las que habia entre los dos factores, y hallo que se necesitan 1134,5375 pesos.

En el comercio se desprecian desde la tercera decimal en adelante, dejando solo las centésimas; pero cuando las milésimas llegan á ser 5 ó pasan de 5, agregan 1 á las centésimas. En el caso anterior se diria ser necesarios 1134,54 ps.

202 y 203.

Esta cantidad 3,5448 se quiere multiplicar por 100:

$$3{,}5448 \times 100 = 354{,}48$$

y corriendo la coma dos lugares á la derecha, quedará concluida la operacion.

—

Esta otra 0,49 se quiere multiplicar por 1000 :

$$0{,}49 \times 1000 = 0490, = 490$$

y corriendo el signo tres lugares, para lo cual tuve que añadir un cero, queda hecha la operacion.

—

Si quiero multiplicar 66 por 1000, puedo suponer un signo decimal á la derecha del 66 así :

$$66{,}0 \times 1000 = 66000, = 66000$$

y que dicho signo se corre hácia la derecha tres lugares supliendo con ceros los que falten.

204.

Quiero saber lo que importan 0,57 de dia :

$$\begin{array}{rrl} & 0{,}57 & \text{de dia} \\ & \underline{24} & \text{horas} \\ & 228 & \\ & \underline{114} & \\ \text{horas} & 13{,}68 & \\ & \underline{60} & \text{minutos} \\ \text{minutos} & 40{,}80 & \\ & \underline{60} & \text{segundos} \\ \text{segundos} & 48{,}00 & \end{array}$$

Para valuar este quebrado multipliqué 57 por 24 horas que tiene el dia, y separadas dos cifras para decimales, quedaron á los enteros 13 horas : multipliqué las decimales sobrantes por 60 minutos que tiene la hora, separo dos para decimales y hallo 40,80 minutos, los que pudiera dejar así; pero multiplico 0,80 por los segundos que tiene un minuto, separo las dos decimales y hallo 48 segundos; de manera que valuada la fraccion

0,57 de dia = 13 horas, 40 minutos, 48 segundos. Por el mismo estilo se puede valuar cualquiera otra decimal.

205.

Cuando se quiere tomar de un entero la parte que expresa una fraccion decimal, es lo mismo que cuando se ha de tomar la parte que expresa un quebrado, con la ventaja que aquí el denominador siempre es 10, 100, 1000, etc.

Supongamos que yo he prestado 457 pesos con condicion de que por el uso de este dinero me han de pagar al año 6 por ciento de rédito, y pregunto : ¿cuánto me han de dar cada año?

El 6 p. $\frac{0}{0}$ de 457 ps. = 457 $\times$ 0,06.

Como tomar el 6 por ciento, es decir, tomar 0,06 de la cantidad

$$\begin{array}{r} 457 \text{ pesos} \\ 0{,}06 \\ \hline 27{,}42 \text{ pesos.} \end{array}$$

he multiplicado por 6, he separado dos decimales, y encuentro que el dinero gana 27,42 ps. al año.

Un sugeto debia entregarme de esta fecha en un año 12,320 pesos, y yo le propongo que si me le entrega ahora le rebajaré el 10 por ciento de su deuda, ¿cuánto me dará de menos?

El 10 p. % de 12320 pesos
× 10
1232,00 pesos

me adeudaba 12320
le rebajo . . . 1232
me ha de dar. 11088 pesos.

Multiplicando por 10 y partiendo por 100 que se logró separando dos cifras, hallo que me ha de dar de menos 1232 pesos; luego restando estos de lo que me adeudaba, veo que ha de darme ahora 11,088 pesos.

NOTA.

La razon que hemos tenido para separar en los productos tantos decimales como habia en los factores, ha sido la de hacer dichos productos tantos veces menores cuantas se habian hecho mayores por haber prescindido de los signos decimales en la multiplicacion.

LECCION XVII.

DIVISION DE LAS CANTIDADES DECIMALES, MODO DE CONTINUAR POR DECIMALES UNA DIVISION, Y REDUCCION DE LOS QUEBRADOS COMUNES Á DECIMALES.

206. *P.* Cómo se divide una cantidad decimal por un entero?

R. Se pone una coma á la derecha del divisor entero, se le agregan tantos ceros como cifras decimales haya en el dividendo, se tachan ó quitan los signos decimales de dividendo y divisor, y queda reducida la operacion á una division de enteros.

207. *P.* Cómo se divide una cantidad de enteros por otra decimal?

R. Se agregan al dividendo una coma y tantos ceros como decimales tenga el divisor, y tachando luego las comas, queda reducida la division á una operacion de números enteros.

208. *P.* Cómo se divide una cantidad decimal por otra tambien decimal?

R. Se añaden al que tenga menos decimales los ceros que basten para igualar al que tenga mas, se prescinde entonces de los signos, y se ejecuta la division como la de enteros por enteros.

209. *P.* Y por esas alteraciones que Vd. hace, no se altera el valor del cuociente?

R. No, señor; porque el agregar ceros en la parte decimal no altera el valor de una cantidad, y el suprimir las comas equivale á multiplicar dividendo y divisor por un mismo número.

210. *P*. Cómo se continúa una division por decimales?

R. Cuando despues de hallada la última cifra de los enteros del cuociente queda algun residuo, si se quiere continuar la division por decimales, á la derecha de los enteros del cuociente se pone el signo decimal, se agrega al residuo un cero; se parte por el divisor, y lo que resulte serán décimas; si queda otra resta, se agrega otro cero, se vuelve á dividir, y lo que resulte serán centésimas, y así se continuará hasta que no quede residuo ó no se quieran hallar mas decimales.

211. *P*. Y si despues de agregado un cero no se puede partir por el divisor?

R: Se pone cero al cuociente, se agrega otro á la resta y se continúa la operacion.

212. *P*. Cómo se reduce un quebrado comun á decimal?

R. Partiendo el numerador entre el denominador por el método prescrito para continuar una operacion por decimales, no estando de mas advertir que cuando el quebrado es propio, como no se puede partir el numerador entre el denominador, se pondrá cero al cuociente, luego el signo decimal, y luego las decimales que vayan resultando de cada cero que se agregue al numerador (que aquí es dividendo) y á las restas que resulten.

Ejemplos para la práctica.

206.

Se quieren distribuir 36,50 pesos entre 8 individuos :

$$36{,}50 : 8 = 36{,}50 : 8{,}00 = 3650 : 800$$

$$\begin{array}{r|l} 3650 & 800 \\ \cline{2-2} 3200 & 4 + \frac{450}{800} \text{ ó } \frac{45}{80} \text{ ó } \frac{9}{16} \\ \hline 0450 & \end{array}$$

Despues de agregados al divisor la coma y dos ceros por otras tantas decimales que tiene el dividendo, suprimo los signos decimales y ejecuto la division de 3650 por 800, resultando corresponder á cada uno 4 ps. y $\frac{9}{16}$ de peso, que valorados darian 4 $\frac{1}{2}$ reales.

207.

Habiéndose empleado 475 pesos en comprar 28,16 quintales de algodon, se pregunta á cómo costó el quintal.

$$475 : 28{,}16 = 475{,}00 : 28{,}16 = 47500 : 2816$$

$$\begin{array}{r|l} 47500 & 2816 \\ \cline{2-2} 2816 & 16 + \frac{2444}{2816} \\ \hline 19340 & \\ 16896 & \\ \hline 02444 & \end{array}$$

Como el divisor tiene decimales y el dividendo no los tiene, agrego una coma y dos ceros al dividendo, prescindo de los signos decimales, ejecuto la operacion como enteros, y hallo que el quintal cuesta 16 pesos y $\frac{2444}{2816}$ de pesos que valuaré en reales si se cree necesario.

208 y 209.

Suponiendo que para hacer 7,75 varas de cierto paño se han gastado 8,125 libras de lana, ¿cuánta se consume en cada vara?

$$8{,}125 : 7{,}75 = 8{,}125 : 7{,}750 = 8125 : 7750$$

$$\begin{array}{r|l} 8125 & 7750 \\ \underline{7750} & \overline{1 + \frac{375}{7750}} \\ 0375 & \end{array}$$

Primero he igualado el número de decimales, luego he prescindido de las comas, y finalmente hago la operacion como enteros, hallando que á cada vara corresponden 1 y $\frac{375}{7750}$ libras de lana.

Habiendo pagado 0,75 de real por 1,5 de libra, ¿á cómo vale la libra?

$$0{,}75 : 0{,}5 = 0{,}75 : 0{,}50 = 75 : 50$$

$$\begin{array}{r|l} 75 & 50 \\ \underline{50} & \overline{1 + \frac{25}{50} \text{ ó } \frac{1}{2}} \\ 25 & \end{array}$$

Como dividendo y divisor no tenian igual número de decimales, las he igualado, prescindo de los signos, divido y hallo que la libra vale $1 + \frac{1}{2}$ rl.

210.

Habiendo de partir 345 pesos entre 8 individuos y quedando de residuo 1, se quiere continuar la operacion por decimales.

$$
\begin{array}{r|l}
345 & 8 \\ \cline{2-2}
\underline{32} & 43{,}125 \text{ pesos.} \\
25 & \\
\underline{24} & \\
01{,}0 & \\
\underline{8} & \\
20 & \\
\underline{16} & \\
40 & \\
\underline{40} & \\
00 &
\end{array}
$$

Cuando hallé la última cifra de los enteros ó sean las unidades del cuociente, puse á su derecha una coma, agregué un cero al residuo, divido y encuentro 1 décima : sobrando 2 le agrego otro cero, divido y hallo 2 centésimas : sobrando 4 agrego un cero divido y hallo 5 milésimas no sobrando nada : luego el cuociente es 43,125 pesos.

211.

Se quieren distribuir 85 pesos entre 42 individuos, continuando la division por decimales.

```
 85 { 42
 84 } ―――――
――― { 2,023 etc. ps.
  1,00
   84
  ―――
   160
   126
  ―――
   034 etc.
```

Aquí encontré la dificultad que al añadir el primer cero al residuo no pudo dividirse aun por el divisor : puse cero en el cuociente, agregué otro al residuo y continué la operacion hasta las milésimas, siendo el cuociente aproximado 2,023 pesos.

NOTA.

Como se ha visto en el último ejemplo, no se ha hallado el cuociente exacto ni se hallaria aunque se continuase la operacion al infinito. La razon de esto es que en el divisor hay factores que no pueden destruirse al multiplicar por 10 al divisor, que es lo que se hace al agregar ceros. Toda fraccion decimal que no sea exacta, puede sin embargo aproximarse á serlo tanto como se quiera continuando la operacion. Los comerciantes nunca aproximan mas que á las centésimas, los navegantes hasta millonésimas; pero en los cálculos delicados se lleva la aproximacion hasta un número considerable de cifras.

212.

Los siguientes quebrados los quiero reducir á decimales: $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{9}{7}$ y $\frac{7}{16}$;

```
 2  | 3
 20 | 0,666
 18
 --
  20
  18
  --
  20
```

$\frac{2}{3} = 0,6666\ldots$

```
 4  | 5
 40 | 0,8
 40
 --
 00
```

$\frac{4}{5} = 0,8.$

```
 9  | 7
 7  | 1,285
 --
 20
 14
 --
  60
  56
  --
   40
   35
   --
    5
```

$\frac{9}{7} = 1,285.$

```
 7   | 16
 70  | 0,4375
 64
 ---
 060
  48
 ---
 120
 112
 ----
 0080
   80
   --
   00
```

$\frac{7}{16} = 0,4375.$

Dividiendo el numerador de cada uno por el denominador segun las reglas dadas para la continuacion de una division por decimales, hallo el valor de $\frac{4}{5}$ y de $\frac{7}{16}$ expresado en decimales exactas, y el valor de $\frac{2}{3}$ y $\frac{9}{7}$ en decimales aproximados que se hubieran podido continuar.

NOTA.

No darán decimal exacta los quebrados cuyos denominadores contengan algun factor que no sean 2 ni 5 por la misma razon que hemos dicho antes. Así, cualquier quebrado como $\frac{8}{16}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{20}$ cuyos denominadores pueden reducirse á la unidad sacándoles mitades y quintas partes, darán decimales exactas; pero estos otros $\frac{3}{18}$, $\frac{6}{14}$, etc., cuyos denominadores no pueden reducirse á la unidad por mas que se dividan por 2 y por 5, no darán decimal exacta. Esto se funda en que el 10 por quien se multiplica al numerador al agregar cada cero, se compone de de $2+5$, y al efectuar la division no pueden destruirse otros factores distintos de estos.

LECCION XVIII.

DE LOS NÚMEROS COMPLEXOS Ó DENOMINADOS, SU REDUCCION Á LA ESPECIE MENOR Y Á QUEBRADOS DE LA MAYOR.

213. *P.* Qué son números complexos ó denominados?

R. Son los que se expresan por diferentes denominaciones aunque referentes á una unidad principal.

214. *P.* Qué clase de cantidades se expresan por medio de estos números?

R. Las monedas, pesas y medidas.

215. *P.* Cuáles son las monedas efectivas corrientes en nuestros mercados?

R. La mayor moneda de oro es la onza, que tiene 4 doblones, el doblon 2 escudos y el escudo 2 escuditos, de modo que la onza tiene 16 escuditos. La mayor moneda de plata es igual en valor al escudito de oro, y se llama peso, el peso tiene 4 pesetas, la peseta 2 reales, el real 2 medios y el medio 2 cuartillos, que es la menor moneda efectiva de plata.

216. *P.* Cuáles son las unidades de peso usadas en el comercio?

R. La tonelada que tiene 20 quintales, el quintal 4 arrobas, la arroba 25 libras, la libra 16 onzas, la onza 16 adarmes y el adarme 36 granos.

217. *P.* Cuáles son las pesas que usan los boticarios?

R. La libra de 12 onzas, la onza dividida en 8 dracmas, la dracma en 3 escrúpulos y el escrúpulo en 24 granos.

218. *P.* Cuáles son las unidades de peso para la plata?

R. La libra que se divide en 2 marcos, el marco en 8 onzas, la onza en 8 ochavas y la ochava en 2 adarmes.

219. *P.* Y para el oro?

R. La libra en 2 marcos, el marco en 50 castellanos, el castellano en 8 tomines y el tomin en 12 granos.

220. *P.* Cuántas clases de medidas hay?

R. Las siguientes : medidas del tiempo, del círculo, de longitud, de superficie, de áridos, de líquidos y de sólidos.

221. *P*. Cuáles son las medidas del tiempo?

R. El siglo que tiene 100 años, el año 12 meses ó 365 dias, el dia 24 horas, la hora 60 minutos y el minuto 60 segundos. Los años bisiestos tienen un dia mas, y los meses no son todos de igual número de dias; pero se computan de á 30 dias en los cálculos que no exigen mucha precision.

222. *P*. Cómo se considera dividido el circulo?

R. Todo círculo, sea grande ó pequeño, se divide en 360 grados, el grado en 60 minutos y el minuto en 60 segundos : de modo que la extension absoluta de un grado depende de la del círculo de que es parte.

223. *P*. Cuáles son las medidas de longitud?

R. La legua que tiene 3 millas, la milla 2222 varas, la vara 3 piés ó tercias, el pié 12 pulgadas, la pulgada 12 líneas y la línea 12 puntos. Tambien se conocen el codo de 2 piés, la braza de 2 varas y la cuarta de 9 pulgadas.

224. *P*. Cuáles son las medidas de superficie?

R. Las medidas de superficie, que tambien se llaman agrarias, son varias; pero las mas conocidas y usadas son las siguientes : la caballería que tiene 50 fanegas, la fanega 12 almudes, el almud 100 varas cuadradas y la vara cuadrada 9 piés cuadrados.

225. *P*. Cuáles son las medidas de capacidad para los áridos?

R. Son las que se usan para los granos y cosas secas, á saber : el cahiz que tiene 12 fanegas, la fanega 12 celemines y el celemin 4 cuartillas.

226. *P.* Cuáles son las medidas de capacidad para los líquidos?

R. La cántara que tiene 8 azumbres ó frascos, el azumbre 4 cuartillos y el cuartillo 4 copas.

227. *P.* Cuáles son las medidas de sólidos?

R. Las que se usan para apreciar el volúmen de las maderas, fardos, muros, etc., y se llaman cúbicas, á saber: la vara cúbica que tiene 27 piés cúbicos, y el pié cúbico 1728 pulgadas cúbicas.

228. *P.* Cómo se reduce un número denominado á su especie inferior?

R. Se multiplica el número de la mayor denominacion por el número de unidades de la especie inmediata que contenga cada unidad de aquel, y al producto se agregan las unidades que haya de dicha especie inmediata: esta suma se reduce á la denominacion que siga, multiplicándola tambien por el número de dicha especie que contenga cada unidad suya, agregando despues las unidades de la especie siguiente, y continuando hasta llegar á las unidades de la última denominacion.

229. *P.* Cómo se reduce un número denominado á quebrado de la especie mayor?

R. Se reduce primero á su última especie, y este número se pondrá por numerador de un quebrado, y por denominador el número de unidades de la última especie que contenga cada unidad de la denominacion mayor, es decir, una unidad de la especie mayor reducida á la menor.

230. *P.* Y si despues de la última especie hubiese una fraccion ya sea comun ó decimal?

R. Se tendrá á su numerador como unidades de la especie inferior, cuya especie está indicada por el denominador, y bajo este principio se harán entrar en la reduccion del número complexo á quebrado.

Explicaciones y Ejemplos.

213 á 227.

Siendo de la mayor importancia el cálculo de los números denominados, por el continuo uso que de ellos se hace en las transacciones del comercio, en las artes, en las ciencias y en otros ramos subalternos, deben interesarse los maestros en hacer entender á sus alumnos de la manera mas clara posible, y con ejemplos y comparaciones materiales, lo que son cada una de las especies de unidades de las que componen dichos números, por ejemplo: en un círculo explicarán los grados, en una regla ó vara sus divisiones, con cuadros formados en la pizarra las medidas de superficie, y con dados ú otras piezas semejantes las medidas de sólidos: les harán ver, si es posible, las monedas, pesas y medidas de áridos y líquidos; les explicarán en un reloj la subdivision del tiempo, y les harán concebir cómo por la acumulacion de unidades inferiores se forman las superiores. La viva voz de los maestros en presencia de tales objetos producirá mejor efecto que cuanto aquí se pudiera decir para esclarecer esta interesante materia.

228.

Se quieren reducir 3 onzas, 4 pesos, 6 reales á la menor denominacion.

$$\begin{array}{lll}
3\text{ onz.}\ \ldots & 4\text{ ps.}\ \ldots & 6\text{ rs.} = 422\text{ rs.}\\
\underline{16} & \underline{48} & \underline{416}\\
48\text{ ps.} & 52\text{ ps.} & 422\text{ rs.}\\
 & \underline{8} & \\
 & 416\text{ rs.} &
\end{array}$$

He reducido las onzas á pesos multiplicándolas por 16 pesos que tiene la onza, y al producto agrego los 4 pesos y hacen 52 pesos, que reduzco á reales multiplicándolos por 8 reales que tiene un peso, y al producto agrego los 6 reales, y hallo que el expresado número complexo es igual á 422 reales.

Por el mismo estilo se reducirá á su última especie otro cualquier número denominado.

229.

¿Cómo se reduce á quebrado de la especie mayor el número complexo 3 dias, 6 horas y 5 minutos?

$$\begin{array}{lll}
3\text{ dias}\ \ldots & 6\text{ horas}\ \ldots & 5\text{ minutos} = \frac{4685}{1440}\text{ de dia.}\\
\underline{24} & \underline{72} & \underline{4680}\\
72\text{ horas.} & 78 & 4685 \left\{\begin{array}{l}\text{minutos.}\\ \text{numerador.}\end{array}\right.\\
 & \underline{60} & \\
 & 4680 &
\end{array}$$

Formacion del denominador.

1 dia = 24 horas $\times$ 60 minutos = 1440 denominador.

Reducido el número complexo á su menor denominacion, hallo 4685 que pongo por numerador, y reducido 1 dia, que es la especie mayor, á minutos que es la menor, encuentro que como el dia tiene 1440 minutos, este es el denominador, y resultará que el número propuesto es igual á $\frac{4685}{1440}$ de dia. Del mismo modo se podrán verificar otras reducciones.

230.

Sea este el número complexo que se quiere reducir á quebrado de la especie menor : 4 fanegas, 3 celemines, 2 cuartillas y $\frac{2}{5}$ de cuartilla.

$$
\begin{array}{llll}
4 \text{ fanegas,} & 3 \text{ celem.} & 2\,\frac{2}{5} \text{ cuartill.} = \frac{1032}{240} \text{ de fan.} & \\
\underline{12} & \underline{48} & \underline{204} & \\
48 \text{ fanegas,} & 51 \text{ celem.} & 206 \text{ cuart.} & \\
 & \underline{4} & \underline{\times\ 5} & \\
 & 204 \text{ cuart.} & 1030 & \\
 & & \underline{2} & \\
 & & 1032 \left\} \begin{array}{l}\text{quintos de cuart.}\\ \text{numerador.}\end{array}\right. &
\end{array}
$$

1 fan. = 12 celem. $\times$ 4 = 48 cuart. $\times$ 5 = 240 quintos de cuartilla que es el denominador.

Considerando á los quintos de cuartilla como una nueva especie, cuando llegué á las cuartillas las reduje á quintos multiplicándolas por 5, y despues agregué los 2 quintos, formando así el numerador. Luego averigüé cuántos quintos de cuartilla tenia una fanega, y este fué el denominador.

Parece innecesario poner otros ejemplos, pues con igual procedimiento se reducirán á quebrados de la especie mayor todos los números complexos en que haya fracciones comunes de la menor.

—

Presentemos el caso en que haya fraccion decimal en la reduccion de 40 grados, 30 minutos, 12,65 segundos á quebrado de la especie menor.

Los grados se indican con un cero, los minutos con un acento, los segundos con dos, así :

$$\begin{array}{rrrl}
40^{\circ} \;.\;.\;.\;.\;. & 30'.\;.\;.\;.\;.\;. & 12,''65 & = \frac{145812650}{360000} \\
60 & 2400 & 145800 & \\
\hline
2400' & 2430 & 145812'' & \\
 & 60 & 100 & \\
\hline
 & 145800'' & 14581200 & \\
 & & +\ 65 & \\
\hline
 & & 14581265 & \left\}\begin{array}{l}\text{centés. de seg.}\\ \text{numerador.}\end{array}\right.
\end{array}$$

$1^{\circ} = 60' \times 60 = 3600'' \times 100 = 360000$ centésimos de segundo que es el denominador.

Al llegar á los segundos los reduje á centésimos multiplicándolos por 100, agregué los 65 y formé el numerador. Luego averigüé los centésimos de segundo que tenia un grado, y este fué el denominador.

—

LECCION XIX.

ADICION Y SUSTRACCION DE LOS NÚMEROS COMPLEXOS Ó DENOMINADOS.

231. *P.* Cómo se suman los números denominados?

R. Se escriben los sumandos en columnas de modo que cada clase de unidades esté debajo de su correspondiente, y se tira una raya por debajo : se suman primero las unidades de la menor denominacion, y esta suma se reduce á su especie inmediata superior, dejando debajo de las primeras las unidades que sobren, y llevando las que resultaron á la columna inmediata : igual reduccion se hará de la suma de esta columna, para pasar á la columna inmediata superior las unidades que resulten, y se continuará así hasta llegar á las sumas de las unidades del órden mas elevado.

232. *P.* Cómo se hace la reduccion de una especie inferior á otra superior?

R. Dividiendo las unidades inferiores por el número de ellas que contenga una superior.

233. *P.* Cómo se reduce una especie superior á otra inferior?

R. Multiplicando la especie superior por el número de unidades inferiores que contenga una de aquellas.

234. *P.* Cómo se restan los números denominados?

R. Se escribe el sustraendo debajo del minuendo de modo que se correspondan las diferentes especies de unidades : se tira una raya por debajo, y se van escribiendo los residuos que resulten de restar cada clase del sustraendo de su correspondiente del minuendo, principiando por las de especie inferior.

235. *P.* Y si el número que se halla en alguna clase del minuendo es cero ó menor que su correspondiente del sustraendo?

R. Se toma una unidad de la clase superior inmediata, se reduce á la inferior, se le agregan (si las hay) las unidades de la especie que no se pudo restar, se verifica la resta, y se tiene presente que la especie siguiente tiene de menos una unidad.

236. *P.* Y si en la clase de que voy á tomar la unidad hay cero y lo mismo en la que sigue?

R. Entonces se sigue á las clases superiores hasta tomar donde se pueda una unidad : se reduce esta clase á la denominacion siguiente : en dicha clase se dejan todas las unidades reducidas menos una, que se lleva para reducir á la otra clase; dejando siempre en cada clase todas las unidades menos una que se reduce á la que sigue, y en llegando á la clase que no se pudo restar, se verifica la resta, teniendo presentes las unidades que se han ido dejando en cada especie del sustraendo, y que la próxima superior que tiene cifras significantes está disminuida de una unidad.

237. *P.* Si en las cuentas de sumar denominados hubiese quebrados comunes ó fracciones decimales despues de los números de especie inferior, qué deberá prácticarse?

R. Deberá principiarse por ellas la operacion, procediendo segun las reglas establecidas para dichas fracciones, y si de su suma resultan enteros, se agregarán á la columna de especie inferior.

238. *P.* Y si en la sustraccion hay quebrados comunes ó decimales en el minuendo, ó en el sustraendo, ó en ambos?

R. Se procederá tambien principiando la operacion por la resta de dichas fracciones, tomando en caso necesario unidades de la última especie del minuendo ó de otra superior para reducir á aquella, y sacar la que ha de prestarse al quebrado ó decimal que no se pueda restar sin este auxilio.

Ejemplos para la práctica.

231 y 232.

Un negociante ha recibido las siguientes partidas de café, y desea saber á cuánto ascienden todas juntas.

1ª.	10 qq.	3 arr.	15 lib.	06 onz.
2ª.	36	2	00	10
3ª.	42	0	15	09
4ª.	09	1	07	00
Total.	98 qq.	3 arr.	13 lib.	09 onz.

La suma de las onzas fueron 25, que reducidas á libras partiéndolas por 16 onzas que tiene la libra, dieron 1 libra y sobraron 9 onzas, que escribí debajo de su columna, llevando la 1 libra para agregarla á su clase :

sumé las libras, que con esta agregacion ascendieron á 38 libras, que reduje á arrobas dividiéndolas por 25 libras que tiene la arroba, y resultaron 1 arroba y 13 libras, las que escribi en su columna : la columna de las arrobas con la agregacion de la 1 que resultó de las libras produjo 7 arrobas, que reduje á quintales partiéndolas por 4 arrobas que tiene un quintal, sobraron 3 arrobas que escribi debajo de su columna, y el quintal que resultó le agregué á la columna de estos, que ascendió entonces á 98 quintales.

233 á 236.

Para comprender todos los casos establecidos en estos números, propondrémos el siguiente ejemplo :

Se quiere hallar la diferencia entre dos líneas que tienen las siguientes dimensiones

min.	16 braz.	0 vs.	0 piés.	9 pulg.	8 lín.	10 punt.
sus.	9	1	2	10	9	8
res.	6 braz.	0 vs.	0 piés.	10 pulg.	11 lín.	2 punt.

Empezando la operacion por las unidades del órden inferior he dicho : quien de 10 paga 8, debe 2 puntos que escribí debajo de su columna sin ocurrir dificultad. En la columna de las líneas dije quien de 8 paga 9, no puede ser : tomo una unidad pulgada quitándola á las del minuendo, la reduzco á líneas, multiplicándola por 12 y hacen 12 líneas y 8 son 20 : quien de 20 paga 9 debe 11 pulgadas que escribo en el residuo : las pulgadas del minuendo han quedado reducidas á 8 : quien de

10.

8 paga 10, no puede ser : voy á tomar un pié del minuendo, mas no los hay : busco varas y no las hay; por fin llego á las brazas y tomo una que hace 2 varas, dejo una en su columna y la otra la reduzco á piés : son 3 piés, de los que dejo 2 en su columna y el otro le reduzco á pulgadas : son 12 pulgadas, que agregadas á las 8 que no se podian restar, hacen 20; ahora digo : quien de 20 paga 10 debe 10 pulgadas que escribo; quien de 2 piés (que se dejaron en dicha columna) paga 2 no debe nada : quien de 1 vara (que tambien dejamos) paga 1 no debe nada, y quien de 15 brazas, á que quedaron reducidas, paga 9, debe 6 brazas que escribo.

237 y 238.

Supongamos que se han reunido dos individuos, el primero con 8 onzas, 10 pesos y 25 céntimos ó centésimos, y el segundo con 12 onzas, 7 pesos y 98 céntimos para hacer de todo un fondo comun, y que de este fondo se han gastado 9 onzas, 4 pesos y 48 céntimos, ¿cuánto quedará?

sumandos	8 onz.	. . . . . .	10,25 ps.
	12	. . . . . .	7,98
suma. . .	21 onz.	. . . . . .	2,23 ps.
gasto. . .	9	. . . . . .	4,48
residuo. .	11 onz.	. . . . . .	13,75

Al hacer la suma he llevado á los enteros de peso la unidad que produjeron las decimales, y á las onzas la unidad que produjeron los pesos.

En la resta hemos tomado de las unidades de pesos una para poder restar las decimales, y de las unidades de onza una para reducirla á pesos y poder restar estos.

—

Sean 8 fanegas, 6 celemines, 2 cuartillas y $\frac{4}{5}$ que se han reunido con 7 fanegas, 10 celemines, 3 cuartillas y $\frac{1}{3}$ de maiz, de cuya suma se han gastado 3 fanegas, 8 celemines, 3 cuartillas y $\frac{1}{2}$: se pregunta cuánto quedará.

sumandos	8 fanegas,	6 celem.	2 cuart.	$\frac{4}{5}$ ó $\frac{12}{15}$
	7	10	3	$\frac{1}{3}$ ó $\frac{5}{15}$
suma. . .	16 fanegas,	5 celem.	2 cuart.	$\frac{2}{15}$ ó $\frac{4}{30}$
gastado. .	3	8	3	$\frac{1}{2}$ ó $\frac{15}{30}$
residuo. .	12 fanegas,	8 celem.	2 cuart.	y $\frac{19}{30}$

De la suma de los quebrados despues de reducidos á comun denominador resultó un quebrado impropio, y hallados los enteros produjo 1 que pasé á la suma de cuartillas quedando $\frac{2}{15}$: en lo demás seguí las reglas ya conocidas. Al restar tuve que reducir los quebrados $\frac{2}{15}$ y $\frac{1}{2}$ á comun denominador, y no pudiéndose restar por ser el del minuendo menor, tomé de las cuartillas una unidad que reduje á 30 avos, y así resté de $\frac{34}{30}$ los $\frac{15}{30}$ quedando $\frac{19}{30}$ en el residuo y las cuartillas del minuendo disminuidas de una unidad, habiendo seguido en lo demás las reglas establecidas.

NOTA.

Seria demasiado extenso este Tratado si hubieran de presentarse ejemplos de todos los casos particulares que pueden ocurrir en cada operacion. Los maestros cuidarán de ejercitar á sus alumnos en aquellos en que solo haya decimales ó quebrados en el minuendo ó en el sustraendo ó en ambos números, con iguales ó con diferentes denominadores, que se puedan restar ó que no se puedan sin tomar unidades del minuendo, pues para todos estos casos estarán habilitados los que hayan comprendido las precedentes lecciones.

LECCION XX.

MULTIPLICACION Y DIVISION DE LOS NÚMEROS COMPLEXOS Ó DENOMINADOS.

239. *P.* Cuántos casos pueden ocurrir en la multiplicacion de los números complexos?

R. Tres, á saber : multiplicar un número complexo por uno incomplexo, un número incomplexo por otro complexo, y un complexo por otro complexo.

240. *P.* Cómo se multiplica un número complexo por otro incomplexo?

R. Se escribe el incomplexo debajo de la especie inferior del complexo : se multiplica dicha especie por el multiplicador incomplexo : si del producto pueden sacarse algunas unidades para la especie superior siguiente, se reservan estas y se escriben las que sobren : se multiplica despues la denominacion siguiente y al producto se le agregan las que se reservaron: se reduce este producto á unidades de la clase superior siguiente, escribiendo tambien las que sobren, y se continúa así hasta la denominacion superior.

241. *P.* Cómo se multiplica un número incomplexo por otro complexo?

R. Se reduce el multiplicador complexo á quebrado de la especie superior, y entonces no habrá mas que multiplicar un entero por un quebrado.

242. *P.* Cómo se multiplica un complexo por otro complexo?

R. Se reducen multiplicando y multiplicador á quebrados de la especie superior, y la operacion se contrae á multiplicar un quebrado por otro.

243. *P.* Cuántos casos pueden ocurrir en la division de los números complexos?

R. Tres, que son: dividir un complexo por uno incomplexo, dividir un incomplexo por un complexo, y dividir un complexo por otro tambien complexo.

244. *P.* Cómo se divide un número complexo por otro incomplexo?

R. Se escribe el divisor incomplexo á la derecha del complexo separados por una raya como en las divisiones comunes, y se empieza á dividir por la denominacion mayor: si sobrase algo se reduce á la menor denominacion siguiente, se agrega á las unidades que haya de estas y se vuelve á dividir: el residuo despues de reducido se agrega á la denominacion menor inmediata, se divide esta denominacion y se continúa así hasta acabar.

245. *P.* Y si alguna denominacion no tiene de ningun modo las unidades suficientes para poderse partir entre el divisor?

R. Se pone al cuociente un cero, se reduce la especie que no se pudo partir á su denominacion inferior inmediata, y se continúa la operacion.

246. *P.* Cómo se divide un número incomplexo por otro complexo?

R. El divisor complexo se reduce á quebrado de la especie superior, y queda contraida la cuestion á partir un entero entre un quebrado.

247. *P.* Cómo se divide un complexo por otro complexo?

R. Se reducen uno y otro á quebrado de la especie superior, y despues no hay mas que partir un quebrado por otro.

248. *P.* Qué hay que advertir en las operaciones de multiplicar y partir complexos por incomplexos?

R. Que la multiplicacion se principie y la division se acabe por los quebrados ó decimales que pueda haber en el multiplicando ó dividendo complexos, siguiendo las reglas establecidas para aquella clase de números.

Ejemplos para la práctica.

240.

Se han comprado 6 quintales palo de mora á razon de

2 pesos, 7 reales y 3 cuartillos el quintal, ¿cuánto importan?

2 ps. . . . . 7 rs. . . . . 3 cuartillos
$\times$ 6 quintales

17 ps. . . . . 6 rs. . . . . 2 cuartillos.

Para resolver esta cuestion, escribí el multiplicador debajo de la última especie del multiplicando: multipliqué los 3 cuartillos por 6 y resultaron 18 cuartillos, que reducidos á reales hacen 4 reales, y sobran 2 cuartillos que escribí: luego multipliqué los 7 reales por 6 y resultaron 42, que con 4 reales que resultaron de los cuartillos son 46 reales; los cuales reducidos á pesos dan 5 pesos que reservo, y 6 reales que escribí: por fin, multiplico los 2 pesos por los 6 quintales y hacen 12 pesos, que con 5 que resultaron de los reales componen 17 pesos, que he escrito en el lugar correspondiente del producto.

241.

¿Cuánto se le ha de dar á un individuo que ha traba jado 3 varas, 2 piés y 6 pulgadas de galon á razon de 6 reales la vara?

6 rs. $\times$ 3 varas. . . 2 piés. . . 9 pulgadas.

6 rs. $\times$ $\frac{141}{36}$ vs. = $\frac{846}{36}$ rs. = 23 rs. 2 cuart.

Como el multiplicando es incomplexo y el multiplicador complexo, he reducido este á quebrado de la especie superior vara, haciéndolo todo pulgadas, y poniendo por denominador las pulgadas que tiene una vara : despues he ejecutado la multiplicacion del entero por quebrado y resulta, reducido á enteros el producto, que ha ganado el individuo 23 reales 2 cuartillos.

242.

¿Cuánto importan 3 arrobas, 6 libras y 5 onzas de café, á razon de 3 pesos, 2 rs. y 3 cuartillos la arroba?

3 ps. 2 rs. 3 cuart. × 2 arr. 6 lib. 5 onz.

$$\frac{107}{32} \text{ ps.} \times \frac{1301}{400} \text{ arr.} = \frac{139207}{12800} \text{ ps.}$$

que reducidos á enteros y valuados los quebrados que resultan, hacen

10 ps. . . 7 rs. . . y $\frac{56}{12800}$ de real.

Como el multiplicando y multiplicador son complexos, los convierto en quebrados de la especie superior, ejecuto la multiplicacion y hallo (despues de reducido el producto á enteros) el resultado que se pedia.

243.

Se quiere distribuir entre 7 individuos una partida de 125 quintales, 3 arrobas y 10 libras de jabon.

125 quint.	3 arr.	10 lib.	7 individ.
055	24	150	17 qs. 3 arr. 22 lib. $\frac{6}{7}$
06	27 arr.	160 lib.	
×4 arr.	06	020	
24 arr.	× 25 lib.	06	
	150 lib.		

Por cuanto el dividendo es complexo y el divisor incomplexo, he dispuesto la division como la de los números enteros : divido la especie mayor y hallo al cuociente 17 quintales sobrando 6 : reducidos estos á arrobas, son 24 arrobas, que unidas á las 3 del dividendo hacen 27 : partidas por el divisor dan al cuociente 3 arrobas y sobran 6 : reducidas á libras producen 150, que unidas á las 10 del dividendo son 160 libras : por último, partidas las libras por el divisor, dan al cuociente 22 y $\frac{6}{7}$ libras, con lo que sabré la parte de cada individuo.

245.

Quieren distribuirse 100 pesos, 2 reales, 1 cuartillo entre 48 personas.

100 ps.	2 rs.	1 cuart.	48
004	32	136	2 ps. 0 rs. 2 $\frac{41}{48}$ cuart.
8 rs.	34 rs.	137 cuart.	
32	4 c.	041	
	136		

En esta operacion he procedido por el mismo estilo que en la anterior; pero como al llegar á los reales, aun despues de agregados los 32 que resultaron del residuo de los pesos, no compusieron mas de 34 rs. que no se podian dividir entre 48, puse un cero al cuociente en el lugar correspondiente, reduje los reales á cuartillos para agregarlos al cuartillo del dividendo, y resultaron 137 cuartillos, que partí por el divisor, dando al cuociente lo que se ve en la operacion. Si los cuartillos hubieran sido menos que el divisor, tambien hubiera puesto otro cero al cuociente y hubiera completado este con un quebrado de cuartillo.

246.

Habiendo empleado 120 pesos en comprar 40 fanegas, 8 celemines, 2 cuartillas de maiz, se pregunta á cómo resulta la fanega.

$$120 \text{ ps.} : 40 \text{ fan. } 8 \text{ celem. } 2 \text{ cuart.}$$
$$120 \text{ ps.} : \tfrac{1954}{48} \text{ fan.} = \tfrac{5760}{1954} \text{ ps.}$$

que reducidos á enteros y valuados los residuos hacen

$$2 \text{ ps.} \ldots 7 \text{ rs.} \ldots 2 \text{ cuart. } \tfrac{644}{1954}$$

Como el dividendo es incomplexo y el divisor complexo, reduzco este á quebrado de la especie mayor, y dividiendo el entero por el quebrado hallaré luego el valor del quebrado producto, como se ve ejecutado.

247.

Se han empleado 30 pesos, 6 reales, 3 cuartillos en comprar 5 varas, 2 piés y 8 pulgadas de género: se pregunta á cómo ha costado cada vara.

$$30 \text{ ps. } 6 \text{ rs. } 3 \text{ cuart.} : 5 \text{ vs. } 2 \text{ piés, } 8 \text{ pulg.}$$
$$\tfrac{987}{32} \text{ ps.} : \tfrac{212}{36} \text{ vs.} = \tfrac{35532}{6784} \text{ de ps.}$$

que reducidos á enteros y valorados los residuos hacen

5 ps. . . 1 rl. . . 3 cuart. $\frac{4096}{6784}$ de cuart.

que es á como cuesta cada vara.

248.

Supongamos que entre 8 individuos se han comprado 12 cántaras de un licor que vale á 8 pesos, 6 reales y 3 quintos de real cada cántara, y se pregunta cuánto corresponde pagar á cada uno.

8 ps. . . .	6 rs. $\frac{3}{5}$	
$\times$	12 cánt.	
105 ps.	7 rs. $\frac{1}{5}$	8 indiv.
025	8	13 ps. . . 1 rl. $\frac{36}{40}$ ó $\frac{9}{10}$
01	15	
	07	

Lo primero que se ha ofrecido es averiguar el valor total del licor, y para esto principié la multiplicacion por los 3 quintos, y como 36 quintos hacen 7 enteros y 1 quinto, escribí este y llevé los enteros al siguiente producto.

Al distribuir el gasto entre los socios, cuando sobraron 7 reales los reduje á 35 quintos, y 1 quinto que habia son 36 quintos, que entre 8 dan por cuociente $\frac{36}{40}$ ó $\frac{9}{10}$.

LECCION XXI.

MÉTODO DE PARTES ALICUOTAS PARA LA MULTIPLICACION DE LOS NÚMEROS DENOMINADOS, Y REDUCCION DE ESTOS Á ENTEROS Y DECIMALES.

249. *P.* Qué son partes alicuotas de una cantidad?

R. Las que se contienen exactamente en ella, ó que repetidas cierto número de veces la componen.

250. *P.* En qué casos tiene lugar el método de partes alicuotas?

R. En la multiplicacion de número incomplexo por complexo, y de complexo por complexo.

251. *P.* En qué consiste este método?

R. Se reduce á multiplicar todo el multiplicando por el número de la mayor denominacion del multiplicador, principiando por las unidades del órden inferior, y llevando de cada producto las unidades que resulten del órden inmediato superior; lo cual concluido, se irán tomando de todo el multiplicando (que siempre expresa el valor de una de las unidades de la clase superior del multiplicador) las partes alicuotas que correspondan á las clases inmediatas de dicho multiplicador, luego las partes de estas que correspondan á las que siguen, y así sucesivamente; y sumando despues todos estos productos parciales, se tendrá el total.

252. *P.* Cómo se reducen los números denominados á enteros y decimales?

R. Reduciéndolos primero á quebrados de la especie superior, y convirtiendo despues estos en enteros y decimales.

253. *P.* Qué ventajas pueden resultar de dicha reduccion?

R. La de convertir todas las operaciones de números complexos en operaciones decimales.

Explicaciones y Ejemplos.

249.

Parte alicuota y factor viene á ser una misma cosa: el 3 es parte alicuota de 12, el 9 de 36, etc.; pero como nuestro objeto es sacar mitades, terceras, cuartas partes, etc., de los multiplicandos, ya sean complexos ó incomplexos, procurarémos explicar cómo esto se hace en los siguientes ejemplos.

Sea un número incomplexo del que quiero sacar quinta parte

138 onzas

5ª parte 27 onzas, 9 ps., 4 rs., 3 cuart. $\frac{1}{5}$. He dicho así: la 5ª parte de 13 es 2 y sobran 3; la 5ª parte de 38 es 7 y sobran 3 onzas, que son 48 pesos; la 5ª parte de 48 es 9 y sobran 3 pesos, que son 24 reales; la 5ª parte de 24 es 4 y sobran 4 reales, que son 16 cuartillos; la 5ª parte de 16 es 3 y sobra 1 cuartillo; la 5ª parte de 1 es 1 quinto.

—

Si el número de que se va á sacar parte alicuota es complexo, antes de ir sacando la parte de cada especie se van agregando á ellas las que sobraron de la anterior: pues siempre estas operaciones se hacen de izquierda á derecha.

	46 ps. . .	7 rs. . .	3 cuart.	$\frac{2}{3}$
4ª parte,	11 . . .	5 . . .	3 . . .	$\frac{11}{12}$

He dicho así: 4ª parte de 4 es 1; 4ª parte de 6 es 1 y sobran 2 pesos, que hacen 16 reales; 16 y 7 son 23: 4ª parte de 23 es 5 y sobran 3 reales, que son 12 cuartillos; 12 y 3 son 15: 4ª parte de 15 es 3 y sobran 3 cuartillos, que hacen 9 tercios de cuartillo; 9 y 2 son 11 tercios: 4ª parte de 11 tercios son 11 dozavos multiplicando su denominador por cuatro.

250 y 251.

Presentarémos un caso de los que pueden resolverse por partes alicuotas siendo el multiplicando incomplexo y el multiplicador complexo.

Supongamos que costando á 36 pesos la arroba de cera, se desea saber cuánto costarán 3 arrobas, 16 libras y 5 onzas.

multiplicando ó valor de 1 arr.	36 ps.		
multiplicador.	3 arr.	16 lib.	5 onz.
producto de las arrobas.	108 ps.	0 rs.	0,00 c.
5ª part. del valor de 1 arroba para 5 lib.	7	1	2,40
id. para 5 lib.	7	1	2,40
id. para 5 lib.	7	1	2,40
5ª parte del valor de 5 libras para 1 lib.	1	3	2,08
4ª parte del valor de 1 libra para 4 onz.	0	2	3,52
4ª parte del valor de 4 onzas para 1 onz.	0	0	2,88
producto total.	131 ps.	3 rs.	3,68 c.

Despues de la regla dada para este caso, y con la explicacion que hemos puesto en cada parte alicuota que se ha sacado, nada tenemos que añadir sino recomendar este método como el mas acomodado para las operaciones del comercio, y advertir que al llegar á los cuartillos hemos tomado partes decimales para aproximar las alicuotas que de ellos se han extraido.

—

Presentarémos otro caso en que el multiplicando y multiplicador sean complexos.

Costando á 6 pesos, 4 reales, 2 cuartillos la vara de cierto género, se pregunta cuánto costarán 3 varas, 2 piés y 11 pulgadas.

multiplicando y valor de 1 vara.	6 ps.	4 rs.	2 c.
multiplicador.	3 vs.	2 piés	11 pul.
producto de las varas.	19 ps.	5 rs.	2 c.
3ª parte del valor de 1 vara para 1 pié.	2 . .	1 . .	2
id. para 1 pié.	2 . .	1 . .	2
mitad del valor de 1 pié para 6 pulgadas.	1 . .	0 . .	3
mitad del valor de 6 pulgadas 3 pulgadas.	0 . .	4 . .	1,50
3ª parte del valor de 3 pulgadas para 1 pulgada.	0 . .	1 . .	1,83
id. para 1 pulgada.	0 . .	1 . .	1,83
producto total.	26 ps.	0 rs.	2,16 c.

La sola inspeccion de esta cuenta, para el que esté adiestrado en sacar las partes alicuotas, será suficiente á que entienda cómo se ha procedido en ella.

252 y 253.

Todo número complexo puede reducirse á decimales por la regla dada en la primera de estas preguntas.

Sea por ejemplo el número 9 horas, 40 minutos y seis segundos.

Reduciéndole á quebrado tendré

$$9 \text{ hor. } 40 \text{ min. } 6 \text{ seg.} = \tfrac{34806}{3600} \text{ hor.}$$

Reduciendo este quebrado á decimal será, aproximando hasta las milésimas, h.

$$\frac{34806}{3600} \text{ hor.} = 9{,}668.$$

Entendido esto, será fácil reducir á operaciones decimales todas las que se han de ejecutar con números denominados.

Sirva de ejemplo la siguiente: ¿cuánto importarán 6 quintales, 3 arrobas, 9 libras de azúcar á 10 ps., 3 reales, 2 cuart. el quintal?

Para esto diré:

$$6 \text{ qq. } 3 \text{ arr. } 9 \text{ lib.} = \frac{684}{100} \text{ qq.} = 6{,}84 \text{ qq.}$$

Y del mismo modo

$$10 \text{ ps. } 3 \text{ rs. } 2 \text{ cuart.} = \frac{334}{32} \text{ ps.} = 10{,}43 \text{ ps.}$$

Despues, multiplicando las cantidades ya reducidas á decimales se tendrá:

$$\begin{array}{lr l}
 & 10{,}43 & \text{ps.} \\
 & \times\ 6{,}84 & \text{qq.} \\
\hline
 & 4172 & \\
 & 8344 & \\
 & 6258 & \\
\hline
\text{ps.} & 71{,}3412 & \\
 & 8 & \text{rs.} \\
\hline
\text{rs.} & 2{,}7296 & \\
 & 4 & \\
\hline
\text{cuart.} & 2{,}9184 &
\end{array}$$

Luego será el producto, despues de valuadas las decimales, 71 ps.... 2 rs.... 3 cuart. próximamente. Del mismo modo se podrán ejecutar las operaciones de sumar, restar y partir denominados, convirtiéndolos antes en decimales.

LECCION XXII.

DE LAS POTENCIAS Y RAICES EN GENERAL, Y DE LA ELEVACION Á LA SEGUNDA POTENCIA Y EXTRACCION DE LA RAIZ CUADRADA DE LOS NÚMEROS ENTEROS, QUEBRADOS, MIXTOS, DECIMALES Y DENOMINADOS.

254. *P.* Qué se entiende por potencia de una cantidad numérica?

R. El producto que resulta de tomarla varias veces por factor.

255. *P.* Qué nombre se da al producto formado de este modo?

R. Se llama segunda, tercera, cuarta potencia segun que el número elevado haya entrado dos, tres ó cuatro veces por factor.

256. *P.* Qué es raiz de una cantidad?

R. El número que elevado á cierta potencia puede producirla.

257. *P.* Qué nombre se da á las raices?

R. Se llama raiz segunda, tercera, etc., segun que para producir la cantidad sea necesario tomarla dos ó tres veces por factor.

258. *P*. Cómo se llaman las potencias y raices segundas y terceras?

R. Las raices segunda y tercera se llaman raiz cuadrada y raiz cúbica, y las potencias segunda y tercera se llaman cuadrados y cubos.

259. *P*. Qué es exponente?

R. El número que expresa las veces que una raiz se ha de tomar por factor para formar la potencia; y se llama exponente de la potencia, cuando afecta á la raiz que se ha de elevar; y exponente de la raiz, cuando afecta á la potencia de la cual se quiere extraer.

260. *P*. Cómo se expresa que un número se quiere elevar á alguna potencia?

R. Escribiendo el número dentro de un paréntesis y colocando el exponente á su derecha y algo mas arriba, fuera de dicho paréntesis.

261. *P*. Y cómo se expresa que á un número se le ha de extraer raiz?

R. Poniendo el número debajo de la raya superior de este signo $\sqrt{}$ que se llama radical, y en el ángulo se coloca el exponente que expresa la raiz que se quiere extraer.

262. *P*. Qué es todo número respecto de sí mismo?

R. Todo número es raiz primera y potencia primera de sí mismo.

263. *P*. Cómo se eleva al cuadrado un número entero?

R. Multiplicándole por sí mismo.

264. *P*. Puede formarse de otro modo el cuadrado de los números enteros?

R. Sí, señor; pues el cuadrado de un número que no sea dígito se compone de tres partes, á saber: el cuadrado de las decenas, duplo de decenas por unidades, y cuadrado de las unidades.

265. *P.* Cómo se elevará un quebrado á la segunda potencia?

R. Elevando al cuadrado su numerador y su denominador, lo que equivale á multiplicarle por sí mismo.

266. *P.* Cómo se eleva al cuadrado una cantidad decimal?

R. Multiplicándola por sí misma, y teniendo cuidado de separar en la potencia para decimales un número de cifras duplo de las decimales que tenga la raiz.

267. *P.* Cómo se eleva al cuadrado un número complexo?

R. Multiplicándole por sí mismo, despues de reducido á quebrado de la especie superior ó á enteros y decimales, y hallando luego el valor del quebrado ó decimal segun la division superficial.

268. *P.* Qué debe saberse de memoria antes de aprender á extraer la raiz cuadrada?

R. Los cuadrados de los números dígitos que son los siguientes:

raices. .	1 —	2 —	3 —	4 —	5 —	6 —	7 —	8 —	9
cuadrados	1 —	4 —	9 —	16 —	25 —	36 —	49 —	64 —	81

269. *P.* Qué mas debe tenerse presente?

R. Lo primero, que el cuadrado de decenas debe hallarse en las centenas, el duplo de decenas por unidades ha de estar en las decenas, y el cuadrado de las unidades ha de tener unidades. Lo segundo, que el cuadrado de un número dígito no puede pasar de dos cifras, el de un número de dos cifras no puede tener mas de cuatro, el de un número de tres cifras no pasará de seis, etc. Lo tercero, que no todos los números tienen raiz exacta; y lo cuarto, que el que no tenga raiz exacta en enteros, no la tendrá en enteros y quebrados.

270. *P.* Cómo se extrae la raiz cuadrada de un número entero?

R. Escrito el número debajo del signo radical, se tira á su derecha una raya como para dividir. Se separan las cifras de dos en dos de la derecha hácia la izquierda. Se ve cuál es el mayor cuadrado contenido en la primera division de la izquierda, se escribe debajo de dicha division y se resta, poniendo de una vez en el lugar correspondiente al divisor la raiz del cuadrado que se restó, la cual es la primera cifra de la raiz que buscamos. Hecho esto se bajan las dos cifras siguientes, y se separa la de la derecha con un punto. Las que quedan á la izquierda se dividen por el duplo de la raiz hallada (cuyo duplo se escribe sobre dicha raiz) y el cuociente es la segunda cifra de la raiz, que se escribe á la derecha de la primera y á la derecha del duplo. Se multiplica esta nueva cifra por toda la coleccion que está encima, y el producto se resta de *todas* las cifras bajadas. A la derecha del residuo se bajan otras dos cifras, se separa una y las restantes se vuelven á dividir por el duplo de la raiz hallada (que se escribe sobre el primer duplo), y el cuociente es la tercera cifra de la raiz que se escribe á la derecha de las otras halladas y á la derecha del duplo. Se multiplica la última cifra hallada por toda la coleccion superior, y se resta de todas las cifras bajadas. A la derecha del residuo se bajan otras dos cifras, y así hasta acabar.

271. *P.* Qué debe hacerse cuando un residuo, aun despues de bajadas las dos cifras siguientes y separada la última, no puede dividirse por el duplo de la raiz hallada?

R. Se pone cero á la raiz, se añade un cero al duplo, se bajan otras dos cifras, y se continúa la operacion.

272. *P.* Cómo se conoce si la cifra puesta en la raiz es mayor de lo que debe ser?

R. Cuando el producto de la cifra por el duplo de las anteriores y por sí misma no puede restarse de las cifras bajadas, lo que se enmendará poniendo una cifra menor en la raiz.

273. *P.* Y cómo se sabe si la cifra puesta en la raiz es menor de lo que debe ser?

R. Cuando despues de multiplicada por el duplo de la anterior y por sí misma, y restado el producto de las cifras bajadas, el residuo sea igual ó mayor que el duplo de la raiz hallada, mas la unidad.

274. *P.* Cómo se completa la raiz cuando no hay mas cifras que bajar?

R. A la derecha de las cifras enteras de la raiz se pondrá un quebrado, cuyo numerador sea igual al último residuo, y su denominador al duplo de la raiz hallada, mas la unidad.

275. *P.* Cómo se continúa por decimales una extraccion de raiz cuadrada?

R. Poniendo á la derecha de las cifras enteras una coma, agregando dos ceros por cada decimal que se desee obtener, y procediendo en lo demás como si fueran enteros.

276. *P.* Cómo se extrae la raiz de un quebrado?

R. Extrayendo la raiz de su numerador y denominador.

277. *P.* Cómo se extrae la raiz de un número mixto?

R. Reduciéndole á la especie de su quebrado, y extrayendo luego la raiz del numerador y denominador del quebrado impropio que resulta.

278. *P.* Cómo se conseguirá que uno de los dos términos de un quebrado tenga raiz exacta?

R. Multiplicando previamente por dicho término á su numerador y denominador.

279. *P.* Cuál es la regla mas cómoda para hallar con suficiente aproximacion y en una expresion clara la raiz de un quebrado?

R. Se extrae la raiz de sus dos términos aproximándolos por decimales, se iguala el número de estas en uno y otro, y se suprimen las comas.

280. *P.* Cómo se extrae la raiz cuadrada de una fraccion propia decimal?

R. Lo primero es añadir un cero á la fraccion, si no tiene un número par de cifras decimales: despues se dividen de dos en dos desde el signo decimal á la derecha: se pone á la raiz un cero y el signo decimal, y se continúa la operacion como si fueran enteros.

281. *P.* Cómo se extrae la raiz cuadrada de un número que tenga enteros y decimales?

R. Las decimales se hacen pares, si no lo son, agregándoles un cero. Desde el signo decimal hácia la izquierda y hácia la derecha se dividen los enteros y las decimales de dos en dos. Se extrae la raiz de los enteros, teniendo cuidado de poner á la raiz el signo decimal cuando se hayan agotado estos. Se continúan bajando las otras secciones, y las cifras que van resultando á la raiz ya son decimales.

282. *P.* Cómo se extrae la raiz de los números denominados?

R. Reduciéndolos primero á quebrados de la especie mayor, ó á enteros y decimales, y procediendo despues segun las reglas dadas para esta clase de números, sin olvidar en la reduccion á quebrado de la especie mayor, que se trata de unidades superficiales; y en la valuacion del resultado, que se trata ya de unidades lineales.

Explicaciones y Ejemplos.

254.

El número 125 es potencia de 5 porque $5 \times 5 \times 5 = 125$.

255.

16 es la 2ª potencia de 4, porque $4 \times 4 = 16$.
27 es la 3ª potencia de 3, porque $3 \times 3 \times 3 = 27$.
32 es la 5ª potencia de 2, porque $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$.
725 es la 4ª potencia de 5, porque $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 725$.

256.

4 es raiz de 16, 3 es raiz de 27,
2 es raiz de 32, y 5 es raiz de 725.

257.

4 es raiz 2ª de 16, 3 es raiz 3ª de 27.
2 es raiz 5ª de 32, y 5 es raiz 4ª de 725.

258.

4 es raiz cuadrada de 16, y 16 es cuadrado de 4.
3 es raiz cúbica de 27, y 27 es cubo de 3.

259.

Si el número 4 se ha de elevar á la 3ª potencia ó tomarle tres veces por factor, se dice que es 3 el exponente de la potencia.

—

Si del número 64 se quiere extraer la raiz cuadrada ó buscar el número que tomado dos veces por factor le produce, se dice que es 2 el exponente de la raiz.

260 y 261.

El primer caso de los anteriores se expresa así:

$$(4)^3 = 64$$

y se lee: 4 *elevado al cubo igual á* 64.

El caso segundo se indicará de este modo:

$$\sqrt[2]{64} = 8$$

y se lee: *ráiz cuadrada de 64 es igual á* 8.

Debe advertirse que cuando en el ángulo del radical no se escribe ningun número, se entiende que se habla de la raiz cuadrada.

262.

Como el exponente indica las veces que una raiz ha de entrar por factor en su potencia, claro es que

$$(8)^1 = 8 \text{ y } \sqrt[1]{8} = 8$$

263.

El cuadrado del número 32 se formará multiplicándole por sí mismo.

$$\left.\begin{array}{r} 32 \\ \times\ 32 \\ \hline 64 \\ 96 \\ \hline 1,024 \end{array}\right\} (32)^2 = 1,024$$

264.

El cuadrado del mismo número 32 se puede formar de este otro modo, habiéndole considerado descompuesto en 30 y 2, es decir en decenas y unidades.

cuadrado de decenas. . ó	$(30)^2 =$	900
duplo de dec. por unid. ó	$2 \times (30 \times 2) =$	120
cuadrado de unidad. . . ó	$(2)^2 =$	4
Luego.	$(32)^2 =$	1,024

265.

El quebrado $\frac{4}{5}$ se elevará á la 2ª potencia ó cuadrado elevando su numerador y denominador; es decir:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4^2}{5^2} = \frac{16}{25}$$

266.

Si se pregunta cuántas varas cuadradas tendrá un solar que forma un cuadrado perfecto, y por cada lado tiene 10.06 varas, resolveré el problema del modo siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 10,06 \\ \times\ 10,06 \\ \hline 6036 \\ 1006 \\ \hline 101,2036 \end{array}\right\} (10,06)^2 = 101,2036$$

Donde vemos que el número de decimales del cuadrado es duplo del de la raiz, y lo mismo sucederá siempre.

267.

Si se desea saber cuántas varas tendrá un terreno exactamente cuadrado teniendo por cada lado 12 brazas, 1 vara y 2 piés, ejecutaré la operacion de uno de los dos modos siguientes :

1° Reduciéndole á quebrado segun la division lineal

$$(12 \text{ br. } 1 \text{ v. } 2 \text{ p.})^2 = (\tfrac{77}{6} \text{ br.})^2 = \tfrac{5929}{36} \text{ br.}$$

Cuyo quebrado, reducido á enteros y valuados los residuos segun la division superficial, por la que una braza cuadrada tiene 4 varas, y una de estas 9 piés cuadrados, dará

$$\tfrac{5929}{36} \text{ br.} = 164 \text{ br. } 2 \text{ v. y } 7 \text{ piés cuadrados.}$$

2° Reduciéndole á decimal será

$$12 \text{ br.} - 1 \text{ v.} - 2 \text{ p.} = \tfrac{77}{6} \text{ br.} = 12{,}833 \text{ br.}$$

luego $(12 \text{ br. } 1 \text{ v. } 2 \text{ p.})^2 = (12{,}833 \text{ br.})^2 = 164{,}686 \text{ b.}$ cuya expresion valorada producirá igual resultado que la anterior.

268 y 269.

La menor decena que puede haber es 10, cuyo cuadrado es 100, número que no tiene decenas ni unidades : tampoco las tendrán los cuadrados de los números 20, 30, etc., que son decenas; luego el cuadrado de decenas se halla en las centenas.

En el duplo de decenas por unidades, hay un factor que acaba en cero (que son las decenas); luego este producto no tendrá unidades, mas llegará hasta las decenas.

El cuadrado de unidades siempre estará en las unidades; porque ningun cuadrado de unidades acaba en cero.

Véase esto muy claro en el cuadrado del número 43 descompuesto para el efecto en $40 + 3$.

cuad. de dec.	$(40)^2 = 1600$
duplo de dec. por un 2. . .	$(40 \times 3) = 240$
cuad. de unid.	$(3)^2 = 9$
Luego. . . .	$(43)^2 = 1849$

—

El mayor número dígito es 9, y su cuadrado 81 no pasa de dos cifras.

El mayor número de dos cifras es 99, y su cuadrado 9801 no pasa de cuatro cifras; y lo mismo se observaria en los demás.

—

Todos los números tienen potencias exactas, porque no hay dificultad en multiplicarlos por sí mismos; pero no se encuentran siempre números que multiplicados por sí mismos produzcan otros.

Por ejemplo, no hay número que elevado á cualquiera potencia produzca 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, etc., de que se sigue que estos números no tienen raiz exacta.

—

No teniendo un número raiz exacta en enteros, no la tendrá tampoco en enteros y quebrados; porque al multiplicar el quebrado de la raiz por sí mismo, jamás podrá producir enteros.

270.

Sea el número 1849 del que se quiere extraer raiz cuadrada.

	$\sqrt{18.49}$	83 dup. de la 1ª mas la 2ª
cuadr. de la 1ª	16	43 raiz
	24.9	
duplo de 1ª por 2ª y cuadr. de 2ª	24 9	
	00 0	

He separado las cifras de dos en dos de la derecha hácia la izquierda, y he dicho: el mayor cuadrado contenido en 18 es 16 que escribi debajo, y su raiz 4 la puse por primera cifra de la raiz. He restado 16 de 18, y á la derecha del residuo 2 bajé la siguiente porcion y separé la última cifra. El duplo de la raiz hallada es 8 que escribo sobre el 4. Por este 8 divido la porcion separada 24. Les cabe á 3, que escribo á la derecha de la cifra 4 y á la derecha del duplo 8. Multiplico 3 por la coleccion 83: este producto le resto de todo lo bajado, y como no sobra nada, habré concluido la operacion, siendo 43 la raiz que se buscaba.

La razon de haber buscado el mayor cuadrado contenido en la primera division de la izquierda es la siguiente. Constando la potencia de cuatro cifras, la raiz constará de dos; es decir, que tendrá decenas y unidades; luego el cuadrado de las decenas debe hallarse en las centenas, y la raiz del mayor cuadrado contenido en ellas serán las decenas de la raiz.

Como la segunda parte de un cuadrado es el duplo de decenas por unidades y debe hallarse en las decenas, separo una cifra. Conociendo las decenas conozco su duplo, y dividiendo por este duplo aquella coleccion, es claro que darán las unidades. Si estas unidades las multiplico por el duplo de las decenas, y por ellas mismas, no hago mas que formar á la vez las dos partes últimas del cuadrado, es decir : el duplo de decenas por unidades y cuadrado de unidades. He restado y no sobra nada; pero si hubiera sobrado algo y hubiese mas cifras, bajaria la coleccion siguiente; y considerando las cifras halladas de la raiz como decenas respecto de la que sigue, haria con ellas lo mismo que ejecuté con la primera cifra, y así continuaria siempre fundado en los mismos principios.

271.

Se desea saber cuál será el lado ó costado de una sementera que tiene 42.025 varas cuadradas.

$\sqrt{4.20.25}$	405
4	205 raiz
02.02.5	
2 02 5	
0 00 0	

Cuando bajé la segunda seccion 20 y separé el cero, solo quedó un 2, que no pudiéndose dividir entre 4, duplo de la primera cifra, puse un cero á la derecha de aquella y á la derecha del 4 : bajé la seccion 25, separé el 5, dividí la parte de la izquierda entre 40, y el cuociente 5 le puse á la derecha de las cifras halladas 20 y á la derecha del 40 : multipliqué 5 por 405, le resté de todo lo bajado, y no sobrando nada, digo que el costado de la sementera es de 205 varas.

272, 273 y 274.

El cuadrado de todo número se diferencia del cuadrado de otro que tenga una unidad menos, en dos veces el primero, mas la unidad, esto es :

$$(6)^2 = (5)^2 + 2 \times 5 + 1$$
$$(7)^2 = (6)^2 + 2 \times 6 + 1$$
$$(8)^2 = (7)^2 + 2 \times 7 + 1$$

etc., etc.

Esto es muy fácil de comprobar con otros números, y es la razon porque cuando sobra el duplo de lo hallado mas uno, debe corresponder una unidad mas á la raiz.

Cuando las partes del cuadrado que se forman no se pueden restar por ser mayores, claro está que se ha puesto de mas en la raiz, y esto no necesita demostrarse.

Como si sobrara una cantidad igual al duplo de la raiz hallada mas la unidad, corresponderia una unidad mas á la raiz, sobrando menos, le corresponderá la parte correspondiente, esto es, un quebrado cuyo numerador sea el residuo, y el denominador el duplo de la raiz hallada mas uno.

Lo harémos patente con un ejemplo :

Quiero saber cuál es el lado de una alberca que tiene 750 piés cuadrados de superficie.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{7.50} & 47 \\ \ \ 4 & 27 + \frac{21}{55} \text{ raiz} \\ \hline 35.0 & \\ 32\ 9 & \\ \hline 02\ 1 \text{ residuo.} & \end{array}$$

Habiendo sobrado 21, le he puesto por numerador de un quebrado para completar la raiz, y por denominador el duplo de la raiz hallada 27 que es 54 mas 1, que son 55, y hallo que el lado es 27 ps. y $\frac{21}{55}$ de pié.

275.

Nos propondrémos aproximar por decimales la raiz hallada en el ejemplo que precede.

$$\begin{array}{l|l} & 5468 \\ & 543 \\ \sqrt{7.50} & 47 \\ \ \ 4 & 27{,}38\ldots \text{ etc., raiz.} \\ \hline 35.0 & \\ 32\ 9 & \\ \hline 02\ 10.0\ldots\ 1^{o} \text{ res. agregando dos ceros} & \\ \ \ 1\ 62\ 9 & \\ \hline \ \ 47\ 10.0\ldots\ 2^{o} \text{ res. agregando dos ceros.} & \\ \ \ 43\ 74\ 4 & \\ \hline \ \ 03\ 35\ 6 \text{ etc.} & \end{array}$$

Al residuo 21 agregué dos ceros, puse la coma decimal á la derecha de la raiz entera 27 y hallé la cifra decimal 3 : al otro residuo 471 agregué dos ceros y hallé la cifra decimal 8, y así hubiera podido continuar; pero no habiendo querido aproximar mas que á las centésimas, hallo que el lado de la alberca es de 27 piés y 38 centésimos de pié.

276 á 279.

Sea el quebrado $\frac{49}{64}$ del que quiero extraer la raiz cuadrada, diré :

$$\sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{64}} = \frac{7}{8}$$

Pero si el quebrado es como este $\frac{49}{50}$, diré :

$$\sqrt{\frac{49}{50}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{50}} = \frac{7}{\sqrt{50}}$$

porque no teniendo 50 raiz cuadrada exacta, he preferido dejarla indicada.

—

Ultimamente, si ningun término tiene raiz exacta como $\frac{12}{15}$, tendria que dejar indicadas las raices de sus dos términos; pero queriendo que el numerador, por ejemplo, la tenga, multiplicaré por este sus dichos términos : así es que

$$\sqrt{\frac{12}{15}} = \sqrt{\frac{12 \times 12}{15 \times 12}} = \sqrt{\frac{144}{180}} = \frac{12}{\sqrt{180}}$$

Pero lo mejor es proceder de hecho á hallar las raices aproximadas con igual número de decimales y suprimir en seguida los signos, lo cual equivale á multiplicar los dos términos del quebrado por un mismo número. Sirvan de ejemplos los mismos quebrados anteriores.

$$\sqrt{\frac{49}{50}} = \frac{7,00}{7,07} = \frac{700}{707}$$

$$\sqrt{\frac{12}{15}} = \frac{3,46}{3,87} = \frac{346}{387}$$

280 y 281.

Habiéndose ya explicado la aproximacion de las raices por decimales, dos ejemplos parecen bastar al esclarecimiento de las reglas que comprenden estas preguntas.

1° — Quiero extraer raiz cuadrada de 0,071

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{0,07.10} & 46 \\ 4 & \underline{0,26} \text{ raiz} \\ \hline 31.0 & \\ \underline{27\ 6} & \\ 03\ 4 & \end{array}$$

agregué un cero á los 0,071, puse cero y signo decimal á la raiz, é hice mi operacion que hubiera podido aproximar con la agregacion de dos cifras á los residuos, por cada una que quisiera aumentar á la raiz.

2º — Quiero saber cuál es la raiz cuadrada de 321,842.

```
                       2585
                       349
 √3.21,84.20    |      27
  1             |      17,95
 ____________    ___________
  22.1
  18 9
 _________
  03 28.4
   3 14 1
 ____________
   0 14 32.0
      12 92 5
   ___________
      01 39 5
```

He añadido un cero á las decimales para hacerlas pares: he dividido las cifras de dos en dos desde la coma á derecha é izquierda: he ejecutado la extraccion de la raiz de los enteros, y antes de bajar la primera seccion de decimales, puse el signo decimal á la derecha de las cifras halladas, habiendo continuado la operacion, que seria fácil aproximar.

282.

Bien entendido lo que va expuesto, nada hay mas fácil que extraer la raiz cuadrada de un número denominado.

Sea el número complexo 14 varas, 6 piés y 36 pulgadas de que se ha de extraer la raiz cuadrada. Lo ejecutarémos reduciéndole á quebrado, y teniendo presente que hablamos de medidas superficiales en las que la vara cuadrada tiene 9 piés y el pié 144 pulgadas. Esto supuesto será

$$\sqrt{14 \text{ vs. } 6 \text{ ps. } 36} \text{ pul.} = \sqrt{\frac{19044}{1296}} \text{ v.} = \frac{138}{36} \text{ var.}$$

cuyo quebrado $\frac{138}{36}$ var. reducido á enteros, y valuados los residuos segun la division lineal, da por resultado 3 varas, 3 piés, 6 pulgadas, que es la raiz del número propuesto.

NOTA.

Téngase mucha atencion á las cantidades que se versan en estas operaciones; pues como se pasa, ya de las superficiales á las lineales y ya de estas á aquellas, deben emplearse con tino en la reduccion á quebrados y en la valuacion de estos las divisiones correspondientes, segun se explicaron en el tratado de los números denominados.

LECCION XXIII.

ELEVACION A LA TERCERA POTENCIA Y EXTRACCION DE LA RAIZ CÚBICA DE LOS NÚMEROS ENTEROS, QUEBRADOS, MIXTOS, DECIMALES Y DENOMINADOS.

283. *P.* Cómo se eleva un número entero á su tercera potencia?

R. Formando un producto en que el dicho número entre tres veces por factor.

284. *P.* Puede formarse el cubo de otro modo?

R. Sí, señor, respecto á cualquier número que no sea dígito; pues considerándole descompuesto en decenas y unidades, su cubo se compondrá de cuatro partes, á saber: el cubo de las decenas, tres veces el cuadrado de las decenas multiplicado por las unidades, tres veces las decenas por el cuadrado de las unidades y el cubo de las unidades.

285. *P.* Cómo se eleva un quebrado á su tercera potencia?

R. Cubicando su numerador y denominador.

286. *P.* Cómo se eleva á la tercera potencia un número mixto?

R. Reduciéndole á la especie del quebrado y cubicando los términos del quebrado impropio que resulta.

287. *P* Cómo se eleva al cubo una cantidad decimal, tenga ó no enteros?

R. Formando un producto en que entre tres veces por factor y separando para decimales un número de cifras triplo del que tenga la raiz.

288. *P.* Cómo se eleva al cubo un número complexo?

R. Reduciéndole primero á quebrado de la especie mayor ó á entero y decimal, y cubicándole en seguida segun las reglas dadas para esta clase de números.

289. *P.* Qué debe saberse de memoria para proceder á la extraccion de la raiz cúbica?

R. Los cubos de los números dígitos que son los siguientes:

raices —	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
cubos —	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.

290. *P.* Qué otras circunstancias notables deben tenerse presentes?

R. 1ª Que cuando se está cubicando un número, el cubo de las decenas produce millares; el triplo del cuadrado de decenas por unidades produce centenas; el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades dará decenas, y el cubo de las unidades se hallará en las unidades. 2ª Que el cubo de un número dígito no puede pasar de tres cifras; el cubo de un número de dos cifras no pasará de seis; el cubo de un número de tres no pasará de nueve cifras, etc. 3ª Que el cubo de un número se diferencia del de otro que tenga una unidad menos, en tres veces el cuadrado del menor, mas tres veces el mismo número menor, mas la unidad: y 4ª que el número que no tiene raiz cúbica exacta en enteros, no la tendrá en enteros y quebrados.

291. *P.* Cómo se extrae la raiz cúbica de un número entero?

R. Se dividen las cifras de tres en tres de la derecha hácia la izquierda: se ve cuál es el mayor cubo contenido en la primera division de la izquierda y se escribe debajo de dicha porcion, poniendo la raiz en el lugar destinado para el cuociente en la division, y esta será la primera cifra de la raiz que se busca: se resta el cubo de las cifras separadas: á la derecha del residuo se baja la segunda porcion, separando con un punto las dos últimas cifras de la derecha: sobre la cifra hallada de la raiz se escribe el triplo de su cuadrado: se ve cuántas veces este triplo cuadrado cabe en las cifras separadas de la izquierda, y el cuociente será la segunda cifra de la raiz que se escribirá á la derecha de la primera: se multiplica esta cifra por el triplo cuadrado de la anterior y el producto se escribe debajo de las cifras separadas de la izquierda : se forma despues un producto que contenga tres veces la primera multiplicado por el cuadrado de la segunda cifra de la raiz, y se escribe debajo de las cifras bajadas de modo que corresponda á la penúltima : se forma de la última cifra de la raiz, y se escribe de modo que corresponda á la última cifra de las bajadas : se suman estas tres partes y la suma se resta del total de las cifras bajadas : á la derecha del residuo se baja otra nueva porcion y se separan las dos últimas cifras : se procede con las cifras halladas de la raiz como si fueran una sola para el efecto de formar el triplo de su cuadrado : por este se divide la parte separada de la izquierda, y el cuociente será la tercera cifra de la raiz : se forman los tres productos de que ya se ha hablado : se suman, y la suma se resta de las cifras bajadas : á la derecha del residuo se agrega la porcion siguiente, y se continúa así hasta acabar.

292. *P.* Qué deberá hacerse cuando la cantidad separada á la izquierda de las cifras bajadas sea menor que el triplo cuadrado de la raiz hallada y que por lo tanto no se pueda dividir?

R. Se pone un cero á la derecha de las cifras halladas de la raiz y dos á la derecha del triplo cuadrado : se baja otra nueva porcion del número cuya raiz se quiere extraer: se separan dos cifras de la derecha; y las de la izquierda, divididas por el triplo cuadrado aumentado de los dos ceros, dará la siguiente cifra de la raiz. Si aun no es divisible, se añadirá otro cero á la raiz, dos al triplo cuadrado, y se bajará otra porcion del número propuesto.

293. *P.* Cómo se conoce si la cifra puesta en la raiz es mayor ó menor de lo que debe ser?

R. Será mayor, cuando la suma de los tres productos que se forman no se puede restar de las cifras bajadas, y menor, cuando el residuo sea igual ó mayor que tres veces el cuadrado de la raiz hallada, mas tres veces la misma raiz, mas la unidad.

294. *P.* Cuando la raiz cúbica no es exacta, cómo se completará aproximadamente?

R. Escribiendo á la derecha de las cifras enteras un quebrado cuyo numerador sea el último residuo, y su denominador el triplo del cuadrado de la raiz hallada, mas el triplo de la misma raiz, mas la unidad.

295. *P.* Cómo se continúa una raiz cúbica por decimales?

R. Agregando al último residuo tres ceros por cada decimal que se quiera hallar en la raiz; poniendo antes á la derecha de la raiz entera el signo decimal, y procediendo en lo demás como si fueran enteros.

296. *P.* Cómo se extrae la raiz cúbica de un quebrado?

R. Extrayendo la raiz cúbica de su numerador y denominador.

297. *P.* Cómo se conseguirá que uno de los términos sea cubo y que por consiguiente dé raiz exacta?

R. Multiplicando por el cuadrado de dicho término el numerador y denominador.

298. *P.* Qué otro medio puede emplearse para hallar la raiz cúbica de un quebrado con suficiente aproximacion?

R. El de extraer las raices de sus términos aproximándolas hasta un número igual de decimales, y suprimiendo despues los signos, lo que equivale á multiplicar numerador y denominador por un mismo número.

299. *P.* Cómo se extrae la raiz cúbica de un número mixto?

R. Reduciéndole primero á la especie del quebrado, y procediendo despues á extraer la raiz del quebrado impropio que resulta.

300. *P.* Cómo se extrae la raiz cúbica de una fraccion decimal propia?

R. Antes de todo se pone á la raiz un cero y el signo decimal: en seguida se hace que las cifras decimales de la fraccion propuesta sean en un número múltiplo de tres, lo que se consigue añadiendo los ceros necesarios: se dividen las cifras de tres en tres desde el signo decimal hácia la derecha, y se procede en lo demás como si fueran enteros.

301. *P.* Cómo se extrae la raiz cúbica de un número que tenga enteros y decimales?

R. Se hace que el número de las cifras decimales sea múltiplo de tres, agregando los ceros necesarios: se divide el número propuesto de tres en tres cifras desde el signo decimal á derecha é izquierda: se procede como si fueran enteros, y se tiene cuidado de poner el signo decimal en la raiz, cuando se halla la última cifra entera y se baja la primera seccion de decimales.

302. *P.* Cómo se extrae la raiz cúbica de los números denominados?

R. Reduciéndolos á quebrados de la especie mayor ó á enteros y decimales, y procediendo despues por las reglas dadas para esta clase de números.

303. *P.* Qué debe tenerse presente en las elevaciones al cubo y extracciones de raices de los números denominados?

R. Que las unidades de las potencias son unidades cúbicas y las de las raices unidades lineales, y así se valuarán los quebrados segun la subdivision que les corresponda.

Explicaciones y Ejemplos.

283.

Si el número 45 le he de elevar á su cubo ó tercera potencia, lo haré así :

$$
\begin{array}{r l}
45 & \text{.... raiz} \\
\times\ 45 & \\
\hline
225 & \\
180 & \\
\hline
2025 & \text{.... cuadrado} \\
\times\ 45 & \\
\hline
10125 & \\
8100 & \\
\hline
91{,}125 & \text{.... cubo.}
\end{array}
$$

donde observo que le he hecho entrar tres veces por factor, y que el cuadrado, multiplicado por la raiz, produce el cubo.

284.

Si descomponemos el mismo número 45 en 40 mas 5, es decir, en sus decenas y unidades, podré formar su cubo compuesto de las cuatro partes siguientes :

1ª cubo de las decenas.	$(40)^3 = 64.000$
2ª tres veces el cuadrado de decenas por unidades.	$3 \times (40)^2 \times 5 = 24.000$
3ª tres veces las decenas por el cuadrado de las unidades. . . .	$3 \times 40 \times (5)^2 = 3.000$
4ª cubo de las unidades.	$(5)^3 = 125$
luego.	$(45)^3 = 91\ 125$

Resultado igual al del ejemplo anterior, y lo mismo se puede formar el cubo de cualquier número descomponiéndole en decenas y unidades: entendiéndose por decenas toda la coleccion menos las unidades.

285.

$$\left(\frac{9}{6}\right)^3 = \frac{6^3}{9^3} = \frac{216}{729} \text{ y así de los demás.}$$

286.

$$\left(4 + \frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{14}{3}\right)^3 \frac{2744}{27} = 101 + \frac{17}{27}$$

287.

$$(0{,}05)^3 = 0{,}000125$$

En este ejemplo no teniendo el número 125 bastantes cifras para separar seis que es el triplo de la raiz, agregué á la izquierda los ceros necesarios.

—

Uno cajon de seis caras cuadradas é iguales, tiene 6,08 piés de largo, otros tantos de ancho y otros tantos de altura, y se pregunta cuántos piés cúbicos tendrá.

$$(6{,}08)^3 = 224{,}755712 \text{ piés}$$

que hallando el valor de la decimal á razon de 1728 pulgadas cúbicas que tiene cada pié cúbico y despreciando desde las centésimas, dará para la capacidad cúbica del cajon 244 piés, 1305,8 pulgadas cúbicas.

288.

Supongamos que hay un algibe ó depósito de agua que tiene de ancho 12 varas, 2 piés y 6 pulgadas, otro tanto de largo, y otro tanto de profundidad, y se pregunta cuántas varas cúbicas de agua podrá contener.

$$(12 \text{ v. } 2 \text{ piés } 6 \text{ pul.})^3 = \left(\frac{462}{36}\text{ v.}\right)^3 = \frac{98611128}{46656} \text{ v. cúb.}$$

que reducido á enteros y hallado el valor del quebrado á razon de 27 piés cúbicos que tiene cada vara cúbica, dan por resultado para la capacidad del algibe 2113 varas, 15 piés y $\frac{29160}{46656}$ de pié, medida cúbica.

Se desea saber la solidez ó piés cúbicos que tendrá una piedra que es 2 piés, 4 pulgadas larga, otro tanto ancha y otro tanto alta.

(2 piés, 4 pulg.)^3 = (2,111 p.)^3 = 9,407293631 p. c.

que valuando la decimal á razon de 1728 pulgadas cúbicas que tiene cada pié cúbico, dará la solidez de la piedra 9 piés, 691 pulgadas y 2 décimos, medida cúbica.

289 y 290.

El cubo de las decenas produce millares, porque una sola produce al cubicarla 1000. El triplo del cuadrado de decenas por las unidades produce centenas, porque en este producto entra un factor que las tiene, cual es el cuadrado de las decenas. El triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades produce decenas, porque en este producto entran como factor las decenas. Finalmente, el cubo de las unidades, como vemos en la tabla de cubos de la primera de estas preguntas, siempre da unidades.

Véase mas claro en el cubo del número 32 descompuesto 30 y 2.

Cubo de las decenas	27.000, llega á los millares.
Tres veces el cuadrado de las decenas, multiplicado por las unidades. .	5.400, llega á las centenas.
Tres veces las decenas por el cuadrado de las unidades.	360, llega á las decenas.
Cubo de las unidades.	8, llega á las unidad.
Y el cubo de 32 es. .	32768 unidades.

El mayor número dígito es 9, y su cubo, como se ve en la tabla de cubos, no pasa de tres cifras. El mayor número de dos cifras es 99 y su cubo no pasa de seis cifras, y siempre se hallará que los mayores cubos no pasan de un número de cifras triplo del de su raiz.

—

Si se compara el cubo de 3 con el cubo de 4 se hallará

$$(3)^3 + 3 \times (3)^2 + 3 \times 3 + 1 = (4)^3$$

esto es : que si al cubo de 3 se agrega tres veces su cuadrado, mas tres veces el mismo 3 mas 1, se obtendrá el cubo de 4. Véase comprobado.

El cubo de 3 es.	27	= 64 que es el cubo de 4.
Tres veces el cuadrado de 3 es. .	27	
Tres veces el mismo número 3 es.	9	
Y la unidad.	1	

Y lo mismo se observará siempre entre dos números que se diferencien en una unidad.

—

Claro está que si un número entero no tiene raiz cúbica en enteros, no la tendrá en enteros y quebrados, porque al entrar estos últimos como factores en los cubos, darán productos con quebrados y jamás producirán el número entero de cuya raiz hacen parte.

291.

Sea el número 79507 el que nos proponemos para extraer su raiz cúbica y poner en práctica las reglas establecidas en esta pregunta.

núm. dado 79.507 | 48 triplo del cuad. de las dec.
cubo de dec. 64 | 43 raiz cubica.

155.07
. . . . . .
144 tres vec. el cuad. de dec. por unid.
108 tres vec. las dec. por el cuad. de unidades.
27 cubo de unidades.

15507 suma de estos tres productos.

00000 diferencia entre esta suma y las cifras bajadas.

He procedido en esta operacion del modo siguiente : separé las cifras del número dado de tres en tres de la derecha hácia la izquierda y dije : el mayor cubo contenido en la primera division de la izquierda es 64 que escribí debajo , y su raiz 4 que puse por primera cifra de la raiz : resté 64 de la primera division, y á la derecha de la resta 15 bajé la porcion siguiente 507 : de todo esto separé las dos últimas cifras de la derecha : divido las de la izquierda por el triple cuadrado de la primera cifra que es el 48 que se ve sobre la raiz : el cuociente 3 es la segunda cifra de la raiz que puse á la derecha de la primera : la multipliqué por el triplo de las decenas, y el producto 144 le escribí debajo de las cifras separadas : formé en seguida el producto del triplo de decenas por el cuadrado de unidades, y el resultado 108 le escribí debajo del otro producto un lugar mas á la derecha : por fin, el cubo de las unidades que es 27 le escribí debajo de los otros productos otro lugar mas á la derecha : sumé estos tres productos, y restando la suma de todas las cifras bajadas no sobró nada; por lo que veo que 43 es la raiz cúbica exacta del número propuesto. Separé las cifras de tres en tres, porque el cubo de decenas debia estar en los millares. Despues de restado y bajada la segunda porcion, separé dos, porque el triplo del cuadrado de decenas por unidades debia hallarse en las centenas. Le dividí por el triplo cuadrado de decenas para hallar las unidades, y en lo demás no he hecho otra cosa que que formar las tres partes que unidas á la primera, ya restada, debian componer el cubo de las cifras halladas, restándolo todo del número propuesto para ver si sobraba algo ó estaba concluida la operacion.

292.

Sea el número propuesto 218167208, cuya raiz cúbica nos proponemos extraer, para esclarecer lo que se advierte en esta pregunta.

	$\sqrt[3]{218.167.208}$	10800
cubo de 6.	216	602 raiz cúbica.
res. y cif. baj.	0021.672.08	
	21 600	trip. del cuad. de 60 × 2
	720	trip. de 60 × el cuad. de 2
	08	cubo de 2
	2167208	sum. de estos prod.
	0000000	resta.

En esta operacion se advierte que restado el cubo de 6 de la primera porcion, dió de residuo 2, que con la segunda porcion bajada 167 hacen 2167, y habiendo separado las dos últimas cifras quedaron 21, número que no se puede partir entre 108 que es el triplo del cuadrado de 6 : escribí cero á la raiz, añadí dos ceros al triplo del cuadrado de 6, bajé la porcion 208, y separé las dos últimas cifras. Considerando ahora al 60 como las decenas de la raiz, divido 21672 por 10800 que es triplo de su cuadrado : hallo de este modo las unidades 2, y formando los tres productos del caso, los sumo, y su suma la resto de todo lo bajado : no sobra nada, y diré que la raiz cúbica exacta del número propuesto es 602.

293.

Lo establecido en esta pregunta se funda, en que si á la raiz del número dado corresponde una unidad mas, sobrará todo lo que corresponde á este aumento y se dijo en la explicacion de la pregunta 290, y si á la raiz le corresponde menos, es claro que el cubo que se forma con una raiz mayor no se podrá restar de dicho número.

294.

Si se quiere extraer la raiz cúbica del número 3605 procederé del modo siguiente :

$\sqrt[3]{3,605}$ | 3
1 | $17 + \frac{15}{919}$ raiz cúbica aproximada.

26.05

. . . . *formacion del denominador.*

21
147 tres veces el cuadrado
343 de 17. 867
2590 tres veces el mismo 17. 51
0015 mas la unidad. 1

919

La razon que hay para dar este denominador al residuo, es que si hubieran sobrado 919, hubiera correspondido una unidad mas á la raiz (pregunta 290); luego sobrando menos, le tocará la parte correspondiente.

295.

Si la misma raiz del ejemplo anterior la hubiera querido continuar por decimales :

```
                       86700 trip. del cuad. de 170
                       867   trip. del cuad. de 17
          3
         √3.605  |     3     trip. del cuad. de 1
           1     |    17,01
         ------- |---------
          26.05
        . . . . . .
          21
            1 47
            3 43
          -------
           25 90
          -------
1er residuo. . . 00 150.000.00
                 . . . . . . . .
                    86 700
                        510
                         01
                    ---------
                    86.75101
                    ---------
2o residuo. . . . . 73 24899
```

A la derecha del residuo 15 añadí tres ceros, y como despues de separadas dos cifras no pude dividir las restantes entre 867, puse el signo decimal á la derecha de la raiz entera y un cero en las décimas : añadí otros tres ceros, separé dos, y por el método ordinario hallé otra cifra de la raiz que es 1, y no deseando mas aproximacion, digo que la raiz que busco aproximada hasta las centésimas es 17,01. La razon de añadir tres ceros por cada decimal que se quiere obtener, es que cualquier número de cifras decimales en la raiz, da un número triplo de ellas en el cubo, y viceversa.

296, 297 y 298.

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3} \qquad \sqrt[3]{\frac{8}{10}} = \frac{2}{\sqrt[3]{10}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{10}{27}} = \frac{\sqrt[3]{10}}{3} \qquad \sqrt[3]{\frac{4}{5}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{5}}$$

Es decir, que en el primer caso los dos términos tuvieron raiz cúbica exacta; en el segundo la tuvo solo el numerador y se dejó indicada la del denominador; en el tercero la tuvo el denominador, y se dejó indicada la del numerador; y en el cuarto no la tuvo ningun término y se dejaron indicadas.

—

Cuando ninguno de los dos términos tiene raiz exacta, los multiplicaré por el cuadrado del que se quiere que la tenga.

$$\sqrt[3]{\frac{6}{10}} = \sqrt[3]{\frac{6 \times 36}{10 \times 36}} = \sqrt[3]{\frac{216}{360}} = \frac{6}{\sqrt[3]{360}}.$$

En este caso he querido que el numerador tenga raiz exacta, y he multiplicado sus dos términos por 36 que es el cuadrado de dicho número, formando así un numerador 216 que tiene raiz exacta, y un denominador 360 que no la tiene y dejaré indicada.

Por decimales lo hubiera hecho de este otro modo :

$$\sqrt[3]{\frac{6}{10}} = \frac{1,8}{2,1} = \frac{18}{21} \text{ próximamente}$$

Extraje la raiz aproximada hasta las decimales y suprimí los signos, de cuyo modo hallo la raiz aproximada en un quebrado comun. Este es el método mas recomendable por la sencillez del resultado á que conduce.

299.

$$\sqrt[3]{2 + \frac{10}{27}} = \sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \frac{4}{3} = 1 + \tfrac{1}{3}$$

La confrontacion de la regla con este ejemplo es fácil, y no necesita mas explicacion.

300 y 301.

Se quiere extraer la raiz cúbica de 0,41 y se procederá del modo siguiente :

$$\begin{array}{r|l}
0,410 & 1\ 47 \\
343 & 0,74\ldots \text{ raiz aproximada} \\
\hline
0670.00 & \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\
588 & \\
336 & \\
64 & \\
\hline
62224 &
\end{array}$$

Añadí un cero á las cifras decimales para completar tres cifras: escribí cero y signo decimal en la raiz: procedí á buscar cifras de la raiz por los medios conocidos, y al llegar á la segunda 4, que son centésimas, he suspendido la operacion, y digo que la raiz aproximada de 0,41 es próximamente 0,74, mayor que su cubo, como sucede siempre en las fracciones propias que disminuyen á proporcion que se multiplican por otras propias ó por sí mismas.

—

Si el número hubiera sido compuesto de enteros y decimales, como por ejemplo 88,9, hubiéramos procedido del modo siguiente:

```
√88,900 | 4 8
 64     | 4.4
-------  -----
 249.00
 199
  192
    64
-------
 21 184
```

Completando hasta tres las decimales, hallando la raiz de los enteros y poniendo el signo decimal, bajando los decimales y procediendo en lo demás como se ha enseñado. No he querido continuar la operacion mas allá de las décimas, y digo que la raiz cúbica aproximada de 88,9 es 4,4.

302 y 303.

Supongamos que se quiere saber cuál será el largo, ancho y profundidad todos iguales que se ha de dar á un algibe para que contenga 2113 varas, 15 piés y 864 pulgadas cúbicas de agua. Diré así :

$$\sqrt{2113 \text{ var. } 15 \text{ piés, } 864 \text{ pulg.}} = \sqrt{\frac{98610912}{46656} \begin{matrix}\text{var.}\\ \text{cúb.}\end{matrix}}$$

cuya raiz cuadrada es aproximadamente $\frac{463}{36}$ $\begin{matrix}\text{varas}\\ \text{lineales.}\end{matrix}$

que hacen 12 varas, 2 piés y 6 pulgadas, ancho, largo y profundidad que se ha de dar al algibe.

Al reducir el número denominado á quebrado se hizo uso de la division de solidez, por la cual la vara tiene 27 piés y el pié 1728 pulgadas cúbicas; mas al averiguar el valor del quebrado raiz, se hizo uso de la division lineal, por la que la vara tiene 3 piés y el pié 12 pulgadas.

NOTA.

Siempre que se multiplican las tres dimensiones de un cuerpo ó vacío, ancho, largo y altura ó profundidad, el producto resulta expresado en unidades cúbicas; mas al hallar la raiz cúbica se supone que ella es el ancho, es el largo y es el alto ó profundidad del vacío ó sólido propuesto.

Supongo que una sala tiene 8 varas de largo, 4 de ancho y 2 de alto : diré que tiene $8 \times 4 \times 2 = 64$ varas cúbicas de capacidad; pero si busco la raiz cúbica de 64 que es 4, dicho número será el largo, el ancho y el alto que debe darse á la sala.

Claro está que si hay tres números que multiplicados entre sí den un producto igual al cubo de una raiz, se podrán emplear las dimensiones que ellos expresen, para obtener el mismo resultado : así la misma capacidad tendrá un algibe que mida 9 varas de largo, 8 de ancho y 3 de profundidad, que otro que tenga 6 varas por cada una de las referidas dimensiones; porque en efecto

$$9 \times 8 \times 3 = 6 \times 6 \times 6 = 6^3.$$

LECCION XXIV.

DE LAS RAZONES Y PROPORCIONES.

304. *P.* Qué se entiende por razon en las matemáticas?

R. Es la comparacion de dos cantidades.

305. *P.* En qué se dividen?

R. En aritméticas y geométricas.

306. *P.* Cuándo se llama la razon aritmética?

R. Cuando se atiende á la diferencia de las dos cantidades que se comparan.

307. *P.* Cuándo es la razon geométrica?

R. Cuando se atiende á las veces que la una cantidad contiene á la otra.

308. *P.* Cómo se llaman las cantidades que se comparan?

R. Términos de la razon; distinguiéndose con los nombres de primero y segundo, por el órden en que se escriben.

309. *P*. Qué otros nombres se les dan á los términos de la razon?

R. El primero se llama antecedente y el segundo consecuente.

310. *P*. Cómo se escriben las razones?

R. Colocando entre el antecedente y consecuente un punto si la razon es aritmética, y dos puntos si fuere geométrica, cuyos signos en uno ú otro caso se leen diciendo : *es á*.

311. *P*. Qué es exponente de una razon?

R. Es la diferencia ó cuociente que resulta de la comparacion de sus dos términos.

312. *P*. Cómo se halla el exponente de la razon aritmética?

R. Restando el consecuente del antecedente.

313. *R*. Y cómo se halla el exponente de la razon geométrica?

R. Dividiendo el antecedente entre el consecuente.

314. *P*. Cuándo se dice que dos razones son iguales?

R. Cuando tienen exponentes iguales.

315. *P*. Cuál de dos razones será mayor?

R. La que tenga mayor exponente.

316. *P*. Qué es razon de igualdad, de mayor y de menor desigualdad.

R. Se llama la razon de igualdad, cuando el antecedente es igual al consecuente : de mayor desigualdad, cuando el antecedente es mayor que el consecuente; y de menor desigualdad cuando el antecedente es menor que el consecuente.

317. *P.* Qué alteracion se puede hacer en una razon aritmética sin alterar el valor de su exponente?

R. Se puede añadir ó quitar á sus dos términos una misma cantidad.

318. *P.* Qué alteracion se puede hacer en una razon geométrica sin que varíe el valor de su exponente?

R. Se pueden multiplicar ó dividir sus dos términos por un mismo número.

319. *P.* A qué es igual la razon aritmética?

R. A un residuo cuyo minuendo es el antecedente y el sustraendo el consecuente.

320. *P.* A qué es igual toda razon geométrica?

R. A un quebrado cuyo numerador es el antecedente y su denominador el consecuente.

321. *P.* Cuándo se dice que una razon es inversa de otra?

R. Cuando resulta igual á ella mudando el lugar de sus términos.

322. *P.* Qué es proporcion?

R. La comparacion de dos razones iguales, y se llaman aritméticas ó geométricas, segun sean aritméticas ó geométricas las razones que se comparan.

323. *P.* De cuántos términos consta una proporcion?

R. De cuatro, que son: 1º el antecedente de la primera razon; 2º su consecuente; 3º el antecedente de la segunda razon, y 4º su consecuente.

324. *P.* Qué otros nombres toman los términos de una proporcion?

R. El 1º y el 4º se llaman tambien extremos; y el 2º y 3º se llaman medios.

325. *P.* Qué signo se usa para la proporcion?

R. Si las razones que se comparan son aritméticas, se colocan entre ellas dos puntos : y si son geométricas, cuatro puntos : y en uno y otro caso se pronuncian, *como.*

326. *P.* Qué es proporcion discreta?

R. Aquella que tiene los medios desiguales.

327. *P.* Y qué es proporcion continua?

R. Aquella en que los medios son iguales, ó lo que es lo mismo, cuando el consecuente de la primera razon sirve de antecedente á la segunda.

328. *P.* Cómo se escriben las proporciones continuas?

R. Con solo tres términos que se llaman extremos y medio; y para indicar que este se considera repetido, se antepone á la proporcion continua este signo ÷ si es aritmética, ó este otro ∺ si es geométrica.

329. *P.* Qué propiedad se observa en la proporcion aritmética discreta?

R. Que la suma de los extremos es igual á la suma de los medios.

330. *P.* Y en la proporcion aritmética continua?

R. Que la suma de los extremos es igual al duplo del término medio.

331. *P.* Qué propiedad se observa en la proporcion geométrica discreta?

R. Que el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

332. *P.* Y en la proporcion geométrica continua?

R. Que el producto de los extremos es igual al cuadrado del término medio.

333. *P.* Cómo se halla un término de una proporcion aritmética discreta cuando se conocen los otros tres?

R. Si lo que se busca es medio, se suman los extremos y se resta de la suma el medio conocido; pero si lo que se busca es extremo, se suman los medios y de la suma se resta el otro extremo.

334. *P.* Cómo se halla un término de la proporcion aritmética continua cuando se conocen los otros dos?

R. Si lo que se busca es medio, se suman los extremos, y de la suma se saca la mitad; y si es extremo, se duplica el término medio, y de este duplo se resta el extremo conocido.

335. *P.* Cómo se halla un término de la proporcion geométrica discreta conociendo los otros tres?

R. Si es medio, se multiplican entre sí los extremos, y el producto se divide entre el medio conocido; pero si es extremo, se multiplican los medios y el producto se divide entre el otro extremo.

336. *P.* Cómo se halla un medio de la proporcion geométrica continua conocidos los otros dos?

R. Si es medio, se multiplican entre sí los extremos, y del producto se extrae la raiz cuadrada; pero si lo que se busca es extremo, se cuadra el término medio, y este cuadrado se divide por el extremo conocido.

337. *P.* Cómo se expresa el término que se busca?

R. Por medio de una X que se escribe en el lugar que corresponda á dicho número.

338. *P.* Qué quiere decir alternar, invertir y permutar los términos de una proporcion?

R. Alternar es cambiar de lugar los medios: invertir mudar de lugar los términos en cada razon, y permutar es mudar de lugar las razones.

339. *P.* De cuántos modos se pueden escribir los términos de una proporcion, ya sea aritmética ó geométrica, sin que deje de ser la suma ó el producto de los medios igual á la suma ó el producto de los extremos?

R. Alternando, invirtiendo y permutando se pueden dar ocho formas diferentes á una proporcion, sin que dejen de subsistir dichas condiciones.

340. *P.* Para qué se alternan, invierten y permutan los términos de una proporcion?

R. Para hacer pasar el término desconocido al cuarto lugar, si no lo está.

341. *P.* Qué otras trasformaciones admite la proporcion geométrica discreta?

R. Varias; pero la mas interesante es la de poderse multiplicar ó dividir por un mismo número un extremo y cualquiera de los medios, sin que por esto deje de subsistir la proporcion.

Explicaciones y Ejemplos.

304 á 310.

Si el número 42 se desea comparar aritméticamente con el número 37 se escriben así :

42.37, lo cual se lee diciendo, 42 es á 37. En cuyo ejemplo 42 es el primer término ó antecedente y 37 el segundo término ó consecuente.

—

Si el número 36 se quiere comparar con el número 18 geométricamente, se escribirá de este modo:

36 : 18, lo cual se lee diciendo, 36 es á 18. Donde el 36 es primer término ó antecedente y 18 es el segundo término ó consecuente.

311 á 313.

Supuesto que el exponente de la razon aritmética se halla restando el consecuente del antecedente, es necesario advertir que cuando el consecuente es mayor, se resta al contrario y se antepone al exponente el signo *menos*, para indicar que no solo no es mayor el antecedente, sino que le falta aquella cantidad para igualar al consecuente.

Lo harémos patente presentado varias razones con sus exponentes.

3.2 su exponente es 1
3.3 su exponente es 0
3.4 su exponente es — 1

El primero de los exponentes se halló restando 2 de 3 y quedó 1. El segundo restando 3 de 3 y quedó 0. El tercero no pudiéndose restar segun la regla, lo hice á la inversa y le antepuse el signo menos, resultando — 1, que se lee *menos uno*.

Estos exponentes se llaman negativos, nombre que se aplica en general á las cantidades afectadas del signo menos, cuyo conocimiento pertenece al álgebra.

—

En cuanto á los exponentes de las razones geométricas, solo hay que advertir que, cuando el antecedente no es exactamente divisible entre el consecuente, se expresa el exponente por medio de un quebrado que, como sabemos, no es mas que una division indicada.

Sirvan de ejemplo las siguientes razones :

12 : 4 su exponente es 3
15 : 4 su exponente es $\frac{15}{4}$
4 : 6 su exponente es $\frac{4}{6}$
6 : 6 su exponente es 1

En la primera y última de estas razones ha sido exactamente divisible el antecedente entre el consecuente resultando los exponentes enteros; mas en la segunda y tercera, no siendo exactamente divisibles los antecedentes entre los consecuentes, han resultado dos quebrados, aunque el uno es impropio y el otro es propio.

314.

Para esclarecer la materia de esta pregunta propondrémos los siguientes ejemplos :

$$6 \,.\, 4 = 7 \,.\, 5 \quad | \quad 8 \,.\, 11 = 9 \,.\, 12$$

Las primeras de estas razones aritméticas son iguales, porque tienen el mismo exponente que es 2, y las segundas tambien lo son, porque tienen por exponente á — 3.

$$28 : 4 = 42 : 6 \quad | \quad 3 : 9 = 7 : 21$$

Las primeras de estas razones geométricas son iguales, porque tienen el mismo exponente que es 7. Respecto á las segundas el exponente de la una es 3 novenos y el de la otra 7 veinte y un avos, cuyos quebrados son iguales, como se puede ver reduciéndolos á un comun denominador, y por tanto se dice que las razones son iguales.

315.

La razon aritmética 6 . 2 es mayor que la razon 4 . 3, porque el exponente de la primera es 4 y el de la segunda es 1.

La razon geométrica 12 : 3 es mayor que la razon 6 : 3, porque el exponente de la primera es 4 y el de la segunda es 2.

316.

La razon 8 : 4 es de mayor desigualdad,
la razon 6 : 6 es de igualdad, y
la razon 4 : 7 es de menor desigualdad.

317.

Las razones aritméticas 6 . 5 y 3 . 2 subsistirán aun cuando se les agregue ó quite un mismo número á sus términos : así

$$6\ .\ 5 = 6 + 2\ .\ 5 + 2 = 6 - 2\ .\ 5 - 2$$
$$3\ .\ 2 = 3 + 1\ .\ 2 + 1 = 3 - 1\ .\ 2 - 1$$

318.

Las razones geométricas 6 : 3 y 8 : 12 subsistirán sin mudar de valor aun cuando se multipliquen ó dividan sus términos por un mismo número, de este modo :

$$6 : 3 = 6 \times 2 : 3 \times 3 \mid \tfrac{6}{2} : \tfrac{3}{2}$$
$$8 : 12 = 8 \times 5 : 12 \times 5 = \tfrac{8}{5} : \tfrac{12}{5}$$

319 y 320.

La razon aritmética 5 . 2 equivale al residuo 5 — 2, y la razon geométrica 8 : 4 equivale al cuociente de 8 partido entre 4, de este modo :

$$5\ .\ 2 = 5 - 2 \qquad\qquad 8 : 4 = \tfrac{8}{4}$$

321.

La razon 4 : 6 es inversa de la razon 6 : 4, porque si se cambian los términos de la una resulta igual á la otra.

322 á 325.

Con las razones aritméticas 7 . 4 y 5 . 2, cuyos exponentes son iguales, se puede formar una proporcion aritmética de este modo :

7 . 4 : 5 . 2

donde los números 4 y 5 se llaman medios y los números 7 y 2 extremos.

—

Con las razones geométricas 12 : 3 y 4 : 1, cuyos exponentes son iguales, se puede formar proporcion así :

12 : 3 :: 4 : 1

se leerá diciendo : 12 es á 3 como 4 es á 1, y los números 12 y 1 serán los extremos y 3 y 4 los medios de esta proporcion. Lo mismo se leen las aritméticas.

326 á 328.

Esta proporcion 6 . 4 : 5 . 3 se llama discreta, porque los medios son desiguales.

Esta otra 9 . 7 : 7 . 5 es continua, porque los medios son iguales.

La proporcion 8 : 4 :: 6 : 3 es discreta, y la proporcion 8 : 4 :: 4 : 2 es continua.

Las dos proporciones continuas se escribirán así:

$$\div 9 . 7 . 5 \quad | \quad \div\!\div 8 : 4 : 2$$

y se leen: 9 es á 7 como el mismo 7 es á 5, y 8 es á 4 como el mismo 4 es á 2.

En la proporcion aritmética se dice que 7 es el medio proporcional aritmético y 9 y 5 los extremos, y en la geométrica se dice que 4 es el medio proporcional geométrico y 8 y 2 son los extremos.

329 y 330.

En la proporcion aritmética discreta $3 . 5 : 2 . 4$ se verificará que $3 + 4 = 5 + 2$.

En la proporcion continua aritmética $\div 5 . 4 . 3$ se verificará que $5 + 3 = 2 \times 4$.

331 y 332.

En la proporcion geométrica discreta $8 : 12 :: 2 : 3$ se tendrá que $8 \times 3 = 12 \times 2$.

En la proporcion continua geométrica $\div\!\div 9 : 3 : 1$ tendrémos que $9 \times 1 = (3)^2$.

Estas propiedades son generales, y siempre que ellas subsistan, los números con que se verifican estarán en proporcion.

Así, si $3 + 4 = 5 + 2$ y $8 \times 3 = 2 \times 12$, podré escribir dichos números en forma de proporcion, con tal que los que están á un lado del signo igual sirvan de medios, y los que están al otro lado de extremos.

333 y 334.

Para poner en práctica las reglas que en estas preguntas se establecen, bastará presentar el termino desconocido en todos los lugares que puede hallarse, y á continuacion el modo de averiguar su valor en cada clase de proporcion. Principiarémos por las aritméticas discretas.

$$6 . 5 : 4 . X \;.\;.\;.\;.\;.\; X = 4 + 5 - 6 = 3$$
$$6 . 5 : X . 3 \;.\;.\;.\;.\;.\; X = 6 + 3 - 5 = 4$$
$$6 . X : 4 . 3 \;.\;.\;.\;.\;.\; X = 6 + 3 - 4 = 5$$
$$X . 5 : 4 . 3 \;.\;.\;.\;.\;.\; X = 5 + 4 - 3 = 6$$

—

Presentarémos ahora los casos que pueden ocurrir en la proporcion aritmética continua y sus resoluciones.

$$\div 11 . 8 . X \;.\;.\;.\;.\;.\; X = (2 \times 8) - 11 = 5$$
$$\div 11 . X . 5 \;.\;.\;.\;.\;.\; X = \frac{11+5}{2} = 8$$
$$\div X . 8 . 5 \;.\;.\;.\;.\;.\; X = (2 \times 8) - 5 = 11$$

En la primera y última he duplicado el término medio y restado el extremo conocido, y en la segunda he sumado los extremos y sacado la mitad.

335 y 336.

Para ejercitarnos en el modo de hallar un término cualquiera en la proporcion geométrica, empezarémos por las discretas siguientes :

$$8 : 4 :: 6 : X \ldots\ldots X = \frac{4 \times 6}{8} = 3$$

$$8 : 4 :: X : 3 \ldots\ldots X = \frac{8 \times 3}{4} = 6$$

$$8 : X :: 6 : 3 \ldots\ldots X = \frac{8 \times 3}{6} = 4$$

$$X : 4 :: 6 : 3 \ldots\ldots X = \frac{4 \times 6}{3} = 8$$

—

Presentarémos ahora los tres casos que pueden ocurrir en la proporcion geométrica continua.

$$\div 8 : 4 : X. \ldots\ldots X = \frac{(4)^2}{8} = 2$$

$$\div 8 : X : 2. \ldots\ldots X = \sqrt{8 \times 2} = 4$$

$$\div X : 4 : 2. \ldots\ldots X = \frac{(4)^2}{2} = 8$$

En la primera y última he cuadrado el término medio y dividido por el extremo conocido, y en la segunda he multiplicado los extremos y extraido la raiz cuadrada.

337 á 340.

A la proporcion 6 : 3 :: 8 : 4 se le podrán dar las ocho formas siguientes :

1ª Proporcion primitiva. . 6 : 3 :: 8 : 4
2ª Alternando la primera. 6 : 8 :: 3 : 4
3ª Invirtiendo la primera. . 3 : 6 :: 4 : 8

4ª Alternando la tercera. .	3 : 4 :: 6 : 8
5ª Permutando la primera.	8 : 4 :: 6 : 3
6ª Alternando la quinta. .	8 : 6 :: 4 : 3
7ª Invirtiendo la quinta. .	4 : 8 :: 3 : 6
8ª Alternando la séptima.	4 : 3 :: 8 : 6

—

Esto supuesto, si tuviésemos la proporcion $x : 9 :: 2 : 6$, para hacer pasar la x al cuarto término, haríamos las trasformaciones siguientes :

Proporcion primitiva. . . .	$x : 9 :: 2 : 6$
Permutando.	$2 : 6 :: x : 9$
Invirtiendo	$6 : 2 :: 9 : x$

Y por el mismo estilo se procederá en todos los casos semejantes.

341.

Como en la proporcion geométrica se puede hacer pasar el término desconocido al cuarto lugar, su valor depende entonces del producto de los medios partido por el extremo conocido; de modo que los medios entran como factores del numerador, y el extremo como denominador del quebrado que expresa el valor del cuarto término. Esta es la razon que hay para poder multiplicar ó partir un extremo y un medio por un mismo número, sin que se altere el valor del otro extremo.

La ventaja que de esta propiedad resulta es la simplificacion de las proporciones; pongamos un ejemplo :

Proporcion primitiva. . . .	$60 : 48 :: 20 : x$
Dividiendo por 10 el 1º y 3er términos.	$6 : 48 :: 2 : x$
Dividiendo por 6 al 1º y 2º	$1 : 8 :: 2 : x$

expresion muy sencilla, donde sin necesidad de cálculo se conoce el valor de x.

—

Tambien se evitan los quebrados de este modo:

Proporcion primitiva. . . .	$5 : 8\frac{1}{2} :: 9 : x$
Reduciendo á medios el 1º y 2º términos.	$\frac{10}{2} : \frac{17}{2} :: 9 : x$
Suprimiendo los denominadores, que equivale á multiplicar por 2 el 1º y 2º términos.	$10 : 17 :: 9 : x$

—

Las decimales pueden evitarse haciendo que el extremo y el medio que se quiera tengan un número igual y suprimiendo los signos:

Proporcion primitiva. . . .	$8,5 : 7 :: 3,25 : x$
Igualadas las decimales del 1º y 3er términos. . . .	$8,50 : 7 :: 3,25 : x$
Suprimidos los signos. . .	$850 : 7 :: 325 : x$
Dividiendo entre 5 al 1º y 2º	$170 : 7 :: 65 : x$
Dividiéndolos otra vez por 5.	$34 : 7 :: 13 : x$

NOTA.

Aunque lo expuesto es suficiente para la simplificacion de las operaciones que pueden ofrecerse en los cálculos, es necesario que los alumnos se ejerciten en los infinitos casos á que son aplicables estas reglas, cuyo uso es de la mayor utilidad.

LECCION XXV.

DE LA REGLA DE TRES SIMPLE Y COMPUESTA.

342. *P.* Qué es regla de tres ó de proporcion?

R. Es la que enseña á hallar un número por las relaciones de proporcion que tiene con otros conocidos.

343. *P.* En qué se dividen las reglas de tres?

R. En simples y compuestas.

344. *P.* Qué es regla de tres simple?

R. Es aquella en que el resultado depende solo de tres cantidades conocidas.

345. *P.* Y compuesta?

R. Se llama así cuando el resultado depende de mas de tres datos proporcionales.

346. *P.* Cómo se llaman las cantidades que entran en una cuestion de regla de tres simple?

R. En semejantes cuestiones se dan conocidas dos cantidades de una misma especie, y otra de la especie de la que se busca, y para distinguirlas, llamamos á las primeras *causas ó datos*, y á la cantidad de la misma especie de la que se busca y á esta última, las llamamos *efectos ó resultados*. Tambien se distingue con el nombre de *primer dato* el que produjo el resultado conocido, y *segundo dato* el correspondiente al resultado que se busca.

347. *P*. Qué otra division admiten las reglas de tres?

R. Tambien pueden ser directas ó inversas.

348. *P*. Cuándo se llama la regla de tres directa?

R. Cuando aumentando ó disminuyendo los datos, aumentan ó disminuyen igualmente los resultados.

349. *P*. Cuándo se llama la regla de tres inversa?

R. Cuando aumentando los datos disminuyen los resultados, ó cuando disminuyendo los datos aumentan los resultados : es decir, cuando á los efectos les sucede lo contrario que á las causas.

350. *P*. Cómo se plantea una regla de tres simple directa?

R. Diciendo : el primer dato es á su resultado, como el segundo dato es al resultado que se busca.

351. *P*. Cómo se plantea cuando es inversa?

R. Diciendo : el segundo dato es al primer resultado, como el primer dato es al resultado que se busca.

352. *P*. Cómo se resuelven las reglas de tres simples despues de planteadas?

R. Multiplicando el segundo término por el tercero, y partiendo el producto entre el primero.

353. *P*. Cómo se llaman las cantidades que entran en una regla de tres compuesta?

R. Se llaman cantidades del primer miembro á los datos que corresponden al resultado conocido, y tambien á este; y se llaman cantidades del segundo miembro á los datos que corresponden al resultado que se busca, y á este último. Tambien se llaman datos homólogos los que son de una misma especie en uno y otro miembro.

354. *P.* De cuántas partes consta la resolucion de una regla de tres compuesta?

R. De tres, que son ordenacion, planteo y resolucion.

355. *P.* Cómo se ordenan las reglas de tres compuestas?

R. Haciendo que en ambos miembros estén los datos homólogos colocados en el mismo órden, siendo el último término del primer miembro el resultado conocido, y el último término del segundo miembro una x que representa al resultado que se busca.

356. *P.* Cómo se plantea la regla de tres compuesta?

R. De las cantidades que estén en razon directa con los resultados pondré el primer dato en el primer miembro, y el segundo dato en el segundo miembro; pero de las cantidades homólogas que estén en razon inversa con los resultados pasaré el segundo dato al primer miembro, y el primer dato al segundo miembro.

357. *P.* Cómo se resuelve en este estado la regla de tres compuesta?

R. Diciendo: el producto de los datos que están en el primer miembro es al resultado conocido, como el producto de los datos que están en el segundo miembro es al resultado que se busca.

358. *P.* Qué simplificacion puede hacerse antes de hallar el cuarto término?

R. La de quitar cuantos factores comunes haya entre el primero y segundo, ó entre el primero y tercer términos de esta proporcion.

359. *P*. Qué otra operacion debe preceder algunas veces á la resolucion de la regla?

R. Como suele suceder que los datos homólogos en uno y otro miembro pueden estar expresados por unidades de diferente especie, aunque relativas á un mismo género, deben reducirse á una misma especie antes de proceder á la resolucion.

Ejemplos para la práctica.

342 á 345.

Si se desea saber cuántas varas de labor harán 8 hombres, suponiendo que en el mismo tiempo se han hecho 12 varas por 10 hombres, la cuestion se resolverá por una regla de tres simple; porque el resultado depende de sus relaciones con tres cantidades conocidas.

Pero si se desea saber cuántas varas de labor harán 8 hombres en 6 dias, suponiendo que 10 hombres en 9 dias han hecho 12 varas, la cuestion se resolverá por medio de una regla de tres compuesta, por depender el resultado de sus relaciones con mas de tres cantidades conocidas.

346.

Explicarémos cuáles son los datos ó causas y los resultados ó efectos en la cuestion siguiente. Si 8 *hombres* hacen en cierto tiempo 20 *varas* de labor : 12 *hombres* en igualdad de tiempo y de todas las demás circunstancias, ¿cuántas *varas* harán?

Observo que hay dos cantidades conocidas de la especie *hombres*, luego *hombres son los datos*.

Veo otra cantidad conocida de la misma especie que la que se busca *varas*; luego *varas son los resultados*.

El *primer dato* es 8 hombres; porque *corresponde al resultado conocido* que es 20 varas.

El *segundo dato* es 12 hombres; porque *corresponde al resultado que se busca*.

347 á 349.

Si en 6 dias se pueden construir 30 vestuarios, en 4 dias, ¿cuántos se podrán construir?

Hé aquí una cuestion que da lugar á una regla de tres *directa*, porque á *los vestuarios* les sucederá *lo mismo que á los dias*, es decir, que si aumentan los dias aumentará el número de vestuarios, y si disminuyen los dias disminuirá el número de los vestuarios.

—

Si á 10 hombres les dura 20 dias cierta cantidad de comida, á 15 hombres, ¿cuántos dias les durará?

Esta cuestion dará lugar á una regla de tres inversa, porque á los *dias* les sucede *lo contrario que á los hombres*, es decir, que si los hombres aumentan disminuirá el número de los dias, y si los hombres disminuyen aumentará el número de los dias.

350 á 352.

Si en 10 años he ganado por mi sueldo 8.000 pesos, en 6 años, ¿cuánto ganaré?

$$10^a : 8.000^p :: 6^a : x^p$$
$$x = \frac{8000 \times 6}{10} = 4800 \text{ pesos.}$$

Analizando esta cuestion, veo que años son los datos y pesos los resultados. Observo que 10 años es el primer dato por corresponder al resultado conocido, y 5 años segundo dato porque corresponde al resultado que se busca. La regla de tres á que da lugar esta cuestion es directa, porque á mas años mas pesos, ó á menos años menos pesos. La plantearé, pues, diciendo: el 1er dato es al resultado conocido, como el 2° dato al resultado que se busca; y resuelta segun la regla de la pregunta 352, hallo que ganaré 4800 pesos.

—

Trabajando 6 horas al dia, he acabado de copiar un libro en 2 semanas; si hubiera trabajado 4 horas al dia, ¿cuántas semanas hubiera empleado?

$$4^h : 2^s :: 6^h : x^s$$
$$x = \frac{2 \times 6}{4} = 3 \text{ sem.}$$

Analizando esta cuestion, hallo que el primer dato es

6 horas, el segundo dato 4 horas y el resultado conocido 2 semanas. Debe resolverse por una regla de tres inversa; porque á mas horas de trabajo menos semanas dura este, y al contrario. La plantearé, pues, diciendo : el segundo dato es al resultado conocido, como el primer dato es al resultado que se busca, y resuelta hallo que hubiera copiado el libro en 3 semanas.

353 á 357.

Para la explicacion del contenido de estas preguntas nos propondrémos el siguiente ejemplo :

Si para hacer 800 vestuarios entre 20 operarios fué necesario emplear 50 dias; ¿cuántos dias se emplearán en hacer 640 vestuarios, habiendo solo 15 operarios?

Escrita la cuestion como se ha enunciado, aparecerá en la forma siguiente :

800 vest. 20 oper. 50 dias | x dias. 640 vest. 15 oper.

Donde las cantidades de la izquierda se llaman primer miembro ó supuesto, y las de la derecha segundo miembro ó pregunta ; siendo datos homólogos 800 con 640, y 20 con 15, por ser los dos primeros vestuarios y los dos segundos operarios. El resultado conocido es 50 dias, y el que se busca está representado por x.

Ordenando la misma cuestion segun se previene en la pregunta 355, aparecerá en estos términos :

20 op. 800 vest. 50 dias | 15 op. 640 vest. x dias.

Y para plantearla segun las reglas de la pregunta 356 haré las reflexiones siguientes: los operarios están en razon inversa de los dias; luego escribiré el segundo dato en el primer miembro y el primer dato en el segundo miembro: despues observo que los vestuarios están en razon directa con los dias, por lo cual pondré cada dato en el mismo miembro en que se hallan, y resultará la cuestion trasformada en esta otra:

15 op. 800 vest. 50 dias. | 20 op. 640 vest. x dias.

En tal estado procederémos á su resolucion ó al establecimiento de la regla de tres en los términos que expresa la pregunta 357, lo cual dará:

$$15 \times 800 : 50 :: 20 \times 640 : x \text{ dias}$$

y efectuadas las multiplicaciones indicadas

$$12000 : 50 :: 12800 : x \text{ dias}$$

y hallando el valor del término desconocido

$$x = \frac{12800 \times 50}{12000} = \frac{640000}{12000} \text{ dias}$$

cuyo quebrado reducido á enteros y valuado el residuo, dará 53 dias, 8 horas para el resultado que se busca.

358 y 359.

Para poner en práctica lo establecido en estas preguntas, nos propondrémos el siguiente ejemplo:

Suponiendo que en un buque hay carne para racionar 80 hombres por 2 meses á razon de 12 onzas cada uno; ¿cuántos hombres se podrán racionar por 40 dias á razon de 1 libra por individuo?

Propuesta. 80 h. 2 mes. 12 onz. | x h. 40 dias, 1 lb.

Ordenada. 12 onz. 2 mes. 80 h. | 1 lb. 40 dias, x h.

Reducidos los datos homólogos á un denom. . .	12 on. 60 dias, 80 h. | 16 on. 40 d. x h.

Planteada. 16 onz. 40 dias, 80 h. | 12 onz. 60 dias, x h.

Resuelta. . $16 \times 40 : 80 :: 12 \times 60 : x$ homb.

Efectuadas las multiplicaciones. . .	$640 : 80 :: 720 : x$ homb.
Dividiendo por 80 el 1° y 2° términos.	$8 : 1 :: 720 : x$ homb.
Dividiendo por 8 al 1° y 2° términos.	$1 : 1 :: 90 : x = 90$ homb.

Hemos presentado este ejemplo y su resolucion enlazados y reunidos desde la propuesta de la cuestion hasta su resultado final, para que se note á un golpe de vista el procedimiento, y sirva de modelo en los demás casos semejantes que puedan ofrecerse. Veamos cómo hemos llegado á conocer el número que se buscaba.

Escrita la cuestion como se enunció, fué necesario ordenarla, es decir, colocar los datos homólogos en el mismo órden en ambos miembros.

Observando que los meses y los dias, aunque son datos homólogos, no son de una misma especie, los reduzco á dias, y lo mismo hago con las onzas y libras, reduciéndolas á onzas.

Despues he cambiado el lugar de los datos onzas y dias, pasándolos de un miembro al otro, porque ambos están en razon inversa del número de hombres.

Luego he formado la regla de tres y efectuado las multiplicaciones.

En este estado se ha presentado la ocasion de simplificar la proporcion, dividiendo primero por 80 al primero y segundo término, y luego por 8 al primero y tercero; con lo que ha quedado reducida la proporcion, en términos que, sin necesidad de cálculo, dan á conocer el valor del que se busca.

—

La juiciosa aplicacion de las reglas establecidas y el exámen atento de las cuestiones que se presentan, darán á conocer lo que debe ejecutarse en cada caso; no estando de mas advertir, que la principal dificultad de las reglas de tres consiste en conocer cuáles datos están en razon directa, y cuáles en razon inversa con los resultados; por lo cual deberá insistirse mucho por los maestros en este particular, haciendo entender al estudiante, que el ser directa ó inversa una cantidad respecto de otra no depende del valor numérico, sino de la naturaleza de las cosas y de las cuestiones. Así, por ejemplo, los hombres que trabajan estarán en razon directa con la obra que hacen, é inversa con los dias que empleen, cualquiera que sea el número de hombres, de obras y de dias. Tam bien un número de animales estará en razon directa con la yerba que comen, é inversa con los dias que dure dicha yerba. Los remeros que lleve un bote, estarán en razon inversa con el tiempo que emplea en llegar á su destino: la distancia estará en razon directa con el tiempo, etc., etc., y bien se ve que para esto no es preciso atender al valor numérico de dichas cantidades.

LECCION XXVI.

DE LA REGLA CONJUNTA Y REDUCCION DE MONEDAS, PESAS Y MEDIDAS.

360. *P.* Qué es regla conjunta?

R. Es la que sirve para reducir una cantidad de cualquiera especie á otra, por medio de varios cambios sucesivos.

361. *P.* Cómo se resuelve la regla conjunta?

R. Se escriben en columna las razones que expresan los cambios poniendo como antecedente de la primera razon el número de unidades de la especie dada que equivale á cierto número de otra especie, que será el consecuente de esta razon: el antecedente de la 2ª razon será de la misma especie que el consecuente de la 1ª; el antecedente de la 3ª de la misma especie que el consecuente de la 2ª, y así sucesivamente hasta llegar á un consecuente que sea de la especie del resultado que se busca. Hecho esto, se dirá: el producto de los antecedentes es al producto de los consecuentes cómo la cantidad primitiva es al resultado que se busca.

362. *P.* Qué simplificacion admite esta regla?

R. La de poder dividir, antes de formar los productos, un antecedente y un consecuente por un mismo número, cuantas veces se pueda, y aunque no pertenezcan á una misma razon.

363. *P.* Qué aplicaciones tiene la regla conjunta?

R. La principal es la reduccion de las monedas, pesas y medidas de una especie á otra, y las de unas naciones á las de otra por medio de ciertas relaciones establecidas para estos casos.

Explicaciones y Ejemplos.

360 y 361.

Suponiendo que hay proporcion de permutar cada 50 libras café por 100 libras azúcar, cada 4 libras azúcar por 1 libra cacao, y que por cada 25 libras cacao se pueden obtener 6 pesos, pregunto : ¿cuánto importarán 250 libras café cambiadas por azúcar, luego por cacao, y el cacao vendido al referido precio?

Cierto es que esta cuestion pudiera resolverse por otras tantas reglas de tres como permutas ó cambios han de hacerse ; pero se reducirán á una sola por medio de la regla conjunta, á la que por tal razon se le ha dado este nombre.

La establecerémos, pues, en el órden siguiente :

$$\left.\begin{array}{lll} 50 \text{ lb. café} & : & 100 \text{ lb. azúcar} \\ 4 \text{ lb. azúc.} & : & 1 \text{ lb. cacao} \\ 25 \text{ lb. cacao} & : & 6 \text{ pesos} \end{array}\right\} :: 250 \text{ lb. café} : x \text{ ps.}$$

lo cual se lee así : si 50 libras café hacen 100 libras azúcar ; si 4 libras azúcar hacen 1 libra cacao, y si 25 libras cacao valen 6 pesos : las 250 libras café, ¿cuántos pesos costarán?

Y multiplicando entre sí los antecedentes y consecuentes de las razones :

$$50 \times 4 \times 25 : 100 \times 1 \times 6 :: 250 : x$$

$$\text{ó bien. . . . } 5000 : 600 :: 250 : x$$

$$\text{y será. . . . . } x = \frac{600 \times 250}{5000} = 30 \text{ pesos.}$$

Obsérvese por este ejemplo que todo el mecanismo consiste en que el primer antecedente sea de la misma especie que la cantidad primitiva; que todo antecedente ha de ser de la misma especie que el consecuente de la razon que antecede, y que el último consecuente sea de la misma especie que la cantidad buscada.

362 y 363.

Antes de hablar de la reduccion de unas monedas del país á otras, advertirémos que esta se suele establecer al *tanto por ciento*, es decir : que por cada ciento de la moneda en demanda, se dan ciento y tantas de otra especie que lleva el mismo valor nominal; y otras veces se dice : por ejemplo, las onzas están á 17 pesos, lo que equivale á decir que por 17 pesos de plata se dan 16 en oro.

Esto supuesto, nos propondrémos averiguar cuántas onzas de oro se podrán conseguir con 660 pesos en moneda cortada ó macuquina, suponiendo que esta se cambie por pesos granadinos al 2 por ciento, y que se cambien estos pesos por moneda de oro á 18 pesos la onza.

Teniendo bien presentes las reglas establecidas y las condiciones de esta cuestion, la plantearíamos en los términos siguientes :

$$\left.\begin{array}{r} 102 : 100 \\ 18 : \ 16 \\ 16 : \ \ 1 \end{array}\right\} :: 660 : x$$

de donde formarémos esta proporcion

$$102 \times 18 \times 16 : 100 \times 16 \times 1 :: 660 : x$$

y suprimiendo el factor 16, comun á los dos términos de la primera razon

$$102 \times 18 : 100 :: 660 : x$$

hallando ahora el valor del 4º término

$$x = \frac{100 \times 660}{102 \times 18} = \frac{6600}{1836} \text{ 35 onzas, 16,16 ps.}$$

Hemos pasado de la moneda macuquina á los pesos granadinos diciendo 102 : 100. Hemos pasado de estos á los pesos en oro, diciendo 18 : 16, y para que el resultado fueran onzas, he tenido que decir 16 : 1, esto es, diez y seis pesos hacen una onza. Semejantes consideraciones pueden hacerse para aplicar esta regla segun los casos.

Las siguientes cuestiones servirán de modelo para las reducciones en que se pasa de nuestras monedas y medidas á las extranjeras, ó al contrario.

Sabiéndose que 1 onza granadina tiene 16 pesos, que cada peso tiene 20 reales de vellon españoles, que 9 de estos reales hacen 2 chelines ingleses, y que 20 chelines hacen 1 libra esterlina, pregunto, 200 onzas granadinas ¿cuántas libras esterlinas producirán por medio de estos cambios?

Las condiciones de este problema se expresarán del modo siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 1 : 16 \\ 1 : (20) \\ 9 : 2 \\ (20) : 1 \end{array}\right\} :: 200 : x$$

de cuyas razones, omitiendo el factor 20 por ser comun á los antecedentes y consecuentes, deduciré la operacion

$$9 : 32 :: 200 : x = \frac{6400}{9}$$

cuyo quebrado reducído á enteros y valuado el residuo, da por resultado

711 ls. esterl. 2,2 chelines.

—

Supongamos, por último, que sabiéndose que la yarda, medida inglesa, tiene 3 piés; que el pié inglés equivale á 1,09 piés de nuestra medida, y que 3 piés nuestros equivalen á 1 vara; se pregunta, una pieza de género que tiene marcadas 28 yardas ¿cuántas varas debe medir?

Estableciendo la cuestion como se ha enseñado tendrémos.

$$\begin{array}{r} 1 : (3) \\ 100\ (1) : (1{,}09)\ 109 \\ (3) : \ 1 :: \quad 28 : x \end{array}$$

He suprimido el factor 3 por ser comun á los antecedentes y consecuentes. He suprimido el signo decimal en 1,09 convirtiéndole en 109, y como esto es hacerle cien veces mayor, he hecho de un 1 en los antecedentes un 100. Ahora la proporcion que se forme será :

$$100 : 109 :: 28 : x = \frac{109 \times 28}{100}$$

cuyo quebrado reducido á enteros despues de efectuada la multiplicacion de los factores de su numerador, da por resultado

30,52 varas.

—

Antes de concluir la explicacion de esta regla, dirémos algo relativamente al uso que ella tiene en los *arbitrajes ó negocios de cambios*. Los capitalistas pueden hacer grandes ganancias con solo pasar sus fondos de un país á otro siempre que sea ventajoso el cambio, para lo cual en los pueblos muy comerciales se publican unas noticias que se llaman cuotas de cambios y contienen el estado de ellos en las principales plazas de comercio. Por cambio se entiende el número de monedas de una nacion que se estima como equivalente de otro número de monedas de la otra : el uno de estos dos números es fijo; mas el otro varía, y asi se dice el cambio sube, el cambio baja ó está á la par segun se da menos ó mas, ó el número que representa el valor intrínseco equivalente á la cantidad fija de una de las dos naciones. La variacion del cambio depende de la mayor ó menor necesidad que hay de poner fondos en un país ó plaza de comercio, y la regla conjunta suministra los medios de averiguar las ventajas ó desventajas que resultarian de hacer pasar fondos de una á otra parte.

LECCION XXVII.

DE LA REGLA DE COMPAÑÍA SIMPLE Y CON TIEMPO.

364. *P.* Qué es regla de compañía simple?

R. La que enseña á distribuir la ganancia, pérdida ó existencias de un negocio entre dos ó mas socios ó compañeros, con proporcion al capital ó accion de cada uno.

365. *P.* Cómo se resuelve la regla de compañía simple?

R. Se suman todos los capitales, ó los números que representan las acciones de cada socio; y para saber lo que corresponde á cada uno, se dice: la suma de capitales es á la ganancia ó pérdida total, como el capital del primero es á la ganancia ó pérdida que le corresponde; y lo mismo se hará respecto de los demás que hubiese.

366. *P.* Qué es regla de compañía con tiempo?

R. Es la que sirve para distribuir entre varios compañeros la ganancia ó pérdida habida en un negocio, con proporcion de sus capitales y del tiempo que los tuvieron en el fondo de la sociedad.

367. *P.* Cómo se resuelve la regla de compañía con tiempo?

R. El capital de cada socio se multiplica por el tiempo que le tuvo en la compañía, y considerando estos productos como capitales, se dice: la suma de productos es á la ganancia ó pérdida total, como el producto correspondiente á cada uno es á su ganancia ó pérdida.

368. *P.* Qué debe practicarse cuando algun socio despues de haber introducido su capital le aumenta, ó retira una parte de él?

R. Debe hacerse la cuenta del tiempo que ha tenido el capital primitivo y multiplicarle por este; luego se ve el tiempo que ha subsistido el capital aumentado ó disminuido y tambien se multiplica: esto se hace cuantas veces haya innovacion en el capital, y sumando los diversos productos que resulten, la suma entrará como producto correspondiente á aquel socio para deducir su parte en la ganancia ó pérdida.

Explicaciones y Ejemplos.

364 y 365.

En cierta compañía de cuatro individuos se ganaron 3454 pesos: el capital que habia puesto el 1° eran 1000 pesos, el 2° habia puesto 1500 pesos, el 3° 3000 pesos y el 4° 2500 ps. Se pregunta ¿cuánto corresponde á cada uno?

Dispondré la operacion del modo siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 1^{o} - 1000 \\ 2^{o} - 1500 \\ 3^{o} - 3000 \\ 4^{o} - \underline{2500} \\ 8000 \end{array}\right\} \text{la ganancia 3454 pesos.}$$

$$\begin{array}{lrl} 8000 : 3454 :: 1000 : x = & 431,75 & \text{gan. del } 1^{o} \\ 8000 : 3454 :: 1500 : x = & 647,62 & \text{del } 2^{o} \\ 8000 : 3454 :: 3000 : x = & 1295,25 & \text{del } 3^{o} \\ 8000 : 3454 :: 2500 : x = & \underline{1079,38} & \text{del } 4^{o} \end{array}$$

suma de gan. igual á la total 3454,00

Habiendo sumado los capitales, he dicho para cada socio: *suma de capitales es á ganancia total, como el capital de cada socio á la ganancia que le corresponde.*

—

Á veces se le da accion en las utilidades de un negocio á algun individuo que no ha puesto capital, pero que auxilía con sus conocimientos ó con su trabajo personal á hacer productivo el de los demás. Sirva de ejemplo el caso siguiente:

Tres individuos han hecho compañía: el 1º dió para la especulacion 2,000 pesos, el 2º no pone capital; mas por hallarse encargado del manejo y direccion del negocio se le concede la mitad de las utilidades, y el 3º dió 1,500 pesos. Han ganado 2,800, y se pregunta: ¿cuánto corresponde á cada uno?

Supuesto que al que no puso capital le corresponde la mitad de utilidades, claro está que él solo representa tanto como los otros dos, es decir : $2000 + 1500 = 3500$ pesos ; y que los otros representarán segun sus capitales de este modo :

$$\left.\begin{array}{l} 1^{\circ}\ 2000 \\ 2^{\circ}\ 3500 \\ 3^{\circ}\ 1500 \end{array}\right\}\ \text{ganancia total 2800 pesos}$$

7000 suma figurada de capitales.

Y hechas las proporciones para cada socio, se hallará corresponderle al 1° 800, al 2° 1400 y al 3° 600 pesos.

Por unos métodos semejantes se resolverán las cuestiones que ocurran de compañía simple.

366 y 367.

Emprendió cierto sugeto un negocio con un capital de 1000 pesos el 1° de enero, y el 1° de marzo se le asoció otro individuo que introdujo en compañía 1500 pesos : en 1° de junio se asoció un tercer individuo con 750 pesos; pero el segundo retiró su capital el 1° de julio. Por fin, el 31 de diciembre se ajustan cuentas, y habiendo una pérdida de 300 pesos, se pregunta: ¿cuánto debe corresponder á cada socio, con arreglo á sus capitales y al tiempo que en la compañía los tuvieron?

Si se examina atentamente la cuestion, se conocerá que el primer socio ha tenido su capital en la compañia 12 meses, el segundo 4 meses, y el tercero 7 meses; y en este supuesto estableceré y resolveré el problema del modo siguiente :

$$\left.\begin{array}{l} 1^{\circ}\ 1000 \text{ ps.} \times 12 \text{ meses} = 12.000 \\ 2^{\circ}\ 1500 \text{ ps.} \times \ 4 \text{ meses} = \ 6.000 \\ 3^{\circ}\ \ 750 \text{ ps.} \times \ 7 \text{ meses} = \ 5.350 \end{array}\right\} \text{pérdida 300 ps.}$$

Suma de productos. 23.250

$$23250 : 300 :: 12.000 : x = 154,84 \text{ pérdida del } 1^{\circ}$$
$$23250 : 300 :: 6.000 : x = 77,42 \text{ pérdida del } 2^{\circ}$$
$$23250 : 300 :: 5.250 : x = 67,74 \text{ pérdida del } 3^{\circ}$$

Suma de pérdidas igual á la total. . . . . 300,00 pesos.

He multiplicado los meses por los capitales, y estableciendo las proporciones : *suma de productos es á pérdida total, como el producto correspondiente á cada socio es á su pérdida*; hallé estas, cuya suma es igual á la total.

368.

Supongamos que del 1° de junio al fin de agosto tuvo un socio en cierta compañia 2000 pesos : que el 1° de setiembre introdujo 500 pesos, y que el 1° de noviembre retiró 200 pesos del fondo de la sociedad, se pregunta : ¿por cuánto deberá figurar en los productos que se formen para distribuir la ganancia, pérdida ó existencia de cualquier especie hasta fin de diciembre?

Examinando bien esta cuestion, veo que el tal socio tuvo en la compañía 2000 pesos por 3 meses; 2500 pesos por 2 meses y 2300 pesos por otros 2 meses. Debe pues tener la misma opcion que tres socios que hubieran puesto cada uno de estos capitales por el tiempo que permanecian sin alteracion, y formaré los productos siguientes :

2000 ps. × 3 ms. =	6.000
2500 ps. × 2 ms. =	5.000
2300 ps. × 2 ms. =	4.600
Representa para la distribucion por. . .	15.600

cuya suma será el número que servirá de tercer término de la proporcion que se forme para deducir su parte de ganancia ó pérdida.

Tales ó semejantes consideraciones deben guiarnos siempre que haya variaciones en el capital de algun socio.

LECCION XXVIII.

DE LAS REGLAS DE INTERÉS SIMPLE Y COMPUESTO.

369. *P.* Qué es interés en el comercio?

R. Es lo que se paga por el uso de un capital prestado.

370. *P.* Cómo se arregla comunmente al interés?

R. Estipulando que por cada cien pesos se ha de pagar al año cierta suma que se llama *tanto por ciento*.

371. *P*. Cuántas clases hay de interés?

R. Dos, el simple y el compuesto.

372. *P*. Qué es interés simple?

R. El que se cobra únicamente sobre el capital prestado.

373. *P*. Y compuesto?

R. Es el que se cobra no solo por el capital prestado, sino por el interés que va produciendo anualmente, el cual se considera tambien agregado al capital segun se vaya devengando.

374. *P*. Cómo se sabe lo que un capital produce al año dado el interés?

R. Multiplicando la cantidad por el interés estipulado y dividiendo por ciento.

375. *P*. Cómo se sabe lo que una cantidad produce en cierto número de dias dado el tanto por ciento de interés anual?

R. Se multiplica la cantidad por el interés y por los datos, y se parte por 36500.

376. *P*. Cómo se sabrá la cantidad que debe prestarse para que al año produzca cierto número de pesos á un interés determinado?

R. Diciendo: si tantos pesos de interés provienen de 100 pesos, el número de pesos que quiero que produzca, ¿de cuántos pesos vendrá? y resultarán los que debo prestar á interés.

377. *P*. Y cómo se sabrá el interés, conocido el capital y lo que produce al año?

R. Diciendo: si el capital propuesto produce al año tantos pesos, cada cien pesos ¿cuántos producirán? Y el resultado será el tanto por ciento de interés que gana el capital.

378. *P.* Cómo se resuelve la regla de interés compuesto?

R. Lo mejor es hacer con una cantidad de cien pesos todas las operaciones necesarias, es decir, añadirle el premio correspondiente al primer año, hallar el interés correspondiente á esta suma para el segundo año y agregarle tambien; luego, hallar el interés correspondiente á esta nueva suma y agregarle igualmente: por fin, si hay dias, hallar el interés correspondiente á la última suma y agregarle. Despues se dirá: si cien pesos han ascendido á la suma total hallada, el capital propuesto ¿á cuánto ascenderá? Con lo que encontrarémos el capital acrecido de los intereses y de los intereses de intereses que ha producido.

Explicaciones y Ejemplos.

369 á 373.

Por tres motivos se paga interés comunmente, á saber: por dinero tomado bajo esta condicion á individuos que hacen este negocio: por no haber podido pagar una suma al vencimiento del plazo; y por la posesion de fincas raices ú otra clase de bienes en los que está impuesto un capital á censo. En este último caso se hace responsable el poseedor de la satisfaccion del interés y de la conservacion de la finca ó bienes, y en los dos primeros á la satisfaccion del interés mientras use del capital, hasta su devolucion. Aunque el interés estipulado sea mensual, se convertirá en anual multiplicándole por doce, es decir: que si el interés es de medio por ciento mensual, será 6 por ciento anual: si uno por ciento mensual, ascenderá al 12 por ciento anual, y asi de los demás.

374.

Se desea saber lo que producirán al año 7520 pesos, prestados con condicion de pagar el 6 por 100 anual.

$$\begin{array}{lr} \text{capital. . .} & 7520 \text{ pesos} \\ & \times 6 \\ \hline \text{utilidad. .} & 451{,}20 \text{ pesos al año.} \end{array}$$

He multiplicado por 6 y separando dos cifras, que es partir por ciento, hallo que producen 451 ps. y 20 centésimos.

Esta regla está fundada en la proporcion siguiente: si 100 pesos producen tanto al año, la suma propuesta ¿cuánto producirá? De donde se deduce que para averiguarlo, se ha de multiplicar el capital por el interés y dividir por 100.

375.

¿Cuánto producirán 1200 pesos que se han debido pagar el 1° de marzo y no se entregaron hasta el 15 de noviembre, siendo el interés de 5 por ciento al año?

Para resolver esta cuestion es necesario hacer la cuenta de los dias, y despues ejecutar la regla en la forma siguiente:

Del 1° de Marzo		1200 ps. capital
al 31 van. .	31 dias	× 5 interés
Abril tiene. . .	30	6000
Mayo.	31	× 260 dias
Junio.	30	36000
Julio.	31	12000
Agosto.	31	
Setiembre. . .	30	1560.0(00 | 365(00
Octubre. . . .	31	1460 | 42,73 pesos
Hasta el 15 de		01000
Noviembre. .	15	730
Total. . .	260 dias	02700
		2555
		1450

Viendo que el capital ha ganado interés por 260 dias, le multipliqué por el interés 5 y por los dias, y dividí por 36500, resultando 42 ps. y 73 centésimos de interés pagable por la demora.

Este procedimiento está fundado en la resolucion de una regla de tres compuesta que diga: si 100 pesos, en 365 dias, ganan tanto; el capital dado, en tantos dias, ¿cuánto producirá? de la que resulta que para resolverla, es necesario multiplicarle por el interés y por los dias y dividir por 365 × 100, que es 36500.

376.

¿Qué capital deberé poner á interés para que á razon de 5 por ciento produzca 450 ps. al año?

Para resolver esta cuestion estableceré la proporcion siguiente:

$$5 : 100 :: 450 : x = \frac{450 \times 100}{5} = 9000$$

La razon de esta regla es tan clara, que no necesita explicacion.

377.

En un negocio en que se han invertido 7000 pesos se han ganado 560 ps. en un año: ¿cuánto por ciento ha producido este capital?

Debe deducirse de la proporcion siguiente:

$$7000 : 560 :: 100 : x = \frac{560 \times 100}{7000} = 8$$

que resuelta, nos dice que el capital invertido ha ganado 8 por ciento en el año á que se refiere la cuestion.

378.

Se desea saber cuánto ha producido en tres años un capital de 500 pesos prestados al 5 por ciento de interés compuesto.

Para la resolucion de este problema he calculado lo que 100 pesos llegarán á ser en los tres años acumulando los intereses de este modo :

100 ps.	105
5 interés del 1er año	5,25
105 al fin del 1er año.	110,25 fin del 2º año
5	5
5,25 interés del 2º año	5,5125 int. para el 3º

Habria al fin del 2º año. 110,25
interés en 3º. 5,51

Asciende el capital é intereses á 115,76 ps.

Hecho esto, formé la siguiente proporcion :

$$100 : 115{,}76 :: 500 : x = 578{,}80 \text{ ps.}$$

Si 100 pesos han llegado á ser 115,76, el capital propuesto ¿á cuánto ascenderá? Y el resultado 578,80 pesos será lo que se pedia.

LECCION XXIX.

REGLAS DE PREMIOS Y DESCUENTOS.

379. *P*. Qué se entiende por premio en el comercio?
R. El exceso que se concede sobre el valor de alguna clase de moneda ó letra de cambio que la represente, y

tambien el abono que se hace al que entrega cualquiera suma antes del tiempo en que debiera verificarlo.

380. *P.* Cómo se distinguen estas dos clases de premios?

R. El primero se llama premio de la moneda, y el segundo premio de adelanto.

381. *P.* Cómo se arregla el premio de la moneda?

R. Estableciendo el aumento que se concede por cada cien unidades de la clase de moneda que le tiene.

382. *P.* Cómo se arregla el premio de adelanto?

R. Estableciendo un tanto por ciento por cada mes ó año de anticipacion.

383. *P.* Cómo se resuelven las cuestiones sobre premios de la moneda?

R. Multiplicando la cantidad de la moneda que le tiene por el premio, dividiendo por ciento, y el cuociente será el premio correspondiente á dicha suma.

384. *P.* Cómo se resuelven las cuestiones sobre premios de adelanto?

R. Antes de todo se verá el número de los dias que faltan para que se cumpla el plazo de la entrega, y suponiendo conocido el tanto por ciento que se concede al año, se multiplicará la suma adelantada por los dias y por el tanto por ciento, y se dividirá por 36500 : el cuociente será el premio que se solicita.

385. *P.* Qué se entiende por descuento?

R. El demérito que tienen ciertas monedas, documentos de deuda pública, ó pagarés no cumplidos.

386. *P.* Cómo se arreglan los descuentos sobre dinero?

R. A un tanto de menos por cada cien unidades de la moneda que le tiene.

387. *P.* Cómo se arreglan los descuentos en los documentos de deuda pública?

R. Unas veces se expresa el valor absoluto que se supone á cada cien pesos de los que representa el documento, y otras lo que se ha de dar de menos en cada cien unidades.

388. *P.* Y respecto á los pagarés no cumplidos?

R. El descuento de estos se hace calculando el premio que es de abonarse en virtud de la anticipacion segun el tanto por ciento que se establece entre el vendedor y comprador del pagaré.

389. *P.* Cómo se resuelven las cuestiones de descuentos sobre moneda?

R. Diciendo : si en cada 100 se descuentan tantos, en la suma propuesta ¿cuántos? y el resultado será lo que deba descontarse; ó bien : si cada 100 quedan reducidos á tantos, la cantidad propuesta ¿á cuántos? y el resultado dará la cantidad descontada.

390. *P.* Cómo se conocerá el valor de un documento de deuda pública que tiene descuento?

R. Diciendo : si en cada cien unidades se han de descontar tantos, en las que representa el documento ¿cuánto? y resultará lo que debe rebajarse á su valor nominal; ó bien : si cada cien unidades, quedan reducidas á tantas, el valor nominal del documento ¿á cuánto quedará reducido? y resultará su valor real.

391. *P.* Y cómo se sabrá lo que ha de darse por un pagaré no cumplido?

R. Establecido el premio que el comprador quiere se le abone por cada cien pesos en un año, se averiguará el tanto por ciento correspondiente á los dias que faltan para el vencimiento del pagaré, y conocido esto, harémos la siguiente proporcion : si por cada ciento y tantos cobraderos al cumplimiento del plazo solo se dan hoy ciento, por la suma á que asciende el pagaré ¿cuánto debe abonarse? y el resultado será lo que vale el pagaré descontado.

Explicaciones y Ejemplos.

379 á 382.

Entre nosotros tiene por lo regular la moneda de oro y los pesos españoles y mejicanos un premio sobre la demás moneda corriente; y se dice que los *doblones y plata fuerte* están al 6 ú 8 por 100, cuando por cada cien pesos en aquellas monedas se dan 106 ó 108 de la demás corriente en el pais.

Por *letra de cambio* se entiende una órden por la cual se entrega al que la presenta, cierta suma, que antes ha sido satisfecha por el comprador de la letra, y esto tiene lugar cuando se quieren pasar fondos de uno á otro país. El que da la letra y recibe su valor se llama *girador*; el que la compra, *comprador*; el que la presenta en el lugar donde ha de cobrarse, *tenedor*, y el que la acepta y satisface, *pagador*. Tanto por la diferencia de la moneda, como por la seguridad ó poco riesgo que hay en hacer remesas de este modo, se paga al vendedor un premio sobre el valor de la letra, y este premio se estipula al tanto por ciento.

El premio de adelanto por pagos de plazo no cumplido, no es en realidad otra cosa que el interés que debe ganar la suma avanzada por los dias que está en manos del que no debiera poseerla hasta el vencimiento del pagaré.

383.

Suponiendo que los pesos fuertes estén al 12 por ciento, ¿cuánto valdrán 749 pesos de dicha moneda?

$$\begin{array}{r} 749 \\ \times\ 12 \\ \hline 1498 \\ 749 \\ \hline 89{,}88 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 749 \\ +\ 89{,}88 \\ \hline 838{,}88 \end{array}$$

He multiplicado por 12 y partido por 100, resultando de premio 89,88, que agregados á los 749, hacen 838,88 pesos, moneda corriente equivalente á los pesos fuertes de la cuestion.

384.

Debiendo pagarse una suma de 756 pesos el dia 15 de junio, se ha satisfecho el 20 de abril: ¿qué premio deberá abonar el que la recibe por el adelanto de 56 dias que faltan para el cumplimiento del plazo, estipulando un 12 por ciento anual?

756	9072
× 12 prem. an.	56 dias
1512	54432
756	45360
9072	508032

50803'2'	36500
36500	13,91 prem. de adelanto.
143032	
109500	
0335320	
328500	
0068200	

Habiendo ejecutado la regla segun expresa la pregunta á que este ejemplo se refiere, hallo que el que recibe debe abonar al pagador 13, 91 pesos.

Esto se halla fundado en los principios establecidos en la pregunta y explicacion 375.

385 á 388.

El descuento que sufren ciertas monedas es el resultado de su mala calidad ó la circunstancia de no poder ser empleadas sino en ciertos lugares por no ser corrientes ó admisibles en otros. Así sucede con la moneda cortada ó macuquina. Los documentos de deuda pública suben ó bajan de valor segun el estado del crédito nacional, y los pagarés no cumplidos se venden con descuento, cuando el tenedor de ellos necesita fondos antes de ser cobraderos ó estar vencidos los plazos. Al negocio que se hace sobre los fondos públicos llamamos agiotaje, cambio al que se hace sobre moneda, y se dice descontar pagarés al hecho de negociarlos antes de su cumplimiento.

389.

Deseando un individuo deshacerse de 459 pesos que tiene en moneda macuquina ó cortada y reducirla á pesos fuertes, halla quien se los compre con un descuento de 9 por ciento, ¿á cuántos pesos quedará reducida aquella suma?

Si quiero saber el descuento, lo haré así :

$$100 : 9 :: 459 : x = \frac{459 \times 9}{100} = 41{,}31 \text{ ps.}$$

es decir, que en moneda fuerte le han de entregar 41,31 pesos de menos.

Pero si deseo saber de una vez á cuántos pesos fuertes quedará reducida la suma en macuquino, diré :

$$100 : 91 :: 459 : x = \frac{459 \times 91}{100} = 417{,}69 \text{ ps.}$$

es decir que recibirá 417,69 en pesos fuertes.

390.

Suponiendo que los vales del gobierno estén al 90 por ciento, ó lo que es lo mismo, que tengan de demérito ó descuento un 10 por ciento, se desea reducir á moneda corriente un documento cuyo valor nominal es de 812 pesos.

Podré decir de este modo

$$100 : 10 :: 812 : x = 81{,}20 \text{ ps.}$$

y resultará lo que dicho documento vale de menos :

O bien si se desea su valor

$$100 : 90 :: 812 : x = 730{,}80 \text{ ps.}$$

que es lo que valdrá reducido á moneda corriente.

391.

Un pagaré de 943 pesos que cumplirá el 30 de abril, se vende el 1º de marzo descontando el 2 por ciento mensual que equivale al 24 por ciento anual.

Para resolver esta cuestion observo lo primero, que faltan para el cumplimiento del plazo 60 dias, y para saber qué tanto por ciento corresponderá á esta parte del año, haré la proporcion siguiente :

$$365 : 24 :: 60 : x = \frac{24 \times 60}{365} = 3{,}94$$

si en 365 dias se conceden 24 por ciento, en 60 dias ¿cuánto? y resultan 3,94 por ciento.

Ahora, para saber lo que debe darse por el pagaré, diré así:

$$103{,}94 : 100 :: 943 : x = 907{,}35 \text{ ps.}$$

Si para obtener 103,94 en 60 dias se necesitan 100, para recibir 943 ¿cuántos se deben desembolsar hoy? y resultan 907,35 pesos valor del pagaré descontado.

Lo expuesto es suficiente para venir en conocimiento de lo que debe practicarse en otros varios casos semejantes que suelen ocurrir en el comercio.

LECCION XXX.

DE LAS REGLAS DE ALIGACION Y DE PROMEDIOS.

392. *P.* Qué es regla de aligacion?

R. La que enseña á averiguar la cantidad que se ha de tomar de varios géneros semejantes, pero de diferentes calidades ó precios, para formar una mezcla que tenga cierta calidad ó precio determinado.

393. *P.* En qué se divide la regla de aligacion?

R. En simple y compuesta.

394. *P.* Qué es regla de aligacion simple?

R. La que se ejecuta cuando hay solo dos cantidades que mezclar.

395. *P.* Qué es regla de aligacion compuesta?

R. Cuando son mas de dos las cantidades que han de entrar en la mezcla.

396. *P.* Cómo se resuelve la regla de aligacion simple?

R. Se escriben el uno debajo del otro y algo separados los dos números que representan los precios ó calidades de los efectos que se van á mezclar; y el precio ó calidad buscado, al cual llamarémos medio, se pondrá entre los otros y algo mas á la derecha: luego se escribirá frente de cada calidad ó precio la diferencia que haya entre el otro y el medio, y estos números así hallados manifestarán las cantidades que se han de tomar de la calidad ó precio frente al cual se hallan escritas.

397. *P.* Cómo se resuelve la regla de aligacion compuesta?

R. Escribiendo los precios ó calidades de los efectos que se han de mezclar, de dos en dos; y si son nones repetiré uno de ellos, cuidando que en cada combinacion sea un precio mayor y otro menor que el medio, el cual se pondrá entre ellos para formar tantas aligaciones simples como combinaciones hayan resultado: se restarán en cruz los precios extremos del medio, escribiendo cada residuo frente del otro extremo, y los números así hallados manifestarán lo que se ha de tomar de cada clase.

398. *P.* Suponiendo ya conocida la proporcion de la mezcla, cómo se compondrá una cantidad determinada?

R. Escribiendo en columna los precios ó cantidades, y á su derecha los números que expresan la cantidad que debe tomarse de cada uno: se suman estos números, y luego se dirá: la suma de los números hallados es á la cantidad pedida, como cada uno de ellos á lo que debe tomarse del precio ó calidad frente al cual estuviere.

399. *P*. Qué es regla de promedio?

R. La que sirve para averiguar el valor que se ha de dar á cada unidad de una mezcla de géneros que antes tenian diferentes precios.

400. *P*. Cómo se halla el precio medio de una mezcla de géneros que antes lo tenian diferente.

R. Se multiplica cada cantidad de las mezcladas por el precio que antes tenia : se suman estos productos : la suma se divide entre el número total de unidades mezcladas, y el cuociente será el precio medio de la mezcla.

Explicaciones y Ejemplos.

392 á 395.

Las reglas de aligacion son de mucho uso en el comercio, cuando el precio corriente en el país es diferente del precio de los efectos que tiene el comerciante, y los efectos son tales que puedan mezclarse sin dificultad, y tambien para formar surtidos de géneros de diversas calidades que se quieran proporcionar á un precio dado.

396.

Tiene un negociante añil de dos clases, á saber, de 11 reales y de 14 reales libra, y desea saber en qué proporcion podrá mezclarlos para que resulte á 12 reales.

Lo resolveré del modo siguiente :

11 reales		2 dif. entre el mayor y el medio
	12	
14		1 dif. entre el med. y el menor.

Ejecutada la operacion segun las reglas, hallo que siempre que desee obtener añil á 12 reales, por cada 2 libras, arrobas, etc. del de á 11 reales, tomaré 1 libra, arroba, etc. del de á 14, y así en proporcion.

397.

Hay aguardiente de 20 grados, de 15 grados y de 36 grados, y se desea componer aguardiente de 24 grados, ¿en qué proporcion deberá mezclarse?

36 gr.		9	36 gr.		4
	24			24	
15		12	20		12

He elegido para la primera aligacion los grados 36 y 15, y para la segunda al mismo 36 y 20, y efectuadas las operaciones, hallo que para componer aguardiente de 24 grados he de tomar cántaras, frascos ó botellas en las siguientes proporciones : $9 + 4 = 13$ del de á 36 grados, 12 del de á 20 grados y 12 del de á 15 grados.

398.

Pregunta un labrador que tiene maiz de á 9 reales fanega, y otro de á 12 reales, cuántas fanegas ha de tomar de cada clase para formar una mezcla de 50 fanegas que valgan á 10 reales.

Esta cuestion tiene dos partes : la primera es averiguar la proporcion de la mezcla, lo que ejecutaré así :

9 rs.		2 proporcion de á 9 rs.
	10	
12		1 proporcion de 12 rs.

Lo segundo, averiguar las que se han de tomar de cada precio para componer las 50 fanegas, lo que haré del modo siguiente :

precios, núm. proporc.

9 rs. . . .	2	$3 : 2 :: 50 : x =$	33 fan. 4 alm.
12 rs. . . .	1	$3 : 1 :: 50 : x =$	16 8
	3	que hacen	50 fanegas.

He dicho : si para componer 3 fanegas se toman dos del de á 9 reales, para componer 50, ¿cuántas? Y resultó 33 fanegas, 4 almudes.

Luego dije : si para componer 3 se toma 1 del de á 9 rs., para componer las 50, ¿cuántas? Y resultarán 16 fanegas y 8 almudes.

La prueba de esta operacion será examinar si las cantidades mezcladas, vendidas á los precios que antes tenian, dan el mismo resultado que la mezcla total al precio que se le ha asignado; con efecto :

33 fan. 4 alm.	á 9 rs. =	300 rs.
16 8	á 12 rs. =	200 rs.
50 fan.	á 10 rs. =	500 rs.

399 y 400.

Para explicar esta regla nos propondrémos el siguiente ejemplo:

A un comerciante se le han podrido los sacos que contenian varias partidas de café de diferentes clases, en términos que todo aparece mezclado; y no pudiendo clasificarlo de nuevo, se ha vuelto á poner en otros sacos; pero sabiéndose que habia antes de mezclarlos, 15 quintales de café de á 10 pesos, 20 quintales de 11 pesos y 12 quintales de á 9 pesos, se desea saber el valor de cada quintal así mezclados.

Lo ejecutaré segun la regla, de este modo:

$$\begin{array}{llrl}
15 \text{ qq.} & \text{á } 10 \text{ ps.} = & 150 & \text{ps.} \\
20 & \text{á } 11 \text{ ps.} = & 220 & \\
\underline{12} & \text{á } \ \ 9 \text{ ps.} = & \underline{108} & \\
47 \text{ qq.} & \qquad\quad = & 478 & \left\{ \begin{array}{l} \underline{47 \text{ qq.}} \\ 10{,}17 \text{ ps.} \end{array} \right. \\
 & & 0080 & \\
 & & \underline{47} & \\
 & & 330 &
\end{array}$$

Y repartiendo el total valor de 478 pesos entre 47 quintales que hay mezclados, se encontrará que el precio de cada quintal de café en su estado actual es de 10,17 pesos.

Lo expuesto hasta aquí basta para el objeto que nos propusimos al formar este tratado, y no hay duda que si se estudia con aprovechamiento, pocos ó ningunos casos se presentarán en la vida civil que no puedan resolverse por medio de las reglas en él establecidas.

FIN.

INDICE

PARIS. — IMPRENTA DE WALDER, CALLE BONAPARTE, 44.

MANUAL
DE
ARITMETICA.